Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

TEORIA DE JOCS: ÍNDEXS DE PODER I APLICACIÓ EN ALIANCES POST-ELECTORALS

Autor: Ignasi Verneda i Esteve

Director: Dr. Mikel Álvarez-Mozos
Realitzat a: Departament de Matemàtica Econòmica, Financera i Actuarial

Barcelona, 13 de juny de 2023

Abstract

The main objective of this work is to study in-depth the concepts of power indices in weighted majority games. In particular, to apply this study and understanding of the power dynamics established in partisan political representation chambers.

The theoretical part focuses on the mathematical preliminary concepts needed to understand weighted majority games. It starts with a general overview of game theory, then narrows down to transferable utility games, followed by simple games, and finally reaching majority games. The relevant mathematical definitions are provided for understanding the concepts.

The practical part consists of developing computer software to automate the calculation of the two main power indices in weighted majority games. In particular, it is used to analyze the electoral results in the elections to the Parliament of Catalonia.

Resum

L'objectiu principal d'aquest treball és estudiar en profunditat els conceptes dels índexs de poder en els jocs de majoria ponderada. En particular, aplicar aquest estudi i la comprensió de les dinàmiques de poder que s'estableixen en càmbres de representació política partidistes.

La part teòrica, es centra en els conceptes matemàtics previs per entendre els jocs de majoria ponderada. Es comença des d'una visita general a la teoria de jocs, per després anar acotant als jocs d'utilitat transferible, posteriorment els jocs simples, i finalment arribant als jocs de majoria. Es fan les definicions matemàtiques pertinents per la comprensió dels conceptes.

La part pràctica, consisteix en la realització d'un programari informàtic per automatitzar el càlcul dels dos principals índexs de poder en jocs de majoria ponderada. En particular es fa servir per a analitzar els resultats electorals en les eleccions al Parlament de Catalunya.

2020 Mathematics Subject Classification. 91B12, 91F10, 91A80.

Agraïments

Faig servir aquest apartat d'agraïments, entenent el Treball com el final del grau, com un espai on donar les gràcies no només a aquells que m'han ajudat durant la realització d'aquest sinó també a aquells que m'han fet costat durant aquesta carrera de fons que ha estat el Grau en Matemàtiques i el creixement personal que he experimentat (per factors no necessàriament acadèmics) durant aquesta etapa.

En primer lloc m'agradaria dedicar un espai privilegiat a l'atenció i el suport realitzat pel meu tutor del Treball Final de Grau, el doctor Mikel Álvarez-Mozos. També, de forma general vull donar les gràcies als diferents professors que m'han instruït i m'han fet crèixer personal i intelectualment. Han estat un gran motor de transformació personal i, sense ells, no hauria arribat fins aquí.

Vull fer especial menció també a la meva família, que m'ha fet costat i suport en tot moment. Han estat l'entorn més proper i aquells que m'han fet ser qui sóc. Sense ells no seria aquí ja que simplement no seria la mateixa persona que sóc. En especial volia agraïr, des d'on ho puguin rebre, al meu avi Mario i la meva àvia Maria Gloria per construir-me com a persona. També espcialment als meus pares, que m'han ajudat incondicionalment.

Per últim, vull agraïr els meus amics. Especialment, i de forma gairebé explícita, aquells pocs que han viscut amb mi totes les transformacions d'aquests últims quatre anys, que m'han acompanyat i les han conviscudes. I també, no menys importants, aquelles persones que no formen avui en dia part de la meva vida però m'han fet directa o indirectament canviar fins a ser qui sóc.

A tots ells, moltes gràcies.

Índex

1 Introducció

La teoria de jocs és una branca de les matemàtiques que modelitza la relació entre agents racionals. Ens ajuda a comprendre i modelitzar situacions en les que agents prenedors de decisions intervenen. Un joc comú, és a dir qualsevol activitat competitiva entre diferents individus, està contingut dins el conjunt de situacions que la teoria de jocs pot analitzar. No obstant, les situacions analitzables són moltes més, i de fet, una gran part de la literatura sobre la teoria de jocs es basa en aquestes.

Els jocs han estat molt sovint modelitzats en matemàtiques. Molts erudits de les matemàtiques han estat aficionats al joc i han tractat d'escombrar cap a casa (bé per interès purament teòric o bé per millorar les seves tècniques) i racionalitzar-los. Per exemple, ja a meitats del segle XVI, Cardano va escriure el *Liber de ludo aleae* on va desenvolupar algunes de les primeres idees bàsiques sobre el camp. Més enedvant, altres estudiosos van avançar en el desenvolupament. Sense anar més lluny, Pascal i Huygens van formular poc després, l'any 1653, el concepte d'esparança maemàtica tot raonant sobre les esctructures dels jocs d'atzar. Si bé és cert que no podem referir-nos encara fins al segle XX a la teoria de jocs, sí que podem considerar aquests avenços i primers apropaments com els precursors de la disciplina de la teoria de jocs. En aquest sentit, a principis del segle XVIII, s'atribueix a una carta de Waldegrave una estratègia minmax que servia com a solució a un joc de cartes de dos jugadors, problema conegut avui com a Waldegrave. Això va dur, un segle més endevant, a que Cournot presentés en el seu llibre *Recherches sur les principes mathèmatiques de la thèorie des richesses* una situació d'equilibri en la qual cap jugador pot millorar el seu resultat individualment.

El naixement de la teoria de jocs, com a tal, es pot datar de 1928. Quan John von Neumann va publicar el paper *On the Theory of Games of Strategy.* Von Neumann va fer servir el teorema del punt fix de Brower sobre aplicacions continues en conjunts convexos compactes. Aquest article va portar al llibre (escrit per von Neumann i Oskar Morgenstern) *Theory of Games and Economic Behavior.* A partir d'aquesta publicació, junt amb la teoria axiomatica de la utilitat que apareix en la seva segona edició, es consideren sentades les bases lògiques i matemàtiques de la teoria de jocs.

Els àmbits d'aplicació de la teoria de jocs són molt extensos i transversals. És utilitzada en biologia, psicologia, economia, estratègia militar en conflictes bèl·lics, i força més. Els mètodes clàssics de la teoria de jocs tracten jocs de suma-zero de dos agents, és a dir de dos jugadors que prenen decisions. Serà tractat més endevant, però els jocs de suma-zero es refereixen a totes aquelles situacions en les que els guanys o pèrdues d'un agent estan exactament compensades pels guanys o pèrdues de la resta d'agents (l'altre únic agent en el cas de dos jugadors). Per tant aquests jos descriuen situacions purament competitives.

En conclusió, la teoria de jocs és una disciplina matemàtica i social que estudia els comportaments estratègics en situacions d'interacció entre agents racionals. Mitjançant l'anàlisi de jocs, és possible comprendre i predir els resultats de les decisions preses pels jugadors en diverses situacions. Una conclusió important de la teoria de jocs és que les decisions individuals poden afectar el resultat col·lectiu. Els jugadors han de tenir en compte les estratègies dels altres participants i considerar com les seves pròpies eleccions poden influir en els resultats finals.

La teoria de jocs també ha demostrat la importància de la cooperació i la coordinació entre els jugadors per aconseguir resultats òptims. En molts casos, la col·laboració pot portar a solucions més beneficioses per a tots els jugadors en comptes de buscar únicament el seu propi interès. Precisament un exemple molt comú per introduir de forma pràctica la teoria de jocs és el dilema del presoner, que exposarem tot seguit.

En resum, la teoria de jocs és una eina valuosa per comprendre els processos de presa de decisions en situacions de conflicte i cooperació. Les seves aplicacions són àmplies i ofereixen eines per analitzar, predir i optimitzar resultats en diverses àrees de la vida quotidiana i professional.

El dilema del presoner és una situació hipotètica presentada com un exemple de l'aplicació de la teoria de jocs. És un cas d'un joc on intervenen dos agents prenedors de decisions.

Es presenta el cas en el que dos individus han estat arrestats per la policia per haver comès un delicte penal conjuntament. Entre ells no poden tenir comunicació i la policia els exposa el següent: No hi ha proves suficients per enculpar-los íntegrament pel delicte comès. Per tant, si cap dels dos confessa, seran condemnats a dos anys de presó. Ara bé, en cas de no confessar el delicte, si l'altre agent sí el confessa, l'encobridor serà condemnat a deu anys de presó. Per contra, si es dona la mateixa situació a l'inrevés, és a dir, el primer confessa mentre el segon no ho fa, el delator no complirà pena de presó per col·laborar amb la justícia. Per últim, en cas de ser tots dos delators, es condemnarà a cadascun d'ells a complir cinc anys de presó.

Aquest dilema, a més de diferents apropaments matemàtics de la teoria de jocs, també té molts altres enfocaments com, per exemple el psicològic, en un pla més d'implicació emocional, per exemple. Com l'enfocament que més ens interessa, per ara, és el matemàtic, el presentarem com un problema purament d'aquesta àrea.

Exemple 1.1. Suposem dos agents diferents, anomenats A i B. Cada un d'ells té dues opcions, que direm S i C, que haurà d'escollir sense interectuar amb l'altre. En cas d'escollir tots dos l'opció S, rebrà cadascun d'ells una utilitat de -2. En cas d'escollir tots dos l'opció C, rebrà cadascun d'ells una utilitat de -5. Finalment, en cas d'escollir tots dos opcions diferents, l'agent que ha escollit S rep una utilitat de -10 mentre que el que ha escollit C rep una utilitat de 0. L'objectiu dels agents és maximitzar la utilitat, en aquest cas doncs que sigui el mínim de negativa possible.

		Jugador B	
		Estratègia S	Estratègia C
Jugador A	Estratègia S	(-2, -2)	(-10, 0)
	Estratègia C	(0, -10)	(-5, -5)

Taula 1: Utilitats individuals segons estratègia, dilema del presoner.

Aquesta taula representa els parells ordenats d'utilitat dels jugadors A i B, respectivament, en funció de quina opció escullin. Quina seria la millor estratègia a seguir doncs? D'una banda, a nivell grupal, el que més convè és maximitzar la utilitat conjunta de tots dos jugadors. L'estratègia (S, S) té una utilitat conjunta de -4. Tota la resta d'opcions tenen una utilitat conjunta de -10. Així doncs, vist des d'aquest prisma el que surt més a compte és escollir tots dos l'opció S.

Un cop explicat el millor resultat des d'un punt de vista conjunts, ara farem un apropament a el punt de vista individual, és a dir, suposem que els agents només volen maximitzar la seva propia utilitat. Tenint en compte que els agents no poden comunicar-se ni coordinar-se a l'hora de la presa de decisions, és també útil tenir un jugador fixat i posar la lupa en les decisions que pot prendre l'altre. Fixem la decisió del jugador B i ens centrem en les opcions que té aleshores el jugador A per maximitzar la utilitat que obtindrà.

D'una banda, en cas que el jugador B hagi optat per l'estratègia C, aleshores el jugador A té la opció de prendre la estratègia S, que li reportarà una utilitat de -10, o bé prendre la estratègia C, que aquesta li reportarà una utilitat de -5. Per tant, la utilitat compartida és la mateixa en qualsevol de les dues opcions i la individual és considerablement superior amb la opció C. Per contra, si assumim que el jugador B ha optat per l'estratègia S, al jugador A li convè igualment optar per la C. Doncs si opta per la S tindrà una utilitat de -2, inferior a 0, que és la que obtindria si opta per la C.

Així doncs, tot i que el perfil d'estratègies més beneficiós pel grup fos (S, S), si tenim en compte que no hi ha interacció i, per tant els dos agents han d'assumir fixada l'estratègia de l'altre, acabem arribant a que s'empara (C, C). Remarquem que faci el que faci l'altre jugador, sempre és millor, en qualsevol dels casos, de forma individual, d'optar per la estratègia C.

Aquí ens trobem amb una paradoxa que ens serveix per il·lustrar les contradiccions i la complexitat de la teoria de jocs. El que, a priori, sembla un innocent i senzill repte, dona pas a diferents estratègies de solució que son contradictòries entre elles. El dilema del presoner pot servir, amb lleugeres o més profundes variacions, per modelitzar diferents situacions de la vida real, en relacions humanes, economia, i altres. De fet, l'etiqueta del dilema del presoner, es fa servir sovint per referir-se a situacions en les que dues entitats poden treure un benefici en cooperar però també es poden aprofitar de la cooperació de la resta per treure uns beneficis majors no coperant. És a dir, per contraposar els incentius individuals contra uns menors beneficis però repartits a nivell social.

1.1 Equilibri de Nash

Amb aquest últim exemple es pot arribar a un dels conceptes més importants de la teoria de jocs, el de l'equilibri. Un equilibri de Nash és un perfil d'estratègies que els jugadors escullen, amb la particularitat de que cap jugador treu benefici de canviar la seva estratègia. Dit d'altre mode, això significa que, si cap dels jugadors (en un equilibri de Nash) sabès l'estratègia dels seus oponents, no tindria incentius per a canviar d'estratègia donat el que fan la resta de jugadors.

Els equilibris de Nash, doncs, són molt útils per examinar el resultat de jocs i escenaris competitius, com per exemple en situació de guerra. De mode similar, tot sovint es fan servir per analitzar factors econòmics, per exemple subhastes, evolucions en borsa i tipus de canvi. També es fan servir per assegurar la cooperació a través de l'interès propi, tot creant recompenses relatives de les estratègies de tal mode que cada jugador esculli de forma independent l'acció desitjada.

Exemple 1.2. L'equilibri de Nash en els jocs no sempre porta a una solució òptima en aquests. Per exemple, justament en el dilema del presoner, hem vist que la solució òptima seria que tots dos guardin silenci. Ara bé, per trobar l'equilibri de Nash d'aquest joc, podem seguir el següent raonament: partim que tots dos jugadors segueixen l'estratègia S. Si l'agent B canvia a l'estratègia C, aleshores obtindrà una utilitat major de 0 en comptes de -2. Això significa que si el jugador B segueix amb S, rebrà una utilitat inferior de -10 en comptes de -2. Així doncs, (S, S) no és un equilibri de Nash (malgrat sí sigui la solució òptima). Suposem ara que tots dos jugadors fan servir l'estratègia C. Si el jugador A canvia a S, aleshores rebrà una utilitat inferior de -10 en comptes de -5. El mateix passa amb el jugador B. Com, en aquest cas, cap dels dos pot millorar la utilitat rebuda canviant d'estratègia, concluim que l'equilibri de Nash en aquesta situació és (C, C).

Sigui $N := \{1, 2, ..., n\}$ el conjunt de jugadors. Sigui S_i el conjunt d'estratègies pel jugador i. Sigui $S = S_1 \cdot S_2 \cdot ... \cdot S_n$ el conjunt producte dels perfils d'estratègia dels n jugadors. Per tant, els elements de S són totes les combinacions possibles d'estratègies individuals. Sigui $f_i(s)$ la utilitat per l'i-èssim jugador quan s'evalua l'estratègia collectiva $s \in S$ (cal tenir en compte que la utilitat obtinguda per un jugador a partir d'una estratègia depèn, en general, també de les estratègies esollides per la resta).

Definició 1.3. *Una estratègia mixta individual és una distribució de probabilitat dins el conjunt d'estratègies disponibles. Una estratègia pura és una que no implica atzar ni aleatorietat, sinó que escull una estratègia particular amb probabilitat 1.*

Els mètodes que s'utilitzen per calcular estratègies mixtes són també útils per a estratègies pures, al tractar-se aquestes d'un cas particular.

Definició 1.4. *Un equilibri de Nash és un perfil d'estratègia $s = (s_1, s_2, ..., s_n)$ que té la propietat de que $f_i(s) \geq f_i((s_1, s_2, ..., \tilde{s}_i, ..., s_n))$ per a tot i, amb $\tilde{s}_i \in S_i$ denotant una estratègia diferent a s_i disponible pel jugador i.*

Si la desigualtat anterior és esctricte s'anomena equilibri de Nash estricte. En cas contrari s'anomena equilibri de Nash feble.

Exemple 1.5. Un altre exemple més simple per entendre l'equilibri de Nash és el joc de la coordinació. En aquest joc, també de dos jugadors, es beneficien clarament de la cooperació, però també entren en joc les preferències individuals. En aquest cas es suposen dues opcions que poden prendre cada un dels dos jugadors, siguin A i B aquestes opcions. Suposem que el jugador 1 té més preferència cap a la opció A, mentre que el jugador 2 té més preferència cap a la opció B. No obstant, cap dels dos jugadors té cap aversió per l'altra opció. L'única condició que hi ha és que tots dos han de coincidir en la opció a escollir.

Per tant queda així. En el cas de que tots dos escullin la mateixa estratègia, es rebrà una utilitat de 2 pel jugador que en té preferència, mentre que l'altre rebrà una utilitat de 1. En cas que no coincideixin en elecció de opcions, tots dos jugadors reben una utilitat nul·la. Així doncs, la taula d'utilitats quedaria com segueix:

		Jugador 2	
		Estratègia A	Estratègia B
Jugador 1	Estratègia A	(2, 1)	(0, 0)
	Estratègia B	(0, 0)	(1, 2)

Taula 2: Utilitats individuals segons estratègia, joc de la coordinació.

Aquest exemple un tant abstracte, es podria il·lustrar en situacions de la vida quotidiana com, per exemple, una elecció de trobada amb un amic. Suposem que l'agent 1, direm Maria, té ganes d'anar al teatre (el que representa la opció A). Ens trobem que l'agent 2, a qui direm Marcel, prefereix anar al cinema (que seria la opció B). No obstant, a tots dos els està bé el pla que proposa l'altre, tot i que prefereixen el seu. En cas que no es posin d'acord, evidentment, cap dels dos plans es durà a terme. En aquest cas, està clar que, suposant que estan d'acord, cap dels dos té incentius individuals per fer l'altre pla (ja que es trobarà sol i no el podrà fer). Per contra, si no estan d'acord, sí que hi ha incentius per cedir a la opció que l'altre escull, per obtenir una utilitat superior (és a dir, finalment trobar-se en comptes de no fer res). En altres paraules, en aquest joc també trobem equilibri de Nash, ja que en les situacions (A,A) i (B,B) es dona la situació que cap dels dos agents obtindrà una utilitat superior a l'hora de canviar opcions. Queden descartades les opcions creuades (A,B) i (B,A), doncs aquí sí que hi ha un increment d'utilitat amb un canvi d'opcions. En definitiva, hem vist que en aquest cas (A,A) i (B,B) són equilibris de Nash.

Hem vist, doncs, jocs amb un equilibri de Nash amb l'exemple clàssic del dilema del prsoner. Però també hem vist que hi pot haver jocs amb més d'un equilibri de Nash, com l'exemple que acabem de descriure. Això ens fa obrir el dubte de quants equilibris hi pot haver en un joc. Doncs bé, un resultat important, conegut pel nom de Teorema de Nash, és el següent:

Teorema 1.6. *Tot joc amb un conjunt finit de jugadors i amb un nombre finit d'estratègies té un equilibri de Nash en estratègies mixtes.*

Aquest resultat és molt útil, ja que ens assegura que en tota situació amb les característiques descrites, podrem trobar almenys un equilibri. Per aquest resultat, entre d'altres, Nash va rebre el premi Nobel.

2 Jocs cooperatius

Dins la teoria de jocs, es diferencia entre els jocs cooperatius i els no-cooperatius. L'exemple del dilema del presoner pot ser tant d'una classe com de l'altra, segons quin prisma s'adopti per a la seva anàlisi. Els jocs cooperatius són una branca de la teoria de jocs que se centra en l'estudi de situacions en què els jugadors han de col·laborar per aconseguir resultats beneficiosos per a tots ells. En aquests jocs, els jugadors poden formar coalicions o col·laborar d'alguna manera per aconseguir un objectiu comú, en lloc de competir entre si de manera pura. La base dels jocs cooperatius és suposar que els diferents agents es comporten d'un mode en el que busquen també el benefici col·lectiu.

En aquesta branca, el que s'estudia és més bé el mode en com es reparteixen els beneficis de la cooperació. Per tant, en aquesta classe de jocs, no es fa tanta èmfasi en l'estratègia concreta d'un jugador sinó que l'objecte d'estudi passa a ser la coalció. Els jocs cooperatius en la teoria de jocs són estudiats mitjançant estructures matemàtiques per analitzar situacions en les quals els jugadors poden cooperar per aconseguir resultats beneficiosos per a tots ells.

En els jocs cooperatius, l'èmfasi recau en la negociació, la comunicació i la presa de decisions conjuntes per part dels jugadors. Diferent dels jocs no cooperatius, on cada jugador busca maximitzar el seu benefici personal, en els jocs cooperatius els jugadors busquen solucions que generin beneficis per a tot el grup.

Definició 2.1. *El conjunt total de jugadors, que denotarem per* $N := \{1, ..., n\}$*, és un conjunt on els seus elements són els agents prenedors de decisions d'un joc i tots els agents estan inclosos.*

Un concepte clau en els jocs cooperatius és el de coalició, que és un conjunt de jugadors que s'uneixen per cooperar en el joc. Les coalicions poden ser de diverses formes i mides, i poden canviar al llarg del joc. Una coalició és un subconjunt de jugadors que decideixen col·laborar entre ells. La teoria dels jocs cooperatius se centra en estudiar quines coalicions són estables i com es poden repartir els guanys generats per aquestes coalicions entre els seus membres.

Definició 2.2. *Per a cada subconjnt* $S \subset N$ *, ens referim a* S *com a coalició. En aquest cas,* $|S|$ *representa el cardinal de* S*. És dir, la quantitat de jugadors involucrats en la coalició* S*. La coalició* N*, el grup total, s'anomena la gran coalició.*

La teoria de jocs cooperatius és la branca de la teoria de jocs que tracta els jocs en els que els jugadors poden formar coalicions, tot cooperant, i arribar a acords. Hi ha diferents característiques que comparteixen els jocs cooperatius. Els quatre gans pilars són els següents:

1. **Interès comú**: Els jugadors comparteixen un interès comú a l'hora d'assolir un objectiu o resultat específic. Han de cooperar i trobar punts comuns per establir una cooperació per assolir aquest interès.

2. **Interacció necessària entre jugadors**: En els jocs cooperatius, els diferents agents tenen públiques les seves preferències i objectius. Sent les preferències i els objectius no ocults i assumuint la interacció, es poden assumir decions preses de forma racional.

3. **Acord obligat**: Els acords entre jugadors en jocs cooperatius són de compliment obligatori. Un cop s'arriba a un acord, els jugadors tenen la obligació de complir-lo.

4. **Benefici mutu**: Els jugadors voluntariament formen coalicions. Es suposa la igualtat en condicions de la coalició i el benefici dels acords ha de ser mutu. Tots els participants de la coalició obtenen part del benefici comú.

Els jocs cooperatius en la teoria de jocs proporcionen eines per analitzar situacions en què la cooperació és una opció viable per als jugadors. Mitjançant l'ús de conceptes matemàtics i solucions, es poden explorar diferents estratègies de cooperació, negocis i repartiment de guanys en una àmplia gamma de contextos.

Els jocs cooperatius s'apliquen en diverses àrees com la teoria econòmica, la política, la gestió de recursos, la intel·ligència artificial, entre altres. Aquests jocs ofereixen un enfocament interessant per analitzar situacions en què la cooperació pot ser beneficiosa per a tots els jugadors involucrats i per entendre com s'estableixen acords i col·laboracions en diferents contextos. Tot seguit, en aquest capítol ens dedicarem a descriure d'una manera més rigorosa aquest tipus de jocs.

2.1 Jocs d'utilitat no-transferible

Dins els jocs cooperatius, hi ha diferents seccions. Una d'elles són els jocs d'utilitat no-transferible. Als jocs d'utilitat no-transferible ens hi referirem indistintament amb aquest nom o amb el nom de $jocs - NTU$. En aquest subgrup dels jocs cooperatius s'assumenix que la utilitat no pot ser transferida entre els diferents agents.

Definició 2.3. *Donada una coalició $S \subset N$ i un conjunt $A \subset \mathbb{R}^S$, diem que A és raonable si, per a cada parell $x, y \in \mathbb{R}^S$ tals que $x \in A$ i $y \leq x$, tenim que $y \in A$. També el casc raonable d'un conjunt A és el conjunt raonable més petit que contè A.*

Definició 2.4. *Un joc d'utilitat no-transferible ($joc - NTU$) és un parell (N, V), en el que N és el conjunt de jugadors i V és la funció que assigna, a cada coalició $S \subset N$, un conjunt $V(S) \subset \mathbb{R}^S$. Per convenció, la imatge del buit és el conjunt $\{0\}$. Per a cada coalició $S \subset N$, tenim que si $S \neq \emptyset$:*

1. *$V(S)$ és un conjunt diferent al buit i un subconjunt tancat de $\mathbb{R}^S$*
2. *$V(S)$ és raonable. Encara més, per a cada $i \in N$, tenim que $V(\{i\}) \neq \mathbb{R}$. Dit d'altra manera, hi ha un $x_i \in \mathbb{R}$ tal que $V(\{i\}) = (-\infty, x_i]$.*
3. *El conjunt $V(S) \cap \{y \in \mathbb{R}^S$: per a cada $i \in S, y_i \geq x_i\}$ és fitat.*

Per tant, un joc-NTU és un cas particular en el que tenim que per a cada $S \subset N$ i cada $x \in V(S)$, hi ha un resultat $r \in \mathbb{R}^S$ tal que, per a cada $i \in S$, tenim que $x_i = U_i^S(r)$. En termes més entenedors, $\mathbb{R}^{\mathbb{S}}$ representa el conjunt de tots els possibles pagaments de cada jugador en la coalició S.

Cal remarcar que és també comú trobar condicions una mica diferents (tot sovint equivalents a les anteriors) per als conjunts imatge $V(S)$ quan es defineixen els jocs-NTU. Al ser equivalents, cada autor escull la condició que més s'escau pels seus objectius específics en aquell cas. La condició de no buidor i tancadura és una exigència tècnica que té sentit en aquest context. Al demanar que els conjunts $V(S)$ siguin raonables, es fa una suposició convenient que permet als jugadors en la coalició S rebutjar l'utilitat si així ho desitgen. A més, és important assenyalar que sovint s'assumeix també que els conjunts $V(S)$ són convexos, el que implica, entre d'altres coses, que els jugadors dins de cada coalició S poden prendre decisions basades en loteries que involucren els elements de $\mathbb{R}^S$.

Definició 2.5. *Sigui (N, V) un joc-NTU. Aleshores als vectors en $\mathbb{R}^N$ se'ls diu assignacions o pagaments. Una assignació $x \in \mathbb{R}^n$ és factible si hi ha una partició $\{S_1, ..., S_k\}$ de N que satisfà que per a cada $l \in \{1, ..., k\}$ hi ha un $y \in V(S_l)$ tal que, per a cada $i \in S_l$ tenim que $y_i = x_i$.*

Ara veurem un exemple clàssic descrit per Owen l'any 1972 de joc d'utilitat no-transferible, conegut amb el nom de joc del banquer.

Exemple 2.6. Considerem el joc-NTU descrit de la següent manera:

$$v(\{i\}) = \{x_i : x_i \leq 0\}, i \in \{1, 2, 3\},$$

$$v(\{1, 2\}) = \{(x_1, x_2) : x_1 + 4x_2 \leq 1000 \text{ i } x_1 \leq 1000\},$$

$$v(\{1, 3\}) = \{(x_1, x_3) : x_1 \leq 0 \text{ i } x_3 \leq 0\},$$

$$v(\{2,3\}) = \{(x_2, x_3) : x_2 \leq 0 \text{ i } x_3 \leq 0\},$$
$$v(N) = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + x_3 \leq 1000\}.$$

Podem pensar en aquest joc així: Cap jugador pot obtenir res per ell mateix. Els jugadors 1 i 2 sí que poden obtenir recompensa plegats. Quan s'ajunten, el jugador 1 pot obtenir fins a 1000 dòlars. El jugador 1 pot recompensar el jugador 2 donant-li part dels 1000 dòlars, però aquests es perden amb una probabilitat de 0,75.

El jugador 3 pren la posició d'un banquer. Aleshores el jugador 1 pot assegurar les seves transaccions al jugador 2 fent servir el jugador-banquer 3 com a intermediari. Ara, la pregunta és quant hauria de pagar el jugador 1 al 2 per la seva ajuda en l'obtenció dels 1000 dòlars i quant hauria de pagar al jugador 3 per ajudar en la transacció.

La raó per a referir-nos a aquest joc com a NTU és que algunes transferències entre jugadors no es permeten. Per exemple, (1000, 0) pertany clarament a $v(\{1,2\})$ però els jugadors 1 i 2 no tenen l'opció de compartir així (500, 500) sense l'ajut del jugador 3.

A mode de resum, l'objectiu dels jocs-NTU (utilitat no-transferible) en teoria de jocs és analitzar situacions en les quals els beneficis generats per la cooperació dels jugadors no poden ser transferits directament entre ells. En aquests jocs, cada jugador té una funció d'utilitat pròpia i indivisible, que reflecteix les seves preferències sobre els diferents resultats possibles del joc. L'objectiu és estudiar com s'han de prendre decisions per a repartir els beneficis entre els jugadors quan no és possible transferir-los de forma directa.

En un joc-NTU, es busquen solucions que estiguin basades en les característiques de les coalicions i els resultats possibles. Això pot implicar l'estudi de conceptes com ara solucions estables, equilibris de Nash, repartiment equitatiu, eficiència o altres criteris per a distribuir els beneficis entre els jugadors.

En conclusió, l'objectiu dels jocs-NTU és analitzar com prendre decisions per a repartir els beneficis generats per la cooperació en situacions en les quals aquests beneficis no poden ser transferits directament entre els jugadors.

2.2 Jocs d'utilitat transferible

Recordem la separació que hem fet entre els diferents tipus de jocs cooperatius. Hem vist en la secció anterior els jocs-NTU o jocs d'utilitat no-transferible. Aquest nom en sí mateix, ja ens dona una pista de quina és la classe de jocs restant. Efectivament, parlem dels jocs d'utilitat transferible (jocs amb els que indistintament ens referirem així o sota el nom de jocs-TU). Comparteix diferents característiques amb els jocs-NTU, però evidentment té diferències. Tot seguit ens dedicarem a presentar aquestes similituds i diferències amb els jocs-NTU.

En aquest tipus de jocs també s'assumeix la formació de coalicions d'agents que cooperen. Les coalicions que es poden formar entre els jugadors de N poden també imposar certes condicions (a través d'acords entre els actors que hi prenen part). El problema rau en decidir de quina manera s'han de repartir els beneficis generats per la cooperació entre els agents en coalició. Ara bé, hi ha una diferència respecte als jocs-NTU: en un joc d'utilitat transferible, donada una coalició $S \subset N$ i una assignació $x \in V(S) \subset \mathbb{R}^S$ que els jugadors de S poden formar, aleshores totes les assignacions que es poden obtenir a partir de transferències d'utilitat de l'assignació x entre els agents involucrats en la formació de la coalició S també pertanuen a $V(S)$. Per tant, el conjunt $V(S)$ es pot caracteritzar per un únic número, donat pel $max_{x\in V(S)} \sum_{i\in S} x_i$. Aquest valor té transcendència a l'hora d'estudiar els jocs. Ens referim a ell amb $v(S)$ (en minúscula) i li diem valor de la coalició S.

El canvi de no-transferibilitat a sí-transferibilitat en els jocs té diferents vessants a les que afecta. A nivell tècnic, com les pròpies condicions del joc ens impliquen la repartició d'un número per cada coalició, ens fa els jocs d'utilitat transferible molt mès manejables que els jocs-NTU vistos abans. D'altra banda, també té una altra significació teòrica no trivial. Al assumir que hi ha una utilitat totalment transferible entre jugadors, s'entèn que hi ha un bé numerable tal que les utilitats dels diferents jugadors involucrats són totalment lineals respecte aquest i també que es pot transferir de forma lliure entre els diferents agents. Això ens porta a tenir uns jocs més orientats a repartir bens objectius com, per exemple, quantitats de diners.

En altres paraules, l'objectiu dels jocs-TU (utilitat transferible) en teoria de jocs és estudiar com els beneficis generats per la cooperació entre els jugadors han de ser repartits de manera justa entre ells. En aquests jocs, es considera que hi ha una utilitat transferible que pot ser intercanviada entre els jugadors mitjançant acords i negociacions. L'objectiu és trobar una distribució de la utilitat que sigui estàtica o dinàmica, és a dir, una assignació que determini com es reparteixen els beneficis entre les diferents coalicions de jugadors. Això pot implicar la determinació de valors de coalició (que veurem més endevant), esquemes de repartiment o altres mecanismes de negociació. En resum, l'objectiu dels jocs-TU és analitzar com els jugadors poden arribar a acords per a repartir els beneficis generats per la seva cooperació.

Definició 2.7. *Un joc d'utilitat transferible és un parell (N, v), on N és el conjunt de jugadors i la funció característica del joc és $v : 2^N \to \mathbb{R}$. Per convenció, notem que la imatge del buit és zero ($v(\emptyset) := 0$).*

El valor $v(S)$, el valor de la coalició S en el joc, s'interpreta com el benefici que la coalició S pot generar amb els seus mitjans, independentment del que faci la resta de jugadors. En casos on no hi puguin sortir altres interpretacions, de vegades es denota el joc-TU (N, v) únicament amb la seva funció característica v. També, es denota (en el cas de, per exemple les coalicions $num1 = \{i\}$ i $num2\{i,j\})$ el valor $v(num1)$ com, directament, $v(i)$ i $v(num2)$ com $v(ij)$.

Notem per G^N la classe dels jocs d'utilitat transferible amb n jugadors.

Definició 2.8. *Sigui $(N, v) \in G^N$ i sigui una coalició $S \subset N$. La restricció de (N, v) a la coalició S és un altre joc d'utilitat transferible definit per (S, v_S), on per cada subcoalició $T \subset S \subset N$ tenim que es defineix la seva funció característica com $v_S(T) := v(T)$.*

Un exemple entenedor d'un joc-TU (utilitat transferible) en teoria de jocs pot ser el següent:

Exemple 2.9. Imaginem que dues persones, l'Alícia i la Bea, decideixen treballar juntes en un projecte de disseny gràfic. El projecte requereix de 20 hores de treball en total. L'Alícia té una habilitat especialitzada en il·lustracions i pot fer 10 hores de treball en aquesta tasca, mentre que la Bea té una habilitat especialitzada en disseny web i pot fer 10 hores de treball en aquesta tasca.

Ara bé, l'Alícia presta molta més importància al seu treball d'il·lustracions i considera que per a ella, 1 hora d'il·lustració té un valor de 5 euros. La Bea, per altra banda, presta més importància al seu treball de disseny web i considera que per a ella, 1 hora de disseny web té un valor de 8 euros.

En aquest joc TU, es permet la transferència d'utilitat entre els jugadors, de forma escalada. En aquest cas, la utilitat és el valor monetari associat a les hores de treball. Per arribar a un acord just, l'Alícia i la Bea podrien decidir, per exemple:

1. L'Alícia realitzarà 6 hores d'il·lustració (6 hores * 5 euros/hora = 30 euros) i 4 hores de disseny web (4 hores * 8 euros/hora = 32 euros). En total, l'Alícia obtindria 62 euros.

2. La Bea realitzarà 4 hores d'il·lustració (4 hores * 5 euros/hora = 20 euros) i 6 hores de disseny web (6 hores * 8 euros/hora = 48 euros). En total, la Bea obtindria 68 euros.

D'aquesta manera, l'Alícia i la Bea han arribat a un acord mitjançant la transferència d'utilitat. L'Alícia ha acceptat realitzar més hores de disseny web del que preferiria inicialment, però ha rebut una compensació monetària addicional per aquesta tasca. De manera similar, la Bea ha acceptat realitzar més hores d'il·lustració del que preferiria inicialment, però també ha rebut una compensació monetària addicional.

L'objectiu d'un joc TU és trobar una distribució de recursos, en aquest cas, utilitat monetària, que sigui acceptable per a tots els jugadors, permetent la transferèmcia d'aquests recursos entre ells. Això implica la negociació i arribar a un acord sobre com repartir els recursos de manera que es tingui en compte el valor individual que cada jugador atorga a les diferents tasques.

Tornant a l'explicació matemàtica dels jocs-TU, habitualment s'assumeixen diferents propietats a la funció característica v. Tot seguit veurem un seguit de definicions i relacions entre elles per poder entendre millor aquest tipus de jocs.

Definició 2.10. *Un joc-TU $v \in G^N$ és superadditiu si, per a cada parell de coalicions $S, T \subset N$ amb $S \cap T = \emptyset$. És dir, cada dos coalicions disjuntes. Tenim que:*

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T). \tag{2.1}$$

Remarquem que un joc de tipus TU és superadditiu si, i només si, els jugadors tenen incentius reals per a formar coalicions. És a dir, podem veure aquí que si és superadditiu, aleshores clarament la unió de coalicions disjuntes mai redueix els beneficis o la utilitat obtinguda, ans al contrari, la iguala o supera.

Per aquest mateix motiu, és natural pensar que la dinàmca del joc porta a formar la gran coalició N. Per tant, la qüestió és com repartir $v(N)$ entre els agents decisius. De fet, una part important de la recerca en jocs d'utilitat transferible va ser desenvolupada tenint jocs superadditius com els *benchmark*.

Definició 2.11. *Diem que un joc d'utilitat transferible $v \in G^N$ és superadditiu fluix si tenim que per a cada jugador $i \in N$ i cada coalició $S \subset N \setminus \{i\}$, tenim que $v(S) + v(i) \leq v(S \cup \{i\})$.*

Definició 2.12. *Diem que un joc d'utilitat transferible $v \in G^N$ és additiu si tenim que per a cada jugador $i \in N$ i cada coalició $S \subset N \setminus \{i\}$, tenim que $v(S) + v(i) = v(S \cup \{i\})$. En particular, tenim que per a cada $S \subset N$, $v(S) = \sum_{i \in S} v(\{i\})$.*

Aquestes són les definicions pel que respeca a la banda d'additivitat. Tot seguit també presentarem unes definicions que ens seràn útils per a la comprensió d'aquesta classe de jocs cooperatius.

Definició 2.13. *Un joc d'utilitat transferible $v \in G^N$ és monòton si per cada parell de coalicions $S, T \subset N$ on tenim que $S \subset T$, tenim que $v(S) \leq v(T)$.*

Definició 2.14. *Un joc d'utilitat transferible $v \in G^N$ és zero-normalitzat si, tenim que per a cada jugador $i \in N$, aleshores $v(i) = 0$, recordem que amb $v(i)$ denotem $v(\{i\})$.*

Donat un cert joc $v \in G^N$, la zero-normalització de v és el joc zero-normalitzat w definit, per a cada coalició $S \subset N$ com a $w(S) := v(S) - \sum_{i \in S} v(i)$.

Definició 2.15. *Un joc d'utilitat transferible $v \in G^N$ és zero-monòton si la seva zero-normalització és un joc monòton.*

D'aquestes definicions, surt el següent lema:

Lema 2.16. *Sigui $v \in G^N$. Aleshores tenim que v és superadditiu fluix si, i només si, és zero-monòton.*

Demostració. **Implicació cap a l'esquerra**: Suposem que el joc és zero-monòton. Aleshores considerem una coalició qualsevol $S \subset N \setminus \{i\}$, amb $i \in N$ també qualsevol, i definim $T = S \cup \{i\}$. Per la zero-normalitat tenim la primera igualtat, i com $S \subset T$ per monotonia tenim la desigualtat.

$$v(S) + v(i) = v(S) \leq v(T) = v(S \cup i).$$

Veient que $v(S) + v(i) \leq v(S \cup i)$ per qualsevol $i \in N$ i $S \subset N \setminus \{i\}$, queda provada la propietat de superadditiu fluix i, per tant, la implicació.

Implicació cap a la dreta: Suposem que el joc és superadditiu fluix (és a dir $v(S) + v(i) \leq v(S \cup i)$). Considerem la zero-normalització del joc, w i considerem coalicons qualssevol tals que $S \subset T$. Per tant $T = S \cup \{i_{k_1}, ..., i_{k_m}\}$. Aleshores tenim que

$$w(S) = w(S) + \sum_{l=1}^{l=m} w(i_{k_l}) \leq w(S \cup i_{k_1}) + \sum_{l=2}^{l=m} w(i_{k_l}) \leq ... \leq w(S \cup i_{k_1} \cup ... \cup i_{k_m}) = w(T).$$

Per tant hem demostrat que per qualssevol $S \subset T$, la zero-normalització de v, w, compleix $w(S) \leq W(T)$ (monotonia) en cas que el joc v sigui superadditiu fluix.

Un cop provades les dues implicacions, queda demostrada la doble implicació.

□

L'objectiu dels jocs-TU és doncs repartir els beneficis de la cooperació entre els agents que hi prenen part. En la majoria de jocs-TU s'assumeix la monotonia, l'additivitat i, en molts casos, la zero-normalització.

Tot seguit veurem un parell més d'exemples:

Exemple 2.17. Un exemple bàsic és el joc del guant. Aquest consisteix en tres jugadors A, B i C. Per tant el joc és (M, v) on $M = \{A, B, C\}$ i tenim $v(A) = v(B) = v(C) = v(BC) = 0$, mentre que $v(AB) = v(AC) = v(M) = 1$. Aquest joc es diu així al poder-se entendre també com un procés de vendre un parell de guants, tenint el jugador A el guant esquerre i B i C un guant dret cada un. En aquest cas, cap d'ells per sí sols aconsegueix l'objectiu, ni els dos últims junts. Han de posar-se d'accord el jugador A amb algun (o els dos) dels jugadors B i C.

Exemple 2.18. Un altre exemple de joc-TU que sovint es fa servir és el joc del professor. Suposem un professor del Japó que tres grups de recerca el volen convidar a les seves universitats. Els grups de recerca es troben, respectivament, a Milà (grup 1), a Ginebra (grup 2) i a Barcelona (grup 3). El cost del viatge serà assumit pels que el conviden. Així doncs, es troben amb el problema de com distribuir entre ells aquest cost.

Amb aquest objectiu, han fet una aproximació del cost del viatge en tots els casos possibles (totes les coalicions): $c(1) = 1500$, $c(2) = 1600$, $c(3) = 1900$, $c(12) = 1600$, $c(13) = 2900$, $c(23) = 3000$ i $c(N) = 3000$. Per a cada coalició $S, c(S)$ representa el cost per a visitar tots els grups de recerca de S. Sigui $N0\{1, 2, 3\}$. Notem que (N, c) és un joc-TU. Ara bé, és el que habitualment es diu joc de costs, ja que per a cada coalició $S, c(S)$ no representa els beneficis que la coalició genera, sinó el cost a assumir.

El joc d'estalvi associat a aquest joc és (N, v), on v ve donada, per a cada $S \subset N$:

$$v(S) = \sum_{i \in S} c(i) - c(S).$$

Aleshores, ens queda que $v(1) = v(2) = v(3) = 0, v(12) = 1500, v(13) = 500, v(23) = 500$ i finalment $v(N) = 2000$.

3 Valor de Shapley

El capítol present tractarà sobre el valor de Shapley, que té una gran utilitat en els jocs-TU. En la teoria de jocs, el valor de Shapley és un concepte fonamental que permet assignar un valor als jugadors en un joc cooperatiu. És anomenat en honor a Lloyd Shapley, qui va introduir aquest concepte en la dècada dels 1950.

El valor de Shapley proporciona una manera equitativa de distribuir els beneficis generats per la cooperació entre els jugadors. És a dir, busca donar un valor en el que es representi l'aportació individual de cada jugador al grup i per tant poder ser més objectius a l'hora de repartir els seus beneficis en base a la rellevància de cada agent. En els jocs cooperatius, els jugadors formen coalicions per a aconseguir un objectiu comú i busquen repartir els beneficis de manera justa. El valor de Shapley ofereix una solució que té en compte les aportacions úniques de cada jugador i la seva contribució al funcionament de les coalicions.

A diferència d'altres mètodes de repartiment, com ara la divisió igualitària o la divisió proporcional, el valor de Shapley té en compte la seqüència en què els jugadors s'afegeixen a les coalicions. Es basa en el concepte de *contribució marginal*, que mesura el benefici addicional que cada jugador aporta en el moment en que s'uneix a una coalició.

El valor de Shapley es calcula considerant totes les possibles permutacions dels jugadors i mitjançant una mitjana ponderada de les seves contribucions marginals. Aquest valor proporciona una distribució justa dels beneficis, ja que reflecteix la importància de cada jugador en el context de les coalicions.

El valor de Shapley és una eina clau en la teoria de jocs cooperatius per a determinar una distribució equitativa dels beneficis. Aporta una perspectiva justa i considera les aportacions úniques de cada jugador en el context de les coalicions. El seu càlcul requereix analitzar totes les possibles permutacions dels jugadors, però ofereix una solució robusta i ampliament acceptada per repartir els beneficis de manera justa en jocs cooperatius.

Tot seguit li donarem robustesa mateàtica als conceptes ara exposats.

Definició 3.1. *Sigui* $v \in G^N$.

1. *Un jugador* $i \in N$ *es diu jugador nul si, per a qualsevol* $S \subset N$*, tenim que* $v(S \cup \{i\}) - v(S) = 0$.
2. *Dos jugdors* i, j *són simètrics si, per a cada coalició* $S \subset N \setminus \{i, j\}$*, tenim que* $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$

Definició 3.2. *Se li diu valor del joc* $v \in G^N$ *a una funció* ϕ *de* G^N *en* $\mathbb{R}^n$ *en que* $\phi(v)$ *és un vector que representa en cada coordenada* $\phi_i(v)$ *el pagament o assignació que percep el jugador* $i \in N$.

Tot seguit definirem un conjunt de propietats que poden complir els valors d'un joc.

1. **Eficiència:** El valor del joc ϕ satisfà la propietat d'eficiència si, per a qualsevol $v \in G^N$, tenim que $\sum_{i \in N} \phi_i(v) = v(N)$.
2. **Jugador nul:** El valor del joc ϕ satisfà la propietat del jugador nul si, per a cada $v \in G^N$ i cada jugador nul $i \in N$, tenim que el seu valor és zero, $\phi_i(v) = 0$.

3. **Simetria:** El valor del joc ϕ satisfà la propietat de la simetria si per a cada $v \in G^N$ i cada parell $i, j \in N$ de jugadors simètrics, tenim que els seus valors són iguals, $\phi_i(v) = \phi_j(v)$.

4. **Additivitat:** El valor del joc ϕ satisfà la propietat d'additivitat si, per a cada parell de jocs $v, w \in G^N$, tenim que els valors $\phi(\lambda v + w) = \lambda\phi(v) + \phi(w)$.

Per la propietat d'eficiència tenim que la funció ϕ reparteix la utilitat total de la gran coalició $v(N)$ entre els jugadors. Per altra banda, la propietat del jugador nul, ens suggereix que els jugadors que no contribueixen en la coalició en absout, no haurien de rebre res a canvi del seu suport a la coalició. La de la simetria, per la seva banda, ens exigeix tractar els jugadors de forma igual si aporten el mateix a la coalició.

Tot seguit presentem el valor de Shapley tal com el va introduir el seu propi artífex l'any 1953.

Definició 3.3. *El valor de Shapley, Φ, es defineix per a cada $v \in G^N$ i cada $i \in N$ com:*

$$\Phi_i(v) := \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}(v(S \cup \{i\}) - v(S)). \tag{3.1}$$

Aleshores, en esperit, el valor de Shapley assigna a cada jugador les contribucions que fa a les diferents coalicions. De fet, cada jugador obté una mitjana ponderada de les seves contribucions. El valor de Shapley es calcula pressuposant que s'acabarà formant la gran coalició, però que els jugados s'hi van afegint seqüencialment en tots els ordres possibles (calculant un per un).

Quan el jugador i entra, obté la seva contribució a la coalició dels jugadors que ja són a l'interior (és a dir, si aquesta coalició és S, obté $v(S \cup \{i\})$ - $v(S)$). L'ordre dels jugadors es decideix de manera aleatòria, amb totes les $n!$ possibles ordenacions sent igualment probables. És fàcil comprovar que el valor de Shapley assigna a cada jugador el seu valor esperat sota aquest procés d'entrada ordenada aleatòria.

Amb aquest raonament, es suggereix una definició alternativa del valor de Shapley, tot basant-se en els vectors de contribucions marginals. Sigui $\Pi(N)$ el conjunt de totes les possibles permutacions dels elements en el conjunt N i per a cada permutació $\pi \in \Pi(N)$, denotarem amb $P^\pi(i)$ el conjunt dels predecessors de i seguint l'ordre donat per la permutació π. És a dir, $j \in P^\pi(i)$ si i només si $\pi(j) < \pi(i)$.

Definició 3.4. *Sigui $v \in G^N$ un joc-TU. Sigui $\pi \in \Pi(N)$. Aleshores el vector de contribucions marginals associat amb π, que direm $m^\pi(v) \in \mathbb{R}^N$, ve definida per a cada $i \in N$ per $m_i^\pi(v) := v(P^\pi(i) \cup \{i\})$ - $v(P^\pi(i))$.*

Amb aquesta definició, doncs, podem simplificar l'escriptura del valor de Shapley i es pot posar com:

$$\Phi_i(v) := \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi(N)} m_i^\pi(v).$$

Tot seguit, presentem un tipus de joc d'utilitat transferible que ens pot ser útil per als nostres estudis. Es tracta dels jocs d'unanimitat de la coalició.

Definició 3.5. *Dins la classe G^N, donada una coalició $S \subset N$, tenim que el joc d'unanimitat de la coalició S, que direm w^S, es defineix de la següent manera. Per a cada $T \subset N$, tenim que $v(T) := 1$ si $S \subset T$ i en canvi, en altre cas ens queda $v(T) := 0$.*

Similarment al teorema vist anteriorment, ara estudiarem un que s'adequa a la nova definició del valor de Shapley.

Teorema 3.6. *El valor de Shapley és l'únic valor de joc en G^N que satisfà les propietats d'eficiència, jugador nul, simetria i additivitat simultaniament.*

Demostració. Clarament la propietat de jugador nul es compleix, ja que si un jugador és nul, tindrem que la diferència en la utilitat abans i desprès de la seva aparició en la coalició és nul·la. Per tant el seu vector de contribucions marginals és nul i aleshores clarament el seu sumatori equival a zero, pel que el seu valor de Shapley és també zero. La propietat de l'additivitat de dos jocs independents es compleix per definició del valor. Les altres dues propietats surten de la forma reescrita que li hem donat al valor de Shapley. La d'eficiència surt de que si sumem totes les utilitats marginals, per la definició dels jocs-TU en G^N, tindrem la utilitat de la gran coalició $v(N)$.

I per altra banda respecte a la simetria, per cada permutació (amb i, j simètrics) podem trobar una altra permutació que intercanviï les posicions dels jugadors i, j. És a dir, si i, j són simètrics, aleshores dins del conjunt de permutacions, per cada permutació on i estigui en la posició $k-$èssima i j en posició l-èssima, podem trobar una exactament igual que només itercanviï els papers d'aquestes dues. Si ho repetim per totes les permutacions, obtenim exactament el mateix conjunt. Aleshores, tenim que el seu valor és el mateix, per tant satisfà aquesta propietat, i per consequència, compleix totes les quatre condicions.

Ara provem la seva unicitat. Suposem que existeix una altra funció ϕ que satisfà totes les quatre propietats. Cada $v \in G^N$ es pot veure com un vector $\{v(S)\}_{S\in 2^N\setminus\{\emptyset\}} \in \mathbb{R}^{2^n-1}$. Aleshores, G^N pot ser considerat com un espai vectorial 2^n-1-dimensional. Ara veiem que els jocs d'unanimitat $U(N){:=}\{w^S : S \in 2^N \setminus \{\emptyset\}\}$ són una base d'aquest espai vectorial.

Veurem ara amb aquest propòsit que $U(N)$ és un conjunt de vectors linealment independents. Siguin $\{\alpha_S\}_{S\in 2^N\setminus\{\emptyset\}} \subset \mathbb{R}$ tals que $\sum_{S\in 2^N\setminus\{\emptyset\}} \alpha_s w^S = 0$ i suposem que hi ha un $T \in 2^N \setminus \{\emptyset\}$ amb $\alpha_T \neq 0$.Podem assumir aleshores que no hi ha $R \subset T$ tal que $\alpha_R \neq 0$. Aleshores tenim que $0 = \sum_{S\in 2^N\setminus\{\emptyset\}} \alpha_s w^S(T) = \alpha_T \neq 0$ i arribem a contradicció. Com ϕ satisfà les propietats d'eficiència, jugador nul i simetria, tenim que per a cada jugador $i \in N$, cada $\emptyset \neq S \subset N$ i cada $\alpha_S \in \mathbb{R}$,

$$\phi_i(\alpha_S w^S) = \begin{cases} \frac{\alpha_S}{s} & \text{si } i \in S \\ 0 & \text{si } i \notin S \end{cases}$$

Aleshores si ϕ també satisfà la propietat de l'additivitat, tenim que ϕ està unívocament determinada, ja que $U(N)$ és una base de G^N i per tant, $\phi = \Phi$. □

Exemple 3.7. Tot seguit, tornarem a revisar el joc dels guants vist en el capítol anterior. Ara l'analitzarem amb la perspectiva també del valor de Shapley. Recordem les normes del joc: Aquest consisteix en tres jugadors A, B i C, la gran coalició és $N = \{A, B, C\}$. El jugador A té el guant dret. Mentre que tant el jugador B com el C tenen un guant esquerra.

Entre els jugadors volen reunir un parell (dret i esquerra) de guants per poder vendre'ls. La funció d'utilitat és $v(S) = 1$ si la coalició $S \subset N$ conté un parell complet de guants i, en altre cas, $v(S) = 0$. Per tant el joc és (N, v) on $N = \{A, B, C\}$ i tenim $v(A) = v(B) = v(C) = v(BC) = 0$, mentre que $v(AB) = v(AC) = v(N) = 1$. Si considerem les $n! = 3! = 6$ possibles permutacions dels agents de la coalició i les utilitats marginals a l'entrar cada jugador, ens queda la següent taula:

π	Jugador A	Jugador B	Jugador C
(A, B, C)	0	1	0
(A, C, B)	0	0	1
(B, A, C)	1	0	0
(B, C, A)	1	0	0
(C, A, B)	1	0	0
(C, B, A)	1	0	0
Sumatori	4	1	1
Φ (Shapley)	2/3	1/6	1/6

Taula 3: Utilitats marginals i valors de Shapley dels jugadors

Revisem la obtenció dels valors anterior. Suposem que som el jugador A: Tindrem una utilitat marginal igual a 1 en el cas que entri a la coalició i ja hi hagi algun altre jugador. Això és així ja que els altres dos jugadors aporten guants esquerres i sense el jugador A sempre tenen una utilitat de 0, ja que no arriben al parell complet. No obstant, si el jugador A és el primer en arribar a la coalició, la seva utilitat marginal també és de zero, ja que només tindrà el guant dret.

Ara mirem el cas del jugador B. Només té una contribució marginal igual a 1 quan entra en segon lloc i ja hi ha dins la coalició el jugador A. Així, arriba quan només hi ha un guant dret i aporta el guant esquerra que completa la parella. En els altres casos, si entra en tercera posició o en segona un cop ja hi és el jugador C, no completa els parells i per tant la utilitat marginal és de zero. En el cas d'entrar primer, evidentment no completa el parell i per tant la seva utilitat marginal també és de zero. Els jugadors B i C són intercanviables ja que són simètrics, així que els casos pel C són anàlegs als del B.

Per últim, dividim la suma de la utilitat marginal entre el total de permutacions possibles i ens queden els valors de Shapley finals, que són els següents:

1. $\Phi_A(v) = 2/3$
2. $\Phi_B(v) = 1/6$
3. $\Phi_C(v) = 1/6$

Així doncs, hem trobat els valors de Shapley dels diferents jugadors en l'exemple dels guants que vam exposar en el capítol anterior.

Ara veurem un altre exemple també aplicat a un problema de la vida real. El problema consiseix en esbrinar com es poden repartir justament uns guanys generats entre tres persones. Acte seguit es presenta:

Exemple 3.8. Suposem tres companys de feina: l'Aniol, el Bernat i la Clàudia. Ens referirem a ells també com a jugadors A, B i C, respectivament. El cas és que treballant tots tres plegats, han aconseguit generar uns beneficis de 160 euros.

Com porten molt de temps treballant tots tres junts, sabem quant acostumen a generar per parelles i individualment. L'Aniol, quan treballa tot sol, genera uns beneficis de 40 euros per a l'empresa. En Bernat, per la seva banda, genera beneficis de 50 euros i, per últim, la Clàudia treballant sola, genera 60 euros. Ara bé, quan treballen en parelles no produeixen la suma del que produeixen individualment. Si tenim l'Aniol i en Bernat treballant junts, aconsegueixen produir 95 euros (cinc més del que seria només la seva suma individual). Si l'Aniol s'ajunta amb la Clàudia, produeixen 110 euros (deu més que la suma individual), mentre que si la Clàudia s'ajunta amb en Bernat, produeixen 120 euros (aconseguint també deu euros més que la suma dels dos individualment).

En aquest cas, per tant, podem caracteritzar la funció d'utilitats, ja que tenim tots els valors. Individualment, per parelles i tots junts, respectivament, tenim el següent:

- $v(A) = 40$, $v(B) = 50$ i $v(C) = 60$
- $v(AB) = 95$, $v(AC) = 110$ i $v(BC) = 120$
- $v(ABC) = 160$

L'Aniol proposa de repartir la quantitat final a parts iguals entre tots els tres jugadors. La Clàudia proposa que cadascú es quedi amb el que genera individualment i que els deu euros que sobren se'ls quedi la persona que més generi (és a dir, ella). En Bernat però, proposa un mètode alternatiu. Fa uns dies va llegir un treball sobre el valor de Shapley en el TFG d'un amic seu. Proposa que es reparteixin els guanys segons aquest valor, ja que és la forma més justa de repartir-los.

Els explica que el que faran serà repartir els guanys segons la mitjana ponderada de les utilitats marginals aportades per cada un d'ells. Tot seguit, farà una taula amb les utilitats marginals de cada jugador en cada una de les possibles situacions, però abans els explica en el que consisteix.

Com tenen el que genera cada un individualment i per parelles, cal considerar totes les opcions ordenades que tenen d'acabar els tres treballant plegats com igual de probables. És a dir, les permutacions del conjunt $\{A, B, C\}$, que son ABC, ACB, BAC, BCA, CAB i CBA. Els il·lustra amb l'exemple de la primera permutació possible, el cas ABC (li direm la permutació $\pi \in \Pi(ABC)$). Quan el primer jugador entra, forma la coalició A, i la seva utilitat marginal en aquest cas és:

$$m_A^\pi = v(A) - v(A \setminus A) = v(A) - v(\emptyset) = v(A) - 0 = 40$$

El següent en entrar a la coalició és el jugador B, que al entrar forma la coalició AB i la seva utilitat marginal en aquest cas és:

$$m_B^\pi = v(AB) - v(AB \setminus B) = v(AB) - v(A) = 95 - 40 = 55$$

Per últim, entra a la coalició el jugador C i quan entra formen la gran coalició ABC. Per tant la seva utilitat marginal és de:

$$m_C^\pi = v(ABC) - v(ABC \setminus C) = v(ABC) - v(AB) = 160 - 95 = 65$$

Un cop tots han entès com funcionen les utilitats marginals en aquests casos, considera totes les permutacions de $\Pi(ABC)$ i decideix fer una taula amb les utilitats marginals i la suma de totes elles, que tenim a l'inici de la següent pàgina.

Explica que ara que ja tenen les utilitats marginals, només cal dividir ponderadament per les coalicions (que es consideren totes equiprobables) i cadascú obtindrà el seu valor de Shapley.

- $\Phi_A(v) = 255/3! = 255/6 = 42,5$

π	Jugador A	Jugador B	Jugador C
(A, B, C)	40	55	65
(A, C, B)	40	50	70
(B, A, C)	45	50	65
(B, C, A)	40	50	70
(C, A, B)	50	50	60
(C, B, A)	40	60	60
$\sum$	255	315	390

Taula 4: Utilitats marginals dels jugadors en cada permutació possible de la coalició

- $\Phi_B(v) = 315/3! = 315/6 = 52,5$
- $\Phi_C(v) = 390/3! = 390/6 = 65$

Així doncs, queden que els beneficis es reparteixen de la següent manera: l'Aniol rebrà la suma de $42,5$ euros producte de la seva feina. Per la seva banda, en Bernat n'obtindrà $52,5$. I per últim, a la Clàudia li seran donats 65 euros per remunerar la seva feina. Aquest exemple serveix per il·lustrar de forma detallada i pautada les possibilitats d'explorar el valor de Shapley en les situacions més quotidianes.

El valor de Shapley és una solució justa i equitativa per a la distribució dels guanys en jocs de coalició. Aquest valor proporciona una manera sistemàtica de calcular la contribució de cada jugador en funció de les coalicions en les quals participa. Mitjançant el concepte de vectors de contribucions marginals, el valor de Shapley ofereix una distribució equitativa que té en compte tant les aportacions individuals com la interacció entre els jugadors.

Una de les grans avantatges del valor de Shapley és la seva propietat d'eficiència, ja que assegura que tots els guanys generats per les coalicions es reparteixen de manera justa i que no hi ha cap jugador que estigui rebent més del que hauria de rebre. A més, el valor de Shapley compleix altres propietats desitjables com la simetria, que garanteix que jugadors amb contribucions equivalents reben una assignació igual.

Aquesta solució és àmpliament utilitzada en diverses àrees, com ara la teoria de jocs cooperatius, la teoria de col·laboració i la presa de decisions en equips. El valor de Shapley proporciona una eina valuosa per avaluar i reconèixer la importància de cada jugador en la consecució d'objectius comuns i promou la cooperació i el treball en equip.

En resum, el valor de Shapley és una solució poderosa i equitativa per a la distribució de guanys en jocs de coalició. La seva aplicació pot ajudar a generar incentius per a la cooperació, promoure la justícia en els resultats i millorar la presa de decisions col·lectives en diferents contextos.

4 Jocs simples

Per introduir els conceptes de la part pràctica d'aquest treball, associats amb les coalicions post-electorals, ens serà molt útil presentar una classe de jocs lligats a aquestes. Ens centrarem en estudiar ara una subclasse dels jocs d'utilitat transferible, els jocs simples.

Els jocs simples són una subclasse de jocs amb característiques particulars, que tot seguit descriurem. Tenen un paper cabdal en la representació dels processos de presa de decisions i votacions de grups. Precisament per aquest motiu són sovint usats en diverses branques d'estudi vinculades a les ciències socials, i de manera destacada, en les ciències polítiques.

El factor important i on es posa la lupa de l'estudi en aquests jocs es desplaça. Si a la majoria de jocs d'utilitat transferible ens fixàvem en les utilitats per a poder repartir els beneficis entre els diferents agents que hi prenien part, ara, en els jocs simples, el focus està posat més bé en una altra banda. Als jocs simples, passa a tenir més importància el poder. Ens fixarem en la mesura i l'anàlisi del poder, així com també la rellevància i influència dels agents que prenen part en la presa de decisions.

En aquest capítol, ens referirem sovint a comitè, que farem servir de forma similar al que seria un parlament. Tindrem un nombre fixat de participants dins d'ell i cada un pot, o bé unir-se a la coalició, o bé desestimar-ho. Ara suposem que tenim un comitè amb n jugadors, que han de decidir si tirar endevant o no una decisió (per exemple una llei imortant). Si tenim una coalició S i la seva utilitat $v(S) = 1$ significa que la llei tira endevant si els conformants de la coalició S s'hi adhereixen.

Per tant, en aquests jocs, el que abans significaven les solucions proposant un repartiment just dels beneficis, en aquest cas signifiquen més bé una mesura de la capacitat que tenen els jugadors de fer-se valer per a canviar el resultat del joc. A aquests valors, els direm més endevant índexs de poder, ja que és precisament el que ens aporten a l'estudi d'aquests jocs.

Definició 4.1. *Direm que un joc-TU $v \in G^N$ és un joc simple si compleix les següents propietats:*

1. *Per tota coalició $S \subset N$ la funció $v(S)$ només pot prendre els valors 0 o 1.*
2. *Per a la gran coalició, tenim que $v(N) = 1$.*
3. *El joc v és monòton.*

Al conjunt de jocs simples de n jugadors, el denotem com S^N. Un joc simple v qualsevol, compleix doncs que $v \in S^N$.

Com es veu en una de les condicions de la definició dels jocs simples, la seva funció característica pren solament els valors 0 i 1. Per tant, és lògic dividir el total de possibles coalicions en dues classes. D'una banda, les coalicions amb la funció característica avaluada en elles pren el valor 1 i, d' altra banda, aquelles amb les que pren el valor 0.

Definició 4.2. *Definim el conjunt de coalicions guanyadores en un joc $v \in S^N$ com:*

$$W(v) := \{S \subset N : v(S) = 1\}.$$

També 'podriem treballar amb les coalicions perdedores, que és el concepte complementari. El conjunt de coalicions perdedores en un joc $v \in S^N$ com:

$$L(v) := \{S \subset N : v(S) = 0\}.$$

A partir del conjunt de coalicions guanyadores $W(v)$, en podem definir un altre. Per exemple, si tant el conjunt $A \in W(v)$ com també $B \in W(v)$, però en canvi tenim que $B \notin W(v)$, aleshores tenim que la coalició AB està dins el conjunt de coalicions guanyadores i, no obstant, el jugador B no té cap paper decisiu en aquesta coalició. És per això que definim el conjunt de coalicons minimals.

Definició 4.3. *Donat un joc simple $v \in S^N$, tenim que la col·lecció minimal de coalicions guanyadores ve definida de la següent manera:*

$$W^m(v) := \{S \in W\ :\ si\ T \in W\ \ i\ T \subset S,\ aleshores\ T = S\}.$$

És fàcil construir el conjunt $W(v)$ a partir del conjunt $W^m(v)$. Es pot incloure a cada coalició dins la col·lecció de coalicions minimals, totes les possibles combinacions de la resta de jugadors s'uneixen amb les que ja formen part del conjunt, fent així les coalicions (minimals i no) guanyadores.

Exemple 4.4. Suposem que en Bernat és el fill petit d'una família de cinc integrants. D'una banda, els seus pares (el Miquel i l'Olga). La família Rampell, a més del Bernat, té dues altres filles, la Teresa i l'Adela. Amb els seus amics, el Bernat vol anar al cinema i demana permís a casa. Podrà anar-hi en el cas d'obtenir el permís a casa. Es considera que té el permís a casa en cas que tant el seu pare com la seva mare ho acceptin. La opinió de les germanes, pel que respecta al permís, és indiferent.

Considerem el conjunt de jugadors de la família $F = \{P, M, T, A\}$ on P significa pare, M significa mare, T representa la Teresa i A representa la seva germana Adela. Per tant, si definim aquesta situació com el joc $v \in S^F$ tenim que la funció característica té la següent forma:

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{en cas que}\{P, M\} \subset S \\ 0 & \text{en el cas que}\{P, M\} \not\subset S \end{cases}$$

Ara, aplicarem els conceptes que hem descrit anteriorment a aquest exemple. D'una banda, trobem quin és el conjunt de coalicions guanyadores de v és el conjunt de coalicions que fa que la fu nció característica sigui igual a 1. Està clar que la condició per a la igualtat és que el conjunt $\{P, M\}$ sigui un subconjunt de la coalició. Per tant obtindríem:

$$W(v) = \{\{P, M\}, \{P, M, T\}, \{P, M, A\}, \{P, M, T, A\}\}$$

El conjunt de les coalicions perdedores en el mateix joc v és justament complementari del de coalicions guanyadores. Hi pertanyen totes les coalicions que no incloguin el conjunt $\{P, M\}$, en el cas que només cotingui un dels dos progenitors, la coalició també és perdedora. Per tant tenim que:

$$L(v) = \{\{P\}, \{P, T\}, \{P, A\}, \{P, T, A\}, \{M\}, \{M, T\}, \{M, A\},$$
$$\{M, T, A\}, \{T\}, \{T, A\}, \{A\}\}$$

Ara, a partir del conjunt de coalicions guanyadores, buscarem precisament quina és la col·lecció minimal de coalicons guanyadores. Recordem que es defineix el conjunt com $W^m(v) := \{S \in W$: si $T \in W$ i $T \subset S$, aleshores $T = S\}$.

Claramente veiem que el conjunt $\{P, M\}$ és un subconjunt de totes les coalicions que pertanyen al conjunt $W(v)$. Per tant tenim que justament:

$$W^m(v) = \{\{P, M\}\}.$$

Aquest és un exemple pràctic d'un joc simple on es pot veure clarament com es construeix el conjunt de coalicions guanyadores i el de perdedores. A més, un cop trobada la col·lecció minimal de coalicons guanyadores, veiem que el conjunt general de coalicons guanyadores es genera justament fent totes les possibles combinacions amb els jugadors que no pertanyen a les coalicions de la col·lecció.

4.1 Jocs de majoria

Ara ens centrarem en un tipus concret de jocs simples. Els jocs simples de majories, en diferents formes. Podem trobar els jocs de majoria així com també els jocs de majoria ponderada. Aquest tipus de jocs són precisament els que ens seran més útils pels nostres propòsits d'estudi pràctic. Definirem ara els jocs de majoria o jocs de quota.

Definició 4.5. *Sigui un nombre real $q \in \mathbb{R}$ que diem quota. El joc simple $v \in S^N$ és un joc de majoria quan el conjunt de coalicions guanyadores del joc compleix el següent:*

$$W(v) = \{S \subset N : |S| \geq q\}$$

En aquest tipus de jocs, cada jugador té la mateixa capacitat de suposar un canvi. És a dir, si aconsegueixen que q o més jugadors es sumin a la coalició, aleshores el valor de la funció característica d'aquesta coalició, serà 1. En cas que el total de jugadors a la coalició no arribi a q, aleshores tenim que la seva funció característica val 0.

Un cas específic dels jocs de majoria són els jocs de majoria simple, que compleixen justament la condició de majoria simple.

Definició 4.6. *Un joc de majoria $v \in S^N$ compeix la condició de majoria simple si la quota $q \in \mathbb{R}$ és tal que $q \geq \frac{n+1}{2}$. Si la quota és tal, diem que és un joc de majoria simple.*

A els jocs de majoria, de forma general, ens referim sovint també amb una notació específica. Com cada un dels jugadors, entrant o sortint de la coalició, fa que el cardinal tingui un canvi d'una unitat, aleshores representem el seu pes amb un 1. Expressem el joc v que té la quota $q \in \mathbb{R}$ com $v \equiv [q; 1, 1, ..., 1]$.

Ens trobem que els jocs de majoria són molt útils a l'hora de la presa de decisons col·lecives. D'una forma gairebé diaria formem part d'aquests jocs. Decidir entre amics si anem a un restaurant o a un altre, per exemple, seria una situació quotidiana amb la que ens podem trobar.

No obstant, cal dir que malgrat ser el cas més comú de presa de decisions, aquest model en concret no és el més comú quan es parla d'escenaris polítics. Tret de situacions molt específiques quan es consulta a la ciutadania directament decisions binàries, la condició de que cada jugador té el mateix pes, no es compleix.

En aquestes circumstàncies particulars, principalment en casos de referèndums, sí que podem usar aquest model. No obstant, les decisions polítiques normalment es modelen seguint un tipus de jocs que són també de majoria, però de majoria ponderada.

Molt sovint, a l'hora de simplificar les decisions polítiques, grups de persones s'associen compartint un paquet d'idees socials, eonòmiques, d'identitat i més, amb l'objectiu de representar la població. En els sistemes de representació política, aquestes agrupacions es coneixen com a partits polítics i cada un acostuma a tenir una influència diferent, depenent del nivell de recolzament ciutadà.

De forma més general, aquesta idea es pot traslladar a la teoria de jocs. En aquests jocs de votació, els diferents agents tenen diferents pesos. Aquesta és la principal diferència amb els jocs anteriors. En quant a similituds, aquest tipus de joc també té una quota, també és un tipus de joc simple ($v \in S^N$) i podem aplicar-hi també les idees de conjunts de coalicions guanyadores $W(v)$ i el de la col·lecció minimal de coalicions guanyadores $W^m(v)$. Ara donarem una definició rigorosa.

Definició 4.7. *Un joc simple $v \in S^N$ és un joc de majoria ponderada si hi ha una qupta $0 < q \in \mathbb{R}$ i un vector de pesos no negatius $(p_1, p_2, ..., p_n) \in \mathbb{R}^n$ tals que:*

$$v(S) = 1 \text{ si i només si } \sum_{i \in S} p_i \geq q.$$

De mode similar i integrador al vist abans, els jocs de majoria (inclosos els de majoria ponderada) es poden representar d'aquest mode $v \equiv [q; p_1, p_2, ..., p_n]$, amb el valor q abans del punt i coma representant la quota, mentre que la resta és el vector ordenat de pesos que té cada jugador. Ens podem fixar que la representació que abans haviem donat dels jocs de majoria, era un cas particular en el que tots els jugadors tenien el mateix pes de 1.

Exemple 4.8. L'exemple descrit abans com el joc simple d'en Bernat per poder o no anar al cinema , es pot modelitzar com a joc de majoria ponderada de la següent manera, per exemple:

El vector de pesos associat al pare, la mare, la Teresa i l'Adela podria ser (10, 10, 4, 4) respectivament. I la quota és $q = 20$. Així doncs, quedaria el joc de majoria ponderada $[20; 10, 10, 4, 4]$.

Clarament, veiem que l'única manera d'arribar a assolir la quota és que, com a mínim tant el pare com la mare aprovin la decisió. Veiem també que la posició de les germanes mai no condiciona el resultat final, convertint-les aixé en jugadores nul·les, tot i que el seu pes no sigui de 0.

Exemple 4.9. Un altre exemple il·lustratiu i que hem anat repetint en diferents models de jocs per fer-los més entenedors és el joc del guant. Recordem les normes del joc: Aquest consisteix en tres jugadors A, B i C, la gran coalició és $M = \{A, B, C\}$. El jugador A té el guant dret. Mentre que tant el jugador B com el C tenen un guant esquerra.

Entre els jugadors volen reunir un parell (dret i esquerra) de guants per poder vendre'ls. La funció d'utilitat és $v(S) = 1$ si la coalició $S \subset M$ conté un parell complet de guants i, en altre cas, $v(S) = 0$.P er tant el joc és (N, v) on $N = \{A, B, C\}$ i tenim $v(A) = v(B) = v(C) = v(BC) = 0$, mentre que $v(AB) = v(AC) = v(N) = 1$. El conjunt de coalicions guanyadores és

$$W(v) = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, B, C\}\},$$

mentre que la col·lecció minimal de coalicions guanyadores és

$$W^m(v) = \{\{A, B\}, \{A, C\}\}.$$

Per aconseguir reunir aquestes característiques, podem considerar donar els pesos de $p_A = 2$, $p_B = p_C = 1$ i una quota de $q = 3$. En aquest cas, per a que la utilitat d'una coalició S sigui de 1, cal que $\sum_{i \in S} p_i \geq q = 3$. Veiem clarament que totes les coalicions que compleixen això han de contenir el primer jugador (el quant dret) i, com a mínim, un dels dos últims jugadors (el guant dret).

Per tant, hem pogut descriure el joc del guant com un joc de majoria ponderada $v \equiv [3; 2, 1, 1]$.

Hem vist ara dos exemples de jocs que hem vist anteriorment modelitzats com a jocs de majoria. Si bé fer-ho així ens serveix per a introduir i comprendre millor com funcionen i els mètodes d'analitzar els jocs de majoria, no son representatius. Principalment els jocs de majoria ponderada es fan servir per a modelitzar situacions de votacions. Aquests poden ser, per exemple, decisions empresarials en consells d'accionistes, o bé decisions plítiques en parlaments partidistes. Tot seguit veurem un exemple que sí és un joc de votació.

Exemple 4.10. El passat dia 28 de maig, es van dur a terme a Catalunya eleccions municipals. La lupa va estar posada en la ciutat de Barcelona. L'actual alcalsessa es presentava per revalidar el mandat amb el partit BeC (Barcelona en Comú). El PSC, partit que ha governat en coalició durant les últimes dues legislatures, s'hi presentava amb la intenció d'aconseguir la primera plaça. A més, per desbancar l'alcaldessa actual, una llista liderada per l'antic alcalde de la ciutat (TriasxBCN) s'hi presentava també amb expectatives de victòria. El partit guanyador de les anteriors eleccions, tot i que no va poder formar govern, es presentava en la llista d'ERC. Altres forces sense opcions de victòria tamé hi concorrien, com PP, Vox i CUP.

Els resultats de la nit electoral van donar els següents representants a cada formació. D'una banda, el partit guanyador va ser TriasxBCN amb 11 regidors. El segon classificat va ser el PSC amb 10 representants, seguit de molt a prop per BeC amb 9. A força més distància ERC va obtenir 5 regidors, per 4 del PP i 2 de Vox. La resta de formacions que hi concorrien van quedar sense representació.

El consistori, doncs compta de 41 regidors i, per gairebé totes les votacions (inclosa també, tot i que amb alguna particularitat, l'elecció de l'alcalde) funciona amb un sistema de majoria simple. És a dir, si alguna proposta obté 21 vots, queda aprovada. Així doncs, podirem modelitzar el joc de la següent manera: $v \equiv [21; 11, 10, 9, 5, 4, 2]$.

Podem veure que hi ha moltes coalicions guanyadores i, per aquest mateix motiu, no donarem de forma extensiva el conjunt de coalicions guanyadores. Ara bé, la col·lecció minimal de coalicions guanyadores és considerablement més reduïda i, aleshores aquesta sí pot ser donada aquí:

$$W^m(v) = \{\{TriasxBCN, PSC\}, \{TriasXBCN, BeC, ERC\},\\ \{TriasxBCN, BeC, PP\}, \{TriasxBCN, BeC, Vox\}, \{TriasxBCN, ERC, PP, Vox\},\\ \{PSC, BeC, ERC\}, \{PSC, BeC, PP\}, \{PSC, BeC, Vox\}, \{PSC, ERC, PP, Vox\}\}$$

D'una banda, a primera vista veiem que hi ha 9 coalicions minimals. El conjunt total de coalicions guanyadores el podem obtenir fent unions de les coalicons ja existents en aquesta col·lecció afegint-hi els partits que no hi formin part. Podem veure que en totes les coalicions guanyadores, almenys un dels dos primers partits hi és. És a dir, no es pot aconseguir en cap cas la majoria si cap dels dos primers partits (TriasxBCN i PSC) ho desitgen.

D'altra banda, veiem que aquests dos partits són simètrics. Si intercanviem els partits $\{TriasxBCN, PSC\}$, les possibilitats de coalició són exactament les mateixes. De la mateixa manera, la tripla de partits $\{ERC, PP, Vox\}$ és també simètrica dos a dos. Tots tenen doncs la mateixa influència teòrica a l'hora de formar coalicions guanyadores, i per tant el mateix poder. En aquest exemple, no tenim cap jugador nul, és a dir, no tenim cap jugador que no aparegui en la llista de coalicions minimals. Per tant tot els partits amb respresentació al consistori tenen influència política pràctica en cert grau.

En el moment de realització del treball, encara no s'ha constituït el ple de l'Ajuntament i per tant, encara no s'ha realitzat cap votació. Precisament aquest estudi és rellevant en la crònica política actual, ja que es busquen quines poden ser les coalicions diferents per a escollir l'alcalde de la ciutat (justament la primera votació de majoria simple que s'hi farà).

En l'exemple antrior, hem vist que no es pot formar cap aliança guanyadora sense la participació de les dues primeres forces polítiques. És a dir, tenen la capacitat de blocar o no qualsevol proposta. Precisament la següent definició és una formalització d'aquesta idea.

Definició 4.11. *Sigui $v \in S^N$ un joc simple. Diem que el jugador $i \in N$ és un jugador amb capacitat de veto si, per a qualsevol coalició $C \subset N \setminus \{i\}$ tenim que:*

$$v(C) = 0.$$

Exemple 4.12. Un exemple clar dels jugadors amb capacitat de veto el trobem al Consell de Seguretat de les Nacions Unides. És un comitè format per 15 països, cinc dels quals en són membres permanents. Els altres deu són rotatoris i s'estableixen per quotes segons zones geopolítiques al món.

Els cinc membres permaments són França, la Xina, els Estats Units, Rússia i el Regne Unit. Per prendre les decisions al Consell de Seguretat de les Nacions Unides, l'únic dels comitès de UN (Nacions Unides) que té poder vinculant en les seves decisions, cal aconseguir l'acord entre nou membres.

Així doncs, sembla que les decisions aquí les podem modelitzar seguint un joc de votació de majoria, no de majoria simple ja que requereix més de la meitat dels vots. Ara bé, al finalitzar la Segona Guerra Mundial es va considerar que les grans potències havien d'estar d'acord en les decisions mundials de seguretat. Aleshores, en el sistema de votació del Consell de Seguretat de la UN , els membres permanents tenen capacitat de veto. Això és que tots i cada un dels membres permanents s'adhereixen a la definició abans exposada dels jugadors amb capacitat de veto.

Per tant podem modelitzar el joc com un de majoria ponderada on la quota només es pot assolir amb la unanimitat dels cinc membres permanents i a més amb quatre membres més del consell (per arribar als nou membres mínims requeits per aprovar una ressolució. Una possibilitat és establir uns pesos als membres permanents prou alts tals que sigui impossible assolir la quota sense tots ells. És a dir, hem de tenir en compte que els jugadors sense capacitat de veto no puguin tenir plegats el pes necessari com per superar en força de vot a un dels països amb dret de veto. Podem definir el joc de votació al Consell de Seguretat de les Nacions Unides $v \in S^N$ com

$$v \equiv [54; 10, 10, 10, 10, 10, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$$

on els cinc primers jugadors són els membres permaments. Clarament veiem que es compleix la condició de veto dels membres permanents, ara ho veurem.

Suposem el jugador 1 (que com els cinc primers comparteixen pes, és simètric i, per tant, intercanviable amb ells). Suposem ara una coalició $C \subset N \setminus \{1\}$. Al ser els jocs simples monòtons, tenim que, si considerem la coalició $M = N \setminus \{i\}$, com tenim que $C \subset M$, aleshores $v(C) \leq v(M)$. Considerem ara la coalició M, que té un pes de 4*10 + 10*1 = 50. Com, clarament, tenim que $50 < 54$, aleshores $v(M) = 0$. Això ens demostra que $v(C) = 0$, per a qualsevol $C \subset N \setminus \{1\}$, i per tant el jugador 1 té capacitat de veto. Com hem vist també que els cinc primers jugadors són simètrics, aleshores també hem provat que els cinc primers jugadors (els membres permanents) tenen capacitat de veto.

Els jocs de votació en teoria de jocs són una eina important per analitzar situacions en que agents diferents tenen la capacitat de prendre decisions conjuntament. Aquests jocs permeten estudiar com es formen i es gestionen les coalicions, aixÃ com els resultats que poden sorgir d'aquestes interaccions.

Una conclusió clau dels jocs de votació és que les característiques individuals dels agents, com ara els seus pesos o preferències, poden influir en el resultat final d'una votació. Els jocs de majoria ponderada, en particular, tenen en compte aquestes diferències en els pesos dels agents i determinen les condicions en que una coalició guanyadora pot aprovar una proposta.

A més, els jocs de votació posen de manifest la importància de les coalicions i les estratègies de negociació. Diferents combinacions d'agents poden formar coalicions per aconseguir els seus objectius, i l'habilitat per formar aliances pot ser crucial per influir en els resultats de les votacions.

Tanmateix, els jocs de votació també posen de manifest alguns problemes i desafiaments, com ara la possibilitat de blocar propostes amb coalicions minoritàries o l'existència de múltiples coalicions guanyadores. Aquests aspectes poden conduir a situacions de conflicte i negociació intensa entre els agents per aconseguir els seus interessos.

En resum, els jocs de votació en teoria de jocs són una eina valuosa per comprendre les dinàmiques de presa de decisions en situacions en que hi ha múltiples agents amb preferències i pesos diferents. Aporten una visió analítica sobre com es formen les coalicions, com es prenen les decisions i quins resultats es poden esperar en aquests contextos complexos de presa de decisions conjuntes.

5 Índexs de poder

Els índexs de poder són eines fonamentals en la teoria de jocs per analitzar la distribució del poder entre els jugadors d'un joc col·lectiu. Aquesta teoria s'ocupa de l'estudi de les interaccions estratègiques entre agents racionals que busquen maximitzar els seus propis interessos. L'anàlisi del poder és crucial per comprendre com els jugadors poden influir en el resultat d'un joc i com s'estructuren les relacions de poder dins del mateix.

En la teoria de jocs, l'índex de poder és una mesura que intenta quantificar la importància o influència relativa d'un jugador dins d'un joc col·lectiu. Hi ha diversos tipus d'índexs de poder, cadascun amb els seus avantatges i limitacions. Els més comuns són:

1. Índex de Shapley: Aquest índex es basa en la teoria de la distribució justa i atorga a cada jugador una mesura de poder en funció de la seva contribució marginal al valor total del joc. Considera totes les possibles coalicions de jugadors i avalua com canvia el valor del joc quan un jugador es va afegint a cada coalició.

2. Índex de Banzhaf: Aquest índex es basa en el concepte de poder de votació i mesura la influència que té un jugador en el resultat d'un joc col·lectiu. Es calcula determinant quantes vegades la inclusió d'un jugador en una coalició canvia el resultat del joc.

Ens centrarem en aquests dos per a estudiar els jocs de votació. Tot seguit els analitzarem, definirem i entendrem de forma més profunda, juntament amb els conceptes necessàris per a arribar a ells.

Els índexs de poder són útils, doncs, per a analitzar la distribució del poder en diferents escenaris i per avaluar l'equitat de les decisions col·lectives. A més, poden ajudar a predir el comportament estratègic dels jugadors i a entendre com es poden formar i mantenir coalicions en jocs col·lectius. No obstant això, cal tenir en compte que els índexs de poder són models simplificats de la realitat i no capturen tots els matisos i dinàmiques de les interaccions estratègiques.

5.1 Conceptes bàsics

Ja hem vist que la lupa a l'hora d'estudiar els jocs simples és diferent a la que tenim quan analitzem la resta de jocs d'utilitat transferible i cooperatius. El focus en l'anàlisi es posa ara més que no pas en el valor de les contribucions o les seves estratègies, sinó que en la capacitat d'influència de cada jugador. És per això que ens és especialment útil el concepte d'índex de poder, un valor estandaritzat per poder comparar la influència de diferents jugadors en el mateix joc, i també comparar-la en diferents jocs.

Definició 5.1. *Un índex de poder és una regla d'assignació de S^N sobre $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ que a cada joc $v \in S^N$ li assigna el vector $f(v) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Diem que la component i-èssima del vector $f(v)$ és el poder que té el jugador i en el joc $v \in S^N$.*

Un concepte fonamental a l'hora de determinar els índexs de poder és el del jugador pivotant. Conceptualment, el que designa és un jugador que amb la seva inclusió o exclusió d'una coalició, fa que aquella canviï d'estat (de perdedora a guanyadora o viceversa). Tot seguit exposem la definició rigorosa:

Definició 5.2. *Sigui un joc simple $v \in S^N$. Es diu que el jugador i és un jugador pivotant per a la coalició C si tenim que*

$$v(C) = 1 \text{ \textbf{\textit{mentre que}} } v(C \setminus \{i\}) = 0$$

Veurem un exemple molt clar amb la intenció de clarificar el concepte de jugador pivotant.

Exemple 5.3. Suposem un joc de majoria ponderada amb dos jugadors A i B. Els jugadors tenen, respectivament uns pesos de 2 i 1. Suposem que en el joc $v \in S^N$ la quota q és de 3. Aleshores ens queda que el joc ve definit de la següent manera:

$$v \equiv [3; 2, 1]$$

I tenim que l'única coalició guanyadora és la gran coalició N, que té un pes de 3 i, per tant assoleix la quota. Les altres coalicions no assoleixen la quota: el coalició buida té un pes de zero, la coalició A té un pes insuficient de 2, i la coalició B té tmbé un pes insuficient de 1. Per tant, per valorar els jugadors pivotants, cal centrar-nos en la gran coalició, ja que la condició demana que $v(C) = 1$.

Ara, estudiem si els jugadors A i B són pivotants en la gran coalició. Veiem que:

$$v(N \setminus A) = v(B) = 0, \text{ \textbf{ja que el pes de B és} } 1 \ngeq 3 = q.$$

$$v(N \setminus B) = v(A) = 0, \text{ \textbf{ja que el pes de A és} } 2 \ngeq 3 = q.$$

Ens queda doncs, que els jugadors A i B són jugadors pivotants de la gran coalició del joc v.

Exemple 5.4. De manera similar, considerem uj joc gairebé idèntic, on només canviarem la quota. Suposem un joc de majoria ponderada amb dos jugadors A i B. Els jugadors tenen, respectivament uns pesos de 2 i 1. Suposem que en el joc $w \in S^N$ la quota q és ara de 2. Aleshores ens queda que el joc ve definit de la següent manera:

$$w \equiv [2; 2, 1]$$

I tenim que hi ha dues coalicons guanyadores. D'una banda la coalició A que té un pes de 2, justament el mateix que la quota. D'altra banda, la gran coalició N és també guanyadora, que té un pes de 3 i, per tant assoleix la quota. Les altres coalicions no assoleixen la quota: el coalició buida té un pes de zero i la coalició B té tmbé un pes insuficient de 1.

D'una banda, està clar que en la coalició A el jugador A és pivotant, ja que la coalició buida és perdedora, mentre que la coalició A és guanyadora.

Ara, estudiem si els jugadors A i B són pivotants en la gran coalició. Veiem que:

$$w(N \setminus A) = w(B) = 0, \textbf{ ja que el pes de B és } 1 \ngeq 3 = q.$$

$$w(N \setminus B) = w(A) = 1, \textbf{ ja que el pes de A és } 2 \geq 2 = q.$$

Ens queda doncs, que només el jugador A és un jugador pivotant de la gran coalició del joc w.

5.2 Índex de Shapley-Shubik

La restricció del valor de Shapley a la classe dels jocs simples es coneix com índex de Shapley-Shubik. Ara bé, la caracterització del valor de Shapley pels jocs cooperatius TU de n jugadors, G^N, no és vàlida pels jocs simples de n jugadors, S^N. La principal raó d'això és que la suma de jocs simples no té com a resultat un joc simple, i per tant, d'additivitat del valor de Shapley no té sentit en la seva restricció a S^N.

L'índex de poder de Shapley-Shubik és una variant de l'índex de Shapley, un dels índexs de poder més coneguts en la teoria de jocs. Aquest índex es va proposar per primera vegada pels economistes Lloyd Shapley i Martin Shubik l'any 1954 i proporciona una mesura del poder relatiu dels jugadors en un joc col·lectiu.

L'índex de Shapley-Shubik es basa en la idea de distribuir el poder de manera equitativa entre els jugadors. En un joc col·lectiu, cada jugador contribueix a l'èxit o fracàs del joc a través de la seva participació en diferents coalicions amb els altres jugadors. L'índex de Shapley-Shubik avalua la contribució marginal de cada jugador al valor total del joc, tenint en compte totes les possibles ordenacions seqüencials de la participació dels jugadors.

Per a calcular l'índex de Shapley-Shubik, s'analitzen totes les seqüències possibles en que els jugadors poden afegir-se al joc i es mesura com canvia el valor total del joc amb cada addició. Aquest procés reflecteix la idea que la contribució d'un jugador a una coalició pot ser diferent en funció de l'ordre en que els jugadors es van afegint.

Siguin v i $w \in S^N$ dos jocs simples. El conjunt de coalicions guanyadores del joc simple $v \vee w$ és la unió dels seus conjunts de coalicions guanyadores. En canvi, en el joc $v \wedge w$ ho és la seva intersecció.

Vist això, ara definirem la propietat de transferibilitat.

Definició 5.5. *Un índex de poder ϕ satisfà la propietat de transferibilitat en cas que per a cada parell $v, w \in S^N$ tinguem:*

$$\phi(v \vee w) + \phi(v \wedge w) = \phi(v) + \phi(w).$$

Teorema 5.6. *L'índex de Shapley-Subik és l'únic que satisfà les propietats d'eficiència, del jugador nul, de simetria i de transferibilitat.*

Demostració. Pel teorema vist al capítol del valor de Shapley, les tres primeres propietats ja les hem provades. Ara, donats dos jocs $v, w \in S^N$ tenim que $v + w = v \vee w + v \wedge w$ i, com hem vist també que el valor de Shapley satisfà la propietat d'additivitat, aleshores l'índex de Shapley-Subik satisfà la transferibilitat.

Ara ens cal demostrar la unicitat, que ho farem per inducció en el nombre minimal de coalicions guanyadores, $|W^m|$.

Sigui ϕ un índex de poder que satisfà totes les propietats. Suposem un joc simple v.

- Cas $|W^m| = 1$: Aleshores el joc v és el joc d'unanimitat per a certa coalició S. Denotarem en aquesta demostració el joc d'unanimitat per una certa coalició S com a w^S, per tant $v = w^S$. Per les tres primeres propietats, tenim que $\phi(v) = \Phi(v)$.
- Pas d'inducció forta: Ara assumim que per a cada joc $v \in S^N$ amb $|W^m| \leq k - 1$, tenim també que $\phi(v) = \Phi(v)$. Suposem que $v \in S^N$ té que $|W^m| = k$, aleshores $W^m = \{S_1, ..., S_k\}$ i tenim que $v = w^{S_1} \vee ... \vee w^{S_k}$. Ara, sigui $z = w^{S_2} \vee ... \vee w^{S_k}$. Per tant tenim que $w^{S_1} \vee z = v$ i aleshores $w^{S_1} \wedge z = \bigvee_{T \in W^m \setminus \{S_1\}} w^{S_1 \cup T}$.

El cardinal de la col·lecció minimal de coalicions guanyadores dels jocs simples w^{S_1}, z i de $w^{S_1} \wedge z$ és més petit que k en tots tres casos. Aleshores seguint la hipòtesi d'inducció, tenim que en aquests tres jocs l'índex de poder ϕ és el mateix que l'índex de Shapley-Shubik, Φ. Per la propietat de transferibilitat, tenim que $\phi(w^{S_1} \vee z) + \phi(w^{S_1} \wedge z) = \phi(w^{S_1}) + \phi(z)$. I com tenim que $w^{S_1} \vee z = v$, aleshhores:

$$\begin{aligned}\phi(v) = \phi(w^{S_1}) + \phi(z) - \phi(w^{S_1} \wedge z) \\ = \Phi(w^{S_1}) + \Phi(z) - \Phi(w^{S_1} \wedge z) \\ = \Phi(w^{S_1} + z - w^{S_1} \wedge z) = \Phi(v).\end{aligned}$$

Per inducció, doncs, queda demostrat que l'únic índex de poder que reuneix aquestes quatre propietats és l'índex de Shapley-Shubik. □

Ara ens cal rescatar el concepte de jugador pivotant. El conjunt de coalicions S en les que un jugador i és pivotant el denotarem amb SW_i. Amb aquesta notació tenim que:

$$\Phi_i(v) = \sum_{S \in SW_i(v)} \frac{|S|!(n - |S| - 1)!}{n!}. \tag{5.1}$$

El cardinal de $SW_i(v)$ el denotarem per $\mu_i(v)$ i el total de situacions pvotants del joc v el denotarem per $\overline{\mu}(v) := \sum_{i \in N} \mu_i(v)$. Aleshores, podem veure que l'índex de Shapley-Shubik és una mitjana ponderada, depenent de quants jugadors formen part de cada coalició, del nombre de cops en que cada jugador és pivotant.

Exemple 5.7. Suposem el següent joc de majoria ponderada $v \in S^N$ amb tres jugadors $\{P_1, P_2, P_3\}$. El joc ve definit amb la quota i pesos que veurem tot seguit: $v \equiv [6; 4, 3, 2]$.

Com hi ha tres jugadors, aleshores el nombre de permutacions és de 3!=6. És a dir, hi ha sis coalicions amb ordre diferents, que llistem a continuació.

$$\{P_1, P_2, P_3\}, \{P_1, P_3, P_2\}, \{P_2, P_1, P_3\}, \{P_2, P_3, P_1\}, \{P_3, P_1, P_2\}, \{P_3, P_2, P_1\}$$

Ara ens cal evaluar quin és el jugador pivotant en cada una de les coalicions. Veurem dues coalicions per entendre la dinàmica i la resta les calcularem de forma implícita.

- **Coalició** $\{P_1, P_2, P_3\}$: Els jugadors en aquesta coalició entren de forma ordenada segons la permutació. Aleshores quan entra el primer jugador, P_1, la coalició té un pes de 4, per sota de la quota de 6 i aleshores insuficient. Per tant, el jugador P_1 no és pivotant en aquesta coalició ordenada. Acte seguit entra a formar part de la mateixa el jugador P_2, tenint doncs la coalició un pes de 4+3=7, que assoleix la quota de 6. Així doncs, el jugador pivotant en aquesta coalició ordenada és el jugador P_2.
- **Coalició** $\{P_3, P_2, P_1\}$: Els jugadors en aquesta coalició entren de forma ordenada segons la permutació. Aleshores quan entra el primer jugador, P_3, la coalició té un pes de 2, per sota de la quota de 6 i aleshores insuficient. Per tant, el jugador P_3 no és pivotant en aquesta coalició ordenada. Acte seguit entra a formar part de la mateixa el jugador P_2, tenint doncs la coalició un pes de 2+3=5, que segueix sense assolir la quota de 6 i el jugador P_2 no és pivotant aquí. Per últim entra a formar part de la coalició el jugador P_1, formant la gran coalició amb un pes de 2+3+4=9 que supera amb escreix la quota. Així doncs, el jugador pivotant en aquesta coalició ordenada és el jugador P_3.

Si fem el mateix en totes les coalicions tindrem els jugadors pivotants en cada cas. El jugador P_2 és pivotant només en la coalició que ja hem vist $\{P_1, P_2, P_3\}$. De manera similar, el jugador P_3 és només pivotant en el cas $\{P_1, P_3, P_2\}$. En canvi, el jugador P_1 exerceix el paper de jugador pivotant en la resta de les coalicions, en total quatre. Per expressar les dades de forma més visual despleguem la taula:

Jugador	Cardinal de coalicions on és pivotant	Índex de Shapley-Shubik
P_1	4	4/6= $0{,}\overline{6}$
P_2	1	1/6= $0{,}1\overline{6}$
P_3	1	1/6= $0, 1\overline{6}$
$\sum$	6	1

Taula 5: Càlcul de l'índex de Shapley-Shubik

Així doncs, veiem que en aquest joc l'índex de poder de Shaoley-Shubik ve donat pel vector

$$\Phi(v) = (0.\overline{6}, 0.1\overline{6}, 0.1\overline{6})$$

Hem trobat doncs els valors de índex de poder de Shapley-Shubik per un joc de majoria ponderada $v \in S^N$.

5.3 Índex de Banzhaf

Hem vist en el punt anterior que l'índex de Shapley-Shubik és un índex de poder en el que el valor de les situacions pivotants ve ponderat segons el nombre de jugadors que hi ha a cada una de les coalicions. Un podria retreure que totes i cadascuna de les situacions pivotants han de tenir el mateix pes. I, de fet, aquesta va ser precisament la idea introduïda per Banzhaf l'any 1965. Va proposar el nombre de situacions pivotants de cada jugador com un nou índex de poder, $\mu(v)$. Com ens convé que l'índex de poder sigui comparable amb la resta d'índexs, aleshores considerem l'índex normalitzat de Banzhaf.

Definició 5.8. *Definim l'índex normalitzat de Banzhaf com la relació entre les situacions pivotants d'un jugador i les situacions totals en aquell joc. Per a cada $v \in S^N$ i cada $i \in N$, tenim doncs que:*

$$\beta_i(v) := \frac{\mu_i(v)}{\overline{\mu}(v)}. \tag{5.2}$$

Hi ha també una altra variació coneguda com l'índex de Banzhaf que té una diferent normalització.

Definició 5.9. *Per a cada $v \in S^N$ i cada $i \in N$, tenim que l'índex de poder de Banzhaf és*

$$Bz_i(v) := \frac{\mu_i(v)}{2^{n-1}}. \tag{5.3}$$

Hem d'interpretar aquest índex com la probabilitat qu el jugador $i \in N$ sigui pivot en una coalició $S \subset N$ escollida a l'atzar. Ara bé, té una diferència respecte els índexs de Shapley-Shubik i de Banzhaf normalitzat, que és que aquests dos sempre reparteixen l mateix poder de 1 entre tots els jugadors, mentre que aquest índex de Banzhaf pot sumar un poder total diferent de 1.

En la nostra part pràctica farem servir l'índex normalitzat de Banzhaf. Per tant en els exemples per a la comprensió presentats tot seguit farem especial èmfasi en aquest.

Exemple 5.10. Considerarem el mateix joc que l'anterior. Aquest ens servirà per veure, a més de com es calcula d'índex de poder de Banzhaf normalitzat, que $\beta \neq \Phi$. Recordem quin era el joc. Suposem el següent joc de majoria ponderada $v \in S^N$ amb tres jugadors $\{P_1, P_2, P_3\}$. El joc ve definit amb la quota i pesos que veurem tot seguit: $v \equiv [6; 4, 3, 2]$.

En en cas de Banzhaf normalitzat, hem de considerar quines són les coalicions guanyadores i quins són els jugadors pivotants (si n'hi ha) en cada una. Aquí no tenim en consideració l'ordre d'entrada a la coalició, simplement si els jugadors són o no pivotants en cada una d'elles. Ara, llistem el conjunt de coalicions guanyadores per poder després examinar-lo.

$$W(v) = \{\{P_1, P_2\}, \{P_1, P_3\}, \{P_1, P_2, P_3\}\}$$

Com es tracta només de tres coalicions guanyadores, ens podem permetre el luxe d'analitzar-les una a una. El que hem de fer és tenir en compte el nombre de cops en que cada jugador és pivotant, és a dir $\mu_i(v)$, i també quin és el sumatori de tots els $\mu_i(v)$, és a dir $\overline{\mu}(v)$.

- **Coalició** P_1P_2: Tenim que aquesta coalició suma un pes de 7, superant el llindar per ser coalició guanyadora establerta per la quota q de 6. Si marxa el jugador P_1 ens trobem que la coalició suma un pes de 3 (el pes de P_2) que és insuficient per a ser guanyadora. De manera semblant, veiem que si n'excloem el jugador P_2 ens queda que la coalició té també un pes insuficient de 4, que no supera a quota. Així doncs, tenim que tant el jugador P_1 com el jugador P_2 són pivotants en aquesta coalició. Aleshores, de forma provisional, posem que $\mu_1(v) = 1$, $\mu_2(v) = 1$, $\mu_3(v) = 0$ i que $\overline{\mu}(v) = 2$.

- **Coalició** P_1P_3: En aquest cas, la coalició suma un pes de justament 6, el llindar establert per la quota per a ser una coalició guanyadora. Com cap dels dos jugadors no té pes nul, l'exclusió de qualsevol d'ells farà que el pes de la coalició sigui menor que el que té ara (recordem que és justament la quota q) i, per tant no assoleixi quota i sigui perdedora. Per tant tots dos jugadors P_1 i P_3 són pivotants en aquesta coalició. Aleshores, de forma sempre provisional, posem que $\mu_1(v) = 2$, $\mu_2(v) = 1$, $\mu_3(v) = 1$ i que $\overline{\mu}(v) = 4$.

- **Coalició** $P_1P_2P_3$: Aquesta coalició reuneix un pes de 9 i, per tant, és guanyadora. Ara, veurem quins jugdors són pivotants. Ho farem per un altre mètode als fets servir anteriorment. En comptes de calcular el pes de cada coalició si excloem un jugador, veurem si la coalició sense aquell jugador forma part del conjunt de coalicions guanyadores (sense necessitat de recalcular el seu pes) que és el que realment ens interessa. Veiem que la coalició sense el jugador P_2, que és la P_1P_3, forma part de $W(v)$ i per tant P_2 no és pivotant aquí al no determinar el canvi d'estat de coalició de guanyadora a perdedora. Exactament el mateix passa si excloem el jugador P_3, no és determinant ja que la coalició P_1P_2 forma part també del conjunt guanyador. En canvi si excloem el jugador P_1 obtenim la coalició P_2P_3 que no figura en el conjunt de coalicions guanyadores i per tant P_1 és un jugador pivotant en aquesta coalició. Aleshores, ens queda que $\mu_1(v) = 3$, $\mu_2(v) = 1$, $\mu_3(v) = 1$ i que $\overline{\mu}(v) = 5$.

Hem vist tres maneres diferents d'examinar les coalicions, la primera sumant els pesos de forma manual, la segona per assumpcions lògiques i l'última per l'anàlisi de conjunts. Totes tres són vàlides i es poden fer servir, ja que ens ajuden a veure si un jugador és o no pivotant. Hem examinat totes les coalicions guanyadores, que són les úniques que poden canviar d'estat excloent jugadors (passant a ser perdedores, ja que les perdedores ho seguirien sent) i per tant les úniques que poden contenir jugadors pivotants, l'objecte del nostre interés. Ara tenim els valors definitius de $\mu_1(v) = 3$, $\mu_2(v) = 1$, $\mu_3(v) = 1$ i $\overline{\mu}(v) = 5$. Dividim el vector $\mu(v) = (3, 1, 1)$ entre l'escalar $\overline{\mu}(v) = 5$ per obtenir l'índex de poder de Banzhaf normalitzat i obtenim que $\beta(v) = \frac{\mu(v)}{\overline{\mu}(v)} = (0.6, 0.2, 0.2)$.

Hem vist un primer exemple de com calcular l'índex de poder de Banzhaf normalitzat, i a més hem vist que és diferent al de Shapley-Shubik, ja que en el mateix joc $v \equiv [6; 4, 3, 2]$, aquests prenen valors diferents.

Ara examinarem un exemple amb una vessant més política, en el que calcularem tant l'índex de Shapley-Shubik com el de Banzhaf normalitzat.

Exemple 5.11. Suposem un estat petit que té el seu Parlament amb solament 52 representants. Com volen forçar grans enteses, la majoria és una majoria reforçada de 36 diputats. El poder sempre s'ha repartit entre el Partit Conservador (PC) i el Partit Socialista (PS), però en les últimes eleccions ha sorgit un nou partit en mig d'aquests dos que és el Partit Liberal (PL). Tots tres han tingut uns resultats força igualats i han obtingut, respectivament 20, 17 i 15 representants. Per tant, tenim el joc de majoria ponderada definit per $v \equiv [36; 20, 17, 15]$. Hi ha possibilitats d'acord per totes bandes, i cap no és descartable. Des d'una coalició del *stablishment* que agrupi el PC i el PS, com una coalició liberal-progressista PS i PL o una liberal-conservadora del PC i el PL, fins i tot es planteja una gran coalició per donar resposta als nous reptes. Per decidir quina coalició els és més convenient, tant el PC com el PS encarreguen estudis sobre els seus ńdexs de poder.

El PC fa servir l'índex de poder de Shapley-Shubik. Per a calcular-lo tenen en consideració totes les possibles permutacions de la gran coalició i veuen qui és el jugador pivotant en el cas d'entrar. El subratllen per a tenir-lo en compte i els queda el següent:

$$< PC, \underline{PS}, PL >, < PC, PL, \underline{PS} >, < PS, \underline{PC}, PL >,$$
$$< PS, PL, \underline{PC} >, < PL, PS, \underline{PC} >, < PL, PC, \underline{PS} >$$

En les 3!=6 possibles permutacions, el PC és el partit pivotant en 3 ocasions, mentre que el PS ho és en les altres tres. Donant doncs un índex de Shapley-Shubik de 0.5 a tots dos i de 0 al Partit Liberal.

El Partit Socialista encarrega una anàlisi basada en l'índex de Banzhaf normalitzat. Per a això llisten totes les coalicions guanyadores i tenen en compte quins jugadors són pivotants en cada cas. El conjunt de coalicions guanyadores és

$$W(v) = \{\{PC, PS\}, \{PC, PS, PL\}\}$$

En aquestes coalicions, tant el PC com el PS són pivotants en totes dues, mentre que el PL no ho és en cap. Cada un és pivotant en dos ocasions, i en total tenim quatre escenaris pivotants.

Partit	Rátio d'escons	Shapley-Shubik	Banzhaf normalitzat
PC	20/52=0.385	3/6=0.5	2/4=0.5
PS	17/52=0.327	3/6=0.5	2/4=0.5
PL	15/52=0.288	0/6=0	0/4=0

Aquest és l'anàlisi que ens queda d'aquest parlament, fent servir tant Shapley-Shubik com Banzhaf normalitzat.

6 Càlcul programat d'índexs de poder

6.1 Confecció del programari

Un problema a l'hora de calcular índexs de poder és que la complexitat dels seus càlculs creix ràpidament en funció dels jugadors. En el cas de l'índex de Shapley-Shubik, per exemple, cal calcular les $n!$ possibles permutacions. Els exemples que hem vist fins ara han estat amb tres jugadors, aleshores les combinacions han estat només sis. En canvi, veiem en la següent taula que tal com creix el nombre de jugadors que hi prenen part, el nombre total de permutacions a tenir en compte es va fent prou gran com per a ser massa dificultós el seu càlcul a mà.

n	n!
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5040
8	40320
9	362880

Així doncs, per al nostre propòsit de calcular els índexs de poder en aliances post-electorals, en un context fragmentat com l'actual, ens és necessari programar un codi que ens faciliti el seu còmput. Per exemple, en les últimes eleccions al Parlament de Catalunya van obtenir representació vuit partits polítics, que representen més de quaranta-mil possibles permutacions a valorar. Suposant que cada dia estem vuit hores realitzant el còmput i n'analitzem vuit cada hora, ens caldrien dos anys aproximadament per acabar. En canvi, amb les comandes correctes en un programa, es pot millorar, i molt, el temps de càlcul.

El programa fet ha de reunir certes característiques. D'una banda, ha de ser adaptable a diferents nombres de jugadors i diferents majories. Això és, ha de servir per diferents jocs de majoria ponderada. Per tant, com a inputs el nostre programa ens demanarà el nombre de jugadors (partits polítics) que hi prenen part. També ens demana la quota del nostre joc (la majoria del parlament en el cas de l'aplicació a sistemes polítics). Després ens pregunta pel pes de cada jugador (és a dir quants escons ha obtingut cada partit).

Un cop hem rebut tots aquests inputs, generem un vector de pesos (escons en el nostre cas). Un cop fet tot això, ens posem ja amb el càlcul del que són en sí mateixos els índexs de poder. Comencem pel de Banzhaf normalitzat. Per a això creem un vector ordenat que valora si cada coalició possible assoleix o no la majoria (hi posa un 1 en cas que sí i un 0 en cas que no).

Una volta enllestit aquest vector de coalicions que superen la quota (el que equivaldria al conjunt de coalicions guanyadores), inicialitzem a zero un comptador i un vector, que equivaldrien respectivament a $\overline{\mu}(v)$ i a $\mu(v)$. Ara, per cada valor no nul dins el vector de coalicions guanyadores, es recupera quins són els seus participants i s'evalua si la coalició sense cadascun d'ells també té un 1 en aquest vector (i per tant es guanyadora igualment). En cas que això no passi, incrementem en una unitat tant el comptador com la coordenada i del vector (doncs el jugador i és pivotant en aquesta coalició). Aquest procés s'itera per a cada coalició guanyadora.

Un cop acabada aquesta iteració, tenim els valors reals i definitius de $\overline{\mu}(v)$ i de $\mu(v)$. Per tant calculem l'índex de poder de Banzhaf normalitzat dividint el vector per l'escalar i obtenim finalment el desitjat $\beta(v)$. Per tenir una idea de la complexitat del càlcul també fem que ens retorni el nombre de coalicions minimals d'aquest joc.

Un cop calculats i trobats els valors de l'índex normalitzat de Banzhaf, ens posem a la recerca del de Shapley-Shubik. Recordem que aquest el calculem tenint en compte totes les possibles permutacions de la gran coalició i veient, en cada cas, quin és el jugador que fa canviar la coalició de perdedora a guanyadora.

Tenim un vector inicialitzat a zero que ens comptarà quants cops és cada jugador decisiu. Ara ens cal avaluar totes les possibilitats. Així doncs, fem una funció que calculi totes les possibles permutacions de la gran coalició. Per a cada permutació, anem sumant els escons per ordre d'entrada. En el moment que superin la majoria es considera que l'últim jugador a l'entrar a la coalició ha estat el decisiu i, per tant, sumem una unitat a la seva coordenada del vector. Un cop fet això passem a la següent permutació.

Quan ja s'han computat totes les permutacions i hem trobat quin partit és el determinant en cada cas, tenim un vector que ens ho representa. El que falta ara és normalitzar-lo per a poder obtenir l'índex de Shapley-Shubik. Cal dividir aquest vector pel nombre total de permutacions calculades, que recordem que és $n!$. Aquest pas ens limita en cert mode la capacitat del programa. Això és degut a que l'enter màxim amb el que l'entorn de programació que treballo és 2147483647, que es troba entre 12! i 13!. Per tant no podem treballar amb parlaments de més de 12 partits.

A més també cal tenir en compte que els càlculs augmenten de manera gairebé exponencial. Mentre un càlcul dels índexs en un palament de 7 partits no arriba a trigar un segon, en el cas de 12 jugadors triga prop de sis minuts. En qualsevol dels casos, el programa complet en llenguatge C++ ve adjuntat en l'annex.

6.2 Exemples resultats al Parlament de Catalunya

El Parlament de Catalunya s'ha caracteritzat per ser un parlament especialment multipartidista, comparat amb les cambres legislatives més pròximes. Precisament per això ens és interessant estudiar-lo des de la perspectiva de jocs simples i, en concret, com un joc de majoria ponderada. Per aquest motiu, amb el nostre programa hem analitzat i estudiat els índexs de poder de totes i cadascuna de les legislatures del Parlament des de la restauració de la democràcia representativa al Parlament, l'any 1980.

Precisament aquestes primeres eleccions van causar força expectativa. Després de gairebé 50 anys de les últimes eleccions al Parlament, se'n tornaven a realitzar unes. Es presentaven diversos partits polítics. D'una banda, el Partit dels Socialistes de Catalunya (PSC) eren els preferits per guanyar les eleccions. També tenia moltes opcions el Partit Socialista Unificat de Catalunya (PSUC), un partit comunista amb força importància durant la clandestinitat política causada per la dictadura del general Franco. Un partit catalanista emergent també s'hi presentava, liderat per el també opositor i represaliat pel règim de Franco, Jordi Pujol amb Convergència i Unió (CiU).

El partit governant d'Espanya, la Unió de Centre Democràtic (UCD), també aspirava a tenir certa rellevància política a Catalunya. Per altra banda, el partit guanyador de les últimes eleccions al Parlament l'any 1932 i partit governant a l'exili, l'Esquerra Republicana de Catalunya (ERC), optava a recuparar democràticament el poder que havien perdut per les armes. Per últim, de forma gairebé anecdòtica, s'hi va presentar el Partit Socialista d'Andalusia (PSA), que degut a la elevada immigració rebuda a Catalunya va tenir certa notorietat.

A les eleccions s'hi repartien 135 escons i la majoria absoluta era de 68 (aquesta dimensió i aquesta quota del Parlament es manté encara avui en dia i en totes les eleccions que s'hi han fet dins d'aquest període). Els resultats van ser sorpresius: va guanyar en contra de pronòstic CiU de Jordi Pujol amb 43 escons; en segon lloc va quedar el PSC amb 33 escons, seguit pel PSUC amb 25; a més distància la UCD va obtenir 18 escons pels 14 d'ERC i, per últim, el PSA va obtenir representació amb 3 diputats.

Per tant obtenim un joc de majoria ponderada definit així:

$$v_{1980} \equiv [68; 43, 33, 25, 18, 14, 3]$$

Quan agafem les dades i les posem dins el nostre programa obtenim el següent:

Partit	Escons	Proporció	Banzhaf n	Shapley-S
CiU	43	0,3185	0,3846	0,4000
PSC	33	0,2444	0,2308	0,2333
PSUC	25	0,1852	0,2308	0,2333
UCD	18	0,1333	0,0769	0,0667
ERC	14	0,1037	0,0769	0,0667
PSA	2	0,0148	0,0000	0,0000

Taula 6: Eleccions al Parlament de Catalunya del 1980

Veiem que el màxim guanyador a l'hora de rendibilitzar els seus escons és CiU, que passa de un 0,3 aproximat del total dels escons a fins a 0,4 de poder en el cas de l'índex de Shapley-Shubik. Això els va servir per a conformar govern en aquella legislatura. Per contra, qui no va aconseguir en absolut rendibilitzar els seus escons va ser el PSA, amb índexs tant de Banzhaf normalitzat com de Shapley-Shubik de zero. És a dir, en cap de les possibles coalicons post-electorals, el partit era un jugador determninant. Veiem també que el PSC i el PSUC, tot i tenir resultats electorals diferents, van tenir el mateix poder, ja que jugaven un paper de jugadors simètrics i per tant els 25 escons del PSUC es van fer tant de valer com els 33 dels socialistes. Una cosa similar va passar tant a la UCD com a ERC, els seus poders van ser equivalents tot i obtenir un nombre dispar d'escons. En el cas d'aquests dos últims jugadors simètrics, a més, van perdre poder efectiu respecte al mandat de les urnes, ja que els seus índexs de poder van ser substancialment més baixos que la ràtio d'escons obtinguts.

Quatre anys més tard, un cop esgotada la legislatura, es van tornar a convocar eleccions. Les eleccions al Parlament de Catalunya de 1984 van ser un esdeveniment polític rellevant en la història de Catalunya. Aquestes eleccions van tenir lloc el 29 d'abril de 1984 i van representar un moment clau en la consolidació del sistema democràtic.

Després de les primeres eleccions al Parlament de Catalunya el 1980, les eleccions de 1984 van ser les segones a celebrar-se des de la restauració de la democràcia a Espanya. Aquestes eleccions van ser importants perquè van confirmar i consolidar els canvis polítics i institucionals que s'havien produït des de la transició democràtica.

En aquest context, les eleccions de 1984 van ser una oportunitat perquè els partits polítics catalans presentessin les seves propostes i busquessin el suport dels votants. Va ser un moment crucial per a la consolidació del sistema polític català i per a la definició dels debats i les polítiques que es desenvoluparien en els anys següents.

En aquesta s'hi van presentar els mateixos partits que a les anteriors, a més de l'Aliança Popular (AP), una agrupació dels sectors de dreta espanyola. A diferència de les eleccions del 1980, el PSA i la UCD no van obtenir representació política. En canvi, sí que en va obtenir AP. Els resultats van ser els següents: CiU va obtenir 72 diputats, el segon classificat (el PSC) en va obtenir 41; AP en va obtenir 11 i, per últim el PSUC i ERC en van obtenir 6 i 5, respectivament.

Per tant obtenim el joc de majoria ponderada definit així:

$$v_{1984} \equiv [68; 72, 41, 11, 6, 5]$$

Veiem que CiU ha obtingut majoria absoluta i, per tant, no li cal de cap altre jugador per assolir la quota. La taula un cop analitzat pel nostre programa seria la següent:

Partit	Escons	Proporció	Banzhaf n	Shapley-S
CiU	72	0,5333	1	1
PSC	41	0,3037	0	0
AP	11	0,0814	0	0
PSUC	6	0,0444	0	0
ERC	5	0,0370	0	0

Taula 7: Eleccions al Parlament de Catalunya del 1984

Com veiem, en situació de majoria absoluta, tot el poder polític es desplaça a CiU, el partit que ha obtingut la pluralitat dels escons. Per tant, la resta de partits no tenen capacitat per a la conformació d'alternatives i, aleshores tampoc no tenen poder, com veiem a la taula.

Els resultats d'aquestes eleccions van tenir un impacte significatiu en la configuració del Parlament de Catalunya i en la formació del govern autonòmic. Van ser un moment clau en la consolidació del sistema democràtic a Catalunya i van contribuir a establir les institucions i els actors polítics que han marcat la política catalana des de llavors. Aquestes eleccions van ser un pas més en la construcció de la identitat política catalana i en el camí cap a l'autogovern i la representació democràtica.

En les tres poperes legislatures, CiU seguiria governant en majoria absoluta (i aleshores l'anàlisi electoral i de poder és idèntic). A més, durant un parell de legislatures després de la majoria absoluta, CiU seguiria al poder.

Actualment, el Parlament de Catalunya està determintat segons les eleccions que es van fer el dia 14 de febrer de l'any 2021. En elles van concòrer molts partits polítics diferents. Ara bé, el poder es disputava principalment entre tres partits, ERC, el PSC i junts (la transformació de l'espai polític que anteriorment ocupava CiU). Els resultats van ser molt ajustats i repartits entre tots els partits que s'hi presentaven.

En quasi triple empat, tant el PSC com ERC van obtenir 33 escons i junts en va obtenir 32. El partit Vox en va obtenir 11, pels 9 de la CUP i els 8 d'En Comú Podem (ECP). Per últim, Ciutadans (C's) i el Partit Popular (PP) en van obtenir 6 i 3, respectivament. Per tant, el joc de majoria ponderada que s'obté d'aquests resultats és el següent:

$$v_{2021} \equiv [68; 33, 33, 32, 11, 9, 8, 6, 3]$$

Passant els resultats pel nostre programa, ens queda que els índexs de poder són els que segueixen:

Partit	Escons	Proporció	Banzhaf n	Shapley-S
ERC	33	0,2444	0,2870	0,2738
PSC	33	0,2444	0,2870	0,2738
junts	32	0,2370	0,2870	0,2738
Vox	11	0,0815	0,0278	0,0357
CUP	9	0,0667	0,0278	0,0357
ECP	8	0,0593	0,0278	0,0357
C's	6	0,0444	0,0278	0,0357
PP	3	0,0222	0,0278	0,0357

Taula 8: Eleccions al Parlament de Catalunya del 2021

En aquest cas, veiem que hi ha dues classes de jugadors simètrics. D'una banda, els tres primers tenen exactament el mateix poder entre ells, lleugerament per sobre del poder otorgat per les urnes. Tots tres tenen, per tant, les mateixes possibilitats a l'hora de formar coalicions amb altres jugadors. Per altra banda, tota la resta de jugadors també són simètrics entre ells. Comparteixen el mateix poder (molt inferior al dels tres guanyadors) tots cinc.

Per tant, podem classificar els partits en dos classes segons com de determinants siguin a l'hora d'obtenir majoria. Tenim d'una banda, el grup dels més influents que són ERC, el PSC i junts, que tenen molta més força en possibilitat d'imposar les seves idees. Per altra banda, trobem Vox, la CUP, ECP, C's i el PP. Aquests segueixen tenint poder, tot i que molt menor, per a imposar i negociar les seves idees i propostes.

Pel format del treball, ens és possible només plasmar aquestes tres anàlisi fetes. No obstant, hem passat pel programa i trobat els índexs de poder per a totes les 13 legislatures que ha tingut el parlament des de l'any 1980. Adjuntem les taules dels resultats a l'annex per a qui li pugui resultar interessant.

Si ens fixem, en tots els casos analitzats, el primer partit pel que fa a nombre d'escons es veu especialment afavorit a l'hora de repartiment de poder seguint els índexs de Shapley-Shubik i de Banzhaf normalitzat. Respecte als altres jugadors, de vegades incrementen el seu poder en relació als escons obtinguts i d'altres vegades el disminueixen. En qualsevol dels casos, l'anàlisi dels índexs de poder ens resulta molt útil a l'hora de comprendre de forma més profunda i clara la distirbució del poder polític, que no és sempre la mateixa que la distribució de parlamentaris.

7 Conclusions

La teoria de jocs és una branca molt extensa i altament aplicable en processos de presa de decisions humanes, com hem vist en aquest treball. Durant la realització d'aquest, ens hem endinsat en més o menys profunditat en diferents aspectes i classes d'ella. El treball comença amb una vista superficial de l'equilibri de Nash i el que aquest comporta, tot estudiant el cèlebre dilema del presoner.

Ara bé, tot el treball va orientat a tenir unes bases prou sòlides com per a poder entendre i tractar de forma òptima els índexs de poder. Amb aquest objectiu, es fa un estudi també exhaustiu dels jocs cooperatius, i en especial de la subclasse dels jocs d'utilitat transferible. És important remarcar que en els jocs cooperatius, el focus de l'estudi deixa de ser l'estratègia individual per a agafar molt més pes el comportament i la confecció de coalicons.

En concret, en els jocs d'utilitat transferible, un tema rellevant i susceptible d'estudi és el repartiment dels beneficis. Al conformar coalicions entre els jugadors, aquests obtenen uns certs beneficis, que han de repartir entre ells. El cas és que, per sistema, els beneficis obtinguts no són necessariament la suma de les utilitats de tots els jugadors que conformen la coalició. Precisament arrel d'aquest problema de repartiment, dediquem un capítol a estudiar el valor de Shapley. El valor de Shapley és una molt bona solució al problema del repartiment. Fa una mitjana ponderada de les utilitats marginals de cada jugador a l'hora d'entrar a les coalicons, i així obtè el valor.

El que ens interessa, els índexs de poder, no són més que un cas concret de problema de repartiment (del poder en aquest cas) en casos con s'aplica la majoria. Així doncs, estudiat ja el valor de Sapley en profunditat, hem estudiat també l'altra pota que són els jocs de majoria. Per a poder fer això, veiem els tipus de jocs simples, aquells que la utilitat només pot ser 0 o 1. Dins d'aquests, veiem el cas concret dels jocs de majoria (i en particular, els jocs de majoria ponderada).

Apliquem els coneixements de jocs de majoria ponderada, i del valor de Shapley, per a veure els índexs de poder. Tant el de Shapley-Shubik com el de Banzhaf normalitzat. El primer parteix de la base que la gran coalició es forma i, aleshores, estudia quin és el jugador determinant per a obtenir majoria suposant equiprobables tots els ordres d'entrada de jugadors a la coalició. En canvi, el segon assumeix que qualsevol coalició es pot formar i avalua quin (o quins) jugador és determinant per aconseguir majoria en aquella coalició, en aquest cas l'ordre d'arribada a la coalició no es té en compte. Tots dos tenen sentit dins l'anàlisi dels jocs de votació.

L'objectiu del treball ha estat assolit en la part pràctica. Per a aquesta part, hem intentat, rumiat i finalment aconseguit (gràcies a tota la base teòrica, entre d'altres) programar un codi que ens permeti automatizar el càlcul dels índexs de poder en jocs de majoria ponderada. El programa, a més de ser altament útil (ja que simplifica força el procés), demostra una comprensió profunda de com funcionen i com es calculen aquests índexs. Per tant, en aquest sentit, es pot dir sense retrets que s'ha assolit de forma òptima l'objectiu.

Per últim, hem aplicat aquest programa i estudi en una anàlisi del poder polític al Parlament de Catalunya. Hem calculat els índexs de Shapley-Shubik i de Banzhaf normalitzat en totes les legislatures des de les primeres eleccions del 1980 després del restabliment de la Generalitat. El que més clarament hem pogut veure és que els grans partits (i en particular, el partit amb més escons) té sempre un poder teòric superior a la ràtio de repartiment d'escons. En canvi, ens trobem una situació particular i interessant en el cas dels partits petits. En algunes ocasions, el poder que tenen és nul, ja que no poden ser determinants en cap coalció, i aleshores el seu poder es veu dràsticament minvat respecte els resultats electorals. Ara bé, en altres ocasions, es converteixen en jugadors molt rellevants per a donar la majoria a una coalició (i per tant incrementen molt en termes relatius el seu poder respecte el resultat de les urnes). En qualsevol dels casos, aquestes són les dues tendències més observades, junt amb que els índexs de Banzhaf normalitzat i de Shapley-Shubik sempre mantenen el mateix ordre de poder entre els jugadors i, a més, no acostuma a haver-hi gran diferència entre ells.

En conclusió, en aquest treball s'han pogut assolir amb èxit els objectius proposats. Hem estudiat en profunditat els índexs de poder, tenint també ben assentats els conceptes previs matemàtics necessaris. A més, hem pogut crear un programari per a calcular-los de forma eficient i precisa, un altre dels objectius. I justament, aquest programa l'hem fet servir per analitzar de forma pràctica el poder polític a Catalunya durant els últims 43 anys. En definitiva i seguint el títol, en aquest treball s'estudia la Teoria de jocs, i en partiuclar els *Índexs de poder i aplicació en aliances post-electorals*.

8 Bibliografia

Referències

[1] Aumann, R. J.: *An axiomatization of the non-transferable utility value*, 1985.

[2] Julio Gonzàlez-Díaz, Ignacio García-Jurado, M. Gloria Fistras-Janeiro: *An Introductory Course on Mathematical Game Theory*, 2010.

[3] Martin J. Osborne: *Selected chapters from draft of An Introduction to Game Theory*, 2000.
https://mathematicalolympiads.files.wordpress.com/2012/08/martin_j-_osborne-an_introduction_to_game_theory-oxford_university_press_usa2003.pdf

[4] Carreras, F.; Owen, G.: *Valor coalicional y estrategias parlamentarias*, Revista Española de Investigaciones Sociológicas 71, 157-176, 1995.

[5] Laruelle, A.; Valenciano, F.: *Shapley-Shubik and Banzhaf indices revisited*, Mathematics of Operations Research 26, 89-104, 2001.

[6] Shapley, L.S.: A value for n-person games, In: Roth, A. (ed), *The Shapley Value, Essays in honor of Lloyd S.Shapley*, 31-41, Cambridge University Press, 1988.

[7] Shapley, L.S.; Shubik, M.: A method for evaluating the distribution of power in a committee system, In: Roth, A. (ed), *The Shapley Value, Essays in honor of Lloyd S.Shapley*, 41-51, Cambridge University Press, 1988.

[8] G. Arévalo-Iglesias i M. Álvarez-Mozos: *Power Distribution in the Basque Parliament using Games with Externalities*, Theory and Decision, 2020.

[9] Holler, M. J. : *Forming coalitions and measuring voting power.* pp 262-271, Political Studies, 1982.

[10] R. Amer i F. Carreras. *Games and cooperation indices.* pp. 239-258, International Journal of Game Theory, 1995.

[11] Jhon F. Banzhaf: *Weighted voting doesn't work: A mathematical analysis*, pp 317-343, Rutgers Law Review, 1965.

[12] E. Lehrer: *An axiomatization of the Banzhaf value*, pp 89-99, International Journal of Game Theory, 1988.

[13] Myerson, Roger B. : *Game Theory: Analysis of Conflict*, p 568, Harvard University Press, 1991.

[14] Martin Osborne: *An Introduction to Game Theory.* Oxford University Press, 2004.

[15] Anatol Rapoport i Albert M. Chammah: *Prisoner's Dilemma.* University of Michigan Press, 1965.

A Annex 1: Programari

En les properes pàgines s'adjunta el programari que s'ha fet servir. Ha estat programat en un entorn de C++.

```
/*Programari perfer les ma trius de success de coalicions*/
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include <stdlib.h>


void swap (int *i, int *j){
	int temp = *i;
	*i = *j;
	*j = temp;
	return;
}


void permute(intindex, int * involucrats, int n,int* vec, int maj, i nt*
shapley, int *contshapley){
	int h,sum, i;
	if(index==n-1){
			sum=0;
			h=0;
			while(sum<maj){
					sum+= vec[involucrats[h]];
					h++;
			}
			*contshapley= *contshapley+1;
			shapley[involucrats[h-1]]++;
	return;
	}
	for(i=index; i<n; i++){
			swap(involucrats+ index, i nvolucrats+ i);
			permute(index + 1, involucrats, n, vec, maj, shapley,
&*contshapley);
			swap(involucrats+i, involucrats+index);
	}
	return;
}



int main(void){
	int num, maj, i;
	printf("Quants partits hi ha?n");
	scanf("%d", &num);
	printf("Quina ésla majoria en aquest parlament? n");
	scanf("%d", &maj);
	int dim, dimi, aux, linea, j, total, banhaf[num], contbanhaf,
involucrats[num], identificador, backwards, k;
	total=0;
	contbanhaf=0;
	dim=pow(2,num);
	int vec[num], /*escons[2*dim], coalicions[2*dim], min[2*dim]*/
*escons, *coalicions, *min;
	escons= (int*)  calloc(2*dim,sizeof(int));
	coalicions = (int*) calloc(2*dim,sizeof(int));
```

```
	min = (int*) calloc(2*dim,sizeof(int));
	printf("dim=%dn ", dim);
	for(i=0; i<num; i++){
		printf("Quants escons té elpartit %d ?n", i+1);
		scanf("%d", &vec[i]);
	}
	printf("Exit 1n ");
	printf("dim=%dn ", dim);
	for(i=0; i<dim; i++){
		coalicions[i]=0;
		min[i]=0;
	}
	for(i=0; i<num; i++){
		banhaf[i]=0;
		involucrats[i]=0;
	}
	printf("nExit 2 n");
	escons[0]=vec[0];
	printf("Exit 3n ");
	for(i=1; i<num; i++){
		printf("Exits %dn", i);
		dimi=pow(2, i);
		escons[dimi-1]=vec[i];
		for(j=1; j<dimi;j++){
			escons[dimi + j -1]=escons[dimi-1]+escons[j-
1];

			if(escons[j-1]>=maj){
				coalicions[dimi + j-1]=1;
				involucrats[i]=1;
			/*	Llavors coalició j-1 sumat amb partit i
és la que observem.  Un copidentificat el partiti, cal ve ure quins altres
hi juguen*/
				identificador=j-1;
				for(backwards=i-1; backwards>=0;
backwards--){
					if(identificador+2>pow(2,
backwards)){

	involucrats[backwards]=1;
						identificador=
identificador - pow(2, backwards);
						if(escons[dimi +
j -1]-vec[backwards]<maj){

	banhaf[backwards]++;

	contbanhaf++;
						}
					}

				}

			}else{
				if(escons[dimi +j-1]>=maj) {
```

```
                                                  coalicions[dimi+j-1]=1;
                                                  min[dimi+j-1]=1;
                                                  total++;
                                                  involucrats[i]=1;
                                                  banhaf[i]++;
                                                  contbanhaf++;
                                      /*    Llavors coalició j-1 sumat amb
partiti és la q ue observem.  Un cop identificat el partit i, cal veure
quins altres hi juguen*/
                                                  identificador=j-1;
                                                  for(backwards=i-1;
backwards>=0; backwards--){

      if(identificador+2>pow(2, backwards)){

      involucrats[backwards]=1;

      banhaf[backwards]++;

      contbanhaf++;

      identificador= identificador - pow(2,backwards) ;
                                                              }
                                                  }
                                      }
                                }
                                for(k=0; k<num; k++){
                                      involucrats[k]=0;
                                }
                    }
      printf("n");
      }

      aux=0;
      linea=0;
      printf("ESCONS PER COALICIÓn");
      for(i=0; i<dim-1; i++){
                    printf("%dt", e scons[i]);
                    if(i==aux){
                                printf("n");
                                linea++;
                                aux=aux+pow(2, linea);
                    }

      }
      aux=0;
      linea=0;
      printf("nVIABIL ITAT PER COALICIÓn" );
      for(i=0; i<dim-1; i++){
                    printf("%dt", c oalicions[i]);
                    if(i==aux){
                                printf("n");
                                linea++;
                                aux=aux+pow(2, linea);
```

```
                }

        }
        aux=0;
        linea=0;
        printf("nMINIMA L PER COALICIÓn");
        for(i=0; i<dim-1; i++){
                printf("%dt", m in[i]);
                if(i==aux){
                        printf("n");
                        linea++;
                        aux=aux+pow(2, linea);
                }

        }
        printf("nHi ha  %d coalicions minimalsnn", tot  al);
        int contshapley,shapley[nu m];
        for(i=0; i<num; i++) {
                involucrats[i]=i;
                shapley[i]=0;
        }
        contshapley=0;
        if(num<13){
                permute(0, involucrats, num, vec, maj, shapley,
&contshapley);
        }else printf("Noté sentit  clcular elvalor de S hapley, doncs %d!
(les possibles combinacions) és més gran que 2mil milions (l’enter més
gran) n", num);
        /*Cal que la funció pugui modificar les dues últimes, IMPORTANT*/
        /*
                        sum=0;
                        k=0;
                        while(sum<maj){
                                sum+= vec[involucrats[k]];
                                k++;
                        }
                        contshapley++;
                        shapley[involucrats[k-1]]++;
        */

        for(i=0; i<num; i++){
                float valorb= (float) banhaf[i]/(float) contbanhaf;
                float valora=(float) shapley[i]/(float) contshapley;
                printf("Partit %d, valor Banhaf %f,t valor Shap ley
%fn", i+1, valo rb, valora);
        }
        free(min);
        free(coalicions);
        free(escons);
        return0;
}
```

B Annex 2: Índexs de poder legislatures Parlament

Acte seguit s'adjunten les taules amb els resultats del programa per a cada una de les legislatures del Parlament.

Partit	Escons	Proporció	Banzhaf n	Shapley-S
CiU	43	0,3185	0,3846	0,4000
PSC	33	0,2444	0,2308	0,2333
PSUC	25	0,1852	0,2308	0,2333
UCD	18	0,1333	0,0769	0,0667
ERC	14	0,1037	0,0769	0,0667
PSA	2	0,0148	0,0000	0,0000

Taula 9: Eleccions al Parlament de Catalunya del 1980

Partit	Escons	Proporció	Banzhaf n	Shapley-S
CiU	72	0,5333	1	1
PSC	41	0,3037	0	0
AP	11	0,0814	0	0
PSUC	6	0,0444	0	0
ERC	5	0,0370	0	0

Taula 10: Eleccions al Parlament de Catalunya del 1984

Partit	Escons	Proporció	Banzhaf n	Shapley-S
CiU	69	0,5111	1	1
PSC	42	0,3111	0	0
ICV	9	0,0667	0	0
ERC	6	0,0444	0	0
PP	6	0,0444	0	0
CDS	3	0,0222	0	0

Taula 11: Eleccions al Parlament de Catalunya del 1988

Partit	Escons	Proporció	Banzhaf n	Shapley-S
CiU	70	0,5185	1	1
PSC	40	0,2963	0	0
ERC	11	0,0815	0	0
ICV	7	0,0519	0	0
PP	7	0,0519	0	0

Taula 12: Eleccions al Parlament de Catalunya del 1992

Partit	Escons	Proporció	Banzhaf n	Shapley-S
CiU	60	0,4444	0,6364	0,6
PSC	34	0,2519	0,0909	0,1
AP	17	0,1259	0,0909	0,1
PSUC	13	0,0963	0,0909	0,1
ERC	11	0,0815	0,0909	0,1

Taula 13: Eleccions al Parlament de Catalunya del 1995

Partit	Escons	Proporció	Banzhaf n	Shapley-S
CiU	56	0,4148	0,5000	0,5000
PSC	50	0,3704	0,1667	0,1667
PP	12	0,0889	0,1667	0,1667
ERC	12	0,0889	0,1667	0,1667
ICV	5	0,0370	0,0000	0,0000

Taula 14: Eleccions al Parlament de Catalunya del 1999

Partit	Escons	Proporció	Banzhaf n	Shapley-S
CiU	46	0,3407	0,3846	0,4000
PSC	42	0,3111	0,2308	0,2333
ERC	23	0,1704	0,2308	0,2333
PP	15	0,1111	0,0769	0,0667
ICV	9	0,0667	0,0769	0,0667

Taula 15: Eleccions al Parlament de Catalunya del 2003

Partit	Escons	Proporció	Banzhaf n	Shapley-S
CiU	48	0,3556	0,3846	0,4000
PSC	37	0,2741	0,2308	0,2333
ERC	21	0,1556	0,2308	0,2333
PP	14	0,1037	0,0769	0,0667
ICV	12	0,0889	0,0769	0,0667
C's	3	0,0222	0,0000	0,0000

Taula 16: Eleccions al Parlament de Catalunya del 2006

Partit	Escons	Proporció	Banzhaf n	Shapley-S
CiU	62	0,4593	0,6744	0,6190
PSC	28	0,2074	0,0698	0,0857
PP	18	0,1333	0,0698	0,0857
ICV	10	0,0741	0,0698	0,0857
ERC	10	0,0741	0,0698	0,0857
SI	4	0,0296	0,0233	0,0190
C's	3	0,0222	0,0233	0,0190

Taula 17: Eleccions al Parlament de Catalunya del 2010

Partit	Escons	Proporció	Banzhaf n	Shapley-S
CiU	50	0,3704	0,5417	0,5333
PSC	20	0,1481	0,1250	0,1333
ERC	21	0,1556	0,1250	0,1333
PP	19	0,1407	0,1250	0,1333
ICV	13	0,0963	0,0417	0,0333
C's	9	0,0667	0,0417	0,0333
CUP	3	0,0222	0,0000	0,0000

Taula 18: Eleccions al Parlament de Catalunya del 2012

Partit	Escons	Proporció	Banzhaf n	Shapley-S
JxS	62	0,4593	0,7500	0,6667
C's	25	0,1852	0,0500	0,0667
PSC	16	0,1185	0,0500	0,0667
CSQP	11	0,0815	0,0500	0,0667
PP	11	0,0815	0,0500	0,0667
CUP	10	0,0741	0,0500	0,0667

Taula 19: Eleccions al Parlament de Catalunya del 2015

Partit	Escons	Proporció	Banzhaf n	Shapley-S
C's	36	0,2667	0,3333	0,3524
JxC	34	0,2519	0,2941	0,2857
ERC	32	0,2370	0,2941	0,2857
PSC	17	0,1259	0,0196	0,0190
CSQP	8	0,0593	0,0196	0,0190
CUP	4	0,0296	0,0196	0,0190
PP	4	0,0296	0,0196	0,0190

Taula 20: Eleccions al Parlament de Catalunya del 2017

Partit	Escons	Proporció	Banzhaf n	Shapley-S
ERC	33	0,2444	0,2870	0,2738
PSC	33	0,2444	0,2870	0,2738
junts	32	0,2370	0,2870	0,2738
Vox	11	0,0815	0,0278	0,0357
CUP	9	0,0667	0,0278	0,0357
ECP	8	0,0593	0,0278	0,0357
C's	6	0,0444	0,0278	0,0357
PP	3	0,0222	0,0278	0,0357

Taula 21: Eleccions al Parlament de Catalunya del 2021