La tensión entre opuestos como generadora de conocimiento matemático: El caso discreto-continuo en el cálculo

Tension between opposite perspectives as a generator of mathematical knowledge: The discrete-continuous case in calculus

Tensione tra prospettive opposte come generatore di conoscenza matematica: Il caso discreto-continuo nel calcolo

Carlos Rondero Guerrero,[1] Aarón Reyes Rodríguez[1] y Vicenç Font Moll[2]

[1] *Área Académica de Matemáticas y Física, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, México*

[2] *Facultat de Formació del Professorat, Departament de Didàctica de les Ciències Experimentals i la Matemàtica, Universitat de Barcelona, España*

Resumen. *Durante la enseñanza del cálculo, generalmente no se discute la tensión discreto-continuo, lo cual repercute en el tipo de comprensión generada por los estudiantes respecto de las ideas centrales o fundamentales de esta rama de las matemáticas. Afirmamos que tal tensión propicia o es generadora de articulaciones entre objetos matemáticos, las cuales, a su vez, constituyen nuevo conocimiento. Se analiza la tensión discreto-continuo en tres casos, presentes en el cálculo: (i) Teorema del valor medio para derivadas, (ii) Teorema del valor medio para integrales y (iii) Teorema fundamental. Se rescata la coexistencia y complementación de ambos enfoques. Además, se resalta la presencia de la noción de promediación como un eje de articulación de estos tres resultados, tanto en lo discreto como en lo continuo. Finalmente, destacamos la relevancia para la didáctica de la matemática el reflexionar en torno a la tensión entre una diversidad de opuestos que perviven en la matemática, la cual da cuenta y es un aspecto más de la complejidad de sus objetos de estudio. Todo lo anterior constituye una herramienta la cual puede apoyar a la re-construcción orientada del conocimiento matemático, como perspectiva didáctica.*

Palabras clave: tensión discreto-continuo, didáctica, articulación, complejidad, promediación.

Abstract. *During the teaching of calculus, the discrete-continuous tension is generally not discussed, which affects the type of understanding that students generate regarding fundamental ideas in this branch of mathematics. We argue that such tension fosters or generates articulations between mathematical objects, which,* *in turn, constitute new knowledge. The discrete-continuous tension is analyzed in three cases: (i) Mean value theorem for derivatives, (ii) Mean value theorem for integrals and (iii) Fundamental theorem. The coexistence and complementation of both approaches is rescued. In addition, the presence of the notion of averaging as an articulation axis of these three results, in both discrete and continuous versions, is highlighted. Finally, we pointed up the relevance that reflection on the tension between a diversity of opposites has for the didactic of mathematics, which accounts for and is one more aspect of the complexity of the objects that are studied in mathematics. All of the above constitutes a tool that can support the oriented re-construction of mathematical knowledge, as a didactic perspective.*

Keywords: discrete-continuous tension, didactic, articulation, complexity, averaging.

Sunto. *Durante l'insegnamento dell'analisi matematica, la tensione discreto-continuo non viene generalmente discussa, il che si ripercuote sul tipo di comprensione generata dagli studenti rispetto alle idee fondamentali di questa branca della matematica. Sosteniamo che tale tensione favorisca o generi articolazioni tra gli oggetti matematici, che a loro volta costituiscono nuova conoscenza. La tensione discreto-continuo viene analizzata in tre casi: (i) teorema del valore medio delle derivate, (ii) teorema del valore medio degli integrali e (iii) teorema fondamentale. Viene evidenziata la coesistenza e la complementarità di entrambi gli approcci. Inoltre, si sottolinea la presenza della nozione di media come asse di articolazione di questi tre risultati, sia nel discreto che nel continuo. Infine, sottolineiamo l'importanza, per la didattica della matematica, di riflettere sulla tensione tra una diversità di opposti che esiste in matematica, che costituisce ed è un altro aspetto della complessità dei suoi oggetti di studio. Tutto ciò si configura come uno strumento che può supportare la ri-costruzione orientata del sapere matematico, come prospettiva didattica.*

Parole chiave: tensione discreto-continuo, didattica, articolazione, complessità, media.

1. Introducción

En este apartado se lleva a cabo una reflexión de cómo la tensión entre los opuestos discreto-continuo ha sido generadora de conocimiento en disciplinas científicas como la física; particularmente, en la electrónica. Posteriormente, identificamos una analogía de dicha tensión entre opuestos, presente en tres de los teoremas más relevantes del cálculo, y evidenciamos cómo esta es generadora de articulaciones entre objetos matemáticos, con la consecuente generación de nuevo conocimiento o la re-construcción de conocimiento ya existente, para quien lleva a cabo la reflexión.

El análisis de la tensión conceptual discreto-continuo ha tenido relevancia en el desarrollo de la electrónica, siendo este un caso paradigmático para comprender cómo tal tensión entre opuestos es generadora de articulaciones entre ideas y por ende de saberes diversos. En esta disciplina hubo un predominio de lo analógico (continuo) durante mucho tiempo; sin embargo, se da un cambio de paradigma cuando se pasa a la electrónica digital (discreto), lo cual propició un enorme avance en el desarrollo tecnológico. Es decir, se pasó de lo analógico a lo digital, entre otros aspectos, con el objetivo de eficientar el uso de las señales electromagnéticas. Esto es, la discretización (digitalización) de señales, permite incluir una enorme cantidad de información en el espacio electromagnético. Como ejemplo del desarrollo tecnológico que se fue estructurando, en un tiempo relativamente breve, se diseñaron y se emplearon en diversas aplicaciones, los convertidores analógico-digital y digital-analógico, para pasar de una representación a otra.

Estos avances en la electrónica no se hubieran podido lograr sin la modelación matemática de las señales electromagnéticas a través de funciones de variables tanto discretas como continuas. En consecuencia, es importante discutir breve y sintéticamente sobre la presencia de la tensión discreto-continuo en el ámbito escolar.

En las diferentes asignaturas de electrónica, impartidas durante la formación profesional escolarizada, se presenta una problemática cuando los estudiantes las cursan ya que, en general, solo han tratado con funciones continuas en los cursos previos de cálculo y de ecuaciones diferenciales. Sin embargo, desde un inicio en tales asignaturas se requiere abordar fenómenos físicos desde ambas perspectivas. La dominancia de las herramientas matemáticas en lo continuo propicia una carencia de articulación conceptual y cognitiva entre ambos dominios, discreto-continuo, produciéndose entendimientos superficiales ante la falta de articulaciones.

Cuando se lleva a cabo un proceso de cuestionamiento sobre la naturaleza de los objetos matemáticos y sus diversas interrelaciones, se genera una red de significados, que se traduce en nuevo conocimiento disciplinar, o en una re-construcción de saberes ya existentes. Esta red, a su vez, se constituye en una herramienta didáctica, en un mapa con nuevas rutas sugeridas para llevar a cabo una re-construcción orientada del conocimiento en los salones de clase.

Resulta relevante considerar la prevalencia del contexto continuo en el cálculo para la construcción de los desarrollos teóricos, mientras que el contexto discreto está enfocado en las aplicaciones del análisis numérico, sustentado fuertemente en lo recursivo y en lo iterativo. Por otra parte, frecuentemente en matemáticas se requieren crear diversos modelos, discretos y continuos, los cuales buscan describir la realidad desde ambas perspectivas, complementando el entendimiento de los fenómenos. Hay pues necesidad de atender la problemática mencionada, acerca de la conveniente y necesaria articulación entre los opuestos discreto-continuo en el cálculo, a partir de la reflexión sobre la tensión entre ellos.

Las consideraciones anteriores, son una muestra acerca de la complejidad de los objetos matemáticos, de forma que las reflexiones sobre esta, y la articulación de sus componentes son frecuentes en diversos enfoques teóricos utilizados en la Educación Matemática (Rondero & Font, 2015). La doble mirada complejidad-articulación aplicada a la tensión discreto-continuo, permite profundizar en las diversas génesis del conocimiento y algunas de sus implicaciones didácticas, particularmente algunas posibles rutas de acción implementadas en los salones de clase. De acuerdo con Torres (2009) y García (2013) consideramos que la articulación entre contrarios se puede pensar como un diccionario, permitiendo *traducir* nociones y resultados, de un contexto a otro, con la finalidad de obtener nuevas nociones y resultados a partir de los ya conocidos.

2. Antecedentes históricos de la tensión discreto-continuo en el cálculo

La palabra o término tensión está referida siempre a dos contrarios u opuestos, ligados entre sí, entre los cuales no necesariamente se da una síntesis o conciliación. Si nos ubicamos en el contexto de la matemática, la tensión puede entenderse como esfuerzo orientado a conseguir un resultado, de forma que los contrarios perviven. En nuestro caso, los aspectos discretos y continuos presentes en la matemática, considerados como opuestos, tienen una tensión inherente propiciatoria de una construcción de conocimiento, cuando hay un predominio de uno sobre el otro o bien una transición entre ellos. Es importante resaltar cómo los significados asociados a cada perspectiva (discreto-continuo) proporcionan información diferenciada que complementa y fortalece los significados de la otra. Tal complementación se manifiesta como una construcción de conocimiento, mediante un proceso de articulación de objetos matemáticos.

A continuación se hará una breve revisión histórica referida a algunos de los principales momentos donde se identificó la presencia de la tensión discreto-continuo. Los momentos abordados en el análisis son aquellos de los cuales se tiene la seguridad de la presencia de tal tensión, aunque tal temática es muy amplia y se pueden llevar a cabo desarrollos más detallados, con respecto al aquí realizado, enfocado en la génesis del cálculo.

Un análisis histórico-epistemológico consiste en un “análisis epistémico, principalmente internalista, de un determinado campo conceptual en la historia de la ciencia” (Adúriz, 2010, p. 129), cuya finalidad es entender la naturaleza, significado y sentido de una idea o concepto, “al determinar las causas que posibilitaron su aparición, de identificar las diferentes etapas de su construcción en el ámbito científico, así como las condiciones de sus transformaciones sucesivas hasta llegar en el aula como objeto de enseñanza” (Martínez & Poirier, 2008, p. 202). Precisamente, el identificar las diferentes expresiones de la tensión discreto-continuo, permite reconocer sus contribuciones en la evolución de las ideas del cálculo.

Bergé y Sessa (2003) plantean la recuperación de la complejidad del objeto estudiado mediante un análisis epistemológico para permitir al investigador ampliar las fronteras de sus concepciones epistemológicas; aportando insumos significativos para la problematización de una propuesta didáctica. De la misma manera, Farfán (1997) afirma que el análisis epistemológico permite al didacta tomar distancia y controlar las representaciones epistemológicas de las matemáticas inducidas por la enseñanza. Dicho análisis provee de historicidad a los conceptos matemáticos presentados en la instrucción como objetos universales, así como a las nociones metamatemáticas y protomatemáticas. Además, posibilita la observación de las disparidades entre el saber científico y el enseñado. Esto contribuye a desterrar ficciones de la escuela; por ejemplo, que los objetos de enseñanza son copias simplificadas, pero fieles de los objetos de la ciencia.

Adentrándonos en una breve perspectiva histórica, para los griegos una cantidad discreta o número podía dividirse sólo un número finito de veces, hasta obtener la unidad, mientras que una cantidad continua o magnitud podía dividirse indefinidamente sin perder su esencia. En esta cultura, “la unidad, o uno, no era un número; era el inicio del número y era usado para medir la multiplicidad. Los números fueron meras colecciones de unidades discretas las cuales median una multiplicidad” (Neal, 2002, p. 1). Con Pitágoras (564 – 475 a. C.) existe un predominio de lo discreto, principalmente en lo referido a propiedades de los números figurativos.

Para Aristóteles (384 – 322 a. C.), los números y las magnitudes constituían clases ajenas e independientes, siendo la aritmética la encargada del estudio de los primeros y la geometría del estudio de las segundas (Aristóteles, IV a. C./1994, 75b; Franklin, 2014; Klein, 1992; Waldegg, 1996).

Este filósofo consideraba a la unidad como una sustancia sin posición, como inicio del número, utilizada para medir una multitud, pero en sí, no era un número (Neal, 2002): “el número mínimo, en sentido absoluto, es el dos” (Aristóteles, IV a. C./1995, 220ª, 25); por el contrario, una magnitud “es divisible en partes siempre divisibles” (Aristóteles, IV a. C./1995, 231b, 15). Se puede conjeturar que la falta de consideración de la tensión discreto-continuo en Aristóteles fue un factor limitante para la realización de contribuciones más amplias a la matemática.

Por su parte, Euclides (325 – 265 a. C.) utilizó la misma definición aristotélica de número y unidad; así como la distinción entre número y magnitud, lo cual se refleja en la separación entre los resultados geométricos (Libros I-VI) y los aritméticos (Libros VII-IX) en los *Elementos* (Neal, 2002). En el libro VII de los Elementos, Euclides define la unidad como “aquello por virtud de lo cual cada una de las cosas es llamado uno” (Euclid, 1908, p. 277), mientras considera a un número como “una multitud compuesta de unidades” (ibid.). En la obra de Euclides se percibe un predominio de lo continuo, manifestado en el desarrollo de las ideas geométricas, de modo que este libro ha sido considerado el texto por excelencia de geometría, incluso hasta la época moderna.

Ahora bien, el gran pensador griego, Arquímedes (287 – 212 a. C.), a quien diversos autores lo señalan como iniciador del cálculo, emplea métodos discretos para calcular, por ejemplo, áreas y volúmenes de figuras y cuerpos geométricos, particularmente usando el método de exhaución, llega al resultado "la razón que existe entre el círculo y el cuadrado que tiene por lado el radio del círculo, es la misma que se obtiene entre la longitud de la circunferencia del círculo y su diámetro" (Pla, 2009, p. 184). En los trabajos de Arquímedes se puede apreciar una articulación entre aspectos discretos y continuos, ya que para calcular magnitudes usa métodos basados en lo discreto y en consideraciones relativas al equilibrio (excesos y defectos), aunado a su forma de calcular una magnitud, acotándola mediante excesos y defectos, los cuales se van aproximando al valor de la magnitud. Este método arquimediano de los excesos y defectos, propició la obtención de resultados muy relevantes, por parte de Arquímedes, como el cálculo aproximado de π, entre otros.

Aunque históricamente es un salto muy grande, durante la edad media hubo pocos avances en la ciencia en general. Ya iniciado el renacimiento en el siglo XVI, una de las aportaciones más trascendentes a la ciencia, la constituye la Geometría Analítica, debida a Descartes (1596 – 1650), la cual está sustentada filosóficamente en el *Discurso del Método* (Descartes, 1637/2006). Con Descartes, poco a poco la visión dicotómica entre discreto-continuo, se fue sustituyendo por una *visión integradora* en la que los números o las letras podían representar tanto a una cantidad discreta como la longitud de un segmento (continua).

Descartes primero se sitúa en el contexto del álgebra geométrica de los griegos (para explicarnos cómo se pueden hacer las operaciones aritméticas utilizando regla y compás), para romper inmediatamente con esta tradición al considerar que cualquier expresión algebraica (por ejemplo, a^2 y b^3) son segmentos (para los griegos antiguos a^2 y b^3 eran un área y un volumen).

Interesa identificar la presencia de la tensión discreto-continuo en el cálculo, para lo cual se muestran algunas aportaciones de los llamados pre-calculistas. Los procedimientos empleados, entre otros por Cavalieri (1598 – 1647) y Wallis (1626 – 1703), son esencialmente de carácter discreto, para encontrar un área bajo la curva que se puede considerar como una variable continua. Todo lo cual es una muestra de la tensión entre ambas perspectivas, la discreta y la continua. Por su parte, Wallis en su obra *Arithmetica infinitorum* (Proposition 39), publicada en 1655, encuentra el mismo resultado previo dado por Cavalieri, desde su aproximación de los indivisibles, el cual expresamos en notación moderna, como lo hace Edwards (1979):

$$\int_0^1 x^k \, dx = \frac{1}{k+1} \tag{1}$$

Wallis considera:

$$\int_0^1 x^k \; dx = \frac{0^k+1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^k+n^k+n^k+\cdots+n^k} \tag{2}$$

y analiza algunos casos particulares para valores pequeños de k. Una vez fijado el valor de k, calcula el cociente para diversos valores de n e identifica en cada caso el patrón, para concluir con la igualdad expresada en la ecuación (1).

Para fines prácticos se usa en el párrafo previo la notación de límite, aunque Wallis y otros, sólo consideraban valores muy grandes de n, para así encontrar el valor "exacto" del área bajo la curva. De manera tal que para calcular el área bajo la curva (cantidad continua) Wallis ocupa métodos aritméticos fundamentados en lo discreto. En cierta forma se resuelve la tensión cuando para cada valor de k, dado, se encuentra el patrón correspondiente y al tomar valores muy grandes aumentando de n, se obtiene el valor exacto del área bajo la curva x^k.

Por otra parte, otra perspectiva discreta es la de las llamadas *Sumas de Bernoulli*, cuyos desarrollos se deben a Johann Bernoulli (1667 – 1748) las cuales muestran algunas características relevantes de las sumas de potencias de números enteros positivos, de manera que, en el caso discreto, se identifica claramente un patrón, donde al realizar la suma de las potencias de grado n, la misma aumenta en una unidad:

$$\int n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \tag{3}$$

$$\int n^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \tag{4}$$

$$\int n^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 \tag{5}$$

$$\int n^4 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^2 - \frac{1}{30}n \tag{6}$$

Un aspecto relevante de las sumas de Bernoulli es que la suma de los coeficientes es igual a uno, en cada caso. Bernoulli usa el símbolo de integral para denotar la suma de potencias, por ejemplo la suma de cubos de números naturales se representa mediante la ecuación (5).

A partir del resultado previo, si se quiere calcular la integral de 0 a 1 de x^3, se hace una equipartición de n subintervalos, de tamaño $1/n$. Se calculan los valores de la función en el extremo de cada subintervalo y cuando se realiza la suma de todos esos valores, se obtiene la suma de los cubos de los primeros n naturales divididos entre n^3. Si el numerador se divide entre n, se tiene un promedio de alturas y para no alterar la igualdad, en el denominador se obtiene n^4. Entonces la suma de Bernoulli se divide entre n^4 y al hacer esto, para valores muy grandes de n, se encuentra el mismo resultado, para k=3, obtenido por Cavalieri y Wallis, entre otros:

$$\int_0^1 x^3 \, dx = \frac{1}{4} \tag{7}$$

En este caso se puede ver la articulación existente entre lo discreto y lo continuo, pues la integral de una función es un objeto matemático basado en objetos continuos, por contraste el resultado de ésa integral está expresado en términos de valores discretos. En general las integrales de polinomios coinciden con este mismo resultado, lo cual es una muestra de cómo la complejidad existente en la tensión discreto-continuo, se "resuelve" a través de explicitar la articulación que se va dando entre ambas perspectivas.

En algunos momentos históricos la tensión discreto-continuo ha sido más fructífera para la generación de conocimiento. En la génesis del cálculo, Newton (1643 – 1727) consideraba una curva como descrita por un punto en movimiento continuo, mientras Leibniz (1646 – 1716), conceptualizaba una curva formada por una sucesión (discreta) de segmentos infinitesimales de rectas infinitamente pequeños, para Newton, resultaba de interés describir el movimiento de los cuerpos. Concebir una curva como algo continuo le sirvió para justificar el significado de la derivada como velocidad instantánea en el momento en que la partícula llega a su posición final (no antes ni después).

La perspectiva discreta de Leibniz le permitió concebir primero su referente epistemológico discreto, representado simbólicamente mediante la ecuación (8) y posteriormente, el triángulo característico, el cual se puede considerar como una base conceptual de gran parte del cálculo (infinitesimal) leibniziano.

$$\sum_{k=0}^{n} d_k = a_n - a_0 \tag{8}$$

Con la finalidad de ilustrar otro caso de la tensión discreto-continuo, considere que así como los números (mirada discreta) se pueden conceptualizar como longitudes de segmentos (mirada continua); a su vez, los segmentos se pueden considerar de manera discreta. Por ejemplo, Leibniz, encuentra un desarrollo en serie infinita del número π/4, la cual está representada por recíprocos de impares con signos alternantes:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \cdots = \frac{\pi}{4} \tag{9}$$

Es decir, se genera, una serie infinita de números racionales convergente al irracional π/4, lo que permite identificar el tránsito de una visión continua a una de tipo discreto, donde el todo (el segmento de longitud π/4). Esto es, la octava parte del perímetro de una circunferencia se puede considerar como una “suma infinita” de partes discretas.

El desarrollo del cálculo infinitesimal permitió a Leibniz articular lo discreto y lo continuo, ya que él “trató de conciliar entre la individualidad y el continuo, estableciendo una armonía entre las sustancias individuales y el universo infinito” (Luna, 2016, p. 13). El nuevo algoritmo infinitesimal no fue factible sin el convencimiento respecto de la operación del universo como una serie de combinaciones dialécticas desprendidas del “Uno trascendente”, de lo cual se deriva la tesis central del cálculo: las diferencias y las integraciones son opuestas, pero también complementarias. Así Leibniz logra identificar, por medio de un análisis meramente formal, la conexión entre lo continuo y lo discreto, para de ese modo establecer un vínculo entre ellos. La realidad debe ser, entonces, continua y discreta a la vez.

La perspectiva teórica de Leibniz de considerar a lo discreto y lo continuo como elementos vinculantes, pues su división es sólo una apariencia, reflejada en gran parte de sus contribuciones al cálculo diferencial e infinitesimal. En forma tal que la tensión subyacente a lo discreto-continuo en el cálculo de la recta tangente a una curva y el área bajo la misma, queda resuelta, mediante la construcción de conocimiento correspondiente.

Por último, en el caso de Cauchy (1789 – 1857), la definición de la derivada como el límite de un cociente, ya sea de cantidades evanescentes o de diferencias infinitesimales, propició una cierta resolución de la tensión discreto-continuo y da pauta para el desarrollo del análisis matemático.

Los diversos métodos y modelos matemáticos mencionados tienen la finalidad de articular lo discreto y lo continuo, a la par de lograr una reducción de la complejidad, por ejemplo, el cálculo de áreas mediante integrales se realiza a través de operaciones aritméticas que involucran números enteros, como es el caso de la suma de potencias de enteros.

3. Contexto de reflexión, tres versiones discreta-continua de teoremas del Cálculo

En esta sección, se presentan argumentos para evidenciar la relevancia de la articulación entre lo discreto y lo continuo, para lo cual se analizan versiones desde ambos enfoques de tres de los teoremas más importantes en cálculo, los cuales son, por supuesto, una muestra de la complejidad del Cálculo, cuya comprensión requiere explicitar la necesaria articulación de sus objetos de estudio: (i) del valor medio para derivadas, (ii) del valor medio para integrales y (iii) el teorema fundamental. En los tres casos se analiza la mencionada complejidad entre lo discreto y lo continuo, desde una perspectiva histórico-epistemológica.

En el análisis de cada caso se describe la versión continua del teorema, misma que aparece en los libros de cálculo, y posteriormente se analiza la correspondiente versión de fundamentación discreta, identificada a partir de la evocación al cálculo leibniziano. En cada teorema, la estructura matemática tiene una analogía evidente y la promediación juega un papel relevante para la demostración de las versiones discretas de los tres teoremas. Precisamente, la promediación permite identificar la presencia y potencia constructora del promedio en estos teoremas del cálculo.

3.1. El teorema fundamental del cálculo

Una de las formas del teorema fundamental del cálculo para una función continua f, en el intervalo $[a, b]$, donde F es una primitiva de f, es decir, $F'(x) = f(x)$, se expresa como:

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a) \tag{10}$$

o bien:

$$F(b) = F(a) + \int_a^b f(x)\ dx \tag{11}$$

Una versión diferente del mismo teorema, en la que interviene la diferencial de la función primitiva, puede expresarse como:

$$\int_a^b dF = F(b) - F(a) \tag{12}$$

o de forma equivalente:

$$F(b) = F(a) + \int_a^b dF \tag{13}$$

Cuya interpretación es: el valor acumulado $F(b)$, es igual al valor inicial $F(a)$, más la acumulación o integral (suma) de su diferencial (diferencias). Analizando estas dos últimas expresiones, la primera indica que la acumulación de variaciones locales es igual a la variación total o global, y la segunda a la equivalencia entre el valor acumulado final, y la suma del valor acumulado inicial, más la acumulación correspondiente. El mismo teorema, en donde ahora aparece la diferencial de la función original, toma la forma:

$$\int_a^b df = \int_a^b f'(x)\, dx = f(b) - f(a) \tag{14}$$

luego:

$$f(b) = f(a) + \int_a^b df \tag{15}$$

Ahora bien, por contraste, en el trabajo de Leibniz (Edwards, 1979; Grattan-Guinness, 1980), se puede identificar la versión discreta del teorema fundamental del cálculo. Dada una sucesión finita de números, se pueden calcular, las primeras diferencias de la sucesión de números, es decir, la diferencia de un término con el que le precede. Dada la sucesión original, se obtiene otra sucesión de diferencias cada una de las cuales representa una variación discreta.

Sea $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ una sucesión finita de números, se puede construir una sucesión de las primeras diferencias dada por:

$$d_k = a_k - a_{k-1} \tag{16}$$

Surge entonces uno de los resultados de Leibniz más importantes en la construcción del Cálculo, el cual es posible denominar como el *teorema fundamental del cálculo discreto* (Rondero, 2001): La suma de la sucesión de diferencias, está dada como la diferencia entre el valor final y el valor inicial de la sucesión original, es decir:

$$\sum_{k=0}^{n} d_k = a_n - a_0 \tag{17}$$

A la propiedad anterior le denominamos *Relación Fundamental del Cálculo Leibniziano* (Rondero, Reyes, & Acosta, 2015), el cual es un referente epistemológico de Leibniz, que junto con el triángulo característico, son la base de todo el cálculo leibniziano. En esta relación aparecen dos tipos de variaciones: (i) la local, donde se comparan dos estados contiguos, representada por la ecuación (1) y (ii) la global, dada por el lado derecho de (17). En otras palabras, la acumulación de las variaciones parciales es igual a la variación total, el cual se tiene identificado como un referente epistemológico (Rondero et al., 2015). Una variante de este resultado permite establecer que el último valor de una sucesión, es igual al valor inicial más la suma o acumulación de las diferencias:

$$a_n = a_0 + \sum_{k=o}^{n} d_k \tag{18}$$

Así, las dos versiones, discreta y continua, del teorema fundamental, se expresan respectivamente de la forma (17) y (14), o de forma equivalente como indican (18) y (15).

Estas expresiones facilitan el poder transitar indistintamente entre lo discreto y lo continuo al poder relacionar la estructura de ambos teoremas. Considerando ahora la función primitiva $F(x)$, el resultado se expresa por (17) y (12).

También es posible identificar formas análogas, las cuales indican que para calcular el estado final se requiere adicionar al estado inicial la acumulación de la variación, discreta o continua, según sea el caso. Una interpretación adicional se refiere a la predicción; es decir, para predecir un estado final se requiere adicionar la acumulación de la variación a partir del estado inicial. Es importante destacar que, en este caso, una simple variación de un resultado, cambiar $f(x)$ por $F(x)$, aporta un análisis relevante; el mismo puede favorecer una ganancia cognitiva y didáctica, para los estudiantes, teniendo en cuenta la presencia de ambas perspectivas, incluidas sus articulaciones y complementaciones. Por otra parte, los modelos aplicados en diferentes áreas, tienen por sustento la predicción de un estado final a partir de uno inicial más su variación correspondiente, como son los casos del movimiento rectilíneo uniforme y el movimiento uniformemente acelerado, entre otros.

Hoy en día, las nuevas tecnologías facilitan el tránsito entre lo continuo y lo discreto en el caso del TFC, tal como se puede observar, por ejemplo, en la propuesta de secuencia didáctica de Robles, Tellechea y Font (2014). Estos autores presentan el diseño de una secuencia didáctica de tareas orientada a la enseñanza del Teorema Fundamental del Cálculo, en los primeros cursos universitarios, asumiendo la complejidad y la articulación de nociones y objetos matemáticos asociados (variación, acumulación, derivada, integral, función, límite), para promover el descubrimiento de dicho teorema, así como el papel esencial desempeñado por los ambientes interactivos en el estudio del Cálculo, que favorecen el acercamiento intuitivo y la conjetura.

En particular, en esta propuesta las representaciones dinámicas promueven la mejor articulación del lenguaje numérico (lo discreto) con el gráfico y con el analítico (lo continuo), así como la realización de traducciones entre ellos de manera fluida. Ahora bien, no hemos encontrado propuestas didácticas en donde dicho tránsito se plantee de forma simbólica como se ha explicado anteriormente, más allá de una introducción al cálculo de áreas bajo una curva mediante una aproximación por exceso y defecto a partir de lo discreto, al realizar una equipartición del intervalo en n partes y calcular el área de los rectángulos. Como consecuencia, el tránsito entre lo discreto y lo continuo queda en un segundo plano y no se explicita su relevancia para la comprensión de las nociones fundamentales del cálculo.

3.2. El teorema del valor medio para derivadas

La versión continua del teorema del valor medio para derivadas es la siguiente (Spivak, 2010, p. 264):

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad (19)$$

Siendo *f* una función continua en el intervalo (a, b). Obsérvese que $b - a$, es la medida del tamaño del intervalo donde está definida la función *f*. Podemos identificar en el lado derecho de la expresión (1), un promedio de las diferencias, equivalente a un promedio de la derivada de la función *f*, representado por $f'(c)$, siendo c un punto al interior del intervalo (a, b).

Por otra parte, el promedio de los valores de una sucesión finita de primeras diferencias, resulta ser igual a la variación total entre los valores último y primero de la sucesión original, con n+1 términos, entre n; que es el número de diferencias existentes. Justamente, este cociente se puede identificar como una razón de cambio promedio, igual al promedio de las diferencias:

$$\bar{d} = \frac{\sum_{k=1}^{n} d_k}{n} = \frac{a_n - a_0}{n} \tag{20}$$

Donde ahora se cumple la equivalencia $a_n = a_0 + n\bar{d}$, es decir, el valor de a_n, se calcula adicionando al valor inicial, a_0, n veces el valor del promedio de las diferencias, $n\bar{d}$. Esta expresión es relevante porque $\bar{d}$, se puede considerar como un representante de las diferencias parciales y $n\bar{d}$, es el cambio total entre el estado inicial y el estado final. Dicha expresión es en cierto modo más potente que la expresión (17), pues en la anterior, para realizar el cálculo únicamente se requiere el valor del representante y el "tamaño" del conjunto discreto considerado. Lo anterior pone de manifiesto la presencia del promedio, en este caso referido a la media aritmética de las diferencias (Rondero, 2010).

El teorema del valor medio para derivadas, posibilita relacionar lo instantáneo con el promedio, visión sin la cual no sería posible estudiar muchos fenómenos de la variación y del cambio, en la física y en otras ciencias. Es importante notar, como lo señala Stewart (2008, p. 284), que "El principal significado del teorema del valor medio permite obtener información relacionada con una función a partir de la información proporcionada por su derivada". En este punto es conveniente resaltar que el teorema del valor medio es también llamado teorema del valor promedio. Por otra parte, el área bajo la curva resulta ser equivalente al área del rectángulo de base $b - a$, y de altura igual al valor promedio de la función f.

En el tratamiento analítico del promedio, no se aclara que este se refiere a una estructura heredada de la media aritmética, la aclaración es pertinente pues existen otros tipos de promedios. No se enfatiza que se trata de un promedio continuo en el sentido de involucrar a una función continua, ni se profundiza en las implicaciones conceptuales que conlleva disponer de una forma de calcular tal promedio, es decir, sobre la importancia de enfocar la atención en el cálculo de una altura promedio, en lugar del área bajo la curva. Por último, este análisis de la complejidad inherente a este teorema, en sus dos versiones análogas, pone el énfasis en la tensión entre lo discreto y lo continuo, para lo cual la promediación es el elemento central y articulador entre la razón de cambio instantánea (derivada) con una razón de cambio promedio.

3.3. El teorema del valor medio para integrales

Si el mismo tipo de promedio del teorema del valor medio para derivadas se realiza sobre la función primitiva F, considerada continua en el intervalo [a, b] se obtiene esta otra representación del mismo teorema (21) la cual a su vez, posibilita transitar al teorema del valor medio para integrales.

$$F'(c) = \frac{F(b)-F(a)}{b-a} \qquad (21)$$

Cuando se toma en consideración que $F'(x) = f(x)$, en un punto c del intervalo (a, b), como se expresa en (22):

$$f(c) = \frac{F(b)-F(a)}{b-a} \qquad (22)$$

Así, considerando (22) y (10), se tiene entonces:

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ dx \qquad (23)$$

Partiendo ahora de la siguiente forma del mismo teorema del valor medio para integrales (24),

$$\int_a^b f(x)\ dx = (b-a)f(c) \qquad (24)$$

es posible pasar de esta forma a otra que puede ser reconocida como el promedio de la función *f*. Partiendo de la expresión (23), al tomar en consideración lo expresado en (25):

$$\int_a^b dx = b - a \qquad (25)$$

aparece ahora más claramente la forma de promedio de una función continua *f* en el intervalo [a, b], en la ecuación (26):

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{\int_a^b dx} \qquad (26)$$

Es posible mostrar que el promedio de la función, en el intervalo considerado, se puede expresar como el cociente de dos totales, en este caso, el área total bajo la curva, entre el total referido al tamaño del intervalo. En tal caso, dicho cociente representa un promedio de los valores de la función dentro del intervalo, el cual se interpreta como el promedio de todas las alturas representado por *f* (*c*). Por otra parte, en la versión discreta, se tiene el promedio de diferencias entendido como el resultado obtenido al efectuar el cociente de dos totales, representados uno por la suma de diferencias de los valores y el otro identificado como el total de los valores que intervienen, esto es:

$$\bar{d} = \frac{\sum_{k=1}^{n} d_k}{\sum_{k=1}^{n} 1} = \frac{\sum_{k=1}^{n} d_k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} d_k \tag{27}$$

Si regresamos a la expresión para la media de diferencias:

$$\bar{d} = \frac{\sum_{k=1}^{n} d_k}{n} = \frac{a_n - a_0}{n} \tag{28}$$

su correspondiente expresión continua, bajo la consideración de que la derivada f' de la función f, es también continua en el intervalo de integración:

$$f'(c) = \frac{\int_a^b f'(x)\,dx}{\int_a^b dx} \tag{29}$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{30}$$

Cuando comparamos los numeradores, se llega al teorema fundamental del cálculo, en cualquiera de sus dos formas conocidas (10) y (14). Por otra parte, cuando analizamos el caso de las llamadas desviaciones de los valores x_k respecto a la media $\bar{x}$, se tiene:

$$D_k = x_k - \bar{x} \tag{31}$$

Es bien conocida la propiedad, referida a que la suma total de tales desviaciones es igual a cero:

$$\sum_{k=1}^{n} D_k = 0 \tag{32}$$

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - \bar{x}) = 0 \tag{33}$$

Desarrollando y trasponiendo términos en (33) se obtiene (34):

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} \bar{x} = n\bar{x} \tag{34}$$

Para finalmente obtener la expresión usual para el cálculo de la media aritmética (35):

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n} \tag{35}$$

Este resultado, el cual relaciona las desviaciones respecto al promedio, se puede interpretar a su vez en el caso continuo si se parte de la versión teorema del valor medio para integrales, a partir de (23) y (26) se obtiene:

$$f(c)\int_a^b dx = \int_a^b f(x)dx \tag{36}$$

Siguiendo el desarrollo para llegar a una expresión equivalente a las desviaciones, se tiene:

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^b f(c)\ dx \tag{37}$$

$$\int_a^b [f(x) - f(c)]\ dx = 0 \tag{38}$$

Si se define entonces una función de desviación $g(x) = f(x) - f(c)$, se obtiene el análogo al caso discreto:

$$\int_a^b g(x)\ dx = 0 \tag{39}$$

El resultado anterior indica, bajo condiciones apropiadas de continuidad, que siempre es posible encontrar una función de desviación $g(x) = f(x) - f(c)$, referida al promedio, por tanto su integral en el intervalo de definición es cero. Es decir, en la definición de esta función de desviación, intervienen tanto la función original f, como su valor de referencia $f(c)$, o la altura promedio de la función. Por supuesto, existe una interpretación geométrica muy interesante de este resultado cuando se considera la referencia del valor promedio $f(c)$, representado gráficamente como una recta paralela al eje-x. El área generada por la curva $y = f(x)$, la cual queda por encima de $f(c)$, es igual al área por debajo. Es decir, el área de la función constante de valor $f(c)$ y el área de la gráfica de f son iguales.

La función de desviación $g(x) = f(x) - f(c)$, se puede también entender como una nueva función trasladada verticalmente, por tanto la integral sobre el intervalo de definición siempre es cero. Esto es, al definir a esa función de desviación, vía su traslación al valor de referencia (altura promedio), posibilita la acción de ajustar la anulación del área. Precisamente, la ejecución de esta acción, da otro significado a la integral: *Dada una función continua, siempre existe un valor de ésta, considerado como un valor de referencia, el cual es su "promedio", de tal forma que el área de la función por encima de su promedio, es igual al área por debajo del mismo.*

Una versión equivalente del teorema, dentro del ámbito de lo continuo es: *La integral definida, en el intervalo de definición, de la función de desviación* $g(x) = f(x) - f(c)$*, es cero.* Es importante notar la presencia del método de cálculo usado por Arquímedes, llamado exceso-defecto, constituye otro caso de tensión en la matemática, donde subyace la idea germinal de "*Æquilibrium*" (Rondero, 2001). Cuando se calcula el área respecto a un valor de referencia, representado por el promedio de la función, y se obtiene como resultado cero se pretende comunicar que el área por *exceso* (por arriba), es igual al área por *defecto* (por debajo) del valor de referencia (el promedio).

4. Conclusiones

Ha sido posible evidenciar cómo la tensión discreto-continuo, tiene una presencia preponderante en la electrónica en forma tal que ha sido un factor esencial en la transición tecnológica entre lo analógico y lo digital, por medio de la matematización y modelización de las señales respectivas. Realizamos un breve análisis histórico para mostrar la presencia de la tensión discreto-continuo en diferentes momentos y autores, así como la relevancia de ambas perspectivas en la construcción de conocimiento matemático. Es importante resaltar el predominio de una las visiones, y el sesgo correspondiente es el factor que impulsa un avance en el saber para re-equilibrar la tensión entre opuestos.

Realizar un rescate epistemológico de saberes matemáticos permite visibilizar la relevancia para la didáctica de la matemática, de la reflexión en torno a la tensión discreto-continuo. Es decir, sin su tratamiento adecuado algunos aspectos conceptuales quedan ocultos o sin una apropiada articulación. En el caso de los teoremas del cálculo aquí analizados, se presentan sus versiones análogas en lo discreto, lo que sin duda conlleva una ganancia cognitiva y didáctica de los saberes del cálculo, particularmente en lo referente a la identificación de articulaciones, base para una re-construcción orientada del conocimiento.

Al trabajar en lo discreto, la acción de promediar conlleva la suma de los datos, en el caso del cálculo leibniziano, se hizo referencia a la suma de desviaciones que se dividen entre el número total de las mismas, representado por n. En cambio, en el caso continuo, la acción de promediar se ejecuta al tener en lugar de la suma, la integral definida y dividir después entre el tamaño del intervalo representado por b-a, el análogo del valor n en lo discreto.

Los correspondientes teoremas en lo discreto conllevan algunos significados inherentes a aspectos tales como: (i) la desviación como una variación con respecto a un valor de referencia, que es precisamente el promedio, (ii) el promedio calculado como el valor del cociente entre dos tipos de totales o razón de cambio, y (iii) la suma de desviaciones vista como una suma nula de variaciones discretas. Y por su parte la versión usual, continua, de los teoremas involucra la participación de otras formas promediales asociados a *razones de cambio promedio*, en el caso de la derivada de una función definida en el intervalo [a, b], o bien a un *valor promedial de la función*, asociado a la integral definida de la misma en el intervalo [a, b].

La tensión existente entre lo discreto y lo continuo tiene un eje de articulación conceptual dado por la noción de promediación y es posible mostrar su potencial en la construcción del conocimiento matemático. En la didáctica del cálculo, para el caso de una función continua, usualmente no se hace referencia explícita a la relación existente entre el teorema fundamental del cálculo y los dos teoremas del valor medio para derivadas e integrales, lo cual representa una desarticulación conceptual que hay necesidad de revertir con análisis como el aquí propuesto. Actualmente algunos autores de libros de cálculo han resaltado esta relación entre lo discreto y lo continuo.

La didáctica del cálculo necesita de la incorporación de nuevos elementos discursivos y argumentativos, acerca de la complejidad de los objetos matemáticos y las nociones que los sustentan. Al mostrar su relevancia en la didáctica, se pueden propiciar aprendizajes con entendimiento. Una propuesta a futuro para continuar con la discusión de la relevancia para la didáctica de considerar la tensión discreto-continuo en diferentes ámbitos o contextos de la matemática escolarizada, o cómo las articulaciones identificadas pueden ser el sustento de aproximaciones de enseñanza basadas en la re-construcción orientada del conocimiento. Finalmente, reconocemos otras tensiones relevantes para la didáctica de la matemática, entre las cuales se encuentran: infinito-infinitesimal, exceso-defecto, local-global, entre otras.

Referencias bibliográficas

Adúriz, A. (2010). Aproximaciones histórico-epistemológicas para la enseñanza de conceptos disciplinares. *Revista Virtual EDUCyT, 1*(1), 107–126.

Aristóteles. (1994). *Posterior Analytics* (J. Barnes, Trad.). México: Oxford University Press. (Trabajo original publicado en siglo IV a. C.).

Aristóteles. (1995). *Física* (G. R. de Echandia, Trad.). Madrid: Gredos. (Trabajo original publicado en siglo IV a. C.).

Bergé, A., & Sessa, C. (2003). Completitud y continuidad revisadas a través de 23 siglos: Aportes a una investigación didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 6*(3), 163–197.

Descartes, R. (1886). *La géométrie*. Paris: Librairie Scientific.

https://www.gutenberg.org/files/26400/26400-pdf.pdf (Trabajo original publicado en 1637).

Descartes, R. (2006). *A discourse on the method of correctly conducting one's reason and seeking truth in the sciences* (I. Maclean, Trad.). Oxford: Oxford University Press. (Trabajo original publicado en 1637).

Edwards, C. H. (1979). *The historical development of the calculus*. New York: Springer-Verlag.

Euclid. (1908). *The thirteen books of Euclid's Elements* (T. L. Heath, Trad.; Vol. II). Cambridge: Cambridge University Press. (Trabajo original publicado en siglos IV – III a. C.).

Farfán, R. (1997). *Ingeniería didáctica: Un estudio de la variación y el cambio*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Franklin, J. (2014). *An Aristotelian realist philosophy of mathematics: Mathematics as the science of quantity and structure*. London: Palgrave Macmillan.

García, M. (2013). *Interpretaciones de la dualidad en programación lineal* (Tesis de Licenciatura inédita). Querétaro: Universidad Autónoma de Querétaro.

Grattan-Guinness, I. (1980). *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630 – 1910: Una introducción histórica*. Madrid: Alianza Editorial.

Klein, J. (1992). *Greek mathematical thought and the origin of algebra* (E. Brann, Trad.). New York: Dover.

Luna, F. J. (2016). La unidad de opuestos en Leibniz. *THÉMATA Revista de Filosofía,* 53, 13–30.

Martínez, G., & Poirier, P. F. (2008). Una epistemología histórica del producto vectorial: Del cuaternión al análisis vectorial. *Latin-American Journal of Physics Education, 2*(2), 201–208.

Neal, K. (2002). *From discrete to continuous: The broadening of number concept in early modern England*. Dordrecht: Springer.

Pla, J. (2009). Matemáticas: Unidad de pensamiento. Diversidad cultural. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, *12*(1), 169–190.

Robles Arredondo, M. G., Tellechea Armenta, E., & Font Moll, V. (2014). Una propuesta de acercamiento alternativo al teorema fundamental del cálculo. *Educación Matemática, 26*(2), 69–109.

Rondero Guerrero, C. (2001). *Epistemología y didáctica: Un estudio sobre el papel de las ideas germinales, ponderatio y Æquilibrium, en la constitución del saber físico matemático* (Tesis doctoral no publicada). Centro de Investigación y de Estadios Avanzados del IPN, México.

Rondero Guerrero, C. (2010). Cálculo promedial: El caso de la media aritmética. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*(4–II), 387–408.

Rondero Guerrero, C., & Font Moll, V. (2015). Articulación de la complejidad matemática de la media aritmética. *Enseñanza de las Ciencias, 33*(2), 29–49.

Rondero Guerreo, C., Reyes Rodríguez, A. & Acosta Hernández, J. A. (2015). Aspectos históricos del cálculo de Leibniz: Incidencia y aplicación en la didáctica de las matemáticas. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 89*, 55–68.

Spivak, M. (2010). *Calculus*. México: Reverté.

Stewart, J. (2008). *Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas*. México: Cengage Learning.

Torres, C. (2009). De la matemática clásica a la matemática moderna: Hilbert y el esquematismo kantiano. *Diánoia, 54*(63), 37–70.

Waldegg, G. (1996). La contribución de Simón Stevin a la construcción del concepto de número. *Educación Matemática, 8*(2), 5–17.