Universitat de Barcelona

Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

Programació Lineal i Entera. Mètodes de resolució.

Autora: Susana López Ramos

Directora: Dra. Susana Romano Rodríguez

Realitzat a: Departament de Matemàtica Aplicada

Barcelona, 8 de juny de 2023

Gràcies a la meva tutora, la Dra. Susana Romano, per dedicar-m'hi tantes estones i paciència al llarg d'aquest treball. La seva ajuda ha estat essencial.

Vull agrair a la meva novia haver estat al meu costat durant tota la carrera. Ella sabia que ho aconseguiria fins i tot quan jo ho dubtava. Agraeixo als meus pares el suport essencial que han estat durant tota la meva vida. Sense ells jo no hagués arribat a ser matemàtica. Gràcies a la família i els amics per haver-me animat a seguir sempre. Gràcies a la meva gata, la Maya, per asseure's sempre amb mi a estudiar. Gràcies a mi mateixa, per ser capaç de tantes coses.

Abstract

The main goal of this work is to study Lineal Programming problems with and without variables restricted to integer values. To do so, we study the feasible solutions set as a convex polyhedron and we look for the feasible optimal solutions on its vertexes. This work explains the Simplex algorithm to solve these problems. It also details two different methods to solve problems with variables restricted to integer values.

Resum

L'objectiu principal d'aquest treball és estudiar problemes de Programació Lineal amb i sense variables restringides a valors enters. Per fer-ho, s'estudia l'espai de solucions possibles com un poliedre convex i es busquen les solucions possibles òptimes als seus vèrtexs. S'explica el mètode del Símplex per resoldre aquests problemes. També es detallen dos mètodes que resolen problemes amb variables restringides a valors enters.

2020 Mathematics Subject Classification. 90-08, 90C05, 90C10, 90C11.

Índex

Introducció

Les matemàtiques són a tot arreu. A cada decisió que prenem. Gairebé tot el que ens envolta pot plantejar-se com un problema amb una solució òptima. El meu interès en les Matemàtiques Aplicades va començar molt abans d'estudiar-les. Sempre que havia de fer unes quantes tasques abans de sortir de casa em preguntava *"Quin serà l'ordre més eficient de fer-les per acabar el més ràpid possible?"*. Quan havia de repartir l'equipatge d'un viatge en diferents motxilles pensava *"Quina serà la millor distribució per repartir el pes de forma òptima?"*.

El saber que per la majoria dels problemes del dia a dia de fet existeix una solució òptima, encara que no es pugui trobar a simple vista, ha estat una gran curiositat durant tota la meva vida. Aquesta inquietud, de saber que hi ha una solució que no sóc capaç de veure, m'ha portat a estudiar Matemàtiques. Per mi, descobrir un món d'eines per donar respostes a tantes preguntes complicades ha estat increïblement enriquidor.

Així, la motivació d'aquest treball ha estat ampliar els meus coneixements en Matemàtiques Aplicades. Per fer-ho, l'objectiu és desenvolupar una sòlida base teòrica i estudiar mètodes per aplicar a problemes reals.

L'estructura del treball és la següent:

- En el Capítol 1 s'introdueix el concepte de Programació Matemàtica, com va néixer i quines són les seves branques.
- El Capítol 2 tracta sobre la Programació Lineal, aprofundint en el Teorema Fonamental de la Programació Lineal, la seva relació amb la Geometria i amb la Convexitat.
- En el Capítol 3 s'explica el mètode del Símplex, la seva base teòrica i es desenvolupen exemples.
- El Capítol 4 tracta sobre la Dualitat i la seva relació amb el mètode del Símplex, i s'explica el mètode del Símplex Dual.
- En el Capítol 5 s'introdueix el concepte de Programació Entera, s'aprofundeix en la seva teoria i s'expliquen dos mètodes diferents per resoldre aquest tipus de problemes amb els seus respectius exemples.

Capítol 1

Programació matemàtica

En aquest capítol les principals fonts consultades han estat [1] i [5].

Les persones prenen decisions segons què els hi és més beneficiós des del començament de la humanitat. Tanmateix, fins a la dècada de 1930 no va existir cap mètode que donés solució a aquest tipus de problemes. A causa de la gran crisi econòmica que patia el món en aquell moment es van començar a desenvolupar mètodes per resoldre problemes de planificació econòmica utilitzant funcions lineals i restriccions. La figura del matemàtic soviètic Leonid Kantoróvitx destaca com un dels pioners en aquest camp, ja que el seu treball va ser fonamental en el desenvolupament de l'òptima planificació econòmica i va fer que guanyés el Premi Nobel d'Economia el 1975.

Com a resultat dels esforços de Kantoróvitx i molts altres investigadors, a la dècada del 1940 va néixer la ciència de la Programació Matemàtica. Va ser una dècada de grans avanços, ja que durant la Segona Guerra Mundial, Gran Bretanya va reunir un gran nombre de científics de diverses disciplines perquè ajudessin a optimitzar diverses estratègies i tàctiques de guerra.

Aquest grup de científics va obtenir grans resultats, i per això els Estats Units no van trigar a aplicar la mateixa idea al seu departament militar. Els americans van desenvolupar el que es coneix com a Investigació Operativa (I.O.). Aquesta s'enfocava en la recerca per operacions militars. La majoria de teories que van néixer amb la I.O. es basaven en casos i necessitats reals de problemes militars durant la guerra. Al final de la guerra, atès el gran èxit demostrat, els mètodes ja s'havien aplicat a molts altres sectors com ara els negocis, la indústria o el comerç.

La Programació Matemàtica o PM és una part de la I.O.. Concretament, és la part que s'enfoca en els problemes de presa de decisions on el que importa és l'ús eficient d'un cert recurs limitat per tal d'aconseguir els objectius desitjats. Matemàticament, els problemes de PM es poden formular com

$$\begin{array}{ll} \max & f(X) \\ \text{tal que} & g_i(X) \leq 0, i = 1, \ldots, m \\ & X \geq 0 \end{array}$$

on $X = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ i $f(X)$ i $g_i(X)$, per $i = 1, \ldots, m$, són funcions reals en funció de X. Si les funcions $f(X)$ i $g_i(X)$ són lineals, el problema es coneix com un problema de Programació Lineal. Altrament, és un problema de Programació No Lineal. Aquest treball tracta la Programació Lineal.

Els problemes de PM han sigut d'interès pels economistes des de molt abans de 1930. Ja del segle XVII se'n poden trobar exemples on els economistes començaven a descriure sistemes econòmics en termes matemàtics. Un exemple és la "Tableau économique"de François Quesnay l'any 1758. En ella, l'economista tractava d'interrelacionar els terratinents, els pagesos i els artesans.

Durant els següents cent cinquanta anys no hi va haver grans avanços, més enllà del fet que es va fer servir una versió primitiva dels problemes de PM en la Teoria de l'Equilibri General de Walras el 1874. Ja a la dècada del 1930, un grup d'economistes alemanys i austríacs van desenvolupar generalitzacions de la teoria lineal de Walras. Aquest treball va portar al matemàtic hongarès-americà John Von Neumann a desenvolupar un model lineal per tractar problemes d'economia. Primer va establir que el model de Walras s'havia d'expressar amb desigualtats, i no pas amb igualtats com s'havia fet fins al moment. Després, aplicant el Teorema del Punt Fix, hi va trobar la solució. Aquest model va ser un gran èxit.

Un altre avanç destacat el va aportar el que es considera el pare de la Programació Lineal, el matemàtic americà George Dantzig. Treballava pels Estats Units com a part de l'equip de I.O. pel departament militar i el 1947 va presentar un problema de Programació Lineal i va proposar el mètode del Símplex per resoldre'l. Aquest algoritme és un mètode eficient per resoldre problemes de Programació Lineal que resulta fàcil d'aplicar a molts camps. En els següents capítols d'aquest treball se'n raonarà més sobre el mètode del Símplex.

Pel que fa a la Programació No Lineal, el seu desenvolupament va resultar més complex i es va estendre al llarg de diverses dècades. Destaquen les tècniques del mètode de Newton i el mètode del gradient, formulades a les dècades de 1950 i 1960. Els avanços en tecnologies informàtiques van ser claus per poder desenvolupar mètodes més sofisticats per resoldre problemes no lineals. Aquesta disciplina és àmpliament utilitzada en múltiples àrees, com ara en economia, física o enginyeria.

Durant les dècades següents fins a l'actualitat, la Programació Matemàtica ha continuat evolucionant i expandint les seves diverses aplicacions a pràcticament tots els aspectes del dia a dia. Les tecnologies informàtiques avançades i l'ús de potents algoritmes d'optimització han permès resoldre problemes cada vegada més complexos i obtenir solucions més precises.

Capítol 2

Programació lineal

En aquest capítol les principals fonts consultades han estat [4], [6] i [9].

Els problemes que es treballen en Programació Lineal o PL s'ocupen de maximitzar o minimitzar una funció lineal. Aquests problemes poden tenir restriccions lineals segons el cas, ja siguin igualtats o desigualtats.

La PL és coneguda perquè, tot i que la majoria dels problemes no tenen una funció objectiu lineal, normalment és molt més senzill formular una funció objectiu lineal que aproximi el problema real a no pas formular un altre tipus de funció.

Un exemple és el cas del preu màxim. Posem que es vol fer una compra de dos tipus diferents de béns. Suposem que en total es poden comprar com a màxim B nombre de béns. El problema es pot formular com $c_1x_x+c_2x_2$, on c_1, c_2 són els preus unitaris i x_1, x_2 són el nombre de béns que es compren de cada tipus de bé respectivament. El problema general seria

$$\begin{array}{ll} \text{max} & c_1x_x + c_2x_2 \\ \text{tal que} & x_1 + x_2 \leq B \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{array}$$

que és un programa lineal elemental per trobar quina és la compra màxima que es pot fer en aquestes condicions.

Aquest capítol tracta en detall els aspectes teòrics de la PL.

2.1 Formulació del problema

Un problema en la *forma estàndard* es defineix com

$$\begin{array}{lll} \text{min} & f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n & \\ \text{tal que} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ & \vdots & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \\ & x_j \geq 0, \ j = 1, ..., n. & \end{array} \tag{2.1.1}$$

Un problema en *forma canònica* es defineix com

$$\begin{array}{lll} \min & f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n & \\ \text{tal que} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & \geq b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & \geq b_2 \\ & \vdots & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n & \geq b_m \\ & x_j \geq 0,\ j = 1, ..., n. & \end{array}$$

- Si el problema és de maximització es passa a un de minimització a través del següent procés. Com $\min f = -\max(-f)$, per a

  $$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

  es canvia el signe

  $$-f = -c_1x_1 - c_2x_2 - \cdots - c_nx_n$$

  i aleshores es minimitza.

- Si es té alguna restricció de desigualtat

  $$\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \cdots + \alpha_nx_n \leq \beta$$

  es pot transformar en restricció d'igualtat introduint una nova variable no negativa, anomenada variable de separació, $x_{n+1} \geq 0$. Així, la desigualtat anterior es transforma en

  $$\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \cdots + \alpha_nx_n + x_{n+1} = \beta.$$

- Si el problema té alguna restricció de desigualtat

  $$\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \cdots + \alpha_nx_n \geq \beta$$

  es transforma en restricció d'igualtat així

  $$\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \cdots + \alpha_nx_n - x_{n+1} = \beta.$$

- Si hi ha alguna variable $x_k \leq 0$, per $k \in \{1, \ldots, n\}$, es defineix $-x_k = x'_k$ i aleshores

  $$\min f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_kx'_k + \cdots + c_nx_n$$

  i es complirà $x'_k \geq 0$.

- Si el problema té alguna variable x_k, per $k \in \{1, \ldots, n\}$, no restringida en signe, es defineix $x_k = x'_k - x''_k$ per a $x'_k, x''_k \geq 0$ i aleshores

  $$\min f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_kx'_k - c_kx''_k + \cdots + c_nx_n.$$

  El resultat és un problema de PL en forma estàndard amb una variable extra.

Amb notació matricial la forma estàndard s'escriu com

$$\begin{aligned} \min f &= c^T x \\ \text{tal que } Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

per $A = (a_{ij}) \in R^{m \times n}$ la matriu de coeficients, $x = (x_1, ..., x_n)^T \in R^n$ el vector de variables, $c = (c_1, ..., c_n)^T \in R^n$ el vector de coeficients de f i $b = (b_1, ..., b_m)^T \in R^m$ el vector de termes independents, amb $m < n$. S'assumeix $\text{rang}(A) = m$ sempre que no s'indiqui una altra cosa. Així, $Ax = b$ sempre tindrà alguna solució.

2.2 Solucions bàsiques

Definició 2.2.1. *f s'anomena* funció objectiu *i c és el cost. $Ax = b$ i $x \geq 0$ són les restriccions. Una solució que compleixi les restriccions és una* solució possible*, i el conjunt de solucions possibles és la* regió possible

$$P = \{x \in R^n | Ax = b, x \geq 0\}.$$

Definició 2.2.2. *Una* solució possible òptima *és una solució possible de valor mínim dins de P.*

Sigui B la matriu resultant de seleccionar de les n columnes de A un conjunt de m columnes linealment independents.

B és no singular i es pot considerar com una base. $Bx_B = b$ té solució única per $x_B \in R^m$. Prenent $x = \begin{pmatrix} x_B \\ 0 \end{pmatrix}$, s'obté una solució per $Ax = b$. Aquest resultat porta a la següent definició.

Definició 2.2.3. *Per al conjunt $Ax = b$ de m equacions lineals amb n incògnites, sigui B una submatriu $m \times m$ de A. Si les $n - m$ components de x no associades a B s'igualen a zero, la solució resultant per $Ax = b$ s'anomena* solució bàsica respecte la base B*. Les components de x associades a les columnes de B són les* variables bàsiques*.*

Definició 2.2.4. *Si alguna variable bàsica és igual a zero, es diu que la solució és una* solució bàsica degenerada*. Si una solució possible és també una solució bàsica, direm que és una* solució bàsica possible*. Si una solució òptima és una solució bàsica, es diu que és una* solució bàsica òptima*.*

2.3 Teorema Fonamental de la Programació Lineal

Teorema 2.3.1. (Fonamental de la PL) *Sigui un problema de PL en la forma estàndard (2.1.1), amb A matriu de dimensions $m \times n$ i rang m. Llavors:*

1. *si hi ha una solució possible, hi ha una solució bàsica possible;*

2. *si hi ha una solució possible òptima, hi ha una solució bàsica possible òptima.*

Demostració. Siguin $a_1, \dots, a_n$ les columnes de la matriu A de dimensions $m \times n$.

1. Suposem que $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ és una solució possible tal que

$$x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n = b.$$

Suposem que hi ha exactament p variables $x_1, \dots, x_p$ positives. Es pot suposar sense pèrdua de generalitat que són les p primeres. Aleshores

$$x_1 a_1 + \cdots + x_p a_p = b.$$

Ara s'han de considerar dos casos:

- Si $a_1, \dots, a_p$ són linealment independents, és clar que $p \leq m$. Aleshores:
  - Si $p = m$ llavors la solució és bàsica possible i s'acaba la demostració.
  - Si $p < m$, com $\text{rang}(A) = m$ es poden trobar $m - p$ vectors linealment independents d'entre els altres $n - p$ vectors. Llavors, el conjunt resultant de m vectors és linealment independent i la solució és bàsica possible (degenerada) amb $m - p$ variables igualades a zero.
- Si $a_1, \dots, a_p$ són linealment dependents aleshores existeixen $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ constants on almenys una és > 0 i

$$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_p a_p = 0$$

Multiplicant l'expressió anterior per un escalar ϵ qualsevol queda

$$\epsilon\lambda_1 a_1 + \cdots + \epsilon\lambda_p a_p = 0$$

I restant de l'expressió

$$x_1 a_1 + \cdots + x_p a_p = b$$

en resulta

$$(x_1 - \epsilon\lambda_1)a_1 + \cdots + (x_p - \epsilon\lambda_p)a_p = b.$$

Així, $\forall\epsilon$ i $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ les components $(x_i - \epsilon\lambda_i)$ corresponen a una solució de les equacions lineals. Tanmateix, poden no complir $x_i - \epsilon\lambda_i \geq 0$.
Definim $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p, 0, \dots, 0)^T$ i, per un ϵ qualsevol,

$$x - \epsilon\lambda$$

és una solució per les igualtats. Si $\epsilon = 0$, és la solució possible inicial. Si $\epsilon > 0$, les components $x_i - \epsilon\lambda_i$ creixen, decreixen o es mantenen constants segons si λ_i és negativa, positiva o nul·la respectivament.
S'havia suposat $\lambda_i > 0$ per alguna i, aleshores alguna component $x_i - \epsilon\lambda_i$ decreixerà segons creix l'escalar ϵ.
Eventualment s'arribarà a $x_i - \epsilon\lambda_i = 0$ per algun valor de ϵ, concretament per

$$\epsilon = \min_i \left\{ \frac{x_i}{\lambda_i} : \lambda_i > 0 \right\}.$$

Per aquest ϵ, $x - \epsilon\lambda$ és una solució possible amb un màxim de $p-1$ variables positives. Si cal, s'itera el procés per eliminar les variables positives necessàries fins a obtenir una solució possible amb les columnes corresponents que són linealment independents. En aquest punt, s'aplicaria el primer cas i acaba la demostració.

2. Suposem que $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ és una solució possible òptima tal que

$$x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n = b.$$

Anàlogament a la demostració anterior, es suposa que les p primeres variables de x, $x_1, \ldots, x_p$, són positives i per tant

$$x_1 a_1 + \cdots + x_p a_p = b.$$

Com en la demostració anterior, s'han de considerar dos casos:

- Si $a_1, \ldots, a_p$ són linealment independents es té que $p \leq m$ i aleshores:
  - Si $p = m$ llavors la solució és bàsica possible òptima i s'acaba la demostració.
  - Si $p < m$, com $\text{rang}(A) = m$ es poden trobar $m - p$ vectors linealment independents d'entre els altres $n - p$ vectors i, com en la demostració anterior, el conjunt resultant de m vectors és linealment independent i la solució és bàsica possible òptima amb $m - p$ variables igualades a zero.
- Si $a_1, \ldots, a_p$ són linealment dependents aleshores existeixen $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ constants on almenys una és > 0 i

  $$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_p a_p = 0$$

  De manera anàloga a la demostració anterior s'arriba a

  $$(x_1 - \epsilon\lambda_1)a_1 + \cdots + (x_p - \epsilon\lambda_p)a_p = b,$$

  per un escalar ϵ qualsevol on $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ les components $(x_i - \epsilon\lambda_i)$ corresponen a una solució de les equacions lineals, però encara no s'ha garantit que $x_i - \epsilon\lambda_i \geq 0$.
  Per $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p, 0, \ldots, 0)^T$ i un ϵ qualsevol

  $$x - \epsilon\lambda$$

  és una solució per les igualtats. Que aquesta solució és possible es demostra de forma anàloga a la demostració anterior:
  Si $\epsilon = 0$, és la solució inicial. Si $\epsilon > 0$, les components $x_i - \epsilon\lambda_i$ creixen, decreixen o es mantenen constants segons si λ_i és negativa, positiva o nul·la respectivament.
  S'havia suposat $\lambda_i > 0$ per alguna i. Llavors, alguna component $x_i - \epsilon\lambda_i$ decreixerà segons creix l'escalar ϵ.
  Eventualment s'arribarà a $x_i - \epsilon\lambda_i = 0$ per algun valor de ϵ, concretament per

  $$\epsilon = \min\left\{\frac{x_i}{\lambda_i} : \lambda_i > 0\right\}.$$

Per aquest ϵ, $x - \epsilon\lambda$ és una solució possible amb un màxim de $p - 1$ variables positives.

Falta, doncs, provar que que $x - \epsilon\lambda$ és una solució possible òptima:
Si $x - \epsilon\lambda$ és solució possible, llavors el valor de la solució és

$$f = c^T(x - \epsilon\lambda) = c^T x - c^T\epsilon\lambda$$

Per a ϵ suficientment petita, $x - \epsilon\lambda$ serà solució possible per a ϵ, independentment del seu signe. Aleshores $c^T\lambda = 0$, ja que si $c^T\lambda \neq 0$, es podria trobar una ϵ petita amb el signe adequat tal que $c^T x - c^T\epsilon\lambda < c^T x$, i per hipòtesis x és solució òptima.
Aleshores, $x - \epsilon\lambda$ és solució possible òptima.

Si cal, s'itera el procés per eliminar les variables positives necessàries fins a obtenir una solució possible òptima amb les columnes corresponents que són linealment independents. En aquest punt, s'aplicaria el primer cas i acaba la demostració.

□

Aquest teorema té molta rellevància per a la PL ja que redueix qualsevol problema a cercar solucions possibles bàsiques. Per a un problema amb n variables i m restriccions hi hauran, com a màxim,

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

solucions bàsiques. És a dir, hi haurà un nombre finit de possibilitats.

2.4 Geometria

A continuació es detalla l'estructura geomètrica de la regió possible

$$P = \{x \in R^n | Ax = b, x \geq 0\},$$

que es pot considerar com un poliedre.

Definició 2.4.1. *Diem que $\prod$ és un* conjunt afí *si conté les rectes que connecten qualssevol dos punts que contingui. El conjunt tancat afí d'un conjunt és el conjunt afí més petit possible que l'inclou.*

Exemple 2.4.2. En R^2 les rectes són conjunts afins. En R^3 ho són els plans i les rectes. En R^n l'espai sencer és també un conjunt afí. També un únic punt i un conjunt buit són conjunts afins.

La intersecció de diversos conjunts afins és un conjunt afí. Per a un α_i qualsevol per $i = 1, ..., k$ tal que $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$, diem que $x = \sum_{i=1}^k \alpha_i x^i$ és una combinació afí de $x^1, ..., x^k$.

Definició 2.4.3. *El conjunt de totes les combinacions afins de* $x^1, ..., x^k$ *és el conjunt afí*

$$\left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x^i \mid \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1, \alpha_i \in R, i = 1, ..., k \right\},$$

anomenat envoltura afí *d'aquests punts.*

Així, direm que $\prod$ és un conjunt afí si i només si l'envoltura afí de qualsevol conjunt finit de punts de $\prod$ pertany a $\prod$.

Teorema 2.4.4. *Un conjunt afí és un subespai afí si i només si inclou l'origen.*

Teorema 2.4.5. *Per a qualsevol conjunt afí no buit existeix un vector* p *tal que* $L = \{x + p | x \in \prod\}$ *és un subespai afí, i aquest és únic.*

Geomètricament, el subespai afí L respecte el vector p és paral·lel al conjunt afí. Així, s'anomena subespai paral·lel de $\prod$. La dimensió de L serà la dimensió de $\prod$, que serà igual al nombre de components independents (coordenades) dels elements de $\prod$. Clarament el conjunt afí és no acotat.

Sigui a un vector no nul i sigui λ un nombre real. El conjunt $H = \{x \in R^n | a^T x = \lambda\}$ és un hiperplà, amb vector normal a. De fet, $\forall x, y \in H$

$$a^T(x - y) = a^T x - a^T y = \lambda - \lambda = 0.$$

Exemple 2.4.6. Qualsevol hiperplà és un conjunt afí i qualssevol recta en R^2 i plà en R^3 són exemples de hiperplans.

2.5 Convexitat

L'objectiu d'aquesta secció és interpretar els resultats anteriors des del punt de vista de la teoria de conjunts convexos.

Definició 2.5.1. C *és un conjunt convex si donades* $x_1, x_2 \in C, \lambda \in (0, 1)$, *aleshores* $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in C$.

Definició 2.5.2. *El convex més petit que inclou un conjunt és l'*envoltura convexa *d'aquest.*

Exemple 2.5.3. Els quadrants i els discos en R^2 i els octants i les esferes en R^3 són exemples de conjunts convexos. Les rectes i l'espai total també són conjunts convexos. Un conjunt buit i un únic punt són també conjunts convexos. Les interseccions de conjunts convexos són també conjunts convexos.

Tot conjunt afí és un conjunt convex. Tanmateix, no tot conjunt convex és un conjunt afí.

Exemple 2.5.4. Els discos i les esferes no són conjunts afins però sí convexos.

Qualsevol conjunt convex té una envoltura afí. La dimensió d'aquesta serà la dimensió del propi conjunt convex. Assumirem ara que els conjunts convexos són tancats.

Definició 2.5.5. *Una* combinació convexa *de punts $x_1, ..., x_k$ és un punt*

$$x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_k x^i$$

amb $\alpha_i \geq 0, i = 1, ..., k$ tal que $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$. El conjunt de totes les combinacions convexes

$$\left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_k x^i | \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0, i = 1, ..., k \right\}$$

*és l'*envoltura convexa *d'aquests punts.*

Un conjunt C és *convex* si i només si C inclou l'envoltura convexa de qualsevol nombre finit de punts de C.

Qualsevol hiperplà $H = \{x|a^T x = \lambda\}$ divideix l'espai total en dos subespais tancats

$$H_L = \{x|a^T x \leq \lambda\} \text{ i } H_R = \{x|a^T x \geq \lambda\}.$$

Definició 2.5.6. *La intersecció d'un nombre finit de subespais tancats s'anomena* poliedre. *Aquest pot degenerar a un punt, a una recta, o a un espai buit.*

La regió possible $P = \{x \in R^n | Ax = b, x \geq 0\}$ és la intersecció d'un conjunt afí i de l'octant positiu. Es pot pensar P com la intersecció d'un nombre finit de subespais tancats.

Proposició 2.5.7. *La regió possible P és un conjunt polièdric convex.*

Definició 2.5.8. *Sigui C un conjunt convex, un punt x és un* vèrtex *de C si donats $y, z \in C, \lambda \in (0, 1)$, si $\lambda y + (1 - \lambda)z = x \Rightarrow y = z = x$.*

Un vèrtex també s'anomena *punt extrem* ja que no pot ser un punt interior de P. El punt origen, en cas de pertànyer a P, serà un vèrtex. Els següents resultats asseguren que per trobar solucions bàsiques possibles en P per resoldre un problema de PL només s'haurà de buscar entre els vèrtexs de P.

Proposició 2.5.9. *Un punt $x \in P$ és un vèrtex si i només si les columnes de A corresponents a les seves components positives són linealment independents.*

Demostració. Sigui $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$. Suposem que x té les primeres s components positives. Llavors $x = (x_1, \ldots, x_s, 0, \ldots, 0)^T$. Definim $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_s)^T$ i $\overline{A}$ com la submatriu de A formada per les primeres s subcolumnes de A. Aleshores

$$\overline{A}\overline{x} = b.$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Suposem que $x \in P$ és un vèrtex de P. Si les columnes de $\overline{A}$ són linealment dependents $\Rightarrow \exists\, \overline{v} \neq 0$ tal que $\overline{A}\overline{v} = 0$. Definim $\overline{y} = \overline{x} + \alpha\overline{v}$ i $\overline{z} = \overline{x} - \alpha\overline{v}$ per $\alpha \in R$ tal que

$$\overline{A}\overline{y} = \overline{A}\overline{z} = b.$$

Prenent un α suficientment petit tal que $\overline{y}, \overline{z} \geq 0$ es defineixen els vectors

$$y = (\overline{y}, 0)^T \text{ i } z = (\overline{z}, 0)^T$$

$$\Rightarrow y, z \in P \text{ i } x = \frac{y}{2} + \frac{z}{2}.$$

Això contradiu la hipòtesi que x és un vèrtex de $P \Rightarrow$ totes les columnes de $\overline{A}$ són linealment independents $\Rightarrow$ totes les columnes positives de A són linealment independents.

$\boxed{\Leftarrow}$ Suposem que totes les columnes corresponents a components positius de A són linealment independents. Amb la notació anterior, es té que totes les columnes de $\overline{A}$ són linealment independents.
Si $x \in P$ no és un vèrtex $\Rightarrow \exists\, y, z \in P$, $y, z \neq x$ i $\alpha \in (0, 1)$ tal que

$$x = \alpha y + (1 - \alpha)z.$$

Aleshores les últimes $n-s$ components de y i z han de ser nul·les perquè $x = (x_1, \ldots, x_s, 0, \ldots, 0)^T$ per hipòtesi. Definim $v = x - y \neq 0$ i llavors

$$\Rightarrow \overline{A}\overline{v} = Av = Ax - Ay = b - b = 0.$$

Aleshores les columnes de $\overline{A}$ són linealment dependents. Això contradiu la hipòtesi. Per tant, x és un vèrtex de P. $\square$

Donat que suposem que $\text{rang}(A) = m$, el nombre de components positives d'un vèrtex de P serà, com a màxim, m.

Teorema 2.5.10. *Un punt x és un vèrtex de la regió possible P si i només si és una solució bàsica possible.*

Demostració. $\boxed{\Leftarrow}$ Suposem que $x = (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)^T$ és una solució bàsica possible de $Ax = b$, amb $x \geq 0$. Llavors, es pot suposar sense pèrdua de generalitat que les m primeres columnes de A, $a_1, \ldots, a_m$, són linealment independents i per tant

$$x_1 a_1 + \cdots + x_m a_m = b.$$

Suposem que x no és un vèrtex $\Rightarrow \exists\, y, z$ i $\alpha \in (0, 1)$ tal que

$$x = \alpha y + (1 - \alpha)z.$$

Com $x, y, z \geq 0$ i $\alpha \in (0, 1) \Rightarrow$ les últimes $n - m$ components de y i z seran zero

$$\Rightarrow y_1 a_1 + \cdots + y_m a_m = b \text{ i } z_1 a_a + \cdots + z_m a_m = b.$$

Com $a_1, \dots, a_m$ són linealment independents, $x = y = z$. Així, s'arriba a una contradicció i per tant x és vèrtex de P.

$\boxed{\Rightarrow}$ Suposem que x és un vèrtex de P. Podem suposar sense pèrdua de generalitat que les components > 0 de x són les k primeres $x = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)^T$, és a dir,

$$x_1 a_1 + \cdots + x_k a_k = b.$$

Per demostrar que x és una solució bàsica possible s'ha de demostrar que les columnes $a_1, \dots, a_k$ de A són linealment independents. Es demostra per contradicció:
Suposem que $a_1, \dots, a_k$ són linealment dependents $\Rightarrow \exists\ \lambda_1, \dots, \lambda_k$ constants amb $y_i \neq 0$ per algun $i \in \{1, \dots, k\}$ tal que

$$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k = 0.$$

Definim $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k, 0, \dots, 0)^T$. Com per hipòtesi $x_i > 0$ $\forall i \in \{1, \dots, k\}$ aleshores es pot trobar un ϵ tal que

$$x + \epsilon\lambda \geq 0 \text{ i } x - \epsilon\lambda \geq 0$$
$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}(x + \epsilon\lambda) + \frac{1}{2}(x - \epsilon\lambda).$$

Això contradiu la hipòtesi de que x és un vèrtex. Així, $a_1, \dots, a_k$ són linealment independents i per tant x és una solució bàsica possible. $\square$

Corol·lari 2.5.11. *Qualsevol regió possible P no buida té algun vèrtex.*

Capítol 3

Mètode del Símplex

En aquest capítol les principals fonts consultades han estat [4] i [6].

El mètode del Símplex és el mètode més utilitzat per a resoldre problemes de PL. Aquest apartat parla dels fonaments teòrics del seu algorisme i inclou un exemple.

El mètode del Símplex consisteix en moure's entre vèrtexs adjacents, és a dir, entre solucions bàsiques possibles, per tal de minimitzar el valor objectiu fins a obtenir el vèrtex òptim, és a dir, la solució bàsica òptima.

Els resultats del capítol anterior asseguren que per trobar una solució possible òptima només cal considerar les solucions bàsiques possibles.

Recordem que un problema de PL en la forma estàndard es defineix com

$$\begin{array}{rl} \min & f = c^T x \\ \text{tal que} & Ax = b \\ \text{per} & x \geq 0 \end{array}$$

on $A \in R^{m\times n}$, $c \in R^n$, $b \in R^m$, $x \in R^n$, té $m < n$ i $\text{rang}(A) = m$. És a dir, $Ax = b$ serà un sistema lineal indeterminat.

Explícitament el problema anterior s'expressa per $x_1, \ldots, x_n \geq 0$ com el conjunt d'equacions lineals

$$\begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array}$$

Si les m primeres columnes de A són linealment independents, es diu que les variables $x_1, ..., x_m$ són *bàsiques*, i les altres són *secundàries*. Així, es pot reescriure la matriu A com $A = (B, N)$, on B són les columnes corresponents a les variables bàsiques i N a les secundàries.

Així, el problema $Ax = b$ és equivalent a $Bx_B + Nx_N = b$ i la solució bàsica es troba igualant $x_N = 0$.

El sistema anterior pot, a través de multiplicacions i restes, convertir-se en la *forma canònica*

$$\begin{array}{cccccccc}
x_1 & & +\overline{a}_{1,m+1}x_{m+1} + \overline{a}_{1,m+2}x_{m+2} + \cdots + \overline{a}_{1,n}x_n & = & \overline{a}_{10} \\
& x_2 & +\overline{a}_{2,m+1}x_{m+1} + \overline{a}_{2,m+2}x_{m+2} + \cdots + \overline{a}_{2,n}x_n & = & \overline{a}_{20} \\
& & \vdots & & \vdots \\
& & x_m + \overline{a}_{m,m+1}x_{m+1} + \overline{a}_{m,m+2}x_{m+2} + \cdots + \overline{a}_{m,n}x_n & = & \overline{a}_{m0}
\end{array}$$

Així, el problema canònic es pot escriure com $x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b$. S'acostuma a treballar amb la matriu dels coeficients.

$$\left.\begin{array}{cccccccc}
1 & 0 & \dots & 0 & \overline{a}_{1,m+1} & \overline{a}_{1,m+2} & \dots & \overline{a}_{1,n} \\
0 & 1 & \dots & 0 & \overline{a}_{2,m+1} & \overline{a}_{2,m+2} & \dots & \overline{a}_{2,n} \\
0 & 0 & \dots & 0 & \vdots & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\
0 & 0 & \dots & 1 & \overline{a}_{m,m+1} & \overline{a}_{m,m+2} & \dots & \overline{a}_{m,n}
\end{array}\right|\begin{array}{c}
\overline{a}_{10} \\ \overline{a}_{20} \\ \vdots \\ \vdots \\ \overline{a}_{m0}
\end{array}$$

Donat aquest sistema canònic, l'algorisme es basa en transformar variables bàsiques en secundàries, i viceversa. Per exemple, per substituir la variable bàsica x_p, per $1 \le p \le m$, per la variable secundària x_q el procediment és el següent:

1. Es comprova que a_{pq} sigui no nul·la. Si és zero, no es pot fer la transformació.
2. Es divideix la fila p entre a_{pq} perquè x_q tingui un coeficient unitari.
3. S'obtenen coeficients nuls per a x_q a les altres equacions restant múltiples adequats de la fila p.

El procediment anterior s'explicita amb les equacions

$$\begin{array}{rcl}
\overline{a}_{ij} & = & a_{ij} - \frac{a_{pj}}{a_{pq}} a_{iq}, \quad i \neq p \\
\overline{a}_{pj} & = & a_{pj}/a_{pq}
\end{array} \tag{3.0.1}$$

anomenades *equacions pivot*. Es diu que a_{pq} és l'*element pivot*.

Es reescriu el sistema canònic anterior amb les noves variables generades per les equacions pivot. Reescrivint també la funció objectiu del problema de PL $f = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$ com

$$c_1x_1 + \cdots + c_nx_n - f = 0$$

i aplicant les equacions pivot en resulta

$$\overline{c}_1x_1 + \cdots + \overline{c}_nx_n - f = -\overline{f}.$$

Unint els dos resultats anteriors en resulta

$$\begin{array}{ccccccc|c|c}
x_{j_1} & x_{j_2} & \dots & x_{j_m} & x_{j_{m+1}} & \dots & x_{j_n} & f & \text{t. i.} \\
\hline
1 & & & & \overline{a}_{1j_{m+1}} & \dots & \overline{a}_{1j_n} & & \overline{a}_{10} \\
& 1 & & & \overline{a}_{2j_{m+1}} & \dots & \overline{a}_{2j_n} & & \overline{a}_{20} \\
& & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
& & & 1 & \overline{a}_{mj_{m+1}} & \dots & \overline{a}_{mj_n} & & \overline{a}_{m0} \\
\hline
& & & & \overline{c}_{j_{m+1}} & \dots & \overline{c}_{j_n} & -1 & -\overline{f}
\end{array} \tag{3.0.2}$$

que és la *taula del Símplex.*

Es faran transformacions lineals iterativament a aquesta taula del Símplex per tal d'obtenir una solució possible òptima.

La taula del Símplex es pot escriure com

x_B	x_N	f	t. i.
I	$\overline{N}$		$\overline{a}^T$
	$\overline{c}_N^T$	-1	$-\overline{f}$

per $\overline{a}^T = (\overline{a}_{10}, \dots, \overline{a}_{m0})$.

El valor associat de la funció objectiu és $-(-\overline{f})$. $\overline{c}_N$ serà el cost reduït i $\overline{N}$ és la matriu de coeficients $\overline{a}_{ij_k}$, per $i = 1, \dots, m$, i $k = m+1, \dots, n$.

Si $\overline{x}_B \geq 0$, la taula del Símplex dona una solució bàsica possible inicial. Altrament, s'ha de buscar una nova base pel sistema. Aquest cas es tracta en l'apartat de Variables Artificials (3.2).

Si la funció objectiu assoleix el valor mínim a la regió possible, es diu que és la solució bàsica possible òptima.

El valor de la funció objectiu corresponent a qualsevol solució x és

$$z = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n = c^Tx.$$

Per a la solució bàsica, el valor objectiu corresponent és

$$z_0 = c_B^T x_B,$$

on $c_B^T = (c_1, \dots, c_m)$.

Normalment s'acostuma a treballar amb la solució bàsica $x = \begin{pmatrix} x_B \\ 0 \end{pmatrix}$. Pels altres casos, on $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ tenen valors arbitraris, aïllant les altres variables

$$\begin{array}{lcl} x_1 & = & \overline{a}_{10} - \sum_{j=m+1}^{n} \overline{a}_{1j}x_j \\ x_2 & = & \overline{a}_{20} - \sum_{j=m+1}^{n} \overline{a}_{2j}x_j \\ \vdots & & \\ x_m & = & \overline{a}_{m0} - \sum_{j=m+1}^{n} \overline{a}_{mj}x_j \end{array}$$

I substituint $x_1, \dots, x_m$ per aquestes expressions en $z = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$, z queda en funció de $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$

$$z = c_1(\overline{a}_{10} - \sum_{j=m+1}^{n} \overline{a}_{1j}x_j) + c_2(\overline{a}_{20} - \sum_{j=m+1}^{n} \overline{a}_{2j}x_j) +$$

$$\cdots + c_m(\overline{a}_{m0} - \sum_{j=m+1}^{n} \overline{a}_{mj}x_j) + c_{m+1}x_{m+1} + \cdots + c_nx_n$$

i prenent $z_j = \overline{a}_{1j}c_1 + \overline{a}_{2j}c_2 + \cdots + \overline{a}_{mj}c_m$ per $m+1 \leq j \leq m$, es té

$$z = c^Tx = z_0 + (c_{m+1} - z_{m+1})x_{m+1} + (c_{m+2} - z_{m+2})x_{m+2} + \cdots + (c_n - z_n)x_n. \quad (3.0.3)$$

3.1 Teoremes del Mètode del Símplex

Teorema 3.1.1. (De la millora de la solució bàsica possible) *Sigui una solució bàsica possible amb z_0 com a valor de la funció objectiu corresponent. Si $c_j - z_j < 0$ per alguna j tal que $1 \leq j \leq n$, aleshores existeix una solució possible amb valor $z < z_o$ per a la funció objectiu corresponent. Si la columna a_j del sistema canònic amb valor z per a la funció objectiu es pot substituir per un vector de la base original i generar una nova solució bàsica possible, aquesta nova solució tindrà un valor $z < z_0$ per a la nova funció objectiu corresponent. Si a_j no es pot substituir per generar una nova solució bàsica possible, aleshores el conjunt de solucions no està acotat i la funció objectiu tendeix a $-\infty$.*

Demostració. Donada una solució bàsica possible $x = (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)^T$ amb valor objectiu z_0. Suposem que $c_{m+1} - z_{m+1} < 0$, aleshores es pot construir una altra solució possible $x' = (x'_1, \ldots, x'_m, x'_{m+1}, 0, \ldots, 0)^T$ amb $x'_{m+1} > 0$.

Substituint x' en l'equació (3.0.3):

$$z = c^T x' = z_0 + (c_{m+1} - z_{m+1})x'_{m+1}.$$

Donat que $x'_{m+1} > 0$ i $c_{m+1} - z_{m+1} < 0$,

$$z - z_0 = (c_{m+1} - z_{m+1})x'_{m+1} < 0.$$

Aleshores $z < z_0$ per aquest x'.

Donat que quan x'_{m+1} creix les altres components poden créixer, decréixer o quedar-se iguals, s'estudien els casos:

- Si existeix $i \leq m$ tal que x'_i decreix quan x'_{m+1} creix, aleshores es pot fer créixer x'_{m+1} fins que una primera $x'_i = 0$ per mantenir la possibilitat de la solució. Així, s'obté una nova solució bàsica possible que complirà $z < z_0$.
- Si tota x'_i creix quan x'_{m+1} creix per $i \leq m$, aleshores x'_{m+1} es pot fer créixer sense límit i, per tant, el conjunt de solucions no està acotat. Llavors, el valor objectiu de la funció objectiu no té cota inferior i pot tendir a $-\infty$.

□

Teorema 3.1.2. (De la condició d'optimitat) *Si existeix una solució bàsica possible tal que $c_j - z_j \geq 0$ $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$, aleshores és una solució possible òptima.*

Demostració. Per una solució bàsica possible x amb valor objectiu z_0 i $c_j - z_j \geq 0$ $\forall j$ es vol provar que és solució òptima.

Seguint el mètode de contradicció, es suposa que existeix una altra solució bàsica possible amb valor objectiu z tal que $z < z_0$.

Aleshores

$$z = z_0 + (c_{m+1} - z_{m+1})x_{m+1} + \cdots + (c_n - z_n)x_n.$$

Com $c_j - z_j \geq 0 \ \forall j$ i $x_i \geq 0 \ \forall i$, es té que

$$z - z_0 = (c_{m+1} - z_{m+1})x_{m+1} + \cdots + (c_n - z_n)x_n \geq 0.$$

Aleshores $z - z_0 \geq 0$. Això contradiu la hipòtesi i per tant es demostra que x és solució òptima.

$\square$

Lema 3.1.3. *Si $\overline{c}_q < 0$ per algun $q \in N$ i $\overline{a}_{i,q} \leq 0$, $i = 1, ..., m$, aleshores el problema de PL té una cota (inferior).*

Regla de la columna pivot: Determinar una columna amb índex q tal que

$$q \in \arg\min_{j \in N} \overline{c}_j.$$

Aquesta regla selecciona la columna amb el cost reduït més negatiu com la columna pivot.

Regla de la fila pivot: Determinar una fila d'índex p i un valor α tal que

$$\alpha = \overline{a}_{p0}/\overline{a}_{pq} = \min\{\overline{a}_{i0}/\overline{a}_{iq} | \overline{a}_{iq} > 0, i = 1, ..., m\} \geq 0$$

s'obté el que s'anomena radi mínim. Posant $x_q = \alpha$ s'obté una nova solució possible:

$$\begin{array}{ll} \widehat{x}_{j_i} = \overline{a}_{i0} - \alpha\overline{a}_{iq}, & i = 1, ..., m; \\ \widehat{x}_j = 0, & j \in N, j \neq q; \\ \widehat{x}_q = \alpha & \end{array}$$

Així, el **Mètode del Símplex** es pot resumir en els pasos següents:

1. Es forma una taula del Símplex com en (3.0.2), que donarà la solució bàsica possible inicial.

2. Si $\overline{c}_q \geq 0$, la solució és òptima i s'acaba el mètode.

3. Es determina una columna pivot d'índex $q \in \arg\min_{j \in N} \overline{c}_j$

4. Es calculen les raons $\overline{a}_{i0}/\overline{a}_{iq}$ per $\overline{a}_{iq} > 0$ per $i = 1, \ldots, m$. Si cap $\overline{a}_{iq} > 0$, s'atura el procés i el problema no està acotat.

5. Es determina una fila pivot d'índex $p \in \arg\min_{i \in I} \frac{\overline{a}_{i0}}{\overline{a}_{iq}}$.

6. A través de transformacions elementals, es converteix $\overline{a}_{pq}$ en 1 i s'anul·len les altres components de la columna que no siguin zero.

7. Es torna al pas 2.

Exemple 3.1.4. Sigui

$$\begin{array}{llllllll}
\multicolumn{8}{l}{\min f = x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5} \\
2x_1 & +x_2 & +3x_3 & +2x_4 & & = & 5 \\
x_1 & -x_2 & +2x_3 & -x_4 & +3x_5 & = & 1 \\
x_1 & & -2x_3 & & -2x_5 & = & -1
\end{array}$$

un problema estàndard de PL, el sistema canònic s'obté a través del mètode d'eliminació gaussiana.

Primerament definim la taula del Símplex, que conté els coeficients del problema de PL:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	t. i.
2	1	3	2	0	5
1	-1	2	-1	3	1
1	0	-2	0	-2	-1

Les tres primeres columnes formen una base ja que són linealment independents. Aleshores, es duu a terme el procés d'eliminació gaussiana per tal de fer una submatriu identitat de 3×3 en x_1, x_2, x_3. El resultat és el següent:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	t. i.
1	0	0	$2/11$	$-4/11$	$7/11$
0	1	0	$15/11$	$-19/11$	$14/11$
0	0	1	$1/11$	$9/11$	$9/11$

Un cop s'obté el sistema canònic ja es pot trobar una primera solució bàsica, tot aïllant les variables x_1, x_2 i x_3 a l'esquerra i deixant la resta a la dreta

$$\left\{\begin{array}{lcrrr}
x_1 & = & 7/11 & -(2/11)x_4 & +(4/11)x_5 \\
x_2 & = & 14/11 & -(15/11)x_4 & +(19/11)x_5 \\
x_3 & = & 9/11 & -(1/11)x_4 & -(9/11)x_5
\end{array}\right.$$

Ara, es poden forçar les variables secundàries $x_4 = x_5 = 0$ i s'obté la solució bàsica

$$x = (7/11, 14/11, 9/11, 0, 0).$$

Aquesta solució ja dona un valor a la funció objectiu, concretament:

$$f = (7/11) + 2 * (14/11) = 35/11$$

Ara s'incorporen a la taula els coeficients de la funció del problema de PL tal com

$$x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 - f = 0$$

i aleshores

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	f	t. i.
1	0	0	2/11	−4/11	0	7/11
0	1	0	15/11	−19/11	0	14/11
0	0	1	1/11	9/11	0	9/11
1	2	0	−1	1	−1	0

Primerament es fan zeros a les tres primeres components de la última fila i el sistema canònic queda

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	f	t. i.
1	0	0	2/11	−4/11	0	7/11
0	1	0	15/11	−19/11	0	14/11
0	0	1	1/11	9/11	0	9/11
0	0	0	−43/11	53/11	−1	−35/11

La solució

$$x = (7/11, 14/11, 9/11, 0, 0)$$

no és òptima perquè el coeficient de x_4 en la última fila és negatiu. Aleshores és pot buscar una solució millor. Per buscar-la, una de les components de la columna de x_4 serà la pivot. Per veure quina serà es calcula

$$\min\left\{\frac{7/11}{2/11}, \frac{14/11}{15/11}, \frac{9/11}{1/11}\right\} = 14/15.$$

Com el valor mínim de dividir el terme independent entre el coeficient de x_4 és de la segona fila, 15/11 serà el pivot.

Ara es divideix la segona fila entre 15/11 per a que el pivot passi a ser 1 tal com

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	f	t. i.
1	0	0	2/11	−4/11	0	7/11
0	11/15	0	1	−19/15	0	14/15
0	0	1	1/11	9/11	0	9/11
0	0	0	−43/11	53/11	−1	−35/11

A continuació es fan zeros en la resta d'elements de la columna on està el pivot. A la primera fila es resta doncs la segona fila multiplicada per 2/11. A la tercera fila es resta la segona fila multiplicada per 1/11. A la quarta fila es suma la segona fila multiplicada per 43/11.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	f	t. i.
1	−2/15	0	0	−2/15	0	7/15
0	11/15	0	1	−19/15	0	14/15
0	−1/15	1	0	14/15	0	11/15
0	43/15	0	0	−2/15	−1	7/15

Ara la taula del Símplex dona la nova solució bàsica possible $\overline{x} = (7/15, 0, 11/15, 14/15, 0)$ amb el valor objectiu corresponent

$$\overline{f} = -7/15 < 35/11.$$

Tanmateix, encara no s'ha arribat a obtenir una solució òptima, ja que el coeficient de x_5 és negatiu. Anàlogament al pas anterior s'ha de buscar un nou pivot a la columna de x_5. Com només es consideren els components > 0, resulta

$$\min = \left\{ \frac{11/15}{14/15} \right\} = 11/14.$$

És a dir, el pivot serà 14/15. Es divideix la tercera fila entre 14/15.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	f	t. i.
1	$-2/15$	0	0	$-2/15$	0	7/15
0	11/15	0	1	$-19/15$	0	14/15
0	$-1/14$	15/14	0	1	0	11/14
0	43/15	0	0	$-2/15$	-1	7/15

Per fer zeros a la columna del pivot es suma a la primera fila la tercera multiplicada per 2/15. Es suma a la segona fila la tercera multiplicada per 19/15. Es suma a la quarta fila la tercera multiplicada per 2/15.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	f	t. i.
1	$-1/7$	1/7	0	0	0	4/7
0	9/14	19/14	1	0	0	27/14
0	$-1/14$	15/14	0	1	0	11/14
0	20/7	1/7	0	0	-1	4/7

Totes les components de la última fila són no negatives, així que el mètode del Símplex acaba en aquest punt i el valor objectiu $\overline{f} = -4/7$ correspon a la solució possible òptima $\overline{x} = (4/7, 0, 0, 27/14, 11/14)$.

3.2 Variables Artificials

L'exemple anterior és un tipus de problemes de PL que permet trobar una solució bàsica possible inicial per la forma estàndard del problema. Amb aquesta solució s'inicia el mètode del Símplex.

Tanmateix, no per tots els problemes de PL existeix una solució bàsica possible immediatament disponible, i s'ha de desenvolupar un mètode per poder determinar-ne una i començar el mètode del Símplex.

Per trobar una solució bàsica possible inicial, es considera el problema de minimització

$$\begin{array}{rr} \min & \sum_{i=1}^{m} y_i \\ \text{tal que} & Ax + y = b \\ & x \geq 0 \\ & y \geq 0, \end{array} \tag{3.2.1}$$

on $y = (y_1, \ldots, y_m)^T$ és un vector de variables artificials.

Així, si existeix una solució per

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

aleshores necessàriament existeix una solució per (3.2.1) amb valor mínim de 0 amb $y = 0$. En canvi, si (3.2.2) no té solució possible, aleshores el valor mínim de (3.2.1) és més gran que 0.

Tanmateix, és clar que (3.2.1) és per si mateix un problema de PL amb variables x i y, que a més està en forma canònica i té solució bàsica possible $y = b$. Doncs, resolent (3.2.1) amb el mètode del Símplex s'obté una solució bàsica possible en cada pas.

Si el valor mínim de (3.2.1) és zero, aleshores la solució bàsica possible tindrà $y_i = 0$ per qualsevol i i, per tant, si no hi ha degeneració, la solució bàsica final no tindrà variables bàsiques y_i. En cas de tenir una solució degenerada, és a dir, que en la solució final algunes y_i siguin zero i bàsiques, aquestes variables bàsiques es poden intercanviar amb variables x_i no bàsiques per arribar a una solució bàsica possible inicial en funció de les variables x_i.

L'exemple següent mostra com es troba una solució bàsica possible inicial quan un problema de PL no en té una immediatament disponible.

Exemple 3.2.1. Trobem una solució bàsica possible inicial per

$$\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ & & \multicolumn{5}{c}{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.} \end{array}$$

S'introdueixen les variables artificials $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$ i una funció objectiu $y_1 + y_2$. La taula inicial és

$$\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & y_1 & y_2 & b \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Una solució bàsica possible del sistema ampliat ve donada per les variables artificials. Per iniciar el mètode del Símplex, s'ha d'actualitzar la última fila perquè tingui components zero en les variables bàsiques.

$$\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & y_1 & y_2 & b \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ \hline -5 & -4 & -3 & 0 & 0 & -7 \end{array}$$

Ara s'escull el pivot entre les components de la columna de x_1,

$$\min = \left\{ \frac{4}{2}, \frac{3}{3} \right\} = 1.$$

Com el valor mínim de dividir el terme independent entre els coeficients de x_1 és de la segona fila, 3 serà el pivot. La següent taula resulta

x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	b
0	-1	$4/3$	1	$-2/3$	2
1	1	$1/3$	0	$1/3$	1
0	1	$-4/3$	0	$5/3$	-2

El procés encara no ha acabat ja que la última fila té una component negativa. S'escull doncs un altre pivot entre les components de x_3:

$$\min = \left\{ \frac{1}{1/3}, \frac{2}{4/3} \right\} = \frac{3}{2}$$

Així, el pivot ara és $4/3$ i en resulta la taula

x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	b
0	$-3/4$	1	$3/4$	$-1/2$	$3/2$
1	$5/4$	0	$-1/4$	$1/2$	$1/2$
0	0	0	1	1	0

El procés s'acaba ja que cap component de la última fila és negativa. Ja no apareixen a la base cap de les dues variables artificials i s'ha reduït el valor objectiu a zero, trobant així una solució bàsica possible inicial al problema original

$$x_1 = 1/2, x_2 = 0, x_3 = 3/2.$$

Capítol 4

Dualitat

En aquest capítol les principals fonts consultades han estat [4] i [6].

La dualitat és un pilar essencial de la teoria de la Programació Lineal. Per a qualsevol problema de PL, que anomenarem *primal*, existeix un problema associat, que serà el *dual*. Ambdós comparteixen les dades (A, b, c) i si un és un problema de minimització, l'altre serà de maximització. En el cas de ser problemes amb solucions finites, compartiran valors òptims per a les funcions objectiu respectives. Doncs, bastarà en resoldre un dels dos problemes per a obtenir la solució dels dos.

La dualitat permetrà poder tractar simultàniament un problema des de dos enfocaments, el primal i el dual, a través del mètode del Símplex.

Donat el problema

$$\begin{array}{rc} & \text{Primal} \\ \min & c^T x \\ \text{tal que} & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{array} \tag{4.0.1}$$

es defineix el problema

$$\begin{array}{rc} & \text{Dual} \\ \max & \lambda^T b \\ \text{tal que} & \lambda^T A \leq c^T \\ & \lambda \geq 0 \end{array} \tag{4.0.2}$$

per a $\lambda \in R^m$. x és la variable del problema primal i λ la del dual.

A cada restricció d'un problema li correspon una variable de l'altre. En l'àmbit de l'economia, el vector c es coneix com el vector de costos i el vector λ com el de preus.

Definició 4.0.1. *Aquesta és la* forma simètrica de la dualitat*.*

Per qualsevol problema de PL en la forma estàndard es pot trobar el problema dual corresponent. Veiem que

$$\begin{array}{rc} \min & c^T x \\ \text{tal que} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

es pot expressar de forma equivalent com

$$\begin{array}{rc} \min & c^T x \\ \text{tal que} & Ax \geq b \\ & -Ax \geq -b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Aquesta darrera expressió és el problema primal i té

$$\begin{bmatrix} A \\ -A \end{bmatrix}$$

com a matriu de coeficients.

Associant els vectors u a les primeres restriccions i v a les segones, s'utilitza com vector dual dividit (u, v) i el dual corresponent és

$$\begin{array}{rl} \max & u^T b - v^T b \\ \text{tal que} & u^T A - v^T A \leq c^T \\ & u \geq 0 \\ & v \geq 0 \end{array}$$

Prenent $\lambda = u - v$ s'obté el dual

$$\begin{array}{rl} & \text{Dual} \\ \max & \lambda^T b \\ \text{tal que} & \lambda^T A \leq c^T \end{array} \tag{4.0.3}$$

Definició 4.0.2. *Aquesta és la* forma asimètrica de la dualitat*. En aquesta forma, el vector dual λ no està restringit a ser positiu.*

El dual del dual és el primal. A continuació es detalla la relació entre un problema de PL i el seu dual.

Lema 4.0.3. (Lema de dualitat feble) *Si x i λ són solucions possibles per als problemes primal i dual respectivament, aleshores $c^T x \geq \lambda^T b$.*

Demostració. La solució del problema primal verifica que $Ax = b$ i $x \geq 0$, i la del dual es que $\lambda^T A \leq c^T$. Aleshores:

$$\lambda^T b = \lambda^T Ax \leq c^T x$$

□

Així, si els problemes primal i dual tenen ambdós solucions possibles, qualsevol solució possible del primal serà una cota superior de totes les solucions possibles del dual. Anàlogament, qualsevol solució possible del dual serà cota inferior de totes les solucions possibles del primal.

Corol·lari 4.0.4. *Si x_0 i λ_0 són solucions possibles per als problemes primal i dual respectivament i $c^T x_0 = \lambda_0^T b$, aleshores x_0 i λ_0 són solucions possibles òptimes.*

El següent teorema estableix que la inversa del resultat del corol·lari també és certa.

Teorema 4.0.5. (Teorema de dualitat de la Programació Lineal) *Si un dels problemes, el primal o el dual, té solució possible òptima finita, aleshores també la té l'altre i els valors corresponents a les funcions objectius seran iguals. Si un problema té un objectiu no acotat, l'altre no té solució possible.*

4.1 Relació amb el Mètode del Símplex

A continuació es demostra la primera part del teorema de dualitat de la Programació Lineal utilitzant les característiques del mètode Símplex.

Suposem que el problema de PL

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{tal que} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

es té la solució bàsica òptima $x = (x_B, 0)$ amb la base B corresponent. S'haurà de determinar una solució del problema dual

$$\begin{aligned} \max \quad & \lambda^T b \\ \text{tal que} \quad & \lambda^T A \leq c^T \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

en funció de B.

Reescrivint A com $A = (B, N)$, com $x_B = B^{-1} b$ és una solució bàsica possible òptima, el vector cost c relatiu a r ha de ser ≥ 0 a totes les seves components. Així,

$$r_N^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N.$$

Com $r_N \geq 0 \Rightarrow c_B^T B^{-1} N \leq c_N^T$. Així, $\lambda^T = c_B^T B^{-1}$, resol el problema dual tal que

$$\lambda^T A = (\lambda^T B, \lambda^T N) = (c_B^T, c_B^T B^{-1} N) \leq (c_B^T, c_N^T) = c^T.$$

Com $\lambda^T A \leq c^T$, λ és solució possible pel problema dual. Per una altra banda,

$$\lambda^T b = c_B^T B^{-1} b = c_B^T x_B$$

i el valor objectiu dual és igual al valor objectiu primal. Pel corol·lari (4.0.4), això demostra que la solució λ és òptima pel problema dual.

Amb aquests resultats es pot formular el teorema següent:

Teorema 4.1.1. *Sigui el problema de PL (4.1.1) amb solució bàsica possible òptima corresponent a la base B. Aleshores, un vector λ tal que $\lambda^T = c_B^T B^{-1}$ és una solució òptima pel problema dual (4.1.2). Els valors òptims d'ambdós problemes són iguals.*

Queda demostrada la primera part del teorema de dualitat de la PL (4.0.5) a través de les característiques del mètode del Símplex.

A continuació es demostra la segona part del teorema de dualitat (4.0.5):

- Suposem que el primal (4.0.1) té un valor objectiu no acotat. Aleshores, $c^T x = -M$ per a un M arbitràriament gran. Suposem que el dual (4.0.2) té la solució possible λ. Aleshores, pel lema de dualitat feble (4.0.3), $\lambda^T b \leq c^T x = -M$. Com $-M$ tendeix a $-\infty$, això no és possible i per tant el dual no té cap solució si el primal té un valor objectiu no acotat.

- Anàlogament, suposem que el dual (4.0.2) té un valor objectiu no acotat. Aleshores, $\lambda^T b = M$ per a un M arbitràriament gran. Si el primal (4.0.1) té la solució possible x, pel lema de dualitat feble (4.0.3), $\lambda^T b = M \leq c^T x$. Com M tendeix a ∞, això no és possible i per tant el primal no té cap solució si el dual té un valor objectiu no acotat.

Teorema 4.1.2. (Separació complementària-forma asimètrica) *Siguin x i λ solucions possibles dels problemes primal i dual respectivament. Una condició necessària i suficient perquè ambdues solucions siguin òptimes és que*

1. *si $x_i > 0 \Rightarrow \lambda^T a_i = c_i$,*
2. *si $\lambda^T a_i < c_i \Rightarrow x_i = 0$.*

Demostració. Siguin x i λ solucions del primal (4.0.1) i el dual (4.0.3) respectivament. Aleshores compleixen les equacions

$$\begin{array}{ccccc} \min & c^T x & \max & \lambda^T b \\ \text{tal que} & Ax \geq b & \text{tal que} & \lambda^T A \leq c^T \\ & x \geq 0 & & \end{array}$$

Tenim que

$$(\lambda^T A - c^T)x = \sum_{i=1}^{n} (\lambda^T a_i - c_i) x_i$$

Suposem que es compleixen les condicions:

- Suposem $x_i > 0 \Rightarrow \lambda^T a_i = c_i$. Aleshores $\lambda^T A x = c^T x \iff \lambda^T b = c^T x$. Pel corol·lari (4.0.4), x i λ són solucions òptimes.

- Suposem $\lambda^T a_i < c_i \Rightarrow x_i = 0$. Aleshores $\lambda^T A \leq c^T \iff \lambda^T A x \leq c^T x \iff (\lambda^T A - c^T)x = 0 \Rightarrow \lambda^T A x = c^T x \iff \lambda^T b = c^T x$. Pel corol·lari (4.0.4), x i λ són solucions òptimes.

Suposem ara que x i λ són solucions òptimes. Pel teorema de dualitat de la PL (4.0.5), $c^T x = \lambda^T b$. Aleshores $c^T x = \lambda^T A x \iff (\lambda^T A - c^T)x = 0$. Falta veure si es compleixen les condicions:

- En cas que $x_i > 0$ és clar que $\lambda^T a_i = c_i$.
- En cas que $\lambda^T a_i < c_i$, com per hipòtesi $\lambda^T a_i \leq c_i$, aleshores $(\lambda^T a_i - c_i) < 0$ i per tant $x_i = 0$.

$\square$

A continuació s'exposa com s'obté la solució del problema dual a través de la taula final del Símplex del problema primal.

Exemple 4.1.3. Per al problema primal

$$\begin{array}{rrrrrcl}
\text{min} & -x_1 & -4x_2 & -3x_3 & & & \\
\text{tal que} & 2x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 4 \\
 & x_1 & +2x_2 & +2x_3 & +x_5 & = & 6 \\
\text{amb} & x_i \geq 0, & & i = 1, \ldots, 5 & & &
\end{array}$$

el mètode del Símplex es desenvolupa com

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	t. i.
2	2	1	1	0	4
1	2	2	0	1	6
-1	-4	-3	0	0	0

Prenent com a pivot el 2 de la primera fila i segona columna, la següent taula és

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	t. i.
1	1	1/2	1/2	0	2
-1	0	1	-1	1	2
3	0	-1	2	0	8

Prenent com a pivot l'1 de la segona fila i la tercera columna

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	t. i.
3/2	1	0	1	$-1/2$	1
-1	0	1	-1	1	2
2	0	0	1	1	10

La solució òptima és $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 0, x_5 = 0$ amb valor objectiu òptim -10. El problema dual corresponent és

$$\begin{array}{rl}
\text{max} & 4\lambda_1 + 6\lambda_2 \\
\text{tal que} & 2\lambda_1 + \lambda_2 \leq -1 \\
 & 2\lambda_1 + 2\lambda_2 \leq -4 \\
 & \lambda_1 + 2\lambda_2 \leq -3 \\
 & \lambda_1 \leq 0, \lambda_2 \leq 0.
\end{array}$$

Així, pel teorema (4.1.2), la solució òptima del dual s'obté directament de la última fila de la taula final del Símplex. Concretament, de les columnes on estava la identitat a la primera taula:

Es té $x_2, x_3 > 0$ i per tant es verifiquen amb igualtat:

$$\begin{array}{rrcr} & 2\lambda_1 + 2\lambda_2 & = & -4 \\ - & \lambda_1 + 2\lambda_2 & = & -3 \\ \hline & \lambda_1 & = & -1 \end{array}$$

$\Rightarrow \lambda_2 = -1$. Per tant, $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1$ és la solució òptima.

4.2 Mètode Símplex Dual

Aquest mètode servirà per a casos en què un problema de PL té una solució bàsica que no és possible, però que assigna preus λ de forma òptima. És a dir, quan l'última fila de la taula del Símplex té tots els elements ≥ 0, però aquests donen una solució bàsica no possible. En aquestes situacions, existeix una solució bàsica possible pel dual i, per tant, es pot pivotar cap a la solució òptima dual.

Donat un problema de PL

$$\begin{array}{rl} \min & c^T x \\ \text{tal que} & Ax = b \\ & x \geq 0, \end{array}$$

suposem una base coneguda B i es defineix λ tal que $\lambda^T = c_B^T B^{-1}$, que és solució possible pel dual.

En aquest cas es diu que la solució bàsica corresponent al primal, $x_B = B^{-1}b$, és *possible dual.* Si $x_B \geq 0$, la solució també és *possible primal* i, per tant, òptima.

El vector λ és possible pel dual i compleix $\lambda^T a_j \leq c_j$ per $j = 1, ..., n$ i a_j la columna j-èssima de A. Suposant que la base B està formada per les m primeres columnes de A, es compleix

$$\lambda^T a_j = c_j, \text{per a } j = 1, ..., m,$$

i aleshores, llevat que hi hagi degeneració,

$$\lambda^T a_j < c_j, \text{per a } j = m + 1, ..., n.$$

Per completar un cicle del mètode Símplex Dual es troba un nou vector $\overline{\lambda}$ convertint una de les igualtats en desigualtat i una de les desigualtats en igualtat, mentre s'incrementa el valor objectiu dual. Així, les m noves igualtats determinen una nova base.

Sigui u^i la i-èssima fila de B^{-1}, si $\overline{\lambda}^T = \lambda^T - \epsilon u^i$ llavors es verifica $\overline{\lambda}^T a_j = \lambda^T a_j - \epsilon u^i a_j$.

Així, com $z_j = \lambda^T a_j$ i $u^i a_j = \overline{a}_{ij}$, el ij-èssim element de la taula és

$$\begin{array}{ll} \overline{\lambda}^T a_j = c_j, & j = 1, \ldots, m, i \neq j \\ \overline{\lambda}^T a_i = c_i - \epsilon & \\ \overline{\lambda}^T a_j = z_j - \epsilon \overline{a}_{ij}, & j = m + 1, \ldots, n. \end{array}$$

A més, $\overline{\lambda}^T b = \lambda^T b - \epsilon x_{B_i}$.

La ϵ_0 que s'escull per mantenir la possibilitat dual es determina com:

Es vol trobar una $\overline{z}_j$ tal que $c_j - \overline{z}_j \geq 0$. Sabem que $\overline{z}_j = \overline{\lambda}^T a_j$ i que $\overline{\lambda}^T a_j = \lambda^T a_j - \epsilon u^i a_j$. Així, es verifica

$$\lambda^T a_j - \epsilon u^i a_j \leq c_j$$
$$\iff \lambda^T a_j - c_j \leq \epsilon u^i a_j$$

Ara es consideren els casos:

- Si $u^i a_j \geq 0$, llavors es complirà $\overline{z}_j \leq c_j$.
- En cas que $u^i a_j < 0$, aleshores la desigualtat es pot escriure com

  $$\frac{\lambda^T a_j - c_j}{u^i a_j} \geq \epsilon$$

  I com $z_j = \lambda^T a_j$ i $u^i a_j = \overline{a}_{ij}$, en resulta

  $$\frac{z_j - c_j}{\overline{a}_{ij}} \geq \epsilon$$

Per tant, el **Mètode del Símplex Dual** es resumeix com:

Donada una solució bàsica possible dual.

1. Si $x_B \geq 0$, la solució és òptima i s'acaba el procés.
2. Altrament, es selecciona un índex i tal que la i-èssima component de x_B compleixi $x_{B_i} < 0$.
3. Si $\overline{a}_{ij} \geq 0 \ \forall j \in \{1, \dots, n\}$ aleshores el dual no té màxim i acaba el procés.
4. Si $\overline{a}_{ij} < 0$ per algun j,

   $$\epsilon_0 = \frac{z_k - c_k}{\overline{a}_{ik}} = \min_j \left\{ \frac{z_j - c_j}{\overline{a}_{ij}} : a_{ij} < 0 \right\}.$$

5. Es crea una nova base B substituint a_i per a_k, i amb aquesta es determina la corresponent solució bàsica possible dual x_B. Es torna al pas 1.

A continuació es resol un problema de PL amb el mètode del Símplex dual.

Exemple 4.2.1. Per al problema següent de PL

$$\begin{array}{rrrrl}
\min & 3x_1 & +4x_2 & +5x_3 & \\
\text{tal que} & x_1 & +2x_2 & +3x_3 & \geq 5 \\
 & 2x_1 & +2x_2 & +x_3 & \geq 6 \\
 & \multicolumn{4}{c}{x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0}
\end{array}$$

La taula inicial és

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	t. i.
-1	-2	-3	1	0	-5
-2	-2	-1	0	1	-6
3	4	5	0	0	0

La base correspon a una solució possible dual ja que $c_j - z_j \geq 0 \; \forall j \in \{1, \ldots, 5\}$. S'escull un $x_{B_i} < 0$ qualsevol, per exemple $x_5 = -6$, i s'extreu el conjunt de variables bàsiques.

Per trobar l'element pivot es troba el mínim positiu $(z_j - c_j)/a_{2j}$:

$$\min_{j \in \{1,\ldots,5\}} \left\{ \frac{z_j - c_j}{\overline{a}_{2j}} \right\} = \min \left\{ \frac{-3}{-2}, \frac{-4}{-2}, \frac{-5}{-1} \right\} = \frac{-3}{-2}$$

Per tant, el pivot és el -2 de la primera columna. Es fan transformacions perquè el pivot es transformi en 1 i que la resta d'elements de la seva columna siguin nuls. En resulta la taula següent:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	t. i.
0	-1	$-5/2$	1	$-1/2$	-2
1	1	$1/2$	0	$-1/2$	3
0	1	$7/2$	0	$3/2$	9

S'escull $x_4 = -2$ per treure del conjunt de variables bàsiques. El pivot es determina anàlogament al pas anterior:

$$\min_{j \in \{1,\ldots,5\}} \left\{ \frac{z_j - c_j}{\overline{a}_{1j}} \right\} = \min \left\{ \frac{-1}{-1}, \frac{-7/2}{-5/2}, \frac{-3/2}{-1/2} \right\} = 1$$

Així, el nou pivot serà el -1 de la segona columna. Després de les pertinents transformacions, la següent taula és:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	t. i.
0	1	$5/2$	-1	$1/2$	2
1	0	-2	1	-1	1
0	0	1	1	1	11

Aquesta última taula ja dona una solució possible pel primal $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0$, que serà òptima.

Capítol 5

Programació entera

En aquest capítol les principals fonts consultades han estat [2] i [7].

Aquest capítol tracta els problemes de Programació Entera o PE, que són problemes de PL afegint la restricció que algunes o totes les variables només podran prendre valors enters. Tot i que fins aquest punt hem estudiat els problemes de PL a través de minimitzar funcions, per conveni la PE s'escriu maximitzant les funcions.

Moltes situacions pràctiques es poden modelar com problemes de PE. Es plantejaran dos mètodes per trobar solucions enteres per un sistema de desigualtats lineals: el de Branch-and-Bound i el de Pla Tallant.

5.1 Formulació del problema

Un problema de PL enter pur és un problema de la forma

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{tal que} \quad & Ax \leq b \\ \text{per} \quad & x \geq 0 \text{ enter} \end{aligned} \tag{5.1.1}$$

on $A \in R^{m \times n}$, $c \in R^n$, $b \in R^m$, $x \in R^n$.

Definició 5.1.1. *Un n-vector x és* enter *si $x \in \mathbb{Z}^n$. El conjunt $S = \{x \in \mathbb{Z}^n_+ : Ax \leq b\}$ de solucions possibles per (5.1.1) és el* conjunt lineal d'enters purs.

Un problema de PL enter mixt, o simplement problema enter, és de la forma

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x + h^T y \\ \text{tal que} \quad & Ax + Gy \leq b \\ \text{per} \quad & x \geq 0 \text{ enter}, \\ & y \geq 0 \end{aligned} \tag{5.1.2}$$

on $A \in R^{m \times n}$, $G \in R^{m \times p}$, $c \in R^n$, $h \in R^p$, $b \in R^m$, $x \in R^n$ i $y \in R^n$.

S'assumeix que $n \geq 1$. El problema de PL enter pur (5.1.1) és un cas particular del problema enter (5.1.2) amb $p = 0$.

Definició 5.1.2. *El conjunt*

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{Z}_+^n \times \mathbb{R}_+^p : Ax + Gy \leq b\} \tag{5.1.3}$$

és el conjunt lineal d'enters mixt*.*

En el cas que les variables enteres estiguin restringides a $0, 1$, el conjunt lineal d'enters mixt seria

$$S = \{(x, y) \in \{0, 1\}^n \times \mathbb{R}_+^p : Ax + Gy \leq b\} \tag{5.1.4}$$

En general, resoldre problema de PE és complex. Així, normalment el que es fa és una relaxació del problema de PE a un problema de PL, que serà més fàcil de resoldre numèricament.

Definició 5.1.3. *Per a un conjunt lineal d'enters mixt S, una* relaxació lineal de S *és un conjunt*

$$P' = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^p : A'x + G'y \leq b'\}$$

que conté S. Un problema de PL de relaxació *de (5.1.2) és un problema de PL*

$$\max\{c^T x + h^T y : (x, y) \in P'\}.$$

Les relaxacions de problemes de PL es poden resoldre per diversos mètodes de forma eficient en un període de temps raonable. A més, permeten generar de forma seqüencial relaxacions lineals de S que s'apropen cada vegada més al conjunt S.

Definició 5.1.4. *La* relaxació lineal natural *del conjunt S és*

$$P_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^p : Ax + Gy \leq b\},$$

que s'obté del conjunt S, descartant la condició de que el vector x sigui enter. La relaxació natural del problema de PE *de (5.1.2) és*

$$\max\{c^T x + h^T y : (x, y) \in P_0\}.$$

5.2 Mètodes per resoldre Problemes Enters

Es denotarà el problema enter (5.1.2) per facilitar la notació com

$$MILP : \max\{c^T x + h^T y : (x, y) \in S\}, \tag{5.2.1}$$

per a $S = \{(x, y) \in \mathbb{Z}_+^n \times \mathbb{R}_+^p : Ax + Gy \leq b\}$, admet una solució òptima finita (x^*, y^*) amb valor objectiu òptim corresponent z^*.

S'assumeix que es disposa d'una solució lineal (x^0, y^0) amb valor òptim corresponent z^0.

Sigui (x^0, y^0) solució òptima amb valor òptim corresponent z^0 pel problema de PL de relaxació natural

$$\max\{cx + hy : (x, y) \in P_0\}. \tag{5.2.2}$$

Com $S \subseteq P_0$, és clar que $z^* \leq z_0$. A més, si x^0 és un vector enter, aleshores $(x^0, y^0) \in S$ i, per tant, $z^* = z_0$. Aquest cas resol (5.2.1).

A continuació es detallen dos mètodes que resolen (5.2.1) en cas que almenys una de les components de x^0 no sigui entera.

5.3 Mètode de Branch-and-Bound

El mètode de Branch-and-Bound consisteix en trobar una solució òptima per a un problema de PE a través de fer particions del conjunt S i buscar solucions òptimes entre els subproblemes que es van generant en el procés. La primera part es coneix com a *branching*, on es creen dos subgrups de S, restringint el rang de x. La segona part del mètode és el *bounding*, i consisteix en limitar els valors objectius dels subproblemes que es generen al *branching*.

Així, el mètode de Branch-and-Bound genera un seguit de problemes de PL relaxant la condició de que x_j sigui variable entera, per $1 \leq j \leq n$, imposant restriccions lineals $x_j \leq u_j$ o $x_j \geq l_j$, per uns certs u_j i l_j. Cada problema de PL correspondrà a un node de l'arbre binari que es forma al iterar el procés.

Per a (x^0, y^0) solució òptima del problema (5.2.2), suposem que x_j^0 sigui no enter per algun j, per $1 \leq j \leq n$. Per simplicitat posem $f := x_j^0$ i es defineixen els conjunts

$$S_1 = S \cap \{(x, y) : x_j \leq \lfloor f \rfloor\} \text{ i } S_2 = S \cap \{(x, y) : x_j \geq \lceil f \rceil\},$$

on $\lfloor f \rfloor$ és l'enter més gran k tal que $k \leq f$ i $\lceil f \rceil$ és l'enter més petit l tal que $f \leq l$.

Com x_j ha de ser un enter per tot $(x, y) \in S$, és directe veure que (S_1, S_2) és una partició de S. Considerem els següents problemes enters per a les particions de S:

$$MILP_1 : \max\{cx + hy : (x, y) \in S_1\} \text{ i } MILP_2 : \max\{cx + hy : (x, y) \in S_2\}$$

Així, la solució òptima de (5.2.1) serà la millor solució entre les solucions òptimes de $MILP_1$ i $MILP_2$. Per tant, per trobar la solució del problema inicial s'hauran de resoldre aquests dos subproblemes.

Es defineixen les *relaxacions lineals naturals* de S_1 i S_2 com

$$P_1 = P_0 \cap \{(x, y) : x_j \leq \lfloor f \rfloor\} \text{ i } P_2 = P_0 \cap \{(x, y) : x_j \geq \lceil f \rceil\},$$

amb els problemes de PL de relaxació natural respectius

$$PR_1 : \max\{cx + hy : (x, y) \in P_1\} \text{ i } PR_2 : \max\{cx + hy : (x, y) \in P_2\}.$$

Per a un node N_i, z_i serà el corresponent valor objectiu del problema de PL PR_i. El node N_0 està associat al problema de PL de relaxació (5.2.2). Sigui L el conjunt de nodes que encara no s'han treballat. És a dir, els nodes que on no s'ha aplicat *branching* ni *bounding*. Sigui $\underline{z}$ el límit inferior del valor òptim z^*.

Mètode de Branch-and-Bound

1. Suposem $L := \{N_0\}, \underline{z} = -\infty, (x^*, y^*) := \emptyset$.
2. Si $L = \emptyset$, la solució (x^*, y^*) és òptima.
3. S'escull un node N_i d'entre els nodes pendents i seguidament s'elimina de L.
4. Es resol el problema PR_i. Si no és possible, es torna al pas 2. Si és possible, es pren (x^i, y^i) com a solució òptima per PR_i, amb z_i el valor objectiu corresponent.
5. Si $z_i \leq \underline{z}$, es torna al pas 2. Si (x^i, y^i), és solució possible per (5.2.1), es defineix $\underline{z} := z_i$, $(x^*, y^*) := (x^i, y^i)$ i es torna al pas 2. Altrament, s'avança al pas 6.
6. A partir del PR_i, es construeixen els problemes de PL PR_{i_1} i PR_{i_2} amb regions possibles més petites i tals que la seva unió no conté (x^i, y^i), però sí totes les solucions de PR_i per $x \in \mathbb{Z}^n$. S'afegeixen els nous nodes N_{i_1} i N_{i_2} a L i es torna al pas 2.

Exemple 5.3.1. Resoldrem el problema següent amb el mètode de Branch and Bound. Sigui

$$\begin{aligned} \max \quad & 5.5x_1 + 2.1x_2 \\ & -x_1 + x_2 \leq 2 \\ & 8x_1 + 2x_2 \leq 17 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & x_1, x_2 \text{ enters} \end{aligned}$$

un problema de PE. Partim de $L = \{N_0\}$, amb N_0 el node corresponent a resoldre el problema inicial, PR_0, amb el mètode del Símplex:

Es crea la taula

x_1	x_2	x_3	x_4	t. i.
-1	1	1	0	2
8	2	0	1	17
-5.5	-2.1	0	0	0

Entrarà a la base la variable x_1 i sortirà x_4. El pivot serà 8, ja que és la única component no negativa de la columna. Es fan les operacions pertinents i la següent taula és

x_1	x_2	x_3	x_4	t. i.
0	$5/4$	1	$1/8$	$33/8$
1	$1/4$	0	$1/8$	$17/8$
0	-0.73	0	0.69	-11.69

Ara entrarà a la base x_2 i sortirà x_3. S'escull el pivot entre les components de x_2 tal com $\min\left\{\frac{33/8}{5/4}, \frac{17/8}{1/4}\right\} = \frac{33/8}{5/4}$. Així, el pivot és $5/4$ i la següent taula serà:

x_1	x_2	x_3	x_4	t. i.
0	1	$4/5$	0.1	3.3
1	0	$-1/5$	0.1	1.3
0	0	0.58	0.76	14.08

Aquesta taula dona la solució òptima $x_1 = 1.3$ i $x_2 = 3.3$ amb valor objectiu $z = 14.08$ per a PR_0.

Degut a que els problemes de PE són de maximització, aquest problema s'ha resolt convertint-lo en un de minimització.

Així, 14.08 serà una cota superior de la solució òptima del problema de PE. El següent pas és fer *branching*, és a dir, crear dos subproblemes PR_{0_1} i PR_{0_2} en funció de x_1 tal com s'indica en el següent esquema:

$$\begin{tikzcd} & PR_0\colon\ x_1 = 1.3, x_2 = 3.3 \text{ i } z = 14.08 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ PR_{0_1}\colon\ x_1 = 1, x_2 = 3 \text{ i } z = 11.8 & & PR_{0_2}\colon\ x_1 = 2, x_2 = 0.5 \text{ i } z = 12.05 \end{tikzcd}$$

El problema PR_{0_1} és el problema inicial amb la restricció $x_1 \leq 1$. El PR_{0_2} és l'inicial amb la restricció $x \geq 2$.

A continuació veiem com s'arriba a les solucions per PR_{0_1}. Primerament es crea la taula del Símplex corresponent al problema

$$\begin{array}{ll} \max & 5.5x_1 + 2.1x_2 \\ & -x_1 + x_2 \leq 2 \\ & 8x_1 + 2x_2 \leq 17 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & x_1 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \text{ enters,} \end{array}$$

que serà

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	t. i.
-1	1	1	0	0	2
8	2	0	1	0	17
1	0	0	0	1	1
-5.5	-2.1	0	0	0	0

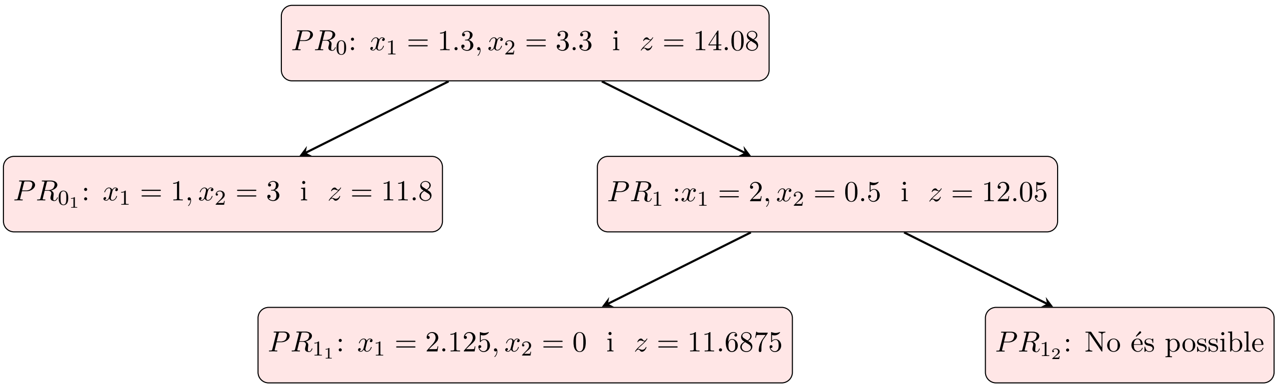
A través d'escollir pivots i fer les transformacions pertinents, tal com s'ha vist al resoldre la taula del Símplex del problema inicial d'aquest exemple, s'arriba a la taula

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	t. i.
0	1	1	0	1	3
0	0	-2	1	-10	3
1	0	0	0	1	1
0	0	2.1	0	7.6	11.8

Així, els resultats de PR_{0_1} són $x_1 = 1, x_2 = 3$ i $z = 11.8$. El problema PR_{0_2} es resol de forma anàloga.

Com $11.8 < 12.05$, farem el *bounding* cap al costat dret, ja que aquest és un problema de maximització i es vol un valor objectiu màxim.

Haurem d'iterar el procés ja que els resultats de PR_{0_2} no són enters. Així, prenem $PR_1 = PR_{0_2}$ i el procés segueix tal com mostra l'esquema següent:



Aquí acaba el mètode ja que PR_{1_2} no és possible i PR_{1_1} té un valor objectiu inferior a el de PR_{0_1}. Per tant, la solució òptima per aquest problema de PE és $x_1 = 1, x_2 = 3$ amb $z = 11.8$.

5.4 Mètode de Pla Tallant

Considerem el problema enter mixt

$$MILP : \max\{c^T x + h^T y : (x, y) \in S\},$$

per a $S = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^n_+ \times \mathbb{R}^p_+ : Ax + Gy \leq b\}$. Sigui $P_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^p_+ : Ax + Gy \leq b\}$ la relaxació lineal natural de S i

$$\max\{c^T x + h^T y : (x, y) \in P_0\} \tag{5.4.1}$$

la relaxació natural d'un problema de PE. S'assumeix que (x^0, y^0) és solució bàsica òptima de (5.4.1) amb valor objectiu òptim z_0.

En el cas que (x^0, y^0) no pertanyi a S, s'aplica el mètode de Pla Tallant. La idea consisteix en trobar una inequació que compleixi

$$\begin{aligned} &\alpha x + \gamma y \leq \beta \qquad \forall (x,y) \in S \\ &\alpha x^0 + \gamma y^0 > \beta \end{aligned}$$

L'existència d'aquesta inequació es garanteix sempre que (x^0, y^0) sigui una solució bàsica per (5.4.1).

Una inequació $\alpha u \leq \beta$ és *vàlida* per a un conjunt $K \subseteq \mathbb{R}^d$ si es compleix $\forall \overline{u} \in K$. Així, una inequació vàlida $\alpha x + \gamma y \leq \beta$ per S que no es compleix per (x^0, y^0) és un *hiperplà o cutting plane* que separa (x^0, y^0) de S.

Sigui $\alpha x + \gamma y \leq \beta$ un hiperplà, es defineix

$$P_1 = P_0 \cap \{(x,y) : \alpha x + \gamma y \leq \beta\}.$$

Com $S \subseteq P_1 \subset P_0$, la relaxació lineal del problema enter $MILP$ basada en P_1 serà més forta que la basada en P_0, ja que el valor objectiu òptim del problema lineal

$$\max\{c^T x + h^T y : (x,y) \in P_1\}$$

serà una cota superior per a z^* com a mínim tan bona com z^0 de (5.4.1), mentre que $(x^0, y^0) \notin P_1$.

Aplicar aquesta idea de forma iterativa és el que fa el **Mètode de Pla Tallant**:

- Pas inicial: posem $i = 0$.
- Pas iteratiu: es resol el problema lineal $\max\{c^T x + h^T y : (x,y) \in P_i\}$.
  - Si no és possible, tampoc ho serà el problema de PE i s'acaba el mètode.
  - Si la solució bàsica òptima (x^i, y^i) pertany a S, s'acaba el mètode.
  - Altrament, es troba un hiperplà $\alpha x + \gamma y \leq \beta$ que separi (x^i, y^i) de S i es defineix
  $$P_{i+1} = P_i \cap \{(x,y) : \alpha x + \gamma y \leq \beta\}.$$
  Es posa $i = i + 1$ i es repeteix el pas iteratiu.

El problema de com trobar un hiperplà que separi (x^i, y^i) de S es pot enfocar de diverses formes. Generalment, buscar un bon hiperplà per tallar és costós en temps i aleshores s'acostumen a buscar diversos hiperplans que separin (x^i, y^i) de S, afegint-los al nou P_{i+1}.

Hi ha molts *procediments de separació* diferents que resolen aquest problema. Un d'ells és el que es coneix com Talls de Gomory:

Si es compleix

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = a_0$$

per $x_1, \ldots, x_n$ variables enteres no negatives i $a_0 \notin \mathbb{Z}$, aleshores el *tall de Gomory* és

$$\sum_{j=1}^{n} (a_j - \lfloor a_j \rfloor) x_j \geq a_0 - \lfloor a_0 \rfloor$$

Aquesta desigualtat es compleix per tot $x \in \mathbb{Z}^n_+$ que compleixi $\sum_{j=1}^n a_j x_j = a_0$, ja que aleshores $\sum_{j=1}^n (a_j - \lfloor a_j \rfloor) x_j = a_0 - \lfloor a_0 \rfloor + k$ per algun enter k.

A continuació s'exemplifica el mètode de Pla Tallant a través del mateix problema de PE que s'ha resolt més adalt amb el mètode de Branch-and-Bound:

Exemple 5.4.1. Sigui

$$\begin{array}{ll} \max & 5.5x_1 + 2.1x_2 \\ & -x_1 + x_2 \leq 2 \\ & 8x_1 + 2x_2 \leq 17 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & x_1, x_2 \text{ enters} \end{array}$$

un problema de PE. S'introdueixen les variables enteres positives x_3, x_4 per convertir el sistema a igualtats i z com el valor objectiu de la funció del problema. Aleshores:

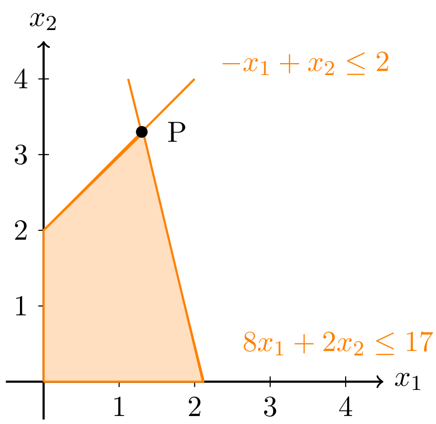
$$\begin{array}{rcr} z - 5.5x_1 - 2.1x_2 & = & 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 & = & 2 \\ 8x_1 + 2x_2 + x_4 & = & 17 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \text{ enters} \end{array}$$

Aquest problema es pot resoldre amb una taula del Símplex tal com s'ha fet a l'exemple (5.3.1). La última taula que resulta és

x_1	x_2	x_3	x_4	t. i.
0	1	0.8	0.1	3.3
1	0	-0.2	0.1	1.3
0	0	0.58	0.76	14.08

i els resultats que s'obtenen són $x_1 = 1.3, x_2 = 3.3, x_3 = 0, x_4 = 0$ i $z = 14.08$.

Com x_1 i x_2 són variables enteres, aquests resultats no són vàlids. Gràficament, posant $P = (1.3, 3.3)$, el problema és



S'ha de buscar, doncs, un hiperplà. Es pot buscar a partir de l'equació que resulta de la primera fila de la última taula del Símplex:

$$0.8x_3 + 0.1x_4 = 3.3 - x_2$$

Com x_2 és una variable entera, $3.3 - x_2 = 0.3 + k$ per algun $k \in \mathbb{Z}$ i per tant

$$0.8x_3 + 0.1x_4 = 0.3 + k.$$

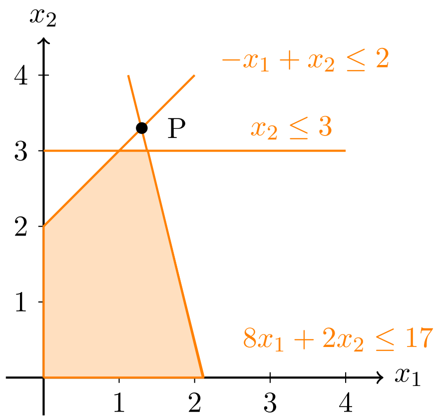
Com $0.8x_3 + 0.1x_4 \geq 0$, necessàriament tindrem que $k \geq 0$. Aleshores es verfica

$$0.8x_3 + 0.1x_4 \geq 0.3.$$

Substituint en aquesta desigualtat les expressions $x_3 = 2 + x_1 - x_2$ i $x_4 = 17 - 8x_1 - 2x_2$, en resulta

$$\begin{aligned} & 0.8(2 + x_1 - x_2) + 0.1(17 - 8x_1 - 2x_2) \geq 0.3 \\ \iff & 1.6 + 0.8x_1 - 0.8x_2 + 1.7 - 0.8x_1 - 0.2x_2 \geq 0.3 \\ \iff & 3 \geq x_2 \end{aligned}$$

S'afegeix aquest nou hiperplà a les restriccions del problema. Gràficament es veu com



Així, ara s'ha de resoldre

$$\begin{aligned} z - 5.5x_1 - 2.1x_2 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 8x_1 + 2x_2 + x_4 &= 17 \\ x_2 + x_5 &= 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 & \text{ enters} \end{aligned}$$

que té solució $x_1 = 1.375, x_2 = 3, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0$ i $z = 13.8625$. Posem $Q = (1.375, 3)$. Aquests resultats tampoc són enters, així que es busca un altre hiperplà de forma anàloga al cas anterior a partir de la última taula del Símplex. Com x_1 és una variables entera, per algun $k \in \mathbb{Z}$ tindrem

$$0.125x_4 + 0.75x_5 = 0.375 + k.$$

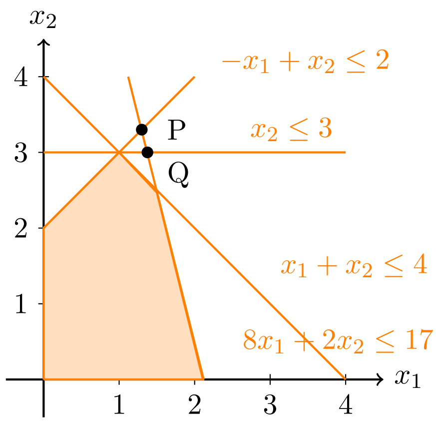
Com $0.125x_4 + 0.75x_5 \geq 0$, necessàriament $k \geq 0$ i per tant l'hiperplà és

$$0.125x_4 + 0.75x_5 \geq 0.375.$$

Substituint $x_4 = 17 - 8x_1 - 2x_2$ i $x_5 = 3 - x_2$ en resulta

$$x_1 + x_2 \leq 4.$$

S'afegeix aquest nou hiperplà a les restriccions del problema. Gràficament es veu com:



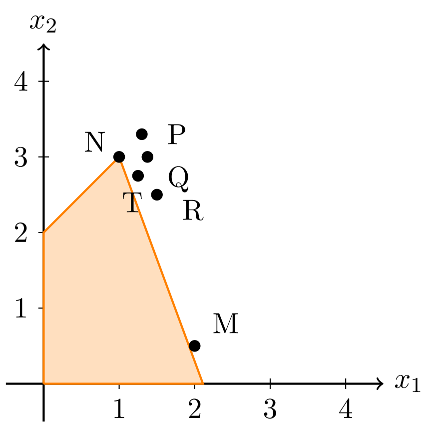
Així, ara s'ha de resoldre

$$\begin{aligned} z - 5.5x_1 - 2.1x_2 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 8x_1 + 2x_2 + x_4 &= 17 \\ x_2 + x_5 &= 3 \\ x_1 + x_2 + x_6 &= 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\geq 0 \text{ enters} \end{aligned}$$

Els resultats són $R = (x_1, x_2) = (1.5, 2.5)$ per $x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$ i $z = 13.5$. Aquests resultats encara no són enters. El procés s'ha d'iterar encara dos cops més, donant en cada iteració les solucions:

- $T = (x_1, x_2) = (1.25, 2.75)$ i $z = 12.65$.
- $M = (x_1, x_2) = (2, 0.5)$ i $z = 12.05$.
- $N = (x_1, x_2) = (1, 3)$ i $z = 11.8$.

Finalment N és la solució, ja que compleix que les variables siguin enteres. Després d'afegir totes les restriccions, gràficament el problema queda com:



Conclusions

En aquest apartat les principals fonts consultades han estat [3] i [8].

Aquesta és l'última part del treball i pot considerar-se que s'han complert els objectius plantejats, que eren establir una base sòlida de coneixements sobre la Programació Lineal, el mètode del Símplex, la Programació Entera i els mètodes de Branch-and-Bound i Pla Tallant.

Al llarg del treball s'han exposat les bases teòriques necessàries per explicar cada cosa i s'han resolt exemples de forma explícita per tal de detallar el funcionament dels mètodes.

Tal com m'ha repetit la meva tutora, la Dra. Romano, molts cops durant aquesta experiència, l'objectiu principal ha estat "aprendre alguna cosa que m'interessi". I realment ha estat així perquè he tingut l'oportunitat d'aprofundir en el camp de les Matemàtiques Aplicades, que és el que sempre m'ha interessat més durant la carrera. He pogut formar-me en mètodes d'optimització amb gran capacitat d'aplicació a diverses àrees.

És clar que els mètodes tractats en aquest treball són, tot i que molt enriquidors a nivell teòric, poc pràctics per aplicar-los a problemes reals. Per tant, el següent pas seria investigar més sobre altres mètodes més eficients com ara el Símplex revisat, el mètode de l'el·lipsoide o el mètode de Karmarkar. També, estudiar més en detall els procediments de separació que s'utilitzen en el mètode de Pla Tallant seria molt enriquidor.

Bibliografia

[1] CONFORTI, M., CORNUEJOLS, G. i ZAMBELLI, G., 2014. *Integer programming.* Cham: Springer.

[2] DANTZIG, G.B. George B. i THAPA, M.N., 1997. *Linear programming 1: introduction.* 1st ed. 1997. New York, New York: Springer.

[3] KORTE, B. i VYGEN, J., 2006. *Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms.* Berlin/Heidelberg: Springer Berlin / Heidelberg.

[4] LUENBERGER, D.G., 1989. *Programación lineal y no lineal.* Wilmington: Addison-Wesley Iberoamericana.

[5] MATOUSEK, J. i GARTNER, B., 2007. *Understanding and Using Linear Programming.* Berlin/Heidelberg: Springer Berlin / Heidelberg.

[6] PAN, P.-Q., 2023. *Linear programming computation.* 2nd ed. 2023. Singapore: Springer.

[7] SALKIN, H.M., MATHUR, K. i HAAS, R., 1989. *Foundations of integer programming.* New York: North-Holland.

[8] SCHRIJVER, A., 1989. *Theory of linear and integer programming.* Chichester: Wiley.

[9] VANDERBEI, R.J., 2020. *Linear Programming Foundations and Extensions.* 5th ed. 2020. Cham: Springer International Publishing.