



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

EL PROBLEMA DELS TRES COSSOS A PROP DE LA COLLISIÓ TRIPLE

Autor: Víctor Villegas Morral

Director: Dr. Marcel Guardia Munarriz
Realitzat a: Departament
de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 13 de juny de 2023

Abstract

In this work, we analyze the dynamics of the planar three body problem near triple collision from an introductory perspective. In order to study this model, we consider a special coordinate system that eases the analysis near the collision. We introduce the central configurations of the system and in the end we see that the construction of periodic orbits passing close to every central configuration is possible.

Resum

En aquest escrit, analitzem la dinàmica del problema dels tres cossos restringits a un pla a prop de la col·lisió triple des d'un punt de vista introductori. Per tal d'estudiar aquest model, considerem un sistema de coordenades especial que facilita l'anàlisi a prop de la col·lisió. Introduïm les configuracions centrals del sistema i al final veiem que la construcció d'òrbites periòdiques que passen a prop de totes les configuracions centrals és possible.

Agraïments

No puc començar sense dir que aquest treball no hauria pogut tirar endavant sense la direcció d'en Marcel Guardia Munarriz, que m'ha obert la porta aquest semestre acceptant amb dedicació tota mena de dubtes (o que no en tingués prous). Si no fos per la seva ajuda no hi hauria res més a dir.

Aprofito per a celebrar el claustre de matemàtiques que m'ha acollit aquesta etapa de la meva vida, tant les amistats que hi hem fet com el mateix edifici i la gent del grau amb qui m'hi he creuat; en definitiva, la germanor i l'energia que desprèn. En particular, he de mencionar la Marina, que ha estat la meva companya predilecta de TFG i tràmits durant aquest nostre últim semestre (l'any que ve més).

També vull remarcar el suport de tots els membres de la meva família, que han contribuït que arribés fins aquí des que jugaven amb mi de petit.

Tot plegat, és inviable esmentar tota la gent m'ha acompanyat i m'acompanya fins al dia d'avui. Per això, aquest últim paràgraf és per a tothom. Moltes mercès.

Índex

1	Introducció	1
1.1	El problema dels tres cossos en context	1
1.2	Motivació	2
1.3	Estructura del text	2
2	Coordenades i equacions	4
2.1	Coordenades cartesianes	4
2.2	El <i>McGehee blow-up</i>	5
3	Les configuracions centrals	9
3.1	La varietat de solucions $M(h, \omega)$	9
3.2	Les configuracions centrals a l'esfera de forma	11
3.3	Caracterització de les configuracions centrals	12
3.4	Demostracions de les proposicions de la Secció 3.3	13
4	Dinàmica de les configuracions centrals	18
4.1	La varietat de solucions al pla (r, v)	18
4.1.1	Les òrbites quan $\omega \neq 0$	18
4.1.2	Les òrbites quan $\omega \rightarrow 0^+$	19
4.1.3	Representació gràfica de les òrbites	21
4.2	Dinàmica de la varietat de col·lisió triple	22
4.3	Les connexions de la varietat de col·lisió triple	26
4.3.1	Connexions en M	28
4.3.2	Connexions en C i espirals	29
5	Construcció d'òrbites periòdiques	33
5.1	El graf de connexions	33
5.2	Anàlisi pertorbativa	34
5.3	Construcció d'òrbites periòdiques	35
6	Transversalitat	38
6.1	La dimensió de les varietats invariants	38
6.2	Transversalitat de la connexió $L_i^- \rightarrow L_i^+$	41
6.3	Demostració dels lemes emprats	46

7 Conclusions	48
Referències	50

*I go forwards [in time]
you go backwards [in time]
and somewhere [at the center of mass] we will meet*

Electioneering
RADIOHEAD

1 Introducció

1.1 El problema dels tres cossos en context

El problema dels tres cossos és un model matemàtic que descriu el moviment de tres partícules a formant un pla l'espai mitjançant un sistema d'equacions diferencials. Considerem el sistema format per tres partícules de masses m_1, m_2, m_3 sota la influència de la seva mútua atracció gravitacional donada per la Llei de la Gravitació Universal; aquesta atracció causa que les partícules es moguin. L'estudi del problema dels tres cossos consisteix a conèixer quin serà el comportament del sistema al llarg del temps: la forma descrita per les partícules, la seva energia, la separació entre les partícules, etc. S'acostumen a considerar partícules puntuals, és a dir, es negligeix la mida dels cossos; tot el cos està concentrat en un punt de l'espai.

L'estudi de les solucions del problema començà el segle XVIII i, des de llavors, s'ha demostrat que la resolució analítica exacta és impossible en la majoria dels casos. Tot i això, aspectes com ara l'estudi del comportament les seves òrbites encara avui dia són d'interès tant per a la mecànica celeste com per a les matemàtiques que l'envolten. S'han desenvolupat diversos mètodes per a abordar aquest problema, incloent-hi tècniques numèriques, aproximacions analítiques i sistemes dinàmics. Un dels objectes d'interès en aquest camp és la col·lisió, que es dona quan les partícules es troben al mateix punt (col·lideixen) i pot ser binària o triple depenent del nombre de partícules que col·lideixin.

L'any 1767, Leonhard Euler presentà a [4] una disposició dels tres cossos al pla tal que la forma inicial es manté al llarg de l'òrbita: els cossos alineats amb una separació concreta que depèn de les masses. Aquestes òrbites formen part d'una família d'òrbites periòdiques del sistema que mantenen la forma variant només la mida i en les quals cada cos segueix una trajectòria el·líptica kepleriana.

En general, les disposicions que sota les mateixes condicions formen aquestes famílies d'òrbites periòdiques s'anomenen configuracions centrals, i les òrbites associades a aquestes són les úniques solucions analítiques explícites que es coneixen. S'ha demostrat que, llevat de rotacions i escala, només hi ha cinc configuracions centrals. Tres d'elles consisteixen en les tres possibles ordenacions dels cossos en una línia del fenomen descrit per Euler i s'anomenen configuracions eulerianes. Les altres dues foren exposades per Joseph-Louis Lagrange l'any 1772 a [5] i corresponen a les dues possibles ordenacions diferents dels cossos en un triangle equilàter. S'anomenen configuracions lagrangianes i tenen la particularitat que no depenen de

les masses.

A més, a mesura que el moment angular tendeix cap a zero, les el·lipsoïdes descrites pels cossos en aquestes òrbites periòdiques degeneren a segments i les òrbites periòdiques col·lideixen al centre de masses en temps futur i passat. Aquestes són les solucions homotètiques.

1.2 Motivació

Aquesta peça se centra en l'estudi del problema dels tres cossos restringits a un pla a prop de la col·lisió triple a través de sistemes dinàmics. L'objectiu no és explicar una teoria avançada del problema dels tres cossos ni un avenç realitzat en aquest camp, sinó presentar de manera entenedora els conceptes necessaris per a assolir un coneixement base d'aquest cas del problema que permeti comprendre els treballs al respecte. S'hi expliquen els conceptes necessaris per a entendre el problema ometent conceptes bàsics d'equacions diferencials ordinàries.

L'escrit neix arran de l'estudi de l'article “Chaotic dynamics near triple collision” [8], de Richard Moeckel i cerca, centrant-se en la dinàmica, desembolicar els resultats i facilitar la seva comprensió desenvolupant el procediment, afegint demostracions que hi manquen i explicant algunes de les referències clau. El propòsit final del text és la comprensió del teorema descrit a [8] que afirma que es poden construir òrbites periòdiques que passen a prop de totes les configuracions centrals en qualsevol ordre.

Per a dur a terme aquestes ampliacions, s'han consultat diversos articles. En primer lloc, la lectura de “Symbolic dynamics in the planar three-body problem” [11], de Richard Moeckel ha permès contrastar [8] amb un article posterior del mateix autor. Pel que fa a l'ampliació del material, la principal font de consulta ha estat “Characterization of transversal homothetic solutions in the n -body problem” [15], de Carles Simó i Jaume Llibre, els resultats del qual es presenten adaptats al cas $n = 3$. Tot això sense desmerèixer articles amb menys pes teòric, com ara els d'Alain Chenciner [1] i Richard Montgomery [12], que han estat claus per a la comprensió dels aspectes més bàsics, aquells que conformen el nucli de l'estudi. En definitiva, cadascuna de les referències ha aportat un avenç en el desenvolupament d'aquest escrit i mereix ser esmentada.

1.3 Estructura del text

L'estudi està dividit en cinc seccions. Es comença establint les eines necessàries per a treballar el problema i seguidament s'enuncien i demostren resultats importants presentats a [8]. A continuació, es dona un avenç conceptual d'aquests resultats.

D'entrada, es presenten els elements que envolten l'estudi del problema. En la Secció 2 es descriuen les equacions del sistema i s'introdueix una tècnica recurrent en els estudis del problema a prop de la col·lisió triple: el canvi de variables anomenat *McGehee blow-up*. El sistema d'equacions diferencials que defineix el problema

dels tres cossos presenta singularitats a la col·lisió triple, que és el que es vol estudiar, i emprant aquesta tècnica s'aconsegueix estudiar amb més precisió aquesta singularitat. Deu el seu nom a Stephen McGehee, que l'implementà a [7].

Amb aquestes coordenades, en la Secció 3 es defineixen les configuracions centrals, es troben les equacions que les concerneixen i es representen visualment en l'esfera de forma. Per a això, primer es descriu l'espai $M(h, \omega)$ on viuen els vectors del *blow-up*. Es diferencien diverses instàncies d'aquesta varietat depenent del moment angular ω i es descriu la subvarietat C on es troben els punts fixos del de les òrbites homotètiques del camp vectorial que presenten col·lisió triple. Les òrbites de les varietats descrites es representen seguidament en la Secció 4, posant èmfasi en el cas $\omega = 0$.

L'objectiu en endavant és provar que es poden construir les òrbites periòdiques del teorema de [8] esmentat anteriorment. Aquesta construcció es fa a través de demostrar de la transversalitat de les connexions entre els punts fixos de C , corresponents a les configuracions centrals. Primerament, s'estudia la dinàmica d'aquests punts fixos: els valors propis i les varietats invariants estable i inestable de cadascun. Amb això veiem quines connexions de punts fixos són transversals i quan ho són, cosa que ens permetrà provar el resultat esmentat.

Fins ara s'ha treballat a la varietat amb moment angular nul M , a la qual pertany C . Per tal d'extrapolar aquests resultats a $M(h, \omega)$ per a $|\omega|$ prou petit, en la Secció 5 es desenvolupa una anàlisi pertorbativa que permet tractar $M(h, \omega)$ com una pertorbació de M . Amb això obtenim els resultats necessaris per a veure que la construcció d'aquestes òrbites periòdiques és possible.

Per concloure, en la Secció 6 s'expliquen dues proves que s'han fet servir per a demostrar la transversalitat de les connexions: una sobre la dimensió de les varietats invariants i una altra sobre la transversalitat d'una de les connexions esmentades.

2 Coordenades i equacions

En aquest estudi treballem el problema dels tres cossos restringit al pla quan els tres cossos estan a prop de la col·lisió triple. Volem descriure el moviment d'aquestes tres partícules puntuals amb masses positives m_1, m_2, m_3 . Per a això, considerarem diferents sistemes de coordenades.

2.1 Coordenades cartesianes

En coordenades cartesianes, els cossos tenen posicions $q_k \in \mathbb{R}^2$ i moment lineal $p_k = m_k \dot{q}_k \in \mathbb{R}^2$, $k = 1, 2, 3$. Representem les posicions i moments de tots tres cossos per $p, q \in \mathbb{R}^6$, $p = (p_1, p_2, p_3)$, $q = (q_1, q_2, q_3)$, i les masses amb la matriu diagonal 6×6

$$A = \text{diag}(m_1, m_1, m_2, m_2, m_3, m_3).$$

Estudiem la dinàmica del sistema a través de la funció $H(p, q)$, anomenada Hamiltoniana. Per a definir-la, cal definir primer l'energia potencial i l'energia cinètica.

Definició 2.1. *L'energia potencial $U(q)$ i l'energia cinètica $T(p)$ del sistema són definides per:*

$$U(q) = \sum_{i < j}^3 \frac{m_i m_j}{\|q_i - q_j\|} = \frac{m_1 m_2}{\|q_1 - q_2\|} + \frac{m_1 m_3}{\|q_1 - q_3\|} + \frac{m_2 m_3}{\|q_2 - q_3\|} \quad (2.1)$$

$$T(p) = \frac{1}{2} p \cdot A^{-1} p,$$

on \cdot i $\|\cdot\|$ són el producte escalar i la norma euclidiana induïts en \mathbb{R}^6 , respectivament.

El Hamiltonià és la funció $H(p, q)$ que ens dona l'energia del sistema:

$$H(p, q) = T(p) - U(q) = \frac{1}{2} p \cdot A^{-1} p - U(q) = h. \quad (2.2)$$

Amb aquest, definim l'evolució del sistema: és expressada per les equacions de Hamilton:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \partial_p H = A^{-1} p \\ \dot{p} &= -\partial_q H = \nabla U(q), \end{aligned} \quad (2.3)$$

Aquestes equacions formen un sistema dinàmic definit en $\mathbb{R}^6 \setminus \Delta_q$, on

$$\Delta_q = \{q : q_i = q_j \text{ per a algun } i \neq j\}$$

representa el conjunt de punts on dues partícules tenen simultàniament la mateixa posició. A les posicions pertanyent a aquest conjunt les anomenem **col·lisions binàries**. Diem que una col·lisió (q_1, q_2, q_3) és **triple** si $q_1 = q_2 = q_3$.

A més, (2.3) té cinc integrals primeres, que ens permetran fixar valors i restringir el moviment.

Definició 2.2. *Una funció contínua és una integral primera d'un sistema si és constant en totes les seves trajectòries i no és constant en cap obert de l'espai de fase del sistema.*

Notació. *Siguin $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^6$ vectors amb la mateixa forma que p, q . Escrivim*

$$a \times b := \sum_{k=1}^3 a_k \times b_k,$$

on $a_k \times b_k = \begin{pmatrix} a_k^1 \\ a_k^2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_k^1 \\ b_k^2 \end{pmatrix} = a_k^1 b_k^2 - a_k^2 b_k^1 \in \mathbb{R}$ és el producte vectorial de \mathbb{R}^2 .

Les integrals primeres, constants al llarg de les trajectòries de (2.3), són:

$$\begin{aligned} Aq &= m_1 q_1 + m_2 q_2 + m_3 q_3 = c \text{ (centre de masses } c) \\ p_1 + p_2 + p_3 &= 0 \text{ (moment lineal)} \\ q \times p &= \omega \text{ (moment angular)}. \end{aligned}$$

El centre de masses i el moment lineal són vectors de \mathbb{R}^2 , de manera que cadascun dona dues integrals primeres (una per component).

Com que c és constant, **fixem el centre de masses a l'origen**, $c = 0$, per tal de facilitar l'estudi del problema, ja que veurem que la col·lisió triple es dona al centre de masses. Només suposa una translació del sistema a l'espai, així que ho podem fer sense pèrdua de generalitat.

2.2 El *McGehee blow-up*

Per tal d'estudiar el sistema (2.3) a prop de la col·lisió triple, introduïm un canvi de variables. Cerquem fer el que s'anomena un *blow-up*: una transformació que augmenti la dimensió de la singularitat del sistema, és a dir, la dimensió del conjunt on no està definit. El *blow-up* ens permetrà descriure més acuradament la dinàmica del sistema a prop de la col·lisió triple.

Exemple 2.3. Un exemple simple és el d'una funció a \mathbb{R}^2 amb un punt singular a l'origen. Un possible *blow-up* és el canvi a coordenades polars:

- En coordenades cartesianes, tenim que la singularitat és l'origen

$$(0, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

- Fem el canvi a coordenades polars. Siguin r el radi i θ l'angle, els punts en aquest sistema són

$$(r, \theta) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi).$$

- L'origen de \mathbb{R}^2 correspon a $r = 0$ en coordenades polars, i no depèn de θ . Per tant, la singularitat en aquestes coordenades és el conjunt

$$\{(0, \theta) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi) : \theta \in [0, 2\pi)\}$$

La singularitat passa de ser un punt (dimensió 0) a una circumferència (dimensió 1). Això ens permet estudiar-la amb més precisió, podem “distingir entre diferents tipus d'origen”.

Tot seguit, duem a terme el *McGehee blow-up*, introduït per Stephen McGehee a [7]. Notem que pot presentar lleugeres variacions; aquí usem la versió emprada a [8].

De manera semblant a l'exemple, parametritzem el sistema amb unes coordenades que representen els punts d'un el·lipsoide en què el camp està definit.

Definició 2.4. *El McGehee blow-up és pel canvi de variables següent:*

$$\begin{aligned} r &= (q^T A q)^{\frac{1}{2}} \\ s &= r^{-1} q \\ z &= r^{\frac{1}{2}} p. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Cadascuna de les noves coordenades ens dona informació diferent del sistema:

- La coordenada $r \in \mathbb{R}$ representa la mida de l'el·lipsoide. És l'arrel quadrada del moment d'inèrcia.
- La coordenada $s \in \mathbb{R}^6$ descriu la forma que descriuen les tres partícules a l'espai. Rep el nom de **configuració**.
- La coordenada $z \in \mathbb{R}^6$ porta la informació del moment lineal.

Seguidament, veiem com es tradueixen les equacions del sistema descrites en la Secció 2.1 en les coordenades del *blow-up*.

Proposició 2.5. *Les solucions amb energia $H(p, q) = h$ satisfan*

$$H(z, s) = \frac{1}{2} z \cdot A^{-1} z - U(s) = rh, \tag{2.5}$$

on $H(z, s) = T(z) - U(s)$ i

$$T(z) = \frac{1}{2}z \cdot A^{-1}z$$

$$U(s) = \sum_{i < j}^3 \frac{m_i m_j}{\|s_i - s_j\|}.$$

Demostració. Ho veiem substituïnt $z = r^{\frac{1}{2}}p$ i $s = r^{-1}q$ a $H(z, s)$:

$$H(z, s) = \frac{1}{2}r^{\frac{1}{2}}p \cdot A^{-1}r^{\frac{1}{2}}p - U(r^{-1}q) = r\frac{1}{2}p \cdot A^{-1}p - rU(q) = rH(p, q) = rh.$$

Aquesta relació al potencial es dona perquè $q = r^{-1}s$ i llavors

$$U(r^{-1}q) = \sum_{i < j}^3 \frac{m_i m_j}{\|r^{-1}q_i - r^{-1}q_j\|} = \sum_{i < j}^3 \frac{m_i m_j}{r^{-1}\|q_i - q_j\|} = \frac{1}{r^{-1}} \sum_{i < j}^3 \frac{m_i m_j}{\|q_i - q_j\|} = rU(q).$$

□

D'altra banda, les **integrals primeres** de (2.3) en les noves coordenades són equivalents a:

$$\begin{aligned} m_1 s_1 + m_2 s_2 + m_3 s_3 &= 0 \\ z_1 + z_2 + z_3 &= 0 \\ r s \times r^{-\frac{1}{2}} z &= r^{\frac{1}{2}} s \times z = \omega, \end{aligned} \tag{2.6}$$

A més, notem que s pertany a un **el·lipsoide** de cinc dimensions a \mathbb{R}^6 :

$$s \cdot A s = r^{-1}q \cdot A r^{-1}q = r^{-2}q \cdot A q = r^{-2}r^2 = 1. \tag{2.7}$$

Aquesta restricció de s , juntament amb les donades a (2.6), ens porta a concloure que s està restringit a un el·lipsoide tridimensional a \mathbb{R}^6 .

Fins ara hem analitzat les restriccions que defineixen el problema dels tres cossos en les coordenades (2.4). Tot seguit, definim el camp vectorial que regeix el sistema en aquestes coordenades. Aquest és el camp amb què treballarem d'ara endavant.

Proposició 2.6. *Fent el canvi de temps $dt = r^{\frac{3}{2}}d\tau$, obtenim la següent equació diferencial respecte de τ :*

$$\begin{aligned} r' &= rv \\ s' &= A^{-1}z - vs \\ z' &= \nabla U(s) + \frac{1}{2}vz, \end{aligned} \tag{2.8}$$

on $v = s \cdot z = r^{-\frac{1}{2}}p \cdot q$.

Demostració. Calculem les derivades d'aquestes variables respecte de t :

$$\dot{r} = \left(\frac{1}{2}r^{-1}\right)(2q^T A\dot{q}) = r^{-1}q^T AA^{-1}q = r^{-1}p \cdot q = (r^{-\frac{3}{2}})r(r^{-\frac{1}{2}}p \cdot q) = r^{-\frac{3}{2}}(rv)$$

$$\begin{aligned}\dot{s} &= -\dot{r}r^{-2} \cdot q + r^{-1}\dot{q} = -(r^{-1}p \cdot q)r^{-2} \cdot (rs) + r^{-1} \cdot (A^{-1}p) \\ &= -(r^{-2}p \cdot q)s + r^{-1}(A^{-1}r^{-\frac{1}{2}}z) = r^{-\frac{3}{2}}(-vs + A^{-1}z)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{z} &= r^{\frac{1}{2}}\dot{p} + \frac{1}{2}\dot{r}r^{-\frac{1}{2}}p = r^{\frac{1}{2}}\nabla U(q) + \frac{1}{2}(r^{-\frac{3}{2}}rv)r^{-\frac{1}{2}}p = r^{\frac{1}{2}}r^{-2}\nabla U(s) + \frac{1}{2}r^{-\frac{3}{2}}vr^{\frac{1}{2}}p \\ &= r^{-\frac{3}{2}}(\nabla U(s) + \frac{1}{2}vz).\end{aligned}$$

Fent el canvi de temps $dt = r^{\frac{3}{2}}d\tau$ obtenim les equacions de la proposició. \square

El camp (2.8) està definit per a $r \in (0, \infty)$ excepte a les col·lisions binàries, i la singularitat de la col·lisió triple és el conjunt $\{r = 0\}$; com que $m_i > 0$ i

$$r = +(m_1q_1^2 + m_2q_2^2 + m_3q_3^2)^{1/2},$$

llavors r s'anul·la si i només si $q = (0, 0, 0)$; això és, si les tres partícules col·lideixen al centre de masses $c = 0$.

Hem augmentat la dimensió de la singularitat amb èxit. En el nou temps τ , l'equació diferencial es pot estendre al conjunt $\{r = 0\}$, que és una varietat invariant; diem que **hem regularitzat la singularitat** de la col·lisió triple. Tanmateix, cal remarcar que les òrbites que trobem en aquest conjunt no són solucions del problema dels tres cossos; ho estudiem perquè les solucions que passen a prop de la col·lisió presenten un comportament similar.

3 Les configuracions centrals

Les **configuracions centrals** són aquelles configuracions en què el vector d'acceleració de cada cos apunta cap al centre de masses i és proporcional a la distància entre el cos i el centre de masses (que hem fixat a l'origen).

Ha estat provat que el problema dels tres cossos només té cinc configuracions centrals, classificades en eulerianes i lagrangianes.

- Les **configuracions eulerianes** són aquelles en què les tres partícules hi estan alineades. N'hi ha tres de diferents per rotacions: les successions de partícules $m_1m_2m_3$, $m_1m_3m_2$ i $m_2m_1m_3$. Les anomenem $c_i, i = 1, 2, 3$.
- Les **configuracions lagrangianes** són aquelles en què les tres partícules formen un triangle equilàter. N'hi ha dues de diferents per rotacions: els triangles $m_1m_2m_3$ i $m_1m_3m_2$. Les anomenem l_1 i l_2 .

Aquestes configuracions donen lloc a solucions periòdiques del problema dels tres cossos en què les configuracions mantenen la forma al llarg de la trajectòria, és a dir, només varien per rotació, translació i mida. [6] En aquestes òrbites, cada cos segueix una trajectòria el·líptica kepleriana (veure les Figures 4 i 5).

A mesura que el moment angular tendeix cap a zero, les el·lipsoïdes descrites pels cossos en aquestes òrbites periòdiques degeneren a segments i les òrbites periòdiques col·lideixen al centre de masses en temps futur i passat. Aquestes són les **òrbites homotètiques** (veure la Figura 3).

3.1 La varietat de solucions $M(h, \omega)$

Per tal d'estudiar les solucions del problema, primerament cal comprendre l'espai on es troben les òrbites definides pel camp (2.8). Estudiarem la topologia d'aquest espai i provarem la simetria rotacional del problema dels tres cossos. Això ens permetrà definir l'esfera de forma, on representarem les configuracions centrals.

Les solucions de (2.8) es troben a la varietat formada per les coordenades del *blow-up* que compleixen les equacions del sistema i que no són singularitats. El conjunt de singularitats és l'**espai de col·lisions binàries** $\Delta = \{s : s_i = s_j \text{ per a algun } i \neq j\}$, ja que la col·lisió triple ha estat regularitzada a través del *blow-up*. A més, el sistema depèn de dues constants: l'energia h i el moment angular ω . Definim doncs la **varietat de solucions** de (2.8) com

$$M(h, \omega) = \{(r, s, z) : r \geq 0, s \notin \Delta, \text{ es compleixen (2.4)-(2.8)}\}.$$

Tot seguit, estudiem la varietat de solucions $M(h, \omega)$ fixant una energia negativa $h < 0$ i un moment angular $|\omega| > 0$ petit.

Com que $\omega = r^{\frac{1}{2}}s \times z$, si $\omega \neq 0$ llavors $r \neq 0$ i, per tant, no hi pot haver col·lisió triple. D'entrada, definim l'**espai de configuració** Σ com la projecció de $M(h, \omega)$ sobre l'el·lipsoide tridimensional al qual pertanyen els vectors s :

$$\Sigma = \{s : s \notin \Delta, \text{ es compleixen (2.6) i (2.7)}\}.$$

La condició de no pertànyer al conjunt de col·lisions binàries fa que puguem interpretar aquest espai com un el·lipsoide al qual se li han extret tres circumferències corresponents a les tres possibles col·lisions binàries $s_i = s_j, i \neq j$. Aquest espai ens permet visualitzar la forma de $M(h, \omega)$.

Proposició 3.1. [8] *Per a tota $h < 0$, si $|\omega| > 0$ és prou petit aleshores $M(h, \omega)$ és difeomorf a $\Sigma \times S^3$.*

Un cop entesa la forma de la varietat $M(h, \omega)$, la volem simplificar. Comencem provant que, en general, el camp (2.8) és invariant per rotacions. Això ens portarà a estudiar la varietat quocient de $M(h, \omega)$ respecte de la simetria rotacional.

Proposició 3.2. *Sigui $R := R(\theta)$ la matriu de rotació 6×6 amb blocs a la diagonal de la forma*

$$R_B = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Aleshores $(r, s, z) := (r(t), s(t), z(t))$ és solució de (2.8) si i només si (r, Rs, Rz) també ho és.

Demostració. Observem primer que

$$\begin{aligned} (Rs)' &= Q\theta'_0 s + Rs' = Rs' \\ (Rz)' &= Q\theta'_0 z + Rz' = Rz'. \end{aligned}$$

Per tant, (r, Rs, Rz) és solució si i només si

$$\begin{aligned} Rs' &= A^{-1}Rz - ((Rs)^T Rz)Rs \\ Rz' &= \nabla U(Rs) + \frac{1}{2}((Rs)^T Rz)Rs. \end{aligned}$$

Vegem-ho. Primerament observem que $(Rs)^T Rz = (s^T R^T Rz) = s^T Iz = s^T z = v$. Llavors:

$$\begin{aligned} A^{-1}Rz - ((Rs)^T Rz)Rs &= A^{-1}Rz - vRs = RA^{-1}z - Rvs = R(A^{-1}z - vs) = Rs' \\ \nabla U(Rs) + \frac{1}{2}((Rs)^T Rz)Rs &= R\nabla U(s) + R\frac{1}{2}vs = Rz'. \end{aligned}$$

□

Remarca 1. La derivada de R respecte de θ , que denotem per $Q := \partial_\theta R$, és la matriu 6×6 amb blocs a la diagonal de la forma:

$$Q_B := \partial_\theta R_B = \begin{pmatrix} -\sin \theta & -\cos \theta \\ \cos \theta & -\sin \theta \end{pmatrix}.$$

Per tant, el camp vectorial donat per (2.8) sota l'acció del grup G format per les rotacions R determina la **varietat quocient** $M(h, \omega)/G := \tilde{M}(h, \omega)$. Representem amb \sim els espais quocientats respecte G .

A conseqüència de la Proposició 3.1, $\tilde{M}(h, \omega)$ és difeomorf a $\tilde{\Sigma} \times S^3$, on $\tilde{\Sigma}$ és una esfera bidimensional S^2 a la qual se li han extret tres punts corresponents a les tres col·lisions binàries. En aquesta esfera, anomenada esfera de forma o *shape sphere*, cadascuna de les configuracions $s \in \tilde{\Sigma}$ està representada per un punt.

3.2 Les configuracions centrals a l'esfera de forma

“The operation of passing from the usual three-body configuration space [...] to a point in the shape sphere, is a process of forgetting”.

– Richard Montgomery [12]

En aquesta secció, descrivim esquemàticament l'esfera de forma amb la finalitat d'entendre visualment les configuracions centrals dins l'espai quocient de configuració $\tilde{\Sigma}$.

Considerem les configuracions on els tres cossos estan alineats com triangles degenerats. Així, la forma descrita per les tres partícules és un triangle, que té dues dimensions, ja que n'hi ha prou amb conèixer dos dels angles per a definir-lo.

La latitud d'una configuració a l'esfera ve donada per l'àrea normalitzada del triangle que descriu, això és, l'àrea en relació amb els costats. El triangle equilàter és el triangle d'àrea normalitzada màxima, de manera que cadascuna de les dues configuracions lagrangianes es troba a un dels dos pols. D'altra banda, el triangle degenerat té àrea zero, de manera que les configuracions eulerianes es troben a l'equador. També es troben a l'equador les col·lisions dobles, ja que són un triangle degenerat on dos dels vèrtexs coincideixen.

Pel que fa a la longitud, cada paral·lel de l'esfera correspon als triangles diferents sota el grup de rotacions que tenen la mateixa àrea normalitzada.

En particular, l'equador està dividit per les tres col·lisions divideixen l'equador en tres segments. Cadascun d'aquests segments correspon a una de les tres possibles ordenacions diferents de les masses, i cada punt d'aquests segments representa la proporció entre les dues separacions que hi ha entre les masses. La posició cadascuna de les tres configuracions eulerianes correspon al centre d'un d'aquests segments.

Així doncs, les cinc configuracions centrals i les col·lisions dobles estaran distribuïdes a l'esfera de forma com es mostra a la Figura 1.

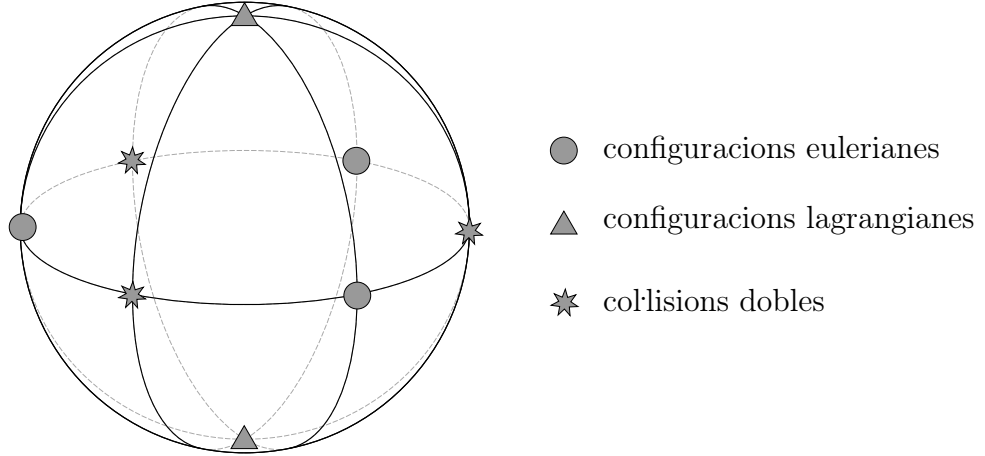


Figura 1: *Esfera de forma.*

3.3 Caracterització de les configuracions centrals

En aquesta secció trobarem les equacions que caracteritzen aquestes configuracions de forma constant. Sigui $s_0 \in \Sigma$ una de les cinc configuracions centrals, llavors estudiem com són les solucions tals que $s(t)$ és de la forma $s(t) = R(\theta(t))s_0$, és a dir, tals que la configuració només canvia per rotació.

L'estratègia a seguir per tal de descriure aquestes solucions és treballar les equacions (2.8). Així trobem equacions per a calcular tant les altres components de la solució donada $s(t)$ com la relació entre les configuracions fixes i el potencial i, per mitjà d'aquest procediment, arribem als resultats exposats seguidament i provats a continuació.

Proposició 3.3. *Sigui $\alpha := \theta'$ i $s = s_0$ solució central. Les corresponents solucions del problema dels tres cossos corresponents a s_0 són determinades pel sistema d'equacions*

$$\begin{aligned} v' &= \alpha^2 + \frac{1}{2}v^2 - U(s_0) \\ \alpha' &= -\frac{1}{2}v\alpha, \end{aligned} \tag{3.1}$$

D'aquestes equacions obtenim que l'evolució de $r(t)$ està descrita per:

$$\begin{aligned} rh &= \frac{1}{2}(v^2 + \alpha^2) - U(s_0) \\ r^{\frac{1}{2}}\alpha &= \omega. \end{aligned} \tag{3.2}$$

La demostració d'aquesta proposició es troba en la Secció 3.4.

Notem que la mida $r(t)$ pot variar quan α varia; només cerquem que la forma sigui constant.

Pel que fa al potencial, trobem una relació entre la funció U i s_0 .

Proposició 3.4. *Segui s_0 és una configuració central. Llavors*

$$\nabla U(s_0) = -U(s_0)As_0. \quad (3.3)$$

La demostració d'aquest resultat es troba en la Secció 3.4.

Això implica que el gradient de U és normal a l'el·lipsoide $s \cdot As = 1$ i, per tant, **les configuracions centrals són punts crítics del potencial U restringit a l'el·lipsoide (2.7).**

3.4 Demostracions de les proposicions de la Secció 3.3

Provem a continuació les dues proposicions. Seran necessaris dos lemes previs.

Lema 3.5. *Substituint $s(t)$ a les equacions (3.1) obtenim*

$$(v' - (\theta')^2 - \frac{1}{2}v^2)As_0 + (\theta'' - \frac{1}{2}v\theta')AJs_0 - \nabla U(s_0) = 0, \quad (3.4)$$

on J és una matriu 6×6 amb blocs $J_B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ i $\theta := \theta(t)$.

Demostració. Per a obtenir aquest resultat cal treballar sobre la segona derivada de $s(t)$. Fem servir que $\partial_\theta R = JR(\theta) = R(\theta)J$ i $\partial_\theta^2 R = -R$.

En primer lloc, si $s(t) = R(\theta)s_0$ llavors $s'(t) = (R(\theta)s_0)' = JR(\theta)\theta's_0$ i

$$s''(t) = -R(\theta)(\theta')^2s_0 + JR(\theta)\theta''s_0 = -R(\theta)(\theta')^2s_0 + JR(\theta)\theta''s_0.$$

D'altra banda, si $s(t)$ és solució llavors $s'(t) = A^{-1}z(t) - vs(t)$ i

$$\begin{aligned} s''(t) &= A^{-1}z'(t) - vs'(t) - v's(t) = A^{-1}(\nabla U(s(t)) + \frac{1}{2}vz(t)) - vs'(t) - v's(t) \\ &= A^{-1}R(\theta)\nabla U(s_0) + \frac{1}{2}v(s'(t) + vs(t)) - vs'(t) - v's(t) \\ &= A^{-1}R(\theta)\nabla U(s_0) - \frac{1}{2}vs'(t) + \frac{1}{2}v^2s(t) - v's(t) \\ &= A^{-1}R(\theta)\nabla U(s_0) - \frac{1}{2}vJR(\theta)\theta's_0 + \frac{1}{2}v^2R(\theta)s_0 - v'R(\theta)s_0. \end{aligned}$$

Aquí hem fet servir que

$$\begin{aligned} z'(t) &= \nabla U(s(t)) + \frac{1}{2}vz(t) \\ A^{-1}z(t) &= s'(t) + vs(t) \\ \nabla U(s(t)) &= \nabla U(Rs_0) = \nabla RU(s_0) \end{aligned}$$

Igualem ara les dues expressions per a $s''(t)$ que hem obtingut:

$$-R(\theta)(\theta')^2s_0 + JR(\theta)\theta''s_0 = A^{-1}R(\theta)\nabla U(s_0) - \frac{1}{2}vJR(\theta)\theta's_0 + \frac{1}{2}v^2R(\theta)s_0 - v'R(\theta)s_0.$$

Fem el producte per l'esquerra per R^{-1} :

$$\begin{aligned} -(\theta')^2s_0 + J\theta''s_0 &= A^{-1}\nabla U(s_0) - \frac{1}{2}vJ\theta's_0 + \frac{1}{2}v^2s_0 - v's_0 \\ (v' - \frac{1}{2}v^2 - (\theta')^2)s_0 + (\theta'' + \frac{1}{2}v\theta')Js_0 - A^{-1}\nabla U(s_0) &= 0. \end{aligned}$$

Finalment, fem el producte per l'esquerra per A :

$$(v' - \frac{1}{2}v^2 - (\theta')^2)As_0 + (\theta'' + \frac{1}{2}v\theta')AJs_0 - \nabla U(s_0) = 0.$$

□

Lema 3.6. *Fent el producte escalar de $\nabla U(s_0)$ per s_0 i Js_0 obtenim les equacions*

$$\begin{aligned} \nabla U(s_0) \cdot s_0 &= -U(s_0) \\ \nabla U(s_0) \cdot Js_0 &= 0. \end{aligned}$$

Demostració. Per tal de simplificar la notació i millorar la comprensió treballarem amb $e = (e_1, e_2, e_3) := s_0$. Comencem per la primera igualtat.

$$\begin{aligned} U(e) &= \frac{m_1m_2}{\|e_1 - e_2\|} + \frac{m_1m_3}{\|e_1 - e_3\|} + \frac{m_2m_3}{\|e_2 - e_3\|} \\ \nabla U(e) &= (\partial_{e_1}U(e), \partial_{e_2}U(e), \partial_{e_3}U(e)) \\ \partial_{e_1}U(s) &= -\frac{m_1m_2(e_1 - e_2)}{\|e_1 - e_2\|^3} - \frac{m_1m_3(e_1 - e_3)}{\|e_1 - e_3\|^3} \\ \partial_{e_2}U(s) &= -\frac{m_1m_2(e_1 - e_2)}{\|e_1 - e_2\|^3} - \frac{m_2m_3(e_2 - e_3)}{\|e_2 - e_3\|^3} \\ \partial_{e_3}U(s) &= -\frac{m_1m_3(e_1 - e_3)}{\|e_1 - e_3\|^3} - \frac{m_2m_3(e_2 - e_3)}{\|e_2 - e_3\|^3}. \end{aligned}$$

Per acabar,

$$\begin{aligned}
\nabla U(e) \cdot e &= \\
&= -\frac{m_1 m_2 (e_1 - e_2)}{\|e_1 - e_2\|^3} \cdot (e_1 - e_2) - \frac{m_1 m_3 (e_1 - e_3)}{\|e_1 - e_3\|^3} \cdot (e_1 - e_3) - \frac{m_2 m_3 (e_2 - e_3)}{\|e_2 - e_3\|^3} \cdot (e_2 - e_3) \\
&= -\frac{m_1 m_2 \|e_1 - e_2\|^2}{\|e_1 - e_2\|^3} - \frac{m_1 m_3 \|e_1 - e_3\|^2}{\|e_1 - e_3\|^3} - \frac{m_2 m_3 \|e_2 - e_3\|^2}{\|e_2 - e_3\|^3} \\
&= \frac{m_1 m_2}{\|e_1 - e_2\|} + \frac{m_1 m_3}{\|e_1 - e_3\|} + \frac{m_2 m_3}{\|e_2 - e_3\|} \\
&= -U(e)
\end{aligned}$$

Pel que fa a la segona igualtat,

$$Je = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1^1 \\ e_1^2 \\ e_2^1 \\ e_2^2 \\ e_3^1 \\ e_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e_1^2 \\ e_1^1 \\ -e_2^2 \\ e_2^1 \\ -e_3^2 \\ e_3^1 \end{pmatrix}.$$

□

Ara podem procedir a provar les dues proposicions anteriors. Comencem per la primera.

Demostració de la Proposició 3.3. Per a obtenir el sistema d'equacions (3.1) calculem el producte escalar de (3.4) per s_0 i per Js_0 . Vegem-ho.

- Per al producte per s_0 primer notem tres resultats previs. Com que $s_0 \in \Sigma$ llavors $s_0 \cdot As_0 = 1$, pel Lema 3.6 tenim que $s_0 \cdot \nabla U(s_0) = -U(s_0)$. A més

$$s_0 \cdot AJs_0 = \begin{pmatrix} e_1^1 \\ e_1^2 \\ e_2^1 \\ e_2^2 \\ e_3^1 \\ e_3^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -m_1 e_1^2 \\ m_1 e_1^1 \\ -m_2 e_2^2 \\ m_2 e_2^1 \\ -m_3 e_3^2 \\ m_3 e_3^1 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^3 -e_i^1 m_i e_i^2 + e_i^2 m_i e_i^1 = 0.$$

Aleshores,

$$\begin{aligned}
s_0 \cdot (3.4) &= (v' - (\theta')^2 - \frac{1}{2}v^2)s_0 \cdot As_0 + (\theta'' - \frac{1}{2}v\theta')s_0 \cdot AJs_0 - s_0 \cdot \nabla U(s_0) \\
&= (v' - (\theta')^2 - \frac{1}{2}v^2) + U(s_0) = 0.
\end{aligned}$$

Aïllant v' i substituint $\alpha = \theta'$ obtenim la primera equació de (3.1).

- Per al producte per J_{s_0} notem que $J_{s_0} \cdot A s_0 = 0$, $J_{s_0} \cdot A J_{s_0} = s_0 \cdot A s_0 = 1$ i $J_{s_0} \cdot \nabla U(s) = 0$ pel Lema 3.6. Provem les dues primeres igualtats mirant els tres blocs de les matrius, $i = 1, 2, 3$:

$$J_{B s_{0_i}} \cdot m_i s_{0_i} = \begin{pmatrix} -s_{0_i}^2 \\ s_{0_i}^1 \end{pmatrix} \cdot m_i \begin{pmatrix} s_{0_i}^1 \\ s_{0_i}^2 \end{pmatrix} = -s_{0_i}^2 m_i s_{0_i}^1 + s_{0_i}^1 m_i s_{0_i}^2 = 0$$

$$J_{B s_{0_i}} \cdot m_i J_{B s_{0_i}} = \begin{pmatrix} -s_{0_i}^2 \\ s_{0_i}^1 \end{pmatrix} \cdot m_i \begin{pmatrix} -s_{0_i}^2 \\ s_{0_i}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{0_i}^1 \\ s_{0_i}^2 \end{pmatrix} \cdot m_i \begin{pmatrix} s_{0_i}^1 \\ s_{0_i}^2 \end{pmatrix} = s_{0_i} \cdot m_i s_{0_i}.$$

Aleshores,

$$J_{s_0} \cdot (3.4) = (v' - (\theta')^2 - \frac{1}{2}v^2)J_{s_0} \cdot A s_0 + (\theta'' - \frac{1}{2}v\theta')J_{s_0} \cdot A J_{s_0} - J_{s_0} \cdot \nabla U(s_0)$$

$$= \theta'' - \frac{1}{2}v\theta' = 0.$$

Aïllant θ'' i substituint $\alpha = \theta'$ obtenim la segona equació de (3.1).

Per acabar, provem les equacions que caracteritzen la mida $r(t)$.

- De cara a la primera equació, sabem per (2.5) que $r h = \frac{1}{2}(z^T A^{-1} z)$. Per tant, n'hi haurà prou amb provar que $v^2 + \alpha^2 = z^T A z$. De l'expressió de s' de (2.8) obtenim que $A^{-1} z = s' + v s$. Aleshores

$$z^T A^{-1} z = z^T s' + v z^T s = z^T s' + v^2.$$

Finalment, vegem que $z^T s' = \alpha^2$:

$$\begin{aligned} z^T s' &= (s')^T z = (v)' - s^T z' = v' - s^T z' \\ &= (\alpha^2 + \frac{1}{2}v^2 - U(s)) - s^T (\nabla U(s) + \frac{1}{2}v z) \\ &= \alpha^2 - U(s) - (s)^T \nabla U(s) \\ &= \alpha^2 - U(R s_0) - (R s_0)^T \nabla U(R s_0) \\ &= \alpha^2 - U(s_0) - (s_0)^T R^T R \nabla U(s_0) \\ &= \alpha^2 - U(s_0) - (s_0)^T \nabla U(s_0) \\ &= \alpha^2 - U(s_0) + U(s_0) \\ &= \alpha^2. \end{aligned}$$

- Per a l'altra igualtat, per (2.6) només cal provar que $s \times z = \alpha$. De l'expressió s' obtenim que $z = A s' + v A s$. Per tant,

$$\begin{aligned} s \times z &= s \times (A s' + v A s) = s \times (A s') + s \times (v A s) \\ &= R s_0 \times (A J R \alpha s_0) + s \times (v A s). \end{aligned}$$

Com que s i $v A s$ són paral·lels, el seu producte vectorial és zero. Cal veure que $R s_0 \times (A J R \alpha s_0) = \alpha$, que és equivalent a provar que $R s_0 \times (A J R s_0) =$

1. Escrivim $e := s_0$ per claredat. Siguin J_B i R_B els blocs 2×2 descrits anteriorment, aleshores

$$\begin{aligned}
Re \times (AJRe) &= \sum_{i=1}^3 \begin{pmatrix} e_i^1 \\ e_i^2 \end{pmatrix} \times (m_i J_B R_B \begin{pmatrix} e_i^1 \\ e_i^2 \end{pmatrix}) \\
&= \sum_{i=1}^3 m_i \begin{pmatrix} \cos \theta e_i^1 - \sin \theta e_i^2 \\ \sin \theta e_i^1 + \cos \theta e_i^2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin \theta e_i^1 - \cos \theta e_i^2 \\ \cos \theta e_i^1 - \sin \theta e_i^2 \end{pmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^3 m_i (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) ((e_i^1)^2 + (e_i^2)^2) \\
&= \sum_{i=1}^3 m_i \|e_i\|^2 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

□

Per a la segona proposició, la prova és la següent:

Demostració de la Proposició 3.4. Substituint a (3.4) les expressions trobades per a v' i θ'' obtenim:

$$\begin{aligned}
&((\theta')^2 + \frac{1}{2}v^2 - U(s_0) - \frac{1}{2}v^2 - (\theta')^2)As_0 + (-\frac{1}{2}v\theta' + \frac{1}{2}v\theta')AJs_0 - \nabla U(s_0) \\
&= -U(s_0)As_0 - \nabla U(s_0) = 0.
\end{aligned}$$

□

4 Dinàmica de les configuracions centrals

4.1 La varietat de solucions al pla (r, v)

En aquesta secció, estudiarem la dinàmica de les solucions associades a les configuracions centrals. Treballarem amb les equacions de les configuracions centrals (3.1) al pla (r, v) fixant una energia negativa $h < 0$ i esbossarem els punts fixos del sistema les corbes de nivell de ω a fi de visualitzar les òrbites de $M(h, \omega)$ al pla en funció del moment angular.

Si fixem un moment angular ω , substituint $\alpha^2 = \frac{\omega^2}{r}$ a (3.2) obtenim l'equació d'una corba al pla (r, v) :

$$\frac{1}{2}\left(v^2 + \frac{\omega^2}{r}\right) - U(s_0) = rh.$$

D'aquesta corba en diem corba de nivell de ω . Representar-les ens donarà informació sobre la relació entre les diferents varietats $M(h, \omega)$ en funció del moment angular. Comencem descrivint aquestes varietats.

4.1.1 Les òrbites quan $\omega \neq 0$

Primerament, considerem el cas en què el moment angular no és nul.

Proposició 4.1. *Sigui s_0 una configuració central. L'únic punt fix de (3.1) en $M(h, \omega)$, $\omega \neq 0$ corresponent a s_0 és aquell tal que $(r, v) = \left(\frac{U(s_0)}{|h|}, 0\right)$. A més, correspon a $\omega^2 = \frac{U(s_0^2)}{2|h|}$. Aquest punt s'anomena **equilibri relatiu**, i el denotem per Q .*

Demostració. Els punts fixos de (3.1) són aquells en què $\alpha' = 0$ i $v' = 0$, és a dir, que compleixen les equacions

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha^2 + \frac{1}{2}v^2 - U(s_0) \\ 0 &= -\frac{1}{2}v\alpha. \end{aligned}$$

Com que $\omega = r^{\frac{1}{2}}\alpha \neq 0$, aleshores $\alpha \neq 0$ i, per tant, $v = 0$. Obtenim doncs

$$0 = \alpha^2 - U(s_0).$$

Per tant, $\alpha^2 = U(s_0)$. Ho substituïm a (3.2):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(0 + U(s_0)) - U(s_0) &= rh \\ r^{\frac{1}{2}}U(s_0) &= \omega. \end{aligned}$$

Aïllant, obtenim r i ω^2 :

$$r = -\frac{U(s_0)}{2h} = \frac{U(s_0)}{2|h|}$$

$$\omega^2 = r\alpha^2 = \frac{U(s_0)^2}{2|h|}.$$

□

4.1.2 Les òrbites quan $\omega \rightarrow 0^+$

Altrament, tenim el cas $M(h, \omega)$ quan $|\omega|$ tendeix a 0. Només considerarem, sense pèrdua de generalitat, moment angular positiu; és a dir, quan $\omega \rightarrow 0^+$. Definim

$$M := M(h, 0^+) = \{(r, s, z) : s \notin \Delta, r \geq 0, z \times s \geq 0, \text{ es compleixen (2.4)-(2.8)}\}.$$

Observem que la condició (2.6), equivalent a $r^{\frac{1}{2}}\alpha = r^{\frac{1}{2}}z \times s = 0$, es desdobla en dues equacions

$$r = 0 \tag{4.1}$$

$$z \times s = 0. \tag{4.2}$$

Aleshores, **podem dividir M en dues subvarietats M_0 i M_+** tals que $M = M_0 \cup M_+$ corresponents a les dues equacions.

- A partir de la primera equació de (4.1), definim la subvarietat $M_0 \subset M$ en què $r = 0$:

$$M_0 = \{(r, s, z) : s \notin \Delta, r = 0, z \times s \geq 0, \text{ es compleixen (2.4)-(2.8)}\}.$$

Aquesta es troba íntegrament al conjunt $\{r = 0\}$, on té lloc la col·lisió triple. Per això, no conté cap solució del problema dels tres cossos.

- A partir de la segona equació de (4.1), definim la subvarietat $M_+ \subset M$ en què $z \times s = 0$:

$$M_+ = \{(r, s, z) : s \notin \Delta, r > 0, z \times s = 0, \text{ es compleixen (2.4)-(2.8)}\}.$$

Aquesta representa la varietat integral $\{\omega = 0\}$ del problema dels tres cossos i el problema hi està ben definit. Les òrbites corresponents a les configuracions centrals en aquesta subvarietat presenten van cap a la col·lisió triple tant en temps futur com en temps passat mantenint la forma, però no hi arriben en temps finit (veure la Figura 2). Per tant, estan relacionades amb les òrbites homotètiques.

Definim la subvarietat de M_0 anomenada **varietat de col·lisió triple** com

$$C = \{(r, s, z) : s \notin \Delta, r = 0, z \times s = 0, \text{ es compleixen (2.4)-(2.8)}\} \subset M.$$

Aquesta varietat forma una frontera amb la varietat M_+ , de manera que les òrbites en C reflectiran el comportament de solucions homotètiques del problema. En la Secció 4.2 donem una descripció detallada d'aquesta varietat.

A continuació, relacionem les varietats M_0 i M_+ amb les dues corbes de nivell en M corresponents a $\omega = 0$ i la varietat de col·lisió triple. Les corbes de nivell corresponents a $\omega = 0$ són:

- Una donada per $r = 0$ en M_0 :

$$\{r = 0\}.$$

- Un donada per $\alpha = z \times s = 0$:

$$\frac{1}{2}v^2 - U(s_0) = rh,$$

definida en M_+ per tot $r > 0$ i en C per $r = 0$.

Proposició 4.2. *Donada una configuració central s_0 , els únics punts d'equilibri de les corbes de nivell per $\omega = 0$ tals que a s_0 són els dos punts PE^\pm de la varietat C corresponents a $(r, v) = (0, \pm\sqrt{2U(s_0)})$, on el símbol de v correspon al símbol de PE .*

Demostració. Trobem quins són els punts d'equilibri de (3.1) corresponents a les corbes de nivell:

- Per a la corba $\{r = 0\}$, si $(0, v)$ és un punt fix, llavors (3.1) i (3.2) ens donen, respectivament,

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha^2 + \frac{1}{2}v^2 - U(s_0) \\ 0 &= \frac{1}{2}(v^2 + \alpha^2) - U(s_0). \end{aligned}$$

Per tant, $\alpha = 0$ i $v = \pm\sqrt{2U(s_0)}$. Com que $r = 0$ i $\alpha = 0$, aquest punt pertany a C .

- Per a la corba donada per $\alpha = 0$, si (r, v) és un punt fix, llavors (3.1) i (3.2) ens donen, respectivament

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}v^2 - U(s_0) \\ rh &= \frac{1}{2}v^2 - U(s_0) \end{aligned}$$

Per tant, $r = 0$ i es tracta dels mateixos punts fixos que el cas anterior.

□

Pel que fa a la forma de les varietats en què $\omega = 0$, tenim el següent resultat.

Proposició 4.3. *Les varietats M_0 i M_+ són difeomorfes a $\Sigma \times D^3$, on D^3 és un disc tridimensional tancat. La varietat M és homeomorfa a $\Sigma \times S^3$ [8].*

4.1.3 Representació gràfica de les òrbites

Amb la informació obtinguda podem traçar les corbes de nivell al pla (r, v) per a veure visualment la relació entre les varietats $M(h, \omega)$, M_0 , M_+ i C . Podem veure-ho a la Figura 2.

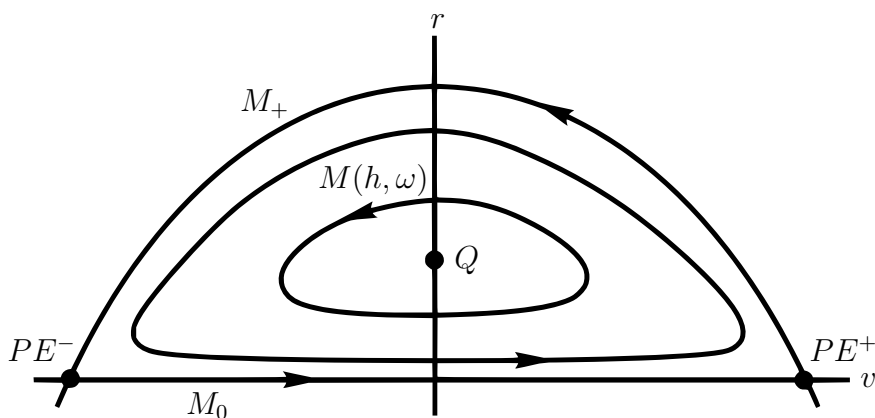


Figura 2: Corbes de nivell de ω i punts fixos de C .

Les dues corbes de nivell de $\omega = 0$ uneixen dos punts fixos cíclicament. D'aquesta connexió en diem **cicle de punts fixos**, és a dir, la connexió de punts d'equilibri mitjançant òrbites heteroclíniques. El dividim en dues branques, una a M_+ i l'altra a M_0 .

Per tant, tornant al *blow-up*, hem aconseguit relacionar l'òrbita homotètica al cicle de punt fixos. Concretament, volem estudiar els fenòmens a prop de la col·lisió i la branca del cicle en M_+ segueix la trajectòria d'una col·lisió homotètica sense arribar a col·lidir en temps finit.

Al pla (r, v) , les òrbites periòdiques de $M(h, \omega)$, $\omega^2 \in (0, \frac{U(s_0^2)}{2|h|})$ corresponents a les configuracions centrals es troben dins el cicle de punt fixos i el seu centre és l'equilibri relatiu Q , que és el punt amb màxim el moment angular. A mesura que el moment angular s'apropa a zero, el comportament de les òrbites s'assimila més al del cicle de punt fixos. A la Figura 2 es representa gràficament el pla (r, v) .

Al pla en què es troben els tres cossos, les òrbites periòdiques de $M(h, \omega)$ corresponents a les configuracions centrals seguiran les següents trajectòries: homotètica si $\omega = 0$, el·líptica si $\omega^2 \in (0, \frac{U(s_0^2)}{2|h|})$ i circular si $\omega^2 = \frac{U(s_0^2)}{2|h|}$. A les Figures 3 i 4, 5 es representen possibles trajectòries d'aquestes òrbites per als dos tipus de configuració central.

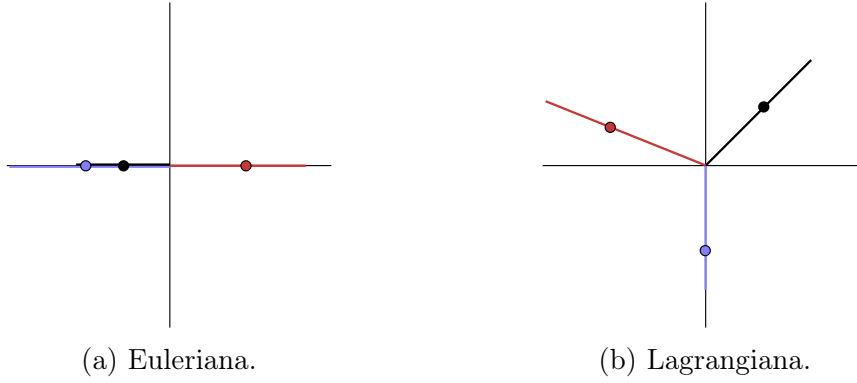


Figura 3: Solució homotètica, $\omega = 0$.

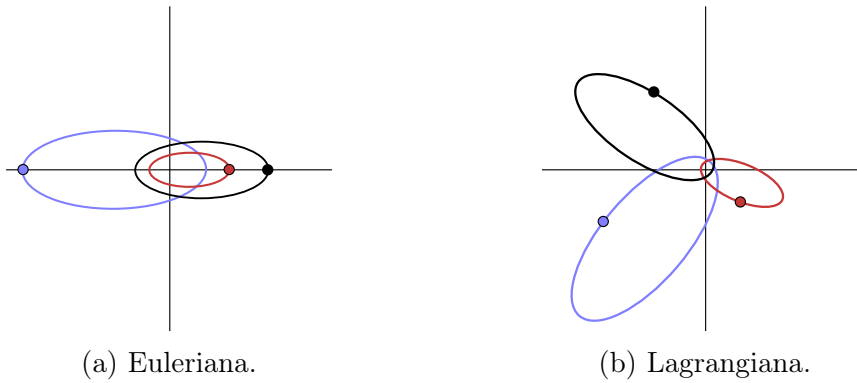


Figura 4: Solució el·líptica, $\omega^2 \in (0, \frac{U(s_0^2)}{2|h|})$.

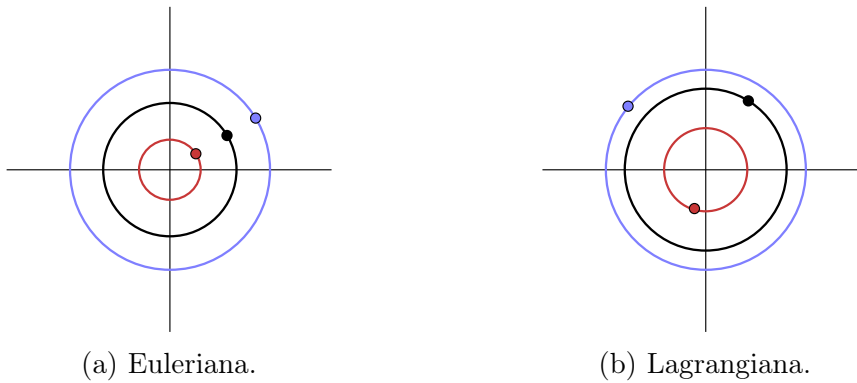


Figura 5: Equilibri relatiu, $\omega^2 = \frac{U(s_0^2)}{2|h|}$.

4.2 Dinàmica de la varietat de col·lisió triple

En aquesta secció estudiarem aquests punts d'equilibri i la seva dinàmica en funció de la configuració central. Anteriorment, hem provat que cada configuració central s_0 dona lloc a dos punts d'equilibri. Els explicitem a continuació.

Proposició 4.4. *El camp vectorial (2.8) té de deu punts d'equilibri a la varietat de col·lisió triple C corresponents a les configuracions centrals. Sigui s_0 una de les cinc*

configuracions centrals, les coordenades dels dos punts d'equilibri PE^\pm associats són:

$$\begin{aligned} r &= 0 \\ s &= s_0 \\ v &= \pm\sqrt{2U(s_0)} \\ z &= vAs_0. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Demostració. Per la Proposició 4.2, donada una configuració central s_0 , els seus punts d'equilibri corresponen a $r = 0, v = \pm\sqrt{2U(s_0)}$. Com que $v = s^T z$ i $As_0s^T = 1$, aleshores $z = As_0s^T z = As_0v$. \square

Anomenem L_i^\pm als punts d'equilibri corresponents a $l_i, i = 1, 2$, i C_j^\pm als punts d'equilibri corresponents a $c_j, j = 1, 2, 3$.

Un cop obtinguts aquests punts d'equilibri, ja tenim les eines necessàries començar a dur a terme una anàlisi de la dinàmica del problema. L'objectiu final a partir d'aquesta secció és la comprensió del Teorema 5.7 i del procediment que ens hi permet arribar. Conceptualment, el Teorema afirma que per a $|\omega| < 0$ petit podem construir solucions periòdiques que passen per totes les configuracions centrals.

Un concepte imprescindible per a aquesta prova és el de transversalitat, en el que aprofundirem a la Secció 4.3. Amb els resultats obtinguts fins al moment, donem una idea inicial de la importància de la transversalitat a través de l'explicació del següent fenomen.

Diem que una òrbita **comença en ejecció total** o que és d'ejecció quan totes les partícules col·lideixen en l'instant inicial; anàlogament, diem que una òrbita **acaba en col·lisió total** o que és de col·lisió quan col·lideix en l'instant final. Tant l'ejecció total com la col·lisió total són instàncies concretes de la col·lisió triple. Aquestes situacions es corresponen als dos punts d'equilibri PE^\pm .

[15] Sigui PE^\pm un dels cinc parells de punts fixos descrits. Aleshores el punt PE_i^+ està relacionat amb òrbites d'ejecció i PE^- amb les òrbites de col·lisió de la següent manera:

- La varietat invariant inestable de PE^+ , $W^u(PE^+)$, és el conjunt d'òrbites d'ejecció que comencen en aquest punt.
- La varietat invariant estable de PE^- , $W^s(PE^-)$, és el conjunt d'òrbites de col·lisió que acaben en aquest punt.

En particular, les òrbites homotètiques són d'ejecció i de col·lisió. Per a cada configuració central, hi ha una única òrbita homotètica que connecta el punt de col·lisió PE^- amb el d'ejecció PE^+ . Aquestes òrbites homotètiques viuen en la intersecció $W^u(PE^+) \cap W^s(PE^-)$. [15, 2] Si aquestes varietats són transversals, llavors

l'òrbita és estructuralment estable, que en aquest cas implica que petites pertorbacions del sistema no afecten el fet que l'òrbita comença en ejecció i acaba en col·lisió.

Aquesta última implicació significa que, si la connexió de \tilde{M} és transversal, llavors existirà una solució homotètica (que col·lideix al centre de masses uniformement) passant a prop d'aquesta connexió en $\tilde{M}(h, \omega)$, $|\omega| < 0$ petit, ja que el moment angular és una petita pertorbació. No obstant això, també voldrem provar l'existència de connexions entre punts de C corresponents a diferents configuracions centrals a fi d'obtenir les òrbites del Teorema. Per a això, necessitem conèixer les varietats invariants dels punts fixos de C .

Comencem analitzant la dinàmica dels punts fixos: els seus valors propis i les seves variants invariants. Trobem els valors propis amb ajuda de la funció U . Com que podem mirar les configuracions centrals s_0 com punts crítics de $U(s_0)$, aquesta funció prendrà una part important en l'anàlisi de les configuracions centrals.

Sigui \tilde{U} la restricció del potencial a $\tilde{\Sigma}$. Aleshores $D^2\tilde{U}(s_0)$ té dos valors propis. Seguidament, veiem la seva relació amb els valors propis dels punts fixos.

Proposició 4.5. *Siguin s_0 una configuració central i PE^\pm els seus dos punts fixos de C associats. Si λ és un valor propi de $D^2\tilde{U}(s_0)$, aleshores*

$$\frac{v \pm \sqrt{v^2 + 16\lambda}}{4}$$

són dos valors propis de la matriu variacional de (2.8) al punt d'equilibri PE^\pm corresponent al signe de $v = \pm\sqrt{2U(s_0)}$.

La demostració d'aquest resultat es troba en la Secció 6.1.

En particular, tots deu punts d'equilibri són hiperbòlics a C , ja que els seus valors propis tenen part real diferent de zero. Les dimensions de les varietats inestables depenen del nombre de valors propis negatius, anomenat índex, de $D^2\tilde{U}(s_0)$. Aquesta relació està explicada en detall en la Secció 6.1.

Proposició 4.6. *Sigui PE un dels dos punts d'equilibri de la varietat de col·lisió C associats a una configuració central $s_0 = (s_{01}, s_{02}, s_{03})$, $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$, $j \neq i, j \neq k$ i μ, α, β i ν_j tals que*

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{(m_1 - m_2)^2 + (m_1 - m_3)^2 + (m_2 - m_3)^2}{2(m_1 + m_2 + m_3)} \\ \alpha_j &= \frac{\|s_0^i - s_0^k\|}{\|s_0^i - s_0^j\|} \\ \beta_j &= \frac{\|s_0^i - s_0^k\|}{\|s_0^j - s_0^k\|} \\ \nu_j &= \frac{m_i(1 + \alpha + \alpha^2) + m_k(1 + \beta + \beta^2)}{m_i + m_j(\alpha^2 + \beta^2) + m_k}. \end{aligned}$$

Aleshores, els **valors propis de la matriu variacional** al punt d'equilibri PE de C i les dimensions de les seves varietats invariants estables $W^s(PE)$ i inestables $W^u(PE)$ són els donats a la Taula 1.

Els valors de la Taula 1 s'han extret de [8], en el qual s'obtenen a través d'un canvi en l'escala de temps dels resultats de [14].

Els valors α i β determinen la separació de les masses en el cas col·lineal i satisfan el sistema d'equacions

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$$

$$\frac{m_i\alpha\beta + m_j\beta}{m_i + m_j\beta^2} = \frac{m_k\alpha\beta + m_j\beta}{m_k + m_j\alpha^2}.$$

Punt fix PE	$\dim(W^s(PE))$ en C	$\dim(W^u(PE))$ en C	Valor propi de la variacional a PE
$L_{1,2}^+$	2	2	$\frac{ v }{4}(1 \pm \sqrt{13 \pm 12\sqrt{\mu}})$
$L_{1,2}^-$	2	2	$-\frac{ v }{4}(1 \pm \sqrt{13 \pm 12\sqrt{\mu}})$
C_j^+	3	1	$\frac{ v }{4}(1 \pm \sqrt{1 \pm \sqrt{25 + 16\nu_j}})$ $\frac{ v }{4}(1 \pm \sqrt{1 \pm \sqrt{1 - 8\nu_j}})$
C_j^-	1	3	$-\frac{ v }{4}(1 \pm \sqrt{1 \pm \sqrt{25 + 16\nu_j}})$ $-\frac{ v }{4}(1 \pm \sqrt{1 \pm \sqrt{1 - 8\nu_j}})$

Taula 1: Dinàmica a prop dels punts d'equilibri en C .

Hi ha dos resultats rellevants sobre aquests valors propis relacionats amb les masses dels cossos:

- Per a les configuracions lagrangianes, si $m_1 = m_2 = m_3$, aleshores $\mu = 0$ i, per tant, els valors propis dels punts L ocurreran amb multiplicitat doble. A més, això implica que $D^2\tilde{U}(l_i)$ tindrà un únic valor propi de multiplicitat doble.
- Per a les configuracions eulerianes, si $\nu_j > \frac{1}{8}$, aleshores dos dels valors propis estables de C_j^+ i dos dels valors propis inestables de C_j^- són complexos. Si dues masses són iguals, la separació dels cossos és definida per $\alpha = \beta = 2$ i el

conjunt de masses tal que $\nu_j > \frac{1}{8}$ és

$$\begin{aligned}\Omega_j &= \{(m_1, m_2, m_3) : \nu_j > \frac{1}{8}, m_i = m_k, i \neq j, j \neq k, k \neq i\} \\ &= \{(m_1, m_2, m_3) : \frac{m_i}{m_j} > \frac{4}{55}, m_i = m_k, i \neq j, j \neq k, k \neq i\}.\end{aligned}\tag{4.4}$$

A la Figura 6, es representa en gris cada part del triangle de masses en què $\nu_j < \frac{1}{8}$ i, per tant, els valors propis són reals. En aquestes zones, un dels cossos concentra la major part de la massa total. A la resta del triangle són complexos.

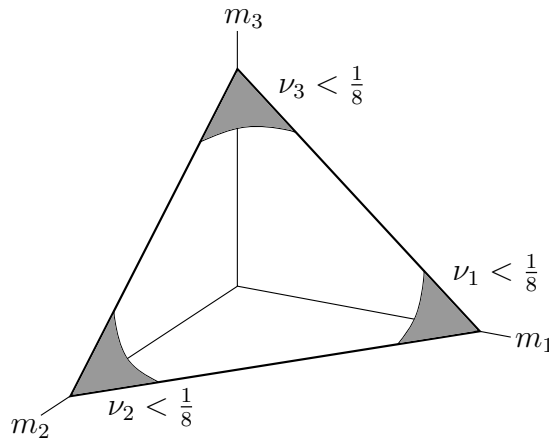


Figura 6: El triangle de masses $m_1 + m_2 + m_3 = 1$.

4.3 Les connexions de la varietat de col·lisió triple

Els valors extrets de la Taula 1 representen el comportament dels punts d'equilibri a C , però no de les òrbites que aquests generen. Per això, quan mirem els punts d'equilibri PE^\pm en M_+ i en M_0 trobem que poden tenir valors propis addicionals [8] Efectivament:

- A M_+ , cada punt fix PE^+ tindrà un valor propi inestable i PE^- un més d'estable.
- A M_0 , cada punt fix PE^+ tindrà un valor propi estable i PE^- un més d'inestable.

Tenint en compte el consegüent increment en les dimensions de les varietats estables i inestables, estudiarem les connexions entre punts d'equilibri. L'obtenció de les dimensions de les varietats invariants dels punts fixos en M i \tilde{M} s'explica en detall en la Secció 6.1, i aquests valors es troben representats a les Taules 2 i 3, respectivament.

Punt d'equilibri PE	$\dim(W^s(PE))$ en M	$\dim(W^u(PE))$ en M
$L_{1,2}^+$	3	3
$L_{1,2}^-$	3	3
C_j^+	4	2
C_j^-	2	4

Taula 2: Dinàmica a prop dels punts d'equilibri en M .

Punt d'equilibri PE	$\dim(W^s(PE))$ en \tilde{M}	$\dim(W^u(PE))$ en \tilde{M}
$L_{1,2}^+$	2	3
$L_{1,2}^-$	3	2
C_j^+	3	2
C_j^-	2	3

Taula 3: Dinàmica a prop dels punts d'equilibri en \tilde{M} .

A continuació, estudiem la **transversalitat** de les òrbites heteroclíniques (connexions) que connecten punts d'equilibri de C de les diferents configuracions centrals. Estudiarem tant connexions entre punts d'equilibri d'una mateixa configuració central com connexions que connectin punts d'equilibri de configuracions centrals diferents.

Volem veure que les connexions de punts fixos en \tilde{M} són transversals perquè aquesta propietat aporta estabilitat estructural, fent que es puguin traslladar els cicles de punts fixos que obtinguem en \tilde{M} a la varietat $\tilde{M}(h, \omega)$ per un moment angular $|\omega| > 0$ prou petit. L'estratègia per a obtenir el Teorema 5.7 serà doncs estudiar quan podem crear cicles de punts fixos formats per connexions transversals passant per totes les configuracions centrals.

La definició habitual de transversal és la següent:

Definició 4.7. *Dues subvarietats N_1, N_2 de M són transversals en M si per a tot $p \in N_1 \cap N_2$ es compleix que les varietats tangents estan en suma directa $T_p N_1 \oplus T_p N_2 = T_p M$ i tenen intersecció buida.*

Tanmateix, quan treballem amb fluxos de camps vectorials cometem un abús del llenguatge, puix que la intersecció no és buida. Per a comprovar la transversalitat de les connexions, caldrà veure el següent:

Remarca 2. *Siguin PE_1, PE_2 dos punts d'equilibri de C corresponents a configuracions centrals. Aleshores la connexió $PE_1 \rightarrow PE_2$ és transversal si les dimensions*

invariants $W^s(PE_1)$ i $W^u(PE_2)$ ho són. En aquest cas, la connexió viu en la intersecció de les varietats invariants.

4.3.1 Connexions en M

En primer lloc, analitzem la transversalitat per a les connexions entre punts fixos d'una mateixa configuració central en l'espai quocient \tilde{M} .

Farem servir dos resultats provats a la Secció 6.1

- A partir de les dimensions de les varietats invariants, obtenim el Corol·lari 6.2: *Donada una configuració central s_0 , una condició necessària perquè les varietats invariants dels seus dos punts fixos de C associats $W^u(PE^+)$ i $W^s(PE^-)$ siguin transversals al llarg d'una òrbita homotètica en \tilde{M} és que s_0 sigui un mínim no degenerat de la funció \tilde{U} .*
- Deduïm que les configuracions lagrangianes són mínims no degenerats de \tilde{U} , mentre que les configuracions eulerianes no ho són.

Analitzem la transversalitat per a les connexions entre punts fixos d'una mateixa configuració lagrangiana en l'espai quocient \tilde{M} :

Sigui l una configuració lagrangiana amb punts fixos L^\pm en C . Podem veure el cicle de punt fixos que connecta L^+ i L^- com la concatenació de dues òrbites heteroclíniques: una a \tilde{M}_+ que va de L^+ a L^- i una a \tilde{M}_0 que torna de L^- a L^+ .

- A \tilde{M}_+ el punt fix L^+ té una varietat inestable $W^u(L^+)$ de tres dimensions i el punt fix L^- té una varietat estable $W^s(L^-)$ de tres dimensions. Pel Corol·lari 6.2, és possible que la connexió $L^+ \rightarrow L^-$ sigui transversal en \tilde{M} .
- A \tilde{M}_0 el punt fix L^+ té una varietat estable $W^s(L^+)$ de dues dimensions i el punt fix L^- té una varietat inestable $W^u(L^-)$ de dues dimensions. Per tant, és dimensionalment possible que la connexió $L^- \rightarrow L^+$ sigui transversal en \tilde{M} .

Nota: podem considerar una configuració $l \in \{l_1, l_2\}$ qualsevol perquè les configuracions lagrangianes no depenen de la tria de masses.

Proposició 4.8. *Sigui l una configuració lagrangiana i L^+, L^- el seu parell de punts d'equilibri en C .*

- *Per a qualsevol tria de masses, la connexió lagrangiana de $L^+ \rightarrow L^-$ de \tilde{M}_+ és transversal en \tilde{M} .*

- Per a masses genèriques, la connexió lagrangiana $L^- \rightarrow L^+$ de \tilde{M}_0 és transversal en \tilde{M}_0 . Les excepcions són totes zeros d'una funció analítica en l'espai de masses.

La transversalitat de la connexió $L^+ \rightarrow L^-$ està provada a [15] i s'explica en la Secció 6.1. D'altra banda, la demostració de la connexió $L^- \rightarrow L^+$ per a masses genèriques és un dels resultats rellevants de [8], i la seva prova es troba en la Secció 6.2.

Recordem que l'estratègia que estem seguint és estudiar el cas $\omega = 0$ per després tractar el cas $|\omega| > 0$ prou petit com una pertorbació del primer. Si tornem a $|\omega| > 0$, observem que les dinàmiques del cicle es mantenen a les òrbites periòdiques de $\tilde{M}(h, \omega)$ properes a \tilde{M} .

Proposició 4.9. [8] *Per a les masses genèriques tal que el cicle a M és transversal, si $|\omega| > 0$ és prou petit, les òrbites lagrangianes periòdiques de $\tilde{M}(h, \omega)$ són hiperbòliques i, per tant, és possible tenir òrbites transversals homoclíniques o d'heteroclíniques a connectant les dues configuracions lagrangianes.*

Seguidament, analitzem la transversalitat per a les connexions entre punts fixos d'una mateixa configuració euleriana en l'espai quocient \tilde{M} .

Sigui c_j una configuració lagrangiana amb punts fixos C_j^\pm en C . Com que c_j no és un mínim no degenerat de \tilde{U} , a causa dels resultats de la Secció 6.1 obtenim que la connexió $C_j^+ \rightarrow C_j^-$ no pot ser transversal en \tilde{M} . Per tant, el cicle de punt fixos format per C_j^\pm tampoc no serà transversal.

4.3.2 Connexions en C i espirals

Tot i això, existeix una connexió $C_j^+ \rightarrow C_j^-$. Això es deu al fet que si comencem amb tres partícules alineades amb moment lineal paral·lel a la línia, romandran sempre alineades. Aquestes trajectòries formen una subvarietat tridimensional de \tilde{M}_+ , que anomenarem **subvarietat col·lineal**, on intersequen $W^u(C_j^+)$ i $W^s(C_j^-)$, justificant així l'existència de la connexió. A més, la connexió $C_j^+ \rightarrow C_j^-$ mirada dins aquesta subvarietat sí que és transversal [2].

Ajudant-nos d'aquesta connexió, construïm òrbites homoclíniques i heteroclíniques entre punts fixos corresponents a diferents configuracions centrals.

Proposició 4.10. *Per a qualsevol tria de masses, a la varietat de col·lisió triple C hi haurà connexions transversals de les formes*

$$\left\{ \begin{array}{l} L_1^+ \rightarrow C_j^+ \\ C_j^- \rightarrow L_1^- \end{array} \right. \quad i \quad \left\{ \begin{array}{l} L_2^+ \rightarrow C_j^+ \\ C_j^- \rightarrow L_2^- \end{array} \right., \quad (4.5)$$

per $j = 1, 2, 3$.

La demostració d'aquest Lema es troba a [9].

D'aquestes connexions deduïm que hi ha parts de $W^u(L_i^+)$ que passen a prop del punt fix C_j^+ i parts de $W^s(L_i^-)$ que passen a prop del punt fix C_j^- .

Per la part que segueix, caldrà introduir el concepte que **una varietat invariant faci espirals al voltant d'una altra** [10]. En farem una introducció superficial per a presentar els resultats relacionats amb les connexions de punts fixos, però n'ometrem totes les proves.

- Per tal que aquest fenomen es doni, la subvarietat sobre la qual es fa l'espiral ha de ser de codimensió dos, és a dir, ha de ser en suma directa amb una subvarietat N_{co} de dues dimensions.
- Donada N_{co} , podem introduir-hi coordenades polars (r_{co}, θ_{co}) , ja que és bidimensional. La varietat que farà les espirals haurà d'envoltar N_{co} i, a mesura que θ_{co} tendeix a infinit, convergeix a una subvarietat de N_{co} : el nucli de l'espiral.
- L'espiral consistirà en famílies de còpies del nucli depenent d'un paràmetre. Per exemple: si el nucli és un punt, amb les còpies d'un punt es parametritzarà una corba que l'envolti; i si el nucli és una corba, amb les còpies de la corba es parametritzarà un pla que l'envoltarà (veure Figura 7).
- Les espirals es formen a prop de punts d'equilibri hiperbòlics amb valors propis complexos.

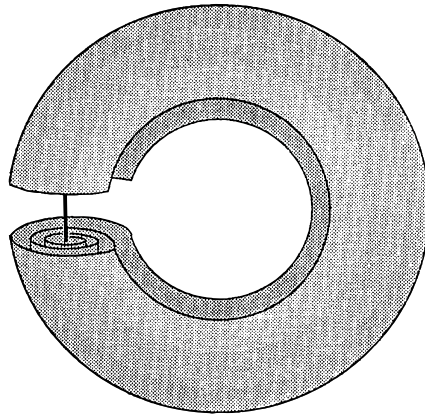


Figura 7: Exemple: espiral amb una circumferència de nucli [8].

Les implicacions d'aquests fets s'han estudiat en la versió del problema dels tres cossos al pla on dues de les masses són iguals; l'anomenat problema isòsceles dels tres cossos. Conceptualment, el resultat és que es fan espirals a prop dels punts C_j^\pm que causen una quantitat infinita d'interseccions transversals. Veurem que podem extrapolar-ho al problema general al pla amb què treballem en aquest escrit.

Com que la dimensió de l'espai del sistema del problema és cinc, una subvarietat de codimensió dos haurà de ser tridimensional. Triarem la subvarietat de col·lisió, que conté la connexió $C_j^+ \rightarrow C_j^-$.

Pel que fa als punts fixos, recordem que per al conjunt de masses Ω_j definit a (4.4) tant dos dels valors propis de C_j^+ com dos dels de C_j^- són complexos. Considerem doncs el sistema amb masses a Ω_j a prop del punt d'equilibri C_j^+ . Aquest punt té quatre valors propis que generaran espais invariants.

- La varietat M_+ contindrà la subvarietat col·lineal, on es troben el punt C_j^+ i l'espai $W^u(C_j^+)$ generat per l'únic valor propi inestable.
- El parell de valors propis complexos serà estable i l'espai que generen serà complementari a la subvarietat col·lineal.
- El valor propi restant també serà estable i, per tant, la varietat estable $W^s(C_j^+)$ serà tridimensional.

A més tenim el següent resultat de [10]: si prenem un disc D bidimensional que sigui transversal a la varietat estable d'un punt d'equilibri, aleshores es troba fent espirals la subvarietat col·lineal, ha començat en un entorn del punt d'equilibri i l'espiral té per nucli la varietat inestable del mateix punt.

Per tant, per a estudiar les connexions de la Proposició 4.10, cal trobar un disc bidimensional complementari a $W^s(C_j^+)$ que es trobi o bé a $W^s(L^+)$ o bé a $W^s(L^-)$. Per a aplicar els resultats de [10] caldrà tenir transversalitat i, encara que no la podem assegurar per a qualssevol masses, podem trobar un conjunt de tries que la presenten.

Proposició 4.11. *Siguin (m_1, m_2, m_3) les masses de les tres partícules. Si dues d'elles estan prou properes i m_j és la tercera massa, aleshores existeixen connexions transversals en la varietat de col·lisió triple C de la forma*

$$\left\{ \begin{array}{l} L_1^+ \rightarrow C_j^+ \\ C_j^- \rightarrow L_1^- \end{array} \right. \quad i \quad \left\{ \begin{array}{l} L_2^+ \rightarrow C_j^+ \\ C_j^- \rightarrow L_2^- \end{array} \right. \quad (4.6)$$

La demostració d'aquest lema es troba a [8].

Teorema 4.12. *Siguin (m_1, m_2, m_3) les masses de les tres partícules tals que dues d'elles estan properes i sigui m_j la tercera massa. Si la matriu variacional als punts C_j^\pm té dos valors propis complexos, llavors a cada entorn de la connexió*

$$C_j^+ \rightarrow C_j^-$$

hi ha connexions transversals de la forma

$$\left\{ \begin{array}{l} L_1^+ \rightarrow L_1^+ \\ L_1^+ \rightarrow L_2^+ \end{array} \right. \quad i \quad \left\{ \begin{array}{l} L_2^+ \rightarrow L_1^+ \\ L_2^+ \rightarrow L_2^+ \end{array} \right.$$

La demostració d'aquesta proposició és conseqüència dels resultats presentats a [8, 10].

La condició afegida en aquest Teorema respecte de la Proposició anterior és que la matriu variacional als punts C_k^\pm tingui dos valors propis complexos. Notem que si les dues masses són exactament iguals, això és equivalent a què les masses pertanyin al conjunt Ω_k definit a (4.4) i la condició es compleix. Per tant, és una condició per afinar la proximitat de les masses.

Corol·lari 4.13. *Per a aquestes mateixes masses, hi ha una quantitat infinita de solucions del problema dels tres cossos que comencen i acaben en col·lisió triple. Les òrbites es troben als entorns de la connexió $C_j^+ \rightarrow C_j^-$ i a mesura que s'apropen a un dels punts fixos la seva configuració tendeix a una de lagrangiana [3].*

5 Construcció d'òrbites periòdiques

Fins ara hem estudiat les connexions de punts fixos en M , quan $\omega \rightarrow 0^+$. Volem extrapolar tots els resultats obtinguts de $M = M(h, 0)$ a $M(h, \omega)$, per a un moment angular $|\omega|$ petit. Cal introduir una teoria per tal d'estudiar aquest cas com una pertorbació del cas $\omega = 0$. Per a això, representarem les connexions com grafs.

5.1 El graf de connexions

Definició 5.1. Donada una tria de masses $m = (m_1, m_2, m_3)$ i una energia $h < 0$, un graf de connexions és un multigraf (és a dir, pot tenir arestes paral·leles) direccional en què els vèrtexs són punts d'equilibri i les arestes són fletxes que representen les connexions transversals entre punts fixos que existeixen en M .

Treballem amb el **graf de connexions lagrangianes** $G(h, m)$, amb quatre vèrtexs L_1^\pm, L_2^\pm . No el podem representar gràficament, ja que no coneixem totes les connexions existeixen. Direm que un graf és un subgraf de $G(h, m)$ si totes les seves connexions són transversals.

Vegem com es representen les connexions entre els punts L_i^\pm donades per la Proposició 4.8 i el Teorema 4.12 en aquesta nova notació.

Teorema 5.2. Siguin $(m_1, m_2, m_3) = m$ les masses de les tres partícules tals que dues d'elles estan properes i sigui m_j la tercera massa. Si la matriu variacional als punts C_j^\pm té dos valors propis complexos, llavors el graf $H(h, m)$ representat a continuació està contingut en $G(h, m)$.

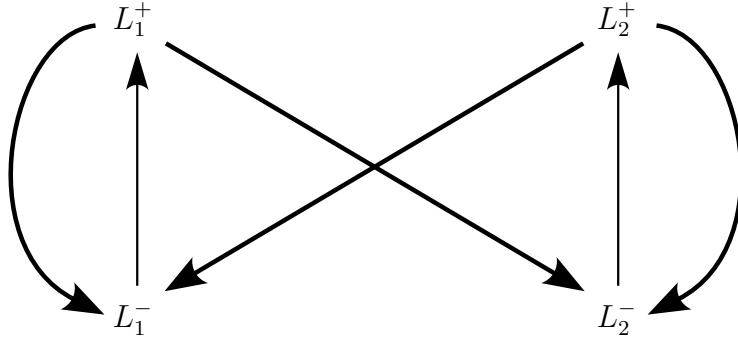


Figura 8: Graf $H(h, m)$

Les línies de major gruix indiquen una quantitat infinita d'arestes, les connexions que representen es troben a cada entorn de la connexió

$$C_j^+ \rightarrow C_j^+.$$

Notem que també són transversals totes les connexions de la Proposició 4.11. Que $H(h, m)$ estigui contingut a $G(m, h)$ significa que totes les connexions representades en $H(h, m)$ ocurreran a M . Podem distingir entre tres tipus de connexió al graf:

- Les connexions $L_i^- \rightarrow L_i^+$, representades per fletxes verticals. Aquestes representen la part en M_+ del cicle de punts fixos que connecta L^- i L^+ .
- Les connexions $L_i^+ \rightarrow L_i^-$, representades per fletxes corbes. Aquestes representen la part en M_0 del cicle de punts fixos que connecta L^- i L^+ .
- Les connexions $L_1^+ \rightarrow L_2^-$ i $L_2^+ \rightarrow L_1^-$, representades per fletxes diagonals. Aquestes són fruit de fer espirals al voltant dels punts d'equilibri C_j^\pm .

Amb ajuda de la notació establerta, presentem l'anàlisi pertorbativa necessària per ampliar l'estudi de les connexions. Relacionarem els cicles de \tilde{M} ($\omega = 0$) amb les òrbites periòdiques de $\tilde{M}(h, \omega)$ per a $|\omega|$ petit.

5.2 Anàlisi pertorbativa

Definició 5.3. *Al voltant de cada connexió transversal de M , representada per una fletxa a $G(m, h)$, definirem una petita zona transversal que anomenarem **finestra**.*

Com que $\tilde{M}(h, \omega)$ és homeomorf a \tilde{M} (veure Proposicions 3.1 i 4.3) i hi convergeix quan $\omega \rightarrow 0$, per a cada connexió transversal de \tilde{M} hi podem construir una zona corresponent que serà transversal al flux per $|\omega|$ prou petit, és a dir, que mantindrà les dinàmiques per a la petita pertorbació que suposa el petit moment angular. Per tant, podem mirar les arestes del graf de connexió com finestres de $\tilde{M}(h, \omega)$.

Definició 5.4. *Diem que una òrbita **realitza un camí** de $G(m, h)$ si passa que per totes les finestres de $\tilde{M}(h, \omega)$ corresponents a les arestes del camí i en el mateix ordre.*

La demostració d'aquest Teorema es troba a [8].

Teorema 5.5. *Sigui Γ un subgraf finit de $G(m, h)$. Aleshores existeix una constant $k(\Gamma) > 0$ tal que per $0 < |\omega| < k(\Gamma)$, el flux de $\tilde{M}(h, \omega)$ realitza tot camí de Γ .*

La demostració d'aquest Teorema es troba a [8].

En particular, aquest teorema implica que per al graf $H(h, m)$ existeix un $|\omega|$ petit tal que $\tilde{M}(h, \omega)$ manté les dinàmiques conegudes de \tilde{M} . A més, si trobem altres connexions transversals a \tilde{M} aleshores l'ampliació del graf $H(h, m)$ també ho complirà.

Proposició 5.6. *Sigui Γ un subgraf finit de $G(m, h)$ i sigui ω tal que $0 < |\omega| < k(\Gamma)$. Aleshores, el conjunt $I(\sigma)$ d'òrbites **realitzant un cicle** σ del subgraf Γ conté almenys una òrbita periòdica.*

Per tant, l'existència de cicles al graf de connexió correspondran a l'existència d'òrbites periòdiques a $\tilde{M}(h, \omega)$.

És possible que $I(\sigma)$ sigui un conjunt d'una sola òrbita periòdica inestable. Per exemple, si denotem amb a_1 l'aresta corresponent a $L_1^- \rightarrow L_1^+$ i amb b_1 l'aresta corresponent a $L_1^+ \rightarrow L_1^-$, llavors el camí $\sigma_{l_1} = \dots a_1 b_1 a_1 b_1 \dots$ és un cicle i sabem que $I(\sigma_{l_1})$ conté almenys l'òrbita periòdica lagrangiana. A més, aquesta òrbita és hiperbòlica per la Proposició 4.9, de manera que podem triar finestres corresponents a les arestes a_1 i b_1 prou petites tals que cap altra òrbita realitza el camí. Tenim un resultat anàleg per a l'òrbita associada al cicle de punt fix dels punts a L_2^\pm .

5.3 Construcció d'òrbites periòdiques

Considerem les òrbites del sistema amb masses (m_1, m_2, m_3) que passen per finestres creades a partir de les connexions $L_i^- \rightarrow L_i^+, i = 1, 2$ de M_0 i compleixen el Teorema 5.2 per a C_j .

- Llavors són a prop de la col·lisió triple, ja que a M_0 es té que $r = 0$. Les partícules, properes a una connexió lagrangiana, s'aproparan formant un triangle petit gairebé equilàter i faran un gir de gairebé 360 graus [8].
- Seguidament, l'òrbita pot seguir diferents recorreguts d'entre les connexions del Teorema 5.2: o bé una finestra creada a partir de les connexions transversals $L_i^+ \rightarrow C_j^+$ o bé les finestres creades a partir de les connexions transversals entre punts fixos lagrangians $L_i^+ \rightarrow L_{1,2}^-$.

En resum, les partícules eren a prop d'una configuració lagrangiana i després de l'aproximació a la col·lisió poden aparèixer tant a prop d'una configuració lagrangiana com d'una d'euleriana.

En particular, en cas que la condició per a C_j^\pm es compleixi per a totes les masses (com ara si totes són gairebé iguals, veure Figura 6) aleshores tenim connexions per a les cinc configuracions i podem tenir òrbites periòdiques que segueixin les òrbites periòdiques lagrangianes o eulerianes excepte a prop de la col·lisió. Cal notar que aquestes òrbites no tenen per què ser periòdiques. Del Teorema 5.2, el Teorema 5.5 i la Proposició 5.6 obtenim el teorema següent.

Teorema 5.7. *Sigui $m = (m_1, m_2, m_3)$ tal que totes les masses són prou properes i σ una successió qualsevol d'entorns d'òrbites periòdiques lagrangianes i eulerianes.*

Llavors, per $|\omega|$ prou petit existeixen òrbites que passen pels entorns de σ en qualsevol ordre seguint la regla següent: si una òrbita passa per un entorn d'una òrbita lagrangiana, ha de passar per un entorn d'una òrbita euleriana abans de tornar a passar per un entorn d'una òrbita lagrangiana.

A més, si la successió d'entorns és periòdica, hi ha una òrbita periòdica realitzant-la.

Siguin ara σ_{l_1} i σ_{l_2} els dos cicles de punts fixos lagrangians del subgraf $H(\omega, h)$ descrits anterior. Llavors, podem construir tant òrbites heteroclíniques entre les òrbites de $I(\sigma_{l_1})$ realitzant σ_{l_1} i les òrbites de $I(\sigma_{l_2})$ realitzant σ_{l_2} com òrbites homoclíniques a aquestes òrbites lagrangianes.

- Les possibles òrbites heteroclíniques corresponen als següents camins de $H(\omega, h)$, que connecten els dos cicles:

$$\begin{aligned} L_1^+ &\rightarrow L_2^- \\ L_2^+ &\rightarrow L_1^-. \end{aligned}$$

- Les possibles òrbites homoclíniques per a $I(\sigma_{l_1})$ i $I(\sigma_{l_2})$ corresponen, respectivament, als camins de $H(\omega, h)$

$$\begin{aligned} L_1^+ &\rightarrow L_2^- \rightarrow L_2^+ \rightarrow L_1^- \\ L_2^+ &\rightarrow L_1^- \rightarrow L_1^+ \rightarrow L_2^-. \end{aligned}$$

Triant diferents cicles σ_1, σ_2 de punts fixos en $H(\omega, h)$ podrem trobar conjunts $I(\sigma_i)$ d'òrbites homoclíniques o heteroclíniques a les òrbites periòdiques trobades seguint el Teorema 5.7.

Exemple 5.8. A la Figura 9, s'ha construït una òrbita que passa per dues configuracions lagrangianes diferents i dues configuracions eulerianes diferents.

Podem observar com entre les configuracions, les partícules s'apropen a la col·lisió i formen un triangle gairebé equilàter. Aleshores, s'expandeixen homotèticament a la següent configuració.

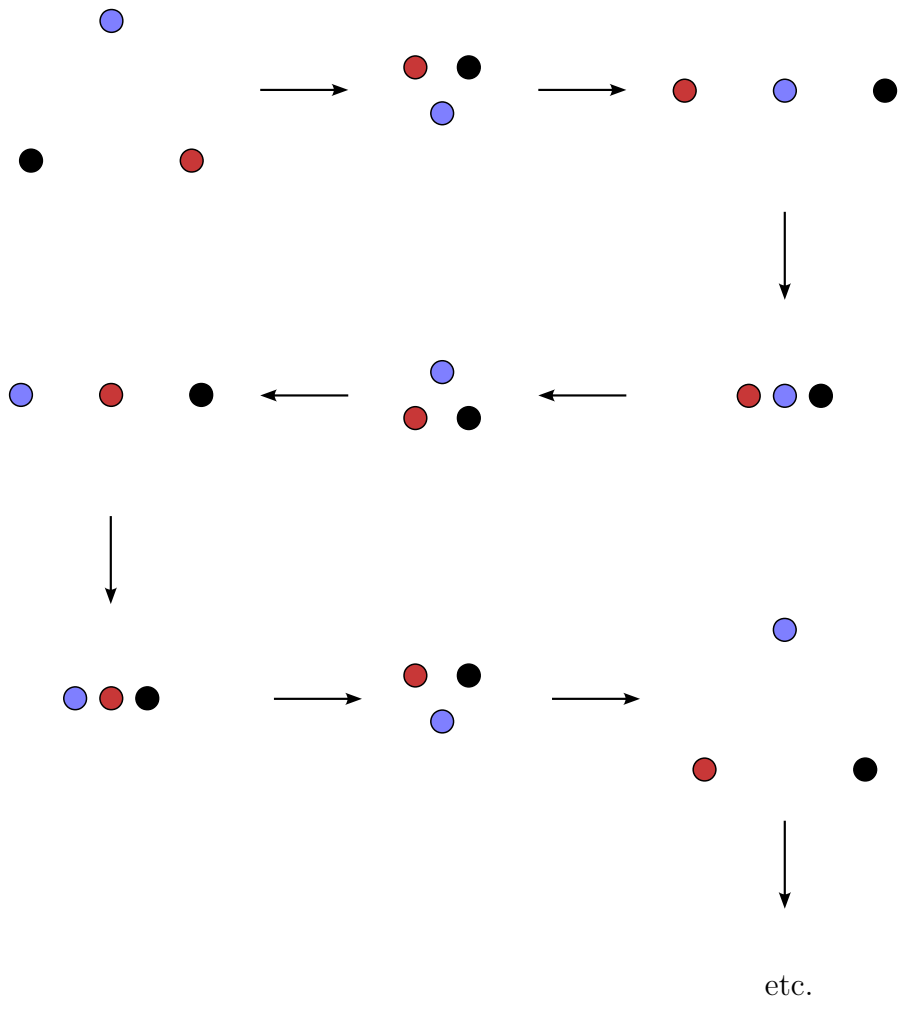


Figura 9: Òrbites seguint el Teorema 5.7.

6 Transversalitat

En aquesta secció ens centrem en el desenvolupament d'eines per a la demostració de l'existència de les connexions transversals de la Secció 4.3. En particular, provarem la transversalitat de les connexions de la Proposició 4.8. Per tal de facilitar la comprensió del plantejament, s'han mogut les demostracions d'alguns lemes a la Secció 6.3.

El primer pas per a estudiar la transversalitat de les connexions és conèixer la dimensió de les varietats invariants es troben els punts fixos connectats.

6.1 La dimensió de les varietats invariants

L'objectiu d'aquesta secció és trobar les dimensions de les varietats invariants en M i en \tilde{M} dels deu punts d'equilibri de la varietat de col·lisió triple C . En tota la secció, continuarem treballant amb una energia negativa $h < 0$ fixada.

Treballem amb un *blow-up* diferent de l'emprat a la resta de l'estudi, obtingut de [2] i [15], que facilita provar els resultats presentats. Les noves variables són

$$\begin{aligned}
 r &= (q \cdot Mq)^{\frac{1}{2}} && \text{(igual)} \\
 v &= r^{-\frac{1}{2}}p \cdot q && \text{(igual)} \\
 s &= r^{-1}q && \text{(igual)} \\
 u &= r^{\frac{1}{2}}A^{-1}p - vs && (= A^{-1}z - vs) \\
 dt &= r^{\frac{3}{2}}d\tau && \text{(igual)}.
 \end{aligned}$$

El camp a estudiar ara és definit per les equacions:

$$\begin{aligned}
 r' &= rv \\
 v' &= \frac{1}{2}v^2 + u \cdot Au - U(s), \\
 s' &= u \\
 u' &= -\frac{1}{2}vu - (u \cdot Au)s + \nabla U(s)
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

Les integrals primeres i $M(h, \omega)$ es defineixen anàlogament.

Donada una configuració central s_0 , els dos punts fixos PE^\pm del camp vectorial en la varietat de col·lisió triple $C \subset M$ tenen coordenades

$$\begin{aligned}
 r &= 0 \\
 v^\pm &= \pm \sqrt{2U(s_0)} \\
 s &= s_0 \\
 u &= 0
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

Triar el signe + a v ens donarà el punt fix PE^+ , mentre que $-$ ens donarà PE^- .

La matriu diferencial del camp vectorial (r', s', u') de \tilde{M} avaluada al punt fix PE^\pm és:

$$\tilde{H}(PE^\pm) := \begin{pmatrix} v^\pm & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & I \\ 0 & D^2\tilde{U}(s_0) & -\frac{1}{2}v^\pm I \end{pmatrix}.$$

Aquesta matriu té $\dim(\tilde{M}) = 5$ valors propis. Per calcular-los, la interpretem com una matriu diagonal de dos blocs

$$(v^\pm) \quad i \quad \begin{pmatrix} 0 & I \\ D^2\tilde{U}(s_0) & -\frac{1}{2}v^\pm I \end{pmatrix}.$$

Els valors propis de $\tilde{H}(PE^\pm)$ són els valors propis de cadascun dels blocs. El primer bloc té un únic valor propi, v^\pm , mentre que el segon bloc té 4 valors propis relacionats amb els dos valors propis de $D^2\tilde{U}(s_0)$.

Proposició 6.1. *Sigui λ un valor propi de la matriu $D^2\tilde{U}(s_0)$. Aleshores*

$$\gamma_\pm = \frac{v^\pm \pm \sqrt{(v^\pm)^2 + 16\lambda}}{4}$$

són dos valors propis de $H(PE^\pm)$.

Demostració. Per veure que γ_\pm són valors propis de la matriu $H(PE^\pm)$, podem interpretar-la com una matriu diagonal de dos blocs. Llavors, els seus valors propis seran els valors propis de cadascun dels blocs. N'hi haurà prou llavors amb comprovar que γ_\pm són valors propis de la matriu

$$B := \begin{pmatrix} 0 & I \\ D^2\tilde{U}(s_0) & -\frac{1}{2}v^\pm I \end{pmatrix}.$$

Sigui y el vector propi de $D^2\tilde{U}(s_0)$ associat a λ , és a dir, $D^2\tilde{U}(s_0)y = \lambda y$. Llavors

$$\begin{pmatrix} 0 & I \\ D^2\tilde{U}(s_0) & -\frac{1}{2}v^\pm I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \gamma y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma y \\ (\lambda - \frac{1}{2}v^\pm \gamma)y \end{pmatrix}$$

i λ és valor propi de B si i només si

$$\begin{pmatrix} \gamma y \\ (\lambda - \frac{1}{2}v^\pm \gamma)y \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} y \\ \gamma y \end{pmatrix}.$$

Resolent $\lambda - \frac{1}{2}v^\pm \gamma = \gamma^2$ obtenim les solucions $\gamma_\pm = \frac{v^\pm \pm \sqrt{(v^\pm)^2 + 16\lambda}}{4}$.

□

Definim l'índex i de s_0 com el nombre de valors propis amb part real negativa de $D^2\tilde{U}(s_0)$. Amb aquests resultats, podem calcular el nombre de valors propis de $H(PE^\pm)$ amb part real positiva i negativa:

- La matriu $H(PE^+)$ té $3 - i$ valors propis amb part real positiva i $2 + i$ valors propis amb part real negativa.
- La matriu $H(PE^-)$ té $2 + i$ valors propis amb part real positiva i $3 - i$ valors propis amb part real negativa.

Aquestes dades coincideixen amb les dimensions de les varietats invariants de PE^\pm a \tilde{M} .

- La dimensió en \tilde{M} de les varietats invariants $W^u(PE^+)$ i $W^s(PE^-)$ és $3 - i$.
- La dimensió en \tilde{M} de les varietats invariants $W^s(PE^+)$ i $W^u(PE^-)$ és $2 + i$.

Si, en comptes de mirar-ho en \tilde{M} , ho estudiem en M , llavors $D^2U(s_0)$ guanya un valor propi nul respecte a $\tilde{D}^2U(s_0)$ i, per tant, la matriu diferencial té un valor propi més del mateix signe que v^\pm .

- La matriu $H(PE^+)$ té $3 - i$ valors propis amb part real positiva i $3 + i$ valors propis amb part real negativa.
- La matriu $H(PE^-)$ té $3 + i$ valors propis amb part real positiva i $3 - i$ valors propis amb part real negativa.

Amb aquests valors obtenim les dimensions de les varietats invariants de PE^\pm en M , recollides a la Taula 4.

- La dimensió en M de les varietats invariants $W^u(PE^+)$ i $W^s(PE^-)$ és $3 - i$.
- La dimensió en M de les varietats invariants $W^s(PE^+)$ i $W^u(PE^-)$ és $3 + i$.
- A més, hi ha una varietat central W^c de dimensió 1 constant al llarg de les òrbites.

Aquesta última varietat central correspon a la intersecció de les varietats estable i inestable. D'aquí relacionem la següent condició necessària per a la transversalitat de les varietats $W^u(PE^+)$ i $W^s(PE^-)$ amb l'índex i :

$$\begin{aligned} \dim(W^u(PE^+)) + \dim(W^s(PE^-)) + \dim(W^c) &\geq 1 + \dim(M) \\ (3 - i) + (3 - i) + 1 &\geq 1 + 5 \\ 7 - 2i &\geq 6 \\ i &\leq 0. \end{aligned}$$

Punt d'equilibri PE	$\dim(W^s(PE))$ en M	$\dim(W^u(PE))$ en M
PE^+	$3 - i$	$3 + i$
PE^-	$3 + i$	$3 - i$

Taula 4: Dinàmica a prop dels punts d'equilibri en M .

Hem obtingut que l'índex ha de complir $i = 0$, això és, la matriu $D^2\tilde{U}(s_0)$ no té cap valor propi amb part real negativa. Llavors s_0 és un mínim no degenerat de la funció \tilde{U} .

Corol·lari 6.2. *Donada una configuració central s_0 , una condició necessària perquè les varietats invariants dels seus dos punts fixos de C associats $W^u(PE^+)$ i $W^s(PE^-)$ siguin transversals al llarg d'una òrbita homotètica en \tilde{M} és que s_0 sigui un mínim no degenerat de la funció \tilde{U} .*

Teorema 6.3. *[15] La condició per a la transversalitat donada al Corol·lari 6.2 és suficient i necessària.*

Tot seguit, veiem la relació dels resultats presentats amb l'anàlisi realitzada a la Secció 4. Comparant la Taula 4 amb la Taula 2 obtinguda a l'apartat 4.3, trobem que les configuracions lagrangianes són mínims no degenerats de \tilde{U} , mentre que les configuracions eulerianes no ho són. D'aquests resultats, deduïm la prova de la primera part de la Proposició 4.8.

Corol·lari 6.4. *Si l és una configuració lagrangiana i L^+, L^- el seu parell de punts d'equilibri en C . Per a qualsevol tria de masses, la connexió lagrangiana de $L^+ \rightarrow L^-$ de \tilde{M}_+ és transversal en \tilde{M} .*

Demostració. Com que l és un mínim no degenerat de \tilde{U} , aleshores les varietats invariants $W^u(L^+)$ i $W^s(L^-)$ siguin transversals al llarg d'una òrbita homotètica. En particular, la connexió $L^+ \rightarrow L^-$ representa l'òrbita homotètica a M_+ . Per tant, la connexió és transversal en \tilde{M} . \square

6.2 Transversalitat de la connexió $L_i^- \rightarrow L_i^+$

Proposició. *Si l és una configuració lagrangiana i L^+, L^- el seu parell de punts d'equilibri en C . Per a masses genèriques, les connexions $L_i^- \rightarrow L_i^+, i = 1, 2$ en M_0 són transversals. Això és, la connexió és transversal excepte per a masses pertanyent al conjunt de zeros d'una funció analítica.*

Demostrem la transversalitat a través de les equacions variacionals de (2.8) al llarg d'aquestes òrbites. Obtenim la matriu calculant les derivades parcials de (2.8).

Són

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} \delta r \\ \delta s \\ \delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v & rz^T & rs^T \\ 0 & -vI - sz^T & A^{-1} - ss^T \\ 0 & D^2U(s) + \frac{1}{2}zz^T & \frac{1}{2}vI + \frac{1}{2}zs^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta r \\ \delta s \\ \delta z \end{pmatrix},$$

on $D^2U(s)$ és la matriu Hessiana de $U(s)$ i I és la matriu identitat 6×6 .

L'espai $TM(h, \omega)$ tangent a $M(h, \omega)$ consisteix en el conjunt de vectors $(\delta r, \delta s, \delta z)$ tangents a (r, s, z) . Les equacions que caracteritzen $M(h, \omega)$ tenen equacions anàlogues en $TM(h, \omega)$:

$$\begin{aligned} m_1 \delta s_1 + m_1 \delta s_1 + m_1 \delta s_1 &= 0 \\ \delta z_1 + \delta z_2 + \delta z_3 &= 0 \\ s^T A \delta s &= 0 \\ \frac{1}{2} z^T A^{-1} \delta z - (\nabla U(s))^T \delta s &= h \delta r \\ z^T J \delta s - s^T J \delta z &= 0. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Hem obtingut l'expressió de $z(t)$ a partir de $z = As' + vAs$ i $s'(t) = \alpha Js$.

A continuació, definim una subvarietat invariant sota les equacions variacionals al cicle lagrangiana.

Com que volem provar la transversalitat de connexions lagrangianes entre punts fixos d'una mateixa configuració, treballem amb una configuració lagrangiana arbitrària l . Al llarg del cicle de punt fixos al qual pertanyen aquestes connexions la solució $s(t)$ és homotètica, és a dir presenta col·lisió triple mantenint la forma. Per tant,

$$\begin{aligned} s(t) &= R(\theta(t))l \\ z(t) &= vAs(t) + \alpha AJs(t). \end{aligned} \tag{6.4}$$

A més, les connexions $L_i^+ \rightarrow L_i^-, i = 1, 2$ en M_0 es troben a TM_0 i, per tant,

$$\delta r = 0. \tag{6.5}$$

Construïrem una varietat amb els vectors δs tangents en la direcció complementària a la simetria rotacional que és invariant sota les equacions variacionals. Aquests vectors compleixen

$$s^T J A \delta s = 0. \tag{6.6}$$

Els conjunts on es troben $\delta s, \delta z$ són, respectivament, $P_l = \{\delta s : s^T J \delta s = 0\}$ i $AP_l = \{\delta z : \delta z = A \delta s, \delta s \in P_s\}$. Notem que, interpretats com subespais de \mathbb{R}^6 , $P_{R(\theta(t))s_0} = P_{s_0}$.

Lema 6.5. *La varietat $P_l \times AP_l = P_{s(t)} \times AP_{s(t)} \subset \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^6$ és invariant sota les equacions variacionals al llarg del cicle lagrangià de punts fixos.*

Demostració. En primer lloc, simplifiquem a la matriu variacional els termes que són zero en fer el producte sota les noves condicions. En general,

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} \delta r \\ \delta s \\ \delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v\delta r + rs^T\delta z \\ -v\delta s - rz^T\delta z - (sz^T + ss^T)\delta s \\ \frac{1}{2}zz^T\delta s + \frac{1}{2}v\delta z + \frac{1}{2}zs^T\delta s + D^2U(s)\delta s \end{pmatrix}.$$

Siuguin $(\delta s, \delta z) \in P_{s(t)} \times AP_{s(t)}$. Llavors $s^T JA\delta s = 0$ i $\delta z = A\delta\hat{s}$ per a un $\delta\hat{s} \in P_{s(t)}$. Vegem que $s^T\delta z = z^T\delta s = 0$

- $s^T\delta z = s^T A\delta\hat{s}$ i, per (6.3), $s^T A\delta\hat{s} = 0$.
- Per (6.4), $z^T\delta s = (vAs + \alpha AJs)^T\delta s = vs^T A\delta s + \alpha s^T JA\delta s$ i, per (6.3),(6.6), $vs^T A\delta s + \alpha s^T JA\delta s = 0 + 0$

Afegint-hi $\delta r = 0$, les equacions variacionals esdevenen

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} 0 \\ \delta s \\ \delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v & 0 & 0 \\ 0 & -vI & A^{-1} \\ 0 & D^2U(s) & \frac{1}{2}vI \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \delta s \\ \delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -vI\delta s + A^{-1}\delta z \\ D^2U(s)\delta s + \frac{1}{2}vI\delta z \end{pmatrix}. \quad (6.7)$$

Per provar que $P_{s(t)} \times AP_{s(t)}$ és invariant respecte d'aquesta hem de veure que

$$\begin{pmatrix} -v\delta s + A^{-1}\delta z \\ D^2U(s)\delta s + \frac{1}{2}v\delta z \end{pmatrix} \in P_{s(t)} \times AP_{s(t)}.$$

Clarament, $-v\delta s \in$ i $\frac{1}{2}v\delta z \in AP_{s(t)}$. A més, com que $s^T JA(A^{-1}\delta z) = s^T J\delta z = 0$, llavors $A^{-1}\delta z \in P_{s(t)}$. Per tant, $-v\delta s + A^{-1}\delta z \in P_{s(t)}$.

Falta veure que $D^2U(s)\delta s \in AP_{s(t)}$.

$$\begin{aligned} U(s) &= \frac{m_1 m_2}{\|s_1 - s_2\|} + \frac{m_1 m_3}{\|s_1 - s_3\|} + \frac{m_2 m_3}{\|s_2 - s_3\|} \\ D^2U(s) &= \begin{pmatrix} \frac{m_1 m_2}{\|s_1 - s_2\|^3} + \frac{m_1 m_3}{\|s_1 - s_3\|^3} & -\frac{m_1 m_2}{\|s_1 - s_2\|^3} & -\frac{m_1 m_3}{\|s_1 - s_3\|^3} \\ -\frac{m_1 m_2}{\|s_1 - s_2\|^3} & \frac{m_1 m_2}{\|s_1 - s_2\|^3} + \frac{m_2 m_3}{\|s_2 - s_3\|^3} & -\frac{m_2 m_3}{\|s_2 - s_3\|^3} \\ -\frac{m_1 m_3}{\|s_1 - s_3\|^3} & -\frac{m_2 m_3}{\|s_2 - s_3\|^3} & \frac{m_1 m_3}{\|s_1 - s_3\|^3} + \frac{m_2 m_3}{\|s_2 - s_3\|^3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{m_2}{\|s_1 - s_2\|^3} + \frac{m_3}{\|s_1 - s_3\|^3} & -\frac{m_2}{\|s_1 - s_2\|^3} & -\frac{m_3}{\|s_1 - s_3\|^3} \\ -\frac{m_1}{\|s_1 - s_2\|^3} & \frac{m_1}{\|s_1 - s_2\|^3} + \frac{m_3}{\|s_2 - s_3\|^3} & -\frac{m_3}{\|s_2 - s_3\|^3} \\ -\frac{m_1}{\|s_1 - s_3\|^3} & -\frac{m_2}{\|s_2 - s_3\|^3} & \frac{m_1}{\|s_1 - s_3\|^3} + \frac{m_2}{\|s_2 - s_3\|^3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Anomenem B a la matriu que multiplica A . Llavors $D^2U(s)\delta s = BA\delta s \in AP_{s(t)}$ i, per tant, $P_{s(t)} \times AP_{s(t)}$ és invariant sota les equacions variacionals al llarg del cicle lagrangià de punts fixos. \square

De la proposició concloem que al llarg del cicle de punts fixos el pla $P_l \times AP_l$ és una subvarietat invariant transversal a la direcció del camp vectorial definit per (2.8). A més, l'estudi de les equacions variacionals queda reduït al sistema (6.7).

S'ha provat que, per a qualsevol tria de masses, les equacions variacionals es poden dividir en dos subespais invariants en M_+ (veure [15]). Veurem que aquest fenomen també ocorre a M_0 quan totes les masses són iguals. Farem servir la següent igualtat de [8]:

$$D^2U(l) = AD^2\tilde{U}(l) - U(l)A. \quad (6.8)$$

Hem vist anteriorment que si les tres masses són iguals llavors $D^2\tilde{U}(l)$ té un únic valor propi λ de multiplicitat doble amb dos vectors propis u_1, u_2 associats. Aleshores

$$D^2\tilde{U}(l)u_i = \lambda u_i.$$

De (6.8) obtenim

$$D^2U(l)u_i = AD^2\tilde{U}(l)u_i - AU(l)u_i = A\lambda u_i - AU(l)u_i = (\lambda - U(l))Au_i = \hat{\lambda}Au_i,$$

on $\hat{\lambda} := \lambda - U(l)$. D'aquests valors obtenim bases de P_l i AP_l donades, respectivament, per $\{u_1, u_2\}$ i $\{w_1, w_2\}$, on $w_i = Au_i$.

Lema 6.6. *En les noves coordenades a_1, a_2 respecte de $\{u_1, u_2\}$ i b_1, b_2 respecte de $\{w_1, w_2\}$, les equacions variacionals (6.7) esdevenen*

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v & 1 & 0 & 0 \\ \hat{\lambda} & \frac{1}{2}v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -v & 1 \\ 0 & 0 & \hat{\lambda} & \frac{1}{2}v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -va_1 + b_1 \\ \hat{\lambda}a_1 + \frac{1}{2}vb_1 \\ -va_2 + b_2 \\ \hat{\lambda}a_2 + \frac{1}{2}vb_2 \end{pmatrix}. \quad (6.9)$$

La demostració d'aquest lema es troba en la Secció 6.3.

Hem trobat doncs que les equacions variacionals es divideixen en dos subespais invariants en M_0 quan les masses són iguals, donats per (a_1, b_1) i (a_2, b_2) . Aleshores, només cal estudiar un dels subespais, que anomenarem (a, b) . Per tal de descriure'l precisament, primer trobarem el valor de $\hat{\lambda}$.

Quan totes les masses són iguals, podem trobar el valor propi doble de $D^2\nabla U(l)$ a través dels valors propis donats a la Taula 1 de la matriu variacional avaluada als punts fixos L_i^\pm .

Lema 6.7. *Quan totes les masses són iguals, el valor propi de $\tilde{D}^2U(l)$ és*

$$\lambda = \frac{3}{2}U(l).$$

La demostració d'aquest lema es troba en la Secció 6.3.

Com a conseqüència, obtenim que $\hat{\lambda} = \frac{1}{4}U(l)$. Per tant, el subsistema que estudiarem és

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v & 1 \\ \frac{1}{2}U(l) & \frac{1}{2}v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \quad (6.10)$$

A més, de (3.1) obtenim que $v' = \frac{1}{2}v^2 - U(l)$ al llarg de la branca del cicle en \tilde{M}_0 .

Volem estudiar l'angle format per les varietats invariants per a saber si aquesta és transversal. En comptes de trobar explícitament aquest angle, estudiarem un con, és a dir, això és, un conjunt d'angles. Construïrem cons a les interseccions i, si aquests són disjunts, aleshores obtindrem la transversalitat de les varietats invariants. Comprovem doncs una condició més grollera, però més senzilla de calcular que si és certa ens garanteix la transversalitat.

Lema 6.8. *La família de cons $a(b - \frac{1}{2}va) \geq 0$ és positivament invariant sota les equacions (6.10).*

La demostració d'aquest lema es troba en la Secció 6.3.

Aquest resultat final és el que ens permet provar la transversalitat de les connexions $L_i^+ \rightarrow L_i^-, i = 1, 2$ si les masses són iguals.

- Com que (6.9) és la matriu diagonal per blocs que representa les varietats tangents a la connexió, les subvarietats tangents a $W^u(L_i^-)$ i a $W^s(L_i^+)$ són sumes directes de les seves interseccions amb els plans $\{(a_1, b_1)\}$ i $\{(a_2, b_2)\}$. Conceptualment, la varietat tangent a W és $TW = TW \cap \{(a_1, b_1)\} \oplus TW \cap \{(a_2, b_2)\}$. Les varietats TW són transversals si i només si les dues interseccions que les formen ho són.
- Sigui $u \in T_{L_i^-}W^u(L_i^-) \cap \{(a_1, b_1)\}$. Llavors ha de pertànyer a la família de cons del Lema 6.8. Com és positivament invariant, aleshores qualsevol vector de $T_{(s(t), z(t))}W^u(L_i^-) \cap \{(a_1, b_1)\}$ hi pertanyerà.
- Tanmateix, els vectors en $T_{(s(t), z(t))}W^s(L_i^+) \cap \{(a_1, b_1)\}$ no hi pertanyeran. Vegem-ho: la simetria

$$(v, \delta s, \delta z, t) \rightarrow (-v, \delta s, -\delta z, -t)$$

de les equacions variacionals (6.7) porta $T_{L_i^-}W^u(L_i^-)$ a $T_{L_i^+}W^s(L_i^+)$. Al pla $\{(a_1, b_1)\}$ això es tradueix en

$$(v, a_1, b_1) \rightarrow (-v, a_1, -b_1),$$

cosa que canvia la desigualtat del Lema 6.8, causant que cap vector de $T_{L_i^+}W^s(L_i^+)$ hi pertanyi. I com que és positivament invariant, podem extrapolar el resultat a $T_{(s(t), z(t))}W^s(L_i^+)$.

- Tenim resultats anàlegs per al pla $\{(a_2, b_2)\}$. Per tant, hem provat que

$$\begin{aligned} T_{(s(t), z(t))} W^u(L_i^-) \cap T_{(s(t), z(t))} W^s(L_i^+) \cap \{(a_1, b_1)\} &= 0 \\ T_{(s(t), z(t))} W^u(L_i^-) \cap T_{(s(t), z(t))} W^s(L_i^+) \cap \{(a_2, b_1)\} &= 0 \end{aligned}$$

Per tant, hem provat la transversalitat del cas de masses iguals. A més, com que les varietats $W^u(L_i^-)$ i $W^s(L_i^+)$ depenen analíticament de les masses, el conjunt de les masses tal que la connexió $L_i^- \rightarrow L_i^+$ no és transversal és el conjunt zero d'alguna funció analítica de les masses.

6.3 Demostració dels lemes emprats

Demostració del Lema 6.6. Les equacions variacionals corresponents a $P_e \times AP_e$ són

$$\begin{aligned} \delta s &= -v\delta s + A^{-1}\delta z \\ \delta z &= D^2U(s)\delta s + \frac{1}{2}v\delta z. \end{aligned}$$

Expressem $\delta s, \delta z$ en les noves bases amb les coordenades a_1, a_2, b_1, b_2 :

$$\begin{aligned} \delta s &= a_1u_1 + a_2u_2 \\ \delta z &= b_1w_1 + b_2w_2. \end{aligned}$$

Finalment, expressem les equacions variacionals en aquestes coordenades.

- A la primera equació obtenim

$$\begin{aligned} a_1u_1 + a_2u_2 &= -v(a_1u_1 + a_2u_2) + A^{-1}(b_1w_1 + b_2w_2) \\ &= -va_1u_1 - va_2u_2 + A^{-1}b_1Au_1 + A^{-1}b_2Au_2 \\ &= (-va_1 + b_1)u_1 + (-va_2 + b_2)u_2. \end{aligned}$$

- A la segona equació obtenim

$$\begin{aligned} b_1w_1 + b_2w_2 &= D^2U(s)(a_1u_1 + a_2u_2) + \frac{1}{2}v(b_1w_1 + b_2w_2) \\ &= D^2U(s)a_1u_1 + D^2U(s)a_2u_2 + \frac{1}{2}vb_1w_1 + \frac{1}{2}vb_2w_2 \\ &= \hat{\lambda}Aa_1u_1 + \hat{\lambda}Aa_2u_2 + \frac{1}{2}vb_1w_1 + \frac{1}{2}vb_2w_2 \\ &= (\hat{\lambda}a_1 + \frac{1}{2}vb_1)w_1 + (\hat{\lambda}a_2 + \frac{1}{2}vb_2)w_2. \end{aligned}$$

Igualant els coeficients que acompanyen els vectors a ambdues bandes de les expressions obtenim les equacions de la proposició. \square

Demostració del Lema 6.7. El valor propi de la variacional a un punt fix lagrangià L és

$$\frac{v \pm \sqrt{v^2 + 16\lambda}}{4},$$

on $v = \pm\sqrt{2U(l)}$. D'altra banda, quan totes les masses són iguals, $\mu = 0$ i de la Taula 1 obtenim que el valor propi de la variacional a un punt fix lagrangià L és

$$\frac{v \pm v\sqrt{13}}{4}.$$

Igualant les expressions, arribem al resultat.

$$\begin{aligned} \frac{v \pm \sqrt{v^2 + 16\lambda}}{4} = \frac{v \pm v\sqrt{13}}{4} &\iff \sqrt{v^2 + 16\lambda} = v\sqrt{13} \iff v^2 + 16\lambda = v^2 13 \\ &\iff \lambda = \frac{3}{4}v^2 = \frac{3}{2}U(l). \end{aligned}$$

□

Demostració del Lema 6.8. Sigui $f = a(b - \frac{1}{2}va)$. Per demostrar que la família de conjunts $f \geq 0$ és positivament invariant sota les equacions (6.10), hem de mostrar que si prenem un punt inicial dins d'aquesta família, llavors la seva trajectòria, generada per les equacions (6.10), roman dins d'aquesta família per a tot temps posterior. Analtzarem doncs l'evolució de a, b donada per:

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v & 1 \\ \frac{1}{2}U(l) & \frac{1}{2}v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -va + b \\ \frac{1}{2}U(l)a + \frac{1}{2}vb \end{pmatrix}. \quad (6.11)$$

Estudiarem el creixement de la funció als dos punts de la frontera, és a dir, aquells que fan que $a(b - \frac{1}{2}va) = 0$. Ho farem mitjançant la derivada

$$f' = a'(b - va) + b'a - \frac{1}{2}v'a^2.$$

Si provem que les òrbites no poden travessar aquesta frontera, llavors la desigualtat es complirà sempre.

- Si $a = 0$, llavors $a' = b$ i $f' = b^2 \geq 0$. Per tant, la funció és creixent en aquest punt i les òrbites no poden marxar de la família a través de $a = 0$.
- Si $b = \frac{1}{2}va$, llavors $f' = \frac{1}{4}v^2a^2 + U(l)a^2 \geq 0$. Per tant, la funció és creixent en aquest punt i les òrbites no poden marxar de la família a través de $b = \frac{1}{2}va$.

Aleshores, la família de conjunts $f \geq 0$ és positivament invariant sota les equacions (6.10). □

7 Conclusions

L'inici de l'estudi del problema dels tres cossos data dels estudis de Newton el segle XVII, de manera que és un camp de recerca molt desenvolupat. En aquest escrit, hem treballat una situació concreta del sistema: quan els tres cossos són coplanars i estan a prop de la col·lisió triple. Seguint l'article [8], hem explicat els conceptes i resultats presentats, esclarint-los i ampliant-los a través de realitzar els càlculs que manquen a [8] o bé de consultar altres referències.

En primer lloc, hem observat com, per mitjà del *McGeehe blow-up*, es pot regularitzar la col·lisió triple i com transforma aquest canvi les equacions del sistema en coordenades cartesianes. Això ens ha permès més endavant entendre les òrbites homotètiques a través dels cicles de punts fixos.

Les solucions homotètiques estan associades a configuracions centrals, de manera que, per tal d'estudiar-les, primer hem analitzat aquestes configuracions. Hem definit les cinc que hi ha i les hem visualitzat a l'esfera de forma. Encara que no hem aprofundit més en aquesta representació, és interessant notar que estudiar el problema amb aquesta perspectiva pot derivar en nous descobriments (veure [12, 13]).

El següent pas ha estat caracteritzar les òrbites associades a una configuració central en funció del moment angular. Les solucions homotètiques del problema viuen a M_+ , de manera que corresponen al moment angular nul, i presenten col·lisió triple als punts fixos de C associats a la configuració central.

Tot seguit, ens hem centrat a estudiar la transversalitat de les connexions del cicle de punt fixos per tal de provar l'existència de les òrbites descrites al Teorema 5.7. Per a aquest propòsit, hem inclòs els resultats presentats a [15] adaptats al cas $n = 3$ sobre les dimensions de les varietats invariants i la transversalitat de les connexions lagrangianes, ometent la prova del teorema. També ha estat necessari introduir superficialment la teoria d'espivals per a veure alguns resultats del subsistema del problema on dues masses són iguals (anomenat isòsceles) [10, 3] que podem extrapolar al cas general al pla.

Les proves de la transversalitat de les connexions lagrangianes descrites a la Proposició 4.8 s'han presentat en una secció a part a fi que la seva longitud no interrompés el fil de l'explicació. Tanmateix, són apartats imprescindibles de l'escrit en què es presenten tècniques habituals en l'estudi de sistemes dinàmics.

Per acabar, hem introduït la teoria pertorbativa necessària per a traslladar a la varietat $M(h, \omega)$, $\omega \neq 0$ els resultats obtinguts, ometent una demostració de [8] que emprava resultats avançats de dinàmica simbòlica. Amb aquesta teoria s'han obtingut els resultats dels quals resulta el Teorema 5.7 sobre la construcció d'òrbites periòdiques, conclouent així l'explicació de [8].

A tall de valoració trobem que hem assolit l'objectiu d'explicar els resultats de [8], encara que no hàgim pogut recrear algunes de les proves a causa de la complexitat de teoria i al temps limitat. El problema dels tres cossos és un àmbit d'estudi extens, i esperem que aquesta recerca serveixi també com a punt d'entrada a aquest més enllà del tema concret tractat, com ara a algun dels temes exposats en aquestes conclusions.

Referències

- [1] Alain Chenciner. “Three body problem”. A: *Scholarpedia* 2.10 (2007). revision #152224, pàg. 2111. DOI: 10.4249/scholarpedia.2111.
- [2] Robert L. Devaney. “Structural stability of homothetic solutions of the collinear n-body problem”. A: *Celestial mechanics* 19.4 (1979), pàg. 391 - 404.
- [3] Robert L. Devaney. “Triple collision in the planar isosceles three-body problem”. A: *Invent. Math.* 60.3 (1980), pàg. 249 - 267. ISSN: 0020-9910.
- [4] Leonhard Euler. “De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentium”. A: *Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* (1767), pàg. 144 - 151.
- [5] Joseph-Louis Lagrange. “Essai sur le probleme des trois corps”. A: *Prix de l’académie royale des Sciences de paris* 9 (1772), pàg. 292.
- [6] Jaume Llibre, Richard Moeckel i Carles Simó. *Central configurations, periodic orbits, and Hamiltonian systems*. Advanced Courses in Mathematics. CRM Barcelona. Birkhäuser/Springer, Basel, 2015. ISBN: 978-3-0348-0932-0.
- [7] Richard McGehee. “Triple collision in the collinear three-body problem”. A: *Inventiones mathematicae* 27 (1974), pàg. 191 - 227.
- [8] Richard Moeckel. “Chaotic dynamics near triple collision”. A: *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 107 (1989), pàg. 37 - 69.
- [9] Richard Moeckel. “Orbits near triple collision in the three-body problem”. A: *Indiana Univ. Math. J.* 32.2 (1983), pàg. 221 - 240. ISSN: 0022-2518.
- [10] Richard Moeckel. “Spiralling invariant manifolds”. A: *J. Differential Equations* 66.2 (1987), pàg. 189 - 207. ISSN: 0022-0396. URL: [https://doi-org.sire.ub.edu/10.1016/0022-0396\(87\)90031-3](https://doi-org.sire.ub.edu/10.1016/0022-0396(87)90031-3).
- [11] Richard Moeckel. “Symbolic dynamics in the planar three-body problem”. A: *Regular and Chaotic Dynamics* 12 (2007), pàg. 449 - 475.
- [12] Richard Montgomery. “The Three-Body Problem”. A: *Scientific American* 321 (2019), pàg. 66 - 73.
- [13] Richard Montgomery. “The three-body problem and the shape sphere”. A: *Amer. Math. Monthly* 122.4 (2015), pàg. 299 - 321. ISSN: 0002-9890.
- [14] Carl L. Siegel i Jürgen K. Moser. *Lectures on celestial mechanics*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [15] Carles Simó i Jaume Llibre. “Characterization of transversal homothetic solutions in the n-body problem”. A: *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 77 (1981), pàg. 189 - 198.