
1. Anàlisi dels circuits i sistemes lineals

1 Senyals i sistemes	3
1.1 <i>Senyals continus i discrets</i>	3
1.2 <i>Tipus de senyals i propietats</i>	3
1.2.1 Senyals periòdics	3
1.2.2 Senyals parell i imparell	4
1.2.3 Senyals exponencials i sinusoidals continus	4
1.2.4 Senyals exponencials i sinusoidals discrets	4
1.2.5 Propietats de periodicitat de les exponencials discretes	4
1.2.6 Funció impuls unitat i esglaió unitat discrets	5
1.2.7 Funció impuls unitat i esglaió unitat continus	5
1.3 <i>Sistemes continus i discrets</i>	5
1.4 <i>Interconnexió de sistemes</i>	6
1.5 <i>Propietats bàsiques dels sistemes</i>	7
1.5.1 Sistemes amb i sense memòria	7
1.5.2 Invertibilitat i sistemes inversos	7
1.5.3 Causalitat	7
1.5.4 Estabilitat	8
1.5.5 Invariància en el temps	8
1.5.6 Linealitat	8
2 Matemàtica dels sistemes lineals invariants en el temps (LTI)	8
2.1 <i>Introducció</i>	8
2.2 <i>Sistemes LTI discrets: suma de convolució</i>	9
2.3 <i>Sistemes LTI continus: integral de convolució</i>	10
2.4 <i>Propietats dels sistemes LTI</i>	11
2.4.1 Propietat commutativa	12
2.4.2 Propietat distributiva	12
2.4.3 Propietat associativa	12
2.4.4 Sistemes LTI amb i sense memòria	12
2.4.5 Invertibilitat dels sistemes LTI	13
2.4.6 Causalitat per als sistemes LTI	13
3 Sistemes lineals en l'electrònica	13
3.1 <i>Anàlisi en funció del temps</i>	14
3.1.1 Elements d'un circuit lineal	14
4 Lleis de Kirchhoff	18

5 Eines matemàtiques: transformades de Laplace i de Fourier	19
5.1 <i>Transformada de Fourier</i>	19
5.1.1 Representació de senyals aperiòdics: la transformada contínua de Fourier	19
5.1.2 Propietats de la transformada contínua de Fourier	21
5.2 <i>La transformació de Laplace i els circuits lineals</i>	23
5.2.1 La transformada de Laplace (TL)	23
5.2.2 Funcions d'impedància i teoremes de xarxa	24
6 Funció de transferència d'un sistema lineal	26
6.1 <i>Funcions de xarxa: pols i zeros</i>	30
6.2 <i>Anàlisi sinusoidal d'estat permanent</i>	31
7 Gràfiques de la resposta en freqüència. Diagrames de Bode	32
7.1 <i>Exemple dels filtres RC</i>	37
8 Esquema general d'un sistema analògic	40
8.1 <i>Adaptació d'impedàncies</i>	42
9 Corol·lari. Teoremes fonamentals: Thévenin, Norton i superposició	44
Annex 1. Mètodes generals d'anàlisi	46
A1.1 <i>Mètode dels corrents de malles</i>	46
A1.2 <i>Mètode de les tensions de nusos</i>	47
A1.3 <i>Cas de les fonts controlades</i>	48
A1.4 <i>Nomenclatura alternativa: corrents de branques</i>	49
A1.5 <i>Exemples pràctics</i>	49
Annex 2. La transformada de Laplace	51
A2.1 <i>Transformada bilateral de Laplace</i>	51
A2.1.1 Criteri de convergència	52
A2.2 <i>Antitransformada bilateral de Laplace</i>	53
A2.3 <i>Transformada unilateral de Laplace</i>	53
A2.3.1 Taula de propietats de la transformada unilateral	54
A2.3.2 Taula de transformades unilaterals de Laplace	55
Annex 3. Exemples de circuits RLC amb condicions inicials	57
A3.1 <i>Exemple 1.</i>	57
A3.2 <i>Exemple 2</i>	58
A3.2.1 Mètode 1: transformació en fonts de voltatge independents	58
A3.2.2 Mètode 2: transformació en fonts d'intensitat independents	59

1 Senyals i sistemes

En aquest primer capítol introduïrem els conceptes de *senyals* i *sistemes* i els classificarem segons les seves propietats i característiques. Aquests conceptes provenen de molts contextos diferents de la ciència i la tecnologia. Podem trobar-ne aplicacions en camps tan diversos com l'aeronàutica, la sismologia o el processament de veu i, tot i que la procedència física dels senyals i els sistemes que trobem en els camps anteriors poden ser bastant diferents, tots ells tenen algunes característiques en comú: *els senyals contenen informació sobre la naturalesa d'algun fenomen i poden ser modelitzats com a funcions matemàtiques d'una o més variables*. En canvi, *els sistemes responen als senyals produint nous senyals o produint algun comportament desitjat*.

1.1 Senyals continus i discrets

Els senyals poden descriure una àmplia varietat de fenòmens físics. En aquest primer capítol introduïrem la descripció i representació matemàtica d'aquests.

Tot i que hi ha diferents formes de representar un senyal, en molts casos la informació que transporta està codificada en un cert patró de variacions que es mostra amb una determinada forma. Per exemple, si consideréssim un automòbil, la força aplicada i la velocitat resultant del vehicle poden ser exemples de senyals.

Els senyals, en matemàtiques, se solen representar com a funcions amb una o més variables independents i per conveniència ens referirem en general a la variable independent com el temps. Al llarg dels apunts, considerarem dos tipus de senyals: *continus* i *discrets*. Utilitzarem la notació (t) per als senyals continus, que van estar definits per a tots els punts d'un interval real, i $[n]$ per als discrets, els quals variaran d'unitat en unitat. Aquests dos tipus bàsics de senyals comparteixen moltes propietats; per això, a menys que s'indiqui el contrari, les expressions matemàtiques i demostracions seran anàlogues en els dos casos.

Un sistema purament *analògic* treballa només amb funcions contínues, mentre que un sistema *digital* opera sobre polsos discrets o discontinus. Imaginem, per fixar idees, la sortida (en V) d'un transductor de temperatura com a senyal analògic que volem tractar:

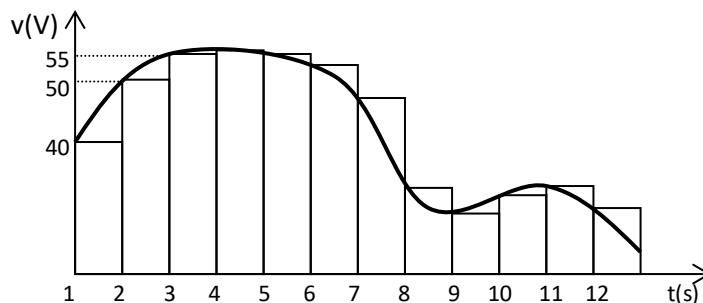


Figura 1. Resposta contínua d'un transductor de temperatura (traç gruixut) i la seva transformació a discreta (horitzontals)

El senyal analògic és la funció contínua que dona com a resposta el transductor. Però podem digitalitzar el senyal a intervals amb un convertidor d'analogic a digital (ADC) de manera que haurem aproximat la funció contínua per una sèrie de nombres enters. Evidentment, com major és la resolució de la conversió, més s'aproxima el senyal digitalitzat a l'analogic original.

1.2 Tipus de senyals i propietats

En aquest apartat donarem algunes expressions dels senyals més comuns utilitzats en l'Electrònica i, en alguns casos, ens pararem a comentar-ne les propietats fonamentals.

1.2.1 Senyals periòdics

Un senyal periòdic es defineix com:

$$x(t) = x(t + T) \quad [1]$$

En altres paraules, un senyal periòdic és el que no canvia per un cert desplaçament en el temps, T . En aquest cas, $x(t)$ és periòdic amb període T . Un exemple de senyal periòdic podríem trobar-lo en sistemes en què l'energia es conserva, com l'oscil·lació d'un pèndol o altres sistemes mecànics ideals sense pèrdues per fricció.

1.2.2 Senyals parell i imparell

Es defineixen els senyals parells com:

$$x(-t) = x(t) \quad [2]$$

Un senyal es considera imparell si:

$$x(-t) = -x(t) \quad [3]$$

Els exemples d'aquests poden ser el cosinus i el sinus respectivament. Un fet important és que qualsevol senyal es pot separar en la suma de dos senyals, un dels quals és parell i l'altre, imparell.

1.2.3 Senyals exponencials i sinusoidals continus

El senyal continu exponencial té la forma:

$$x(t) = Ce^{at} \quad [4]$$

on a i C són, en general, nombres complexos. Depenent dels valors d'aquests paràmetres l'exponencial complexa pot adoptar diferents comportaments (reals o complexos). Recordem que per l'expressió d'Euler de l'exponencial complexa, la podem relacionar amb els senyals harmònics bàsics: sinus i cosinus.

Com veurem posteriorment, aquests tipus de senyals formen els blocs bàsics per expressar molts altres tipus de senyals, en general més complicats, com a superposició d'aquests elements amb diferents paràmetres numèrics.

1.2.4 Senyals exponencials i sinusoidals discretes

El senyal exponencial discret es descriu com:

$$x[n] = C\alpha^n \quad [5]$$

on C i α són, en general, nombres complexos. Es pot expressar de manera alternativa si fem $\alpha = e^\beta$:

$$x[n] = Ce^{\beta n} \quad [6]$$

La major part de propietats de les exponencials discretes són iguals a les de les contínues, però algunes propietats, com la periodicitat, es veuen afectades per la discretització de la variable. Així que ens pararem a estudiar els casos en què els senyals continus i discretes difereixen.

Fixem-nos que, segons els valors de C i α , el comportament de l'exponencial pot ser molt diferent. En el cas continu, només teníem exponencials creixents o decreixents; però en el discret, α pot ser negatiu i per tant podem tenir un senyal amb valors alternats negatius i positius.

1.2.5 Propietats de periodicitat de les exponencials discretes

Com ja sabem pel cas continu, com més gran sigui la freqüència d'oscil·lació ω d'un senyal exponencial imaginari $e^{j\omega t}$ (j és la unitat imaginària), més ràpid vibrarà el senyal; és a dir, es podrà realitzar un nombre superior de períodes per unitat de temps. En el cas discret això no és així, hi ha un límit imposat pel caràcter discret de la variable i que fa que el senyal no pugui vibrar més ràpid. Comprovem-ho:

Suposem que tenim l'exponencial complexa discreta amb freqüència $\omega + 2\pi$:

$$e^{j(\omega+2\pi)n} = e^{j2\pi n}e^{j\omega n} = e^{j\omega n} \quad [7]$$

Així, veiem que els senyals amb freqüència ω i $\omega + 2\pi$ són el mateix senyal. Una situació molt diferent que en el cas continu, en què teníem senyals diferents per a totes les freqüències.

Una altra propietat diferent és la de la periodicitat. En el cas continu, les exponencials complexes són periòdiques per a qualsevol valor de ω . En el cas discret, no és així. Veiem que perquè el senyal discret sigui periòdic amb període N s'ha de complir

$$e^{j\omega(n+N)} = e^{j\omega n} \quad [8]$$

Això significa que $N\omega = 2\pi m$. També vol dir que el senyal exponencial imaginari discret només serà periòdic quan $\frac{\omega}{2\pi}$ sigui un número racional.

En la taula següent hem resumit algunes de les diferències dels senyals exponencials discrets i continus:

$e^{j\omega_0 t}$	$e^{j\omega_0 n}$
Senyals diferents per a diferents valors de ω_0	Senyals idèntics per a valors de ω_0 separats per múltiple de 2π
Periòdica per a qualsevol ω_0	Periòdica només si $\omega_0 = 2\pi m/N$ per a alguns enters $N > 0$ i m
Freqüència fonamental ω_0	Freqüència fonamental* ω_0/m
Període fonamental $\omega_0 = 0 \rightarrow$ indefinit $\omega_0 \neq 0 \rightarrow 2\pi/\omega_0$	Període fonamental* $\omega_0 = 0 \rightarrow$ indefinit $\omega_0 \neq 0 \rightarrow m2\pi/\omega_0$

* Suposa que m i N no tenen cap factor comú

Taula 1. Comparació de senyals $e^{j\omega_0 t}$ i $e^{j\omega_0 n}$.

1.2.6 Funció impuls unitat i esglaó unitat discrets

Es defineix l'impuls unitat *discret* com:

$$\delta[n - n_0] = \begin{cases} 0, & n \neq n_0 \\ 1, & n = n_0 \end{cases} \quad [9]$$

Un segon senyal bàsic és el de l'esglaó unitat discret:

$$u[n - n_0] = \begin{cases} 0, & n < n_0 \\ 1, & n \geq n_0 \end{cases} \quad [10]$$

Hi ha una relació clara entre l'impuls unitat i l'esglaó unitat discret. En particular, l'impuls unitat discret és la primera diferència de l'esglaó unitat:

$$\delta[n] = u[n] - u[n - 1] \quad [11]$$

1.2.7 Funció impuls unitat i esglaó unitat continus

La funció esglaó unitat $u(t)$ continu es defineix de manera similar a la seva versió discreta. Concretament:

$$u(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ 1, & t \geq t_0 \end{cases} \quad [12]$$

D'igual forma que en el cas discret, la funció impuls unitat $\delta(t)$ continu està relacionada amb la funció esglaó unitat:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases}; u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau \quad [13]$$

1.3 Sistemes continus i discrets

Els sistemes físics, en un sentit més ampli, són una interconnexió d'elements o parts organitzades i relacionades que interactuen entre si per aconseguir un objectiu. Es poden trobar exemples de sistemes en diferents contextos, que poden anar des del processament de senyals per a les telecomunicacions fins a les plantes de processament d'elements químics. Els sistemes reben (*entrada*) dades, energia o matèria de l'ambient i proveeixen (*sortida*) informació, energia o matèria. Concretament, en el camp dels senyals, un sistema es pot considerar un procés en

e els senyals d’entrada són transformats i processats per aquest i després són retornats com a senyals de sortida.

Per exemple, un sistema de millora d’imatges transforma una imatge d’entrada en una imatge de sortida, que posseeix algunes propietats concretes, com podria ser un millor contrast. O un circuit elèctric, el podem entendre com un sistema que respon al senyal d’entrada subministrat per una font (voltage d’entrada) amb un senyal de sortida a un condensador (voltage del condensador). Un sistema continu és aquell pel qual els senyals continus d’entrada són transformats en senyals continus de sortida. D’igual forma, un sistema discret és aquell que transforma senyals d’entrada discrets en senyals de sortida discrets.

Una de les motivacions més importants per al desenvolupament de les eines per a l’anàlisi i el disseny de sistemes és que en la física els sistemes provenen d’aplicacions molt diferents però tenen descripcions matemàtiques molt similars. A continuació un parell d’exemples senzills per demostrar-ho:

Considerem un sistema format per un automòbil on la força de tracció de les rodes $F_T(t)$ fos l’entrada del sistema i la velocitat del cotxe $v(t)$ la sortida. Aplicant les lleis de Newton podem trobar una relació entre força total i acceleració:

$$F(t) = m \frac{dv}{dt} \quad [14]$$

Però podem desglossar la força total en la força de tracció de les rodes i una força en sentit contrari deguda a la fricció, proporcional a la velocitat on μ és la constant de proporcionalitat (coeficient de fricció):

$$F_T(t) - \mu v(t) = m \frac{dv(t)}{dt} \quad [15]$$

D’on obtenim l’equació diferencial que descriu la relació entre l’entrada i la sortida del sistema:

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{\mu}{m} v(t) = \frac{1}{m} F_T(t) \quad [16]$$

D’igual forma, podríem haver considerat un circuit amb una font, una resistència i un condensador. Si considerem la tensió a la font com el senyal d’entrada i la tensió al condensador com el senyal de sortida, a partir de la llei d’Ohm i de l’expressió de la intensitat que travessa un condensador, obtindríem una relació entre entrada i sortida d’estructura similar a la de l’exemple anterior però amb constants diferents (vegeu pàgines 19 i ss.). Amb això, podem veure que dos sistemes molt diferents ens porten a una mateixa relació: una equació diferencial lineal ordinària de primer ordre amb coeficients constants.

1.4 Interconnexió de sistemes

Molts sistemes reals estan construïts com a interconnexions de diferents subsistemes. Un exemple d’això el podem trobar en un sistema d’àudio, el qual involucra la interconnexió d’un receptor de ràdio, un reproductor de discos amb un amplificador i un o més altaveus. Veient aquests sistemes com a interconnexió dels seus components, podem utilitzar els coneixements dels sistemes de components per analitzar l’operació i el comportament del sistema complet. Deixant a part les interconnexions típiques entre components com podrien ser les interconnexions en sèrie, paral·lel i mixtes, hi ha un altre tipus important d’interconnexió que s’anomena *de realimentació* o *retroalimentació*.

Com veiem a la figura 2, la sortida del sistema 1 és l’entrada del sistema 2, mentre que la sortida del sistema 2 es retroalimenta i se suma a l’entrada externa per produir una entrada real al sistema.

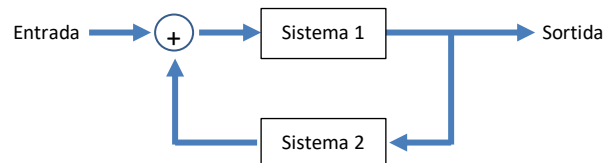


Figura 2. Interconnexió amb realimentació

1.5 Propietats bàsiques dels sistemes

1.5.1 Sistemes amb i sense memòria

S'anomena *sistema sense memòria* el sistema en què la sortida, per cada valor de la variable independent en un temps donat, depèn només de l'entrada en aquell mateix moment.

Per exemple, una resistència és un sistema sense memòria, amb $x(t)$ com la intensitat i $y(t)$ com el voltatge, la relació entrada-sortida és:

$$y(t) = Rx(t) \quad [17]$$

Un exemple de sistema continu amb memòria seria el d'un condensador, ja que, si agafem com a entrada el corrent ($x(\tau)$) i la sortida com el voltatge ($y(t)$), aleshores:

$$y(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \quad [18]$$

Veiem, doncs, que la caiguda de tensió al condensador depèn dels valors de la intensitat en temps anteriors i iguals a t , per tant, podem dir que el sistema té memòria.

De forma general, podem dir que el concepte de memòria en un sistema correspon a la presència d'un mecanisme que manté o emmagatzema informació sobre valors d'entrada d'instants diferents al temps actual. Això significa que sistemes que utilitzin temps futurs a l'actual per treballar també tindran memòria, no només els que emmagatzemin temps passats.

Físicament, la memòria dels sistemes està associada a la capacitat que tenen aquests per emmagatzemar energia. Per exemple, el condensador descrit per l'expressió [18] emmagatzema energia mitjançant l'acumulació de càrrega elèctrica.

1.5.2 Invertibilitat i sistemes inversos

Es diu que un sistema és *invertible* si existeix un sistema invers tal que, quan està connectat en sèrie amb l'original, produeix una sortida $w[n]$ (en el cas discret) igual a l'entrada del primer sistema, $x[n]$. Per acabar-ho d'entendre podem mirar la figura 3:

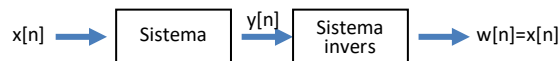


Figura 3. Sistema general invertible

El concepte d'invertibilitat és important en molts contextos. Per exemple, en els sistemes de codificació utilitzats en aplicacions de comunicació. En aquests sistemes, el senyal que volem transmetre s'introdueix en un sistema codificador, per encriptar el missatge. Per una descodificació sense pèrdues, cal que l'entrada del codificador es pugui recuperar amb precisió a la sortida, és a dir, el codificador ha de ser reversible.

1.5.3 Causalitat

Un sistema és *causal* si la seva sortida, en qualsevol instant de temps, depèn només dels valors de l'entrada en el moment present i en el passat. El circuit comportament d'un cotxe a la carretera és causal, ja que la velocitat a cada moment respon a valors presents i passats de l'acceleració i el temps.

Cal anar en compte a l'hora d'identificar sistemes causals, ja que sovint la intuïció ens pot portar per un mal camí. Per exemple, imaginem-nos un sistema que obeeixi a l'expressió següent:

$$y[n] = x[-n] \quad [19]$$

La intuïció ens pot fer pensar que estem davant d'un sistema causal, ja que si pensem en valors $n > 0$, veiem clarament que el valor de la sortida només depèn del passat de l'entrada, però, si ens fixem en els valors de $n < 0$, veiem que la sortida depèn de valors futurs de n i, en conseqüència, el sistema estudiat no és causal.

1.5.4 Estabilitat

Intuïtivament, un sistema *estable* és aquell en què entrades petites produeixen respostes que no divergeixen. Per exemple, suposem que tenim dos pèndols, l'un penjat del sostre i l'altre ancorat a terra en una posició invertida respecte al primer. En el primer cas, si apliquem una força petita al pèndol, la gravetat tendirà a portar el pèndol a la posició inicial. En conseqüència, si hi apliquem una força petita, el desplaçament angular que aconseguim també és petit i, per tant, el sistema és estable. En canvi, en el segon cas, la força de la gravetat tendeix a incrementar la desviació angular. Una petita força aplicada tendeix a provocar una gran desviació respecte a la vertical. Per tant, aquest sistema és inestable. De manera més formal, si l'entrada a un sistema estable és limitada, llavors la sortida també ha de ser limitada i no pot divergir.

1.5.5 Invariància en el temps

Un sistema és *invariant en el temps* si un desplaçament de temps en el senyal d'entrada provoca un desplaçament de temps al senyal de sortida. Això és, si $y[n]$ és la sortida del sistema discret, invariant en el temps, quan $x[n]$ és l'entrada, llavors $y[n - n_0]$ és la sortida quan $x[n - n_0]$ és l'entrada.

Conceptualment, un sistema és invariant en el temps si el seu comportament i les seves característiques són fixes en el temps. Per exemple, el circuit elèctric és invariant en el temps si els valors dels seus components són constants en el temps: si féssim un experiment amb el mateix circuit avui, podríem esperar els mateixos resultats si el fem de forma idèntica demà.

1.5.6 Linealitat

Un sistema *lineal* és aquell que compleix la propietat de la superposició: si una entrada consisteix en la suma ponderada de diversos senyals, llavors la sortida és simplement la superposició de les respostes del sistema a cadascun d'aquests senyals amb la ponderació corresponent.

Matemàticament: sigui $y_1(t)$ la resposta al sistema de l'entrada $x_1(t)$ i $y_2(t)$ la sortida corresponent a l'entrada $x_2(t)$. Llavors el sistema és lineal si, per a una constant complexa b qualsevol:

$$1 - \text{La resposta a } x_1(t) + x_2(t) \text{ és } y_1(t) + y_2(t) \quad [20]$$

$$2 - \text{La resposta a } bx_1(t) \text{ és } by_1(t) \quad [21]$$

La primera propietat s'anomena *propietat additiva* i la segona, *propietat d'escalament o d'homogeneïtat*. Aquestes dues propietats es poden resumir en una de més compacta: Si tenim un sistema amb una entrada com la següent:

$$x[n] = \sum_k a_k x_k[n] = a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n] + \dots + a_n x_n[n] \quad [22]$$

té una sortida que, segons [22], és:

$$y[n] = \sum_k a_k y_k[n] = a_1 y_1[n] + a_2 y_2[n] + \dots + a_n y_n[n] \quad [23]$$

Aquesta propietat es coneix com el *principi de superposició*.

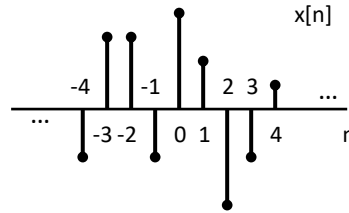
2 Matemàtica dels sistemes lineals invariants en el temps (LTI)

2.1 Introducció

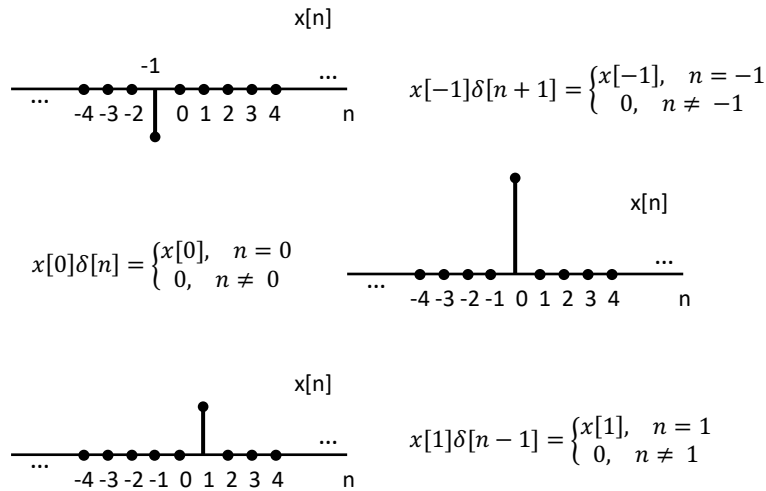
Ja hem vist propietats bàsiques dels sistemes. Per als sistemes lineals invariants en el temps (LTI), la propietat especial és la de superposició: si podem representar l'entrada d'un sistema LTI en termes d'una combinació lineal d'un conjunt de senyals bàsics, llavors podem utilitzar la superposició per calcular la sortida del sistema. Una de les característiques importants de l'impuls unitat (discret i continu) és que els senyals es poden representar com a combinació lineal d'impulsos retardats. Així, la superposició i la invariància temporal, permeten realitzar una caracterització completa de qualsevol sistema LTI en funció de la resposta a un impuls unitat. Anomenada *suma de convolució* en el cas discret i *integral de convolució* en el cas continu, aquesta representació proporciona comoditat analítica en tractar amb sistemes LTI.

2.2 Sistemes LTI discrets: suma de convolució

El més fàcil per visualitzar qualsevol senyal discret és considerar-lo com una seqüència d'impulsos individuals. Un exemple és el següent:



on es veuen seqüències d'impuls unitat desplaçades en el temps i esglaonades, on l'esglaó de cada impuls és $x[n]$ en l'instant en el qual ocorre la mostra unitària. Per exemple:



I la suma de les tres seqüències és igual a $x[n]$ per $-1 \leq n \leq 1$, i en general

$$x[n] = \dots + x[-3]\delta[n+3] + x[-2]\delta[n+2] + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2] + x[3]\delta[n-3] + \dots \quad [24]$$

I per a qualsevol valor de n , només un dels termes és diferent de zero. L'esglaó d'aquest terme és, doncs, $x[n]$. Si escrivim el sumatori de forma compacta:

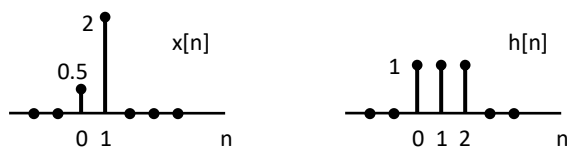
$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \quad [25]$$

I això és la seqüència d'una combinació lineal d'impulsos $\delta[n-k]$, on els pesos són $x[k]$. Aquesta equació rep el nom de **propietat de selecció** de l'impuls unitat discret. Com que $\delta[n-k]$ és diferent de zero per a valors de $k = n$, el sumatori «selecciona» a través dels valors de $x[k]$ i manté únicament el valor que correspon a $k = n$. La invariància en el temps, a més, ens diu que les respostes d'un sistema invariant en el temps als impulsos unitat desplaçats en el temps són simplement versions desplaçades en el temps una de l'altra.

Si ara designem per mitjà de $h_k[n]$ la resposta del sistema lineal a l'impuls unitat desplaçat $\delta[n-k]$, llavors la resposta $y[n]$ del sistema a l'entrada de $x[n]$ en l'equació és la combinació lineal de les respostes: $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_k[n]$, que per a un sistema LTI es transforma en: $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$, resultat que s'anomena **suma de convolució**¹ o de **superposició**. L'índex ha estat eliminat pel fet de ser $h[n]$ (**resposta impulsional**) la sortida del sistema LTI quan $\delta[n]$ n'és l'entrada.

¹ L'operació convolució s'expressa com $y[n] = x[n] * h[n]$.

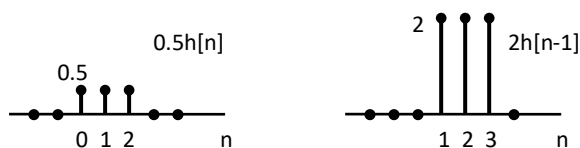
Exemple. Considerem un sistema LTI amb les següents característiques d'entrada $x[n]$ i impuls $h[n]$:



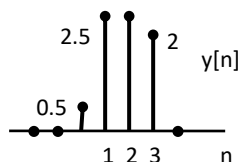
Per a aquest cas, com que només $x[0]$ i $x[1]$ són diferents de zero, obtenim:

$$y[n] = x[0]h[n - 0] + x[1]h[n - 1] = 0.5h[n] + 2h[n - 1] \quad [26]$$

Doncs bé, $0.5h[n]$ i $2h[n - 1]$ són 2 ecos de la resposta a l'impuls necessari per a la superposició en la generació de $y[n]$. Ecos com els següents:



I per tant, sumant les dues gràfiques, obtenim:



L'operació convolució també es defineix com «fer lliscar» $h[n - k]$ sobre $x[k]$. Per exemple, suposeu que hem dibuixat el senyal $h[n_0 - k]$, l'hem multiplicat per $x[k]$ i hem sumat el resultat per a tots els valors de k . Per a $y[n]$, sent $n = n_0 + 1$, necessitem dibuixar el senyal $h[(n_0 + 1) - k]$, però això podem fer-ho simplement desplaçant un punt a la dreta el senyal $h[n_0 - k]$, i així ho podem fer per a cada valor de n .

2.3 Sistemes LTI continus: integral de convolució

En el cas continu, no tenim una seqüència discreta de valors d'entrada, però si pensem en l'impuls unitat com a idealització d'un pols, el qual és tan curt que la seva durada no té conseqüències en el sistema físic real, podem desenvolupar una representació per senyals continus arbitrària en termes d'aquests polsos idealitzats com una duració petita que tendeix a desaparèixer.

Si fem aquesta idealització arribem² a:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau \quad [27]$$

que, com en el cas discret, es coneix amb el nom de *propietat de selecció de l'impuls de temps continu*. En el cas particular que $x(t) = u(t)$, essent $u(\tau) = 0$ per a $\tau < 0$ i $u(\tau) = 1$ per a $\tau > 0$, l'equació anterior es transforma en: $u(t) = \int_0^{\infty} \delta(t - \tau)d\tau$.

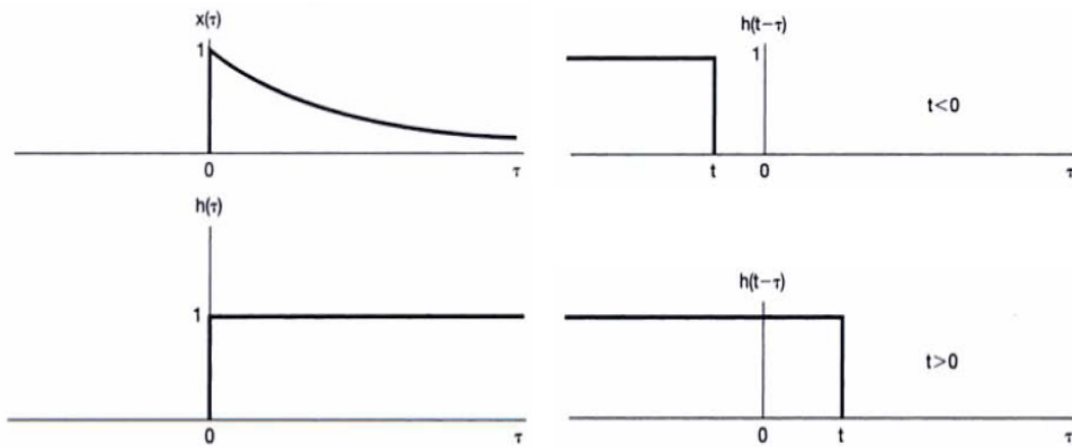
També com en el cas discret, un senyal arbitrari continu es pot veure com la superposició de polsos esglaonats i desplaçats. En conseqüència, la resposta d'un sistema lineal serà la superposició de les respostes a les versions esglaonades i desplaçades.

Si definim $h_{\tau}(t)$ com la resposta del sistema LTI a l'entrada $\delta(t - \tau)$, llavors, per la propietat de superposició i la idealització pel cas continu: $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h_{\tau}(t)d\tau$, i podem pensar en $x(t)$ com una suma d'impulsos desplaçats, on el pes en l'impuls $\delta(t - \tau)$ és $x(\tau)d\tau$. A més, doncs, podem pensar que el pes en la resposta $h_{\tau}(t)$ a l'impuls

² Per consultar-ne la demostració completa, vegeu el tema 2 de *Señales y sistemas*, d'Oppenheim-Willsky.

$\delta(t - \tau)$ és $x(\tau)d\tau$. Si a més de lineal, el sistema també és invariant, podem dir que $h_\tau(t) = h_0(t - \tau)$; és a dir: la resposta d'un sistema LTI a l'impuls unitat $\delta(t - \tau)$, el qual està desplaçat τ segons des de l'origen, és una versió de la resposta a la funció impuls unitat $\delta(t)$ desplaçada de manera semblant. Si com en el cas discret definim la resposta impulsional $h(t)$ com la resposta del sistema a aquest impuls, obtenim: $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$, coneguda també com la integral de convolució o superposició. Veiem que, per a qualsevol valor de t , la sortida és una integral ponderada de l'entrada, on el pes sobre $x(\tau)$ és $h(t - \tau)$.

Exemple. Sigui l'entrada i l'impuls unitat: $x(t) = e^{-at}u(t) \quad a > 0$
 $h(t) = u(t) \quad \rightarrow \quad x(\tau)h(t - \tau) = \begin{cases} e^{-a\tau} & 0 < \tau < t \\ 0 & \forall \text{ altre valor} \end{cases}$



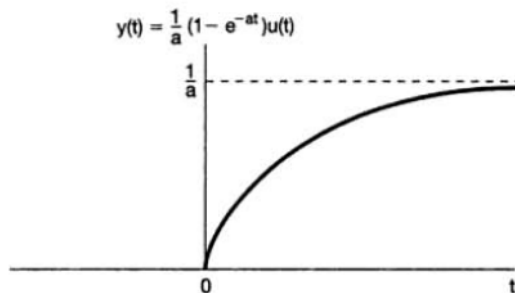
Llavors podem calcular la sortida:

$$y(t) = \int_0^t e^{-a\tau} d\tau = -\frac{1}{a}e^{-a\tau} \Big|_0^t = \frac{1}{a}(1 - e^{-at})$$

I per a tota t i $y(t)$:

$$y(t) = \frac{1}{a}(1 - e^{-at})u(t)$$

El resultat es mostra al gràfic següent:



2.4 Propietats dels sistemes LTI

Ja hem vist que les característiques d'un sistema LTI (i només dels sistemes LTI) estan determinades completament pel seu impuls. Algunes de les més bàsiques són:

2.4.1 Propietat commutativa

Cas discret

$$x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n-r]h[r] = h[n] * x[n]$$

Cas continu

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

2.4.2 Propietat distributiva

Cas discret

$$x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$$

I el mateix podem aplicar quan la suma és per a senyals d'entrada, i no per a la suma d'impulsos, gràcies a la propietat commutativa. Relacionant això amb la sortida:

$$y[n] = y_1[n] + y_2[n] = (x_1[n] + x_2[n]) * h[n] \rightarrow \begin{cases} y_1[n] = x_1[n] * h[n] \\ y_2[n] = x_2[n] * h[n] \end{cases} \quad [28]$$

I podem separar un senyal d'entrada suma, en suma de senyals de sortida per facilitar el càlcul.

Cas continu

$$x(t) * (h_1(t) + h_2(t)) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$$

2.4.3 Propietat associativa

Cas discret

$$x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n]$$

Cas continu

$$x(t) * (h_1(t) * h_2(t)) = (x(t) * h_1(t)) * h_2(t)$$

Per tant, no importa l'ordre amb què fem la convolució; però això només serveix per a sistemes invariants i lineals. Si tenim un sistema no lineal, per exemple una multiplicació per 2 i un quadrat de l'entrada, multiplicar primer per 2 i després fer el quadrat, o fer primer el quadrat i després multiplicar per 2 donen coses diferents.

 2.4.4 Sistemes LTI amb i sense³ memòria

Cas discret

L'única manera que no tingui memòria és que per a $n \neq 0$, $h[n] = 0$. Llavors $h[n] = K\delta[n] \rightarrow y[n] = Kx[n]$.

Cas continu

L'única manera que no tingui memòria és que per a $t \neq 0$, $h(t) = 0$. Llavors $h(t) = K\delta(t) \rightarrow y[n] = Kx(t)$.

Veiem que per a $K = 1$, els sistemes passen a ser identitat, amb sortida igual a l'entrada i amb resposta a l'impuls unitat igual a l'impuls unitat: $x[n] = x[n] * \delta[n]$ per al discret, i $x(t) = x(t) * \delta(t)$ per al continu. Fets que ens porten a les equacions (1) i (2).

³ Un sistema és sense memòria quan la seva sortida en qualsevol instant de temps depèn només del valor de l'entrada en aquell instant.

2.4.5 Invertibilitat⁴ dels sistemes LTI

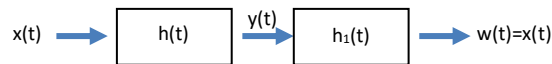


Figura 4. Sistema LTI invertible

En aquest cas, la resposta total a l'impuls és $h(t) * h_1(t)$, per això $h_1(t)$ ha de ser la resposta a l'impuls del sistema invers. Per al discret i el continu, doncs, queda:

Cas discret

$$h[n] * h_1[n] = \delta[n]$$

Cas continu

$$h(t) * h_1(t) = \delta(t)$$

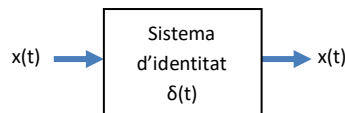


Figura 5. Sistema d'identitat

2.4.6 Causalitat⁵ per als sistemes LTI

Cas discret

En aquest cas $y[n]$ no pot dependre de $x[k]$ per a $k > n$, llavors tots els coeficients $h[n - k]$ que multipliquen $x[k]$ per a $k > n$ han de ser zero. Així doncs, $h[n] = 0$ per a $n < 0$, i per tant la resposta a un impuls d'un sistema LTI causal ha de ser zero abans que tingui lloc l'impuls, cosa consistent amb el concepte intuïtiu de causalitat o de repòs inicial, fet que s'aplica només a sistemes lineals. La sortida per l'equació (1) esdevé:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n - k].$$

Cas continu

Per a aquest cas $h(t)$ ha de ser 0 per a $t < 0$ i llavors la sortida per l'equació (2) esdevé:

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)x(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^t x(\tau)h(t - \tau) d\tau.$$

3 Sistemes lineals en l'electrònica

En aquest apartat s'introdueixen els elements i circuits lineals i els mètodes fonamentals d'anàlisi, per després poder aplicar-los a l'anàlisi i al disseny de sistemes més complexos dedicats a aplicacions específiques.

Un *circuit* és un camí tancat pel qual pot circular corrent. És *lineal* si només conté elements que es comporten linealment i, en aquest cas, queda descrit per una equació lineal com les que abunden en altres camps de la física (mecànica, ones, fluids, etc.). En electrònica els circuits normalment cauen fora d'aquesta classificació, perquè en general els dispositius electrònics no són lineals. Però es poden trobar condicions en què es comportin linealment (petit senyal), amb la qual cosa es pot aproximar el seu comportament pel seu equivalent lineal. Per això és fonamental saber treballar amb aquest tipus de sistemes.

⁴ Un sistema és invertible si existeix un invers tal que, quan està connectat en sèrie amb el sistema original, produeix una sortida igual a l'entrada del primer sistema.

⁵ On la sortida depèn només dels valors presents i passats de l'entrada.

Les magnituds físiques fonamentals que determinen el comportament d’un circuit elèctric o electrònic són la *intensitat del corrent*, i (amb direcció, vector \mathbf{i}) i la *diferència de potencial* o tensió, v . S’expressen en amperes (A) i volts (V) respectivament, i poden dependre del temps: $v(t)$, $i(t)$. Altres magnituds associades són:

la càrrega $Q = \int i(t) \cdot dt$ (en coulombs, C),

el flux magnètic $\Phi = \int v(t) \cdot dt$ (en webers, Wb),

la potència $p(t) = v(t) \cdot i(t)$ (en watts, W), i

l’energia $E = \int p(t) \cdot dt$ (en joules, J).

3.1 Anàlisi en funció del temps

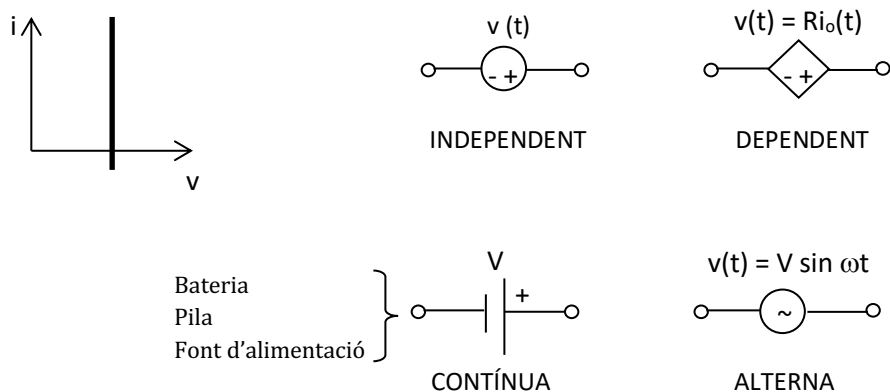
Tractem aquí l’anàlisi més general en l’espai real, en funció del temps, començant per presentar els diferents elements que poden prendre part en un circuit lineal i continuant amb els mètodes d’anàlisi.

3.1.1 Elements d’un circuit lineal

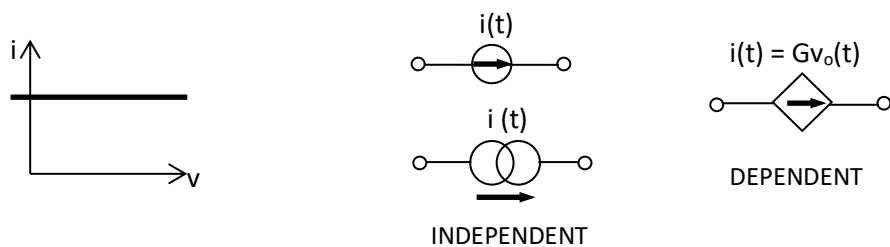
Poden ser actius o passius, depenent de si proporcionen energia al circuit o bé la consumeixen transformant-la en algun altre tipus d’energia (calor, so, llum, etc.).

a) **Elements actius.** Són les fonts, que poden ser de tensió o corrent. Si els valors de v , i generats són paràmetres independents del circuit, s’anomenen **FONTS INDEPENDENTS**. Si els v , i generats depenen del corrent o tensió d’algun altre punt del circuit, són **FONTS DEPENDENTS**.

Font de tensió ideal: és un dispositiu capaç de produir una tensió fixa, independentment del que connectem entre els seus borns.



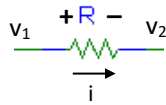
Font de corrent ideal: és un dispositiu que genera un corrent fix independentment del que connectem entre els seus borns.



Aquí s’ha utilitzat el conveni general de: majúscules per a magnituds o paràmetres constants, minúscules per a magnituds variables amb el temps, i combinació de majúscules i minúscules per a magnituds amb components constants i variables alhora. També s’ha remarcat el símbol de les fonts dependents, encara que també es poden representar amb el general.

b) **Elements passius:** consumeixen o emmagatzemen energia.

Resistència, R: el paràmetre R (unitats ohms, Ω) està relacionat amb la pèrdua d'energia dels portadors de càrrega a causa de l'oposició que presenta el material a ser travessat per ells. Tal pèrdua d'energia per unitat de càrrega s'interpreta com a caiguda de potencial a través del material.



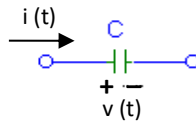
La llei d'Ohm estableix que el quocient v/i és independent de i :

$$R \equiv \frac{v_1 - v_2}{i} = \frac{v_R}{i_R} = \text{constant}$$

Per a un material homogeni de secció constant S i llargada L, la resistència val $R = \rho \frac{L}{S}$, on ρ és la *resistivitat* ($\Omega \cdot \text{cm}$), i es defineix la *conductivitat* σ ($\Omega^{-1} \cdot \text{cm}^{-1}$) com la seva inversa. De vegades es defineix la *conductància*, l'invers de la resistència, $G \equiv 1/R$ (en siemens, S).

La potència instantània dissipada en una resistència per efecte Joule és $p_R(t) = v_R(t)i_R(t) = Ri_R^2(t)$. És sempre positiva; per tant sempre absorbeix energia elèctrica del circuit.

Capacitat, C: representa la càrrega que es pot emmagatzemar gràcies a una diferència de tensió entre dos elements conductors separats per un dielèctric. Es mesura en farads, F.



$$C \equiv \frac{dq}{dv} ; \quad q = \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau \quad \Rightarrow \quad i_C(t) = C \frac{dv_C}{dt} \quad \text{i} \quad v_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(\tau) d\tau$$

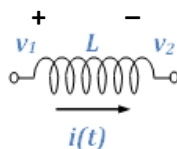
Sempre es podrà separar la tensió inicial al condensador, $v(0)$, com una font independent afegida

$$v_C(t) = v_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i_C(t') dt'$$

La capacitat més típica és la d'un condensador de plaques metàl·liques planoparal·leles d'àrea A separades per un aïllant de constant dielèctrica ϵ i gruix d: $C = A\epsilon/d$. El corrent a través d'un condensador és nul si la tensió no varia. Per tant, el condensador actua com un circuit obert per al corrent continu, i s'oposa a canvis sobtats de tensió, ja que induiria un corrent infinit.

D'altra banda, la potència consumida en una capacitat val $p_C(t) = v_C(t)i_C(t) = \frac{Cv_C(t)dv}{dt}$. Aquesta potència instantània pot ser positiva (càrrega del condensador, consumint), o negativa (descàrrega del condensador, cedint potència al circuit). Però el balanç $W_C = \int p_C(t)dt = \frac{C}{2} v_C^2$ sempre serà positiu o nul, ja que no es pot descarregar més del que s'ha carregat prèviament, i per això el condensador és considerat un dispositiu passiu.

Autoinducció, L: el pas d'un corrent indueix un flux magnètic al voltant del conductor per on circula, que pot influir en la resta del circuit. Especialment, si el conductor està enrotllat en forma de bobina, les línies de flux es concentren al seu eix, i generen un flux magnètic total proporcional a la intensitat del corrent: $\Phi = Li$ (L en henris, H).



Segons la *lei de Faraday*, la variació del flux magnètic induïx un voltatge que en el S.I. és:

$$v_L(t) = v_1 - v_2 = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{dLi_L}{dt} \Rightarrow \boxed{v_L(t) = L \frac{di_L}{dt}} \quad i \quad \boxed{i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v_L(\tau) d\tau}$$

Novament, la condició inicial pot ser considerada com una font independent

$$i_L(t) = i_L(0) + \frac{1}{L} \int_0^t v_L(\tau) d\tau$$

Per a una bobina de secció S i llargada l , amb susceptibilitat magnètica μ i enrotllada amb N espires per unitat de longitud, el coeficient d'autoinducció és $L = \mu N^2 S l$. Anàlogament al que passava a una capacitat, si el corrent que circula per una bobina és constant amb el temps no es produeix diferència de tensió entre els seus borns. L'inductor actua com un curtcircuit per al corrent continu i s'oposa a canvis sobtats d'intensitat, perquè induiria una tensió infinita.

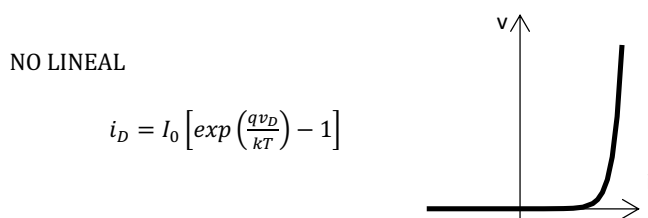
La potència consumida en una autoinducció és $p_L(t) = v_L(t)i_L(t) = L \frac{i_L(t)di_L(t)}{dt}$, i per tant l'energia global pot ser absorbida i després retornada al circuit, amb balanç sempre positiu o nul: $W_L = \int p_L(t)dt = \frac{L}{2} i_L^2$.

Tots aquests elements de circuit ideals són **LINEALS**, en el sentit que la relació que hi ha entre tensió i intensitat és a través d'un operador lineal: proporcionalitat, derivació, integració, etc., i gràcies al fet que els valors dels paràmetres (C, L, R) són constants reals, independents dels valors de les magnituds i i v que caracteritzen el circuit. Amb això, les diferents contribucions a i i v degudes a les diverses fonts independents són additives: es compleix el **principi de superposició**.

Així, per exemple, les característiques I-V d'una resistència són:



En electrònica, però, hi ha molts elements o dispositius *no lineals*, com díodes, transistors, etc. Per exemple, les característiques I-V d'un díode són:



No obstant això, en general, intentarem modelar els dispositius o sistemes físics a estudiar per models de circuit lineals sota determinades circumstàncies, que s'establiran en el seu moment. Per això, l'estudi de sistemes lineals és una eina molt útil en electrònica.

És important tenir clar que un dispositiu donat pot tenir diferents models lineals que dependran del grau de refinament o precisió demanada, i de la disponibilitat de programes de simulació. Com a exemple, a continuació s'exposen alguns dels models més utilitzats del transistor bipolar.

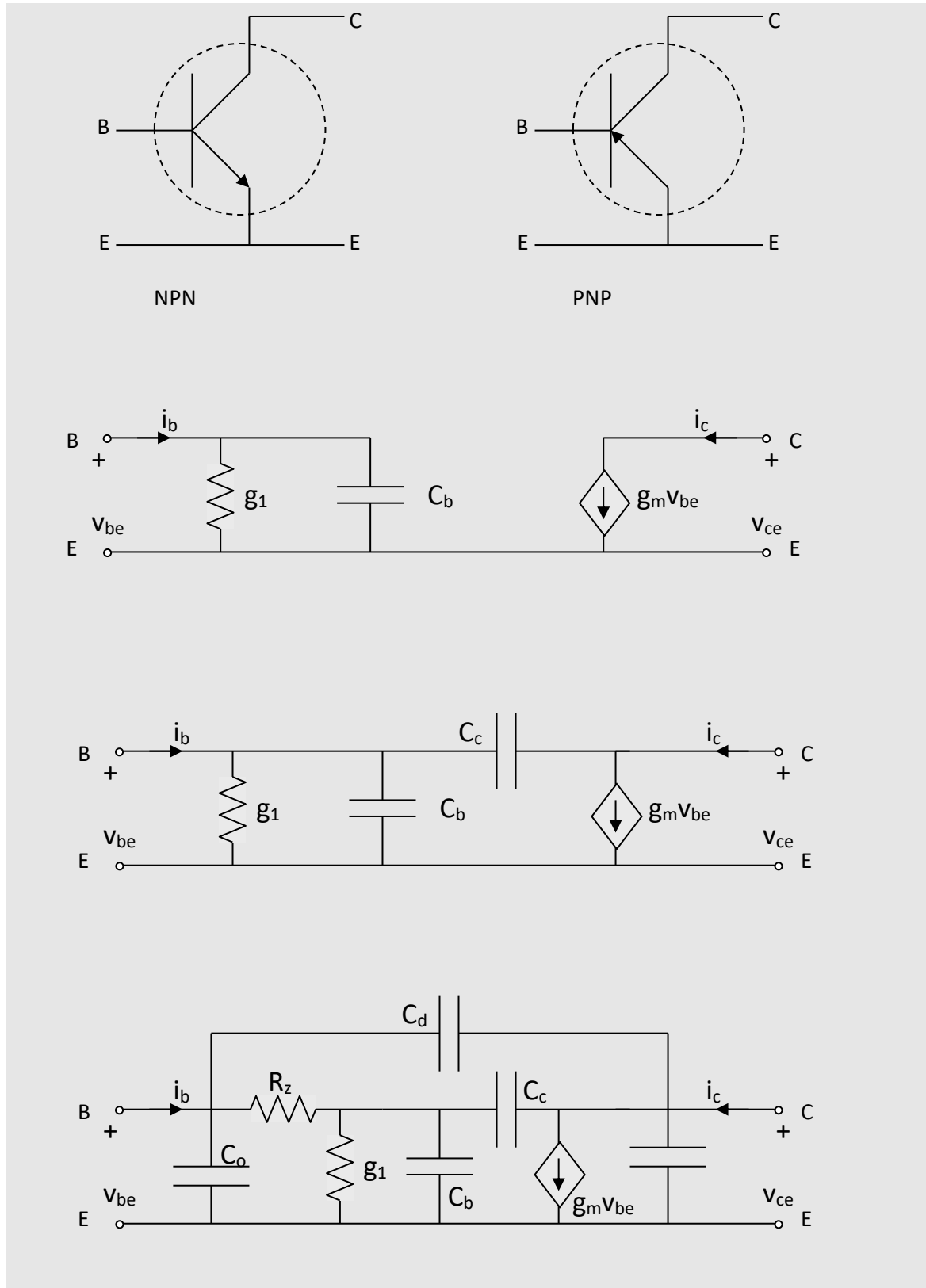


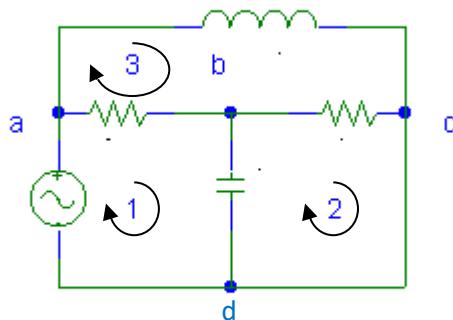
Figura 6. Símbols dels transistors bipolars NPN i PNP (dalt) i tres models d'ells, successivament més complicats

4 Lleis de Kirchhoff

L'anàlisi dels circuits elèctrics i electrònics es basa en les dues *lleis de Kirchhoff*, que es descriuran a continuació. Presentem primer els elements topològics d'un circuit:

- **branca**: cadascuna de les línies o arestes de la gràfica topològica d'un circuit, o, dit d'una altra manera, línia de corrent on hi ha inclòs un dispositiu com a mínim.
- **node, nus o vèrtex**: unió de tres o més branques.
- **mall**: circuit tancat de branques que el corrent pot recórrer sense passar dues vegades pel mateix node.

Exemple:



Nodes independents: a, b, c

d: node de referència o massa

Malles independents: 1, 2, 3

5 branques (hi ha una línia de corrent buida que no compta)

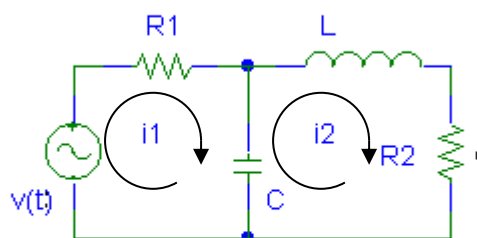
Les dues lleis de Kirchhoff s'enuncien de la manera següent:

1. **Llei dels nusos**: la suma algebraica de les intensitats que conflueixen a un nus és zero en tot moment. És conseqüència de la conservació de la càrrega elèctrica, i.e. $\text{div } \mathbf{i} = 0$.

2. **Llei de les malles**: si suméssim totes les caigudes de tensió en un circuit tancat (mall), el resultat és zero. Resulta que V és un potencial elèctric (del qual deriva \mathbf{E} conservatiu).

En l'annex 1 s'explica la seva aplicació a circuits reals, així com diversos exemples d'aplicació a circuits senzills però que aporten informació interessant.

Exemple



Suposem una excitació general $v(t)$. Aplicant les equacions a les dues malles:

$$\begin{cases} v(t) - R_1 i_1 - \frac{1}{C} \int (i_1 - i_2) dt = 0 \\ \frac{1}{C} \int (i_1 - i_2) dt - L \frac{di_2}{dt} - R_2 i_2 = 0 \end{cases}$$

Obtenim un sistema lineal d'equacions integrodiferencials acoblades.

Com veiem, la resolució d'un circuit aparentment innocent pot ser complicada i involucra la resolució de sistemes d'equacions diferencials lineals acoblades amb coeficients constants i condicions inicials. És evident que per a circuits complicats, aquest mètode de resolució és lent i farragós.

5 Eines matemàtiques: transformades de Laplace i de Fourier

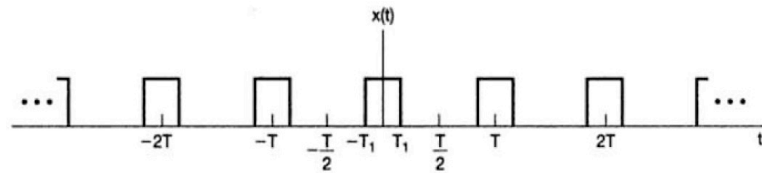
5.1 Transformada de Fourier

Molts senyals, en particular els d'energia finita, poden expressar-se com a combinació lineal d'exponencials complexes. En el cas de senyals periòdics, aquesta combinació és harmònica, mentre que en el cas no periòdic (o aperiòdic) la combinació és infinitesimalment petita en freqüència, i la suma esdevé integral. Doncs bé, l'espectre de coeficients d'aquesta suma rep el nom de *transformada de Fourier*, i la integral que utilitza aquests coeficients per representar el senyal com una combinació lineal d'exponencials complexes s'anomena *transformada inversa* (o *antitransformada*) de Fourier. Així doncs, considerem, tal com ho va fer Fourier, els senyals aperiòdics com a senyals periòdics amb període infinit (i.e. a mesura que augmentem el període, la freqüència fonamental disminueix, i es fan cada vegada més propers en freqüència aquests components harmònics).

5.1.1 Representació de senyals aperiòdics: la transformada contínua de Fourier

Comencem per un exemple senzill: l'ona quadrada periòdica de període T .

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T_1 \\ 0 & T_1 < |t| < T/2 \end{cases}$$



Sabem que els coeficients de la sèrie de Fourier de l'ona quadrada són:

$$a_k = \frac{2 \sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T} \quad [29]$$

on $\omega_0 = 2\pi/T$ és la freqüència fonamental. Prenent $w = k\omega_0$:

$$T a_k = \frac{2 \sin(w T_1)}{w} \quad [30]$$

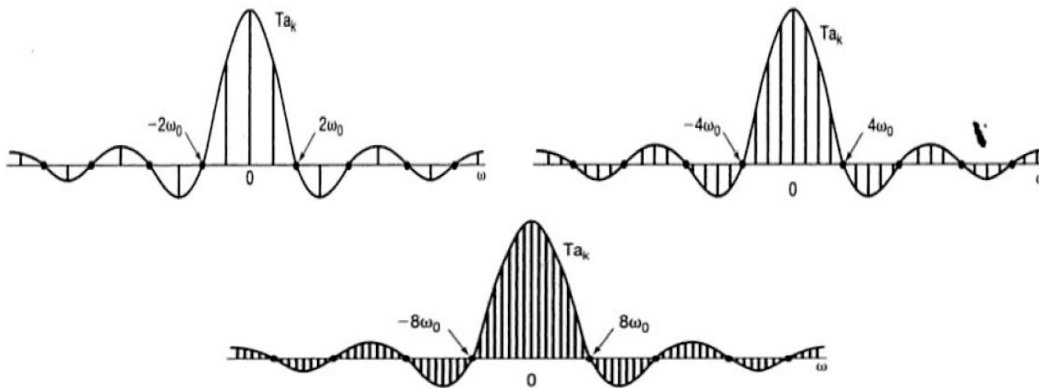


Figura 7. Coeficients de la sèrie de Fourier, amb T_1 fix, per a valors de T : (dalt-esquerra) $T=4T_1$, (dalt-dreta) $T=8T_1$ i (a sota) $T=16T_1$. Si s'augmenta l'envolupant (i.e. augmenta T), disminueix la distància entre coeficients.

La transformada de Fourier $X(j\omega)$ d'una funció $x(t)$ (arbitrària però finita) és:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad [31]$$

La transformada de Fourier és complexa, ja que és la combinació lineal d'exponencials complexes (j = unitat imaginària, per diferenciar-la de la intensitat). També s'anomena *espectre* de $x(t)$, ja que proporciona informació sobre com definir $x(t)$ com a combinació lineal (integral) de funcions sinusoidals de diferents freqüències.

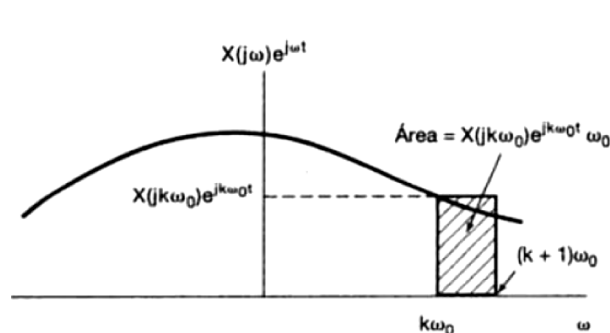
D'altra banda la transformada inversa de Fourier o antitransformada es defineix com:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad [32]$$

on el factor $1/2\pi$ surt de substituir el període per $T = 2\pi/\omega_0$.

Òbviament no hem demostrat aquestes fórmules. Si es vol aprofundir sobre aquest tema, aquestes dues expressions i altres que utilitzarem estan demostrades a Oppenheim-Willsky (*Señales y sistemas*, capítol 4), així com molts exemples.

Una definició gràfica de l'antitransformada de Fourier podria ser com es veu a la següent figura:



Si $x(t)$ és finita, energèticament parlant, sabem que $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$ i per tant podem afirmar que $X(j\omega)$ és finita, i per tant (32) convergeix. Les condicions per assegurar l'existència i la convergència de la transformada de Fourier són les següents (anomenades *condicions de Dirichlet*):

1. Que $x(t)$ sigui absolutament integrable ($\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$).
2. Que $x(t)$ tingui un nombre finit de màxims i mínims dins de qualsevol interval finit.
3. Que $x(t)$ tingui un nombre finit de discontinuïtats dins de qualsevol interval finit. A més, cadascuna d'aquestes discontinuïtats ha de ser finita.

Exemple. Transformada de Fourier del pols rectangular següent: $x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases}$

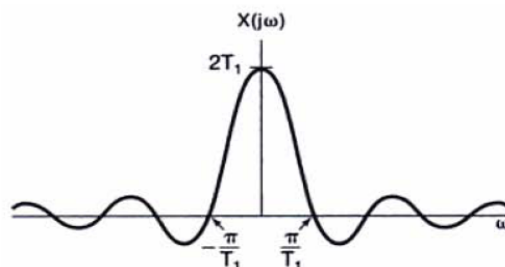
Aplicant l'equació (32) a $x(t)$:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-T_1}^{T_1} e^{-j\omega t} dt = 2 \frac{\sin(\omega T_1)}{\omega} =$$

$$= 2T_1 \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T_1}{\pi}\right)$$

ja que

$$\operatorname{sinc}(\theta) = \frac{\sin(\pi\theta)}{\pi\theta}$$



5.1.2 Propietats de la transformada contínua de Fourier

A continuació mostrem dues taules amb les propietats de les TF.

TABLA 4.1 PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

Sección	Propiedad	Señal aperiódica	Transformada de Fourier
		$x(t)$ $y(t)$	$X(j\omega)$ $Y(j\omega)$

4.3.1	Linealidad	$ax(t) + by(t)$	$aX(j\omega) + bY(j\omega)$
4.3.2	Desplazamiento de tiempo	$x(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$
4.3.6	Desplazamiento de frecuencia	$e^{j\omega_0 t} x(t)$	$X(j(\omega - \omega_0))$
4.3.3	Conjugación	$x^*(t)$	$X^*(-j\omega)$
4.3.5	Inversión de tiempo	$x(-t)$	$X(-j\omega)$
4.3.5	Escalamiento de tiempo y de frecuencia	$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$
4.4	Convolución	$x(t) * y(t)$	$X(j\omega) Y(j\omega)$
4.5	Multiplicación	$x(t)y(t)$	$\frac{1}{2\pi} X(j\omega) * Y(j\omega)$
4.3.4	Diferenciación en tiempo	$\frac{d}{dt} x(t)$	$j\omega X(j\omega)$
4.3.4	Integración	$\int_{-\infty}^t x(t) dt$	$\frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$
4.3.6	Diferenciación en frecuencia	$tx(t)$	$j \frac{d}{d\omega} X(j\omega)$
4.3.3	Simetría conjugada para señales reales	$x(t)$ real	$\begin{cases} X(j\omega) = X^*(-j\omega) \\ \Re\{X(j\omega)\} = \Re\{X(-j\omega)\} \\ \Im\{X(j\omega)\} = -\Im\{X(-j\omega)\} \\ X(j\omega) = X(-j\omega) \\ \angle X(j\omega) = -\angle X(-j\omega) \end{cases}$
4.3.3	Simetría para señales real y par	$x(t)$ real y par	$X(j\omega)$ real y par
4.3.3	Simetría para señales real e impar	$x(t)$ real e impar	$X(j\omega)$ puramente imaginaria e impar
4.3.3	Descomposición par-impar de señales reales	$x_e(t) = \text{Ev}\{x(t)\}$ [$x(t)$ real] $x_o(t) = \text{Od}\{x(t)\}$ [$x(t)$ real]	$\Re\{X(j\omega)\}$ $j\Im\{X(j\omega)\}$

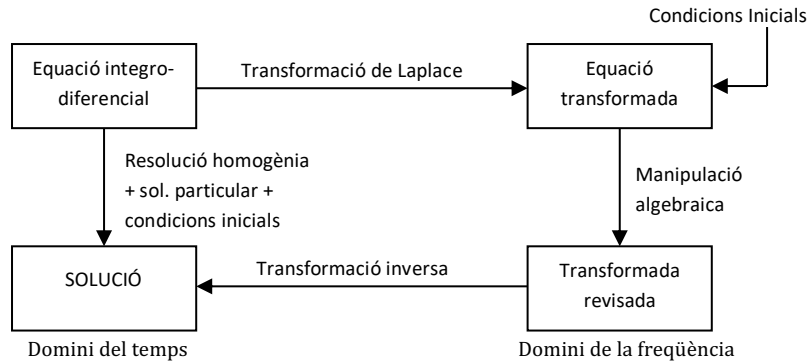
4.3.7	Relación de Parseval para señales aperiódicas		
		$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) ^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) ^2 d\omega$	

TABLA 4.2 PARES BÁSICOS DE TRANSFORMADAS DE FOURIER

Señal	Transformada de Fourier	Coefficientes de la serie de Fourier (si es periódica)
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0)$	a_k
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi \delta(\omega - \omega_0)$	$a_1 = 1$ $a_k = 0$, con otro valor
$\cos \omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$	$a_1 = -a_{-1} = \frac{1}{2}$ $a_k = 0$, con otro valor
$\text{sen } \omega_0 t$	$\frac{\pi}{j} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$	$a_1 = -a_{-1} = \frac{1}{2j}$ $a_k = 0$, con otro valor
$x(t) = 1$	$2\pi \delta(\omega)$	$a_0 = 1$, $a_k = 0$, $k \neq 0$ (Esta es la representación en serie de Fourier para cualquier selección de $T > 0$)
Onda cuadrada periódica		
$x(t) = \begin{cases} 1, & t < T_1 \\ 0, & T_1 < t \leq \frac{T}{2} \end{cases}$ y $x(t + T) = x(t)$	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2 \text{sen } k\omega_0 T_1}{k} \delta(\omega - k\omega_0)$	$\frac{\omega_0 T_1}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{k\omega_0 T_1}{\pi}\right) = \frac{\text{sen } k\omega_0 T_1}{k\pi}$
$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$	$\frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$	$a_k = \frac{1}{T}$ para todo k
$x(t) \begin{cases} 1, & t < T_1 \\ 0, & t > T_1 \end{cases}$	$\frac{2 \text{sen } \omega T_1}{\omega}$	-
$\frac{\text{sen } Wt}{\pi t}$	$X(j\omega) = \begin{cases} 1, & \omega < W \\ 2, & \omega > W \end{cases}$	-
$\delta(t)$	1	-
$u(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega)$	-
$\delta(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$	-
$e^{-at} u(t), \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{a + j\omega}$	-
$te^{-at} u(t), \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a + j\omega)^2}$	-
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at} u(t), \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a + j\omega)^n}$	-

5.2 La transformació de Laplace i els circuits lineals

Aquest mètode permet la resolució d'equacions integrodiferencials d'un mode rutinari i matemàticament molt més senzill que amb la variable temps.



5.2.1 La transformada de Laplace (TL)

Ve a ser una generalització de la transformada de Fourier on la integració no té un argument imaginari pur sinó amb part real i part imaginària. Definició:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} \equiv \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

La variable $s \equiv \sigma + j\omega$ és complexa. Perquè $f(t)$ sigui transformable només cal que: $\int_0^{\infty} e^{-\sigma_1 t} |f(t)| dt < \infty$ per a algun σ_1 real, positiu i finit. És una condició poc restrictiva que compleixen totes les funcions impulsores pràctiques de l'electrònica. La transformació inversa de Laplace es defineix a través de

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_1 - j\omega}^{\sigma_1 + j\omega} e^{st} F(s) ds$$

que és una integral de contorn, trajectòria vertical en pla complex, amb $\sigma_1 > \sigma_c > 0$ on σ_c s'anomena *abscissa de convergència*.

Es deixa per a l'alumne la demostració de les següents **propietats** de la TL:

1. Linealitat de la TL: $\mathcal{L}\{af(w) + bg(w)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\}$

Per tant, es poden tractar dues excitacions de manera independent (*superposició*).

2. Transformades de derivades: $\mathcal{L}\left\{\frac{df}{dt}\right\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$

Així, l'expressió general per a la derivada n-èsima és:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = s^n \mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} \left.\frac{df}{dt}\right|_0 - \dots - \left.\frac{d^{n-1} f}{dt^{n-1}}\right|_0$$

3. Transformades d'integrals: $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{s} \mathcal{L}\{f\}$

Ja que transformada només té sentit per a $t \geq 0$, si el límit inferior d'integració és $-\infty$ es pot separar la integral en dues parts i considerar la primera (entre $-\infty$ i 0) com una condició inicial:

$$\mathcal{L}\left\{\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{s} \left[\mathcal{L}\{f\} + \int_{-\infty}^0 f(\tau) d\tau \right]$$

Utilitzarem notació en majúscules per a l'espai de Laplace: $\mathcal{L}\{v\} \equiv V$, $\mathcal{L}\{i\} \equiv I$.

Exemples (a resoldre per l'alumne):

IMPULS	$v(t) = \delta(t)$	\Rightarrow	$\mathcal{L}\{v\} = 1$	$\text{Re}[s] > 0$
CONSTANT	$v(t) = K$	\Rightarrow	$\mathcal{L}\{v\} = \frac{K}{s}$	$\text{Re}[s] > 0$
POTÈNCIA	$v(t) = t^n, \quad n \in \mathbb{N}$	\Rightarrow	$\mathcal{L}\{v\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$	$\text{Re}[s] > 0$
EXPONENCIAL	$v(t) = e^{at}; \quad a \in \mathfrak{R}$	\Rightarrow	$\mathcal{L}\{v\} = \frac{1}{s-a}$	$\text{Re}[s] > 0$
“ IMAGINÀRIA	$v(t) = e^{\pm j\omega t}; \quad \omega \in \mathfrak{R}$	\Rightarrow	$\mathcal{L}\{v\} = \frac{1}{s \mp j\omega}$	$\text{Re}[s] > 0$
SINUS	$v(t) = \sin\omega_0 t$	\Rightarrow	$\mathcal{L}\{v\} = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$	$\text{Re}[s] > 0$
COSINUS	$v(t) = \cos\omega_0 t$	\Rightarrow	$\mathcal{L}\{v\} = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$	$\text{Re}[s] > 0$

5.2.2 Funcions d'impedància i teoremes de xarxa

Es poden generalitzar les relacions entre intensitat i tensió a cada element mitjançant el concepte d'*impedància complexa* (unitats: ohms Ω).

- En una resistència $v_R(t) = Ri_R(t)$, les transformades són $V_R(s) = RI_R(s)$ i es pot definir la impedància complexa d'una resistència com:

$$Z_R(s) \equiv \frac{V_R}{I_R} = R$$

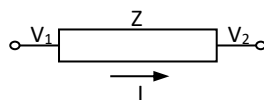
- En una inductància $v_L(t) = L \frac{di_L}{dt} \Rightarrow V_L(s) = L[sI_L(s) - i_L(0^-)]$. Si $i_L(0^-) = 0$, llavors $V_L(s) = LsI_L(s)$ i és:

$$Z_L(s) \equiv \frac{V_L}{I_L} = Ls$$

- Per una capacitat on $q(0^-) = 0$, $v_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(t) dt \Rightarrow V_C(s) = \frac{1}{C} \left[\frac{I_C(s)}{s} \right]$ i li podem assignar una impedància:

$$Z_C(s) \equiv \frac{V_C}{I_C} = \frac{1}{Cs}$$

Amb aquest concepte podem generalitzar totes les anàlisis i exemples presentats fins aquí substituint cada element per la seva impedància equivalent. El seu símbol:



La seva inversa és l'*admitància* $Y \equiv 1/Z$ (unitats: siemens, S).

S'anomena **xarxa transformada** (de Laplace) aquella en la qual es consideren les impedàncies transformades de cadascun dels elements. D'alguna forma, recuperem la manera de treballar en circuits on únicament apareixien elements resistius:

- Combinació en sèrie d'impedàncies: $Z(s) = \sum_{k=1}^n Z_k(s)$

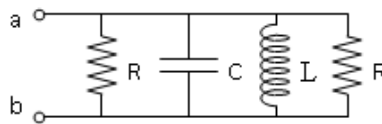
Exemple



Impedància resultant entre a i b: $Z(s) = 2R + Ls + \frac{1}{Cs}$

- Impedàncies en paral·lel: $Z^{-1}(s) = \sum_{k=1}^n Z_k^{-1}(s) \Rightarrow Y(s) = \sum_{k=1}^n Y_k(s)$

Exemple



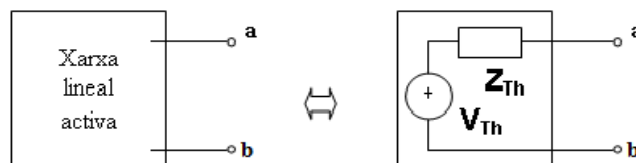
Admitància resultant entre a i b:

$$Y(s) = \frac{2}{R} + Cs + \frac{1}{Ls} \Rightarrow Z(s) = \frac{RLs}{2Ls + RLCs^2 + R}$$

La impedància complexa permet generalitzar eines de gran interès per a l'anàlisi dels circuits, com els *equivalents de Thévenin i Norton*, que es presenten a continuació i es tracten amb una mica més de detall a l'annex 2.

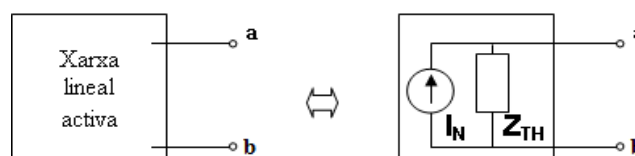
Teorema de Thévenin: qualsevol circuit lineal actiu amb sortides *a* i *b* (i sense cap font controlada per una variable externa al circuit) pot substituir-se per una font de tensió V_{Th} en sèrie amb una impedància Z_{Th} de manera que:

- V_{Th} és la tensió que es pot mesurar entre els punts *a* i *b* sobre el circuit original deixats en circuit obert.
- Z_{Th} és la impedància d'entrada que trobaria una font situada entre els terminals *a* i *b* amb totes les fonts independents a zero, és a dir les fonts de tensió curtcircuitades i les de corrent en circuit obert.



Teorema de Norton: qualsevol circuit lineal actiu amb sortides *a* i *b* (i sense cap font controlada per una variable externa al circuit) pot substituir-se per una font de corrent I_N en paral·lel amb una impedància Z_N de manera que:

- I_N és el corrent que circularia entre els punts *a* i *b* sobre el circuit original deixats en curtcircuit.
- Z_N és la impedància d'entrada que trobaria una font situada entre els terminals *a* i *b* amb totes les fonts independents a zero, és a dir les fonts de tensió curtcircuitades i les de corrent en circuit obert.



6 Funció de transferència d'un sistema lineal

Imaginem un sistema físic qualsevol, de manera que un estímul $v(t)$ dona com a resposta un senyal de sortida $i(t)$. Direm que el sistema és *lineal* quan l'entrada i la sortida estan relacionades per una equació diferencial lineal amb coeficients constants



que ve descrit per una equació diferencial que relaciona l'entrada (v) amb la sortida (i):

$$a_n \frac{d^n i}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} i}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{di}{dt} + a_0 i = b_m \frac{d^m v}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} v}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dv}{dt} + b_0 v$$

Si apliquem la TL es converteix en una equació algebraica

$$\begin{aligned} I(s) \{ a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0 \} - \left\{ s a_n i(0) + s^2 \left(a_n \left. \frac{di}{dt} \right|_0 + a_{n-1} i(0) \right) + \dots \right\} = \\ = V(s) \{ b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0 \} - \left\{ s b_m v(0) + s^2 \left(b_m \left. \frac{dv}{dt} \right|_0 + b_{m-1} v(0) \right) + \dots \right\} \end{aligned}$$

És a dir, la forma general de la sortida $I(s)$ és un quocient de polinomis en s on les condicions inicials sobre l'entrada, CIV, i sobre la sortida, CII, apareixen també en forma polinomial:

$$I(s) = \frac{P(s)V(s) - CIV(s) + CII(s)}{Q(s)}$$

Si suposem que les condicions inicials són nul·les, llavors

$$I(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} V(s)$$

on definim $T(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$ com la *funció de transferència del sistema*

$$T(s) \equiv \left. \frac{\text{sortida}}{\text{entrada}} \right|_{\text{c.i. nul·les}} = \left. \frac{I(s)}{V(s)} \right|_{\text{c.i. nul·les}}$$

Aquesta funció és una característica pròpia del sistema, i és independent del senyal d'entrada. Si les c.i. són nul·les, el coneixement de $T(s)$ ens dona $i(t)$ per a qualsevol senyal d'entrada $v(t)$, i.e.

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ I(s) \} = \mathcal{L}^{-1} \{ T(s) V(s) \},$$

on $T(s)$ és coneguda i $V(s)$ és la transformada de $v(t)$. Recordem que podem generalitzar el cas de condicions inicials no nul·les si les tenim en compte en forma de fonts independents.

Centrem-nos de nou en el quocient $P(s)/Q(s)$, on $\text{grad } P \leq \text{grad } Q$ ja que en cas contrari s'obtenen funcions que creixen indefinidament (sistemes inestables). Realitzem un desenvolupament en fraccions parcials. Per a un sistema electrònic, $Q(s)$ és sempre un polinomi amb coeficients reals. Per tant, les arrels complexes apareixeran en parells conjugats. Podem escriure

$$Q(s) = a_0 \prod_{j=1}^n (s - s_j),$$

on les s_j s'anomenen *pols de la funció de transferència*. Se'n poden establir tres casos:

a) **Arrels reals i simples.** En aquest cas els numeradors sempre són reals i es té:

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{a_0 \prod_{j=1}^n (s - s_j)} = \sum_{j=1}^n \frac{K_j}{s - s_j}$$

Una vegada avaluats els K_j , l'antitransformada d'un terme genèric és:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K_j}{s - s_j} \right\} = K_j \exp(s_j t)$$

I cada arrel real simple del denominador dóna un terme d'aquest tipus.

b) **Si l'arrel s_i té multiplicitat r** els numeradors també són reals:

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \sum_{j \neq i} \frac{K_j}{s - s_j} + \frac{K_{i1}}{s - s_i} + \frac{K_{i2}}{(s - s_i)^2} + \dots + \frac{K_{ir}}{(s - s_i)^r}$$

L'antitransformada és del tipus

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K_{ir}}{(s - s_i)^r} \right\} = \frac{K_{ir}}{(r-1)!} t^{r-1} \exp(s_i t)$$

c) **Si existeix un parell conjugat complex** apareixen numeradors imaginaris:

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{Q'(s)(s - (\alpha + j\omega))(s - (\alpha - j\omega))} = \frac{K_1}{s - (\alpha + j\omega)} + \frac{K_1^*}{s - (\alpha - j\omega)} + \dots$$

on K_1^* és el complex conjugat de K_1 . L'antitransformada d'aquest tipus de termes és:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K_1}{s - (\alpha + j\omega)} \right\} = K_1 \exp(\alpha t) \exp(j\omega t)$$

és a dir, una funció periòdica esmorteïda.

El teorema del *desenvolupament de Heaviside* estableix un mètode general per al càlcul dels K_i .

En el cas d'arrels simples:

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{K_1}{s - s_1} + \frac{K_2}{s - s_2} + \dots + \frac{K_n}{s - s_n}$$

Si en el càlcul del terme K_i es multipliquen totes per $(s - s_i)$ i es fa $s = s_i$, s'obté aquest coeficient, i.e.

$$K_i = \left[(s - s_i) \frac{P(s)}{Q(s)} \right]_{s=s_i}$$

En el cas d'arrels múltiples es pot demostrar que:

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{K_{j1}}{s - s_j} + \frac{K_{j2}}{(s - s_j)^2} + \dots + \frac{K_{jr}}{(s - s_j)^r} \quad \text{on} \quad K_{jn} = \frac{1}{(r-n)!} \frac{d^{r-n}}{ds^{r-n}} \left[\frac{P(s)}{Q(s)} (s - s_j)^r \right]_{s=s_j}$$

Exemple. Trobar la resposta temporal d’un sistema descrit per la relació següent

$$I(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{s+2}{(s+1)^2(s+3)} = \frac{K_{11}}{s+1} + \frac{K_{12}}{(s+1)^2} + \frac{K_2}{s+3}$$

Comencem pel terme de multiplicitat 1:

$$K_2 = \left. \frac{s+2}{(s+1)^2} \right|_{s=-3} = -\frac{1}{4}$$

Multiplicant per $(s+1)^2$

$$\frac{s+2}{s+3} = K_{11}(s+1) + K_{12} + \frac{(s+1)^2}{s+3} K_2 \quad (*)$$

$$K_{12} = \left. \frac{s+2}{(s+3)} \right|_{s=-1} = \frac{1}{2}$$

K_{11} es determina derivant (*):

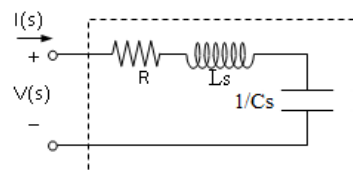
$$\left. \frac{(s+3) - (s+2)}{(s+3)^2} \right|_{s=-1} = K_{11} + K_2 \left. \frac{d}{ds} \left[\frac{(s+1)^2}{s+3} \right] \right|_{s=-1}$$

el terme que acompanya K_2 desapareix en avaluar per a $s = -1$, atès que un terme $(s+1)$ segueix sent comú a tots els termes del numerador.

Per tant, $K_{11} = \frac{1}{4}$ i $I(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{1/4}{s+1} + \frac{1/2}{(s+1)^2} + \frac{-1/4}{s+3}$.

I el senyal de sortida a l’espai temporal és: $i(t) = \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{2}te^{-t} - \frac{1}{4}e^{-3t}$.

Les funcions de transferència possibles depenen de la topologia concreta de cada xarxa. Així, les xarxes es poden classificar segons les connexions que tenen amb el circuit exterior. Normalment, les xarxes tenen dues connexions (entrada/sortida) i s’anomenen **xarxes de dos ports**, i és en aquest context que s’utilitzen les funcions de transferència. Ocasionalment pot faltar alguna de les connexions a l’exterior, i llavors s’anomena **xarxa d’un port**.



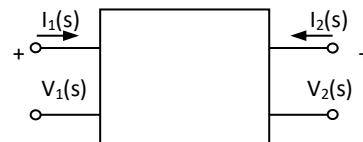
Xarxa d’un port: Només hi ha una intensitat i una tensió. Per tant, la impedància de la xarxa, $Z(s) = V(s)/I(s)$, o la seva inversa, l’admitància $Y(s)$, són les úniques funcions de xarxa possibles.

Al cas de la figura $Z(s) = R + Ls + \frac{1}{Cs} = L \frac{s^2 + R/Ls + 1/LC}{s}$

Xarxa de dos ports

Les funcions de transferència possibles són:

- a. D’entrada: Impedància $Z_i = V_1/I_1$ Admitància $Y_i = I_1/V_1$
- De sortida: Impedància $Z_o = V_2/I_2$ Admitància $Y_i = I_2/V_2$



- b. Funcions de transferència:

Guany o amplificació de tensió	$A_V = G_{12} = V_2/V_1$	o llurs inverses:	$A_V^{-1} = G_{12}^{-1} = V_1/V_2$
Guany o amplificació de corrent	$A_I = \alpha_{12} = I_2/I_1$		$A_I^{-1} = \alpha_{12}^{-1} = I_1/I_2$
Transimpedància	$Z_{12} = V_2/I_1$		$Y_{21} = I_1/V_2$
Transadmitància	$Y_{12} = I_2/V_1$		$Z_{21} = V_1/I_2$

Per estudiar un circuit i calcular-ne la funció de transferència i la resposta a una excitació arbitrària:

- a) Es determina la xarxa transformada, és a dir, s'assigna a cada element la seva impedància equivalent: R , $1/Cs$ o Ls i $V_i(s)$.
- b) Es resol el circuit segons les lleis de Kirchoff. Obtindrem una relació del tipus:

$$V_o = T(s) \cdot V_i(s)$$

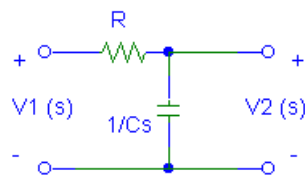
\uparrow \uparrow \uparrow
SORTIDA **ENTRADA**
FUNCIO DE TRANSFERÈNCIA

- c) La dependència temporal del senyal de sortida $v_o(t)$ ve donada per l'antitransformada de $V_o(s)$.

Observem que la funció de transferència del sistema coincideix amb la sortida (és a dir, constitueix la resposta del sistema) quan $V_i(s) = 1$, i.e. quan $v_i(t) = \delta(t)$, és a dir $T(t)$ és la resposta d'una excitació del tipus delta de Dirac.

Exemples de funcions de transferència:

1. Divisor de tensió: Quan no hi ha corrent en els terminals de sortida:

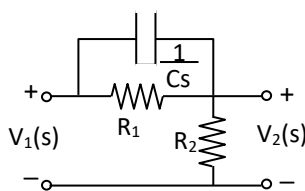


$$\begin{cases} RI(s) + \frac{I(s)}{Cs} = V_1(s) \\ \frac{I(s)}{Cs} = V_2(s) \end{cases} \Rightarrow G_{12}(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{1/RC}{s + 1/RC}$$

i l'admitància d'entrada és $Y_{11}(s) = \frac{I(s)}{V_1(s)} = \frac{1}{R s + 1/RC}$

S'anomena *divisor de tensió* perquè V_2 és sempre més petit que (i proporcional a) V_1 en xarxes passives. No produeix amplificació.

2. Un altre divisor de tensió: La impedància equivalent del condensador i de R_1 és

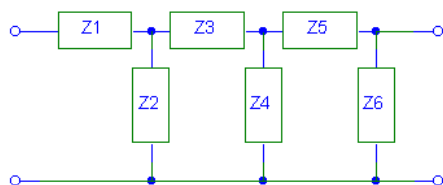


$$Z_{eq} = \frac{1}{Cs} \parallel R_1 = \frac{R_1}{R_1 Cs + 1}$$

I la funció de transferència es converteix en

$$\frac{V_2}{V_1} = G_{12}(s) = \frac{s + 1/R_1 C}{s + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}}$$

3. Xarxes escala: Cadascuna de les impedàncies pot ser combinació d'altres. Es pot demostrar que la impedància d'entrada és



$$Z = Z_1 + \frac{1}{Y_2 + \frac{1}{Z_3 + \frac{1}{Y_4 + \frac{1}{Z_5 + \frac{1}{Y_6}}}}}$$

que és una fracció continua.

Exemple

L'interruptor es tanca per a $t = 0$. Cal trobar $i_2(t)$. Valors:

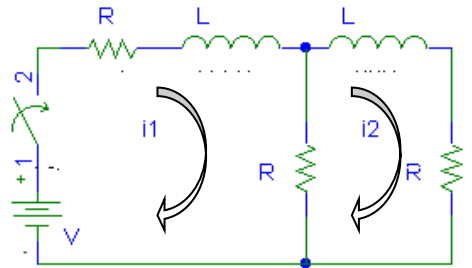
$$R = 10 \, \Omega$$

$$L = 1 \, \text{H}$$

$$V = 100 \, \text{V}$$

Les equacions de malles per al circuit transformat s'escriuen:

$$\begin{cases} (Ls + 2R)I_1(s) - RI_2(s) = \frac{V}{s} \\ (Ls + 2R)I_2(s) - RI_1(s) = 0 \end{cases}$$



Posant els valors:

$$\begin{cases} (s + 20)I_1(s) - 10I_2(s) = \frac{100}{s} \\ -10I_1(s) + (s + 20)I_2(s) = 0 \end{cases}$$

Aïllant $I_2(s)$ (pel mètode de Kramer):

$$I_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} s + 20 & 100/s \\ -10 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s + 20 & -10 \\ -10 & s + 20 \end{vmatrix}} = \frac{1000}{s(s^2 + 40s + 300)}$$

Desenvolupant en fraccions parcials es té:

$$\frac{1000}{s(s + 10)(s + 30)} = \frac{3.33}{s} - \frac{5}{s + 10} + \frac{1.67}{s + 30}$$

I la transformació inversa de Laplace dóna:

$$i_2(t) = 3.33 - 5e^{-10t} + 1.67e^{-30t}$$

6.1 Funcions de xarxa: pols i zeros

Hem vist que la funció de transferència d'un sistema lineal és la magnitud que relaciona l'entrada amb la sortida en l'espai de Laplace. La sortida, llavors, és el producte de la funció de transferència per l'entrada. La seva expressió s'anomena **funció de xarxa**, i descriu la resposta de la xarxa a una excitació determinada.

Com s'ha vist, totes les funcions de xarxa tenen la forma d'un quocient de polinomis en s , que es pot factoritzar de la manera següent:

$$\text{sortida} = N(s) = H \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_n)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_m)}$$

on H és una constant o factor d'escala; z_i , p_i són freqüències complexes, i són respectivament els **zeros** i **pols** de la funció de xarxa. Si considerem pols i zeros en el ∞ , una funció de xarxa té el mateix nombre de zeros que de pols. Analitzem el significat de pols i zeros.

Imaginem una funció de transferència del tipus guany de tensió, tal que:

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = G_{12}(s) \quad \text{ó} \quad V_o(s) = G_{12}(s) \cdot V_i(s)$$

Per entendre la resposta temporal es factoritzava primer la funció de xarxa $V_o(s)$:

$$V_o(s) = G_{12}(s) \cdot V_i(s) = \sum_{j=1}^u \frac{K_j}{s - p_j} + \sum_{k=u+1}^m \frac{K_k}{s - p_k}$$

on p_j són els pols de G_{12} i p_k els de V_i , suposant multiplicitat 1. La resposta temporal és:

$$v_o(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G_{12}(s)V_i(s)\} = \sum_{j=1}^u K_j \exp(p_j t) + \sum_{k=u+1}^m K_k \exp(p_k t)$$

Les freqüències complexes p_j determinen les oscil·lacions lliures o freqüències naturals del sistema, mentre que les freqüències p_k determinen les freqüències complexes de la força d'excitació que corresponen a oscil·lacions forçades.

(1) **Pols:** determinen la resposta en funció del temps.

(2) **Zeros:** determinen les constants K_i i, per tant, la magnitud de cada part de la resposta.

Analitzem en detall un dels termes de la resposta:

$$K_a \exp(p_a t) = K_a \exp(\sigma_a t) \exp(j\omega_a t)$$

Si es combina amb el terme resultant de p_a^* s'obté: $|K_a| \exp(\sigma_a t) \sin(\omega_a t + \theta_a)$.

Perquè la resposta sigui **estable** (limitada temporalment), ha de ser $\sigma_a < 0$. Per tant, els pols han d'estar situats a la meitat esquerra del pla complex s . Els pols poden estar a l'eix imaginari a condició que siguin simples. La raó d'això és que pols d'ordre n donen respostes que creixen segons t^{n-1} .

Per als zeros no hi ha restriccions. No obstant això, en les xarxes d'un sol port, pel caràcter intercanviable de Z , Y , els zeros compleixen les mateixes condicions que els pols.

6.2. Anàlisi sinusoidal d'estat permanent

Sovint, l'excitació d'un circuit és de tipus sinusoidal (corrent altern o AC). Amb excitacions d'aquest tipus, tots els corrents i voltatges de la xarxa seran sinusoidals en l'estat permanent (oscil·lació forçada, solució particular de l'equació diferencial lineal), sempre que es tracti de sistemes lineals. Vegem-ho:

Imaginem un sistema amb funció de transferència $Y(s)$, excitació $V(s)$ i resposta $I(s)$:

$$I(s) = Y(s) \cdot V(s)$$

Si $v(t) = V_1 \cdot \sin \omega_1 t$, $V(s) = V_1 \frac{\omega_1}{s^2 + \omega_1^2}$ i $I(s) = Y(s)V_1 \frac{\omega_1}{s^2 + \omega_1^2} = Y(s)V_1 \frac{\omega_1}{(s + j\omega_1)(s - j\omega_1)}$.

Si p_j són els n pols simples de $Y(s)$, $I(s) = \frac{K_1}{s - p_1} + \dots + \frac{K_n}{s - p_n} + \frac{K_{j\omega_1}}{s - j\omega_1} + \frac{K_{-j\omega_1}}{s + j\omega_1}$.

Aplicant el mètode de Heaviside,

$$\begin{aligned} s - j\omega_1 &\Rightarrow K_{j\omega_1} = Y(j\omega_1)V_1 \frac{\omega_1}{2j\omega_1} = |Y_1| e^{j\phi} \frac{V_1}{2j} \\ s + j\omega_1 &K_{-j\omega_1} = Y(-j\omega_1)V_1 \frac{\omega_1}{-2j\omega_1} = |Y_1| e^{-j\phi} \frac{V_1}{-2j} \end{aligned}$$

on hem escrit $Y(j\omega_1) = |Y_1| e^{j\phi}$ i $Y(-j\omega_1) = |Y_1| e^{-j\phi} = Y^*(j\omega_1)$.

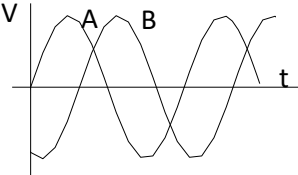
Substituint a l'expressió de $I(s)$ i sumant, el terme queda $\frac{V_1 |Y_1|}{2j} \left(\frac{e^{j\phi}}{s - j\omega} - \frac{e^{-j\phi}}{s + j\omega} \right)$ i la transformada inversa és

$V_1 |Y_1| \sin(\omega_1 t + \phi)$, i sumant-li la contribució dels altres pols:

$$i(t) = K_1 e^{p_1 t} + \dots + K_n e^{p_n t} + V_1 |Y_1| \sin(\omega_1 t + \phi),$$

on els termes amb exponencials corresponen al *règim transitori* i el darrer terme al *règim permanent*.

Observem que la resposta permanent està relacionada amb la magnitud i la fase de $Y(j\omega_1)$. Per tant, la resposta en estat permanent es determina fent $s = j\omega$ a la funció de transferència. En definitiva, l'estat permanent és sinusoidal quan la classe de funcions descrites per l'exponencial est (s variable complexa) tenen **part real nul·la**, és a dir, $s = j\omega$, $s = -j\omega$. És l'anàlisi dels corrents alterns.

Definicions		
SINUSOIDE:	$v(t) = V \sin(\omega t + \varphi)$	
V: valor màxim	ω : freqüència angular [s ⁻¹]	T: període [s]
V _{p-p} : 2V (tensió de pic a pic)	$\omega = 2\pi f = 2\pi/T$	f = 1/T : freqüència [Hz]
	V_{rms} = valor quadràtic mitjà $V_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [v(t)]^2 dt} = \frac{V}{\sqrt{2}}$ que és la que donen els multímetres.	
	φ : fase (origina un desplaçament de l'ona)	

L'ona B té el màxim després \Rightarrow està retardada respecte A ($\varphi < 0$)

$$v_B = v_o \sin(\omega t + \varphi)$$

En estat permanent sinusoidal, les impedàncies dels elements passius s'escriuen:

$$R \rightarrow Z_R = R$$

$$C \rightarrow Z_C = \frac{1}{j\omega C}$$

$$L \rightarrow Z_L = j\omega L$$

Les excitacions s'escriuen en forma complexa: $V(j\omega) = V_o e^{j(\omega t + \phi)}$

Les respostes s'obtenen també de manera complexa: $I(j\omega) = I_o e^{j(\omega t + \phi)}$

I finalment $i(t) = \text{Im}[L^{-1}[I(j\omega)]]$ si l'excitació era un *sin*, o $i(t) = \text{Re}[L^{-1}[I(j\omega)]]$ si era un *cos*.

7 Gràfiques de la resposta en freqüència. Diagrames de Bode

Les gràfiques de la resposta en freqüència pretenen visualitzar ràpidament el comportament dels sistemes segons la freqüència. Es restringeixen al comportament permanent sinusoidal de les xarxes. Si $T(s)$ és la funció de transferència, la resposta en freqüència ve determinada per:

$$T(j\omega) = |T(j\omega)| e^{j\theta(\omega)}$$

La funció de transferència en funció de ω es representa mitjançant el diagrama de Bode, que és una representació logarítmica del guany en decibels. Definicions prèvies:

Octava: Canvi de freqüència en un factor 2.

Dècada: Canvi en freqüència en un factor 10 (un ordre de magnitud).

El guany A_p d'un amplificador de potència en **decibels** es defineix com:

$$A_p = (dB) \equiv 10 \log_{10} \frac{P_{o \text{ sortida}}}{P_{i \text{ entrada}}}$$

de manera que si la potència es multiplica per un factor 10, el guany és de 10 dB, si el factor és 100, llavors el guany és de 20 dB, etc.

Normalment treballarem amb guany de tensió, corrent, etc. Com que $P = RI^2 = \frac{V^2}{R}$, sembla lògic definir:

$$\boxed{\begin{array}{l} A_v(dB) = 20 \log |T(j\omega)| \quad \text{si} \quad T(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} \\ A_i(dB) = 20 \log |T(j\omega)| \quad \text{si} \quad T(j\omega) = \frac{I_o(j\omega)}{I_i(j\omega)} \end{array}}$$

El guany d'amplitud en l'ona sinusoidal està relacionat amb el mòdul de la funció de transferència. No obstant això, un sistema (amplificador) pot introduir també un desfasament entre l'ona d'entrada i la de sortida, que vindrà determinat per la fase de la funció de transferència. Per a un amplificador de tensió:

$$T(j\omega) \equiv A_v(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} = |A_v(j\omega)| e^{j\theta(\omega)}.$$

Llavors, $v_i(t) = v_i \cos \omega t \rightarrow v_o(t) = |A_v(j\omega)| v_i \cos(\omega t + \theta(\omega))$.

És de gran utilitat mostrar gràficament la dependència amb la freqüència de les funcions de transferència. En aquest context, els **diagrames de Bode** són les representacions:

- $|A(dB)|$ mòdul del guany en amplitud vs. $\log \omega$
- $\theta(^{\circ})$ desplaçament de fase vs. $\log \omega$

Podrem entendre el seu comportament asimptòtic a partir d'una funció de transferència general amb pols i zeros:

$$A_i(j\omega) = A_{im} \frac{j\omega + \omega_1}{j\omega + \omega_2} = A_{im} \frac{\omega_1}{\omega_2} \frac{1 + j\omega/\omega_1}{1 + j\omega/\omega_2} = |A_i| e^{j\theta}.$$

Separant-ho en mòdul i fase: $|A_i| = A_{im} \frac{\omega_1}{\omega_2} \sqrt{\frac{1 + (\omega/\omega_1)^2}{1 + (\omega/\omega_2)^2}} \quad ; \quad \theta = \arctg \frac{\omega}{\omega_1} - \arctg \frac{\omega}{\omega_2}$

i escrivint el guany en decibels

$$|A_i|_{dB} = 20 \log \left(A_{im} \frac{\omega_1}{\omega_2} \right) + 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right)^2} - 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_2} \right)^2}$$

el problema se simplifica considerablement. Només cal considerar cada terme per separat i sumar totes les contribucions:

1. El primer terme és una constant.
2. El segon terme correspon al zero de la funció de transferència, i cal tenir present que cada zero contribuirà amb un terme com aquest. Per representar-lo, considerem el seu comportament asimptòtic a freqüències molt baixes i molt altes.

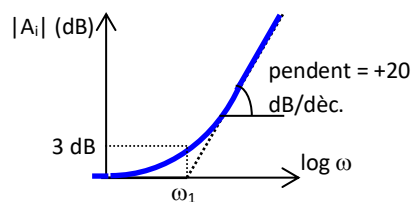
Quan $\omega \rightarrow 0$, $20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right)^2} \rightarrow 20 \log 1 = 0dB$, i l'asíptota és 0.

I quan $\omega \gg \omega_1$, $20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right)^2} \rightarrow 20 \log \sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_1} \right)^2} = 20 \log \frac{\omega}{\omega_1} dB$.

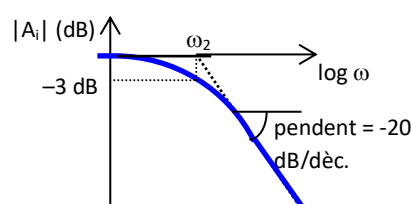
L'asíptota d'altres freqüències, quan se la representa en funció de ω en escala logarítmica, és una línia recta, de tal manera que un augment de la freqüència en una dècada implica un augment del guany en 20 dB (pendent de +20 dB/dècada). Ambdues asíptotes es tallen al punt $\omega = \omega_1$, sent ω_1 l'anomenada *freqüència de colze*. Ara bé, el comportament real de la corba en aquest punt no passa per 0 dB, sinó que val

$$20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_1}{\omega_1}\right)^2} = 20 \log \sqrt{2} \approx 3 \text{ dB}$$

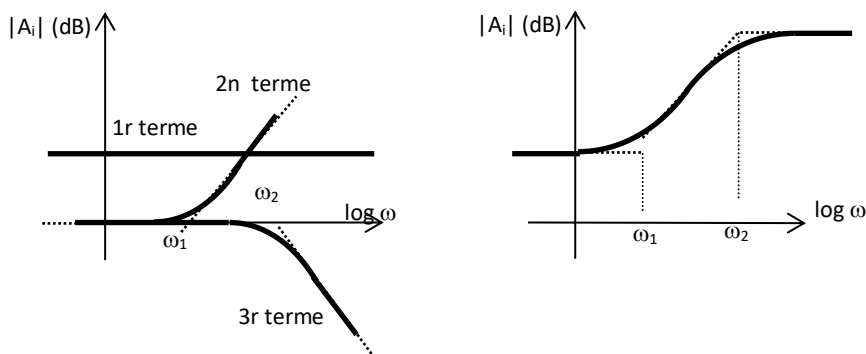
i la corba passa 3 dB per sobre de l'asíptota a la freqüència de colze.



3. El tercer terme correspon al pol de la funció de transferència, i novament cada pol contribuirà amb un terme com aquest. Quan el considerem, observem que tot el que hem dit per al cas del zero es repeteix aquí, amb l'única diferència que ara la freqüència de colze val ω_2 i el pendent per sobre d'ella és de -20 dB/dècada .



Així, les tres contribucions asimptòtiques donaran el diagrama de Bode següent:



En un circuit general, qualsevol pol simple del sistema contribuirà amb un factor $1/(s - s_p)$ a la funció de transferència. En la resposta en freqüència, cadascun d'aquests termes sumarà un factor de guany:

$$-10 \log \left[1 + \left(\frac{\omega}{|s_p|} \right)^2 \right]$$

el comportament asimptòtic del qual serà el de produir una caiguda del guany de -20 dB/dècada addicionals (sempre que estiguin prou llunyans entre ells) a partir de la freqüència de colze corresponent.

Igualment, la presència de zeros simples produeix factors del tipus $(s + s_0)$ a la funció de transferència. Cada terme contribueix a $|A_v| \text{ (dB)}$ en:

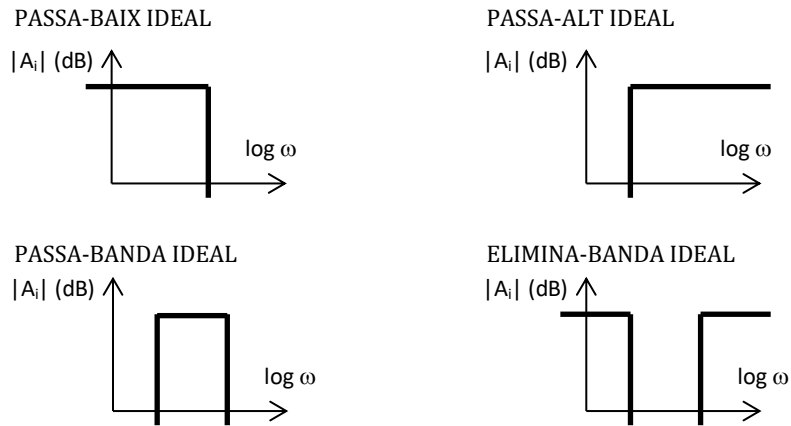
$$+10 \log \left[1 + \left(\frac{\omega}{|s_z|} \right)^2 \right]$$

Llavors, asimptòticament cada zero contribueix amb un guany de $+20 \text{ dB/dècada}$ (sempre que estiguin prou allunyats) a partir de la freqüència de colze corresponent.

En cas de trobar-se zeros o pols d'ordre dos, la modificació de pendent serà doble, triple si és d'ordre 3, etc.

Així, d'un cop d'ull es pot esbrinar el comportament en freqüència del circuit, quins rangs amplifica, quins atenua i quins transmet sense modificació, i establir la seva resposta com a filtre:

- Passa-baix** (atenuen freqüències per sobre d'un cert llindar),
- Passa-alt** (atenuen les de sota del llindar),
- Passa-banda** (només deixen passar un cert rang de freqüències) o
- Elimina-banda** (atenuen tota una banda de freqüències).



L'angle de fase de la funció de transferència també es pot trobar aproximadament gràcies a les asímptotes. Considerem primer el factor corresponent a un zero genèric de la funció de transferència (s_z real):

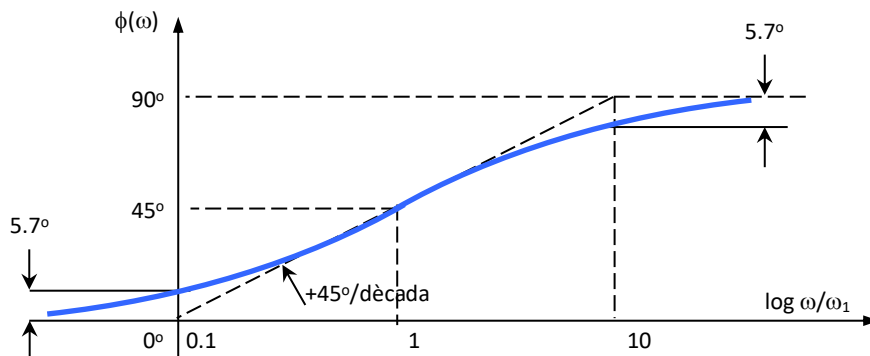
$$j\omega + s_z \equiv s_z \left(1 + j \frac{\omega}{s_z} \right) = |s_z| \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{s_z} \right)^2} e^{j\phi(\omega)}.$$

La fase del terme ve determinada per

$$\phi(\omega) = \arctg \frac{\omega}{s_z} \text{ (rad)} = \frac{180^\circ}{\pi} \arctg \frac{\omega}{s_z} = 57.3^\circ \arctg \frac{\omega}{s_z}.$$

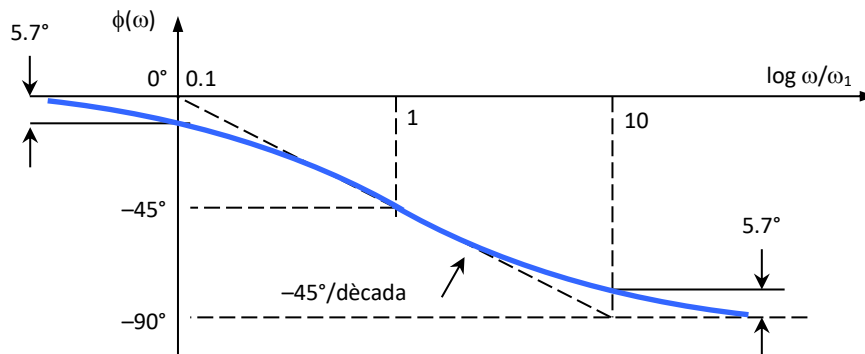
Si representem aquesta magnitud en funció de $\log \omega$, veurem que la variació aproximada és de $+45^\circ/\text{dècada}$ fins a un màxim de 90° . Llavors, es pot aproximar asimptòticament:

$$\phi = \begin{cases} 0^\circ & \omega < \omega_1/10 \\ 45^\circ \left(1 + \log \frac{\omega}{\omega_1} \right) & \omega_1/10 < \omega < 10\omega_1 \\ 90^\circ & 10\omega_1 < \omega \end{cases}$$

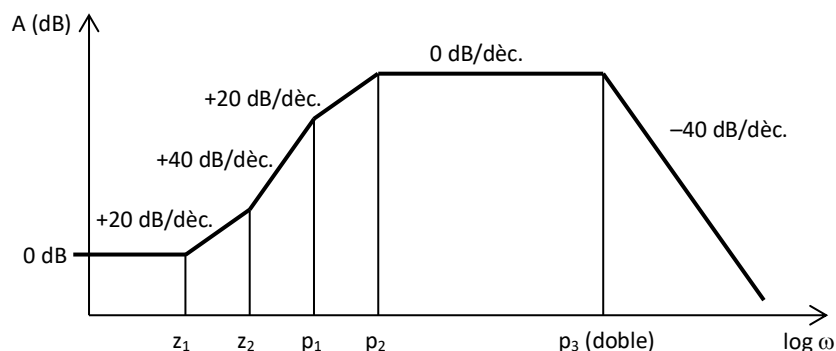


La diferència màxima entre l'aproximació lineal i la resposta exacta és de menys de 6° des de $0.1^\circ \omega_H$ fins a $10 \omega_H$.

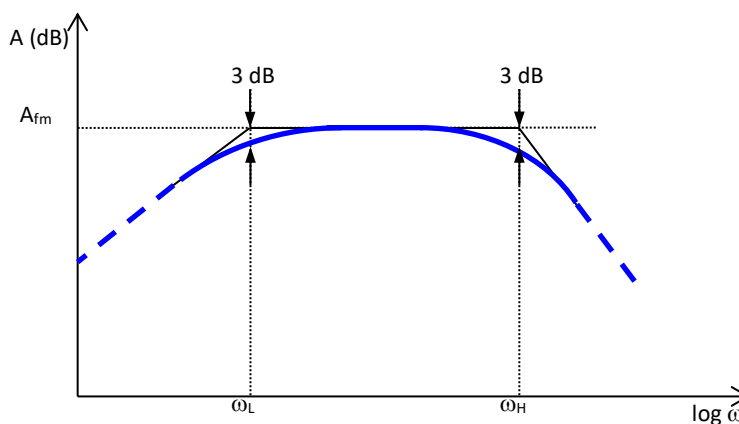
La mateixa anàlisi per a un pol dóna: $\phi(\omega) = \arctg \frac{\omega}{s_p} (rad) = -57.3^\circ \arctg \frac{\omega}{s_p}$ i per cada pol simple es té:



En resum, per traçar la resposta en freqüència d’un sistema analògic, ordenarem els pols i els zeros segons la seva freqüència i assignarem a cadascun l’increment o decrement de pendent associat segons la seva multiplicitat. Per exemple:



El diagrama de Bode genèric d’un amplificador resulta ser:



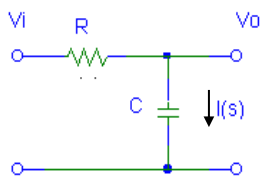
on els paràmetres d’interès són A_{fm} , guany a freqüències mitjanes, i les freqüències de tall inferior i superior, ω_L i ω_H . El rang entre una i altra s’anomena **ample de banda**, $\Delta\omega$, i és un paràmetre característic molt important del comportament en freqüència.

També ens interessaran les impedàncies d’entrada i sortida, Z_i i Z_o . Tots aquests paràmetres poden dependre de la càrrega R_L i de la resistència interna de la font, R_s .

7.1 Exemple dels filtres RC

Exemple. Filtre RC passa-baix

a) Calculem la funció de transferència:



$$I(s) = \frac{V_o(s)}{1/Cs}, \text{ llavors:}$$

$$V_i - V_o = IR; \quad V_i = RCsV_o + V_o = (1 + RCs)V_o$$

$$T(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{RCs + 1} = \frac{1/RC}{s + 1/RC} = T(s)$$

Queda clar que T(s) té un pol en $s = -1/RC$ i no té zeros (excepte per a $s = \infty$).

b) Resposta en funció de la freqüència ω .

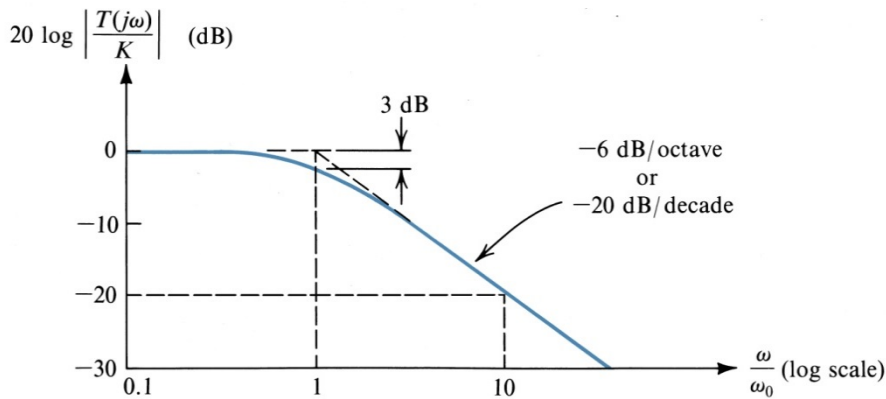
Substituïm s per $j\omega$

$$T(j\omega) = \frac{1/RC}{j\omega + 1/RC}$$

Definim $\omega_H = 1 / RC$, que se sol anomenar **freqüència de tall superior**:

$$T(j\omega) = \frac{\omega_H}{j\omega + \omega_H} = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_H}} \quad \text{i queda}$$

$$A_v (dB) = 20 \log |T(j\omega)| = 20 \log \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_H}\right)^2}} = -10 \log \left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_H}\right)^2 \right]$$



Descripció qualitativa del comportament en freqüència del circuit:

- Per a $\omega \ll \omega_H$ el condensador presenta una impedància $\frac{1}{j\omega C} \approx \infty \Rightarrow i = 0$, i llavors $V_o = V_i \Rightarrow$ el condensador és un circuit obert per a baixes freqüències.
- Per a $\omega \gg \omega_H$ la impedància va creixent i de la mateixa manera V_o disminueix. Per a freqüències molt elevades, C és un curtcircuit i $V_o \rightarrow 0$. El circuit és un filtre, però està molt lluny de tenir la resposta d'un filtre ideal.

c) Resposta a un senyal esglaió a $t = 0$.

$$v_i(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ V_i & t \geq 0 \end{cases} \quad V_i(s) = \frac{V_i}{s}$$

$$V_o(s) = T(s)V_i(s) = \frac{\omega_H}{s + \omega_H} \frac{V_i}{s} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s + \omega_H}$$

Heaviside: $K_1 = \frac{\omega_H V_i}{s + \omega_H} \Big|_{s=0} = V_i$ $K_2 = \frac{\omega_H V_i}{s} \Big|_{s=-\omega_H} = -V_i$

$$V_o(s) = \frac{V_i}{s} + \frac{-V_i}{s + \omega_H}; \quad \text{I, antittransformant:}$$

$$v_o(t) = V_i - V_i e^{-\omega_H t} = V_i (1 - e^{-\omega_H t})$$

Com més gran és ω_H , més ràpida és la resposta del filtre a l'esglaió. Es defineix el **temps de pujada** t_s (rise time) com el temps en què el senyal passa del 10 % al 90 % del seu valor final. Es demostra fàcilment que (fer-ho):

$$t_s = \frac{2.197}{\omega_H}$$

d) Resposta a un pols quadrat.

$$v_i(t) = V_i \quad 0 \leq t \leq T$$

La TL és $V_i(s) = \frac{V_i}{s} (1 - e^{-sT})$, i, tenint en compte la funció de transferència del filtre:

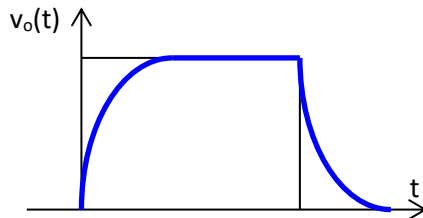
$$V_o(s) = T(s)V_i(s) = \frac{V_i}{s} \frac{\omega_H}{s + \omega_H} (1 - e^{-sT}) = \left(\frac{V_i}{s} - \frac{V_i}{s + \omega_H} \right) (1 - e^{-sT})$$

Per calcular l'antittransformada apliquem la propietat següent:

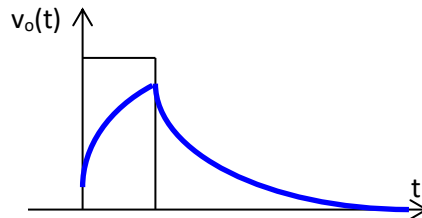
$$\mathcal{L}^{-1} [e^{-sT} F(s)] = \begin{cases} f(t-T) & t > T \\ 0 & t < T \end{cases}$$

Per tant, $v_o(t) = \begin{cases} V_i (1 - e^{-\omega_H t}) - V_i (1 - e^{-\omega_H (t-T)}) & t > T \\ V_i (1 - e^{-\omega_H t}) & t < T \end{cases}$

La funció v és contínua (com ha de ser entre els borns d'un condensador):



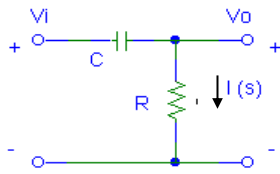
$\omega_H^{-1} \ll T$, pols ample.



Pols estret comparat amb ω_H^{-1} .

Exemple. Filtre CR passa-alt

L'anàlisi és idèntica al cas anterior.



a) Funció de transferència:

$$V_o(s) = \frac{s}{s + 1/RC} V_i(s)$$

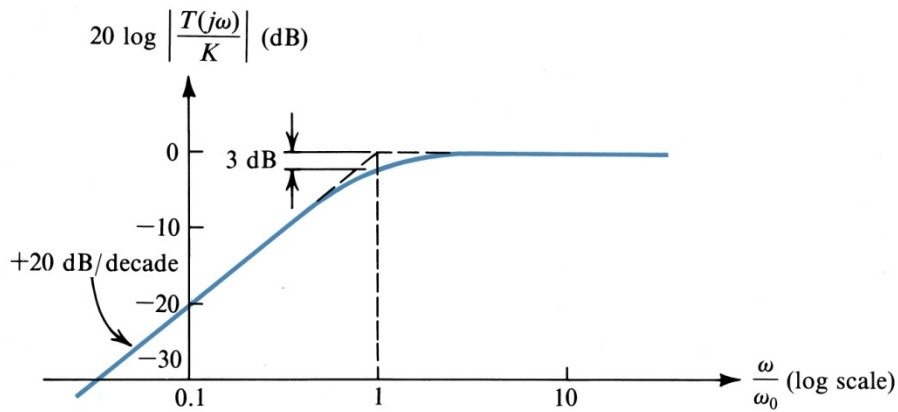
T(s) té: Un zero a $s = 0$ i un pol a $s = -1/RC$

b) Resposta en funció de ω :

$$A_v = |T(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_L}{\omega}\right)^2}}$$

amb $\omega_L = 1/RC$, **frequència de tall inferior.**

Diagrama de Bode:



El zero, present a freqüència 0, produeix un pendent positiu de +20 dB/dècada. En el filtre passa-alt, els +20 dB/dècada inicials queden «neutralitzats» pels -20 dB/dècada del pol a ω_L . Quant a la fase, en el filtre passa-alt, en tenir un zero a l'origen, el desfasament és inicialment de $+90^\circ$ per a $\omega = 0$. En l'entorn del pol ω_L , la fase decreix -45° per dècada, per acabar sent finalment 0 per a $\omega = \infty$.

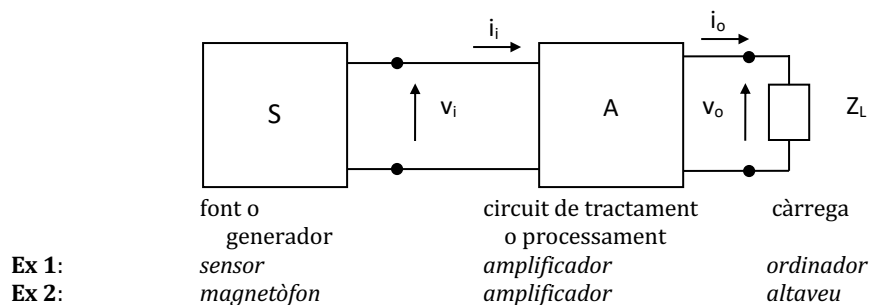
c) La resposta a un senyal esglaió és: $v_o(t) = v_i e^{-\omega_L t}$.

8 Esquema general d’un sistema analògic

Així, doncs, resumim el capítol en la generació del que podria ser el model general de qualsevol sistema analògic, on detallarem el comportament de cadascun dels elements que hi prenen part.

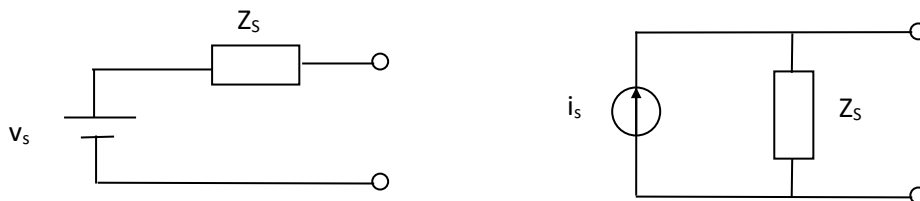
Un sistema analògic general estarà compost de tres parts fonamentals: la font que proporcioni energia o senyal al sistema, un circuit de processament del senyal capaç de modificar aquesta energia i una càrrega que l’aprofiti per produir un resultat. Un exemple típic del camp de la física podria ser un sistema de detecció de partícules, on el sensor generarà un senyal elèctric molt petit en rebre l’impacte d’un muó, un circuit amplificador tornarà aquest senyal mesurable i l’enviarà cap a l’ordinador que enregistra el moment i la localització de l’impacte.

Un altre exemple més quotidià el tindríem en un equip de Hi-Fi, on el tocadiscos actuaria com a font de senyal (captant energia de la xarxa per llegir els solcs de l’LP), a continuació s’hi connecta l’amplificador que permet modular cada freqüència en major o menor grau, i finalment la càrrega són els altaveus, que transformen l’energia elèctrica amplificada en so.



Modelitzem ara cada subcircuit per separat:

1. Les fonts de tensió o de corrent reals són xarxes d’un sol port que tenen una resistència interna no nul·la. Les podem representar per:

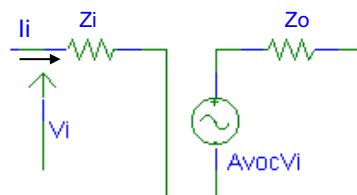


Fins i tot en el cas que internament la font sigui més complicada (efectes capacitius o inductius), pels teoremes de Thévenin i Norton es pot establir que el seu comportament serà a tots els efectes equivalent al proporcionat per l’anterior descripció.

2. El circuit de tractament del senyal (ens centrarem en l’amplificació) és una xarxa de dos ports, que es pot caracteritzar per:

- La seva funció de transferència: $A_I = \frac{i_o}{i_i}$, $A_V = \frac{v_o}{v_i}$.
- Les seves impedàncies d’entrada Z_i i de sortida Z_o .

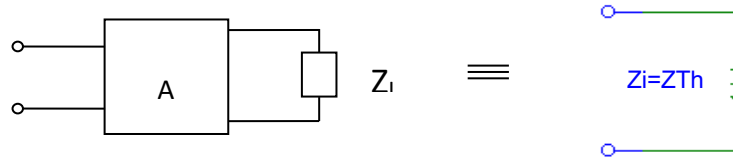
El circuit de processament A es pot substituir pel circuit lineal següent:



A_{voc} : guany de tensió de l’amplificador amb la sortida en circuit obert

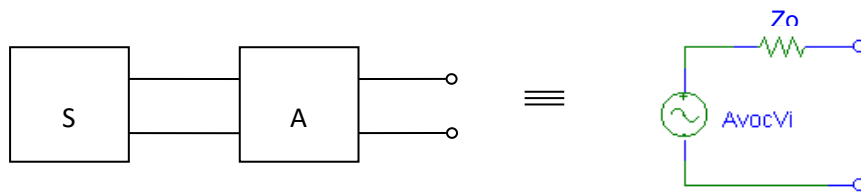
Vegem-ho:

D'una banda, el model ens diu que el circuit vist des de l'entrada és equivalent, amb caràcter general, a una impedància d'entrada Z_i .



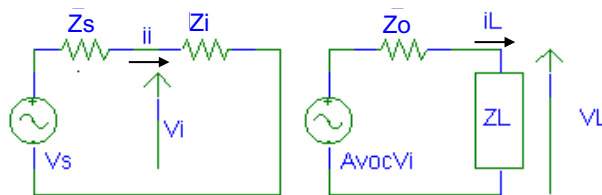
Això és una conseqüència del teorema de Thévenin. En efecte, $V_{Th} = 0$, ja que no tenim cap font de tensió. Queda clar que Z_i depèn de Z_L .

D'altra banda, el model també ens diu que, des dels terminals de sortida, equival a una font de tensió en sèrie amb una impedància de sortida Z_o ,



on s'ha aplicat de nou el teorema de Thévenin. $A_{voc} = v_o/v_i$ és el guany de tensió de l'amplificador amb sortida en circuit obert ($Z_L \rightarrow \infty$). És una constant, ja que hem suposat el sistema lineal.

Llavors, el sistema global es pot modelitzar com:

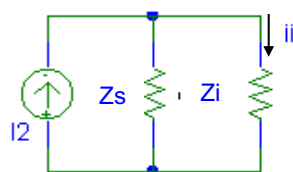


$$\text{L'amplificació en la càrrega és } A_V \equiv \frac{v_L}{v_i} = \frac{i_L Z_L}{v_i} = \frac{A_{voc} v_i}{Z_L + Z_0} Z_L = A_{voc} \frac{Z_L}{Z_L + Z_0}.$$

Si tenim en compte la resistència interna de la font:

$$A_{VS} \equiv \frac{v_L}{v_s} = \frac{v_L}{v_i} \frac{v_i}{v_s} = A_V \frac{Z_i}{Z_i + Z_s}.$$

Anàlogament, l'amplificació de corrent és:



$$A_i \equiv \frac{i_L}{i_s} = \frac{A_{voc} v_i}{Z_0 + Z_L} \frac{1}{v_i/Z_i} = A_{voc} \frac{Z_i}{Z_0 + Z_L}$$

$$A_{IS} \equiv \frac{i_L}{i_s} = \frac{i_L}{i_i} \frac{i_i}{i_s} = A_i \frac{Z_s}{Z_s + Z_i}$$

on ara hem aplicat el teorema de Norton per a la font.

Amplificació de l'amplificador tot sol = A_{VOC}

$$A_V \equiv \frac{v_L}{v_i} = A_{VOC} \frac{Z_L}{Z_L + Z_o} \quad A_{V/S} \equiv \frac{v_L}{v_s} = A_V \frac{Z_i}{Z_i + Z_s}$$

$$A_I \equiv \frac{i_L}{i_i} = A_{VOC} \frac{Z_i}{Z_i + Z_n} \quad A_{I/S} \equiv \frac{i_L}{i_e} = A_I \frac{Z_s}{Z_i + Z_e}$$

Amb això hem expressat tot el sistema A utilitzant simplement els paràmetres següents: $Z_s, Z_i, Z_o, A_{VOC}, Z_L$. Per tant, per complicats que siguin els sistemes lineals, el seu efecte sobre un senyal és molt senzill de calcular un cop coneguts aquests paràmetres.

Ara bé, de les expressions anteriors queda clar que la sortida d'un sistema es pot veure afectada per la impedància d'entrada del que hi connectem al darrere, i això en general no interessa. Per tant, pren rellevància la necessitat d'adaptar les impedàncies de sortida del primer i d'entrada del segon per minimitzar les modificacions incontrolades. Això és el que es presenta en aquest darrer apartat.

8.1. Adaptació d'impedàncies

Donat un sistema lineal analògic, pot interessar amplificar qualsevol dels paràmetres fonamentals del circuit. Segons l'interès, es pot optimitzar d'una o altra forma.

- a) *Tractament d'un senyal de tensió*: interessa que A_V sigui màxim. De les expressions deduïdes a l'apartat anterior es pot veure que convé tensió màxima a la sortida ($Z_L \gg Z_o$) i a l'entrada ($Z_i \gg Z_s$), així com màxima amplificació (A_{VOC}).

Per tant, l'amplificador de tensió ideal és aquell que té:

$$Z_i \rightarrow \infty$$

$$Z_o \rightarrow 0$$

$$A_{VOC} \gg 1$$

- b) *Tractament d'un senyal de corrent*: anàlogament, de les expressions anteriors A_I serà màxim quan el corrent a la sortida sigui màxim ($Z_L \ll Z_o$) i també a l'entrada ($Z_i \ll Z_s$).

Per tant, l'amplificador de corrent ideal tindrà:

$$Z_i \rightarrow 0$$

$$Z_o \rightarrow \infty$$

$$A_{VOC} \gg 1$$

- c) *Guany de potència*: ens interessa que la potència subministrada a la càrrega Z_L sigui màxima, en relació amb la total subministrada per la font.

$$P_L = Z_L I_L^2 = \left(\frac{A_{VOC} v_i}{Z_o + Z_L} \right)^2 Z_L = (A_{VOC} v_i)^2 \frac{Z_L}{(Z_o + Z_L)^2}$$

- D'una banda, P_L serà màxima quan v_i sigui màxima $\Leftrightarrow Z_i \gg Z_s$

- D'altra banda, $\frac{dP_L}{dZ_L} = (A_{VOC} v_i)^2 \left[-\frac{2Z_L}{(Z_o + Z_L)^3} + \frac{1}{(Z_o + Z_L)^2} \right] = 0$

$$\Leftrightarrow Z_o = Z_L$$

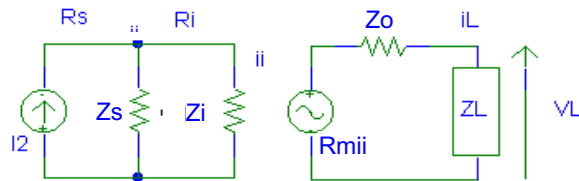
La màxima transferència de potència a la càrrega s'obté quan la impedància de sortida de l'amplificador iguala la càrrega, i l'amplificador ideal de potència té:

$$Z_i \rightarrow \infty$$

$$Z_o \rightarrow Z_L$$

$$A_{VOC} \gg 1$$

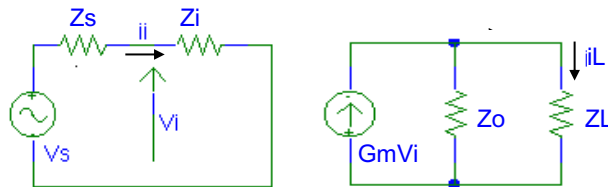
- d) *Adaptador d'impedàncies per a corrent (seguidor de corrent)*: suposem que S és una font de corrent amb Z_s massa petita. Si interposem entre ella i la càrrega un circuit A tal que $Z_i \rightarrow 0, Z_o \rightarrow \infty, A_{IOC} = 1$, la convertim en una font de corrent òptima.
- e) *Adaptador d'impedàncies per a tensió (seguidor de tensió)*: anàlogament, si es té una font de tensió S amb Z_s massa gran, interposant-hi un circuit A tal que $Z_i \rightarrow \infty, Z_o \rightarrow 0, A_{VOC} = 1$ la convertim en una font ideal de tensió.
- f) *Amplificador de transimpedància (convertidor corrent-tensió)*: apliquem l'equivalent de Norton a la font S i el de Thévenin a l'amplificador A.



on R_m és el guany de transimpedància. El guany v_L/i_s del convertidor serà màxim quan v_L sigui màxim a la sortida ($Z_o \ll Z_L$) i i_i a l'entrada ($Z_i \ll Z_s$). Per tant, l'amplificador de transimpedància ideal té:

$$\begin{aligned} Z_i &\rightarrow 0 \\ Z_o &\rightarrow 0 \\ R_m &\gg 1. \end{aligned}$$

- g) *Amplificador de transconductància (convertidor tensió-corrent)*: anàlogament, apliquem l'equivalent de Thévenin a la font S i el de Norton a l'amplificador A; G_m és el guany de transconductància.



L'amplificador ideal té, en aquest cas:

$$\begin{aligned} Z_i &\rightarrow \infty \\ Z_o &\rightarrow \infty \\ G_m &\gg 1. \end{aligned}$$

La importància pràctica d'aquests efectes és molt gran, i limita les prestacions dels sistemes si no es té correctament en compte. Als pròxims temes, especialment al d'electrònica analògica, en tindrem més exemples. De moment, el que cal és introduir els sistemes no lineals i la forma de treballar-hi.

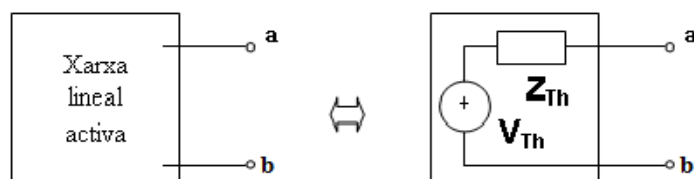
9 Corol·lari. Teoremes fonamentals: Thévenin, Norton i superposició

Quan l’interès se centra en una part del circuit, la resta pot ser substituïda amb avantatge per una xarxa equivalent simple que es comporti igual. Identifiquem les dues parts en qüestió com a subxarxes A i B. Llavors, el resultat d’actuar sobre B (o càrrega, perquè aprofita l’energia aportada per A) és aplicar-li una tensió v i injectar-li un corrent i . Si la subxarxa A és lineal pot ser substituïda per un conjunt d’elements lineals equivalents de manera que continui actuant de la mateixa forma sobre B. Aquest equivalent lineal es pot determinar utilitzant el teorema de Thévenin o el seu dual, el teorema de Norton.

Teorema de Thévenin:

Qualsevol circuit lineal actiu amb sortides a i b (i sense cap font controlada per una variable externa al circuit) pot substituir-se per una font de tensió V_{Th} en sèrie amb una impedància Z_{Th} de manera que:

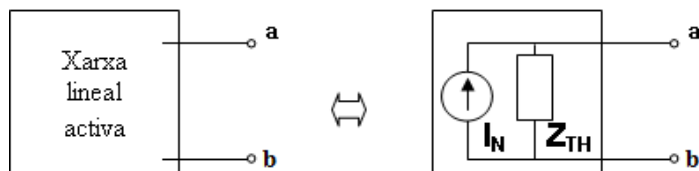
- V_{Th} és la tensió que es pot mesurar entre els punts a i b sobre el circuit original deixats en circuit obert.
- Z_{Th} és la impedància d’entrada que trobaria una font situada entre els terminals a i b amb totes les fonts independents a zero, és a dir les fonts de tensió curtcircuitades i les de corrent en circuit obert.



Teorema de Norton:

qualsevol circuit lineal actiu amb sortides a i b (i sense cap font controlada per una variable externa al circuit) pot substituir-se per una font de corrent I_N en paral·lel amb una impedància Z_N de manera que:

- I_N és el corrent que circularia entre els punts a i b sobre el circuit original deixats en curtcircuit.
- Z_N és la impedància d’entrada que trobaria una font situada entre els terminals a i b amb totes les fonts independents a zero, és a dir les fonts de tensió curtcircuitades i les de corrent en circuit obert.

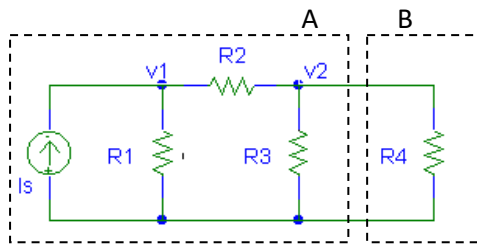


Exercici.

Demostrar el teorema de Norton a partir del teorema de Thévenin per a una xarxa A actuant sobre una resistència de càrrega R_L :

$$\begin{cases} Z_{Th} = Z_N \\ I_N = \frac{V_{Th}}{Z_{Th}} \end{cases}$$

Exemple



Valors:

$R1 = 1 \Omega$

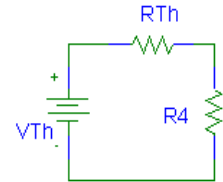
$R2 = 1 \Omega$

$R3 = 2/5 \Omega$

R4 és la resistència de càrrega.

Ens proposem substituir tota la xarxa a l'esquerra (A) pel seu equivalent Thévenin, de manera que el circuit se simplifiqui a:

$$R_{Th} = 1/3 \Omega \quad V_{Th} = i_s/6 \Omega^{-1} \quad i \quad V_{Th} = i_s/6 \Omega^{-1}$$



El voltatge de la xarxa A en el circuit obert és v_2 .

$$\begin{cases} i_s = \frac{v_1}{R_1} + \frac{v_1 - v_2}{R_2} & (nus1) \\ 0 = \frac{v_2}{R_3} + \frac{v_2 - v_1}{R_2} & (nus2) \end{cases}$$

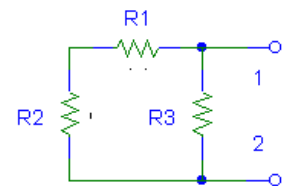
Resolent aquestes equacions amb els valors numèrics: $V_{Th} = v_2 = i_s/6 \Omega^{-1}$.

La R_{Th} es calcula posant en circuit obert la font de corrent.

La resistència equivalent vista des dels terminals 1, 2 és evidentment:

$$(R_1 + R_2) \parallel R_3$$

$$\frac{1}{R_{Th}} = \frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_3} \Rightarrow R_{Th} = \frac{(R_1 + R_2)R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{1}{3} \Omega$$



Quant a l'equivalent Norton, R_3 és com si no hi fos, ja que està en paral·lel amb el curtcircuit de la sortida per calcular i_N . Llavors

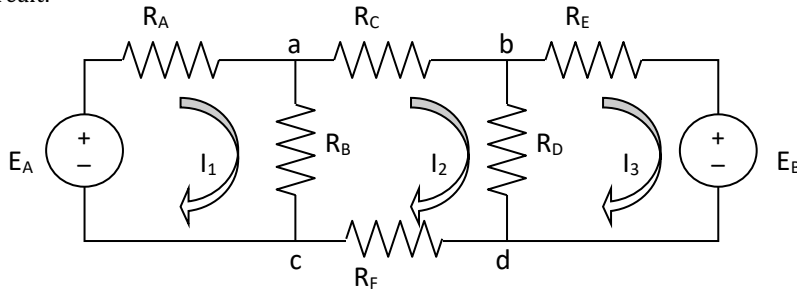
$$\begin{cases} i_s = \frac{v_1}{R_1} + \frac{v_1}{R_2} & (nus1) \quad i_{iN} = i_s/2 \\ \frac{v_1}{R_2} = i_N & (nus2) \end{cases}$$

Si apareixen condensadors i/o inductàncies, el procediment és el mateix, però en el circuit transformat.

Annex 1. Mètodes generals d’anàlisi

A1.1 Mètode dels corrents de malles:

Sigui el circuit:



Tenim $b = 6$ branques i $n = 4$ nusos (a, b, c i d)

Nombre de nusos independents: $n_i = n - 1 = 3$

Tres equacions de nusos

Nombre de malles independents: $m_i = b - (n - 1) = 3$

Tres equacions de malles

Utilitzem el mètode dels corrents de malles:

$$\begin{aligned} \text{malla 1:} & \quad E_A - R_A I_1 - R_B (I_1 - I_2) = 0 \\ \text{malla 2:} & \quad -R_B (I_2 - I_1) - R_C I_2 - R_D (I_2 - I_3) - R_F I_2 = 0 \\ \text{malla 3:} & \quad -R_D (I_3 - I_2) - R_E I_3 - E_B = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (R_A + R_B) I_1 - R_B I_2 &= E_A \\ -R_B I_1 + (R_B + R_C + R_D + R_F) I_2 - R_D I_3 &= 0 \\ -R_D I_2 + (R_D + R_E) I_3 &= -E_B \end{aligned}$$

Això és

$$\begin{pmatrix} R_A + R_B & -R_B & 0 \\ -R_B & R_B + R_C + R_D + R_F & -R_D \\ & -R_D & R_D + R_E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_A \\ 0 \\ -E_B \end{pmatrix}$$

i el sistema es pot resoldre pel mètode que es vulgui.

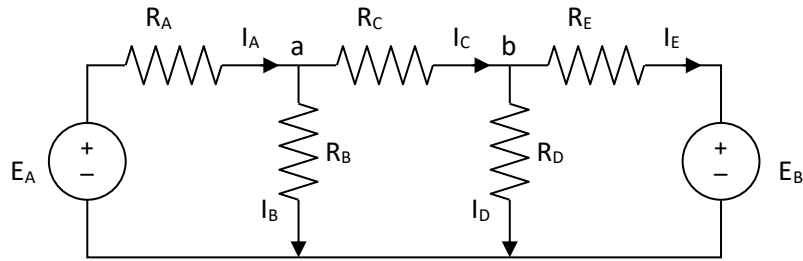
La matriu de resistències $\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix}$ compleix que és simètrica,

$$R_{ii} = \sum R \text{ contingudes a la malla "i", } i$$

$$R_{ij} = -\sum R \text{ comunes a les malles "i" i "j".}$$

A1.2 Mètode de les tensions de nusos

Sigui un circuit com el de la figura:



b = 5 branques (ja que una branca sense càrrega no es considera)

n = 3 nusos (ja que dos nusos són idèntics si no hi ha càrrega entre ells)

Nombre de nusos independents: $n_i = n - 1 = 2$

Dues equacions de nusos

Nombre de malles independents: $m_i = b - (n - 1) = 3$

Tres equacions de malles

Utilitzem el mètode de les tensions de nusos:

$$\text{nus a:} \quad i_A - i_B - i_C = 0$$

$$\text{nus b:} \quad i_C - i_D - i_E = 0$$

$$\frac{E_A - V_a}{R_A} - \frac{V_a}{R_B} - \frac{V_a - V_b}{R_C} = 0 \neq$$

$$\frac{V_a - V_b}{R_C} - \frac{V_b}{R_D} - \frac{V_b - E_B}{R_E} = 0$$

$$(E_A - V_a)G_A - V_a G_B - (V_a - V_b)G_C = 0$$

$$(V_a - V_b)G_C - V_b G_D - (V_b - E_B)G_E = 0$$

$$-(G_A + G_B + G_C)V_a + G_C V_b = -G_A E_A$$

$$G_C V_a - (G_C + G_D + G_E)V_b = -G_E E_B$$

Això és

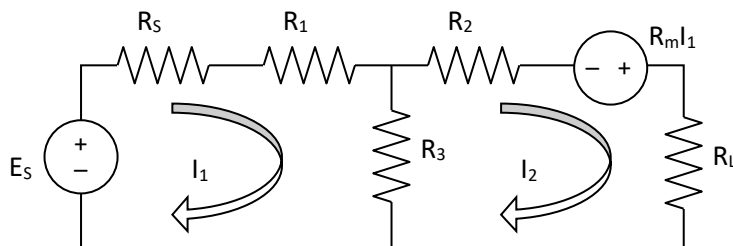
$$\begin{pmatrix} G_A + G_B + G_C & -G_C \\ -G_C & G_C + G_D + G_E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_a \\ V_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -G_A E_A \\ -G_E E_B \end{pmatrix}$$

i el sistema es resol per algun mètode adequat.

La matriu de conductàncies $\begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix}$ compleix que és simètrica,

$$G_{ii} = \Sigma G \text{ que conflueixen al nus "i", } i$$

$$G_{ij} = -\Sigma G \text{ al camí entre el nus "i" i el "j".}$$

A1.3 Cas de les fonts controlades
Fonts de tensió:

 Tenim $b = 3$ branques i $n = 2$ nusos

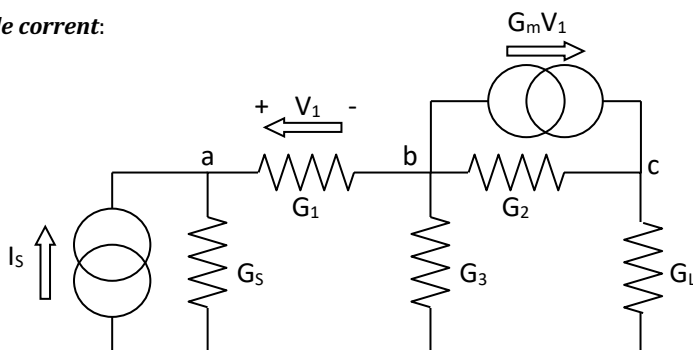
El sistema d'equacions pel mètode de corrents de malles seria:

$$\begin{pmatrix} R_S + R_1 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_3 + R_2 + R_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_S \\ R_m I_1 \end{pmatrix}$$

o, el que és el mateix,

$$\begin{pmatrix} R_S + R_1 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 - R_m & R_3 + R_2 + R_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_S \\ 0 \end{pmatrix}$$

i es pot resoldre normalment. En aquest cas la matriu de resistències ja no és simètrica.

Fonts de corrent:


Tenim 7 branques i 4 nusos.

Les equacions del mètode de tensions de nusos són:

$$\begin{pmatrix} G_S + G_1 & -G_1 & 0 \\ -G_1 & G_1 + G_2 + G_3 & -G_2 \\ 0 & -G_2 & -G_2 + G_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_S \\ -G_m V_1 \\ G_m V_1 \end{pmatrix}$$

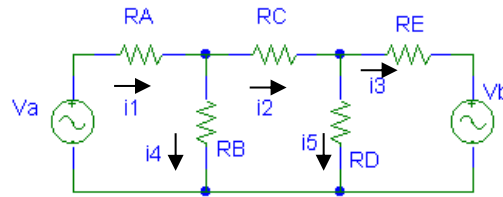
o

$$\begin{pmatrix} G_S + G_1 & -G_1 & 0 \\ -G_1 + G_m & G_1 + G_2 + G_3 - G_m & -G_2 \\ -G_m & -G_2 + G_m & -G_2 + G_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_S \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

i també hem perdut la simetria de la matriu de conductàncies.

A1.4 Nomenclatura alternativa: corrents de branques

Per exemple, en un circuit com el de la figura:



En el nus 1:	$I_1 = I_2 + I_4$	} 5 equacions amb 5 incògnites
En el nus 2:	$I_3 + I_5 = I_2$	
Malla 1:	$0 = -V_A + R_A I_1 + R_B I_4$	
Malla 2:	$0 = -R_B I_4 + R_C I_2 + R_D I_5$	
Malla 3:	$0 = -V_B - R_E I_3 + R_D I_5$	

A1.5 Exemples pràctics

Exemple. Xarxa R-L

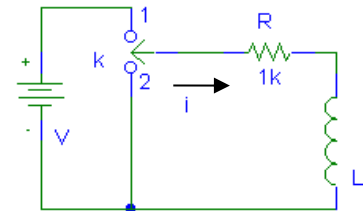
Suposem a $t = 0$ que l'interruptor canvia de 2 a 1.

Llavors, per a $t > 0$: $V = Ri + v_L = Ri + L \frac{di}{dt}$

La solució general és: $i(t) = \frac{V}{R} + K e^{-Rt/L}$

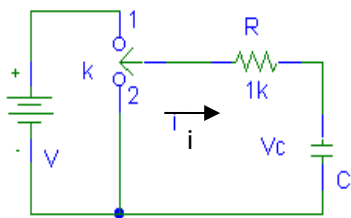
Si es té la condició inicial $i(0)$, la solució particular és

$$i(t) = \frac{V}{R} + \left(i(0) - \frac{V}{R} \right) e^{-Rt/L}$$



S'observa que hi ha un primer terme que correspon a l'estat permanent (**resposta forçada**) i un segon que es coneix com a **resposta lliure o natural** i correspon al règim transitori o dependent del temps.

Exemple. Xarxa R-C



Tenim un interruptor k que canvia de la posició 1 a la 2 al temps de referència $t = 0$. Suposem que per a $t < 0$ el condensador ha tingut prou temps per carregar-se. Per tant, la condició inicial (c.i.) del condensador és $v_c(t < 0) = V$. En passar l'interruptor a 2, el condensador es descarrega a través de la resistència, i actua momentàniament com una font de tensió $v_c(0) = V$.

L'equació de la malla per a $t > 0$ és:

$$\frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t') dt' + Ri(t) = V + \frac{1}{C} \int_0^t i(t') dt' + Ri(t) = 0$$

Diferenciant:

$$\frac{di}{dt} + \frac{1}{RC} i = 0 \Rightarrow i(t) = K e^{-t/RC}$$

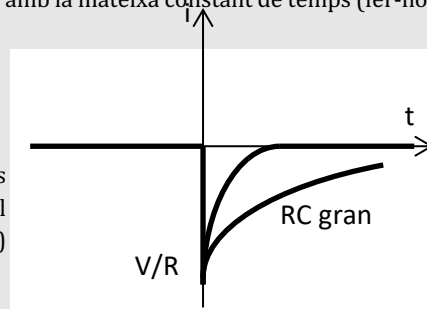
$$i(0) = -\frac{V}{R} \Rightarrow i(t) = -\frac{V}{R} e^{-t/RC} \quad t \geq 0$$

La constant de temps de la descàrrega és $\tau = RC$.

Anàlogament, si a $t = 0$ es commuta de 2 a 1, el condensador es carrega amb la mateixa constant de temps (fer-ho). Suposant una càrrega inicial $v_c(0)$ s'obté:

$$v_c(t) = v_c(0) + [V - v_c(0)] \cdot (1 - e^{-t/RC}).$$

S'observa la gran importància de les *condicions inicials*. Moltes vegades es modelitzen substituint el dispositiu general (amb c.i. no nul·les) pel mateix amb c.i. nul·les més una font que doni la condició inicial, $v_c(0)$ en aquest cas.

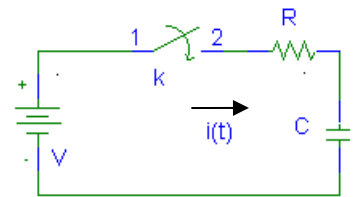


Així, doncs, per tenir en compte les condicions inicials:

- Se substitueixen els inductors per generadors de corrent que tinguin el valor del corrent que flueix per a $t = 0+$ (i.e. una L és curtcircuit per un potencial constant en règim permanent) o per circuits oberts si no hi circula corrent, més els propis inductors amb condicions inicials nul·les.
- Se substitueixen les capacitats per curtcircuits o per fonts de voltatge $V_0 = q_0/C$ si es té càrrega inicial, més les mateixes capacitats amb condicions inicials nul·les.
- Les resistències es deixen sense canviar.

Exemple. Resolució de la xarxa RC mitjançant la transformada de Laplace

Volem determinar $i(t)$ en qualsevol instant de temps. Suposem que tanquem l'interruptor a $t = 0$. Per tant, la funció d'excitació és: $v(t) = Vu(t)$ on $u(t)$ és la funció esglaó unitat.



L'equació de xarxa és:
$$Vu(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t') dt' + Ri(t).$$

La TL de l'equació integrodiferencial és:

$$V \frac{1}{s} = \frac{1}{C} \left[\frac{I(s)}{s} + \frac{q(0^-)}{s} \right] + RI(s),$$

on hem posat:
$$\int_{-\infty}^t i(t') dt' = \int_{-\infty}^{0^-} i(t') dt' + \int_{0^-}^t i(t') dt' = q(0^-) + \int_{0^-}^t i(t') dt';$$

el primer terme de la dreta és constant i correspon a la càrrega inicial del condensador $q(0^-)$, la TL del qual és

$$\mathcal{L}\{q(0^-)\} = \frac{q(0^-)}{s}$$

Si la capacitat està inicialment descarregada, $q(0^-) = 0 \implies \frac{V}{s} = I(s) \left(\frac{1}{Cs} + R \right).$

Llavors, ens interessa la intensitat:
$$I(s) = \frac{V/R}{s + \frac{1}{RC}} \quad \text{i} \quad i(t) = \mathcal{L}^{-1}\{I(s)\}$$

Consultant una taula de transformades:
$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}, \text{ llavors:}$$

$$i(t) = \frac{V}{R} e^{-t/RC} \quad t \geq 0.$$

Annex 2. La transformada de Laplace

Com s'ha vist en capítols anteriors, la transformada de Fourier (TF) contínua ens permet representar molts tipus de senyals com a combinació lineal d'exponencials complexes de la forma e^{st} , on $s = j\omega$ o, el que és equivalent, ens permet representar els senyals com a combinacions lineals de funcions harmòniques (sinus i cosinus) mitjançant la relació d'Euler. Aquesta transformada és molt útil en diferents camps de la física, per exemple, en el camp de l'òptica ens ajuda a entendre que qualsevol tipus d'ona lumínica pot ser descomposta en una suma d'ones harmòniques de diferents freqüències i diferents desfasaments. En electrònica, aquesta transformada ens permet resoldre sistemes LTI (*lineal time-invariant*⁶) quan tenim senyals d'entrada complicats, ja que la TF descompon el senyal en la suma de senyals més simples i el principi de superposició s'aprofita d'això per resoldre aquest tipus de sistemes.

En aquest apartat, anem un pas més enllà i generalitzarem la TF obtenint la transformada de Laplace. El poder d'aquesta transformada resideix en l'ampli ventall de casos on podem aplicar-la i on la TF no dona bons resultats, per exemple, en alguns sistemes inestables. Per això és útil en la investigació de l'estabilitat o la inestabilitat dels sistemes. A més a més, un dels punts forts de la transformada de Laplace resideix en la potència que té per resoldre certes equacions diferencials ja que, en transformar tota l'equació, aquesta esdevé una simple equació algebraica amb solució trivial.

A2.1 Transformada bilateral de Laplace

La transformada de Laplace (TL) d'un senyal general $x(t)$ es defineix com:

$$TL[x(t)] = X(s) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad [33]$$

on $X(s)$, en general, serà una funció de variable complexa ja que $s = \sigma + j\omega$ on σ és la seva part real i ω la part imaginària. Igual que en el cas de la TF, el senyal $x(t)$ haurà de complir certes condicions perquè [1] existeixi i no tots els valors de la variable s pertanyeran al domini de la transformada.

Potser sobta aquesta forma de definir la TL, amb el límit inferior a menys infinit. Aquesta manera de presentar la transformada s'anomena *transformada bilateral de Laplace* i s'ha optat per introduir-la d'aquesta forma per relacionar-la intuïtivament amb la TF. En capítols posteriors adoptarem la forma clàssica de la transformada, que s'anomena *transformada unilateral de Laplace*.

Com hem comentat reiteradament, la TF i la TL estan estretament relacionades. Fixem-nos que si la nostra variable només té part imaginària ($s = j\omega$) l'expressió [1] es converteix en la TF de $x(t)$:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad [34]$$

Tot i que la variable no sigui purament imaginària, es poden relacionar les dues transformades mitjançant [3]:

$$X(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-(\sigma + j\omega)t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t)e^{-\sigma t}]e^{-j\omega t} dt \quad [35]$$

on l'expressió anterior es pot interpretar com la transformada de Fourier del senyal que volem transformar multiplicada per una exponencial real. Per tant, podem trobar l'expressió de la TL d'un senyal calculant la TF d'aquest senyal multiplicat per $e^{-\sigma t}$, amb σ constant.

Posarem un exemple per acabar *de veure la relació entre les dues transformades i per mostrar que la TL sovint és més potent que la seva germana petita*.

⁶ Els sistemes LTI són els que tenen les propietats de la linealitat i la invariància en el temps. Conceptualment, un sistema lineal és el que compleix el principi de superposició: si l'entrada del sistema és una combinació lineal de senyals, la sortida serà una superposició de la resposta d'aquests senyals. Conceptualment, un sistema invariant en el temps és el sistema que manté el seu comportament i les seves característiques fixes en el temps.

Exemple 1

Considerem el senyal

$$x(t) = e^{-at}u(t) \quad [36]$$

Sabem que la transformada de Fourier convergeix per senyals on $a > 0$ i pren la forma següent:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-at}e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{j\omega + a}, \quad a > 0 \quad [37]$$

Si ara ens fixem en la TL del senyal anterior [37] veiem que és la mateixa expressió però l'exponencial real ara té per exponent $a + \sigma$.

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a+\sigma)t}u(t)e^{-j\omega t} dt \quad [38]$$

Per tant, la transformada de Laplace d'aquest senyal tindrà la mateixa forma que [4]:

$$X(s = \sigma + j\omega) = \int_0^{\infty} e^{-(a+\sigma)t}e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{j\omega + (a + \sigma)}, \quad a + \sigma > 0 \quad [39]$$

I expressat d'una altra manera:

$$TL[x(t)] = X(s) = \frac{1}{s + a}, \quad \Re[s] > -a \quad [40]$$

En particular, veiem que, així com la TF no convergeix per a tots els senyals (depèn del factor a), la TL sí que ho fa però només per a alguns valors de $\Re[s]$. Si a és positiva, l'expressió [39] es pot avaluar en $\sigma = 0$ per obtenir [32] i així veure que per a aquest valor de sigma les dues transformades són la mateixa. Fixem-nos que si a és negatiu o és 0, la TL encara existeix però no la TF. Aquí resideix part de la millora d'una transformada respecte de l'altra.

Si ara analitzéssim un senyal similar al de l'exemple anterior, $y(t) = -e^{-at}u(-t)$, obtindríem una forma analítica de la TL exactament igual a la trobada en l'exemple anterior però amb una diferència, els valors on la transformada convergeix són diferents. És a dir, l'expressió analítica és la mateixa però els valors en què aquesta transformada existeix són diferents. Per al senyal $y(t)$ el rang de convergència és $\Re[s] < -a$, justament l'oposat al cas de l'exemple 1.⁷

Així doncs, ens adonem que no només necessitem l'expressió analítica de la transformada sinó, a més a més, els valors de s pels quals l'expressió és vàlida. En general, l'interval de valors de s pels quals la transformada de Laplace (TL) convergeix, s'anomena *regió de convergència* o ROC, per les seves sigles en anglès. En el subapartat següent veurem una de les formes per determinar-la.

A2.1.1 Criteri de convergència

Una vegada trobada la relació entre les dues transformades, podem passar a estudiar els criteris pels quals la TL existeix. Les condicions de convergència seran les mateixes que per a la TF a excepció del primer criteri, que es veurà lleugerament modificat:

- El senyal modificat $f(x; \sigma)$ ha de ser absolutament integrable:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x; \sigma)| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma t} dt < \infty \quad [41]$$

De l'expressió anterior, veiem que no tots els valors de σ compliran el criteri d'integrabilitat i per tant, els que el compleixin formaran el que hem anomenat ROC.

Trobareu més informació sobre la ROC, altres formes de trobar-la i les seves diferents representacions al capítol 9 del llibre *Señales y sistemas*, d'Alan V. Oppenheim i Alan S. Willsky (pàgines 657 a 670).

⁷ La comprovació de la TL del senyal $y(t)$ es deixa com a resolució voluntària per a l'alumne.

A2.2 Antitransformada bilateral de Laplace

Es defineix la transformada inversa o antitransformada del senyal $x(t)$ com:

$$TL^{-1}[X(s)] = x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st} ds \quad [42]$$

L'equació anterior ens indica que el senyal $x(t)$ es pot representar com una integral d'exponencials complexes pesades pels coeficients donats per la transformada de Laplace.

Fixem-nos que aquesta integral es porta a terme al pla complex i en general no es fàcil de resoldre. El contorn d'integració correspondrà a una línia paral·lela a l'eix imaginari que satisfaci $\Re[s] = \sigma$.

La integració sobre el pla complex no es resoldrà en aquests apunts, però hi ha un tipus de transformades que no requereixen la resolució de l'equació [41] per obtenir-ne l'antitransformada. S'anomenen *transformades racionals*.

S'ha optat per no adjuntar les propietats d'aquesta transformada en forma de taula ja que a l'assignatura d'Electrònica Aplicada no se sol utilitzar. Pel tipus de circuits que es tractaran serà de més utilitat la transformada unilateral. S'ha volgut introduir la transformada de Laplace mitjançant la transformada de Fourier per dotar de continuïtat les parts de l'assignatura i a causa d'això hem hagut d'introduir la transformada bilateral, que és la manera més senzilla i intuïtiva de veure'n la relació.

A partir d'aquí ens dedicarem a estudiar la transformada unilateral, que serà similar i tindrà part de les propietats iguals. Aquesta transformada és útil, sobretot, en la resolució de sistemes lineals amb coeficients constants i amb condicions inicials no nul·les (és a dir, sistemes que no estan en repòs inicialment).

A2.3 Transformada unilateral de Laplace

La transformada unilateral de Laplace (\mathcal{L}) d'un senyal $x(t)$ es defineix:

$$\mathcal{L}[x(t)] = \mathfrak{X}(s) \triangleq \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad [43]$$

on la diferència entre les definicions de les transformades bilateral i unilateral resideix al límit inferior de l'integral. En conseqüència, dos senyals diferents per a $t < 0$ però iguals per a $t \geq 0$ tindran diferents transformades bilaterals però idèntiques d'unilaterals. D'igual manera, per a qualsevol senyal de valor 0 per a $t < 0$ tindrà les dues transformades iguals.

És demostrable que la ROC per la relació [42] serà un semiplà dret. És a dir, si la transformada existeix per a un valor σ_0 , per a qualsevol $\sigma > \sigma_0$, la transformada també existirà.

L'avaluació de la transformada inversa unilateral és la mateixa que [41] però amb la restricció que la ROC ha de ser un semiplà dret.

Exemple 2

Considerem un senyal:

$$x(t) = e^{-a(t+1)}u(t+1) \quad [44]$$

La transformada bilateral $X(s)$ per a aquest exemple es pot trobar mitjançant la relació de l'exemple 1 i la propietat del desplaçament en el temps.

$$X(s) = \frac{e^s}{s+a}, \quad \Re[s] > -a \quad [45]$$

En contrast, la transformada unilateral és:

$$\mathfrak{X}(s) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-a(t+1)} u(t+1) e^{-st} dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-a} e^{-t(s+a)} dt = \frac{e^{-a}}{s+a}, \quad \Re[s] > -a \quad [46]$$

Així doncs, veiem que per a aquest exemple les dues transformades són molt diferents. De fet, podem entendre la $\mathfrak{X}(s)$ com la transformada bilateral d'un senyal $x(t)u(t)$.

A2.3.1 Taula de propietats de la transformada unilateral

Una de les propietats més importants és la propietat de diferenciació, que ens permetrà convertir equacions integrals/diferencials en simples equacions algebraiques i ens permetrà dotar de condicions inicials els nostres sistemes.

TABLA 9.3 PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA UNILATERAL DE LAPLACE

Propiedad	Señal	Transformada unilateral de Laplace
	$x(t)$ $x_1(t)$ $x_2(t)$	$\mathfrak{X}(s)$ $\mathfrak{X}_1(s)$ $\mathfrak{X}_2(s)$
Linealidad	$ax_1(t) + bx_2(t)$	$a\mathfrak{X}_1(s) + b\mathfrak{X}_2(s)$
Desplazamiento en el dominio de s	$e^{st_0} x(t)$	$\mathfrak{X}(s - s_0)$
Escala en tiempo	$x(at), \quad a > 0$	$\frac{1}{a} \mathfrak{X}\left(\frac{s}{a}\right)$
Conjugación	$x^*(t)$	$x^*(s)$
Convulsión (suponiendo que $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son cero para $t < 0$)	$x_1(t) * x_2(t)$	$\mathfrak{X}_1(s) \mathfrak{X}_2(s)$
Diferenciación en el dominio del tiempo	$\frac{d}{dt} x(t)$	$s\mathfrak{X}(s) - x(0^-)$
Diferenciación en el dominio de s	$-tx(t)$	$\frac{d}{ds} \mathfrak{X}(s)$
Integración en el dominio del tiempo	$\int_{0^-}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} \mathfrak{X}(s)$

Teoremas del valor inicial y final

Si $x(t)$ no contiene impulsos o funciones singulares de orden superior en $t = 0$, entonces

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s\mathfrak{X}(s)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s\mathfrak{X}(s)$$

Fixem-nos que no hem adjuntat una columna amb la ROC, això es deu al fet que la regió de convergència sempre sigui un semiplà dret. Per exemple, a la figura 10 podem veure una representació típica de la ROC (zona fosca) sobre el pla complex d'una transformada qualsevol amb pols⁸ a $s = -1, 2$ i amb zeros a $s = 1$. Fixem-nos que la ROC sempre serà la regió de la dreta del pol ubicat més a la dreta, això ha de ser així perquè la ROC de la transformada ha de ser un semiplà dret.

⁸ S'anomena *pol d'una funció* del tipus $X(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ l'arrel del denominador $D(s)$ i s'anomena *zero de la funció* les arrels del numerador $N(s)$.

Per finalitzar el tema, adjuntarem una taula amb les transformades de Laplace de les funcions més comunes.

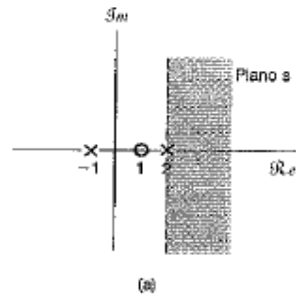


Fig. 10. Exemple de representació sobre el pla complex de la ROC

A2.3.2 Taula de transformades unilaterals de Laplace

$f(t) = \mathbf{L}^{-1}\{F(s)\}$		$F(s) = \mathbf{L}\{f(t)\}$
1	\longleftrightarrow	$\frac{1}{s}, \quad s > 0$
$e^{a t}$	\longleftrightarrow	$\frac{1}{s - a}, \quad s > a$
$\sin(at)$	\longleftrightarrow	$\frac{a}{s^2 + a^2}, \quad s > 0$
$\cos(at)$	\longleftrightarrow	$\frac{s}{s^2 + a^2}, \quad s > 0$
$t^n \quad n > 0$	\longleftrightarrow	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$
$t^p \quad p > -1$	\longleftrightarrow	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}, \quad s > 0$
$\sinh at$	\longleftrightarrow	$\frac{a}{s^2 - a^2}, \quad s > \ a\ $
$\cosh at$	\longleftrightarrow	$\frac{s}{s^2 - a^2}, \quad s > \ a\ $
$e^{a t} \begin{Bmatrix} \sin(bt) \\ \cos(bt) \end{Bmatrix}$	\longleftrightarrow	$\begin{Bmatrix} \frac{a}{(s-a)^2 + b^2} \\ \frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2} \end{Bmatrix} \quad s > \ a\ $

$f(t) = \mathbf{L}^{-1}\{F(s)\}$		$F(s) = \mathbf{L}\{f(t)\}$
$u_c(t) \begin{cases} 0 & t < c \\ 1 & t \geq c \end{cases}$	$c > 0 \longleftrightarrow$	$\frac{e^{-c t}}{s} \quad s > 0$
$u_c(t) f(t - c)$	\longleftrightarrow	$e^{-c t} F(s)$
$e^{c t} f(t)$	\longleftrightarrow	$F(s - c)$
$f(c t)$	\longleftrightarrow	$\frac{1}{c} F\left(\frac{s}{c}\right), \quad c > 0$
$\int_0^t f(t - \tau) g(\tau) d\tau$	\longleftrightarrow	$F(s) G(s)$
$\delta(t - c)$	\longleftrightarrow	$e^{-c s}$
$f^{(n)}(t)$	\longleftrightarrow	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$
$(-t)^n f(t)$	\longleftrightarrow	$F^{(n)}(s)$

Annex 3. Exemples de circuits RLC amb condicions inicials

A3.1 Exemple 1.

Considera i resol el circuit següent, en el qual $i(0)=2A$ i $u(0)=2V$:

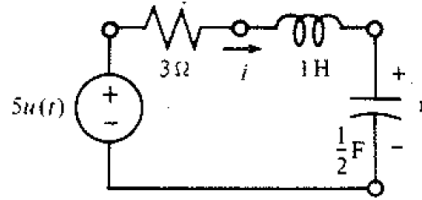


Figura 11. Circuit RLC amb condicions inicials no nul·les per a l'exemple 1.

Apliquem la llei de Kirchoff per als voltatges:

$$u(t) = i(t) \cdot R + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i \cdot dt'$$

on $u(t) = 5V$, $R = 3\Omega$, $L = 1H$ i $C = \frac{1}{2}F$.

Pot ser molt útil resoldre aquesta equació a l'espai de freqüències amb la transformada de Laplace. En aquest espai, el circuit quedaria de la manera següent:

Per a la resistència: $u_R(t) = i(t) \cdot R \rightarrow \boxed{U_R(s) = I(s) \cdot R}$

Per a la inductància: $u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} \rightarrow \boxed{U_L(s) = L \cdot (sI(s) - i(0))}$

Per al condensador: $i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} \rightarrow I(s) = C \cdot (sU_C(s) - u(0)) \rightarrow \boxed{U_C(s) = \frac{I(s)}{Cs} + \frac{u(0)}{s}}$

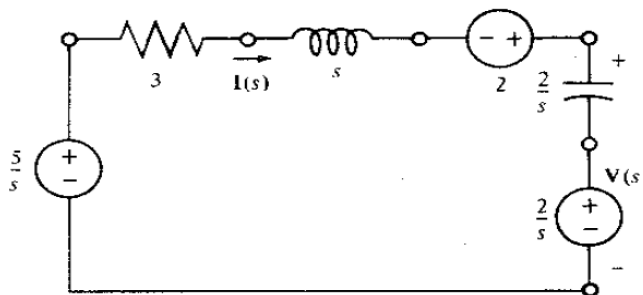
Substituint a l'equació:

$$\frac{u}{s} = I(s) \cdot R + L \cdot (sI(s) - i(0)) + \frac{I(s)}{Cs} + \frac{u(0)}{s} \rightarrow \boxed{\frac{5}{s} = 3I(s) + sI(s) - 2 + \frac{2}{s}(I(s) + 1)}$$

$$I(s) = \frac{2s + 3}{s^2 + 3s + 2} = \frac{1}{s + 1} + \frac{1}{s + 2}$$

I antitransformant:

$$i(t) = e^{-t} + e^{-2t} \quad \text{per a } t \geq 0$$



A3.2 Exemple 2

Hem de resoldre el circuit d'entrada zero de la figura següent, el qual té uns valors de voltatge del condensador i la intensitat de la bobina no nuls. C.I: $i(0) = 1\text{A}$ i $v(0) = 1\text{V}$.

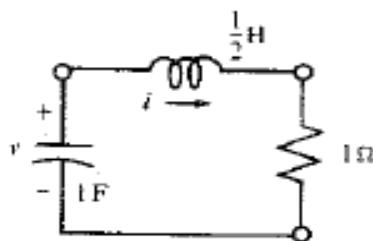


Figura 12. Circuit RLC amb condicions inicials no nul·les per a l'exemple 2

Resoldrem el circuit de dues maneres diferents. En una convertirem totes les contribucions inicials del condensador i la bobina en fonts de tensió i en l'altra, les convertirem en fonts d'intensitat. Hi hauria una tercera manera d'enfocar-ho i seria resoldre el circuit igual que s'ha fet a l'exemple anterior, posant les equacions a l'espai real, separant les contribucions inicials i transformant. Aquest mètode de resolució implica haver de pensar a posteriori el signe de les condicions inicials i és fàcil equivocar-se en algun signe. Per això es recomana separar les condicions inicials en fonts independents i despreocupar-se dels signes, ja que vindran donats de manera natural per les lleis de Kirchhoff.

A3.2.1 Mètode 1: transformació en fonts de voltatge independents

Recordem per la teoria que un condensador carregat es podia transformar en una font de tensió en sèrie amb la mateixa polaritat i un condensador descarregat. D'igual manera, podem transformar una bobina en què circula una intensitat inicial en una bobina descarregada i en una font d'intensitat en paral·lel. Es pot demostrar que a l'espai de Laplace, una bobina amb $i(0) \neq 0$ pot ser tractada com una bobina descarregada amb una font de tensió de polaritat oposada a la que teníem. Recordant l'expressió del voltatge que cau a una bobina a l'espai de Laplace:

$$V(s) = LsI(s) - Li(0) \quad [47]$$

Veiem que apareix un terme de voltatge restant que només depèn de les condicions inicials del circuit i que es pot interpretar com una font de tensió independent i de polaritat oposada a la de la bobina (figura 13). Una manera més formal de demostrar-ho seria utilitzant l'equivalent Thévenin en els borns de la bobina.

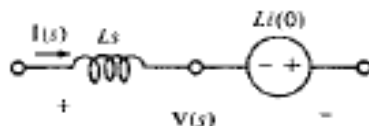


Figura 13. Model de bobina amb $i(0) \neq 0$ a l'espai de Laplace

Una vegada fet això només cal trobar el nou circuit i resoldre'l.

El nou circuit a l'espai de Laplace:

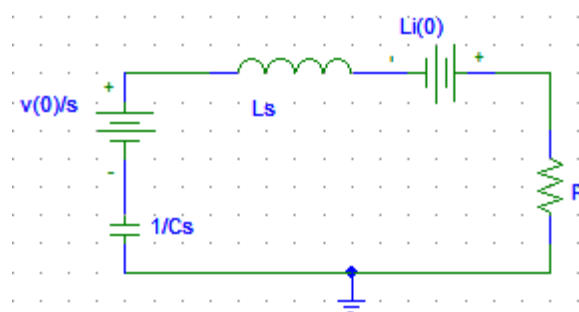


Figura 14. Circuit equivalent a l'espai de les freqüències complexes

Com hem dit abans, la font inicial del condensador va amb la mateixa polaritat que el condensador carregat i la font de la bobina amb la polaritat canviada (la $i(0)$ va en sentit horari).

La resolució a partir d'aquí és completament mecànica: s'aplicarà la llei de Kirchhoff dels voltatges, s'aïllarà la $I(s)$ i s'antitransformarà.

Agafant un sentit horari per a la intensitat i per al sentit de la malla:

$$\frac{v(0)}{s} + Li(0) = I(s) \left(\frac{1}{Cs} + Ls + R \right) \quad [48]$$

apliquem els valors numèrics que ens dóna l'enunciat:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{2} = I(s) \left(\frac{2 + s^2 + 2s}{2s} \right) \quad [49]$$

$$I(s) = \frac{2 + s}{s^2 + 2s + 2} = \frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 1} + \frac{1}{(s + 1)^2 + 1} \quad [50]$$

Anant a les taules de transformades veiem que el que tenim es pot antitransformar com:

$$TL^{-1} \left[\frac{w}{(s + \alpha)^2 + w^2} \right] = e^{-\alpha t} \sin(wt) u(t) \quad [51]$$

$$TL^{-1} \left[\frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + w^2} \right] = e^{-\alpha t} \cos(wt) u(t) \quad [52]$$

Identifiquem els termes i antitransformem l'expressió de la intensitat:

$$\begin{aligned} i(t) &= TL^{-1} \left[\frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 1} + \frac{1}{(s + 1)^2 + 1} \right] \\ &= e^{-t} \sin(t) + e^{-t} \cos(t) \end{aligned} \quad [53]$$

Fixem-nos que la intensitat que circula pel circuit tendirà ràpidament a 0 a causa de les exponencials decreixents, això és lògic si ens fixem que no tenim un forçament constant al circuit sinó només unes fonts de tensió romanents que s'esgoten ràpidament.

A3.2.2 Mètode 2: transformació en fonts d'intensitat independents

Igual que passava amb la bobina, és possible transformar a l'espai de Laplace un condensador amb voltatge no nul en un condensador descarregat i una font d'intensitat en paral·lel de valor $i(0) = Cv(0)$. Per demostrar-ho només cal fer l'equivalent Norton al condensador carregat.

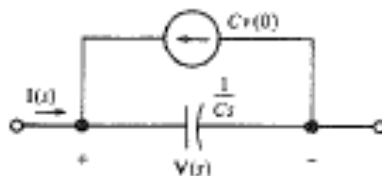


Figura 15. Model de condensador a l'espai de Laplace amb $v(0) \neq 0$

Fixem-nos que la font d'intensitat inicial està col·locada en sentit contrari a com circularia el corrent pels terminals del condensador.

El nou circuit a l'espai de Laplace:

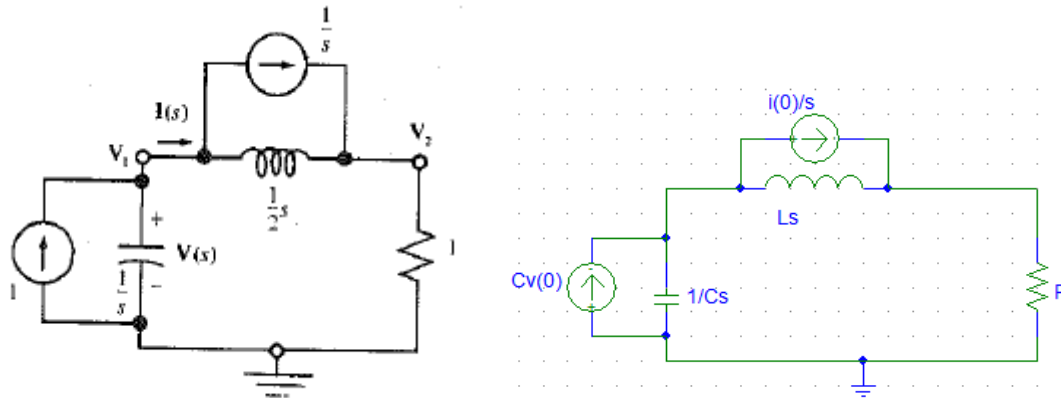


Figura 2. Circuit equivalent a l'espai de les freqüències complexes

Per resoldre aquest circuit utilitzarem la llei de Kirchhoff per als nusos de just després del condensador (V_1) i del nus d'abans de la bobina (V_2).

Nus del condensador:

$$(0 - V_1)Cs + Cv(0) = I(s). \quad [54]$$

S'ha agafat $I(s)$ com la intensitat en sentit horari que surt del nus del condensador; fixem-nos que coincideix amb la intensitat total.

Nus de la bobina:

$$I(s) = \frac{V_2}{R} = \frac{V_1 - V_2}{Ls} + \frac{1}{s} \quad [55]$$

Aïllant V_1 i substituint valors:

$$V_1 = \frac{s + 1}{s^2 + 2s + 2} \quad [56]$$

Si tornem a utilitzar l'expressió [55] amb $I(s) = \frac{V_2}{R} = V_2$ podem trobar el valor de la intensitat 3, que coincideix amb la total.

$$-V_1s + 1 = V_2 = I(s) \quad [57]$$

Substituint V_1 i aïllant $I(s)$:

$$I(s) = \frac{2 + s}{s^2 + 2s + 2} \quad [58]$$

que és l'expressió que hem trobat al primer apartat.