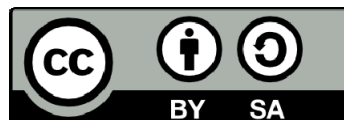




UNIVERSITAT<sub>DE</sub>  
BARCELONA

## Proceso de enseñanza y aprendizaje de la derivada con estudiantes de Ingeniería Comercial

Maritza Katherine Galindo Illanes



Aquesta tesi doctoral està subjecta a la llicència **Reconeixement- Compartiqual 4.0. Espanya de Creative Commons.**

Esta tesis doctoral está sujeta a la licencia **Reconocimiento - Compartiqual 4.0. España de Creative Commons.**

This doctoral thesis is licensed under the **Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0. Spain License.**

# TESIS DOCTORAL

Proceso de enseñanza y aprendizaje de la derivada con  
estudiantes de Ingeniería Comercial

Maritza Katherine Galindo Illanes



UNIVERSITAT DE  
BARCELONA

Septiembre 2023



# Proceso de enseñanza y aprendizaje de la derivada con estudiantes de Ingeniería Comercial

Memoria presentada para optar al grado de doctor por la Universitat de Barcelona

Programa de doctorado en Didáctica de las Ciencias, las  
Lenguas, las Artes y las Humanidades

Facultad de Educación

Autora: Maritza Katherine Galindo Illanes

Directora: Adriana Breda Savegnago

Tutora: Adriana Breda Savegnago



UNIVERSITAT DE  
BARCELONA



## RESUMEN

*La revisión de la literatura sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje del objeto derivada muestra que muchos estudiantes para ingeniero presentan dificultades, tanto en la comprensión, como en la resolución de problemas que involucren dicho objeto matemático. Por tanto, es relevante investigar si estas dificultades también se dan en los futuros ingenieros chilenos, en particular en los estudiantes de la carrera de Ingeniería Comercial. En esta línea, la problemática de investigación se concretó en el estudio del proceso de instrucción de la derivada direccionado a futuros ingenieros comerciales en Chile.*

*El objetivo general (OG) de investigación es: Analizar un proceso de instrucción de la derivada para estudiantes de Ingeniería Comercial que considere el contexto, el tipo de estudiantes y el marco teórico en el que se fundamenta la investigación. En particular, se hace énfasis en el estudio metódico sobre el objeto derivada que incorpora el estudio previo, el diseño, la implementación y el análisis del aprendizaje de los participantes de una secuencia de enseñanza aplicada en la asignatura de Cálculo Aplicado a los Negocios de la carrera de Ingeniería Comercial de una universidad privada chilena. Este objetivo general se concreta en cinco objetivos específicos. Objetivo específico 1 (O1): Realizar un estudio diagnóstico de la comprensión que tienen los estudiantes de Ingeniería Comercial sobre la derivada, a partir de las resoluciones que hacen sobre problemas de tangentes. Objetivo específico 2 (O2): Identificar los significados pretendidos de la derivada en los programas de las asignaturas de las carreras de Ingeniería Comercial en Chile. Objetivo específico 3 (O3): Identificar los campos de problemas, lenguaje, procedimientos, enunciados, propiedades y argumentos utilizados usualmente en la enseñanza de la derivada a ingenieros comerciales, en una muestra representativa de libros de texto destinados a estos estudiantes. Objetivo específico 4 (O4): Diseñar un proceso de instrucción para la enseñanza de la derivada por medio de la selección de los campos de problemas, lenguaje, procedimientos, enunciados, propiedades y argumentos utilizados usualmente en la enseñanza de la derivada para estudiantes de Ingeniería Comercial. Seleccionar los elementos de significado adecuados para la construcción de la propuesta didáctica, considerando campos de problemas específicos y configuraciones didácticas adecuadas para abordarlos. Objetivo específico 5 (O5): Implementar y analizar el impacto del proceso de estudio implementado en el aprendizaje de la derivada de los estudiantes de Ingeniería Comercial, evaluando y comparando el significado personal de los estudiantes con el significado institucional implementado.*

*La consecución de estos objetivos se muestra en las cinco publicaciones que constituyen esta tesis. El resultado relacionado con el objetivo O1 está presente en la primera publicación (Capítulo 2), realizada en el contexto del estudio diagnóstico; el resultado relacionado con el objetivo O2 está presente en la segunda publicación (Capítulo 3), realizada en el contexto de estudio de los programas de las asignaturas que incorporan la enseñanza de la derivada en las carreras de Ingeniería Comercial de Chile; el resultado relacionado con el objetivo O3 está presente en la tercera publicación (Capítulo 4), relacionada a la*

*configuración de los objetos primarios presentes en los libros de texto contemplados en los programas de asignatura seleccionados en los resultados de la segunda publicación; el resultado relacionado con el objetivo O4 está presente en la cuarta publicación (Capítulo 5) y se relaciona, sobre todo, con el diseño de un proceso de instrucción para la enseñanza de la derivada considerando el contexto y los resultados encontrados en las tres primeras publicaciones; el resultado relacionado con el objetivo O5 está presente en la quinta publicación (Capítulo 6), que permite tener una visión del aprendizaje de la derivada de los participantes, después del proceso de instrucción implementado.*

*Si bien las características teórico-metodológicas generales son semejantes en las cinco publicaciones —cuantitativa, descriptiva y cualitativa, con muestras intencionales y uso de la noción de configuración epistémica del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción Matemáticos (EOS)—, las fuentes de información y la metodología específica para cada uno de los cinco objetivos específicos es diferente. Para el objetivo O1 se ha realizado un estudio exploratorio, por medio del uso de la noción de configuración epistémica del EOS, de la implementación de un proceso de instrucción de la derivada, que consideraba diversas configuraciones epistémicas en las situaciones-problema sobre tangentes y las TIC, aplicado a 161 estudiantes de ingeniería en dos universidades chilenas. Para el objetivo O2 se ha realizado un análisis de contenido, a partir de categorías previas relacionadas a la noción de configuración epistémica del EOS, de ocho programas de asignaturas (tres de universidades públicas y dos de universidades privadas) que incluyen como objeto de enseñanza la derivada en las carreras de Ingeniería Comercial. Para el objetivo O3, se ha realizado el análisis descriptivo, mediante la noción de configuración epistémica del EOS, de los distintos elementos del significado de la derivada (campos de problemas, definiciones, teoremas y proposiciones, etc.) contemplados en trece libros de texto (seis de matemática aplicada a economía y negocios, y siete clásicos de enseñanza del cálculo para ingenierías). Para el objetivo O4, se ha tenido en cuenta los resultados alcanzados en los objetivos O2 y O3. En particular, se han considerado diversas configuraciones epistémicas en el diseño de las situaciones-problemas sobre tangentes, cálculo de tasas instantáneas de cambio y tasas instantáneas de variación, aplicaciones de la derivada para el cálculo de máximos y mínimos, análisis de gráficas de funciones, y el cálculo de derivadas a partir de reglas y teoremas de derivación. Además, se ha integrado las TIC en las diversas actividades, favoreciendo el tránsito entre los tipos de lenguajes escrito, numérico, gráfico y simbólico. Para el objetivo O5, se ha realizado el análisis de la implementación del diseño instruccional (objetivo O4), por medio del uso de la noción de configuración epistémica del EOS, en noventa estudiantes de la asignatura de Cálculo Aplicado a los Negocios de una universidad chilena.*

*El resultado del objetivo O1 es que los futuros ingenieros comerciales presentan dificultades en: el concepto de función y la concepción euclidiana de la recta tangente; la construcción del significado de recta tangente como límite de rectas secantes; la interpretación de la función derivada y su representación geométrica; realizar operaciones para calcular la pendiente de una recta y; operar con funciones. Los resultados*

relacionados al objetivo O2 son que la mayor parte de los programas de las asignaturas que contemplan la enseñanza de la derivada considera las reglas de derivación, los criterios de la primera y segunda derivada para extremos relativos, los criterios de concavidad, los criterios de monotonía de una función real y regla de la cadena. En menor medida se observan el teorema de la función implícita, teorema del valor medio, teorema del valor intermedio y el teorema de Rolle. En los resultados del análisis de los trece libros de texto contemplados en este estudio (objetivo O3) se observó que, en la mayor parte de ellos, hay un énfasis en el significado parcial de la derivada como el límite del cociente de incrementos y un predominante lenguaje simbólico en los argumentos. Como resultado del objetivo O4 se pudo realizar el diseño un proceso de estudio para la enseñanza de la derivada por medio de la selección de los campos de problemas, lenguaje, procedimientos, enunciados, propiedades y argumentos utilizados usualmente en la enseñanza de la derivada para estudiantes de Ingeniería Comercial. Por último, los resultados del objetivo O5 evidencian que los estudiantes que participaron de esa implementación, aunque presentaron algunas limitaciones, aprendieron la relación entre la tangente a una curva y la interpretación geométrica de la derivada y la aplicación de la derivada en el análisis marginal, mostrando, además, una mejora en la construcción de la concepción euclídea de la recta tangente.

Las conclusiones del estudio son: los estudiantes para ingenieros presentan dificultades en la comprensión del objeto derivada, incluso cuando realizan tareas con el apoyo de las TIC (O1); si bien la mayor parte de las propuestas curriculares presentan similitudes en la organización de contenidos y en los elementos lingüísticos utilizados para la construcción del objeto derivada, se observan diferencias importantes en la preponderancia de la derivada interpretada como una razón de cambio y en los campos de problemas abordados (O2); el análisis de los trece libros de texto ha podido generar un abanico de subcategorías relacionadas a los campos de problema identificados, ampliando, en alguna medida, el estudios previos realizados (O3); es posible diseñar un ciclo formativo para futuros ingenieros comerciales en Chile teniendo en cuenta, de forma representativa, la complejidad del significado de la derivada y sus respectivos campos de problema, definiciones, teoremas y proposiciones (O4). Los participantes han elaborado de forma global la construcción del significado personal de la derivada al trabajar su interpretación geométrica, una vez que ha sido esta noción, junto con el apoyo de las TIC, la que ha permitido a los estudiantes resolver una mayor variabilidad de problemas contextualizados presentes en la carrera de Ingeniería Comercial (O5).

La conclusión general de esa tesis es que los resultados encontrados en las diferentes etapas de la investigación permiten que se realice un proceso de instrucción de la derivada para futuros ingenieros comerciales en el cual hay una alta posibilidad de comprensión de los significados de la derivada y de la resolución exitosa de problemas de contexto por parte de los estudiantes para ingeniero, disminuyendo así la brecha entre lo que se aprende en el ámbito universitario y las aplicaciones de lo que se aprende en la carrera profesional.





## ABSTRACT

*The review of the literature on the processes of teaching and learning of the derived object shows that engineering students have difficulties, both in understanding and solving problems involving this mathematical object. Therefore, it is relevant to investigate whether these difficulties also occur in future Chilean engineers, particularly in Commercial Engineering students. In this respect, the research problem was focused on the study of the process of instruction of the derivative aimed at future commercial engineers in Chile.*

*The general objective (OG) of the research is: To analyze a process of study of the derivative for Commercial Engineering students that considers the context, the type of students, and the theoretical framework upon the research is based. In particular, emphasis is placed on the methodical study of the derivative object that incorporates the previous study, design, implementation and analysis of the learning of the participants of a teaching sequence applied in the subject of Applied Calculus for Business in the Commercial Engineering course at a private Chilean university. This general objective is specified in five specific objectives. Specific Objective 1 (O1): To carry out a diagnostic study of the understanding that Commercial Engineering students have of the derivative, through the resolutions they make to tangent problems. Specific Objective 2 (O2): To identify the intended meanings of the derivative in the syllabuses of Commercial Engineering courses in Chile. Specific objective 3 (O3): To identify the problem fields, language, procedures, statements, properties, and arguments usually used in the teaching of the derivative to commercial engineers, in a representative sample of textbooks aimed at these students. Specific Objective 4 (O4): To design a study process for the teaching of the derivative through the selection of the problem fields, language, procedures, statements, properties, and arguments usually used in the teaching of the derivative for commercial engineering students. To select the appropriate elements of meaning for the construction of the didactic proposal, considering specific problem fields and appropriate didactic configurations to address them. Specific Objective 5 (O5): To implement and analyze the impact of the study process implemented in the learning of the derivative by Commercial Engineering students, evaluating and comparing the personal meaning of the students with the institutional meaning implemented.*

*The achievement of these objectives is shown in the five publications that constitute this thesis. The result related to objective O1 is present in the first publication (Chapter 2) carried out in the context of the diagnostic study; the result related to objective O2 is present in the second publication (Chapter 3), carried out in the context of the study of the programs of the subjects that incorporate the teaching of the derivative in the Commercial Engineering degrees in Chile; the result related to objective O3 is present in the third publication (Chapter 4), related to the configuration of the primary objects present in the textbooks contemplated in the subject programs selected in the results of the second publication; the result related to objective O4 is presented in the fourth publication (Chapter 5) and is mainly related to the design of a study*

*process for the teaching of the derivative considering the context and the results found in the first three publications; the result related to objective O5 is presented in the fifth publication (Chapter 6), which gives an insight into the learning of the derivative by the participants after the implemented study process.*

*Although the general theoretical-methodological characteristics are similar in the five publications —descriptive quantitative and qualitative with purposive samples and use of the notion of epistemic configuration of the Ontosemiotic Approach to Mathematical Knowledge and Instruction (OSA) — the sources of information and the specific methodology for each of the five specific objectives are different. For objective O1, an exploratory study has been carried out, using the OSA notion of epistemic configuration, of the implementation of a process of derivative instruction, which considered different ontosemiotic configurations in the problem situations about tangents and ICT, applied to 161 engineering students in two Chilean universities. For objective O2, a content analysis was carried out, based on previous categories related to the notion of the epistemic configuration of the OSA, of eight subject programs (three from public universities and two from private universities) that include the derivative as an object of teaching in Commercial Engineering degrees. For objective O3, a descriptive analysis has been carried out, under the notion of the epistemic configuration of the OSA, of the different elements of the meaning of the derivative (problem situations, definitions, theorems and propositions, etc.) contemplated in thirteen textbooks (six of mathematics applied to economics and business, and seven classic textbooks on the teaching of calculus for engineering). For objective O4, the results achieved in objectives O2 and O3 have been considered. In particular, various ontosemiotic configurations have been considered in the design of the problem situations on tangents, calculation of instantaneous rates of change and instantaneous rates of variation, applications of the derivative for the calculation of maxima and minima, analysis of function graphs, and the calculation of derivatives from derivative rules and theorems. Moreover, ICT has been integrated into different activities, favoring the transition between written, numerical, graphical and symbolic languages. For objective O5, the analysis of the implementation of the instructional design (objective O4) has been carried out, through the use of the notion of epistemic configuration of OSA, in ninety students of Applied Calculus for Business at a Chilean university.*

*The result of objective O1 is that future commercial engineers present difficulties in the concept of function and the Euclidean conception of the tangent line; the construction of the meaning of the tangent line as the limit of secant lines; the interpretation of the derivative function and its geometric representation; performing operations to calculate the slope of a line and; operating with functions. The results related to objective O2 are that most of the syllabuses of the subjects that include the teaching of the derivative consider the rules of derivation, the criteria of the first and second derivative for relative extrema, the criteria of concavity, the criteria of monotonicity of a real function and the chain rule. To a lesser extent, the implicit function theorem, the mean value theorem, the intermediate value theorem and Rolle's theorem are observed. In the*

results of the analysis of the thirteen textbooks considered in this study (objective O3) it was observed that, in most of them, there is an emphasis on the partial meaning of the derivative as the limit of the quotient of increments and a predominant symbolic language in the arguments. As a result of objective O4, it was possible to design a study process for the teaching of the derivative through the selection of the problem fields, language, procedures, statements, properties and arguments usually used in the teaching of the derivative for Business Engineering students. Finally, the results of objective O5 show that the students who participated in this implementation, although they presented some limitations, they learned the relationship between the tangent to a curve and the geometric interpretation of the derivative and the application of the derivative in marginal analysis, also showing an improvement in the construction of the Cartesian conception of the tangent line.

The conclusions of the study are: engineering students present difficulties in understanding the concept of the derivative, even when they carry out tasks with the support of ICT (O1); although most of the curricular proposals present similarities in the organization of content and the linguistic elements used for the construction of the derivative object, important differences are observed in the preponderance of the derivative interpreted as a ratio of change and in the problem fields addressed (O2); the analysis of the thirteen textbooks has been able to generate a range of subcategories related to the problem fields identified, extending, to some degree the previous studies carried out (O3); it is possible to design a training cycle for future commercial engineers in Chile, taking into account, in a representative way, the complexity of the meaning of the derivative and its respective problem fields, definitions, theorems and propositions (O4). The participants have elaborated in a global way the construction of the concept of the derivative by working on its geometric interpretation, since it was this notion, together with the support of ICT, which has allowed the students to solve a greater variability of contextualized problems present in the Commercial Engineering degree (O5).

The general conclusion of this thesis is that the results found in the different stages of the research allow a process of instruction of the derivative for future commercial engineers in which there is a high possibility of understanding the meanings of the derivative and the successful completion of contextualized problems by students for engineering, thus reducing the gap between what is learned at the university level and the applications of what is learned in the professional career.



## RESUM

*La revisió de la literatura sobre els processos d'ensenyament i aprenentatge de l'objecte derivada mostra que molts estudiants per a enginyer presenten dificultats, tant en la comprensió, quant en la resolució de problemes que involucrin aquest objecte matemàtic. Per tant, és rellevant investigar si aquestes dificultats també es donen en els futurs enginyers xilens, en particular en els estudiants de la carrera d'Enginyeria Comercial. En aquesta línia, la problemàtica de recerca es va concretar en l'estudi del procés d'instrucció de la derivada adreçat a futurs enginyers comercials a Xile.*

*L'objectiu general (OG) de recerca és: Analitzar un procés d'instrucció de la derivada per a estudiants d'Enginyeria Comercial que consideri el context, el tipus d'estudiants i el marc teòric en el qual es fonamenta la recerca. En particular, es fa èmfasi en l'estudi metòdic sobre l'objecte derivada que incorpora l'estudi previ, el disseny, la implementació i l'anàlisi de l'aprenentatge dels participants d'una seqüència d'ensenyament aplicat en l'assignatura de Càlcul Aplicat als Negocis de la carrera d'Enginyeria Comercial d'una universitat privada xilena. Aquest objectiu general es concreta en cinc objectius específics. Objectiu específic 1 (O1): Realitzar un estudi diagnòstic de la comprensió que tenen els estudiants d'Enginyeria Comercial sobre la derivada, a través de les resolucions que fan sobre problemes de tangents. Objectiu específic 2 (O2): Identificar els significats pretesos de la derivada en els programes de les assignatures de les carreres d'Enginyeria Comercial a Xile. Objectiu específic 3 (O3): Identificar els camps de problemes, llenguatge, procediments, enunciats, propietats i arguments utilitzats usualment en l'ensenyament de la derivada a enginyers comercials, en una mostra representativa de llibres de text destinats a aquests estudiants. Objectiu específic 4 (O4): Dissenyar un procés d'instrucció per a l'ensenyament de la derivada per mitjà de la selecció dels camps de problemes, llenguatge, procediments, enunciats, propietats i arguments utilitzats usualment en l'ensenyament de la derivada per a estudiants d'Enginyeria Comercial. Seleccionar els elements de significat adequats per a la construcció de la proposta didàctica, considerant camps de problemes específics i configuracions didàctiques adequades per a abordar-los. Objectiu específic 5 (O5): Implementar i analitzar l'impacte del procés d'instrucció implementat en l'aprenentatge de la derivada pels estudiants d'Enginyeria Comercial, avaluant i comparant el significat personal dels estudiants amb el significat institucional implementat.*

*La consecució d'aquests objectius es mostra en les cinc publicacions que constitueixen aquesta tesi. El resultat relacionat amb l'objectiu O1 és present en la primera publicació (Capítol 2) realitzada en el context de l'estudi diagnòstic; el resultat relacionat amb l'objectiu O2 és present en la segona publicació (Capítol 3), realitzada en el context d'estudi dels programes de les assignatures que incorporen l'ensenyament de la derivada en les carreres d'Enginyeria Comercial a Xile; el resultat relacionat amb l'objectiu O3 és present en la tercera publicació (Capítol 4), relacionada amb la configuració dels objectes primaris presents en*

els llibres de text contemplats en els programes d'assignatura seleccionats en els resultats de la segona publicació; el resultat relacionat amb l'objectiu O4 està present en la quarta publicació (Capítol 5) i es relaciona, sobretot, amb el disseny d'un procés d'instrucció per a l'ensenyament de la derivada considerant el context i els resultats trobats en les tres primeres publicacions; el resultat relacionat amb l'objectiu O5 és present en la cinquena publicació (Capítol 6), que permet tenir una visió de l'aprenentatge de la derivada pels participants, després del procés d'instrucció implementat.

Si bé les característiques teòric-metodològiques generals són semblants en les cinc publicacions —quantitativa descriptiva i qualitativa amb mostres intencionals i ús de la noció de configuració epistèmica de l'Enfocament Ontosemiòtic del Coneixement i Instrucció Matemàtics (EOS)—, les fonts d'informació i la metodologia específica per a cadascun dels cinc objectius específics és diferent. Per a l'objectiu O1 s'ha realitzat un estudi exploratori, per mitjà de l'ús de la noció de configuració epistèmica de l'EOS, de la implementació d'un procés d'instrucció de la derivada, que considerava diverses configuracions ontosemiòtiques en les situacions-problema sobre tangents i les TIC, aplicat a 161 estudiants d'enginyeria en dues universitats xilenes. Per a l'objectiu O2 s'ha realitzat una anàlisi de contingut, a partir de categories prèvies relacionades amb la noció de configuració epistèmica de l'EOS, de vuit programes d'assignatures (tres d'universitats públiques i dues d'universitats privades) que inclouen com a objecte d'ensenyament la derivada en les carreres d'Enginyeria Comercial. Per a l'objectiu O3, s'ha realitzat l'anàlisi descriptiva, sota noció de configuració epistèmica de l'EOS, dels diferents elements del significat de la derivada (camps de problemes, definicions, teoremes i proposicions, etc.) contemplats en tretze llibres de text (sis de matemàtica aplicada a economia i negocis, i set clàssics d'ensenyament del càlcul per a enginyeries). Per a l'objectiu O4, s'han tingut en compte els resultats aconseguits en els objectius O2 i O3. En particular, s'han considerat diverses configuracions ontosemiòtiques en el disseny de les situacions-problemes sobre tangents, càlcul de taxes instantànies de canvi i taxes instantànies de variació, aplicacions de la derivada per al càlcul de màxims i mínims, anàlisis de gràfiques de funcions, i el càlcul de derivades a partir de regles i teoremes de derivació. A més, s'han integrat les TIC en les diverses activitats, afavorint el trànsit entre els tipus de llenguatges escrit, numèric, gràfic i simbòlic. Per a l'objectiu O5, s'ha realitzat l'anàlisi de la implementació del disseny d'instrucció (objectiu O4), per mitjà de l'ús de la noció de configuració epistèmica de l'EOS, en noranta estudiants de l'assignatura de Càlcul Aplicat als Negocis d'una universitat xilena.

El resultat de l'objectiu O1 és que els futurs enginyers comercials presenten dificultats en: el concepte de funció i la concepció euclidiana de la recta tangent; la construcció del significat de recta tangent com a límit de rectes secants; la interpretació de la funció derivada i la seva representació geomètrica; realitzar operacions per a calcular el pendent d'una recta i; operar amb funcions. Els resultats relacionats amb l'objectiu O2 són que la major part dels programes de les assignatures que contempnen l'ensenyament de la derivada considera les regles de derivació, els criteris de la primera i segona derivada per a extrems relatius, els criteris de

concavitat, els criteris de monotonia d'una funció real i regla de la cadena. En menor mesura s'observen el teorema de la funció implícita, teorema del valor mitjà, teorema del valor intermedi i el teorema de Rolle. En els resultats de l'anàlisi dels tretze llibres de text contemplats en aquest estudi (objectiu O3) es va observar que, en la majoria, es fa èmfasi en el significat parcial de la derivada com al límit del quocient d'increments i hi ha un predominant llenguatge simbòlic en els arguments. Com a resultat de l'objectiu O4, es va poder realitzar el disseny un procés d'instrucció per a l'ensenyament de la derivada per mitjà de la selecció dels camps de problemes, llenguatge, procediments, enunciacions, propietats i arguments utilitzats usualment en l'ensenyament de la derivada per a estudiants d'Enginyeria Comercial. Finalment, els resultats de l'objectiu O5 evidencien que els estudiants que van participar d'aquesta implementació, encara que van presentar algunes limitacions, van aprendre la relació entre la tangent a una corba i la interpretació geomètrica de la derivada i l'aplicació de la derivada en l'anàlisi marginal, mostrant, a més, una millora en la construcció de la concepció cartesiana de la recta tangent.

Les conclusions de l'estudi són: els estudiants per a enginyers presenten dificultats en la comprensió del concepte derivada, fins i tot quan fan tasques amb el suport de les TIC (O1); si bé la major part de les propostes curriculars presenten similituds en l'organització de continguts i en els elements lingüístics utilitzats per a la construcció de l'objecte derivada, s'observen diferències importants en la preponderància de la derivada interpretada com una raó de canvi i en els camps de problemes abordats (O2); l'anàlisi dels tretze llibres de text ha pogut generar un ventall de subcategories relacionades als camps de problema identificats, ampliant, en alguna mesura, els estudis previs realitzats (O3); és possible dissenyar un cicle formatiu per a futurs enginyers comercials a Xile tenint en compte, de manera representativa, la complexitat del significat de la derivada i els seus respectius camps de problema, definicions, teoremes i proposicions (O4). Els participants han elaborat de manera global la construcció del concepte de la derivada en treballar la seva interpretació geomètrica. Justament va ser aquesta noció, conjuntament amb el suport de les TIC, la que va permetre als estudiants resoldre una major variabilitat de problemes contextualitzats presents en la carrera d'Enginyeria Comercial (O5).

La conclusió general d'aquesta tesi és que els resultats trobats en les diferents etapes de la recerca permeten que es realitzi un procés d'instrucció de la derivada per a futurs enginyers comercials en el qual hi ha una alta possibilitat de comprensió dels significats de la derivada i de la realització reeixida de problemes de context per part dels estudiants per a enginyer, d'aquesta manera s'aconsegueix que la bretxa entre el que s'aprèn en l'àmbit universitari i les aplicacions del que s'aprèn en la carrera professional disminueixi.





## DEDICATORIA

*A Dios por su amor infinito y a mi esposo Jorge por su apoyo constante.*



## **AGRADECIMIENTOS**

Al Programa de doctorado en Didáctica de las Ciencias, las Lenguas, las Artes y las Humanidades de la Universitat de Barcelona, a la Vicerrectoría de Investigación y Doctorado de la Universidad San Sebastián, a los proyectos de investigación que han financiado las participaciones en congresos nacionales e internacionales, a los editores y revisores por sus valiosas contribuciones y a los miembros del tribunal por su disposición a ser parte de esta defensa de tesis.

Finalmente, quisiera dar un especial agradecimiento a mi tutora y directora la Dra. Adriana Breda Savegnago, por su guía, enseñanza, disciplina, constancia, disposición, paciencia y compañía durante estos cuatro años.



## **RECONOCIMIENTO**

Esta tesis doctoral se enmarca en el proyecto PID2021-127104NB-I00 financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033, por USS-FIN-23-DOCI-04 y por “FEDER Una manera de hacer Europa”.



# ÍNDICE

CAPÍTULO 1. JUSTIFICACIÓN DE LA PROPUESTA DE INVESTIGACIÓN.....	1
1.1 INTRODUCCIÓN .....	1
1.2 EL CONTEXTO CURRICULAR.....	3
1.3 PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN.....	8
1.4 ESTRUCTURA DE LA MEMORIA DE INVESTIGACIÓN .....	11
1.5 ARTÍCULOS CONSIDERADOS EN LA ESTRUCTURA DE LA MEMORIA..	12
CAPÍTULO 2. ARTÍCULO CIENTÍFICO I.....	15
2.1 REFERENCIA DEL ARTÍCULO CIENTÍFICO I.....	15
2.2 BASES E INDEXACIÓN DEL PERIODICO .....	15
2.3 RESUMEN DEL ARTÍCULO CIENTÍFICO I .....	16
2.4 ABSTRACT OF THE SCIENTIFIC ARTICLE I .....	16
2.5 INTRODUCTION .....	17
2.6 THEORETICAL FRAMEWORK.....	20
2.7 METHODS .....	22
2.8 RESULTS AND DISCUSSION .....	28
2.9 DISCUSSIONS AND CONCLUSIONS .....	31
CAPÍTULO 3. ARTÍCULO CIENTÍFICO II.....	35
3.1 REFERENCIA DEL ARTÍCULO CIENTÍFICO II.....	35
3.2 ACTAS DEL CONGRESO .....	35
3.3 RESUMEN DEL ARTÍCULO CIENTÍFICO II.....	35
3.4 ABSTRACT OF THE SCIENTIFIC ARTICLE II.....	36
3.5 INTRODUCCIÓN .....	37
3.6 MARCO TEÓRICO .....	38
3.7 METODOLOGÍA .....	40
3.8 RESULTADOS Y CONCLUSIONES.....	44
CAPÍTULO 4. ARTÍCULO CIENTÍFICO III.....	49
4.1 REFERENCIA DEL ARTÍCULO CIENTÍFICO III .....	49
4.2 BASES E INDEXACIÓN DEL PERIODICO .....	49
4.3 RESUMEN DEL ARTÍCULO CIENTÍFICO III .....	49
4.4 RESUMO DO ARTIGO CIENTÍFICO III .....	50
4.5 INTRODUCCIÓN .....	51
4.6 MARCO TEÓRICO .....	54



4.7 METODOLOGÍA .....	56
4.8 RESULTADOS.....	66
4.9 CONCLUSIONES .....	72
CAPÍTULO 5. ARTÍCULO CIENTÍFICO IV .....	75
5.1 REFERENCIA DEL ARTÍCULO CIENTÍFICO IV.....	75
5.2 BASES E INDEXACIÓN DEL PERIODICO .....	75
5.3 RESUMEN DEL ARTÍCULO CIENTÍFICO IV .....	76
5.4 RESUMO DO ARTIGO CIENTÍFICO IV.....	76
5.5 ABSTRACT OF THE SCIENTIFIC ARTICLE IV .....	77
5.6 INTRODUCCIÓN .....	78
5.7 MARCO TEÓRICO .....	79
5.8 METODOLOGÍA .....	81
5.9 INSTRUMENTOS DE COLECTA DE DATOS .....	99
5.10 REFLEXIONES FINALES.....	103
CAPÍTULO 6. ARTÍCULO CIENTÍFICO V.....	105
6.1 ARTÍCULO CIENTÍFICO V (EN PRENSA) .....	105
6.2 BASES E INDEXACIÓN DEL PERIODICO .....	105
6.3 RESUMEN DEL ARTÍCULO CIENTÍFICO V .....	106
6.4 ABSTRACT OF THE SCIENTIFIC ARTICLE V.....	106
6.5 INTRODUCCIÓN .....	107
6.6 MARCO TEÓRICO .....	109
6.7 METODOLOGÍA .....	111
6.8 ANÁLISIS Y RESULTADOS.....	122
6.9 CONCLUSIONES.....	129
CAPÍTULO 7. CONCLUSIONES FINALES .....	133
7.1 CONCLUSIONES CON RELACIÓN A LOS OBJETIVOS.....	133
7.2 PRINCIPALES APORTACIONES DE LA INVESTIGACIÓN .....	139
7.3 IMPLICACIONES PARA LA ENSEÑANZA DE LA DERIVADA EN UN CURSO DE CÁLCULO PARA INGENIERÍA COMERCIAL .....	140
7.4 LIMITACIONES DEL ESTUDIO .....	141
7.5 PERSPECTIVAS FUTURAS DE INVESTIGACIÓN .....	141
7.6 DIFUSION DE LOS RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN .....	142
REFERENCIAS.....	147
ANEXOS.....	159

ANEXO 1. CARTA DE ACEPTACIÓN DE ARTÍCULO.....	159
ANEXO 2. MODELO DE CONSCENTIMIENTO INFORMADO DEL PARTICIPANTE.....	160



## **LISTA DE ABREVIATURAS**

AOS - Abordagem Ontossemiótica

ASFA - Aquatic Science & Fisheries Abstracts

CDIO - conceive-design-implement-operate

CIBEM - Congresso Ibero-americano de Educação Matemática

CNA - Comisión Nacional de Acreditación de Chile

EOS - Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción Matemáticos

ERIC - Education Resources Information Center

ESCI - Emerging Sources Citation Index

ICTs - Information and communication technologies

JCI - Journal Citation Indicator

MIAR - Matriz de Información para el Análisis de Revistas

OSA - Ontosemiotic Approach

PT - Problems about tangents

REDIB - Red Iberoamericana de Innovación y conocimiento científico

SEIEM - Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática

SJR - Scimago Journal & Country Rank

TIC - Tecnologías de la Información y Comunicación

WoS - Web of Science



## LISTA DE FIGURAS

<b>Figure 1.</b> Task applied to students at the end of the first week. ....	26
<b>Figure 2.</b> Task applied to students at the end of the second week. ....	27
<b>Figure 3.</b> Argument after incorrectly identifying the line tangent to a curve. ....	29
<b>Figura 4.</b> Identification of the derivative of the function in the point of tangency with the slope of the tangent line. ....	29
<b>Figure 5.</b> Correct process of the derivative of the function in the point of tangency. ....	30
<b>Figura 6.</b> Ejemplo de A1 presente en T10. ....	63
<b>Figura 7.</b> Ejemplo de A1 presente en T2. ....	63
<b>Figura 8.</b> Ejemplo de A2 presente en T7. ....	64
<b>Figura 9.</b> Ejemplo de A3 presente en T3. ....	64
<b>Figura 10.</b> Ejemplo de A3 presente en T1. ....	65
<b>Figura 11.</b> Ejemplo de A4 presente en T10. ....	65
<b>Figura 12.</b> Ejemplo de A2 presente en T3. ....	66
<b>Figura 13.</b> Tareas sesión presencial 1. ....	88
<b>Figura 14.</b> Tareas sesión presencial 2. ....	89
<b>Figura 15.</b> Tareas sesión presencial 4. ....	91
<b>Figura 16.</b> Tareas sesión Trabajo Autónomo TA2. ....	93
<b>Figura 17.</b> Problema 2 que se aplicará a los estudiantes al finalizar el campo de problemas sobre tangente (CP1). ....	101
<b>Figura 18.</b> Problema 1 que se aplicará a los estudiantes al finalizar el campo de problemas aplicaciones de la derivada para el cálculo de máximos y mínimos, y análisis de gráficas de funciones (CP4). ....	102
<b>Figura 19.</b> Tarea 1 aplicada a los estudiantes al finalizar el campo de problemas sobre tangente (CP1). ....	120
<b>Figura 20.</b> Tarea 2 aplicada a los estudiantes al finalizar el campo de problemas sobre cálculo de derivadas a partir de reglas y teoremas de derivación (CP2). ....	120
<b>Figura 21.</b> Tarea 3 que se aplicó a los estudiantes al finalizar el estudio del campo de problemas aplicaciones de la derivada para el cálculo de máximos y mínimos, y análisis de gráficas de funciones (CP3). ....	122
<b>Figura 22.</b> Desarrollo correcto de un estudiante en la construcción de la recta tangente a la función ingreso. ....	124
<b>Figura 23.</b> Ambigüedad de un estudiante al referirse a la derivada. ....	124
<b>Figura 24.</b> Desarrollo algebraico de un estudiante en la construcción de la recta tangente a la función ingreso. ....	125
<b>Figura 25.</b> Justificación de un estudiante del comportamiento de la función Ingreso y su relación con la gráfica del ingreso marginal. ....	125

<b>Figura 26.</b> Procedimiento de un estudiante para la obtención del costo marginal.....	126
<b>Figura 27.</b> Interpretación de las funciones de costo marginal e ingreso marginal al evaluar en $q=10$ .....	127
<b>Figura 28.</b> Justificación de no producir la unidad número 11 .....	127
<b>Figura 29.</b> Función utilidad y su derivada construida correctamente por un estudiante .	129
<b>Figura 30.</b> Obtención de los puntos críticos de la función utilidad.....	129
<b>Figura 31.</b> Justificación de la optimización de la función utilidad .....	129

## LISTA DE TABLAS

<b>Table 1.</b> Week 1: Timing and Planning of Problems about Tangents.....	23
<b>Table 2.</b> Week 2: Temporalization and Planning of the Problems about Tangent .....	24
<b>Tabla 3.</b> Frequency of correct answers in Task 1 ( $n_1 = 91$ , $n_2=70$ ).....	28
<b>Tabla 4.</b> Frequency of correct answers of Task 2 ( $n_1 = 91$ , $n_2=70$ ).....	31
<b>Tabla 5.</b> Organización de los contenidos de la asignatura de Cálculo Aplicado a los Negocios de UN1 .....	41
<b>Tabla 6.</b> Presencia de los campos de problemas en los programas .....	45
<b>Tabla 7.</b> Presencia de los significados parciales de la derivada en los programas de las universidades.....	46
<b>Tabla 8.</b> Libros de textos presentes en los programas de estudio de Ingeniería Comercial	57
<b>Tabla 9.</b> Identificación y descripción de las definiciones (D) en los textos analizados .....	59
<b>Tabla 10.</b> Identificación y descripción de los teoremas y proposiciones (TP) de la derivada en los textos analizados.....	60
<b>Tabla 11.</b> Campos de problemas (CP), Identificador (ID) y descripción del campo de problema.....	61
<b>Tabla 12.</b> Presencia de los campos de problemas en los 13 textos analizados.....	68
<b>Tabla 13.</b> Presencia de definiciones (D) en los textos analizados (T).....	70
<b>Tabla 14.</b> Presencia de teoremas y proposiciones (TP) en los textos analizados.....	71
<b>Tabla 15.</b> Temporalización y Planificación de los Campos de Problemas .....	83
<b>Tabla 16.</b> Semana 1: Temporalización y Planificación de los Problemas sobre Tangentes.	83
<b>Tabla 17.</b> Semana 2: Temporalización y Planificación de los problemas de cálculo de tasas instantáneas de cambio y de tasas instantáneas de variación.....	93
<b>Tabla 18.</b> Semana 3: Temporalización y Planificación de los problemas de cálculo de derivadas a partir de reglas y teoremas de derivación.....	95
<b>Tabla 19.</b> Semana 4: Temporalización y Planificación de los problemas de aplicaciones de la derivada para el cálculo de máximos y mínimos, y análisis de monotonía de funciones reales y económicas.....	96
<b>Tabla 20.</b> Semana 5: Temporalización y Planificación de los problemas de aplicaciones de la derivada para el cálculo de máximos y mínimos, y análisis de concavidad de funciones reales y económicas.....	98
<b>Tabla 21.</b> Temporalización y Planificación del estudio de los Campos de Problemas.....	112
<b>Tabla 22.</b> Temporalización y Planificación del estudio de CP1, CP2 y CP3 .....	113
<b>Tabla 23.</b> Frecuencia de aciertos de la Tarea 1 ( $n=90$ ) .....	123
<b>Tabla 24.</b> Frecuencia de aciertos de la Tarea 2 ( $n=90$ ) .....	125
<b>Tabla 25.</b> Frecuencia de aciertos de la Tarea 3 ( $n=90$ ) .....	128





---

# CAPÍTULO 1. JUSTIFICACIÓN DE LA PROPUESTA DE INVESTIGACIÓN

## 1.1 INTRODUCCIÓN

La matemática es un área del conocimiento que nos ayuda a entender la naturaleza, la música, las artes, las ciencias, etc. Es una herramienta que hace posible plantear modelos que permiten resolver problemas del mundo real, a través del estudio de fenómenos en los campos de las ciencias sociales, la estadística, la química, la biología, la física, la economía, las ingenierías, en particular, la Ingeniería Comercial.

Dada mi larga trayectoria como profesora formadora de futuros ingenieros, en particular en la formación de futuros ingenieros comerciales en el contexto chileno, el problema de investigación nace de mi interés en la mejora de la enseñanza de las matemáticas en Chile, en particular, en la mejora de la enseñanza y aprendizaje del objeto matemático derivada en la formación de los futuros ingenieros comerciales, dados los malos resultados obtenidos por la mayoría de los alumnos en el aprendizaje de ese objeto matemático.

Conseguir esta mejora conlleva la necesidad de una reflexión profunda sobre: a) cómo se está enseñando la derivada en las carreras de Ingeniería Comercial en el contexto chileno; b) cómo los alumnos la están aprendiendo y cuáles son sus principales dificultades en el aprendizaje. Una vez identificadas las problemáticas en la enseñanza y aprendizaje de la derivada, la mejora conlleva la necesidad de estudiar, con profundidad, cuáles de los significados de la derivada y los campos de problemas son relevantes para la formación del futuro ingeniero comercial y, no menos importante, cuáles de los recursos deben ser utilizados en los procesos de enseñanza de la derivada para dicha carrera. Ese estudio previo, por consiguiente, permite la elaboración de un diseño del proceso de instrucción de la derivada para futuros ingenieros comerciales y su respectiva implementación, a fin de poder evidenciar una mejora en la enseñanza y en el aprendizaje de dicho objeto matemático.

Los antecedentes que han dado lugar a este estudio son:

1. Atender al conjunto de competencias (conocimientos, habilidades y actitudes) propuestos por la Comisión Nacional de Acreditación de Chile (CNA) para la carrera de Ingeniería Comercial.

2. En referencia al aprendizaje de la derivada, la revisión de la literatura internacional

muestra que muchos de los futuros ingenieros tienen dificultades para comprender los significados de la derivada e interconectarlos, y esto, de alguna manera, genera una cierta dificultad en la resolución de algunas tipologías de problemas sobre derivadas. También se ha observado que muchos de los futuros ingenieros presentan dificultad en resolver problemas relacionados con el contexto de su área profesional, una de las razones es porque esos tipos de problemas exigen una conexión de diferentes tipos de significados del objeto derivada. Además de las evidencias encontradas en la revisión de la literatura, mi experiencia como formadora de ingenieros, en particular de ingenieros comerciales, me ha hecho observar ese mismo fenómeno.

3. Los dos antecedentes acabados de comentar fueron el inicio de una problemática de investigación que me interesó mucho. La profundización sobre esta problemática me llevó a documentar que las reflexiones sobre la complejidad del objeto matemático derivada (entendida como diversidad de significados), y la conexión de los componentes de esta complejidad, son frecuentes en muchos de los enfoques teóricos utilizados en el área de la Educación Matemática. En particular, con los principios asumidos por el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción Matemáticos (EOS) (Godino et al., 2019). Por esta razón, me fui interesando en la agenda de investigación que proponía dicho enfoque: ¿Qué es el objeto matemático derivada y cuál es su significado en una determinada institución? ¿En particular, qué significados de la derivada se ponen en juego en la formación de futuros ingenieros comerciales? En el EOS se da una respuesta a la pregunta anterior en la que la noción de complejidad del objeto matemático derivada y la de articulación de los componentes de dicha complejidad juegan un papel esencial.

4. Se ha desarrollado el diseño y la implementación de procesos formativos para la enseñanza de la derivada en Chile; de esta manera se ha logrado conocer las dificultades de los futuros ingenieros comerciales en la comprensión de dicho objeto matemático.

Con el objetivo de contextualizar el problema, se comienza este capítulo presentando la problemática de la carrera de Ingeniería Comercial en Chile, dentro de una perspectiva internacional de las escuelas y facultades de economía y negocios. Se referencia la problemática de la acreditación; que conlleva a establecer el perfil de egreso y los resultados de aprendizaje de un ingeniero comercial, lo que ayudará a determinar las habilidades y destrezas en la formación matemática de los ingenieros comerciales. Seguidamente, se analiza la importancia de la derivada en Ingeniería Comercial y la problemática didáctica que implica su enseñanza en ingeniería. Lo antes mencionado, permite finalizar el capítulo con la delimitación de la investigación que permite, definir sus objetivos generales y específicos.

## 1.2 EL CONTEXTO CURRICULAR

### 1.2.1 Ingeniería Comercial en Chile

La carrera de Ingeniería Comercial se origina en el año 1903 en la *Ecole de Commerce Solway*, Universidad de Bruselas. En Chile, en el año 1924 se inicia la carrera de Administración de Empresas en la Universidad Católica, como un programa antecedente de la carrera de gestión de empresas, la carrera de Ingeniería Comercial inicia en el año 1935 con la creación de la Escuela de Ingeniería Comercial de la Universidad de Chile.

Actualmente, solo en Latinoamérica existe el título habilitante de Ingeniero Comercial y en Chile, aproximadamente 49 universidades entre estatales y privadas imparten la carrera. Ingeniería Comercial, es una de las especialidades reconocidas por el Colegio de Ingenieros de Chile y se considera como una disciplina de las ciencias económicas y administrativas que aplica los conocimientos de matemática, estadística, métodos cuantitativos, investigación de operaciones, economía, administración, finanzas, mercadotecnia, ingeniería de procesos, ingeniería de proyectos y tecnología de la información para la solución de los problemas sociales, económicos y organizacionales.

La CNA de Chile define la carrera de Ingeniería Comercial como una profesión universitaria orientada hacia la aplicación de un conjunto de competencias (conocimientos, habilidades y actitudes) que se generan a partir del estudio de las ciencias de la administración y de la economía, apoyadas por tecnologías de información, los métodos cuantitativos, otras ciencias sociales y las disciplinas que les sean conexas. Los poseedores del título de ingeniero comercial requieren haber obtenido previamente el grado académico de "Licenciado en Ciencias Económicas y Administrativas" o "Licenciado en Ciencias de la Administración de Empresas" en alguna universidad reconocida por el Estado, esto de acuerdo al decreto de ley N° 3.541, artículo 12°, del año 1980 del Ministerio de Educación de Chile.

A continuación, se describe el plan de estudios de Ingeniería Comercial.

### 1.2.2 El plan de estudios de Ingeniería Comercial.

La CNA, considera que el plan de estudios de la carrera de Ingeniería Comercial debe considerar tres áreas de formación, sin perjuicio de la flexibilidad e integración curricular que determine cada unidad, éstas son: formación básica, formación profesional y formación general o complementaria.

- El área de formación básica: Corresponde al tratamiento de los conocimientos básicos de la ciencia administrativa, de la ciencia económica, ciencias sociales, matemática, estadística y otras disciplinas que el programa de estudios requiera.
- El área de formación profesional: Corresponde al conjunto de las disciplinas relativas a la especialización en administración y/o en economía.
- El área de formación general o complementaria: Corresponde al conjunto de actividades académicas en materias o tópicos orientadas a alcanzar una formación integral del estudiante.

Según Bohle y Rojas (2007), en su análisis exploratorio de los planes de estudio de Ingeniería Comercial vigentes en Chile, éstos poseen una estructura según el tipo de asignaturas, esta es: asignaturas obligatorias, asignaturas optativas y asignaturas de estudios generales.

- Las asignaturas Obligatorias: Aportan al estudiante el núcleo esencial de conocimiento y habilidades inherentes a la profesión. Se encuentran enmarcadas en áreas fundamentales como Administración y Dirección General, Economía, Finanzas, Marketing, Recursos humanos, Matemáticas, Métodos Cuantitativos y Operaciones. Asignaturas obligatorias de carácter complementario como Informática y Derecho.
- Las asignaturas Optativas: Buscan la especialización dentro de la profesión, de acuerdo con la elección personal, corresponde a asignaturas que profundizan los contenidos propios de cada área fundamental.
- Las asignaturas de Estudios Generales: Otorgan una perspectiva complementaria, basada en el estudio de tópicos de libre elección, no necesariamente relacionados con el núcleo fundamental de la profesión.

Como lo mencionamos anteriormente, la carrera de Ingeniería Comercial, es una de las especialidades reconocidas por el Colegio de Ingenieros de Chile, que a través del Consejo de Especialidad de Ingeniería Comercial y Control de Gestión del Colegio de Ingenieros de Chile, en el informe entregado el 25 de noviembre del 2019, mencionan como elemento clave, con el fin de permitir la movilidad al ingeniero comercial, que toda estructura curricular debe considerar formación en ciencias básicas, considerando asignaturas mínimas enfocadas en aplicar conocimientos de matemáticas, análisis numérico, estadística y el uso de tecnologías de información en el tratamiento de datos para comprender, analizar y proyectar soluciones a problemas específicos y complejos. A continuación, indagaremos en la formación matemática de un ingeniero comercial.

### 1.2.3 Formación matemática en Ingeniería Comercial

Bohle y Rojas (2007) concluyen que el Ingeniero Comercial es un profesional con fuerte inclinación formativa hacia el área administrativa-financiera, con una fuerte orientación cuantitativa y económica, y determinan que la mayor cantidad de asignaturas, corresponden al área de estudio de Finanzas, Contabilidad y Costos con un 12,8% y Matemática, Estadística y Econometría con un 12,3%, de esto el 7% corresponde a asignaturas del área Matemática.

La CNA considera que los programas de las asignaturas de matemática deben permitir en el estudiante la adquisición de los conocimientos necesarios para su desempeño profesional. Dentro de los criterios de evaluación de la CNA, específicamente de estructura curricular, se requiere que los programas integren actividades teóricas y práctica, que las asignaturas permitan la adquisición de habilidades y capacidades inherentes a un ingeniero comercial para: trabajar e integrarse eficazmente en equipo, enfrentar los problemas con visión holística y estratégica, liderar, comunicar y motivar eficazmente, seleccionar, integrar y aplicar conocimientos. En lo actitudinal, debe motivar el desarrollo de actitudes de: respeto por los aspectos éticos, legales y contractuales relacionados con el ejercicio de su profesión, autoaprendizaje y promoción del aprendizaje organizacional, y apertura a la diversidad cultural, la internacionalización y la globalización.

Finalmente, debiera contemplar explícitamente objetivos de aprendizaje de carácter general, tales como:

- **Comunicación:** Capacidad para comunicarse de manera efectiva a través del lenguaje oral y escrito, y del lenguaje técnico y computacional necesario para el ejercicio de la profesión.
- **Pensamiento crítico:** Capacidad para utilizar el conocimiento, la experiencia y el razonamiento para emitir juicios fundados.
- **Solución de problemas:** Capacidad para identificar y definir problemas, planificar estrategias y enfrentarlos.
- **Interacción social:** Capacidad para formar parte de equipos de trabajo, y participar en proyectos grupales.
- **Autoaprendizaje e iniciativa personal:** Inquietud y búsqueda permanente de nuevos conocimientos y capacidad de aplicarlos y perfeccionar sus conocimientos anteriores.

- **Formación y consistencia ética:** Capacidad para asumir principios éticos y normas de convivencia.
- **Pensamiento globalizado:** Capacidad para comprender los aspectos interdependientes del mundo globalizado.
- **Formación cívica:** Capacidad para integrarse a la comunidad y participar responsablemente en la vida ciudadana.
- **Apertura hacia la diversidad cultural:** Capacidad de apreciar, respetar y valorar diversas manifestaciones culturales y los contextos de donde provienen.

A título de ejemplo, el plan de estudios de Ingeniería Comercial de una determinada universidad privada chilena, considera dentro de sus asignaturas de ciencias básicas 3 correspondientes a Matemáticas, estas son: Métodos Cuantitativos (1er semestre), Álgebra (2do semestre) y Cálculo Aplicado a los Negocios (3er semestre), estas asignaturas son impartidas exclusivamente para estudiantes de Ingeniería Comercial:

- El resultado de aprendizaje general de la asignatura de Métodos Cuantitativos es: Utiliza conceptos y procedimientos básicos de aritmética y álgebra con apoyo de recursos tecnológicos en problemas de tipo analítico del área de la economía y los negocios. La asignatura considera 4 unidades de aprendizaje: conjuntos numéricos, proporcionalidad y ecuaciones, expresiones algebraicas y sistemas de ecuaciones e inecuaciones. Además, Métodos Cuantitativos es un prerrequisito para cursar la asignatura de Cálculo Aplicado a los Negocios.
- El resultado de aprendizaje general de la asignatura de Álgebra es: Emplea aspectos de progresiones y series, matemática financiera y modelamiento de funciones en situaciones problemáticas del área de la economía y los negocios. La asignatura considera 3 unidades de aprendizaje: progresiones y series, matemática financiera y funciones. Además, la asignatura de Álgebra es un prerrequisito para cursar la asignatura de Cálculo Aplicado a los Negocios.
- El resultado de aprendizaje general de la asignatura de Cálculo Aplicado a los Negocios es: Usa conceptos y procedimientos de derivación e integración con apoyo de recursos tecnológicos en problemas de tipo analítico del área de la economía y los negocios. Esta

asignatura considera 3 unidades de aprendizaje: Derivada de una función, integral de una función y funciones de varias variables.

La investigación se focalizará en la asignatura de Cálculo Aplicado a los Negocios, que forma parte de las asignaturas obligatorias del currículo, específicamente en la unidad de aprendizaje *Derivada de una función*, cuyo resultado de aprendizaje es: Resuelve problemas de tasas de cambio, marginalidad y optimización aplicando derivadas de primer y segundo orden, en funciones de una variable, y que considere, dentro de sus recursos conceptuales, la definición de derivada de una función y su interpretación geométrica, las derivadas de primer y segundo orden, la optimización de una función y la tasa de cambio y de marginalidad.

#### **1.2.4 La derivada y su interés en Ingeniería Comercial**

Las asignaturas del área matemática son consideradas obligatorias y de formación inicial para las ingenierías. Actualmente, sus programas curriculares deben permitir al estudiante la adquisición de los conocimientos necesarios para su desempeño profesional. Esto conlleva el desafío de articular las ciencias básicas y ciencias de la ingeniería, favoreciendo el desarrollo de las competencias profesionales y la formación matemática del ingeniero (Alvarado Martínez et al., 2018).

La matemática es un área del conocimiento fundamental en muchas situaciones del campo de la Ingeniería Comercial. Además, si se considera que muchos de los análisis económicos conciernen a las medidas de cambios, en particular el concepto de la derivada adquiere gran importancia. La derivada en Ingeniería Comercial proporciona, entre otros:

- Reglas de decisiones para optimizar diversos fenómenos económicos, por ejemplo: maximización de ganancias y minimización de costos.
- El estudio de la función de producción, que permite describir la producción de una empresa considerando el número de trabajadores contratados (función producto total y función producto marginal).
- El estudio de la función costo de producción, que permite determinar el costo para una empresa al producir una cantidad determinada de un producto (costo total y costo marginal).
- El estudio de la función ingreso total y marginal, que determina el ingreso de una empresa al vender una cantidad determinada de un producto.



Al respecto, y a manera de ejemplo, se considera una situación presentada en el texto *Matemáticas para Administración y Economía* de Haeussler y Paul (2003): “Un fabricante tiene que producir anualmente unidades de un producto que se vende a una razón uniforme durante el año. El costo de producción de cada unidad es de 20 dólares y los costos de acarreo (seguro, interés, almacenamiento, etc.) se estiman iguales al del valor promedio del inventario. Los gastos de operación por periodo de producción son de (...). Encuentre el tamaño económico del lote.” (p. 585).

### 1.3 PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Los sistemas de acreditación están exigiendo a las facultades y escuelas de ingeniería chilenas cambios en el desarrollo curricular, debido a que las formas tradicionales de enseñanza no favorecen la adquisición de competencias (generales, especializadas y actitudinales) necesarias en la profesión y tampoco tienen en cuenta el perfil de egreso de un ingeniero comercial. En esta línea, las escuelas de ingeniería están interesadas en estructurar sus carreras orientadas al desarrollo de competencias (Letelier et al., 2005), promoviendo un cambio profundo en la readecuación del contenido disciplinario en las ciencias básicas y en la evaluación formativa orientada hacia sus resultados de aprendizaje (Alvarado Martínez et al., 2018).

La asignatura de cálculo para ingeniería es conocida por sus altos niveles de reprobación y por una enseñanza basada en la transmisión de conocimientos con énfasis muy marcado en el desarrollo de habilidades algebraicas (Zúñiga, 2007), son muchos los estudios que abordan estos temas suministrando argumentos teóricos y propuestas de enseñanza con el fin de que los estudiantes tengan éxito en el aprendizaje de esta materia (Artigue, 1998; Cantoral & Farfán, 1998, 2003; Font, 1999, 2000; Pino-Fan et al., 2011; Robles et al., 2010; Salinas & Alanís, 2009; Tall, 2001).

Uno de los objetos matemáticos más importantes del cálculo es la derivada, no obstante, se reporta una comprensión superficial de este objeto, si bien muchos estudiantes pueden aprender a realizar de forma mecánica cálculos de derivadas y resolver algunos problemas, se evidencian dificultades para alcanzar una comprensión profunda (Artigue, 1998; E. R. Badillo, 2003; E. R. J. Badillo et al., 2011; Flores, 2014; Font & Contreras, 2008; Gutiérrez Mendoza et al., 2017; Londoño et al., 2013; Pino-Fan et al., 2015; Sánchez-Matamoros-García et al., 2006).

Además, la derivada es un tópico del cálculo que conjuga muchos objetos matemáticos asociados (función real, plano cartesiano, pendiente, ecuación de una recta, recta tangente, límite de una función real, monotonía y extremos relativos, etc.), posee diversos significados

dependiendo de las situaciones problemas, por ejemplo: como pendiente de una recta tangente; como límite del cociente incremental y un significado puntual o global dependiendo de las necesidades de la tarea a realizar (Sánchez-Matamoros et al., 2006); y diversas propiedades, procedimientos y argumentos que transitan constantemente entre un lenguaje escrito, gráfico, numérico y simbólico, lo que complejiza aún más su comprensión.

Debido a la complejidad de la derivada, habitualmente los procesos de enseñanza presentan al estudiante una versión limitada de la derivada, privilegiando su representación algebraica y en escasas situaciones, su representación gráfica o tabular. Esta problemática ha generado una intensa investigación, desde diferentes aproximaciones teóricas, en torno a las dificultades de comprensión y los procesos de enseñanza que facilitan su aprendizaje (Robles et al., 2010).

Debido a que la enseñanza de los principios del cálculo resulta bastante problemática (Moreno Reyes, 2017), los nuevos modelos curriculares consideran el rol activo de los estudiantes, esto involucra el desafío de repensar la metodología de enseñanza, suscitando aprendizajes activos de participación y compromiso de los estudiantes, desarrollando habilidades de trabajo autónomo y de equipo con uso de tecnologías.

### **1.3.1 Delimitación del problema de investigación**

Lo anterior, muestra la necesidad de realizar una investigación específica sobre la enseñanza de la derivada a ingenieros comerciales en el contexto chileno. Una vez contextualizado este estudio, se procedió a delimitarlo y organizarlo en cuatro etapas que se describen a continuación:

Etapa 1. *Significado global de referencia*. El objetivo de esta etapa fue fijar el *significado institucional de referencia*, que, después, fue la base para el diseño de la secuencia didáctica. Se realizó mediante las siguientes dos subetapas:

Etapa 1a. *Significado holístico de la derivada*. Que comprende los diferentes significados parciales de la derivada y el significado de referencia (entendido como los sistemas de prácticas que se usan como referencia para elaborar los significados que se pretenden incluir en un proceso de instrucción) (Pino-Fan et al., 2011).

Etapa 1b. *Selección de los campos de problemas*. Esta etapa pretende establecer el contexto particular de aplicación de la derivada relacionado con Ingeniería Comercial, seleccionando los campos de problemas específicos, así como el resto de los elementos de significado asociados a

éstos. Para ello, se consideran los campos de problemas presentes en una muestra de libros de matemáticas para ingenieros comerciales, los significados y las situaciones problemas declaradas en los programas curriculares de las asignaturas que contemplan la unidad de aprendizaje de la derivada de las universidades chilenas que imparten la carrera de Ingeniería Comercial en programas diurnos.

*Etapa 2. Diseño de una secuencia de enseñanza:* En esta etapa, después de la selección de los campos de problemas y teniendo en consideración las configuraciones didácticas para abordarlos, se secuencian un proceso de instrucción de la derivada que considere el contexto en que se produce la enseñanza y el tipo de estudiantes.

*Etapa 3. Determinación del significado institucional implementado:* En esta etapa, se describe la enseñanza tal y como es llevada a cabo. A través de la observación de las sesiones de clase de Cálculo Aplicado a los Negocios relacionadas a la derivada.

*Etapa 4. Evaluación del significado personal de los estudiantes:* En esta etapa se estudian las soluciones escritas por los estudiantes a un cuestionario, con preguntas abiertas y algunos problemas aplicados a otras áreas de formación profesional, se caracterizan los elementos de significado puestos en juego por los estudiantes, con el fin de describir el significado personal logrado y evaluar su comprensión sobre la derivada.

### **1.3.2 Objetivos de la investigación**

En la tesis de doctorado se muestra un estudio metódico sobre la derivada a través de una secuencia de enseñanza implementada en un curso de Ingeniería Comercial de segundo año para la asignatura de Cálculo Aplicado a los Negocios. Además; y se determina el significado personal adquirido por los estudiantes.

En el estudio se considerará el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS) desarrollado por Godino y colaboradores (Godino et al., 2007, 2019) y parte de las investigaciones realizadas en torno a la derivada como: evolución histórica, su faceta epistémica, dificultades de aprendizaje, propuestas de enseñanza, etc. Dentro del marco teórico citado, el objetivo general y los objetivos específicos son los siguientes:

#### **Objetivo General**

Analizar un proceso de instrucción de la derivada para estudiantes de Ingeniería Comercial que considere el contexto, el tipo de estudiantes y el marco teóricos en el que se fundamenta la investigación.

## Objetivos Específicos

El objetivo general se logra cumpliendo los siguientes objetivos específicos:

**O1.** Realizar un estudio diagnóstico de la comprensión que tienen los estudiantes de Ingeniería Comercial sobre la derivada, a través de las resoluciones que hacen sobre problemas de tangentes.

**O2.** Identificar los significados pretendidos de la derivada en los programas de las asignaturas de las carreras de Ingeniería Comercial.

**O3.** Identificar los campos de problemas, lenguaje, procedimientos, enunciados, propiedades y argumentos, utilizados usualmente en la enseñanza de la derivada a ingenieros comerciales, en una muestra representativa de libros de texto destinados a estos estudiantes.

**O4.** Diseñar un proceso de instrucción para la enseñanza de la derivada por medio de la selección de los campos de problemas, lenguaje, procedimientos, enunciados, propiedades y argumentos utilizados usualmente en la enseñanza de la derivada para estudiantes de Ingeniería Comercial. Seleccionar los elementos de significado adecuados para la construcción de la propuesta didáctica, considerando campos de problemas específicos y configuraciones didácticas adecuadas para abordarlos.

**O5.** Implementar y analizar el impacto del proceso de instrucción implementado en el aprendizaje de la derivada por los estudiantes de Ingeniería Comercial, evaluando y comparando el significado personal de los estudiantes con el significado institucional implementado.

### 1.4 ESTRUCTURA DE LA MEMORIA DE INVESTIGACIÓN

Esta memoria de investigación se enmarca en la modalidad de compendio de artículos y se ha organizado en 7 capítulos. En el Capítulo 1 se contextualiza la investigación, presentando los modelos educativos universitarios y la educación en carreras de Economía y Negocios en Chile, especificando la formación matemática de los estudiantes de esta área, lo que permitirá determinar sus habilidades y destrezas. Se analiza la importancia de la derivada en matemática y la problemática didáctica que implica su enseñanza a estudiantes del área de Economía y Negocios. También, se presentan el objetivo general y los objetivos específicos, acompañados de la estructura de la memoria de investigación.

En el Capítulo 2 se presenta el artículo científico I que persigue dar cumplimiento al objetivo específico 1, es decir, fue un estudio diagnóstico que reveló las dificultades que presentan los futuros ingenieros comerciales en el concepto de función y la concepción

euclidiana de la recta tangente; la construcción del significado de recta tangente como límite de rectas secantes; la interpretación de la función derivada y su representación geométrica; realizar operaciones para calcular la pendiente de una recta y; operar con funciones.

En el Capítulo 3 se presenta el artículo científico II que persigue dar cumplimiento al objetivo específico 2. La investigación corresponde al estudio del tratamiento de la derivada en los programas de las asignaturas de las carreras de Ingeniería Comercial en Chile, lo cual mostró que, si bien la mayor parte de las propuestas curriculares presentan similitudes en la organización de contenidos y en los elementos lingüísticos utilizados para la construcción del objeto derivada, se observan diferencias importantes en la preponderancia de la derivada interpretada como una razón de cambio y en los campos de problemas abordados.

En el Capítulo 4 se presenta el artículo científico III que persigue dar cumplimiento al objetivo específico 3, es decir, corresponde estudio de los significados pretendidos de la derivada en libros de texto para las carreras de Ingeniería Comercial en Chile, que registró: a) un énfasis en el significado parcial de la derivada como el límite del cociente de incrementos y un predominante lenguaje simbólico en los argumentos; b) poca presencia de algunos teoremas importantes relacionados a la derivada y; c) falta de una representatividad de las definiciones de la derivada (Galindo Illanes & Breda, 2023).

En el Capítulo 5 se presenta el artículo científico IV que persigue dar cumplimiento al objetivo específico 4, es decir, corresponde a la presentación del diseño instruccional de un proceso de enseñanza y aprendizaje de la derivada para futuros ingenieros comerciales, estudiantes de la carrera de Ingeniería Comercial de una universidad chilena.

En el Capítulo 6 se presenta el artículo científico V que persigue dar cumplimiento al objetivo específico 5, es decir, corresponde a la descripción de la implementación y el análisis del impacto del proceso de instrucción implementado en el aprendizaje de la derivada por los estudiantes de Ingeniería Comercial, evaluando y comparando el significado personal de los estudiantes con el significado institucional implementado.

Finalmente, en el Capítulo 7 se presentan las conclusiones con relación a los objetivos específicos y el objetivo general de la investigación.

## 1.5 ARTÍCULOS CONSIDERADOS EN LA ESTRUCTURA DE LA MEMORIA

Esta tesis contempla 5 artículos científicos. Los artículos considerados en esta memoria permiten al lector comprender como se ha realizado la investigación en el sentido espacio-

temporal. Los artículos que se presentan al largo de la tesis atienden a los objetivos específicos planteados. De los 5 artículos, tres de ellos cumplen las exigencias de calidad de las revistas para presentar una tesis por compendio de artículos. Los otros dos son publicaciones que consideramos relevantes para explicar el trabajo de investigación realizado. En lo que sigue, listamos las referencias de los artículos contemplados por orden de cumplimiento de los objetivos específicos planteados en la investigación.

*Artículos considerados en la memoria de tesis*

- I. Galindo Illanes, M. K., Breda, A., Chamorro Manríquez, D. D., & Alvarado Martínez, H. A. (2022). Analysis of a teaching learning process of the derivative with the use of ICT oriented to engineering students in Chile. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 18 (7), em2130. <https://doi.org/10.29333/ejmste/12162>
- II. Galindo-Illanes, M. y Breda, A. (2022). El tratamiento de la derivada en el plan de estudios de Ingeniería Comercial en Chile. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 285-293). SEIEM.
- III. Galindo Illanes, M. K., y Breda, A. (2023). Significados de la derivada en los libros de texto de las carreras de Ingeniería Comercial en Chile. *Bolema*, 37(75), 271-295. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v37n75a13>
- IV. Galindo Illanes, M. G., Breda, A., & Alvarado Martinez, H. (2023). Diseño de un proceso de enseñanza de la derivada para estudiantes de Ingeniería Comercial en Chile. *PARADIGMA*, 44(4), 321-350. <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2023.p321-350.id1386>
- V. <sup>1</sup>Galindo Illanes, M. K.; Breda, A. (en prensa). Proceso de instrucción de la derivada aplicado a estudiantes de Ingeniería Comercial en Chile. *Uniciencia*, Published: Jan/31/2024.

---

<sup>1</sup> La carta de aceptación del artículo se encuentra en el Anexo 1 de esta memoria de tesis.



## CAPÍTULO 2. ARTÍCULO CIENTÍFICO I

---

Este capítulo tiene como objetivo establecer un diagnóstico de la comprensión que tienen los estudiantes de Ingeniería Comercial sobre la derivada, a través de las resoluciones que hacen sobre problemas de tangentes, atendiendo el objetivo específico 1 (O1) de esa investigación. Para ello, durante tres años se realizaron estudios que fueron presentados en cuatro congresos, siendo dos de ellos expuestos en el Encuentro Nacional de Escuelas y Facultades de Administración los años 2019 y 2021. En ellos se evidenciaron las dificultades de comprensión que presentaban los estudiantes de Ingeniería Comercial en Chile con relación a la interpretación geométrica de la derivada. Finalmente, el año 2022, se publicó el artículo científico a través del cual se establece que los futuros ingenieros comerciales chilenos presentan dificultades en: el concepto de función y la concepción euclidiana de la recta tangente; la construcción del significado de recta tangente como límite de rectas secantes; la interpretación de la función derivada y su representación geométrica; realizar operaciones para calcular la pendiente de una recta y; operar con funciones.

### 2.1 REFERENCIA DEL ARTÍCULO CIENTÍFICO I

Galindo Illanes, M. K., Breda, A., Chamorro Manríquez, D. D., & Alvarado Martínez, H. A. (2022). Analysis of a teaching learning process of the derivative with the use of ICT oriented to engineering students in Chile. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 18 (7), em2130. <https://doi.org/10.29333/ejmste/12162>

### 2.2 BASES E INDEXACIÓN DEL PERIODICO

Segundo la Matriz de Información para el Análisis de Revistas (MIAR), la revista *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education* pertenece al ámbito de Educación y de Matemáticas, específicamente en el campo académico de la Educación en general y de la Matemática Aplicada. Está indexada en Scopus, IBZ Online, Education Resources Information Center (ERIC), Psycinfo y evaluada en ERIHPlus. Sus métricas en Scimago Journal & Country Rank (SJR) es de 0,51 (Q2) en el año 2022 y CiteScore de 4,2 (Q1) en el año de 2022. El artículo presenta, actualmente, 4 citas en Scopus y 1 cita en Emerging Sources Citation Index (ESCI) de Web of Science (WoS). Artículo publicado en el marco de los proyectos PGC2018-098603-B-I00 (MINECO/FEDER, EU) y del proyecto internacional de la Universidad Católica de la Santísima Concepción, Chile (FAD 2021-22, Integrando las TIC en la enseñanza de la derivada en estudiantes de Ingeniería).



### 2.3 RESUMEN DEL ARTÍCULO CIENTÍFICO I

El artículo científico tiene como objetivo analizar las respuestas de un grupo de estudiantes de ingeniería relacionadas a problemas sobre tangentes en un proceso de enseñanza de la derivada en un curso de cálculo diferencial. El diseño metodológico orientado a un grupo de 161 estudiantes de dos universidades chilenas consideraba diversas configuraciones ontosemióticas en la situaciones-problema sobre tangentes. La metodología implementada integra las TIC en las actividades diferenciadas, favorece el uso de lenguajes y un acercamiento progresivo al significado de la derivada. El análisis, de tipo exploratorio, se realiza aplicando algunas herramientas del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemáticas. Se evidencian dificultades en el concepto de función y en la concepción euclídea de la recta tangente, lo que conlleva a una débil interpretación de la función derivada y de su representación geométrica. Se concluye que la implementación de la interpretación geométrica por medio de las TIC posibilita la mejora de la enseñanza de la derivada.

*Keywords:* Enseñanza de la derivada, Problemas sobre Tangentes, TIC, Educación en ingeniería

### 2.4 ABSTRACT OF THE SCIENTIFIC ARTICLE I

The scientific article aims to analyze the answers of a group of engineering students related to problems about tangents in a process of teaching the derivative in a differential calculus course. The methodological design, oriented to a group of 161 students from two Chilean universities, considers different onto-semiotic configurations in problem-situations about tangents. The methodology implemented integrates information and communication technologies in differentiated activities, favoring the use of languages and progressive approach to the meaning of the derivative. The exploratory-type analysis was carried out applying some tools of the ontosemiotic Approach of mathematical knowledge and instruction. Difficulties were found in the concept of function and the Euclidean conception of the tangent line, which brings with it a weak interpretation of the derivative function and its geometric representation. It is concluded that the implementation of the geometric interpretation through information and communication technologies makes it possible to improve the teaching of the derivative.

*Keywords:* teaching of the derivative, problems about tangents, information and communication technologies, engineering education.

## 2.5 INTRODUCTION

The subject of differential and integrated calculus, oriented to engineering, is known for its high levels of failing and for a teaching based on the transmission of knowledge with a very marked emphasis in the development of algebraic abilities (Zúñiga, 2007). This has caused an interest in researching the processes carried out in the teaching of this subject. With the aim of establishing teaching standards (Martínez et al., 2013) engineering schools of different countries are currently promoting educational models based on competencies, emphasizing, amongst other aspects, the active role of the student, the use of information technology resources and virtual learning platforms in teaching, and the preparation of teachers in updated teaching methodologies (Alvarado Martínez et al., 2018; Esnaola Horacek & de Ansó Lavín, 2019; Marquès Graells, 2013; Martín et al., 2017; Ramírez Leal et al., 2018).

Information and communication technologies (ICTs) are an essential tool in the incorporation of knowledge both face to face and virtually, as they, amongst other things: a. facilitate autonomous and collaborative work among students (Ahumada Torres, 2013; López & Hernández, 2016); b. strengthen metacognitive competencies (Tourón & Santiago, 2015); and c. promote social interaction and collaborative problem solving (Aguilera-Ruiz et al., 2017; González-Gómez et al., 2017; Hernández-Silva & Tecpan Flores, 2017; Martín R. & Tourón, 2017; Núñez & Gutiérrez, 2016). Along these lines, a curriculum is being implemented that is less technical and more and more practical in the context of conceive-design-implement-operate (CDIO) (Gustafsson et al., 2002). However, there exists a difficulty in the implementation of these new curricular processes from the teachers as, on one hand, they seldom manage teaching methodologies (Hitt & Dufour, 2014) and, on the other hand, the structure of the subject program is extensive and inflexible (Letelier et al., 2005). As a consequence, teachers of calculus carry out classroom interventions that consider mainly algebraic activities, giving priority to symbolic language and not benefitting the movement between languages, and this has caused scarce learning of the fundamental concepts of calculus, as has been shown through diverse research (Hitt, 2005). For this reason, there are many studies that have dealt with these issues, providing theoretical arguments and teaching proposals so that students can be successful in learning calculus (Antonio Zambrano et al., 2019; Balcaza Bautista et al., 2017; García González & Dolores Flores, 2016; Pino-Fan et al., 2011).

One of the mathematical objectives taught in the calculus subject in engineering courses is the derivative due to its applicability. The derivative is a complex calculus topic that blends

many associated meanings: real function, Cartesian plane, slope, equation of a line, secant line, tangent line, real limit of a function, etc. On the other hand, it possesses diverse representations, depending on the situation problems, for example: the graph, as a slope of a tangent line; the analytical, as the limit of the incremental quotient and a global or point aspect depending on the needs of the task to be carried out (Sánchez-Matamoros et al., 2006). Additionally, different properties, procedures and arguments that move between descriptive, geometric, graphic, tabular, and symbolic languages make its comprehension even more complex. The articulation of the components in which this complexity breaks out is present in almost all the emerging theoretical frameworks in the area of mathematical education. This article takes as its theoretical referent the Onto-semiotic Approach (OSA) of mathematical knowledge and instruction (Godino et al., 2007, 2019). Working with the different meanings of a mathematical object is an aspect proposed in the OSA, which argues for analyzing the complexity of mathematical objects through their pluri-meanings (partial meanings). In this theoretical approach, we can say that, in competence terms, the consequences of the future engineer not understanding the different meanings of the derivative and its different forms of representation is that it will be difficult to establish logical relationships between the mathematical elements necessary for and during the resolution of a problem or a specific situation (Sánchez-Matamoros, 2004). For example, from understanding the geometric meaning of the derivative, the future engineer is able to understand and reflect on the optimization process. That is, to apply the geometric meaning of the derivative in a cost optimization situation, understanding the result for better decision making.

Habitually, teaching processes present a dogmatic version of the derivative, favoring their algebraic representation and infrequently favoring their graphic or tabular representation. This aspect has generated research from different theoretical approaches about the difficulties in comprehension and the processes that facilitate its learning (Artigue, 1998; Robles et al., 2010). The difficulties are related to situation problems about tangents, maximums and minimums, and variations and velocity (Pino-Fan et al., 2011), in the graphic comprehension of the tangent as a limit in a set of secant lines, and in the notion of the rate of change in a point in a curve (stationary points, points of inflexion, points of maximums and minimums, etc.) (Orton, 1983). Difficulties have also been observed related to the different ways of expressing  $f'$ , (tabular, algebraic, and graphic) (Font, 1999, 2000, 2005) and in using the analytical expression of the derivative (limit of the incremental quotient) or the geometric interpretation (as a slope of a tangent line) (Artigue, 1998). In concrete terms, the difficulties in comprehending the derivative are due to the lack of argumentation using diverse languages by the students, shown

in situation problems about tangents and, to a lesser extent, in situation problems of maximums and minimums, and variations and velocity (Azcárate, 1990; Badillo et al., 2011; Balcaza Bautista et al., 2017; Berry & Nyman, 2003; Borgen & Manu, 2002; A. Flores, 2014; Font, 2008, 2009; Gutiérrez Mendoza et al., 2017; Habre & Abboud, 2006; Hitt, 2005; Inglada & Font, 2003; Londoño et al., 2013; Orton, 1983; Pino-Fan et al., 2015; Sánchez-Matamoros, 2004; Sánchez-Matamoros et al., 2008; Zandieh, 2000). In terms of the incorporation of ICTs in the learning of complex mathematical objects, along with its applications and interpretations, the results indicate that the use of these technological tools offers students an appropriation of the concepts, allowing for a verification of that done in algebraic form, an appropriate interpretation of the results, and the capability to apply what was learned (Pico Macías et al., 2017; Pineda Izasa et al., 2020; Salas-Rueda & Lugo-García, 2019). Lagrange et al. (2001) present the results of a meta-analysis of more than 600 publications with research reports and experiences of innovation in the use of ICTs in mathematical education.

The calculus line is that which has received greatest interest and investment in the use of technologies and, in particular, the derivative mathematical object as it allows students to approach the concept considering different representations (Tall, 2001). In agreement with López (2008), we argue that the use of new technologies will allow us to approach the concept of the derivative through several configurations such as the manipulative, the computational, and the algebraic, until we arrive progressively at the conceptualization of an abstract definition, going through activities that permit the exploration and proving of conjectures with the use of these concepts. With the support of some tools from OSA, the objective of this work is to carry out an exploratory analysis of the resolutions of engineering students in the field of tangent problems, done in the context of a proposal of teaching and learning of the derivative that considers manipulative, computational, and algebraic configurations. This is considered in the definition of concepts, propositions, procedures, and arguments in a movement between geometric, descriptive, graphic, and symbolic languages through the integration of ICTs. In particular, in this study, the proposal for teaching the derivative is centered on the student and integrates ICTs into the design of the intended activities in order to favor a gradual approach to the derivative. More specifically, this study takes into consideration diverse representations of the derivative through the field of the problem about tangents (geometric interpretation of the derivative), protecting the movement between different languages: written, numeric, graphic, and symbolic, through the integration of ICTs.

## 2.6 THEORETICAL FRAMEWORK

Onto-Semiotic Focus of Mathematical Instruction and Knowledge The theoretical developments proposed by OSA, recently explained in Godino et al. (2019), aim to respond to some problems generated in the field of mathematical education. In OSA, it is assumed that mathematical activity is a human activity centered on problem resolution, in a determined time-space, through a sequence of practices that often consider processes (of signification, conjecture, argument, etc.). Thus, OSA proposes the notion of situation-problem in mathematical practice (sequence of practices) that takes place during the resolution of these problem situations. These sequences take place in time and tend to be considered, in many cases, as processes. In particular, the use and/or emergence of the primary objects of the configuration (problems, definitions, propositions, procedures, and arguments) takes place through their respective mathematical processes of communication, problematization, definition, enunciation, elaboration of procedures (creation of algorithms and routines), and argumentation (applying the process-product duality). On the other hand, the aforementioned dualities give way to the following processes: institutionalization–personalization, generalization–particularization, analysis or decomposition–synthesis or reification, materialization or concretion–idealization or abstraction, expression/representation–signification. OSA also assumes the principle that the knowledge of an object by a subject (be it an individual or an institution) is a set of semiotic functions that this subject can establish as those in which the object intervenes as expression or content. In addition, the correspondence between an object and the system of practices where the object intervenes is interpreted as the “meaning of this object” (institutional or personal). For example, when a subject carries out and evaluates a sequence of mathematical practices, she or he activates a conglomerate formed by situation-problems, languages, definitions, propositions, procedures, and arguments articulated in what OSA calls a configuration of primary objects (Font et al., 2013). To delimit the meanings of a mathematical object, OSA proposes the tool called “analysis of systems of practice” (personal and institutional) and the onto-semiotic configurations involved with them (Font et al., 2013). Representativity of the complexity of mathematical objects in OSA: The case of the derivative Font et al. explains that the notion of the complexity of a mathematical object and the articulation of the components of that complexity play an essential role. Understanding the complexity, in terms of a plurality of meanings, is a result of the pragmatic vision of the meaning that is assumed in OSA. From a pragmatic point of view, the meaning of a mathematical object is understood as a set of practices in which the object intervenes in a

determining fashion (or not). A mathematical object, that has originated as an emergent of the system of practices that allows the resolution of a determined field of problems, becomes over time framed in different programs of research. Each new research program allows us to resolve new types of problems, apply new procedures, relate the object (and thus, define) in a different way, use new representations, etc. In this way, as time passes, new subsets of practices (directions) appear that broaden the meaning of the object. For the derivative mathematical object, Pino-Fan et al. (2011) characterize its complexity through nine configurations of primary objects: 1. tangent in Greek mathematics; 2. variation through the Middle Ages; 3. algebraic methods to find tangents; 4. cinematic conceptions for the tracing of tangents; 5. intuitive ideas of limits for the calculation of maximums and minimums; 6. infinitesimal methods in the calculation of tangents; 7. calculation of fluxions; 8. calculation of differences; and 9. the derivative as limit. In Pino-Fan et al. (2013), these nine configurations are used for the reconstruction of the global meaning of the derivative which is used to value the representativity of the intended meaning in the curriculum of the bachelor's degree in Mexico (from the configurations of the primary objects activated in the mathematical practices proposed both in the study plan and the textbooks of that level). The characterization of the complexity of the derivative done in Pino-Fan et al. (2011) facilitates having elements to design questionnaires that allow us to characterize the comprehension of the students, future teachers, and in-service teachers about the derivative. For example, in Pino-Fan et al. (2015), a questionnaire was designed to determine the comprehension of future teachers of the derivative, in which tasks were included to activate the different partial meanings of the derivative characterized in Pino-Fan et al. (2011). In accordance with OSA, "problems about tangents" are understood as the practices done by the student to resolve problems in which the slope of the tangent line (geometric meaning of the derivative) has a relevant role in its resolution, which implies conceiving it also as "knowledge and application of norms" that regulate the practice and the primary objects that intervene in it (problems, procedures, propositions, and arguments) (Galindo Illanes & Breda, 2022; Galindo Illanes & Breda, 2020; Godino et al., 2019). In the same way, we will consider, in this work, three epistemic configurations: manipulative (the student works with manipulative devices without using algebraic notation or calculation), algebraic (characterized by symbolic language and deductive demonstration, as well as resources such as algebra and analysis), and computational (characterized by iconic language, the simulation is incorporated as a procedure and the preferable argument is inductive), adapted from Alvarado et al. (Pino-Fan et al., 2011), in the context of the derivative.

## 2.7 METHODS

In this section, the context of the study, the instruments for data collection and the analysis of this data are explained.

### 2.7.1 Context of the study

#### *Participants*

161 students participated in the research, of which 91 belong to the business engineering program of the Faculty of Economy and Business and 70 belong to the civil computer engineering program of the Faculty of Engineering, with ages between 18 and 19 years old, and from two Chilean universities. The study plan of civil computer engineering places the subject of calculus in the first academic semester and the study plan of Business Engineering places the calculus subject in the third academic semester and has the algebra course as a prerequisite.

#### *Bases for a didactic proposal*

The intervention plan considered, for the development of the teaching the derivative, the following elements:

- a. The problem fields: The proposal considers one of the main problems that gives rise to the derivative object, PT: problems of tangents (Pino-Fan et al., 2011).
- b. Epistemic configurations: The proposal considers three configurations used in teaching to facilitate students' comprehension: manipulative, computational, and algebraic, which are differentiated especially by the tools (procedures and languages) and the set of resources the student has to resolve the problem.
  - i. In the manipulative configuration, the student works with paper, ruler, and pen. The language used in this configuration is that which is characteristic of descriptive procedures and analytical geometry.
  - ii. In the computational configuration, the student has a notebook, cell phone or tablet, internet, GeoGebra (free version), QR code, educational videos, and applets. The language and procedures are of a graphic, geometric, and descriptive type.
  - iii. In the algebraic configuration, the student has a notebook, cell phone or tablet, internet, educational software such as Symbolab (free version) and Wolfram Alpha (free version). The language and procedures are of a symbolic and tabular type.

c. Synchronic and asynchronous work: The didactic trajectory considers synchronic and asynchronous sessions directed by the teachers. The synchronic sessions are carried out in the established timetable and require interaction from the student. However, the asynchronous sessions do not have an established timetable and consider the student's autonomous work.

*Development of the teaching*

The program of the calculus subject is developed in 18 weeks, and each week has four chronological hours of theory classes called lectures and two chronological hours of classes of cooperative work and exercises called tutorials. For the development of the teaching in the field of problems of tangent, two weeks were considered, each of them with three synchronic and one asynchronous session. In the synchronous sessions, both professors were present in the classrooms of the two universities, in the schedules established for the lectures and tutorials. These activities led by the teachers allowed the activation of the knowledge acquired by the students during the asynchronous sessions and collaborative group activities that favored dialogue, feedback and consolidation of the knowledge acquired by the students of both universities. The asynchronous sessions included activities such as watching educational videos, reading theoretical and practical notes and carrying out guided activities, available on the Moodle virtual platform of both institutions. This material was prepared by the teachers, in order to guide the students' autonomous work. The planning of the study of the derivative included problems about tangents (PT).

In this stage we considered six synchronic and two asynchronous sessions, over a period of two weeks (Table 1 and Table 2).

**Table 1.** Week 1: Timing and Planning of Problems about Tangents

Session	Didactic action	Objective of the didactic action	Languages	Configurations
1 (Asynchronous)	Visualization video 1,	Introduction to the line tangent to a curve.	Geometric	Computational
	Study theoretical manuscript.	Obtaining the slope of the tangent line through approximations by the slope of secant lines	Graphic Descriptive	
2 (Synchronic)	Task 1			Manipulative Algebraic
	Task 2	Obtaining the slope of the tangent line through	Tabular Geometric	



		approximations for the slope of secant lines. Physical application of the slope of a line tangent to a curve.	Graphic Descriptive	
3 (Synchronic)	Task 3	Geometric interpretation of the derivative in a particular point	Symbolic Graphic	Computational algebraic
4 (Synchronic)	Task 4	Determination of tangent and normal lines.	Symbolic	Algebraic

To begin the study of the line tangent to a curve, it was proposed in session 1 that students examine an educational video and a theoretical manuscript and then do task 1, which allows them to construct the concept of the line tangent to a curve through its genetic decomposition (Orts Muñoz et al., 2016). The problems of task 1 consider broadening the Euclidian conception to the Cartesian through the construction of the tangent line as a limit of the secant lines using an applet of GeoGebra. In session 2, task 2 was carried out. This considered problems such as, for example, the construction of a tangent line as a limit of secant lines using manipulative configurations and geometric language; physical applications relating the concept of slope of the secant line with that of mean velocity; and the concept of instant velocity as the approximation of the calculated mean velocities, highlighting their equivalence with the slope of the tangent line. The purpose of this task is the thematization of the diagram of the tangent line through the conscious use of its properties and subsequent decapsulation that allows the return from the object to the process that generated it (Orts Muñoz et al., 2016). In session 3 problems were considered in which the slope of the line tangent to a curve was related with the derivative of the function as a point of tangency. The purpose of the task is to know, as a process, the identification of the tendency of the slope of the secant lines with the derivative of the function in the point of tangency (Orts Muñoz et al., 2016). Keeping infinitesimal methods in mind, the calculation leads students to the highest levels of generality of the tangent (Santi, 2011). Session 4 considered the problems of equations of tangent and normal lines, consolidating the concept of the derivative at a point as limit of the slopes of the secant lines. The purpose of this activity is the thematization of the diagram of the line.

**Table 2.** Week 2: Temporalization and Planning of the Problems about Tangent

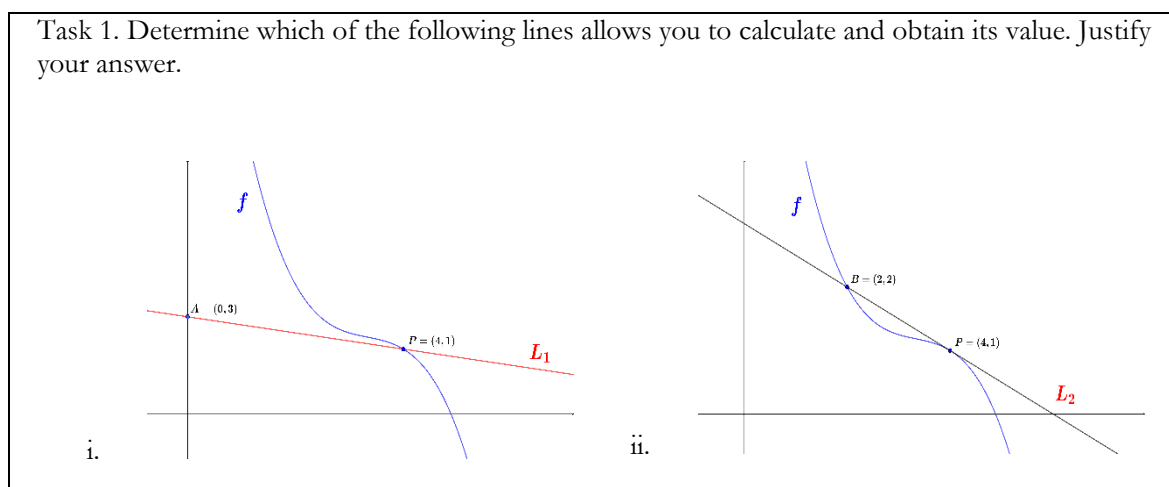
Session	Didactic action	Objective of the didactic action	Languages	Configurations
---------	-----------------	----------------------------------	-----------	----------------

5	Visualisation video 2, (Asynchronous) Study theoretical manuscript	Introduction to the derivative function	Graphic	Computational
6	Task 5	Articulation of the derivative of a function in a point and its derivative function	Tabular Graphic Symbolic Descriptive	Computational Algebraic
7	Task 6	Generalisation of the derivative of a function in a point and its derivative function	Graphic Symbolic Descriptive	Computational
8	Task 7	Applications of the derivative function	Tabular Graphic Symbolic	Computational Algebraic

In session 5 the student analyzed the second video and the theoretical notes which considered different types of function, singular points in which the existence of tangent lines is evaluated, and the concept of the derivative function is introduced. The aim of session 6 was to move from the derivative of a function in a point to the derivative function. If we consider that the students have practiced the calculation of the slope of a line and the geometric meaning of the derivative in a point in previous sessions, we can thus suppose that they can obtain the symbolic expression  $f'(x)$  without much difficulty (Font, 2000). For this, tasks are considered in which the symbolic expression of the function  $f(x)$  is known and the function that all the slopes of the tangent lines fulfil is constructed, and this corresponds to the symbolic function of  $f'(x)$ . Among the exercises developed, an adaptation of the problem proposed by Font (2009) is considered and the movement between graphic, tabular and analytical expressions of  $f'$  is encouraged. Session 7 allowed students to generalize, through the GeoGebra application, the derivative function as a function which, at each value, corresponds to the slope of the tangent line of the graph of  $f$  in the point  $(x, f(x))$ . It is expected that the student will interpret the derivative function  $f'(x)$  as a function whose images,  $y_0 = f'(x_0)$ , correspond to the slopes of the tangent lines of the function  $f$  in  $x_0$ , thus causing the decapsulation of the object of the tangent line. Session 8 considered problems of equation in tangent and normal lines using the derivative function. The purpose of this activity is the thematization of the diagram of the tangent line and the consolidation of the geometric representation of the derivative.

### 2.7.2 Data Collection Instruments

For the exploratory analysis of the students' learning in the field of problems about tangents, an instrument was applied at the end of each week. To continue, for reasons of space, two representative tasks of each instrument we applied are presented. The instrument of week 1 provides us with information about the student's specialized knowledge of tangents, as it considers in its development the steps from its application, or implicit use, to a conscious use of the properties of the tangent line. In other words, the student carries out the thematization of the diagram of the tangent line and concludes the geometric meaning of the derivative in a point to answer the question (Figure 1).



**Figure 1.** Task applied to students at the end of the first week.

In this task, the student must first identify the line that allows him or her to determine  $f'(4)$ , and then must adequately justify that the line allows him or her to calculate  $f'(4)$  through its slope, and for this, he or she must consider, in the argument, the geometric interpretation of the derivative, mentioning that the line corresponds to the tangent line of the curve in  $P$  utilising the cartesian concept (limit of secant lines) or the Leibnizian concept (better linear approximation to a curve) for that. To calculate, the student must know, as action, the slope of a line from two points contained in it, and for this must use the points  $P = (4, 1)$  and  $B = (2, 2)$  contained in the line  $L_2$ , and calculate,  $m_{L_2} = \frac{1-2}{4-2} = -\frac{1}{2}$ . Then student must obtain the value of the derivative requested by thematizing the diagram of the line tangent to the curve to conclude that  $f'(4) = m_{L_2} = -\frac{1}{2}$ .

The instrument of week 2 corresponds to an adaptation of the problem proposed by Font (2009, p. 17- 18). This allows us to analyze the movement of the student through the graphic, tabular and symbolic representations of  $f'$  (Figure 2).

Task 2. Let  $f$  be a real function of a real variable.

- With the support of *Symbolab*, obtain the slope of the tangent line of the graph of  $f$  in the point of abscissa, i.e.,
- What is the value of the derivative of the function  $f$  in the point of abscissa?
- Complete the following table.


- Based on the previous table, represent the points in a cartesian plane.
- Trace the graph of the curve that contains the points.
- Model the curve previously drawn for any point and explain in your own words what it represents.

**Figure 2.** Task applied to students at the end of the second week.

It is expected that, in this task, the student will apply the concepts and results of the geometric interpretation of the derivative. In section a) the student, supported by mathematical software, obtains the slope of the line tangent to the graph of the quadratic function in a point  $(1, 1)$ , i.e.,  $m_T = 2$ . Following this, in section b) the student must link the previous result with the concept of the derivative in that point, i.e.,  $f'(1) = 2$ . In section c) the procedure from sections a) and b) is repeated with other points and then the data is summarized in a table. In section d) and e) the information tabulated is used to trace a graph that contains the points  $(x_0, f'(x_0))$ . Finally, section f) models the traced curve, concludes that it is the function  $f'(x) = 2x$  and explains that the curve represents the graph of a function that, at each value, makes the slope of the tangent line correspond to the graph of  $f$  in the point  $(x, f(x))$ . Analysis Methods Mixed-type analysis (Johnson & Onwuegbuzie, 2004), by means of the notion of configurations of primary objects of OSA, permitted an exploratory-type analysis, in the sense of quantifying the correct actions (frequency) related to the students' resolutions of the tasks proposed for each of the primary objects. From a qualitative point of view, it was possible to identify correct and incorrect responses and arguments of the students on resolving the proposed tasks.

### 2.7.3 Analysis methods

Mixed-type analysis (Johnson & Onwuegbuzie, 2004), by means of the notion of configurations of primary objects of OSA, permitted an exploratory-type analysis, in the sense of quantifying the correct actions (frequency) related to the students' resolutions of the tasks

proposed for each of the primary objects. From a qualitative point of view, it was possible to identify correct and incorrect responses and arguments of the students on resolving the proposed tasks.

## 2.8 RESULTS AND DISCUSSION

In the following the results obtained by the 91 students of Business Engineering and the 70 students of Civil Computer Engineering in items 1 and 2 are presented. In addition, an exploratory analysis was done, showing with images the procedures and arguments of the responses of some students.

Table 3 presents the results of task 1 of students of Business Engineering and Civil Computer Engineering. It is observed that 59% and 46%, respectively, identify that the line  $L_2$  allows them to obtain  $f'(4)$ , but only 41% and 31% adequately justify that the line is tangent to the graph  $f$  in the point  $P$ , i.e., carrying out the correct process of thematization of the tangent line in the geometric interpretation of the derivative. We must observe that 68% and 69% identify that the points offered allow them to calculate the slope of the lines and do this calculation correctly, determining the slope  $m_T$ , but only 33% and 23% give a symbolic or descriptive answer that concludes the activity. These results show that there exists a relationship between the learning of the tangent of a curve and the learning of the geometric interpretation of derivative.

**Tabla 3.** Frequency of correct answers in Task 1 (n1 = 91, n2=70)

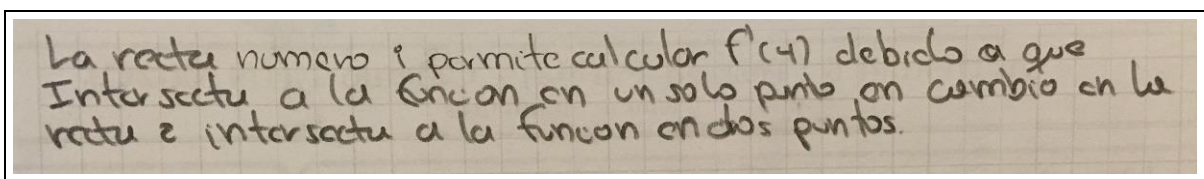
Actions for the problems about tangents	Primary objects	n1		n2	
		Absolute	n1(%) Relative	Absolute	n2(%) Relative
Identifies that the line $L_2$ is the line that allows them to calculate $f'(4)$	Representation	54	59	32	46
Justifies that the line $L_2$ is a tangent line to the curve	Argument	37	41	22	31
Correctly identifies the points belonging to the line that permit the calculation of the slope	Representation	62	68	48	69
Correctly uses the formula for slope	Procedure	55	60	48	69
Correctly relates the slope of the tangent line to the	Definition	30	33	16	23

---

curve with the derivative  
of the function in the  
point of tangency

---

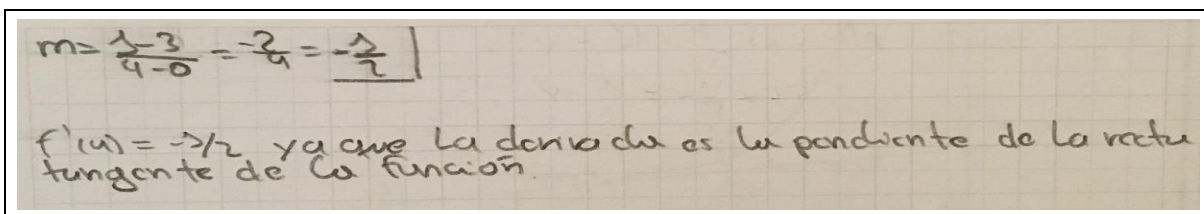
In Figure 3, the justification used by a student to wrongly identify line  $L_1$  as the tangent of the curve  $f$ , where we can show the influence of the Euclidean conception of the tangent line (it only has one point in common with the curve). This result does not differ from prior research that reveals the obstacle to construct the Cartesian conception and later Leibnizian product of the Euclidean conception (Biza & Zachariades, 2010; Orts Muñoz et al., 2016; Santi, 2011).



[The number 1 line allows us to calculate  $f'(4)$  as it intersects with the function in only one point. On the other hand, line 2 intersects with the function in two points].

**Figure 3.** Argument after incorrectly identifying the line tangent to a curve

In Figure 4, it is observed that while the student does not correctly identify the line tangent to the curve, he or she does know, as a process, the identification of the derivative of the function in the point of tangency with the slope of the tangent line.



[ $f'(4) = -1/2$  as the derivative is the slope of the tangent line of the function].

**Figura 4.** Identification of the derivative of the function in the point of tangency with the slope of the tangent line

In Figure 5 it is observed that a student determines the equation of the line that contains the points and then concludes the relationship between the slope of this and the derivative in the point of abscissa.

(4,1)(2,2)

$$y - y_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

$$y - y_1 = \frac{2 - 1}{2 - 4} (x - 4)$$

$$y = \frac{-1}{2} (x - 4) + 1$$

En vista de que la segunda recta dijimos que es la correcta, sacamos pendiente de esta (viendo que equivale a la derivada o pendiente) y nos dice que  $f'(4) = \frac{-1}{2}$

[In light of the fact that we said that the second line is the correct one, we take its slope (seeing that it is equivalent to the derivative or slope) and this tells us  $f'(4) = -1/2$ ].

**Figure 5.** Correct process of the derivative of the function in the point of tangency

Finally, errors of an arithmetic type (procedural) are observed in the calculation of the slope of the tangent line as are errors of a conceptual type in the moment of defining the slope of the line that contains two points, which impedes the student from obtaining the expected result.

Table 4 presents the results of item 1 answered by students of Business Engineering and Civil Computer Engineering respectively. It is observed that 80% and 92% of the students carried out stage 1 of the problem correctly, i.e., they determined algebraically the slope of the line tangent to the graph of the quadratic function in the point (1,1). 78% and 90% of the students correctly link the result obtained in stage 1 with the geometric interpretation of the derivative in said point. 78% and 90% trace the points  $(x_0, f'(x_0))$  in the Cartesian plane. 60% and 69% correctly model the derivative function. Finally, only 30% and 24% correctly explain that the curve represents the graph of a function that, at each value, makes the slope of the tangent line correspond to the graph of  $f$  in the point  $(x, f(x))$ .

It is important to note that a group of students affirmed that the derivative function was  $f'(x) = 2$ , which shows the problem existing in the comprehension of the functions in concordance with the results obtained by Gómez Guerra et al. (2015), Mercado et al. (2011), and Cuesta Borges et al. (2010).

**Tabla 4.** Frequency of correct answers of Task 2 (n1 = 91, n2=70)

<b>Actions for the problems that allow movement from the graphic representation of the derivative in one point towards the derivative</b>	<b>Primary Objects</b>	<b>n1 Absolute frequency</b>	<b>n1(%) Relative frequency</b>	<b>n2 Absolute frequency</b>	<b>n2(%) Relative frequency</b>
Correctly uses the definition of the slope of the tangent line as the limit of the slopes of the secant lines to complete the table	Procedure	73	80	64	92
Correctly relates the slope of the line tangent to the curve with the derivative of the function in the point of tangency	Definition	71	78	63	90
Traces the curve that contains the points $(x_0, f'(x_0))$ in the Cartesian plane	Procedure	71	78	63	90
Models the traced function	Procedure	55	60	48	69
Explains that the curve represents the graph of the function that, at each value, makes the slope of the tangent line correspond to the graph of $f$ in the point $(x, f(x))$	Argument	27	30	17	24

In the following, the conclusions about the teaching proposal are presented, considering the main results and implications, which will allow for a reflexion around the need to readjust, modify or reorganise the teaching proposal.

## 2.9 DISCUSSIONS AND CONCLUSIONS

The objective of this work was to carry out an exploratory analysis of engineering students' resolutions in relation to a field of problems about tangents done in the context of a proposal of teaching and learning of the derivative that contemplated manipulative, computational and algebraic configurations, considering in the definitions, propositions, procedures, and arguments a movement between geometric, descriptive, graphic, and symbolic language through the integration of ICTs.



In terms of the field of problems about tangents, in a relatively large group of students, it was obtained that the Euclidean conception of the line tangent to a curve makes the construction of the geometric interpretation of the derivative difficult. 41% and 31% of the students of Business Engineering and Civil Computer Engineering respectively, identified the line tangent to a curve arguing correctly, and only 33% and 23%, respectively associated the slope of the line tangent to a curve with the derivative of the function in the point of tangency (Table 3).

One possible explanation for this result is that the Euclidean conception is an obstacle for the construction of the Cartesian and Leibnizian conceptions of the line tangent to a curve, that are essential to understanding the relationship that exists between the slope of the line tangent to a curve and the derivative of the function in the point of tangency. This relationship is fundamental for the construction of the geometric interpretation of the derivative. This result is no different to research about the line tangent to a curve of Biza and Zachariades (2010), Santi (2011), and Orts Muñoz et al. (2016).

One of the limitations of the study is that, although even though in the teaching initial activities focussed on the construction of the meaning of the line tangent to a curve were considered, these were not sufficient. In this way, in a future version of the teaching process it is considered necessary to add activities focussed on overcoming the obstacle produced by the Euclidean conception of the tangent line of a curve. In this sense, in a redesign of the teaching process, it is considered necessary to add activities focused on overcoming the obstacle produced by the Euclidean conception of the tangent line to a curve.

On the other hand, in accordance with Gómez Guerra et al. (2015), Mercado et al. (2011), and Cuesta Borges et al. (2010), it became clear that there was a consequent influence of the misinterpretation of mathematical concepts that depend, to a great extent, on the concept of function, as only 30% and 24% of the students of Business Engineering and Civil Computer Engineering, respectively, modelled and explained the derivative function (Table 4). This result explains a second limitation of the study. Specifically, for a redesign of the instructional process, it is necessary to dedicate one or a few sessions aimed at recovering the previous knowledge of the students in relation to the basic concepts of the function object.

Finally, while the integration of ICTs has allowed for the construction of the meaning of the derivative, considering the different configurations of the primary objects, and has broadened the language of the design of the activities, it is observed that they have implied a

cognitive cost for the student in that the students must assimilate distinct forms of communication in a limited time of their academic load of the semester. The greatest limitation was the time available that, while it may have been more than enough for some students, it was insufficient for all of them to take onboard all of the programmed objectives. This result contributes to a third limitation of the study, because, although the time was long for some of the students, it was insufficient for others to assimilate all the programmed objectives. In this sense, for a redesign of the teaching process, it is considered ideal to rethink the workload destined to the development of the activities proposed to the students.

Although the study has some limitations, an important contribution of this work is that the activities designed and implemented and the applets used are useful material both for researchers of this mathematical object and for teachers who are interested in teaching the derivative. One of the reasons is that the student's understanding in relation to the derivative from its geometric meaning (slope of the tangent line) and with the use of ICT, is a fundamental aspect for the development of the skills of future engineers to solve problems on tangents, be they problems within the mathematical field or problems related to situations experienced in the engineering context.

Considering that all teaching processes are perfectible, a future line of research is to value the didactic suitability (Breda et al., 2018; Moreno Reyes, 2017) of the instruction process to identify its limitations and strengths in detail in order to suggest modifications, reorganisations, and improvements in the activities and evaluation instruments. Following this, it is of interest to add other practice systems to thus contribute to a better comprehension of the derivative in the context of higher education.



## CAPÍTULO 3. ARTÍCULO CIENTÍFICO II

---

Este capítulo tiene como objetivo identificar los significados pretendidos de la derivada en los programas de las asignaturas de las carreras de Ingeniería Comercial en Chile, objetivo específico 2 (O2) de esa tesis doctoral. Los resultados presentados en ese capítulo fueron, durante el año 2022, divulgados en congresos nacionales e internacionales, siendo muy relevante las participaciones en el XXV Encuentro de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), en el Congreso Chileno de Educación en Ingeniería, en el Encuentro Nacional de Escuelas y Facultades de Administración, en el I congreso Internacional de Investigación Interdisciplinar en Educación y en IX Congresso Ibero-americano de Educação Matemática (CIBEM).

### 3.1 REFERENCIA DEL ARTÍCULO CIENTÍFICO II

Galindo-Illanes, M. y Breda, A. (2022). El tratamiento de la derivada en el plan de estudios de Ingeniería Comercial en Chile. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 285-293). SEIEM.

### 3.2 ACTAS DEL CONGRESO

El artículo fue editado y publicado por la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada. Campus de la Cartuja, s/n 18071, Granada (España). ISBN: 978-84-09-45038-1. Publicación realizada en el marco del Proyecto de Investigación en Formación de Profesorado PID2021-127104NB-I00 (MCIU/AEI/FEDER, UE).

### 3.3 RESUMEN DEL ARTÍCULO CIENTÍFICO II

Las matemáticas son fundamentales para un ingeniero comercial, en particular, el objeto matemático derivada es un tópico complejo del cálculo que conjuga muchos significados asociados y una representatividad de campos de problemas, diversas representaciones, diversas propiedades, procedimientos y argumentos que transitan constantemente entre diferentes lenguajes. La complejidad de la derivada se hace presente en los cursos de Ingeniería Comercial, una vez que se puede comprender la derivada como el estudio de la función producto marginal, ingreso total y marginal, entre otras. Además, considerar sus diferentes modos de representación, es un aspecto muy utilizado en el área de microeconomía. En ese sentido, el objetivo de este artículo es identificar los significados pretendidos de la derivada en los programas de las asignaturas de las carreras de Ingeniería Comercial en Chile. Participaron de la investigación, de manera anónima, 8 universidades chilenas (3 públicas y 5 privadas) que

imparten la carrera de Ingeniería Comercial, las cuales compartieron sus programas de asignatura que incluyen como objeto de enseñanza la derivada. Para realizar el análisis de los programas se considera el modelo teórico conocido como Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos el cual considera un modelo epistemológico, cognitivo e instruccional de análisis de la actividad matemática. Para realizar el análisis de contenido de los programas de asignaturas, se utilizó como categorías previas de análisis, la noción de configuración epistémica, que nos ha permitido analizar y describir los objetos primarios que intervienen en las prácticas matemáticas sobre la derivada propuestas en los programas de las asignaturas.

El análisis de los significados de la derivada pretendidos en los 8 programas curriculares de las asignaturas que contemplan la unidad de aprendizaje de la derivada indica que, si bien la mayor parte de las propuestas curriculares presentan similitudes en la organización de contenidos y en los elementos lingüísticos utilizados para la construcción del objeto derivada, se observan diferencias importantes en la preponderancia de la derivada interpretada como una razón de cambio y en los campos de problemas abordados. Como conclusiones, se observa que el estudio realizado proporciona resultados novedosos con relación a algunas características del significado de la derivada presentes en el currículo de las carreras de Ingeniería Comercial en Chile.

Palabras clave: Estudio de la derivada, programas de asignaturas, Ingeniería Comercial

### 3.4 ABSTRACT OF THE SCIENTIFIC ARTICLE II

The objective of this work is to identify the intended meanings of the derivative in the programs of the subjects of the Commercial Engineering careers in Chile. To do this, through the notion of epistemic configuration of the Ontosemiotic Approach to Mathematical Knowledge and Instruction, eight subject programs from different Chilean universities were analyzed, which contemplate the derivative as an object of teaching. The results indicate that, although most of the curricular proposals present similarities in the organization of contents and in the linguistic elements used for the construction of the derivative object, important differences are observed in the preponderance of the derivative interpreted as a reason for change. and in the fields of problems addressed.

Keywords: Study of the derivative, subject programs, Commercial Engineering

### 3.5 INTRODUCCIÓN

En el año 1924 se inicia la carrera de Administración de Empresas en la Universidad Católica de Chile y en el año 1935 con la creación de la Escuela de Ingeniería Comercial de la Universidad de Chile, nace la carrera de Ingeniería Comercial. Actualmente, aproximadamente 49 universidades entre estatales y privadas imparten la carrera de Ingeniería Comercial en Chile.

La Comisión Nacional de Acreditación de Chile (CNA) define la carrera de Ingeniería Comercial como una profesión universitaria orientada hacia la aplicación de un conjunto de competencias (conocimientos, habilidades y actitudes) que se generan a partir del estudio de las ciencias de la administración y de la economía, apoyadas por las tecnologías de la información, los métodos cuantitativos, otras ciencias sociales y las disciplinas que les sean conexas. Se establece que su plan de estudios debe considerar tres áreas de formación, sin perjuicio de la flexibilidad e integración curricular que determine cada unidad, éstas son: formación básica, formación profesional y formación general o complementaria.

Un análisis exploratorio de los planes de estudio de Ingeniería Comercial vigentes en Chile reveló, por un lado, que éstos poseen una estructura según el tipo de asignaturas (obligatorias, optativas y de estudios generales), una inclinación formativa hacia el área administrativo-financiera, con una fuerte orientación cuantitativa y económica (Bohle & Rojas, 2007). Por otro lado, los planes determinan que la mayor cantidad de asignaturas corresponden al área de estudio de Finanzas, Contabilidad y Costos, totalizando un 12,8% y al área de Matemática, Estadística y Econometría, en un total de 12,3%. De esta última, el 7% corresponde a asignaturas del área Matemáticas.

La CNA considera que los programas de las asignaturas de matemáticas deben permitir que el estudiante adquiera los conocimientos necesarios para su desempeño profesional. En los criterios de evaluación contemplados en esta estructura curricular, se requiere que los programas integren actividades teóricas y prácticas, que las asignaturas permitan la adquisición de habilidades y capacidades inherentes a un ingeniero comercial para: trabajar e integrarse eficazmente en equipo, enfrentar los problemas con visión holística y estratégica, liderar, comunicar y motivar eficazmente, seleccionar, integrar y aplicar conocimientos. Esto conlleva al desafío de articular las ciencias básicas y las ciencias de la ingeniería, favoreciendo el desarrollo de las competencias profesionales y la formación matemática del ingeniero (Alvarado Martínez et al., 2018).

Las matemáticas son fundamentales para un ingeniero comercial, en particular, el objeto matemático derivada es un tópico complejo del cálculo que conjuga muchos significados asociados: función real, plano cartesiano, pendiente, ecuación de una recta, recta secante, recta tangente, límite de una función real, etc. Por otra parte, posee una representatividad de campos de problemas, diversas representaciones, diversas propiedades, procedimientos y argumentos que transitan constantemente entre un lenguaje descriptivo, geométrico, gráfico, tabular y simbólico, lo que complejiza aún más la comprensión de este objeto matemático por parte de los estudiantes (Fuentelba et al., 2015). La articulación de los componentes en los que estalla esta complejidad, está presente en casi todos los marcos teóricos emergentes en el área de la Educación Matemática. En este trabajo se toma como referente teórico el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción Matemáticos (EOS, a partir de ahora) (Godino et al., 2007, 2019). Trabajar los distintos significados de un objeto matemático es un aspecto propuesto en el EOS, donde se plantea analizar la complejidad de los objetos matemáticos por medio de sus pluri significaciones (significados parciales).

La complejidad de la derivada se hace presente en los cursos de Ingeniería Comercial, una vez que puede comprender la derivada como el estudio de la función producto marginal, ingreso total y marginal, entre otras. Además, considerar sus diferentes modos de representación, es un aspecto muy utilizado en el área de microeconomía, lo que ha generado el desarrollo de diversas investigaciones en torno a su aprendizaje y sobre la relación de comprensión entre los conceptos económicos y matemáticos (Ariza Cobos & Linares Ciscar, 2009; Ballard & Johnson, 2004; J. Butler et al., 1998; García et al., 2006; Hey, 2005).

A partir de lo anterior, resulta de gran interés investigar, ¿cuál es el tratamiento de la derivada propuesto en los planes de estudio de la asignatura de cálculo de los cursos de Ingeniería Comercial en Chile? En ese sentido, el objetivo de este trabajo es identificar los significados pretendidos de la derivada en los programas de las asignaturas de las carreras de Ingeniería Comercial en Chile.

### 3.6 MARCO TEÓRICO

Los desarrollos teóricos propuestos por el EOS, explicados recientemente en Godino, et al. (2019), tienen como objetivo dar respuesta a algunos problemas generados en el campo de la Educación Matemática. En el EOS, se asume que la actividad matemática es una actividad humana centrada en la resolución de problemas, que tiene lugar en un tiempo-espacio determinado, a través de una secuencia de prácticas que, a menudo, se consideran procesos (de

significación, conjeturar, argumentar, etc.). Para ello, el EOS propone las nociones de situación-problema de práctica matemática (secuencia de prácticas) que tiene lugar durante la resolución de estas situaciones problema. Tales secuencias tienen lugar en el tiempo y se suelen considerar, en muchos casos, como procesos. En particular, el uso y/o la emergencia de los objetos primarios de la configuración (problemas, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos), tiene lugar mediante los respectivos procesos matemáticos de comunicación, problematización, definición, enunciación, elaboración de procedimientos (creación de algoritmos y rutinas) y argumentación (aplicando la dualidad proceso-producto). Por otra parte, las dualidades antes descritas, dan lugar a los siguientes procesos: institucionalización – personalización, generalización – particularización, análisis/descomposición – síntesis/reificación, materialización/concreción – idealización/abstracción, expresión/representación – significación.

El EOS también asume el principio de que el conocimiento de un objeto, por parte de un sujeto (ya sea individuo o institución), es el conjunto de funciones semióticas que este sujeto puede establecer en las que el objeto interviene como expresión o contenido. Además, la correspondencia entre un objeto y el sistema de prácticas donde tal objeto interviene, se interpreta como el "significado de ese objeto" (institucional o personal). Por ejemplo, cuando un sujeto realiza y evalúa una secuencia de prácticas matemáticas, activa un conglomerado formado por situaciones-problemas, lenguajes, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos, articulados en lo que, en términos del EOS, se llama una configuración de objetos primarios (Font, et al., 2013). Para delimitar los significados de un objeto matemático, el EOS propone la herramienta denominada "análisis de sistemas de prácticas" (personales e institucionales) y las configuraciones ontosemióticas involucradas en ellas (Godino, 2014; Godino & Batanero, 1994).

En Font et al. (2013) se explica que la noción de complejidad del objeto matemático y la de articulación de los componentes de dicha complejidad juegan un papel esencial. Entender la complejidad, en términos de una pluralidad de significados, es resultado de la visión pragmatista sobre el significado que se asume en el EOS. Desde un punto de vista pragmatista, el significado de un objeto matemático se entiende como el conjunto de prácticas en la que dicho objeto interviene de una manera determinante (o no). Un objeto matemático, que se ha originado como un emergente del sistema de prácticas que permite resolver un determinado campo de problemas, con el paso del tiempo queda enmarcado en diferentes programas de investigación.



Cada nuevo programa de investigación permite resolver nuevos tipos de problemas, aplicar nuevos procedimientos, relacionar el objeto (y, por tanto, definir) de manera diferente, utilizar nuevas representaciones, etc. De esta manera, con el paso del tiempo, aparecen nuevos subconjuntos de prácticas (sentidos) que amplían el significado del objeto.

Para el objeto matemático derivada, Pino-Fan, et al. (2011) caracterizan su complejidad mediante nueve configuraciones de objetos primarios: 1) tangente en la matemática griega; 2) variación en la edad media; 3) métodos algebraicos para hallar tangentes; 4) concepciones cinemáticas para el trazado de tangentes; 5) ideas intuitivas de límite para el cálculo de máximos y mínimos; 6) métodos infinitesimales en el cálculo de tangentes; 7) cálculo de fluxiones; 8) cálculo de diferencias; y 9) derivada como límite. En Pino-Fan, et al. (2013) se utilizan estas nueve configuraciones para la reconstrucción del significado global de la derivada, el cual es utilizado para valorar la representatividad del significado pretendido en el currículo de Bachillerato de México (a partir de las configuraciones de objetos primarios activadas en las prácticas matemáticas propuestas tanto en el Plan de Estudios como en los libros de texto de dicho nivel). La caracterización de la complejidad de la derivada realizada en Pino-Fan, et al. (2011) facilita tener elementos para diseñar cuestionarios que permiten caracterizar la comprensión de los estudiantes, futuros profesores o profesores en servicio sobre la derivada (Pino-Fan et al., 2015). En este estudio pretendemos identificar los significados pretendidos de la derivada en los programas de las asignaturas de las carreras de Ingeniería Comercial en Chile.

### 3.7 METODOLOGÍA

En este apartado se explica el contexto del estudio, los instrumentos de colecta de datos y el análisis de los mismos.

#### **3.7.1 Contexto del estudio e instrumentos de colecta de datos**

Participaron de la investigación, de manera anónima, 8 universidades chilenas (3 públicas y 5 privadas) que imparten la carrera de Ingeniería Comercial. Fueron solicitados programas de 30 universidades de diferentes regiones del país, sin embargo, solo ocho de ellas compartieron sus programas de asignatura que incluyen como objeto de enseñanza la derivada. Las universidades participantes están identificadas como UN1, UN2, UN3, UN4, UN5, UN6, UN7 y UN8.

#### **3.7.2 Análisis de los datos**

Para realizar el análisis de los programas se considera el modelo teórico conocido como Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino et al.,

2019) el cual considera un modelo epistemológico, cognitivo e instruccional de análisis de la actividad matemática. Para realizar el análisis de contenido de los programas de asignaturas, se utilizó como categorías previas de análisis, la noción de configuración epistémica, que nos ha permitido analizar y describir los objetos primarios que intervienen en las prácticas matemáticas sobre la derivada propuestas en los programas de las asignaturas (Font et al., 2013).

Para ejemplificar cómo se ha realizado el análisis de los programas de las asignaturas que incluyen como objeto de enseñanza la derivada, se ha tenido en cuenta, en cada uno de los programas, la organización de los contenidos de la asignatura correspondiente (a ejemplos, Tabla 5) y un posterior análisis de la complejidad de la derivada considerando la configuración de los objetos primarios del EOS (significados parciales, procedimientos, proposiciones, representaciones y campos de problemas). Por ejemplo, la propuesta curricular de UN1 para la asignatura de Cálculo Aplicado a los Negocios, tiene como propósito que el estudiante use conceptos y procedimientos de derivación e integración con apoyo de recursos tecnológicos en problemas de tipo analítico del área de la economía y los negocios. A continuación, se presenta la distribución de los contenidos en la Tabla 5.

**Tabla 5.** Organización de los contenidos de la asignatura de Cálculo Aplicado a los Negocios de UN1

Unidad de aprendizaje 1	Derivada de una función
Resultados de aprendizaje	Resuelve problemas de tasas de cambio, marginalidad y optimización aplicando derivadas de primer y segundo orden, en funciones de una variable
Contenidos	La derivada de una función y su interpretación geométrica. Algebra de derivadas Regla de la Cadena. Derivadas de primer orden. Derivadas de segundo orden. Puntos críticos. Puntos de inflexión. Criterio de primera derivada para extremos relativos. Criterio de la primera derivada para establecer monotonía. Criterio de la segunda derivada para extremos relativos. Criterios de la segunda derivada para establecer concavidades. Trazado de curvas.

	Optimización de una función. Tasa de cambio y marginalidad.
<b>Unidad de aprendizaje 2</b>	<b>Integral de una función</b>
Resultados de aprendizaje	Aplica métodos de integración en la resolución de problemas del mundo de la administración o economía.
Contenidos	Definición de integral indefinida. Propiedades e interpretación geométrica de la integral. Métodos de integración (sustitución simple y por partes). Teorema fundamental del Cálculo. Integral definida. Aplicaciones de la integral a problemas de valores iniciales y excedentes.
<b>Unidad de aprendizaje 3</b>	<b>Funciones de varias variables</b>
Resultados de aprendizaje	Aplica derivadas de primer y segundo orden resolviendo problemas de tasas de cambio, marginalidad y optimización con y sin restricciones en funciones de dos variables.
Contenidos	Definición de funciones de varias variables. Dominio y recorrido de funciones de varias variables gráficamente utilizando software matemático. Derivadas parciales de primer y segundo orden. Regla de la Cadena. Optimización de funciones sin restricciones utilizando Hessiana. Optimización algebraica de funciones con una restricción utilizando multiplicadores de Lagrange. Optimización de funciones con dos o más restricciones utilizando multiplicadores de Lagrange y apoyo tecnológico.

Fuente: Elaboración de los autores.

De la Tabla 5 podemos observar que sólo la unidad 1 considera el estudio de la derivada de una función y que su propósito es que el estudiante resuelva problemas de tasas de cambio, marginalidad y optimización de funciones reales. De acuerdo con los recursos conceptuales declarados se encuentran: definición de la función derivada y su interpretación geométrica, álgebra de derivadas, regla de la cadena, derivadas de primer y segundo orden, trazado de curvas, optimización, tasas de cambio y marginalidad, etc. Los recursos procedimentales involucran el

cálculo de derivadas de una función, haciendo uso del álgebra y reglas de derivación, para calcular razón de cambio en problemas de marginalidad y para el esbozo y optimización de funciones. Dentro de las proposiciones consideradas se encuentran, las reglas de derivación, los criterios de primera y segunda derivada para extremos relativos, criterios de concavidad y de monotonía de una función real. En cuanto al lenguaje se observa que se privilegia el lenguaje algebraico (definición de derivada y uso de reglas de derivación) y gráfico (al interpretar geoméricamente la derivada y realizar el gráfico de funciones).

Con respecto a los campos de problemas presentes en el programa de la asignatura, se observan (B) problemas sobre cálculo de tasas instantáneas de cambio, (D) problemas sobre aplicación de la derivada para el cálculo de máximos y mínimos, análisis de gráficas de funciones y (E) problemas sobre cálculo de derivadas a partir de reglas y teoremas de derivación. Finalmente, tanto en el programa curricular de las asignaturas como en las asignaturas previas, se observa la ausencia de límite de funciones reales.

Por otro lado, el ejemplo del programa de la asignatura de Cálculo I de la UN2, tiene como propósito que el estudiante aplique los conocimientos del cálculo diferencial en una viable, para la resolución de problemas de optimización aplicados a las ciencias económicas y administrativas. De acuerdo con los recursos conceptuales declarados se encuentran: propiedades de la función derivada, reglas de derivación, razón de cambio y razón de cambio instantánea, extremos relativos, monotonía de funciones reales, optimización de funciones, variaciones relacionadas, etc. Los recursos procedimentales involucran el cálculo de derivadas de una función, haciendo uso de las reglas de derivación, para calcular razón de cambio, ecuación de la recta tangente, gráfica y optimización de funciones. Dentro de las proposiciones consideradas se encuentran, las reglas de derivación, el criterio de la primera derivada para extremos relativos, criterios de concavidad y de monotonía de una función real. En cuanto al lenguaje se observa que se privilegia el lenguaje algebraico (definición de derivada y uso de reglas de derivación) y el gráfico (al resolver problemas geométricos en el plano cartesiano y realizar el gráfico de funciones).

Con respecto a los campos de problemas (CP) presentes en el programa de la asignatura, se observan: A) Campos de problemas sobre tangentes; B) Campos de problema sobre cálculo de tasas instantáneas de cambio; C) Campos de problemas sobre tasas instantáneas de variación; (D) problemas sobre aplicación de la derivada para el cálculo de máximos y mínimos, análisis

de gráficas de funciones y; E) problemas sobre cálculo de derivadas a partir de reglas y teoremas de derivación.

Uno de los aspectos asumidos en el análisis, por ejemplo, fue la comparación de los programas de asignatura cuánto a los campos de problemas contemplados. Por ejemplo, al comparar los campos de problemas presentes en los programas de asignatura de UN1 y UN2, se observa que en el programa de UN1 no se contemplan campos de problemas sobre tangentes, ni campos de problemas sobre tasas instantáneas de variación, aspectos considerados en el programa de la asignatura de Cálculo I de la UN2.

### 3.8 RESULTADOS Y CONCLUSIONES

El análisis de los significados de la derivada pretendidos en los 8 programas curriculares de las asignaturas que contemplan la unidad de aprendizaje de la derivada indica que, si bien la mayor parte de las propuestas curriculares presentan similitudes en la organización de contenidos y en los elementos lingüísticos utilizados para la construcción del objeto derivada, se observan diferencias importantes en la preponderancia de la derivada interpretada como una razón de cambio y en los campos de problemas abordados. A continuación, se mencionan algunos resultados.

En cuanto a los campos de problemas, todos los programas consideran campos de problemas sobre cálculo de derivadas a partir de reglas y teoremas de derivación. Sin embargo, por una parte, UN1 no considera campos de problemas sobre tangentes, es decir, no se contemplan los problemas en los que la pendiente de la recta tangente (significado geométrico de la derivada) tiene un papel relevante en su resolución (Galindo Illanes & Breda, 2022; Galindo Illanes & Breda, 2020). Por otra parte, UN6 y UN8 no consideran tasas instantáneas de cambio, UN4 y UN6 no consideran tasas instantáneas de variación, aspecto defendido por Orts Muñoz et al. (2016) y Santi (2011), y UN7 no aplica la derivada para el cálculo de extremos relativos y trazados de curvas. Lo que nos revela las diferencias en los campos de problemas propuestos en los programas curriculares. A continuación, se presenta la Tabla 6 que indica con una x la presencia de los campos de problemas en los programas de las asignaturas, que consideran el objeto derivada para la enseñanza, de las 8 universidades participantes en el estudio.

**Tabla 6.** Presencia de los campos de problemas en los programas

CP	UN1	UN2	UN3	UN4	UN5	UN6	UN7	UN8
A	Campos de problemas sobre tangentes							
		x	x	x	x	x	x	x
B	Campos de problema sobre cálculo de tasas instantáneas de cambio							
	x	x	x	x	x		x	
C	Campos de problemas sobre tasas instantáneas de variación							
		x	x		x		x	x
D	Campos de problemas sobre aplicación de la derivada para el cálculo de máximos y mínimos, análisis de gráficas de funciones, etc.							
	x	x	x	x	x	x		x
E	Campos de problemas sobre cálculo de derivadas a partir de reglas y teoremas de derivación							
	x	x	x	x	x	x	x	x

Fuente: Elaboración de los autores.

Relación a los significados parciales, los programas de UN2, UN3, UN4, UN5, UN6, UN7 y UN8, por un lado, introducen el concepto de límite para después construir la definición de deriva, resultado que corrobora con un de los significados parciales de la derivada presentados en Pino-Fan, et al. (2013). Sin embargo, UN1 no considera dentro de su programa teoría de límite, por lo que se construye la derivada utilizando una idea intuitiva de límite (aproximación), a través de su interpretación geométrica, construyendo el significado parcial de la derivada a partir del cálculo de tangentes y subtangentes mediante métodos infinitesimales y álgebra. Este resultado, en particular, difiere de lo encontrado en Pino-Fan et al. (2013). Por otro lado, las UN1, UN2, UN3, UN4, UN5, UN7 y UN8, conceden mayor preponderancia a la derivada interpretada como una razón de cambio. Sin embargo, UN6 acentúa su interpretación geométrica como pendiente de una recta tangentes. A continuación, se presenta la Tabla 7, donde se pueden percibir los significados parciales de la derivada, que asignan las distintas universidades.

**Tabla 7.** Presencia de los significados parciales de la derivada en los programas de las universidades

<b>SIGNIFICADOS PARCIALES (SP)</b>	<b>UN1</b>	<b>UN2</b>	<b>UN3</b>	<b>UN4</b>	<b>UN5</b>	<b>UN6</b>	<b>UN7</b>	<b>UN8</b>
SP1: Trazado de tangentes en la matemática griega.								
SP2: Problemas sobre variación en la edad media.								
SP3: Cálculo de subtangentes y tangentes con el álgebra.		x						
SP4: Trazado de tangentes mediante consideraciones cinemáticas.								
SP5: Cálculo de Máximos y mínimos mediante la idea intuitiva de límite.								
SP6: Cálculo de tangentes y subtangentes mediante métodos infinitesimales.		x						
SP7: Cálculo de fluxiones.								
SP8: Cálculo de diferencias.								
SP9: Derivada como límite.		x	x	x	x	x	x	x

Fuente: Elaboración de los autores.

Con respecto a las proposiciones y teoremas, la mayor parte de los programas consideran, las reglas de derivación, criterios de la primera y segunda derivada para extremos relativos, criterios de concavidad, criterios de monotonía de una función real y regla de la cadena. En menor medida se observan el teorema de la función implícita, teorema del valor medio, teorema del valor intermedio y el teorema de Rolle.

Como conclusiones, se observa que el estudio realizado proporciona resultados novedosos con relación a algunas características del significado de la derivada presentes en el currículo de las carreras de Ingeniería Comercial en Chile, permitiendo, de esta forma, ampliar el estudio realizado en Pino-Fan et al (2013), lo cual se centra en el análisis del significado pretendido de la derivada del currículo de bachillerato de México.

Este panorama motiva la indagación en cuestiones en torno a la idoneidad epistémica del significado pretendido de la derivada para la formación de futuros ingenieros comerciales. El aspecto valorativo de la idoneidad epistémica de la derivada en los programas es una línea futura de investigación que se pretende realizar.





## CAPÍTULO 4. ARTÍCULO CIENTÍFICO III

---

Con la finalidad de atender al objetivo específico 3 (O3) de esa tesis doctoral, este capítulo tiene como objetivo el estudio de los significados pretendidos de la derivada en libros de texto para las carreras de Ingeniería Comercial en Chile. Para ello, durante dos años se realizaron estudios que fueron presentados en tres congresos, siendo uno el Encuentro Nacional de Escuelas y Facultades de Administración el año 2021 y otro el Congreso Chileno de Educación en Ingeniería el año 2022, algunos de los resultados presentados indicaron un énfasis en el significado parcial de la derivada como el límite del cociente de incrementos y un predominante lenguaje simbólico en los argumentos, además de poca presencia de algunos teoremas importantes relacionados a la derivada. Finalmente, el año 2023 se publica un artículo científico cuyo trabajo es analizar los significados pretendidos de la derivada en los libros de texto universitarios propuestos para la formación de ingenieros comerciales en Chile.

### 4.1 REFERENCIA DEL ARTÍCULO CIENTÍFICO III

Galindo Illanes, M. K., y Breda, A. (2023). Significados de la derivada en los libros de texto de las carreras de Ingeniería Comercial en Chile. *Bolema*, 37(75), 271-295. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v37n75a13>

### 4.2 BASES E INDEXACIÓN DEL PERIODICO

Segundo la MIAR, la revista *Bolema* pertenece al ámbito de Educación y de Matemáticas, específicamente en el campo académico de la Didáctica de las Matemáticas y Ciencias Experimentales, Educación y de las Matemáticas. Está indexada en Scopus, DOAJ, Civil Engineering Abstracts, ERIC y evaluada en Directory of Open Access Journals, LATINDEX Catálogo v1.0 (2002 - 2017). Sus métricas SJR es de 0,30 (Q3) en el año 2022 y CiteScore de 0,7 (Q3) en el año de 2022. El artículo presenta, actualmente, 2 citas en Google Scholar. Publicación realizada en el marco del proyecto PID2021-127104NB-I00 financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033/ y por "FEDER Una manera de hacer Europa"

### 4.3 RESUMEN DEL ARTÍCULO CIENTÍFICO III

Algunos estudios realizados revelaron que futuros ingenieros chilenos presentan dificultades acerca del objeto matemático derivada. Esos resultados conllevaron a estudiar, con mayor profundidad, el tratamiento de la derivada en los programas de las asignaturas de las carreras de Ingeniería Comercial en Chile, que revelaron que, si bien la mayor parte de las propuestas curriculares presentan similitudes en la organización de contenidos y en los elementos lingüísticos utilizados para la construcción del objeto derivada, se observan

diferencias importantes en la preponderancia de la derivada interpretada como una razón de cambio y en los campos de problemas abordados, conforme mencionado en el Capítulo 3 de esa tesis. El resultado encontrado en los análisis de los programas de asignatura de diversas universidades del país, ha impulsado el estudio de los libros de texto considerados en dichos programas, una vez que es uno de los recursos que más influye en la construcción del significado de un objeto matemático. En esta línea, este artículo pretende responder a la siguiente pregunta: ¿cómo se organizan los significados de la derivada en los libros de texto propuestos en los programas de asignatura de los cursos de Ingeniería Comercial? En ese sentido, el objetivo de este trabajo es analizar los significados pretendidos de la derivada en los libros de texto universitarios propuestos para la formación de ingenieros comerciales en Chile. Para ello, por medio de la noción de configuración epistémica del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción Matemáticos, se analizaron cualitativamente trece libros de textos utilizados para la enseñanza de la derivada en diferentes universidades chilenas. Los resultados apuntan: a) un énfasis en el significado parcial de la derivada como el límite del cociente de incrementos y un predominante lenguaje simbólico en los argumentos, b) poca presencia de algunos teoremas importantes relacionados a la derivada y c) falta de una representatividad de las definiciones de la derivada. Se concluye que el estudio realizado proporciona resultados novedosos con relación a algunas características del significado de la derivada presentes en los libros de texto para las carreras de Ingeniería Comercial en Chile.

Palabras clave: Significado de la derivada. Ingeniería Comercial. Libros de texto. Enfoque Ontosemiótico.

#### 4.4 RESUMO DO ARTIGO CIENTÍFICO III

O objetivo deste artigo é analisar os significados pretendidos da derivada nos livros didáticos universitários propostos para a formação de engenheiros comerciais no Chile. Para isso, através da noção de configuração epistêmica da Abordagem Ontossemiótica do Conhecimento e Instrução Matemática, treze livros didáticos utilizados para o ensino da derivada em diferentes universidades chilenas foram analisados qualitativamente. Os resultados apontam: a) uma ênfase no significado parcial da derivada como limite do quociente de incrementos e linguagem simbólica predominante nos argumentos, b) pouca presença de alguns teoremas importantes relacionados à derivada e c) falta de representatividade das definições da derivada. Conclui-se que o estudo realizado fornece resultados inéditos em relação a algumas

características do significado da derivada presente nos livros didáticos para carreiras de Engenharia Comercial no Chile.

Palavras-chave: Significado da derivada. Engenharia Comercial. Livros de texto. Abordagem Ontossemiótica.

#### 4.5 INTRODUCCIÓN

La Comisión Nacional de Acreditación de Chile (CNA) define la carrera de Ingeniería Comercial como una profesión universitaria orientada hacia la aplicación de un conjunto de competencias (conocimientos, habilidades y actitudes) que se generan a partir del estudio de las ciencias de la administración y de la economía, apoyadas por las tecnologías de la información, los métodos cuantitativos, otras ciencias sociales y las disciplinas que les sean conexas. En los criterios de evaluación contemplados en esta estructura curricular, se requiere que los programas integren actividades teóricas y prácticas, que las asignaturas permitan la adquisición de habilidades y capacidades inherentes a un ingeniero comercial, tales como:

- ✓ Comunicación: capacidad para comunicarse, de manera efectiva, a través del lenguaje oral y escrito, y del lenguaje técnico y computacional necesario para el ejercicio de la profesión.
- ✓ Pensamiento crítico: capacidad para utilizar el conocimiento, la experiencia y el razonamiento para emitir juicios fundados.
- ✓ Solución de problemas: capacidad para identificar y definir problemas, planificar estrategias y enfrentarlos.
- ✓ Interacción social: capacidad para formar parte de equipos de trabajo y participar en proyectos grupales.
- ✓ Autoaprendizaje e iniciativa personal: inquietud y búsqueda permanente de nuevos conocimientos y capacidad de aplicarlos y perfeccionar sus conocimientos anteriores.
- ✓ Formación y consistencia ética: capacidad para asumir principios éticos y normas de convivencia.
- ✓ Pensamiento globalizado: capacidad para comprender los aspectos interdependientes del mundo globalizado.

- ✓ Formación cívica: capacidad para integrarse a la comunidad y participar responsablemente en la vida ciudadana.
- ✓ Apertura hacia la diversidad cultural: capacidad de apreciar, respetar y valorar diversas manifestaciones culturales y los contextos de donde provienen.

Finalmente, en lo actitudinal, debe motivar el desarrollo de actitudes de: respeto por los aspectos éticos, legales y contractuales relacionados con el ejercicio de su profesión, autoaprendizaje y promoción del aprendizaje organizacional y apertura a la diversidad cultural, la internacionalización y la globalización (Bohle & Rojas, 2007; Comisión Nacional de Acreditación, 2011). Esto conlleva al desafío de articular las ciencias básicas y las ciencias de la ingeniería, favoreciendo el desarrollo de las competencias profesionales y la formación matemática del ingeniero (Alvarado Martínez et al., 2018).

Las matemáticas, entendidas como una ciencia básica, son fundamentales para un ingeniero. En particular, las diversas aplicaciones de la derivada la ha convertido en uno de los objetos matemáticos fundamentales presentes en los procesos formativos de las distintas ingenierías, lo que ha generado diversos estudios con relación a la complejidad de sus significados, sus múltiples representaciones, los procesos de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes de ingeniería, la idoneidad del significado de la derivada en los distintos currículos y los significados parciales en los textos universitarios de enseñanza para las ingenierías (Larios et al., 2021; Larios & Jiménez, 2022; Pino-Fan et al., 2016; Rodríguez-Nieto et al., 2022). La articulación de los componentes en los que estalla esta complejidad está presente en casi todos los marcos teóricos emergentes en el área de la Educación Matemática. Trabajar los distintos significados de un objeto matemático es un aspecto propuesto por el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción Matemáticos (EOS, a partir de ahora) (Godino et al., 2007, 2019), lo cual se plantea analizar la complejidad de los objetos matemáticos por medio de sus pluri significaciones (significados parciales).

Algunos estudios apuntan la importancia del estudio de la derivada en las carreras de Ingeniería Comercial, por un lado, porque sus diferentes modos de representación son uno de los más utilizados en microeconomía, una vez que se debe establecer una relación de comprensión entre los conceptos económicos y matemáticos (Ballard & Johnson, 2004; J. S. Butler et al., 1994; García et al., 2006; Hey, 2005) y, por otro lado, por las dificultades en la interpretación de situaciones económicas debido a la débil comprensión de los significados matemáticos que las organizan (Ariza Cobos & Linares Ciscar, 2009).

Con fines de profundizar la comprensión de los futuros ingenieros acerca del objeto matemático derivada, en el contexto chileno, se han realizado algunos estudios que revelaron que ellos presentan dificultades en: el concepto de función y la concepción euclidiana de la recta tangente; la construcción del significado de recta tangente como límite de rectas secantes; la interpretación de la función derivada y su representación geométrica; realizar operaciones para calcular la pendiente de una recta y; operar con funciones (Galindo Illanes & Breda, 2020, 2022b, 2022a)

Esos resultados conllevaron a estudiar, con mayor profundidad, el tratamiento de la derivada en los programas de las asignaturas de las carreras de Ingeniería Comercial en Chile, que revelaron que, si bien la mayor parte de las propuestas curriculares presentan similitudes en la organización de contenidos y en los elementos lingüísticos utilizados para la construcción del objeto derivada, se observan diferencias importantes en la preponderancia de la derivada interpretada como una razón de cambio y en los campos de problemas abordados (Galindo Illanes & Breda, 2022a)

El resultado encontrado en los análisis de los programas de asignatura de diversas universidades del país, nos ha desafiado a estudiar, con profundidad, los libros de texto considerados en dichos programas, una vez que es uno de los recursos que más influye en la construcción del significado de un objeto matemático, dado que los profesores los utilizan para organizar e implementar las lecciones de las clases y, como consecuencia, son parte del proceso enseñanza y aprendizaje de los estudiantes (Larios & Jiménez, 2022; Pino-Fan et al., 2013). Este tipo de análisis es un aspecto altamente considerado en el EOS, una vez que varios estudios se han dedicado a analizar los significados pretendidos de diferentes objetos matemáticos en los libros de texto de diferentes países, entre otros (Burgos et al., 2020; Castro et al., 2017; García-García et al., 2021; Monje et al., 2018; Pallauta et al., 2022; Pino-Fan et al., 2019)

En esta línea, este trabajo hace parte de una investigación más amplia y pretende responder a la siguiente pregunta: ¿cómo se organizan los significados de la derivada en los libros de texto propuestos en los programas de asignatura de los cursos de Ingeniería Comercial? En ese sentido, el objetivo de este trabajo es analizar los significados pretendidos de la derivada en los libros de texto universitarios propuestos para la formación de ingenieros comerciales en Chile.

#### 4.6 MARCO TEÓRICO

Los desarrollos teóricos propuestos por el EOS, explicados recientemente por Godino, Batanero y Font (2019), tienen como objetivo dar respuesta a algunos problemas generados en el campo de la Educación Matemática. En el EOS, se asume que la actividad matemática es una actividad humana centrada en la resolución de problemas, que acontece en un tiempo-espacio determinado, a través de una secuencia de prácticas que, a menudo, se consideran procesos (de significación, conjeturar, argumentar etc.). Para ello, el EOS propone las nociones de situación-problema de práctica matemática (secuencia de prácticas) que ocurren durante la resolución de estas situaciones-problema. Tales secuencias tienen lugar en el tiempo y se suelen considerar, en muchos casos, como procesos. En particular, el uso y/o la emergencia de los objetos primarios (problemas, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos), se producen a través de los respectivos procesos matemáticos de comunicación, problematización, definición, enunciación, elaboración de procedimientos (creación de algoritmos y rutinas) y argumentación.

En el EOS, la noción de juego de lenguaje ocupa un lugar importante, al considerarla, junto con la noción de institución, como los elementos contextuales que relativizan las maneras de estar y de existir de los objetos matemáticos. Los objetos matemáticos intervienen en las prácticas matemáticas y emergen de las mismas, según el juego de lenguaje en que participan y se agrupan en las distintas dualidades (Font et al., 2013).

✓Extensivo-intensivo: los objetos matemáticos pueden estar participando como particulares, o bien, como generales y, según el juego de lenguaje, pueden pasar de ser particulares a generales o viceversa.

✓Expresión-contenido: los objetos matemáticos pueden estar participando como representaciones, o bien, como objetos representados y, según el juego de lenguaje, pueden pasar de ser representaciones a ser objetos representados o viceversa.

✓Personal-institucional: los objetos matemáticos pueden estar participando como objetos personales, o bien, como objetos institucionales y, según el juego de lenguaje, pueden pasar de ser personales a ser institucionales. La dialéctica personal-institucional es esencial en los procesos de instrucción, ya que en ellos se pretende que los alumnos se apropien de los objetos institucionales (aprendan).

✓Ostensivo-no ostensivo: estos dos modos de estar de los objetos matemáticos en la práctica matemática se han de tomar como algo que se puede mostrar a otro directamente versus

algo que no se puede mostrar directamente, solamente por medio de otro algo, que sí, se puede mostrar directamente. Los ostensivos matemáticos presentan una característica que es propia de las cosas del mundo real, que es la existencia real en el tiempo y en el espacio, mientras que, a los objetos no ostensivos, no se les atribuye este tipo de existencia, pues usualmente se considera que tienen una existencia ideal.

✓Unitario-sistémico: cuando una entidad matemática es considerada como un objeto, se está adoptando una perspectiva unitaria sobre el mismo. Ahora bien, hay momentos en que interesa adoptar una perspectiva sistémica sobre dicho objeto, por ejemplo, considerando las partes que lo componen. En esta dualidad, los objetos matemáticos pueden estar participando como objetos unitarios, o bien, como un sistema.

Por otra parte, las dualidades, antes descritas, dan lugar a los siguientes procesos: institucionalización – personalización, generalización – particularización, análisis/descomposición – síntesis/reificación, materialización/concreción – idealización/abstracción, expresión/representación – significación.

El EOS también asume el principio de que el conocimiento de un objeto, por parte de un sujeto (ya sea individuo o institución), es el conjunto de funciones semióticas que este sujeto puede establecer en las que el objeto interviene como expresión o contenido. Además, la correspondencia entre un objeto y el sistema de prácticas donde tal objeto interviene se interpreta como el significado de ese objeto (institucional o personal). Por ejemplo, cuando un sujeto realiza y evalúa una secuencia de prácticas matemáticas, activa un conglomerado formado por situaciones-problemas, lenguajes, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos, articulados en lo que, en términos del EOS, se llama una configuración de objetos primarios (Font et al., 2013) Para delimitar los significados de un objeto matemático, el EOS propone la herramienta denominada análisis de sistemas de prácticas (personales e institucionales) y las configuraciones ontosemióticas involucradas en ellas (Godino, 2014; Godino & Batanero, 1994).

En Font et al. (2013) se explica que la noción de complejidad del objeto matemático y la de articulación de los componentes de dicha complejidad juegan un papel esencial. Entender la complejidad, en términos de una pluralidad de significados, es resultado de la visión pragmatista sobre el significado que se asume en el EOS. Desde un punto de vista pragmatista, el significado de un objeto matemático se entiende como el conjunto de prácticas en la que dicho objeto interviene de una manera determinante (o no). Un objeto matemático, que se ha



originado como un emergente del sistema de prácticas que permite resolver un determinado campo de problemas, con el paso del tiempo queda enmarcado en diferentes programas de investigación. Cada nuevo programa de investigación permite resolver nuevos tipos de problemas, aplicar nuevos procedimientos, relacionar el objeto (y, por tanto, definir) de manera diferente, utilizar nuevas representaciones etc. De esta manera, con el paso del tiempo, aparecen nuevos subconjuntos de prácticas (sentidos) que amplían el significado del objeto.

Para el objeto matemático derivada, Pino-Fan et al. (2011) caracterizan su complejidad mediante nueve configuraciones de objetos primarios: 1) tangente en la matemática griega; 2) variación en la edad media; 3) métodos algebraicos para hallar tangentes; 4) concepciones cinemáticas para el trazado de tangentes; 5) ideas intuitivas de límite para el cálculo de máximos y mínimos; 6) métodos infinitesimales en el cálculo de tangentes; 7) cálculo de fluxiones; 8) cálculo de diferencias; y 9) derivada como límite.

En Pino-Fan et al. (2013) se utilizan estas nueve configuraciones para la reconstrucción del significado global de la derivada, el cual es utilizado para valorar la representatividad del significado pretendido en el currículo de Bachillerato de México (a partir de las configuraciones de objetos primarios activadas en las prácticas matemáticas propuestas tanto en el Programa de Estudios como en los libros de texto de dicho nivel). La caracterización de la complejidad de la derivada realizada en Pino-Fan et al. (2011) facilita tener elementos para diseñar cuestionarios que permiten caracterizar la comprensión de los estudiantes, futuros profesores o profesores en servicio sobre la derivada (Pino-Fan et al., 2015). En este estudio, procuramos identificar los significados pretendidos de la derivada en los libros de textos presentes en los programas de estudios de Ingeniería Comercial en Chile.

#### 4.7 METODOLOGÍA

En este apartado se explica el contexto del estudio, los instrumentos de colecta de datos y el análisis de estos.

##### 4.7.1 Contexto del estudio e instrumentos de colecta de datos

Para la elección de los libros texto, en un primer momento se envió un correo de invitación a treinta universidades chilenas que imparten la carrera de Ingeniería Comercial, de las cuales ocho (cinco privadas y tres públicas), de manera anónima, aceptaron ser parte del estudio compartiendo los programas de las asignaturas que incluyen como objeto de enseñanza la derivada. En un segundo momento, se hizo un análisis de los programas de las asignaturas

(Galindo Illanes & Breda, 2022a) y uno de los aspectos considerados fue la identificación de los libros de texto contemplados en dichos programas.

#### 4.7.2 Análisis de la derivada en libros de texto de Ingeniería Comercial

El análisis cualitativo de tipo descriptivo se basó en la muestra de textos tomada de las bibliografías obligatorias y complementarias presentes en los programas de las asignaturas, por lo que es variada y adecuada para la enseñanza de ingenieros comerciales, lo que permite contar con un amplio espectro del significado de la derivada. Los libros seleccionados se clasifican en textos de matemática aplicada a economía y negocios, y textos clásicos de matemática. El análisis de los distintos elementos de significado de la derivada se llevó a cabo con 13 textos, 6 de matemática aplicada a economía y negocios, y 7 clásicos de enseñanza del cálculo para ingenierías. A continuación, la Tabla 8 presenta los libros de textos contemplados en los análisis.

**Tabla 8.** Libros de textos presentes en los programas de estudio de Ingeniería Comercial

Texto N° (Tn)	Título	Autores	Editorial	Edición	Año
T1	Matemáticas aplicadas a la administración y la economía.	J. Arya, R. Lardner.	México: Pearson Educación	5 <sup>a</sup>	2009
T2	Matemáticas para Administración y Economía.	E. Haeussler, R.Paul, R.Wood.	México: Pearson Educación	12 <sup>a</sup>	2008
T3	Cálculo para administración, economía, ciencias biológicas y sociales.	L. Hoffmann, G. Bradley, K. Rosen.	McGraw-Hill	8 <sup>a</sup>	2006
T4	Matemáticas aplicadas para administración, economía y ciencias sociales.	F. Budnick.	Ed. México: McGraw-Hill	4 <sup>a</sup>	2007
T5	Matemáticas para administración y economía.	S.T.Tan.	México: Thomson	3 <sup>a</sup>	2005
T6	Teoría y problemas de cálculo para administración, economía y ciencias sociales.	E. Dowling.	Santafé de Bogotá: McGraw-Hill Interamericana.	1 <sup>a</sup>	1992
T7	Cálculo Una variable	G. Thomas, M. Weir, J. Hass, C. Heil	Pearson Educación	13 <sup>a</sup>	2015
T8	Calculo diferencial e integral.	E. Purcell, S. Rigdon, D. Varberg.	Pearson Educación	9 <sup>a</sup>	2007
T9	Cálculo Tomo 1	R. Larson, B. Edwards.	Ed. México: McGraw-Hill.	10 <sup>a</sup>	2016

T10	Cálculo Trascendentes Tempranas	J. Stewart.	Cengage Learning Editores.	8 <sup>a</sup>	2018
T11	El cálculo	L. Leithold	Oxford University Press	7 <sup>a</sup>	1998
T12	Cálculo diferencial	F. Ortiz	Grupo Editorial Patria	1 <sup>a</sup>	2014
T13	Cálculo diferencial e integral	A. Aguilar, F. Valapai, H. Gallegos, M. Cerón, R. Reyes.	Pearson Educación, México.	1 <sup>a</sup>	2010

Fuente: Elaboración de los autores.

Para el análisis de los libros de texto, se han seleccionado, en cada libro, los capítulos que tratan la derivada, con el fin de identificar la organización de los contenidos y la noción de configuración epistémica, que nos ha permitido analizar y describir los objetos primarios (significados parciales, procedimientos, proposiciones, representaciones y campos de problemas) que intervienen en las prácticas matemáticas sobre la derivada propuestas en los libros de textos (Font et al., 2013; Godino et al., 2019). A continuación, por motivos de espacio, ejemplificamos cómo se ha realizado el análisis del libro de texto T1.

*T1: Matemáticas aplicadas a la administración y la economía.*

El texto contempla 4 capítulos para el estudio de la derivada. A modo general, se observa que, para establecer definiciones y propiedades, el texto considera problemas introductorios aplicados (economía, física, etc.), después presenta ejercicios resueltos, en los cuales se ejemplifica el uso de definiciones y proposiciones introducidas, en menor medida, se presenta la demostración de algunos teoremas de la derivada. Finalmente, cada capítulo termina con una propuesta de tareas aplicadas y no aplicadas, para reforzar los conocimientos adquiridos por el lector.

Con respecto a los procedimientos y sus elementos lingüísticos, consisten en el cálculo del incremento de funciones reales y económicas, cálculo de velocidades promedio, cálculo de límites, cálculo de derivadas utilizando incrementos y reglas de derivación, cálculo de tangentes utilizando límite de incrementos y derivada en un punto, cálculo de marginales utilizando límite de incrementos y reglas de derivadas, cálculo de derivadas de segundo orden utilizando reglas de derivadas, derivadas de funciones compuestas, cálculo de monotonía de funciones reales y económicas, aplicaciones de optimización y gráfica de curvas a funciones reales y económicas, utilizando lenguaje verbal, simbólico, gráfico y tabular.

El ejercicio de análisis realizado en el libro de texto T1, fue replicado a los 13 libros de

texto y a medida que se realizaron los análisis, se identificaron 29 definiciones de la derivada, que se agrupan y describen como indica la Tabla 9.

**Tabla 9.** Identificación y descripción de las definiciones (D) en los textos analizados

<b>D</b>	<b>Descripción</b>
D1	Límite de una función real
D2	Funciones reales continuas y discontinuas
D3	Razón de cambio o tasa de cambio promedio e instantánea
D4	Velocidad (promedio, instantánea, de reacción) y aceleración
D5	Derivada como razón de cambio (aplicación física)
D6	Derivada como límite de incrementos
D7	La derivada en un punto como la pendiente de una curva (interpretación geométrica de la derivada)
D8	Derivación de una función en un punto y derivación en un intervalo
D9	Diferenciación
D10	Función implícita y su derivada
D11	Análisis marginal como razón de cambio (costo marginal, ingreso marginal, utilidad marginal, productividad marginal y rendimiento, tendencias marginales a ahorrar y consumir)
D12	Elasticidad del precio de la demanda o Elasticidad de la demanda
D13	Aproximación lineal (linealización)
D14	Error (relativo, porcentual, propagado)
D15	Valor crítico y punto crítico
D16	Función creciente y decreciente (monotonía de una función real y económica)
D17	Máximos y mínimos relativos
D18	Máximos y mínimos absolutos (en todo $\mathbb{R}$ y en intervalo cerrado)
D19	Derivadas de orden superior (segunda, tercera y n-ésimo orden)
D20	Punto de inflexión
D21	Concavidad (de la curva)
D22	Funciones (logarítmica, exponenciales naturales, hiperbólicas, objetivo)
D23	Movimiento armónico simple y rectilíneo
D24	Definiciones en áreas distintas a la física y economía (densidad lineal, corriente I, concentración, compresibilidad, ley del flujo laminar, gradiente de velocidad)
D25	Función potencia, de costo total, periódica, de demanda

D26	Radio de curvatura y círculo de una curvatura
D27	Recta normal, recta tangente, recta secante y pendiente de una recta tangente
D28	Antiderivada, antidiferenciación, integral indefinida.
D29	Ecuación diferencial

Fuente: Elaboración de los autores.

Los textos consideran teoremas, propiedades, corolarios y reglas de la derivada, se identificaron 17, que se agrupan y describen como indica la Tabla 10.

**Tabla 10.** Identificación y descripción de los teoremas y proposiciones (TP) de la derivada en los textos analizados

TP	Descripción
TP1	Teorema de límites y sus propiedades
TP2	Teorema de continuidad de funciones reales
TP3	Regla de asíntotas
TP4	Teorema del valor medio
TP5	Teorema de Rolle
TP6	Teorema del valor intermedio
TP7	Teorema de Fermat
TP8	Diferenciabilidad implica continuidad
TP9	Reglas de derivadas (Suma, Producto, Cociente, Constante por función, Potencia, Cte, Exponencial, Logaritmos)
TP10	Regla de la Cadena (Regla de la cadena, regla de la cadena para funciones exponenciales, regla de la cadena para funciones logarítmicas)
TP11	Teoremas de derivadas de funciones trigonométricas
TP12	Teorema de la primera derivada para valores extremos locales, relativos y absolutos
TP13	Criterios para funciones crecientes o decrecientes
TP14	Teorema de la segunda derivada para extremos locales o absolutos
TP15	Teorema de Concavidad (Prueba de concavidad, criterios de concavidad)
TP16	Regla de <i>L'Hôpital</i>
TP17	Regla de antiderivadas (Integral Indefinidas)

Fuente: Elaboración de los autores.

Con respecto a los campos de problemas presentes en los textos, en primer lugar, se analizó la presencia de los campos de problemas del estudio histórico realizado por Pino-Fan et al. (2013), los que se resumen en: A) campos de problemas sobre tangentes, B) campos de

problema sobre cálculo de tasas instantáneas de cambio (se refiere específicamente al cociente entre dos cantidades de magnitud), C) campos de problemas sobre tasas instantáneas de variación (se refiere al cociente entre dos números, sin hacer referencia a cantidades de magnitud, se le conoce comúnmente como límite del cociente incremental), D) campos de problemas sobre aplicación de la derivada para el cálculo de máximos y mínimos, análisis de gráficas de funciones etc., y E) campos de problemas sobre cálculo de derivadas a partir de reglas y teoremas de derivación.

A medida que se realizó el análisis de los campos de problemas en los textos, se identificaron 21 subcategorías de ellos, que se agrupan y describen como indica el Tabla 11, esto permitió realizar una caracterización detallada de los textos.

**Tabla 11.** Campos de problemas (CP), Identificador (ID) y descripción del campo de problema

CP	ID	Descripción
A	A1	Cálculo de la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto, utilizando la concepción cartesiana (aproximación por rectas secantes).
	A2	Cálculo de la pendiente de recta tangente a una curva en un punto, utilizando el triángulo de Leibniz.
	A3	Cálculo de la ecuación de la recta tangente a una curva en un punto, utilizando derivada.
	A4	Cálculo de la pendiente de una recta tangente a una curva para obtener una razón de cambio instantánea.
B	B1	Cálculo de tasas instantáneas de cambio marginal (costo marginal, ingreso marginal, utilidad marginal, productividad marginal, rendimiento marginal, tasa de impuesto marginal y propensión marginal al ahorro y al consumo).
	B2	Crecimiento poblacional.
	B3	Cálculo de la rapidez instantánea.
	B4	Razones de cambio (o tasas de cambio) relativas y porcentuales para funciones económicas. (tasa porcentual del cambio de ingreso en función del cambio porcentual de las unidades o del precio, tasa de cambio porcentual de la cantidad en función del cambio porcentual en el precio (elasticidad de la demanda)).
	B5	Razones de cambio aplicadas a otras áreas del conocimiento.
C	C1	Razones de cambio (o tasas de cambio) instantáneas de variación de funciones reales.
	C2	Razones de cambio (o tasas de cambio) relativas y porcentuales para funciones reales.
D	D1	Análisis del gráfico de funciones(monotonía) reales y de áreas del conocimiento diferentes a la económica.
	D2	Análisis del gráfico de funciones económicas (monotonía).

D3	Cálculo de máximos y mínimos locales en problemas aplicados de economía utilizando criterio de la primera o segunda derivada para extremos relativos.
D4	Cálculo de máximos y mínimos locales en funciones reales y de áreas del conocimiento diferentes a la económica, utilizando criterio de la primera o segunda derivada para extremos relativos.
D5	Extremos absolutos en un intervalo cerrado.
D6	Análisis de concavidad de funciones reales y económicas.
E	E1 Cálculo de derivadas de orden superior.
	E2 Cálculo de derivadas implícitas.
	E3 Método de newton para aproximación de raíces de polinomios
	E4 <i>L'Hôpital</i>

Fuente: Elaboración de los autores.

A continuación, por límite de espacio, se presenta con detalle el campo de problema (CP) A y sus respectivas subcategorías.

*A: Campos de problemas sobre tangentes.*

Para el análisis de la presencia de este campo de problemas es esencial prestar atención a la construcción que consideran los textos del concepto de recta tangente a una curva. Resulta de interés identificar si el tipo de actividades, ejercicios y/o ejemplos presentes en los textos, permiten ampliar la concepción euclidiana de la recta tangente a la cartesiana y a la Leibniziana, la tematización del esquema de recta tangente mediante el uso consciente de sus propiedades y la posterior desencapsulación (Orts Muñoz et al., 2016), teniendo en cuenta los métodos infinitesimales, ya que el cálculo lleva a los estudiantes a los niveles más altos de generalidad de la tangente (Santi, 2011). A continuación, se consideran ejemplos de las cuatro subcategorías de este campo de problemas, ya que para comprender la interpretación geométrica de la derivada es primordial el concepto de recta tangente (Galindo Illanes & Breda, 2022; Galindo Illanes & Breda, 2020, 2022a).

*A1: Cálculo de la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto, utilizando la concepción cartesiana (aproximación por rectas secantes), conocida la función algebraica.*

Este tipo de ejercicio se utiliza comúnmente para construir la definición algebraica de la derivada en un punto a través de su interpretación geométrica, para ello se considera la concepción cartesiana de la pendiente de una recta tangente a una curva en un punto como el límite de pendientes de rectas secantes, su desarrollo es comúnmente tabular (cálculo de pendientes de rectas secantes próximas) con apoyo gráfico. A continuación, la Figura 6 presenta

un ejemplo:

La unidad de destello (flash) de una cámara funciona mediante el almacenamiento de carga de un condensador y su liberación repentina cuando el flash se activa. Los datos de la tabla describen la carga restante en el condensador (medida en microcoulombs) en el tiempo  $t$  (medida en segundos después de que el flash se dispara). Utilice los datos para dibujar la función y calcule la pendiente de la recta tangente en el punto. [Nota: la pendiente de la recta tangente representa la corriente eléctrica (medida en micro amperes) que fluye desde el condensador a la lámpara de flash.]

$t$	$Q$
0.00	100.00
0.02	81.87
0.04	67.03
0.06	54.88
0.08	44.93
0.10	36.76

**Figura 6.** Ejemplo de A1 presente en T10

Fuente: (Stewart, 2018, p. 78)

Otro desarrollo típico de este campo de problemas presente en los textos es determinar la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto, utilizando su definición algebraica (cálculo de límite), para después transitar a la definición de la derivada de una función en un punto. A continuación, se presenta un ejemplo clásico, cuya solución propuesta en el texto, utiliza la definición algebraica de pendiente de recta tangente  $m_{tan} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}$ . A continuación, la Figura 7 presenta un ejemplo:

Por ejemplo, considere la curva  $y = f(x) = x^2$  y la pendiente de algunas rectas secantes  $PQ$ , donde  $P = (1,1)$ . Para el punto  $Q = (2.5, 6.25)$ , la pendiente de  $PQ$  (vea figura 11.6) es ...

Ejemplo 1. Determinación de la pendiente de la recta tangente.

Encuentre la pendiente de la recta tangente a la curva  $y = f(x) = x^2$  en el punto  $(1,1)$

**Figura 7.** Ejemplo de A1 presente en T2

Fuente: (Haeussler & Paul, 2003, p. 482-483)

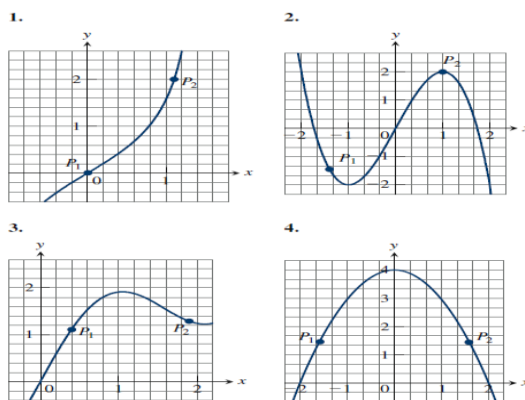
*A2: Cálculo de la pendiente de recta tangente a una curva en un punto, utilizando el triángulo de Leibniz.*

Este tipo de ejercicios proporciona el gráfico de la curva, comúnmente, la gráfica de la curva está sobre una cuadrícula y para determinar una aproximación de la pendiente de la recta



tangente en un punto se utiliza regla. Este tipo de actividad permite identificar gráficamente una recta tangente a una curva en un punto y utiliza el triángulo diferencial de Leibniz para determinar una aproximación de la pendiente. A continuación, la Figura 8 y Figura 9 presentan los ejemplos:

En los ejercicios del 1 a 4, use la cuadrícula y una regla para hacer una estimación aproximada de la pendiente de la curva (en unidades de  $y$  por unidades de  $x$ ) en los puntos  $P_1$  y  $P_2$ .



**Figura 8.** Ejemplo de A2 presente en T7

Fuente:(Thomas et al., 2015, p.108)

*A3: Cálculo de la ecuación de la recta tangente a una curva en un punto, utilizando la derivada.*

Este tipo de ejercicios permite consolidar la interpretación geométrica de la función derivada, a través de la tematización de la recta tangente a una curva. Además, conocer como proceso, que la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto corresponde a la función derivada de la curva evaluada en el punto de tangencia. En los siguientes ejemplos, para construir la ecuación de la recta tangente se requiere determinar previamente la derivada en el punto de tangencia, en ambos ejemplos primero se determina la función derivada, en el primero de ellos (Figura 9), se utiliza la definición algebraica de derivada y en el segundo (Figura 10) las reglas de derivación, después en ambos ejemplos se evalúa la función derivada en el punto de interés. A continuación, la Figura 9 y 10 presentan los ejemplos:

Primero calcule la derivada de  $f(x) = x^3$ , y luego utilícela para determinar la pendiente de la recta tangente a la curva  $y = x^3$  en el punto donde  $x = -1$ . ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente en este punto?

**Figura 9.** Ejemplo de A3 presente en T3

Fuente: (Hoffmann et al., 2006, p. 101)

(53-57) Determine la ecuación de la línea tangente a la gráfica de las funciones siguientes en los puntos indicados

53.  $f(x) = x^2 - 3x + 4$  en  $(1,2)$

54.  $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$  en  $(-1,2)$

.....

**Figura 10.** Ejemplo de A3 presente en T1

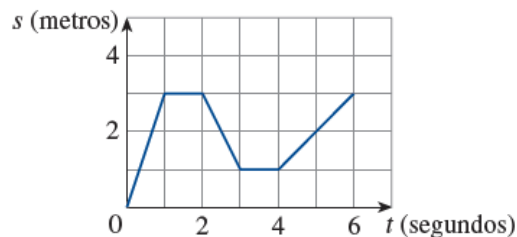
Fuente: (Arya & Lardner, 2004, p. 472)

*A4: Cálculo de la pendiente de una recta tangente a una curva para obtener una razón de cambio instantánea.*

Este tipo de ejercicios permite la tematización de la recta tangente a una curva como la razón de cambio instantánea, posteriormente se transita a la interpretación geométrica de la derivada. Es común observar en los textos que este tipo de ejercicios consideran situaciones aplicadas. A continuación, la Figura 11 y 12 presentan los ejemplos:

(a) Una partícula empieza moviéndose a la derecha a lo largo de una recta horizontal; la gráfica de su función posición se muestra enseguida. ¿Cuándo se mueve la partícula a la derecha? ¿Cuándo a la izquierda? ¿Cuándo permanece inmóvil?

(b) Trace una gráfica de la función velocidad.



**Figura 11.** Ejemplo de A4 presente en T10

Fuente: (Stewart, 2018, p. 148)

Ejemplo 2.1.1 En la gráfica que aparece en la figura 2.2 se indica la relación entre el porcentaje de desempleo  $U$  y el porcentaje correspondiente a la inflación  $I$ . Utilice la gráfica para estimar la razón a la que cambia  $I$  con respecto  $U$  cuando el nivel de desempleo es 3%, y luego cuando éste es 10%.

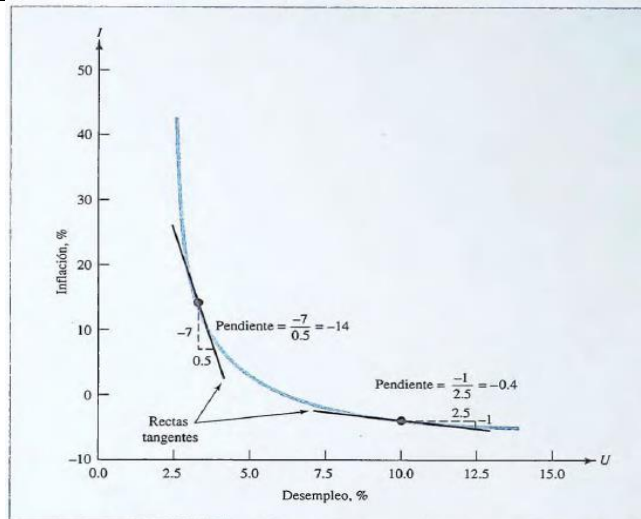


FIGURA 2.2 Inflación como una función del desempleo.

Solución.

De la figura anterior se estima que la pendiente de la recta tangente en el punto (3,14), correspondiente a  $U = 3$ , es aproximadamente -14.....

**Figura 12.** Ejemplo de A2 presente en T3

Fuente: (Hoffmann et al., 2006, p. 96-97)

A continuación, con el fin de caracterizar el significado pretendido de la derivada, se presentan los resultados en torno al análisis de los libros de texto propuestos en los programas de estudios de Ingeniería Comercial en Chile.

#### 4.8 RESULTADOS

El análisis de los significados de la derivada pretendidos en los 13 textos indica que, tanto en los textos de matemática aplicada a economía y negocios como en los clásicos de enseñanza del cálculo para ingenierías, se organizan los contenidos de manera similar para la construcción del objeto derivada, se observa un énfasis en el significado parcial de la derivada como el límite del cociente de incrementos y un predominante lenguaje simbólico en los argumentos, aunque en algunas situaciones apoyados por el lenguaje gráfico. Sin embargo, se observan diferencias en los textos de matemática aplicada a economía y negocios (T1, T2, T3, T4, T5 y T6), y los clásicos de enseñanza del cálculo para ingenierías (T7, T8, T9, T10, T11, T12 y T13), éstas se observan en la preponderancia de la derivada interpretada como una razón de cambio y mayormente en los campos de problemas (CP) abordados.

Con relación al CP sobre tangentes se observa que todos los textos consideran el cálculo de la ecuación de la recta tangente a una curva en un punto utilizando derivada. Con respecto a los

textos de matemática aplicada a economía y negocios, T1, T2, T3, T5 y T6 construyen la pendiente de una recta tangente a una curva en un punto utilizando la aproximación por rectas secantes y T3, T5 y T6 utilizan el triángulo de Leibniz. Además, T1, T2, T3, T4 y T5 consideran el cálculo de pendientes de rectas tangentes para determinar razones de cambio instantáneas. Con respecto a los textos clásicos de enseñanza del cálculo para ingenierías, T7, T8, T9, T10, T11 y T12 construyen la pendiente de una recta tangente a una curva en un punto utilizando la aproximación por rectas secantes y T7, T8, T9 y T10 utilizan el triángulo de Leibniz y consideran problemas que involucran el cálculo de pendientes de rectas tangentes para determinar razones de cambio instantáneas.

Sobre los CP sobre cálculo de tasas instantáneas de cambio, los textos de matemática aplicada a economía y negocios consideran el cálculo de tasas instantáneas de cambio marginal, tasas de cambio relativas y porcentuales, cálculo de rapidez instantánea, problemas de crecimiento poblacional y T1, T2, T3, T4 y T5 razones de cambio aplicadas a otras áreas del conocimiento diferentes a las antes mencionadas. Con respecto a los textos clásicos de enseñanza del cálculo para ingenierías, todos consideran el cálculo de razones de cambio aplicadas a otras áreas del conocimiento. Exceptuando T13, todos los textos consideran problemas de cálculo de rapidez instantánea y problemas de crecimiento poblacional. Finalmente, se observa que sólo un texto (T7) considera problemas de tasa de cambio relativas y porcentuales para funciones económicas, a diferencia de los textos de matemática aplicada a economía y negocios.

En cuanto a los CP sobre tasas instantáneas de variación, se observó que todos los textos de matemática aplicada a economía y negocios consideran razones de cambio instantáneas de variación de funciones reales y, excepto T1 y T6, todos profundizan en problemas de tasas de cambio relativas y porcentuales de funciones reales. Con respecto a los textos clásicos de enseñanza del cálculo para ingenierías, T8, T9, T10 y T11 consideran razones de cambio instantáneas de variación de funciones reales y ninguno de ellos profundiza en problemas de tasas de cambio relativas y porcentuales de funciones reales, a diferencia de la mayor parte de los textos de matemática aplicada a economía y negocios.

Para los campos de problemas sobre aplicación de la derivada para el cálculo de máximos y mínimos, análisis de gráficas de funciones, etc., se identificó que todos los textos consideran el análisis de monotonía y el cálculo de máximos y mínimos locales de funciones reales y de problemas aplicados en áreas del conocimiento diferentes a la económica, utilizando

los criterios de primera o segunda derivada para extremos relativos. Además, los textos de matemática aplicada a economía y negocios consideran el análisis de monotonía y el cálculo de máximos y mínimos locales en problemas aplicados a la economía, utilizando los criterios de primera o segunda derivada para extremos relativos, y el análisis de concavidades de funciones reales y económicas. Finalmente, excepto T6, todos consideran el cálculo de extremos absolutos en un intervalo cerrado. Con respecto a los textos clásicos de enseñanza del cálculo para ingenierías, sólo T12 no considera el cálculo de máximos y mínimos locales en problemas aplicados a la economía, utilizando los criterios de primera o segunda derivada para extremos relativos, T7, T8, T9, T10 y T11 agregan el análisis de concavidades de funciones reales y económicas y el cálculo de extremos absolutos en un intervalo cerrado. Finalmente, sólo T7 y T9 consideran el análisis de la monotonía de funciones económicas, a diferencia de todos los textos de matemática aplicada a economía y negocios.

Cuánto a los CP sobre cálculo de derivadas a partir de reglas y teoremas de derivación, se infiere que todos los textos consideran el cálculo de derivadas de orden superior utilizando las reglas de la derivada. Además, los textos de matemática aplicada a economía y negocios T1, T2, T3 y T6 consideran el cálculo de derivadas implícitas. Sin embargo, sólo T2 consideras como aplicación de derivadas el método de Newton para aproximación de raíces de polinomios y la regla de *L'Hôpital*. Con respecto a los textos clásicos de enseñanza del cálculo para ingenierías, todos consideran el cálculo de derivadas implícitas, sólo T12 no considera la regla de *L'Hôpital*, y T12 y T13 no consideran el método de Newton para para aproximación de raíces de un polinomio.

A continuación, se presenta la Tabla 12 que indica con una X la presencia de los campos de problemas en los 13 libros analizados.

**Tabla 12.** Presencia de los campos de problemas en los 13 textos analizados

CP	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	T9	T10	T11	T12	T13
<b>A</b>	Campos de problemas sobre tangentes												
<b>A1</b>	x	x	x		x	x	x	x	x	x	x	x	
<b>A2</b>			x		x	x	x	x	x	x			
<b>A3</b>	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
<b>A4</b>	x	x	x	x	x		x	x	x	x			
<b>B</b>	Campos de problema sobre cálculo de tasas instantáneas de cambio												

<b>B1</b>	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x		x
<b>B2</b>	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
<b>B3</b>	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
<b>B4</b>	x	x	x	x	x	x	x						
<b>B5</b>	x	x	x	x	x		x	x	x	x	x	x	x
<b>C</b>	Campos de problemas sobre tasas instantáneas de variación												
<b>C1</b>	x	x	x	x	x	x		x	x	x	x		
<b>C2</b>		x	x	x	x								
<b>D</b>	Campos de problemas sobre aplicación de la derivada para el cálculo de máximos y mínimos, análisis de gráficas de funciones, etc.												
<b>D1</b>	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
<b>D2</b>	x	x	x	x	x	x	x		x				
<b>D3</b>	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x		x
<b>D4</b>	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
<b>D5</b>	x	x	x	x	x		x	x	x	x	x		
<b>D6</b>	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x		
<b>E</b>	Campos de problemas sobre cálculo de derivadas a partir de reglas y teoremas de derivación												
<b>E1</b>	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
<b>E2</b>	x	x	x			x	x	x	x	x	x	x	x
<b>E3</b>		x					x	x	x	x	x		
<b>E4</b>		x					x	x	x	x	x		x

Fuente: Elaboración de los autores.

Con relación a los campos de problemas, todos los textos de matemática aplicada a economía y negocios incluyen campos de problemas que consideran el cálculo de la ecuación de la recta tangente a una curva en un punto utilizando derivada, cálculo de tasas instantáneas de cambio, marginal, poblacional, relativas y porcentuales, para funciones reales y aplicadas a la economía y negocios. Además, el análisis de la monotonía, la concavidad y de los extremos relativos de funciones reales y aplicadas a la económica, utilizando para ello los criterios de primera y segunda derivada. Todos los textos clásicos de enseñanza del cálculo para ingenierías incluyen campos de problemas que consideran el cálculo de la ecuación de la recta tangente a una curva en un punto utilizando derivada, cálculo de tasas instantáneas de cambio de funciones aplicadas a otras áreas del conocimiento diferentes a la económica, el análisis de la monotonía y de los extremos relativos de funciones reales y aplicadas a otras áreas del conocimiento

diferentes a la económica. Además, consideran el cálculo de derivadas de orden superior y de funciones implícitas utilizando las reglas y teoremas de derivación.

Finalmente, debemos mencionar que las principales diferencias entre los textos de matemática aplicada a economía y negocios y los textos clásicos de enseñanza para las ingenierías se generan en las subcategorías de los campos de problemas B4, C2, D2, E2, E3 y E4. Además, en los textos clásicos, se observan muy disminuidos el número de actividades y ejercicios aplicados al área de economía y negocios, se aprecia el énfasis en el significado parcial de la “derivada como límite” (límite del cociente de incrementos).

A continuación, se presenta la Tabla 13 que indica con una X la presencia de las definiciones (D) en los 13 libros de textos (T) analizados.

**Tabla 13.** Presencia de definiciones (D) en los textos analizados (T)

<b>D</b>	<b>T1</b>	<b>T2</b>	<b>T3</b>	<b>T4</b>	<b>T5</b>	<b>T6</b>	<b>T7</b>	<b>T8</b>	<b>T9</b>	<b>T10</b>	<b>T11</b>	<b>T12</b>	<b>T13</b>
<b>D1</b>	x	x	x	x	x	x			x	x	x		
<b>D2</b>	x			x	x	x				x			
<b>D3</b>	x		x	x	x	x	x	x	x	x	x		
<b>D4</b>	x	x					x	x	x	x	x	x	
<b>D5</b>		x											
<b>D6</b>	x	x		x	x		x	x	x	x	x	x	
<b>D7</b>				x		x				x	x		
<b>D8</b>										x			x
<b>D9</b>		x	x	x	x	x	x		x	x	x		
<b>D10</b>	x		x			x	x	x		x	x		x
<b>D11</b>	x	x	x	x	x	x	x			x	x		
<b>D12</b>	x	x		x									
<b>D13</b>							x	x	x	x	x		
<b>D14</b>	x								x				
<b>D15</b>	x	x		x	x	x	x		x		x		
<b>D16</b>	x	x	x	x				x	x		x		x
<b>D17</b>	x	x	x	x	x	x	x	x	x		x		
<b>D18</b>	x	x		x	x	x			x		x		x
<b>D19</b>	x		x	x	x	x				x			x

<b>D20</b>	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x		
<b>D21</b>	x	x		x	x	x	x	x	x	x	x		x
<b>D22</b>				x		x		x		x			x
<b>D23</b>							x					x	
<b>D24</b>										x			
<b>D25</b>										x	x	x	
<b>D26</b>													x
<b>D27</b>		x				x	x	x		x	x	x	x
<b>D28</b>							x	x		x			
<b>D29</b>							x	x		x			

Fuente: Elaboración de los autores.

A continuación, se presenta la Tabla 14 que indica con una X la presencia de los teoremas y proposiciones (TP) en los 13 libros de textos (T) analizados.

**Tabla 14.** Presencia de teoremas y proposiciones (TP) en los textos analizados

<b>TP</b>	<b>T1</b>	<b>T2</b>	<b>T3</b>	<b>T4</b>	<b>T5</b>	<b>T6</b>	<b>T7</b>	<b>T8</b>	<b>T9</b>	<b>T10</b>	<b>T11</b>	<b>T12</b>	<b>T13</b>
TP1	x	x	x	x	x	x			x	x	x		
TP2							x	x	x	x	x		
TP3	x	x	x	x	x	x			x	x	x		
TP4							x	x	x	x	x		x
TP5		x			x		x	x	x	x	x		x
TP6					x					x			
TP7										x			
TP8							x	x	x	x	x		
TP9	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
TP10	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
TP11							x	x	x	x	x	x	x
TP12	x	x	x	x			x	x	x	x	x		x
TP13	x	x	x			x	x	x	x	x	x		
TP14	x	x	x	x	x		x	x	x	x	x		x
TP15		x	x		x	x	x	x	x	x	x		x
TP16										x			x



---

Fuente: Elaboración de los autores.

---

A modo general, se observa que, para definir conceptos y propiedades de la derivada, se consideran como conocimiento previos funciones, teoría de límite y continuidad. La mayor parte de los textos considera problemas introductorios aplicados (física, economía, química, pandemias, etc.), después presenta problemas resueltos, en los cuales se ejemplifica el uso de los conceptos y se exhibe la demostración de algunos teoremas de la derivada. El uso de lenguaje es mayormente algebraico y gráfico (en menor medida), algunos textos cuentan con apoyo de recursos tecnológicos y cada capítulo finaliza con una propuesta de problemas de aplicación y/o de no aplicación para que sean resueltos por el lector/estudiante.

#### 4.9 CONCLUSIONES

Este trabajo buscó analizar los significados pretendidos de la derivada en los libros de texto universitarios propuestos para la formación de ingenieros comerciales en Chile. Como resultado del análisis de los 13 libros textos contemplados en este estudio se observó de la tabla 6 y tabla 7 que, en la mayor parte de ellos, hay un énfasis en el significado parcial de la derivada como el límite del cociente de incrementos y un predominante lenguaje simbólico en los argumentos. Sin embargo, se han observado diferencias en los textos de matemática aplicada a economía y los clásicos de enseñanza del cálculo para ingenierías. Por un lado, una diferencia es que en estos últimos se observan la preponderancia de la derivada interpretada como una razón de cambio y, por otro lado, la otra diferencia se observa en los campos de problemas contemplados y sus respectivas subcategorías.

De las 25 definiciones de la derivada encontradas, poco menos de la mitad de los libros de texto consideran 50% de ellas, lo que indica que no hay una incorporación de las definiciones de la derivada de manera holística. En cuanto a la presencia de teoremas y proposiciones en los textos analizados, se observa poca presencia del Teorema del valor intermedio, Teorema de Fermat, Diferenciabilidad implica continuidad, Regla de *L'Hôpital* y Regla de antiderivadas (Integral Indefinidas).

Se concluye que el estudio realizado proporciona resultados novedosos con relación a algunas características del significado de la derivada presentes en los libros de texto, complementando, de esa forma, los análisis del significado de la derivada en los programas de asignatura de los programas de estudio de las carreras de Ingeniería Comercial en Chile (Galindo Illanes & Breda, 2022).

Por un lado, una contribución teórica relevante del estudio realizado, aparte de dar un panorama de los significados pretendidos de la derivada en los libros de texto analizados, corroborando con otras investigaciones que utilizaran las herramientas del EOS para ello (Burgos et al., 2020; Castro et al., 2017; García-García et al., 2021; Monje et al., 2018; Pallauta et al., 2022; Pino-Fan et al., 2019), es la generación de las subcategorías de los campos de problema identificados, ampliando, en alguna medida, el estudio realizado en Pino-Fan et al. (2013). Por otro lado, el análisis del objeto primario de la argumentación que hacen los libros de texto sobre la derivada en las actividades propuestas, es un aspecto a contemplar en investigaciones futuras.

Partiendo del supuesto que el objeto matemático derivada se encuadra en una disciplina caracterizada cómo una ciencia básica, las matemáticas, y que una de las competencias que debe desarrollar el futuro ingeniero en su proceso formativo es la de articular las ciencias básicas y las ciencias de la ingeniería (Comisión Nacional de Acreditación, 2011), la contribución práctica de la investigación que se presenta es, a partir de los resultados encontrados, diseñar e implementar un ciclo formativo para futuros Ingenieros Comerciales en Chile teniendo en cuenta la complejidad del significado de la derivada, contemplando la mayor variabilidad de campos de problema y sus respectivas subcategorías, las definiciones, teoremas y proposiciones de forma representativa. Además, de integrar actividades teóricas y prácticas, que permitan la adquisición de las habilidades de comunicación, pensamiento crítico, solución de problemas, interacción social y autoaprendizaje e iniciativa personal.

Este panorama motiva la indagación en cuestiones en torno a la idoneidad epistémica del significado pretendido de la derivada para la formación de futuros ingenieros comerciales. El aspecto valorativo de la idoneidad epistémica de la derivada en el ciclo formativo que se pretende implementar es otra línea futura de investigación que se pretende realizar (Breda et al., 2017, 2018).



## CAPÍTULO 5. ARTÍCULO CIENTÍFICO IV

---

A partir de los resultados presentados en los Capítulos 2, 3 y 4, en este capítulo presentamos el diseño instruccional de un proceso de enseñanza y aprendizaje de la derivada para futuros ingenieros comerciales, estudiantes de la carrera de Ingeniería Comercial de una universidad chilena (Objetivo específico 4). Para ello, durante dos años se presentó una propuesta de diseño instruccional en congresos que convocan ingenieros de todo Chile y el extranjero: el Encuentro Nacional de Escuelas y Facultades de Administración y el Congreso Chileno de Educación en Ingeniería. En los trabajos presentados se propuso un diseño de enseñanza de la interpretación geométrica de la derivada que consideró actividades gráficas, tabulares y algebraicas, manipulativas y computacionales; en las cuales se consideró la definición de conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos un tránsito entre los lenguajes escrito, numérico, gráfico y simbólico.

Un aporte importante de estos trabajos es que las actividades diseñadas y los *applets* seleccionados para apoyar el aprendizaje de la derivada tiene un potencial de utilidad, tanto para investigadores de este objeto matemático, como para los profesores que se interesen en la enseñanza de la derivada. Finalmente, el año 2023 se publica un artículo científico cuyo objetivo es presentar un diseño instruccional de enseñanza de la derivada direccionado a futuros ingenieros comerciales para ser implementado en la asignatura de Cálculo Aplicado a los Negocios en una universidad chilena.

### 5.1 REFERENCIA DEL ARTÍCULO CIENTÍFICO IV

Galindo Illanes, M. G., Breda, A., & Alvarado Martinez, H. (2023). Diseño de un proceso de enseñanza de la derivada para estudiantes de Ingeniería Comercial en Chile. *PARADIGMA*, 44(4), 321-350. <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2023.p321-350.id1386>

### 5.2 BASES E INDEXACIÓN DEL PERIODICO

Segundo la MIAR, la revista *Paradigma* pertenece al ámbito de Educación. Está indexada en Fuente Académica Plus, DIALNETS y Scielo y evaluada en ERIHPlus LATINDEX Catálogo v1.0 (2002 - 2017). En Brasil se califica como revista A1 en el Qualis de Periódicos de la CAPES (Plataforma Sucupira). Las métricas de acceso al artículo en la página de la revista, son de 61 visualizaciones y 27 *downloads*. Publicación realizada en el marco del proyecto

PID2021-127104NB-I00 financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033/ y por "FEDER Una manera de hacer Europa".

### 5.3 RESUMEN DEL ARTÍCULO CIENTÍFICO IV

Este trabajo tiene como objetivo presentar un diseño instruccional de enseñanza de la derivada para estudiantes universitarios de Ingeniería Comercial en Chile, aplicando algunas herramientas del marco teórico del Enfoque Ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (EOS). El diseño metodológico considera diversas configuraciones ontosemióticas en las situaciones-problemas sobre tangentes, cálculo de tasas instantáneas de cambio y tasas instantáneas de variación, aplicaciones de la derivada para el cálculo de máximos y mínimos, análisis de gráficas de funciones, y el cálculo de derivadas a partir de reglas y teoremas de derivación. Además, integra las TIC en las diversas actividades, favoreciendo el tránsito entre los tipos de lenguajes escrito, numérico, gráfico y simbólico, permitiendo a los estudiantes construir de manera progresiva el significado de la derivada.

El diseño instruccional se implementará en una universidad chilena, por lo que el tiempo destinado para el diseño instruccional obedece a lo establecido en el programa de la asignatura Cálculo Aplicado a los Negocios (asignatura en la que se pretende realizar la implementación del diseño instruccional), es decir, para la enseñanza de la derivada se dispone de 5 semanas, cada semana considera 4 sesiones presenciales de aula, de 80 minutos cada una, y 2 horas cronológicas de trabajo autónomo. La propuesta de diseño instruccional de enseñanza de la derivada espera superar algunas de las dificultades de aprendizaje de los estudiantes, evidenciadas en diversas investigaciones, en particular, las dificultades de los estudiantes de Ingeniería Comercial. Además de ello, pretende proporcionar un diseño instruccional de enseñanza que ejemplifique el uso de algunas herramientas del EOS.

Palabras clave: Derivada; Diseño Instruccional; Enfoque Ontosemiótico; Estudiantes de Ingeniería Comercial

### 5.4 RESUMO DO ARTIGO CIENTÍFICO IV

Este artigo tem como objetivo apresentar o planejamento de um processo de ensino e aprendizagem da derivada para estudantes universitários de engenharia comercial no Chile, aplicando algumas ferramentas do quadro teórico da Abordagem Ontossemiótica (AOS). O desenho metodológico considera várias configurações ontossemióticas nas situações-problema sobre tangentes, cálculo de taxas instantâneas de variação, aplicações da derivada para o cálculo de máximos e mínimos, análise de gráficos de funções e cálculo de derivadas a partir de regras

e teoremas de derivação. Além disso, integra as TIC nas diversas atividades, favorecendo a transição entre os tipos de linguagem escrita, numérica, gráfica e simbólica, permitindo que os alunos construam progressivamente o significado da derivada. O desenho metodológico será implementado na disciplina de Cálculo Aplicado aos Negócios em uma universidade chilena, portanto, o tempo destinado ao desenho instrucional obedece ao estabelecido no programa do curso, ou seja, para o ensino da derivada são 5 semanas, cada semana contempla 4 sessões presenciais, de 80 minutos cada, e 2 horas cronológicas de trabalho autónomo. A proposta de desenho instrucional para o ensino da derivada, além de fornecer um design de ensino instrucional que exemplifica o uso de algumas ferramentas do AOS, espera superar algumas das dificuldades de aprendizagem dos alunos de Engenharia Comercial, evidenciadas em pesquisas prévias.

Palavras-chave: Derivada; Desenho Instrucional; Abordagem Ontossemiótica; Estudantes de Engenharia Comercial.

#### 5.5 ABSTRACT OF THE SCIENTIFIC ARTICLE IV

This paper aims to present an instructional design for teaching the derivative to commercial engineering university students in Chile, applying some tools from the theoretical framework of the ontosemiotic approach (OSA). The methodological design considers various ontosemiotic configurations in the situations-problems on tangents, calculation of instantaneous rates of change and instantaneous rates of variation, applications of the derivative for the calculation of maximums and minimums, analysis of graphs of functions, and the calculation of derivatives. from derivation rules and theorems. In addition, it integrates ICT in the various activities, favoring the transit between the types of written, numerical, graphic, and symbolic languages, allowing the student to progressively build the meaning of the derivative. The methodological design will be implemented in the subject of Calculus Applied to Business at a Chilean university, so the time allocated for the instructional design obeys what is established in the course program, that is, for the teaching of the derivative, it has 5 weeks, each week includes 4 classroom sessions of 80 minutes each and 2 chronological hours of autonomous work. The instructional design proposal for derivative teaching hopes to overcome some of the learning difficulties of students, evidenced in various investigations. In particular, the difficulties of the students of Commercial Engineering. In addition to providing an instructional teaching design that exemplifies the use of some OSA tools.

Keywords: Derivative; Instructional design; Ontosemiotic approach; Business Engineering students.

## 5.6 INTRODUCCIÓN

La derivada es uno de los objetos matemáticos fundamentales presente en la formación de los ingenieros, lo que ha generado diversos estudios con relación a la complejidad de sus significados, sus múltiples representaciones, los procesos de enseñanza y aprendizaje, la idoneidad del significado de la derivada en los distintos currículos y los significados parciales en los textos universitarios de enseñanza para las ingenierías (Larios et al., 2021; Larios & Jiménez, 2022; Pino-Fan et al., 2016; Rodríguez-Nieto et al., 2022). Trabajar los distintos significados de un objeto matemático es un aspecto propuesto por el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción Matemáticos (EOS, a partir de ahora) (Godino et al., 2007, 2019), lo cual se plantea analizar la complejidad de los objetos matemáticos por medio de sus pluri significaciones (significados parciales).

Algunos estudios de la derivada en carreras de Ingeniería Comercial destacan tener presente la relación entre los conceptos económicos y matemáticos, siendo los modos de representación los más utilizados en microeconomía (Ballard & Johnson, 2004; J. S. Butler et al., 1994; García et al., 2006; Hey, 2005b). También, por las dificultades en la interpretación de situaciones económicas debido a la débil comprensión de los significados matemáticos que las organizan (Ariza Cobos & Linares Ciscar, 2009).

En esta línea, este trabajo hace parte de una investigación más amplia que pretende profundizar la comprensión de los futuros ingenieros comerciales acerca al objeto matemático derivada en el contexto chileno. Para atender dicho objetivo, se ha realizado un estudio en diferentes etapas.

La primera etapa fue un estudio diagnóstico, lo cual reveló que los futuros ingenieros comerciales presentan dificultades en el concepto de función y la concepción euclidiana de la recta tangente; la construcción del significado de recta tangente como límite de rectas secantes; la interpretación de la función derivada y su representación geométrica; realizar operaciones para calcular la pendiente de una recta y; operar con funciones (Galindo Illanes et al., 2022; Galindo Illanes & Breda, 2020).

La segunda etapa fue el estudio del tratamiento de la derivada en los programas de las asignaturas de las carreras de Ingeniería Comercial en Chile, lo cual mostró que, si bien la mayor parte de las propuestas curriculares presentan similitudes en la organización de contenidos y en

los elementos lingüísticos utilizados para la construcción del objeto derivada, se observan diferencias importantes en la preponderancia de la derivada interpretada como una razón de cambio y en los campos de problemas abordados (Galindo Illanes & Breda, 2022a).

La tercera etapa fue el estudio de los significados pretendidos de la derivada en libros de texto para las carreras de Ingeniería Comercial en Chile, que registró: a) un énfasis en el significado parcial de la derivada como el límite del cociente de incrementos y un predominante lenguaje simbólico en los argumentos; b) poca presencia de algunos teoremas importantes relacionados a la derivada y; c) falta de una representatividad de las definiciones de la derivada (Galindo Illanes & Breda, 2023).

Con base en lo anterior, este trabajo tiene como objetivo dar a conocer el diseño de un proceso de enseñanza y aprendizaje de la derivada para futuros ingenieros comerciales, estudiantes de la carrera de Ingeniería Comercial de una universidad chilena. Para ello, se ha tenido en cuenta, además de las herramientas teóricas del Enfoque Ontosemiótico (explicadas en la secuencia del texto), los resultados de las etapas del estudio previamente mencionado.

## 5.7 MARCO TEÓRICO

Los desarrollos teóricos propuestos por el EOS, explicados recientemente en Godino et al. (2019) tienen como objetivo dar respuesta a algunos problemas generados en el campo de la Educación Matemática. En el EOS, se asume que la actividad matemática es una actividad humana centrada en la resolución de problemas, que tiene lugar en un tiempo-espacio determinado, a través de una secuencia de prácticas que, a menudo, se consideran procesos (de significación, conjeturar, argumentar, etc.). Para ello, el EOS propone las nociones de situación-problema de práctica matemática (secuencia de prácticas) que tiene lugar durante la resolución de estas situaciones problema. Tales secuencias tienen lugar en el tiempo y se suelen considerar, en muchos casos, como procesos. En particular, el uso y/o la emergencia de los objetos primarios de la configuración (problemas, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos), tiene lugar mediante los respectivos procesos matemáticos de comunicación, problematización, definición, enunciación, elaboración de procedimientos (creación de algoritmos y rutinas) y argumentación (aplicando la dualidad proceso-producto). Asimismo, las dualidades antes descritas, dan lugar a los siguientes procesos: institucionalización – personalización, generalización – particularización, análisis/descomposición – síntesis/reificación, materialización/concreción – idealización/abstracción, expresión/representación – significación.



El EOS también asume el principio de que el conocimiento de un objeto, por parte de un sujeto (ya sea individuo o institución), es el conjunto de funciones semióticas que este sujeto puede establecer en las que el objeto interviene como expresión o contenido. Además, la correspondencia entre un objeto y el sistema de prácticas donde tal objeto interviene se interpreta como el "significado de ese objeto" (institucional o personal). Por ejemplo, cuando un sujeto realiza y evalúa una secuencia de prácticas matemáticas, activa un conglomerado formado por situaciones-problemas, lenguajes, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos, articulados en lo que, en términos del EOS, se llama una configuración de objetos primarios (Font et al., 2013). Para delimitar los significados de un objeto matemático, el EOS propone la herramienta denominada análisis de sistemas de prácticas (personales e institucionales) y las configuraciones ontosemióticas involucradas en ellas (Godino, 2014; Godino & Batanero, 1994)

*Representatividad de la complejidad de los objetos matemáticos en el EOS: el caso de la derivada*

En Font et al. (2013) se explica que la noción de complejidad del objeto matemático y la de articulación de los componentes de dicha complejidad juegan un papel esencial. Entender la complejidad en término de una pluralidad de significados es resultado de la visión pragmatista sobre el significado que se asume en el EOS. Desde un punto de vista pragmatista, el significado de un objeto matemático se entiende como el conjunto de prácticas en la que dicho objeto interviene de una manera determinante (o no). Un objeto matemático, que se ha originado como un emergente del sistema de prácticas que permite resolver un determinado campo de problemas, con el paso del tiempo queda enmarcado en diferentes programas de investigación. Cada nuevo programa de investigación permite resolver nuevos tipos de problemas, aplicar nuevos procedimientos, relacionar el objeto (y por tanto definir) de manera diferente, utilizar nuevas representaciones, etc. De esta manera, con el paso del tiempo aparecen nuevos subconjuntos de prácticas (sentidos) que amplían el significado del objeto.

Para el objeto matemático derivada, Pino-Fan et al. (2011) caracterizan su complejidad mediante nueve configuraciones de objetos primarios: 1) tangente en la matemática griega; 2) variación en la edad media; 3) métodos algebraicos para hallar tangentes; 4) concepciones cinemáticas para el trazado de tangentes; 5) ideas intuitivas de límite para el cálculo de máximos y mínimos; 6) métodos infinitesimales en el cálculo de tangentes; 7) cálculo de fluxiones; 8) cálculo de diferencias; y 9) derivada como límite. En Pino-Fan, Castro, Godino y Font (2013) se utilizan estas nueve configuraciones para la reconstrucción del significado global de la

derivada, el cual es utilizado para valorar la representatividad del significado pretendido en el currículo de Bachillerato de México (a partir de las configuraciones de objetos primarios activadas en las prácticas matemáticas propuestas tanto en el Plan de Estudios como en los libros de texto de dicho nivel). La caracterización de la complejidad de la derivada realizada en Pino-Fan, Godino y Font (2011) facilita tener elementos para diseñar cuestionarios que permiten caracterizar la comprensión de los estudiantes, futuros profesores o profesores en servicio sobre la derivada. Por ejemplo, en Pino-Fan, Godino y Font (2015), se diseñó un cuestionario para determinar la comprensión de futuros profesores sobre la derivada en el que se incluyeron tareas que activan los diversos significados parciales de la derivada caracterizados en Pino-Fan et al. (2011).

De acuerdo con el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción Matemáticos (EOS) (Godino et al., 2019), por problemas sobre tangentes se entiende las prácticas que realiza el alumno para resolver problemas en los que la pendiente de la recta tangente (significado geométrico de la derivada) tiene un papel relevante en su resolución, lo cual implica concebirla también como “conocimiento y aplicación de las normas” que regulan la práctica y los objetos primarios que intervienen en ella (problemas, procedimientos, proposiciones, definiciones y argumentos) (Galindo Illanes & Breda, 2020, 2022b, 2022a, 2023a). De igual forma, consideraremos, en este trabajo, las tres configuraciones epistémicas: manipulativas (el estudiante trabaja con dispositivos manipulativos sin utilizar notación o cálculo algebraico), algebraica (se caracteriza por un lenguaje simbólico y la demostración deductiva, así como el recurso de elementos de álgebra y análisis) y computacional (se caracteriza por el lenguaje icónico, incorpora como procedimiento la simulación y el argumento preferible es inductivo) adaptadas de Alvarado et al. (2013), en el contexto de la derivada.

## 5.8 METODOLOGÍA

En este apartado se explica el contexto del estudio, los instrumentos de colecta de datos y el análisis de estos.

### 5.8.1 Contexto del estudio

#### *Participantes*

Participarán en la investigación estudiantes de la carrera de Ingeniería Comercial de la Facultad de Economía y Negocios de una universidad del sur de Chile, con edades entre 19 y 20 años. El plan de estudios de Ingeniería Comercial considera la asignatura de Cálculo Aplicado

a los Negocios en el tercer semestre académico, y tiene como prerrequisito el curso de Álgebra o Métodos Cuantitativos.

#### *Bases para una propuesta didáctica*

El plan de intervención consideró, para el desarrollo de la enseñanza de la derivada, los siguientes elementos:

- a) *Campos de problema (CP)*. A partir del significado institucional pretendido y el análisis de referencia de Galindo y Breda (2023b), la propuesta considera los campos de problemas sobre: tangentes (CP1), el cálculo de tasas instantáneas de cambio y de tasas instantáneas de variación (CP2), aplicaciones de la derivada para el cálculo de máximos y mínimos, análisis de gráficas de funciones (CP3), y el cálculo de derivadas a partir de reglas y teoremas de derivación (CP4).
- b) *Configuraciones epistémicas*. La propuesta considera las configuraciones epistémicas caracterizadas y utilizadas por Galindo et al. (2022), estas son:
  - (i) Configuración Manipulativa, el estudiante trabaja con papel, regla y lápiz. El lenguaje utilizado en esta configuración es el característico de los procedimientos descriptivos y de la geometría analítica.
  - (ii) Configuración Computacional, el estudiante dispone de notebook o celulares o Tablet, internet, *GeoGebra* (versión gratuita) y código QR. El lenguaje y los procedimientos son de tipo gráfico, geométrico y descriptivo.
  - (iii) Configuración Algebraica, el estudiante dispone de notebook o celulares o Tablet, internet, Software educativos como *Symbolab* (versión gratuita) y *Wolfram Alpha* (versión gratuita). El lenguaje y procedimientos son de tipo simbólico y tabular.
- c) *Trabajo presencial de aula y trabajo autónomo fuera de aula*. La trayectoria didáctica considera sesiones en aula y sesiones fuera del aula, todas dirigidas por el docente de la asignatura. Las sesiones de aula se desarrollan en formato presencial y en los horarios establecidos de clases. Sin embargo, las sesiones fuera de aula no tienen horario establecido y considera el trabajo autónomo del estudiante.

#### **5.8.2 Desarrollo de la enseñanza**

El programa de actividad curricular de Cálculo Aplicado a los Negocios se desarrolla en 15 semanas, cada semana dispone de 4 sesiones presenciales en aula, cada sesión tiene una duración de 80 minutos. Además, cada semana dispone de 2 horas cronológicas de trabajo autónomo, declaradas en el programa curricular de la asignatura.

La unidad 1 de aprendizaje corresponde al estudio de la derivada de funciones reales, para el desarrollo de la enseñanza se contemplan 5 semanas de clases, considerando la Temporalización y Planificación descritas en la Tabla 15:

**Tabla 15.** Temporalización y Planificación de los Campos de Problemas

Semana	CP	Sesiones Presenciales (SP)	Tiempo SP	Sesiones Trabajo Autónomo (TA)	Tiempo TA
1	1	1 – 4	320 minutos	1	120 minutos
2	2	5 – 8	320 minutos	2	120 minutos
3	3	9 – 12	320 minutos	3	120 minutos
4	4	13 – 16	320 minutos	4	120 minutos
5	4	13 – 16	320 minutos	4	120 minutos

Fuente: Elaboración de los autores

Las sesiones presenciales de aula se realizaron en los horarios establecidos para las clases teóricas y prácticas, las actividades consideradas fueron individuales y grupales colaborativas favoreciendo el dialogo, la retroalimentación y la consolidación de los conocimientos adquiridos por el estudiante durante su trabajo autónomo. Las sesiones fuera de aula son parte del trabajo autónomo del estudiante e incluyen actividades como visualizar videos educativos, leer apuntes teórico-práctico y realizar las tareas, disponibles en la plataforma virtual Moodle.

La planificación del estudio de los campos de problemas de la derivada contempla veinte sesiones presenciales de aula y cinco sesiones de trabajo autónomo fuera de aula, en un tiempo de cinco semanas (ver Tablas 16, 17, 18, 19 y 20).

**Tabla 16.** Semana 1: Temporalización y Planificación de los Problemas sobre Tangentes

Sesión Presencial (SP)	Acción didáctica	Objetivo de la acción didáctica	Lenguajes	Configuraciones
1	Tarea SP1	Obtención de la pendiente de la recta tangente mediante aproximaciones por la pendiente de rectas secantes.	Tabular Geométrico Gráfico Descriptivo	Manipulativas Computacional

2	Tarea SP2	Identificación de la recta tangente a una curva.	Geométrico Gráfico Descriptivo	Manipulativas Computacional
3	Tarea SP3	Interpretación geométrica de la derivada en un punto particular. (Consolidar utilizando teoría de límite intuitivamente)	Simbólico Gráfica	Computacional Algebraica
4	Tarea SP4	Articulación de la derivada de una función en un punto y su función derivada. (Consolidar utilizando teoría de límite)	Tabular Gráfica Simbólico Descriptivo	Computacionales Algebraica
5	Tarea SP5	Aplicación de la función derivada (Utilizando definición de límite)	Gráfico Simbólico Descriptivo	Computacionales
Sesión Trabajo Autónomo (TA)	Acción didáctica	Objetivo de la acción didáctica	Lenguajes	Configuraciones
1	Tarea TA1	Estudio de manuscrito teórico-práctico del curso, que considera la construcción de la ecuación de una recta tangente a una curva.	Simbólico Gráfica	Computacional Algebraica
2	Tarea TA2	Aplicación de la recta tangente a problemas económicos. Aplicación de la interpretación geométrica de la derivada.	Tabular Gráfica Simbólico Descriptivo	Computacionales Algebraica

Fuente: Elaboración de los autores

Para comenzar el estudio de la derivada, es fundamental construir previamente el concepto de la recta tangente a una curva considerando las concepciones cartesiana y euclidiana (Galindo Illanes et al., 2022), para esto en la sesión presencial 1 y 2 (Tarea SP1 y Tarea SP2) y en las sesiones de trabajo autónomo (Tarea TA1 y Tarea TA2) se propone a los estudiantes resolver tareas que le permitirán ampliar la concepción euclidiana a la cartesiana, mediante la construcción de la recta tangente como límite de rectas secantes utilizando configuraciones manipulativas y computacionales, a través de las gráficas utilizando regla y lápiz, y del uso de

un applet de *GeoGebra*, el lenguaje utilizado será mayormente geométrico. Además, con el propósito de la tematización del esquema de recta tangente (Galindo Illanes et al., 2022) se consideran aplicaciones económicas, relacionando el concepto de pendiente de la recta secante con el de costo medio y el concepto de costo marginal como la aproximación de los costos medios calculados, destacando su equivalencia con la pendiente de la recta tangente.

En la sesión presencial 3, se considera la Tarea SP3 que relaciona la pendiente de la recta tangente a una curva con la derivada de la función en el punto de tangencia. El propósito es consolidar en el estudiantado el concepto de derivada puntual como límite de pendientes de rectas secantes, conociendo el proceso de la identificación de la tendencia de las pendientes de las rectas secantes con la derivada de la función en el punto de tangencia, (Orts Muñoz et al., 2016). En la sesión de trabajo autónomo (Tarea TA2) se consolida la interpretación geométrica de la derivada, fortaleciendo el vínculo entre la recta tangente y la derivada en un punto.

La sesión presencial 4, articula la derivada de una función en un punto y su función derivada. Para ello se considera la Tarea SP4 que promueve el tránsito entre las representaciones gráfica, tabular y analítica de  $f'$ , la expresión simbólica de la función  $f(x)$  es conocida y se construye la función que cumplen todas las pendientes de las rectas tangentes, ésta corresponde a la función simbólica de  $f'(x)$  (Font, 2005), entre los ejercicios desarrollados se considera el problema propuesto por Galindo et al. (2022).

En la sesión presencial 5, se generaliza la función derivada como la función que a cada valor le hace corresponder la pendiente de la recta tangente a la gráfica de  $f$  en el punto  $(x, f(x))$ . Se espera que el estudiante interprete la función derivada  $f'(x)$  como la función cuyas imágenes,  $y_0 = f'(x_0)$ , corresponden a las pendientes de las rectas tangentes a la función  $f$  en  $x_0$ , a través de la Tarea SP5 que corresponde a la manipulación de un *applet* de *GeoGebra*.

A continuación, se consideran ejemplos de algunas tareas realizadas durante la semana 1:

## TAREA SESIÓN PRESENCIAL 1

### CÁLCULO APLICADO A LOS NEGOCIOS

**Objetivo de la acción didáctica:** Obtención de la pendiente de la recta tangente mediante aproximaciones por la pendiente de rectas secantes.

**Tiempo de duración:** 80 minutos.

- i. Problema 1: 30 minutos.

- ii. Problema 2: 10 minutos.
- iii. Problema 3: 10 minutos.
- iv. Problema 4: 10 minutos.
- v. Reflexión y cierre por problema: 20 minutos.

**PROBLEMA 1.** Sea  $f(x) = x^2$  una función real de variable real. Determine la pendiente de las rectas secantes que contiene a los puntos  $P(-1,1)$  y  $Q(x, f(x))$ .

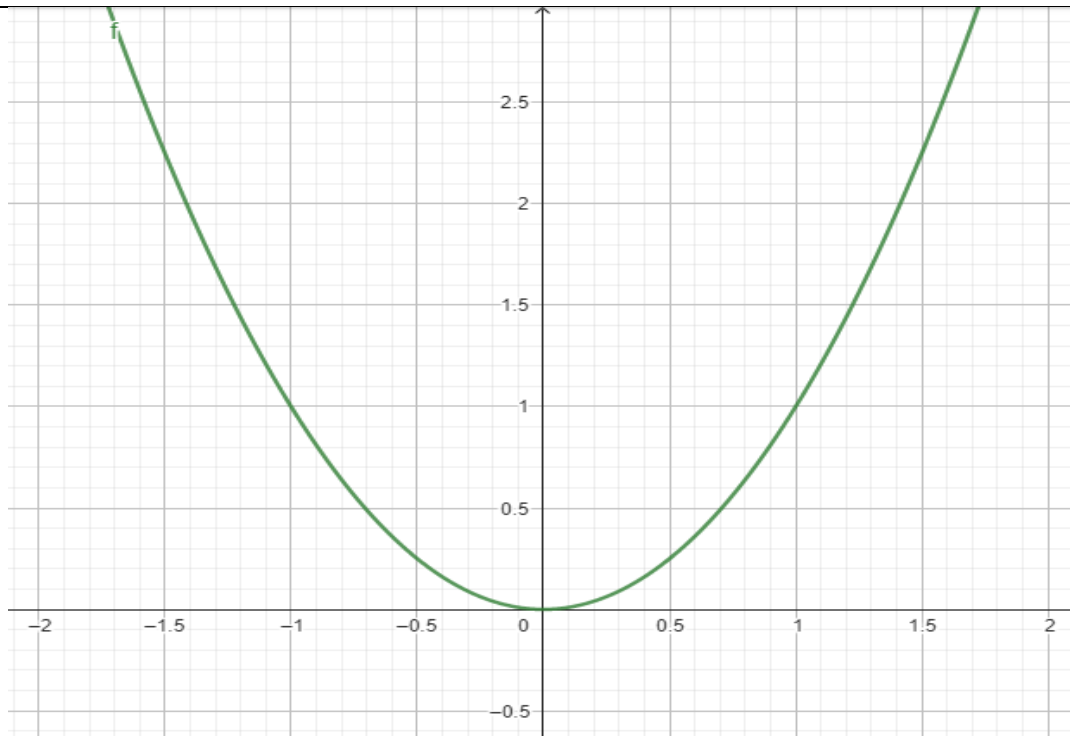
$Q(x, f(x))$	(1,1)	(0.5,0.25)	(-0.5,0.25)
<i>Pendiente PQ</i>			

Aproximándose al *Punto P* por la derecha:

- b) ¿Cuál es el valor aproximado de la *Pendiente de la recta PQ* cuando el *Punto Q* se aproxima a *P* por la derecha?
- c) Ahora, plantea dos nuevos puntos que se aproximen al *Punto P* por la derecha y calcula las respectivas *Pendientes de las rectas PQ*.

$Q(x, f(x))$	( , )	( , )
<i>Pendiente PQ</i>		

- d) Grafique las rectas secantes a  $f$ , considerando los puntos propuestos en a) y b).



$Q(x, f(x))$	$(-2, 4)$	$(-1.5, 2.25)$	$(-1.3, 1.69)$
<i>Pendiente PQ</i>			

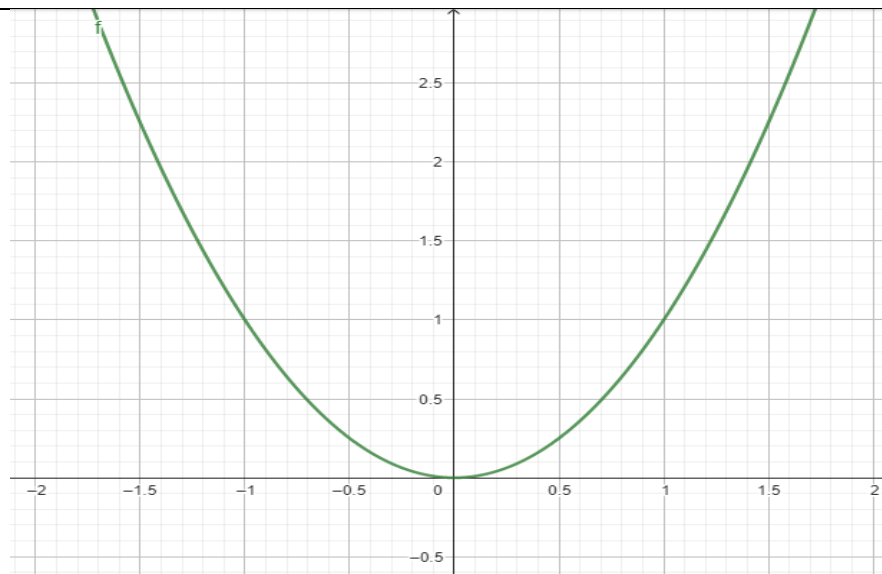
Aproximándose al *Punto P* por la izquierda:

- e) ¿Cuál es el valor aproximado de la *Pendiente de la recta PQ* cuando el *Punto Q* se aproxima a *P* por la izquierda?
- f) Ahora, plantea dos nuevos puntos que se aproximen al *Punto P* por la izquierda y calcula las respectivas *Pendientes de las rectas PQ*

$Q(x, f(x))$	$( \quad , \quad )$	$( \quad , \quad )$
<i>Pendiente PQ</i>		

- g) Grafique las rectas secantes a  $f$ , considerando los puntos propuestos en e) y f).





Ahora, concluya respecto a las gráficas elaboradas.

¿Entre qué valores debe estar la pendiente de la recta tangente a la curva en el *Punto P*?

**PROBLEMA 2.** Utilice su teléfono para escanear el siguiente código QR o acceda al siguiente link <https://ggbm.at/pPAJ6Zf8>.



Fije el punto *A* sobre la curva y aproxime el punto *B* (perteneciente a la gráfica de la función) *f*, hacia el punto *A*. Explique con sus palabras por qué puede determinar la pendiente de la recta tangente *f* en el punto de abscisa **4** y determine su valor.

**Figura 13.** Tareas sesión presencial 1

Fuente: Elaboración de las autoras

## TAREA SESIÓN PRESENCIAL 2

### CÁLCULO APLICADO A LOS NEGOCIOS

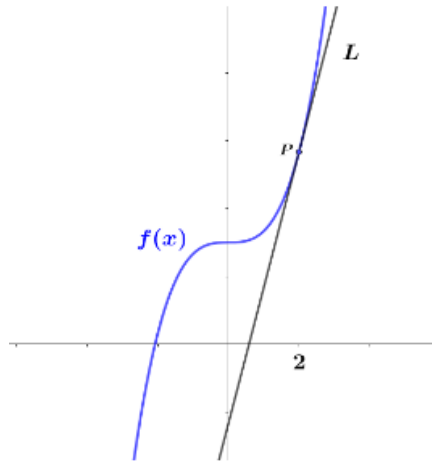
**Objetivo de la acción didáctica:** Interpretación geométrica de la derivada en un punto particular.

**Tiempo de duración:** 80 minutos.

- Problema 1: 20 minutos.

- Problema 2: 40 minutos.
- Reflexión de cierre: 20 minutos.

**PROBLEMA 1.** Considerando el gráfico de la función  $f$ . Determine la derivada de  $f$  en el punto de abscisa  $2$ , si se sabe que la recta  $L$  es tangente a la gráfica de  $f$  en el punto  $P$  de abscisa  $2$  y ésta corta al eje  $x$  en  $7/12$  y corta al eje  $y$  en  $-7/3$ . Justifique adecuadamente.



**PROBLEMA 2.** Sea  $f(x) = x^2$  una función real de variable real.

- g) Con apoyo de *Symbolab*, obtenga la pendiente de la recta tangente a la gráfica de  $f$  en el punto de abscisa  $x_0 = 1$ , es decir,  $m_T = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
- h) ¿Cuál es el valor de la derivada de la función  $f$  en el punto de abscisa  $x_0 = 1$ ?
- i) Complete la siguiente tabla.

$x_0$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f'(x_0)$											

- j) Basado en la tabla anterior, represente los puntos  $(x_0, f'(x_0))$  en un plano cartesiano.
- k) Trace la gráfica de la curva que contiene los puntos  $(x_0, f'(x_0))$ .

Modele la curva antes dibujada para cualquier punto y explique en propias palabras lo que ella representa.

**Figura 14.** Tareas sesión presencial 2

Fuente: Elaboración de los autores

## TAREA SESIÓN PRESENCIAL 4

### CÁLCULO APLICADO A LOS NEGOCIOS

**Objetivo de la acción didáctica:** Aplicación de la función derivada

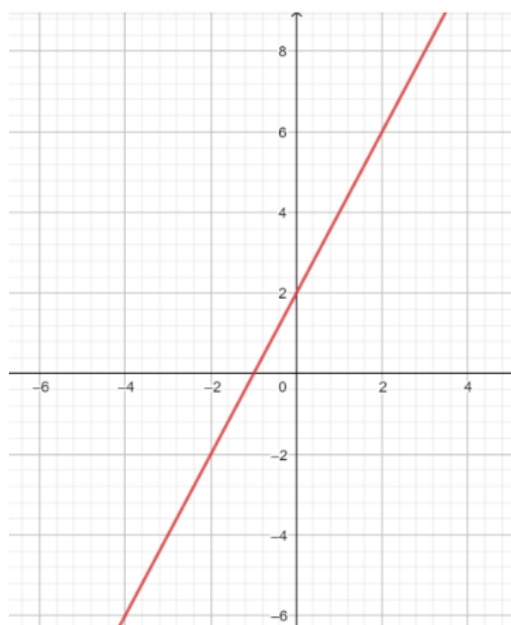
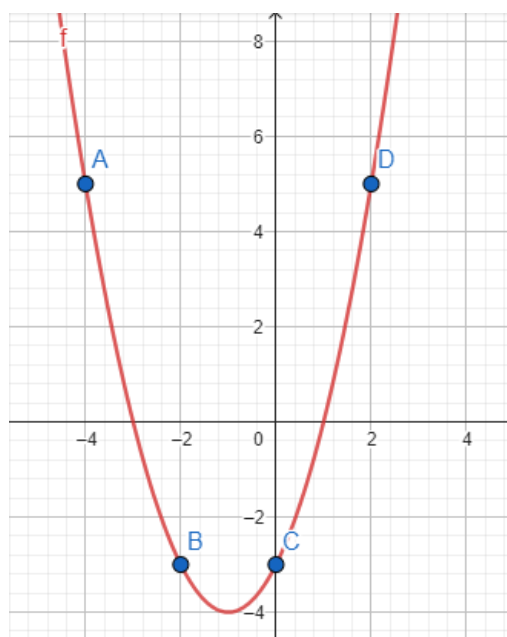
**Tiempo de duración:** 60 minutos.

- Problema 1: 20 minutos.
- Problema 2: 20 minutos.
- Problema 3: 20 minutos.
- Reflexión y cierre por problema: 20 minutos.

#### PROBLEMA 1.

Se sabe que la gráfica de una función  $f$  es:

y la gráfica de su función derivada  $f'$  es:



- Observando el gráfico de la función derivada, determine:  $f'(-4)$ ,  $f'(-2)$ ,  $f'(0)$  y  $f(2)$
- Determine la pendiente de la recta tangente a la función en  $x = -4$ ,  $x = -2$  y  $x = 2$ .
- Determine la ecuación de la recta tangente a la función en:  $A(-4, 5)$ ,  $B(-2, -3)$ ,  $C(0, -3)$  y  $D(2, 5)$
- Determine donde la  $f'(x)$  es: positiva, negativa e igual a cero.

**PROBLEMA 2.** Realizar el cálculo de las funciones derivadas utilizando la definición de límite:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

a)  $f(x) = x^2$

Utilice su teléfono para escanear el siguiente código QR o acceda al siguiente link

<https://www.geogebra.org/m/nymrqbbn>



Para los siguientes ítems utilice el applet anterior y cambie la función según corresponda.

b)  $f(x) = x^3$

c)  $f(x) = x^2 + 1$

d)  $f(x) = x^2 + 2x$

**Figura 15.** Tareas sesión presencial 4

Fuente: Elaboración de los autores

## TAREA TRABAJO AUTÓNOMO 2

### CÁLCULO APLICADO A LOS NEGOCIOS

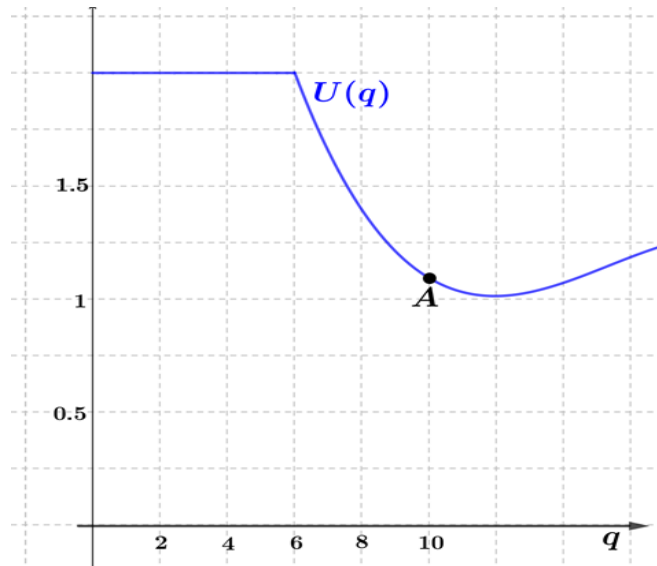
**Objetivo de la acción didáctica:** Aplicación de la recta tangente a problemas económicos. Aplicación de la interpretación geométrica de la derivada.

**PROBLEMA 1.** Considere la siguiente tabla que relaciona la **Utilidad (U)** (en unidades monetarias) y la cantidad producida y vendida (**q**) de un emprendimiento familiar de cajas de chocolates artesanales.

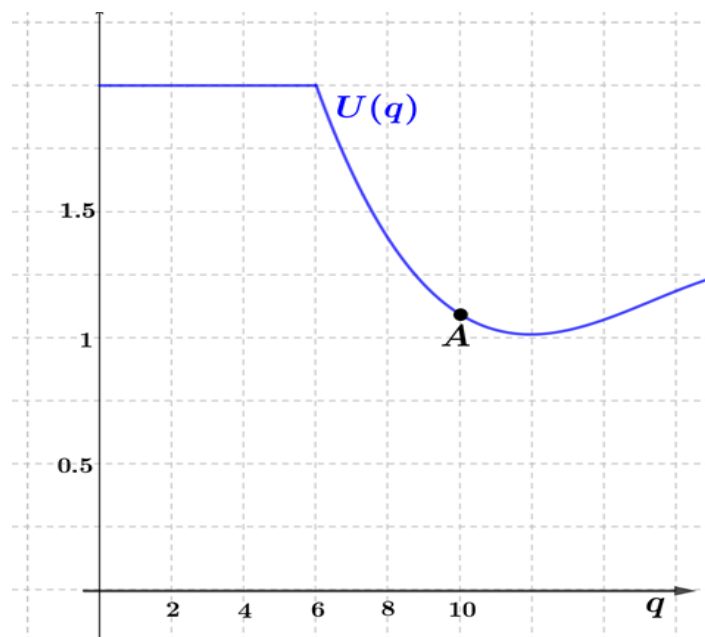
Tabla de valores				
$q$	9.7	9.8	9.9	10
$U(q)$	1.53	1.31	1.17	1.07

- a) Esboce las gráficas de las siguientes rectas secantes a la gráfica de  $U$  que contienen a los siguientes puntos y calcule en cada caso la utilidad media.

A(9.7, 1.53)	P (10, 1.07)	Utilidad media ( $U_{me}$ ) =
--------------	--------------	-------------------------------

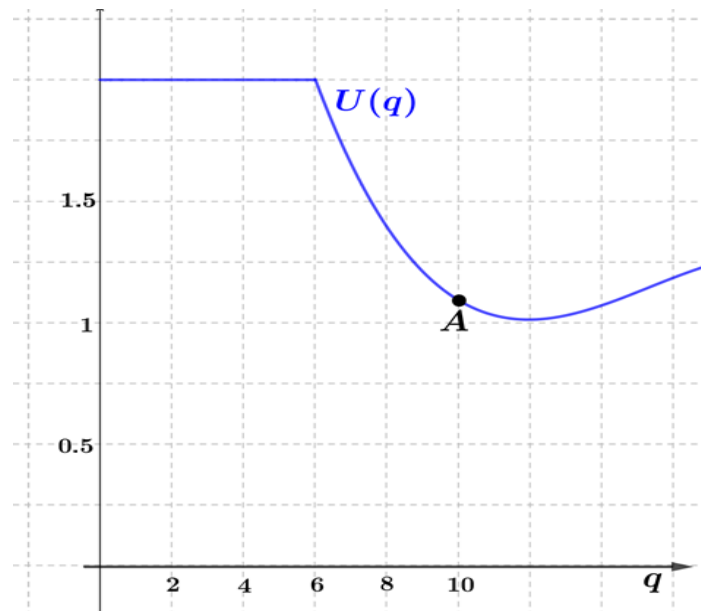


B(9.9, 1.17)	P (10, 1.07)	Utilidad media ( $U_{me}$ ) =
--------------	--------------	-------------------------------



- b) Interprete los valores encontrados.

c) Esboce la recta tangente a la gráfica de la función  $d$  en el punto  $P(10,1.07)$ .



d) Explique de qué forma usted podría aproximar geoméricamente la Utilidad Marginal ( $U_{mg}$ ) en el *Punto P*.

e) ¿Cuál es el valor aproximado de la Utilidad Marginal ( $U_{mg}$ ) en el *Punto P*?

**Figura 16.** Tareas sesión Trabajo Autónomo TA2

Fuente: Elaboración de los autores.

A continuación, se presenta la temporalización y la planificación de las semanas 2, 3, 4 y 5:

**Tabla 17.** Semana 2: Temporalización y Planificación de los problemas de cálculo de tasas instantáneas de cambio y de tasas instantáneas de variación

Sesión	Acción didáctica	Objetivo de la acción didáctica	Lenguajes	Configuraciones
6	Tarea SP6	Introducción a las tasas instantáneas de cambio y tasas instantáneas de variación, utilizando funciones reales y aplicaciones económicas.	Gráfico Simbólico Tabular	Manipulativas Computacional
7	Tarea SP7	Articulación entre la recta tangente en un punto, y las tasas instantáneas de cambio y de variación, utilizando aplicaciones físicas y económicas.	Tabular Gráfica Simbólico Descriptivo	Computacionales Algebraica
8	Tarea SP8	Articulación entre las tasas instantáneas de cambio y de	Gráfico	Computacionales

		variación, y la derivada de una función en un punto, utilizando aplicaciones físicas y económicas.	Simbólico Descriptivo	
9	Tarea SP9	Generalización de la derivada de una función en un punto y su función derivada (definición algebraica de la derivada como el límite de la razón de cambio)	Tabular Simbólico	Computacionales Algebraica
<b>Sesión Trabajo autónomo</b>	<b>Acción didáctica</b>	<b>Objetivo de la acción didáctica</b>	<b>Lenguajes</b>	<b>Configuraciones</b>
3	Tarea TA3	Estudio de manuscrito teórico-práctico del curso, que considera el cálculo de incrementos de funciones económicas.	Simbólico Gráfica	Computacional Algebraica
4	Tarea TA4	Estudio de manuscrito teórico-práctico del curso, que considera el cálculo de tasas promedios e instantáneas de funciones económicas utilizando derivadas.	Tabular Gráfica Simbólico Descriptivo	Computacionales Algebraica

Fuente: Elaboración de los autores

Después de robustecer la idea gráfica de derivada y su relación con la función, considerado un elemento clave para la comprensión de la medida de variación (Ariza Cobos & Linares Ciscar, 2009), es fundamental construir el concepto de la derivada como una razón de cambio, con el fin de entender las aplicaciones del cálculo diferencial (Portillo-Lara et al., 2019).

En la sesión presencial 6 (Tarea SP6) y en las sesiones de trabajo autónomo (Tarea TA3) se propone a los estudiantes resolver tareas que permiten introducir el concepto de incremento y de tasas de cambio, de funciones reales y económicas, utilizando configuraciones computacionales, a través del uso de un applet de *GeoGebra* que ayuda a comprender la variación en sus diferentes niveles cognitivos (Portillo-Lara et al., 2019), el lenguaje utilizado será mayormente geométrico y simbólico.

En la sesión presencial 7, se considera la Tarea SP7 que relaciona las tasas instantáneas de cambio y de variación, con la pendiente de la recta tangente a una curva, con el propósito de

desencapsular la recta tangente a través de tareas aplicadas a funciones económicas y físicas, favoreciendo la comprensión del concepto de la derivada como una razón de cambio.

La sesión presencial 8, se considera la Tareas SP8 que articula las tasas instantáneas de cambio y de variación, con la derivada de una función en un punto. Cuyo propósito es promover el tránsito entre las representaciones gráfica, tabular y analítica de  $f'$  como razón de cambio. A través de aplicaciones económicas y físicas.

En la sesión presencial 9, que generaliza la función derivada como la función que a cada valor le hace corresponder la razón de cambio de  $f$  en el punto  $(x, f(x))$ . Se espera que el estudiante interprete la función derivada  $f'(x)$  como la función cuyas imágenes,  $y_0 = f'(x_0)$ , corresponden a las razones de cambio de la función  $f$  en  $x_0$ , a través de la Tarea SP9 que corresponde a la manipulación de unos applets de *GeoGebra*.

A continuación, se presenta la temporalización y la planificación de la semana 3:

**Tabla 18.** Semana 3: Temporalización y Planificación de los problemas de cálculo de derivadas a partir de reglas y teoremas de derivación

Sesión Presencial	Acción didáctica	Objetivo de la acción didáctica	Lenguajes	Configuraciones
10	Tarea SP10	Definición del álgebra de las derivadas	Simbólico	Algebraica
11	Tarea SP11	Definición de las reglas de derivadas para las funciones: <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>f(x) = x^n, \forall n \in \mathbb{R}</math>, <math>x^n</math> y <math>x^{-n}</math> bien definidas</li> <li>• <math>f(x) = e^x, \forall x \in \mathbb{R}</math></li> <li>• <math>f(x) = \ln(x), \forall x &gt; 0</math></li> </ul> Aplicación del álgebra de las derivadas y de las reglas de derivación.	Simbólico Gráfico	Computacional Algebraica
12	Tarea SP12	Definición de las derivadas de las funciones exponencial y logaritmo, y de la regla de la cadena, aplicada a funciones polinómicas, exponenciales y logarítmicas.	Simbólico Gráfico	Computacional Algebraica



13	Tarea SP13	Aplicación de las reglas de derivadas para el cálculo de marginales.	Simbólico	Algebraica
<b>Sesión Trabajo autónomo</b>	<b>Acción didáctica</b>	<b>Objetivo de la acción didáctica</b>	<b>Lenguajes</b>	<b>Configuraciones</b>
5	Tarea TA5	Estudio de manuscrito teórico-práctico del curso, que considera el cálculo de derivadas utilizando el álgebra de derivadas y las reglas de derivación.	Simbólico	Computacional Algebraica
6	Tarea TA6	Estudio de manuscrito teórico-práctico del curso, que considera el uso de las reglas de derivadas para el cálculo de marginales.	Simbólico	Computacional Algebraica

Fuente: Elaboración de los autores

Después de robustecer la interpretación geométrica de la derivada y el concepto de la derivada como razón de cambio, resulta beneficioso establecer el álgebra de la función derivada y las reglas de derivadas para las funciones establecidas en el programa de la asignatura.

La sesión presencial 10 (Tarea SP10) tiene el propósito de establecer el álgebra de la función derivada. Para definición de estas, se utilizará un lenguaje mayormente simbólico y la configuración será algebraica.

Las sesiones presenciales 11 y 12 (Tarea SP11, Tarea SP12, Tarea TA5) tienen por propósito, establecer las reglas de derivadas y aplicarlas junto álgebra de la función derivada. Si bien, al establecer las reglas de derivadas, el lenguaje será mayormente simbólico, también se utilizará un lenguaje gráfico, a través de un applet de GeoGebra que permitirá visualizar gráficamente la función derivada. Además, se utilizará *Symbolab* para verificar los resultados de los cálculos algebraicos involucrados en la obtención de las funciones derivadas.

En la sesión presencial 13 (Tarea SP13) y la sesión de trabajo autónomo (Tarea TA6) se propone a los estudiantes aplicar el álgebra de la función derivada y las reglas de derivación en el cálculo de funciones marginales (costo marginal, ingreso marginal y utilidad marginal), utilizando configuraciones algebraicas y un lenguaje simbólico.

**Tabla 19.** Semana 4: Temporalización y Planificación de los problemas de aplicaciones de la derivada para el cálculo de máximos y mínimos, y análisis de monotonía de funciones reales y económicas

<b>Sesión Presencial</b>	<b>Acción didáctica</b>	<b>Objetivo de la acción didáctica</b>	<b>Lenguajes</b>	<b>Configuraciones</b>
14	Tarea SP14	Articulación de la interpretación geométrica de la derivada y el criterio de la primera derivada para extremos relativos.	Gráfico Simbólico	Computacional
15	Tarea SP15	Aplicación del criterio de la primera derivada a problemas clásicos de optimización de funciones reales y económicas.	Gráfico Simbólico	Algebraica
16	Tarea SP16	Aplicación de la primera derivada al análisis de la monotonía de funciones reales y económicas, orientada al trazado de curvas.	Simbólico Gráfico	Computacional Algebraica
17	Tarea SP17	Aplicación del criterio de la segunda derivada a problemas clásicos de optimización de funciones reales y funciones económicas.	Gráfico Simbólico	Algebraica
<b>Sesión Trabajo autónomo</b>	<b>Acción didáctica</b>	<b>Objetivo de la acción didáctica</b>	<b>Lenguajes</b>	<b>Configuraciones</b>
7	Tarea TA7	Estudio de manuscrito teórico-práctico del curso, que considera la aplicación del criterio de la primera y segunda derivada a problemas clásicos de optimización de funciones reales y económicas.	Simbólico Gráfico	Computacional Algebraica
8	Tarea TA8	Estudio de manuscrito teórico-práctico del curso, que considera la aplicación de la primera derivada para el análisis de la monotonía de funciones reales y económicas.	Simbólico Gráfico	Computacional Algebraica

Fuente: Elaboración de los autores

Después de fortalecer la interpretación geométrica de la derivada en la semana 1, el concepto de la derivada como razón de cambio en la semana 2, y establecer el álgebra de la función derivada y las reglas de derivadas en la semana 3. En la semana 4, se pretende establecer

los criterios de la primera y segunda derivada para la optimización de funciones reales y económicas, además de aplicar la primera derivada al trazado de curvas de funciones reales y económicas.

En la sesión presencial 14 (Tarea SP14) se establece una articulación entre la interpretación geométrica de la derivada y el criterio de la primera derivada, a través del análisis de la monotonía de una función real. Utilizando un lenguaje mayormente gráfico y en menor medida simbólico. La configuración será computacional gracias a la integración de un applet de GeoGebra.

La sesión presencial 15 y 16 (Tarea SP15, SP16) y trabajo autónomo (Tarea TA7 y Tarea TA8) tienen como propósito aplicar el criterio de la primera derivada a problemas clásicos de optimización de funciones reales y económicas. Además, se aplicará la primera derivada para el análisis de la monotonía de funciones reales y económicas. Su lenguaje será gráfico y simbólico y las configuraciones serán computacionales y algebraicas, a través de un applet de Geogebra.

La sesión presencial 17 (Tarea SP17) y trabajo autónomo (Tarea TA7) tienen como propósito aplicar el criterio de la segunda derivada a problemas clásicos de optimización de funciones reales y económicas. Su lenguaje será gráfico y simbólico, y las configuraciones serán algebraicas.

**Tabla 20.** Semana 5: Temporalización y Planificación de los problemas de aplicaciones de la derivada para el cálculo de máximos y mínimos, y análisis de concavidad de funciones reales y económicas

<b>Sesión Presencial</b>	<b>Acción didáctica</b>	<b>Objetivo de la acción didáctica</b>	<b>Lenguajes</b>	<b>Configuraciones</b>
18	Tarea SP18	Aplicación de la segunda derivada al análisis de la concavidad de funciones reales y económicas, orientada al trazado de curvas.	Geométrico Gráfico	Computacional
19	Tarea SP19	Aplicación de la derivada a la optimización del costo en la construcción de una caja sin tapa.	Descriptivo	Manipulativa
20	Tarea SP20	Modelamiento de la función costo para la construcción de una caja sin tapa.	Geométrico Simbólico	Algebraica
21	Tarea SP21	Aplicación de la derivada a la optimización del costo en la	Simbólico	Computacional Algebraica

construcción de una caja sin tapa.				
Sesión Trabajo autónomo	Acción didáctica	Objetivo de la acción didáctica	Lenguajes	Configuraciones
7	Tarea TA9	Estudio de manuscrito teórico-práctico del curso, que considera la aplicación de la segunda derivada para el análisis de la concavidad de funciones reales y económicas.	Simbólico Gráfica	Computacional Algebraica
8	Tarea TA10	Estudio de manuscrito teórico-práctico del curso, que considera la aplicación de la primera derivada para el análisis de la monotonía de funciones reales y económicas.	Simbólico Gráfica	Computacional Algebraica

Fuente: Elaboración de los autores.

Después de establecer como aplicación de la primera derivada, la optimización y el análisis de la monotonía, de funciones reales y económicas, y como aplicación de la segunda derivada la optimización de funciones reales y económicas. La semana 5 tienen como propósito, por un lado, mostrar la aplicación de la segunda derivada para el análisis de la concavidad de funciones reales y económicas en el trazado de curvas (SP18, TA9 y TA10), y, por otro lado, consolidar de manera manipulativa la aplicación de los criterios de primera y segunda derivada para la optimización de una función costo (SP19, SP20, SP21). Utilizando un lenguaje mayormente gráfico y geométrico, y en menor medida simbólico y descriptivo. La configuración será computacional, manipulativa y algebraica.

### 5.9 INSTRUMENTOS DE COLECTA DE DATOS

Al finalizar cada campo de problemas se considera un instrumento evaluativo que permitirá realizar un análisis exploratorio del aprendizaje de los estudiantes. A continuación, por motivos de espacio se presentan cuatro tareas representativas de cada instrumento aplicado. A continuación, se presenta una de las preguntas del instrumento que se aplicará al finalizar el campo de problemas 1, éste nos proporcionará información en torno al conocimiento especializado del estudiante sobre tangentes, ya que durante el desarrollo deberá llevar a cabo la tematización del esquema de recta tangente y concluir el significado geométrico de la derivada en un punto para dar respuesta al enunciado (Figura 17).

**PROBLEMA 2.** Se sabe que la función **Ingreso (I)** está dada por  $I(q) = q^2$ , con  $q \geq 0$ , donde  $q$  representa unidades.

Se sabe que la gráfica de la función **Ingreso (I)** es:

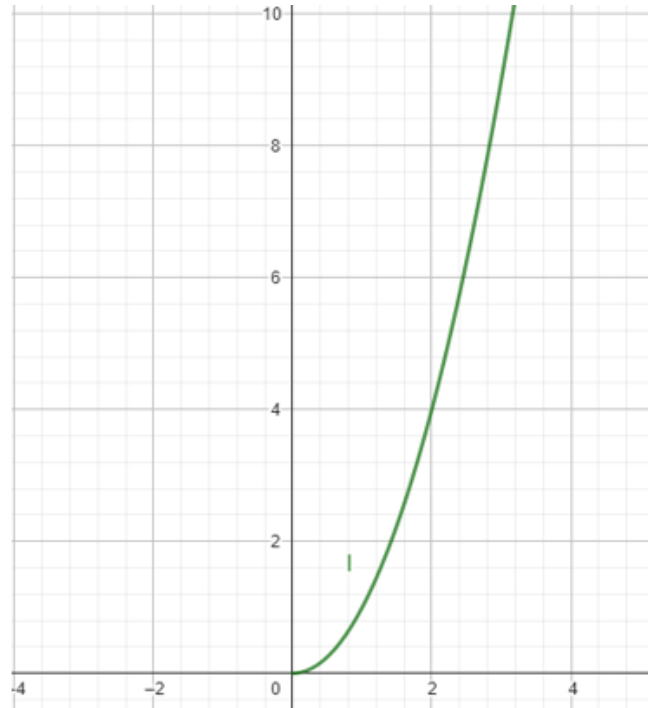


Gráfico 1: Función **Ingreso (I(q))**

y la gráfica de su función derivada  $I'(q)$  (Ingreso Marginal) es:

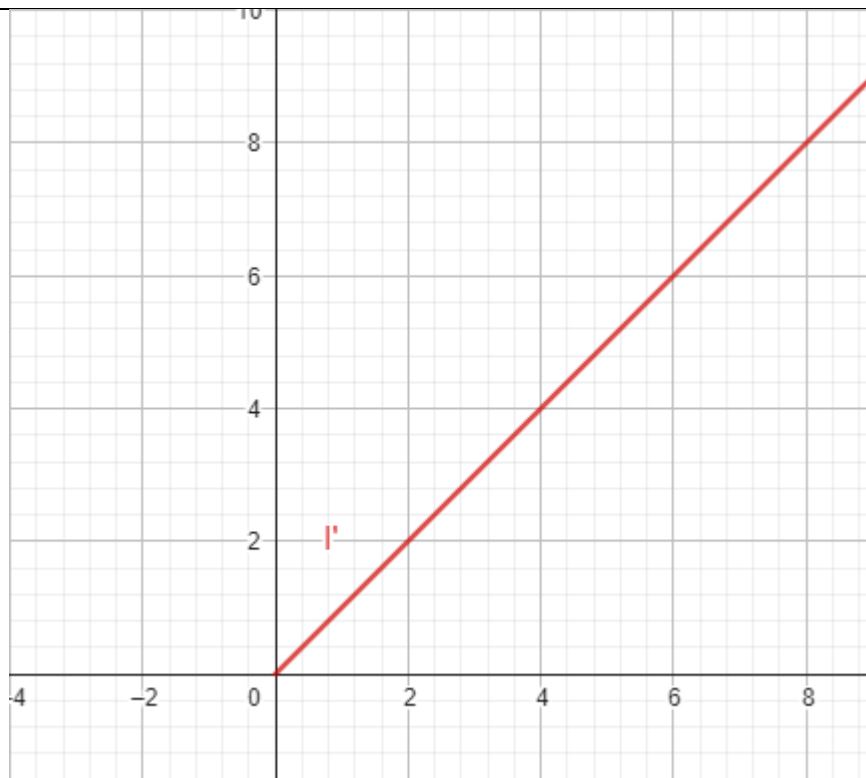


Gráfico 2: Función *Ingreso Marginal* ( $I'(q)$ )

- Determine la pendiente de la recta tangente en  $q = 1$ ,  $q = 4$  y  $q = 0$ .
- Determine la ecuación de la recta tangente a la función en  $q = 4$  y  $q = 0$ .
- Determine dónde el **Ingreso Marginal** es positivo, negativo o igual a 0. Considerando que se trabaja con unidades.
- Explique con sus propias palabras el comportamiento de la función Ingreso y su relación con la gráfica del ingreso marginal.

**Figura 17.** Problema 2 que se aplicará a los estudiantes al finalizar el campo de problemas sobre tangente (CP1)

Fuente: Elaboración de los autores.

En este problema el estudiante debe analizar los gráficos estableciendo la información que permitirá determinar las pendientes de las rectas tangentes solicitadas y la posterior construcción de éstas.

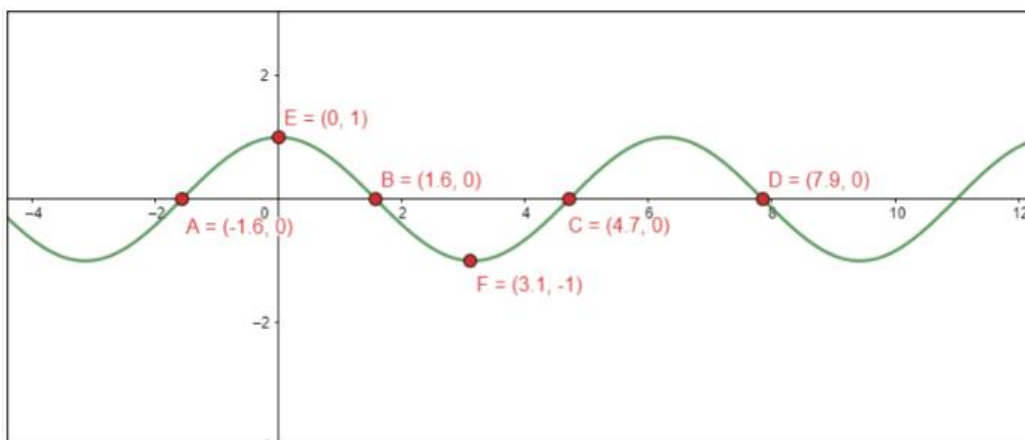
Por ejemplo:

- Para determinar la pendiente de la recta tangente en  $q = 4$ , el estudiante debe observar el gráfico 2 y establecer que la pendiente de la recta tangente es

$I'(4) = m_{tg} = 8$ . Finalmente, el estudiante puede construir la ecuación de la recta tangente ( $I = 8q - 16$ ), observando del gráfico 1 que  $I(4) = 16$ .

A continuación, se presenta una de las preguntas del instrumento que se aplicará al finalizar el campo de problemas 4. El cual nos permite analizar la comprensión del estudiante en torno a la representación gráfica de la función derivada  $f'$ , a través del criterio de la primera derivada para extremos relativos. Ver Figura 18.

**PROBLEMA 1.** Considere la función  $f$ , cuyo gráfico de su función derivada ( $f'$ ) es el siguiente:



Determine si las siguientes alternativas son verdaderas o falsa, justificando adecuadamente:

- Los puntos A, C y D son máximos relativos.
- El punto F representa un mínimo relativo.
- El punto E representa un máximo relativo.
- La función alcanza un máximo relativo en B.

**Figura 18.** Problema 1 que se aplicará a los estudiantes al finalizar el campo de problemas aplicaciones de la derivada para el cálculo de máximos y mínimos, y análisis de gráficas de funciones (CP4)

Fuente: Elaboración de los autores

En este problema se espera que el estudiante aplique el criterio de la primera derivada para justificar la alternativa que seleccionará. Para ello, debe analizar el gráfico de  $f'$ .

Por ejemplo:

- En A, B, C y D,  $f'(x) = 0$ , es decir son puntos críticos y posibles extremos relativos.

- Entre  $]A, B[$ ,  $f'(x) \geq 0$ , es decir, la función  $f$  es creciente. Luego, entre  $]B, C[$ ,  $f'(x) \leq 0$ , es decir, la función  $f$  es decreciente. El estudiante debe concluir que en  $B$  la función alcanza un máximo relativo justificando a través del criterio de la primera derivada para extremos relativos.

Después de aplicar los instrumentos evaluativos, al finalizar la implementación del diseño instruccional, se realizará un análisis de tipo mixto (Johnson & Onwuegbuzie, 2004), por medio de la noción de configuraciones de los objetos primarios del EOS, que nos permitirá realizar un análisis exploratorio, cuantificando la cantidad de acciones correctas (frecuencia) relacionadas a las resoluciones de los estudiantes en los problemas propuestos para cada uno de los objetos primarios. Además, desde el punto de vista cualitativo, será posible identificar las respuestas y argumentos correctos e incorrectos de los estudiantes al resolver las tareas propuestas.

#### 5.10 REFLEXIONES FINALES

El objetivo de ese trabajo fue dar a conocer el diseño instruccional de enseñanza de la derivada para estudiantes universitarios de Ingeniería Comercial en Chile, aplicando algunas herramientas del marco teórico del Enfoque Ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (EOS). El diseño metodológico considera diversas configuraciones ontosemióticas en las situaciones-problemas sobre tangentes, cálculo de tasas instantáneas de cambio y tasas instantáneas de variación, aplicaciones de la derivada para el cálculo de máximos y mínimos, análisis de gráficas de funciones, y el cálculo de derivadas a partir de reglas y teoremas de derivación. Además, integra las TIC en las diversas actividades, favoreciendo el tránsito entre los tipos de lenguajes escrito, numérico, gráfico y simbólico, permitiendo a los estudiantes construir de manera progresiva el significado de la derivada. El diseño metodológico que se implementará en la asignatura de Cálculo Aplicado a los Negocios en una universidad chilena espera superar algunas de las dificultades de aprendizaje de los estudiantes de Ingeniería Comercial. Como línea futura, la implementación del curso será valorado a partir de la herramienta Criterios de Idoneidad Didáctica (Breda et al., 2018), a fin de medir el grado en que el proceso de instrucción es de calidad y posibilita el aprendizaje de los alumnos.





## CAPÍTULO 6. ARTÍCULO CIENTÍFICO V

---

Una vez realizado el diseño del proceso instruccional de la derivada para futuros ingenieros comerciales, explicado en el Capítulo 5 de esa memoria de tesis, este capítulo tiene como objetivos presentar la implementación de un proceso de instrucción para la enseñanza de la derivada por medio de la selección de los campos de problemas, lenguaje, procedimientos, enunciados, propiedades y argumentos utilizados usualmente en la enseñanza de la derivada para estudiantes de Ingeniería Comercial, y analizar el impacto del proceso de instrucción implementado en el aprendizaje de la derivada por los estudiantes de Ingeniería Comercial, evaluando y comparando el significado personal de los estudiantes con el significado institucional implementado (Objetivo específico 5). Los resultados indicaron que la propuesta instruccional de enseñanza de la derivada superaba algunas de las dificultades de aprendizaje de los estudiantes, evidenciadas en diversas investigaciones. En particular, las dificultades de los estudiantes de Ingeniería Comercial en torno a la interpretación geométrica de la derivada, la optimización de funciones económicas y la aplicación de la derivada a funciones marginales. Los resultados fueron difundidos, en julio del 2023, en una comunicación en la 36 Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (Ciudad de México) y, en agosto del 2023, se acepta el artículo científico lo cual publicará los resultados en enero del 2024.

### 6.1 ARTÍCULO CIENTÍFICO V (EN PRENSA)

Galindo Illanes, M. K.; Breda, A. (en prensa). Proceso de instrucción de la derivada aplicado a estudiantes de Ingeniería Comercial en Chile. *Uniciencia*, Published: Jan/31/2024.

### 6.2 BASES E INDEXACIÓN DEL PERIODICO

Segundo la MIAR, la revista *Uniciencia* pertenece al ámbito de Humanidades y Ciencias Sociales en general, específicamente en el campo académico de Métodos Matemáticos y Estadísticos en Ciencias Sociales. Está indexada en ESCI, Scopus, DIALNET, DOAJ, Aquatic Science & Fisheries Abstracts (ASFA) y evaluada en LATINDEX. Catálogo v2.0 (2018 - actual), Directory of Open Access Journals, ERIHPlus, LATINDEX. Catálogo v1.0 (2002-2017) y Red Iberoamericana de Innovación y conocimiento científico (REDIB). Pose un ICDS de 10.0 en el año 2021. Sus métricas en SJR es de 0,24 (Q3) en el año 2022 y CiteScore de 1,1 (Q2) en el año de 2022 y en Journal Citation Indicator (JCI) de ESCI de WoS es de 0.24 en el año 2022. Publicación realizada en el marco del proyecto PID2021-127104NB-I00 financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033/ y por "FEDER Una manera de hacer Europa".

### 6.3 RESUMEN DEL ARTÍCULO CIENTÍFICO V

El [objetivo] de ese artículo es presentar los resultados de la implementación de un diseño instruccional de enseñanza de la derivada para estudiantes universitarios de la carrera de Ingeniería Comercial en Chile. [Metodología] Los participantes del estudio son noventa estudiantes de la asignatura de Cálculo Aplicado a los Negocios de una universidad chilena. El diseño metodológico, basado en las herramientas del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemáticas, considera diversas configuraciones ontosemióticas en las situaciones-problemas sobre tangentes, el cálculo de derivadas a partir de reglas y teoremas de derivación, aplicaciones de la derivada para el cálculo de máximos y mínimos y análisis de gráficas de funciones. Además, integra las TIC en las diversas actividades. [Resultados] Los resultados indican que la propuesta instruccional de enseñanza de la derivada supera algunas de las dificultades de aprendizaje de los estudiantes, evidenciadas en diversas investigaciones. En particular, las dificultades de los estudiantes de Ingeniería Comercial en torno a la concepción euclidiana de la recta tangente; la interpretación de la función derivada y su representación geométrica, la optimización de funciones económicas y la aplicación de la derivada a funciones marginales. [Conclusiones] Se considera que para que ocurra la efectividad de un proceso de enseñanza y aprendizaje de la derivada en una carrera específica, es fundamental que los programas de asignatura y los formadores de los futuros profesionales incorporen, en la instrucción, las configuraciones ontosemióticas de la derivada, sus diferentes campos de problemas y las aplicaciones contextuales junto a los recursos TIC.

Palabras clave: enseñanza de las matemáticas; derivada; proceso de instrucción; TIC; Enfoque Ontosemiótico; formación de ingenieros; Ingeniería Comercial.

### 6.4 ABSTRACT OF THE SCIENTIFIC ARTICLE V

The scientific article whose [objective] is to present the results of the implementation of an instructional design for the teaching of the derivative for undergraduate students of Business Engineering in Chile. [Methodology] The participants of the study are ninety students of Applied Business Calculus at a Chilean university. The methodological design, based on the tools of the Ontosemiotic Approach to Mathematical Cognition and Instruction, consider diverse ontosemiotic configurations in the situations-problems on tangents, the calculation of derivatives from rules and theorems of derivation, applications of the derivative for the calculation of maxima and minima and analysis of function graphs. In addition, it integrates ICT into various activities. [Results] The results indicate that the instructional proposal for teaching

the derivative overcomes some of the student's learning difficulties, as evidenced in various research studies. In particular, the difficulties of Business Engineering students regarding the Euclidean conception of the tangent line; the interpretation of the derivative function and its geometric representation, the optimization of economic functions and the application of the derivative to marginal functions. [Conclusions] It is considered that for the effectiveness of a teaching and learning process of the derivative to occur in a specific career, it is essential that the subject programs and the trainers of future professionals incorporate the ontosemiotic configurations of the derivative, its different problem fields and contextual applications together with ICT resources in the instruction.

Keywords: mathematics education; derivative; instructional process; ontosemiotic approach; engineering education; commercial engineering.

## 6.5 INTRODUCCIÓN

La derivada es fundamental en la formación de los ingenieros, dado que la comprensión de este objeto matemático permite la resolución de una variedad de problemas relacionados al campo de la ingeniería. Ese hecho, ha generado diversos estudios con relación a la complejidad de sus significados, sus múltiples representaciones, los procesos de enseñanza y aprendizaje, la idoneidad del significado de la derivada en los distintos currículos y los significados parciales en los textos universitarios de enseñanza para las ingenierías (Galindo Illanes & Breda, 2023b; Larios et al., 2021; Larios & Jiménez, 2022; Pino-Fan et al., 2016; Rodríguez-Nieto et al., 2022). Trabajar los distintos significados de un objeto matemático es un aspecto propuesto por el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción Matemáticos (EOS, a partir de ahora) (Godino et al., 2007, 2019), para conseguir una mejor comprensión y competencia de los estudiantes y para presentar a los alumnos unas “buenas” matemáticas, lo cual plantea analizar la complejidad de los objetos matemáticos por medio de sus pluri significaciones (significados parciales).

Algunos estudios de la derivada en carreras de Ingeniería Comercial destacan tener presente la relación entre los procesos y conceptos económicos y matemáticos. En particular, se observa un amplio énfasis en los procesos de representación utilizados en el área de microeconomía (Ballard & Johnson, 2004; J. S. Butler et al., 1994; García et al., 2006; Hey, 2005b). También, por las dificultades en la interpretación de situaciones económicas debido a la débil comprensión de los significados matemáticos que las organizan (Ariza Cobos & Linares Ciscar, 2009).

En esta línea, este trabajo forma parte de una investigación más amplia que pretende profundizar en la comprensión de los futuros ingenieros comerciales acerca del objeto matemático derivada en el contexto chileno. Para conseguir dicho objetivo, se ha realizado un estudio en diferentes etapas.

La primera etapa fue un estudio diagnóstico, el cual reveló que los futuros ingenieros comerciales presentan dificultades relacionadas con: a) el concepto de función y la concepción euclidiana de la recta tangente; b) la construcción del significado de recta tangente como límite de rectas secantes; c) la interpretación de la función derivada y su representación geométrica; realizar operaciones para calcular la pendiente de una recta y; d) operar con funciones (Galindo Illanes et al., 2022; Galindo Illanes & Breda, 2022b).

La segunda etapa fue el estudio del tratamiento de la derivada en los programas de las asignaturas de las carreras de Ingeniería Comercial en Chile. Dicho estudio mostró que, si bien la mayor parte de las propuestas curriculares presentan similitudes en la organización de contenidos y en los elementos lingüísticos utilizados para la construcción del objeto derivada, se observan diferencias importantes en la preponderancia de la derivada interpretada como una razón de cambio y en los campos de problemas abordados (Galindo Illanes & Breda, 2022a, 2023a).

La tercera etapa fue el estudio de los significados pretendidos de la derivada en libros de texto para las carreras de Ingeniería Comercial en Chile, el cual evidenció: a) un énfasis en el significado parcial de la derivada como el límite del cociente de incrementos y un predominio del lenguaje simbólico en los argumentos; b) poca presencia de algunos teoremas importantes relacionados a la derivada y; c) falta de una representatividad de las definiciones de la derivada (Galindo Illanes & Breda, 2023b), ya que no abarcaba la complejidad de este objeto matemático.

La cuarta etapa fue el diseño instruccional de un proceso de enseñanza y aprendizaje de la derivada para futuros ingenieros comerciales, estudiantes de la carrera de Ingeniería Comercial de una universidad chilena (Galindo Illanes et al., 2023). Para la construcción del diseño instruccional, se tuvo en cuenta, además de las herramientas teóricas del Enfoque Ontosemiótico (explicadas en la secuencia del texto), los resultados de las etapas del estudio previamente mencionado.

Con base en lo anterior, este trabajo tiene como objetivo presentar los resultados de la implementación de un diseño instruccional de enseñanza de la derivada para futuros ingenieros

comerciales en Chile, estudiantes de la carrera de Ingeniería Comercial de una universidad chilena.

## 6.6 MARCO TEÓRICO

Los desarrollos teóricos propuestos por el EOS, explicados en Godino et al. (2007) y reelaborados recientemente por Godino et al. (2019), tienen como objetivo dar respuesta a algunos problemas generados en el campo de la Educación Matemática. En el EOS, se asume que la actividad matemática es una actividad humana centrada en la resolución de problemas, que acontece en un tiempo-espacio determinado, a través de una secuencia de prácticas. Para ello, el EOS propone las nociones de situación-problema y de práctica matemática que se realiza durante la resolución de estas situaciones-problema. Tales secuencias de prácticas tienen lugar en el tiempo y se suelen considerar, en muchos casos, como procesos. Cuando un sujeto realiza y evalúa una secuencia de prácticas matemáticas, activa un conglomerado formado por situaciones-problemas, lenguajes, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos, articulados en lo que, en términos del EOS, se llama una configuración de objetos primarios Font et al. (2013).

Para explicar cómo emergen los objetos primarios, resulta muy útil la metáfora “subir una escalera”. Cuando subimos una escalera siempre nos estamos apoyando en un pie, pero cada vez el otro pie está en un escalón superior. La práctica matemática la podemos considerar como “subir la escalera”. El escalón en el que nos apoyamos para realizar la práctica usa una configuración de objetos primarios ya conocida, mientras que el escalón superior al que accedemos, como resultado de la práctica realizada, puede generar nuevos objetos primarios que no eran conocidos antes.

En el EOS, Font et al. (2013), se considera que el camino por el cual los objetos matemáticos emergen a partir de las prácticas es complejo y deben ser distinguidos, al menos, dos niveles. En un primer nivel, emergen los objetos primarios y después hay una segunda emergencia que es el resultado de diferentes factores explicados en Font et al. (2013). Se trata de la emergencia de una referencia global asociada a diferentes configuraciones de objetos primarios que permiten realizar prácticas matemáticas en diferentes contextos; lo cual lleva a entender que este objeto secundario se puede definir de diversas formas, representar de formas diferentes, etc. El resultado, según el EOS, es que se considera que hay un objeto, llamado en este artículo derivada, que juega el papel de referencia global de todas las configuraciones.

El EOS también asume el principio de que el conocimiento de un objeto, por parte de un sujeto (ya sea individuo o institución), es el conjunto de funciones semióticas que este sujeto puede establecer en las que el objeto interviene como expresión o contenido. Además, la correspondencia entre un objeto y el sistema de prácticas donde tal objeto interviene se interpreta como el significado de ese objeto (institucional o personal). Para delimitar los significados de un objeto matemático, el EOS propone la herramienta denominada análisis de sistemas de prácticas (personales e institucionales) y las configuraciones de objetos primarios involucradas en ellas (Godino, 2014; Godino & Batanero, 1994).

En Font et al. (2013) y en Rondero y Font (2015) se explica que la noción de complejidad del objeto matemático secundario y la de articulación de los componentes de dicha complejidad juegan un papel esencial en la enseñanza y aprendizaje de dicho objeto. Entender la complejidad del objeto secundario en términos de una pluralidad de significados, es resultado de la visión pragmatista sobre el significado que se asume en el EOS. Desde un punto de vista pragmatista, el significado de un objeto matemático (primario o secundario) se entiende como el conjunto de prácticas en la que dicho objeto interviene de una manera determinante (o no). Un objeto matemático, que se ha originado como un emergente del sistema de prácticas que permite resolver un determinado campo de problemas, con el paso del tiempo queda enmarcado en diferentes programas de investigación. Cada nuevo programa de investigación permite resolver nuevos tipos de problemas, aplicar nuevos procedimientos, relacionar el objeto (y, por tanto, definir) de manera diferente, utilizar nuevas representaciones etc. De esta manera, con el paso del tiempo, aparecen nuevos subconjuntos de prácticas (sentidos) que amplían el significado del objeto secundario.

Para el objeto matemático secundario derivada, Pino-Fan et al. (2011) caracterizan su complejidad mediante nueve configuraciones de objetos primarios: 1) tangente en la matemática griega; 2) variación en la edad media; 3) métodos algebraicos para hallar tangentes; 4) concepciones cinemáticas para el trazado de tangentes; 5) ideas intuitivas de límite para el cálculo de máximos y mínimos; 6) métodos infinitesimales en el cálculo de tangentes; 7) cálculo de fluxiones; 8) cálculo de diferencias; y 9) derivada como límite.

En Pino-Fan et al. (2013) se utilizan estas nueve configuraciones para la reconstrucción del significado global de la derivada, el cual es utilizado para valorar la representatividad del significado pretendido en el currículo de Bachillerato de México. La caracterización de la complejidad de la derivada realizada en Pino-Fan et al. (2011) facilita tener elementos para

diseñar cuestionarios que permiten caracterizar la comprensión de los estudiantes, futuros profesores o profesores en servicio sobre la derivada (Pino-Fan et al., 2015). Galindo Illanes y Breda (2023b), profundizan el estudio de los significados de la derivada en el caso de que este objeto sea enseñado a estudiantes de Ingeniería Comercial. En este estudio, teniendo en cuenta las herramientas del EOS que se acaban de presentar y los estudios previos realizados (pre requisitos para este) en Galindo Illanes et al. (2022, 2023) y Galindo Illanes y Breda (2022b, 2022a, 2023a, 2023b) se busca presentar los resultados de un proceso de instrucción de la derivada aplicado a futuros ingenieros comerciales en Chile.

## 6.7 METODOLOGÍA

En este apartado se explica el contexto del estudio, los instrumentos de recolección de datos y el análisis de los datos.

### 6.7.1 Contexto del estudio y participantes

Participaron en la investigación 90 estudiantes de la carrera de Ingeniería Comercial de la Facultad de Economía y Negocio de una universidad chilena, con edades entre 19 y 20 años. El plan de estudios de Ingeniería Comercial considera la asignatura de Cálculo Aplicado a los Negocios en el tercer semestre académico, y tiene como prerrequisito el curso de Álgebra o Métodos Cuantitativos.

#### *Bases para una propuesta didáctica implementada*

El plan de intervención implementado consideró, para el desarrollo de la enseñanza de la derivada, los siguientes aspectos:

- d) Campos de problema. A partir del significado institucional pretendido y el análisis del significado de referencia de Galindo Illanes y Breda (2023b), la propuesta consideró los campos de problemas sobre: tangentes (CP1), el cálculo de derivadas a partir de reglas y teoremas de derivación (CP2), y aplicaciones de la derivada para el cálculo de máximos y mínimos, y análisis de gráficas de funciones (CP3).
- e) Configuraciones epistémicas. La propuesta consideró las configuraciones epistémicas caracterizadas y utilizadas por Galindo, Breda y Alvarado (2023), estas son:
  - (iv) Configuración Manipulativa, el estudiante trabaja con papel, regla y lápiz. El lenguaje utilizado en esta configuración es el característico de los procedimientos descriptivos y de la geometría analítica.



- (v) Configuración Computacional, el estudiante dispone de notebook o celulares o Tablet, internet, *GeoGebra* (versión gratuita) y código QR. El lenguaje y los procedimientos son de tipo gráfico, geométrico y descriptivo.
  - (vi) Configuración Algebraica, el estudiante dispone de notebook o celulares o Tablet, internet, Software educativos como *Symbolab* (versión gratuita). El lenguaje y procedimientos son de tipo simbólico y tabular.
- f) Trabajo presencial de aula y trabajo autónomo fuera de aula. La trayectoria didáctica consideró sesiones en aula y sesiones fuera del aula, todas dirigidas por el docente de la asignatura. Las sesiones de aula se desarrollaron en formato presencial y en los horarios establecidos de clases. Sin embargo, las sesiones fuera de aula no tuvieron horario establecido y consideró el trabajo autónomo del estudiante.

### 6.7.2 Desarrollo de la enseñanza

El programa de actividad curricular de Cálculo Aplicado a los Negocios se desarrolló en 15 semanas, cada semana dispuso de 4 sesiones presenciales en aula, cada sesión tuvo una duración de 80 minutos. Además, cada semana dispuso de 2 horas de trabajo autónomo, declaradas en el programa curricular de la asignatura.

Las sesiones presenciales de aula se realizaron en los horarios establecidos para las clases teóricas y prácticas, las actividades consideradas fueron individuales y grupales colaborativas favoreciendo el dialogo, la retroalimentación y la consolidación de los conocimientos adquiridos por el estudiante durante su trabajo autónomo. Las sesiones fuera de aula fueron parte del trabajo autónomo del estudiante e incluyeron actividades como visualizar videos educativos, leer apuntes teórico-prácticos y realizar las tareas disponibles en la plataforma virtual *Moodle*.

La secuencia de tareas implementadas correspondió al estudio de la derivada de funciones reales, a través de los campos de problemas CP1, CP2 y CP3. Para el desarrollo de la enseñanza se contemplaron 5 semanas de clases, la temporalización y planificación fue una adaptación de Galindo Illanes et al. (2023), descritas en la Tabla 21:

**Tabla 21.** Temporalización y Planificación del estudio de los Campos de Problemas

Semana	CP	Sesiones Presenciales (SP)	Tiempo SP	Sesiones Trabajo Autónomo (TA)	Tiempo TA
1	1	1 – 4	320 minutos	1	120 minutos
2	1	5 – 8	320 minutos	2	120 minutos

3	2	9 – 12	320 minutos	3	120 minutos
4	3	13 - 16	320 minutos	4	120 minutos
5	3	17 - 20	320 minutos	4	120 minutos

*Nota:* Adaptación de Galindo Illanes et al. (2023).

La planificación del estudio de los campos de problemas de la derivada, contemplados en el programa de la asignatura, contemplaron veinte sesiones presenciales de aula y 8 sesiones de trabajo autónomo fuera de aula, en un periodo de cinco semanas. En la Tabla 22 se presenta una adaptación de las actividades descritas en Galindo Illanes et al. (2023).

**Tabla 22.** Temporalización y Planificación del estudio de CP1, CP2 y CP3

Sesión Presencial (SP)	Campo de problemas (CP)	Acción didáctica	Objetivo de la acción didáctica	Lenguajes	Configuraciones
1-2	CP1	Tarea SP1	Obtención de la pendiente de la recta tangente mediante aproximaciones por la pendiente de rectas secantes.	Tabular Geométrico Gráfico Descriptivo	Manipulativas Computacional
3-4	CP1	Tarea SP2	Identificación de la recta tangente a una curva.	Geométrico Gráfico Descriptivo	Manipulativas Computacional
5-6	CP1	Tarea SP3	Interpretación geométrica de la derivada en un punto particular. (Se utiliza una aproximación intuitiva a la noción de límite)	Simbólico Gráfica	Computacional Algebraica
7	CP1	Tarea SP4	Articulación de la derivada de una función en un punto y de la función derivada. (Consolidar utilizando la noción de derivada como límite de tasas medias de variación de la función)	Tabular Gráfica Simbólico Descriptivo	Computacionales Algebraica
8	CP1	Tarea SP5	Aplicación de la función derivada (Utilizando la definición de límite)	Simbólico	Computacionales

9	CP2	Tarea SP6	<p>Definición del Álgebra de las derivadas:</p> <p>Si <math>f</math> y <math>g</math> funciones reales no nulas y <math>c \in \mathbb{R} - \{0\}</math>, entonces:</p> <p>a) <math>(f \pm g)' = (f)' \pm (g)'</math>  b) <math>(c \cdot f)' = c \cdot (f)'</math>  c) <math>(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'</math>  d) <math>\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{(f' \cdot g - f \cdot g')}{(g)^2}</math></p>	Simbólico	Algebraica
10	CP2	Tarea SP7	<p>Derivadas de las funciones:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><math>f(x) = x^n, \forall n \in \mathbb{R}, x^n</math> y <math>x^{-n}</math> bien definidas</li> <li><math>f(x) = e^x, \forall x \in \mathbb{R}</math></li> <li><math>f(x) = \ln(x), \forall x &gt; 0</math></li> </ul> <p>(Se mencionan en el programa como reglas de derivadas)</p> <p>Aplicación del álgebra de derivadas para calcular la derivada de otras funciones construidas mediante operaciones aritméticas entre la función exponencial natural, logaritmo natural y polinomios.</p>	Simbólico Gráfico	Computacional Algebraica
11	CP2	Tarea SP8	<p>Derivada de una función compuesta (Regla de la cadena).</p> <p>Aplicación al cálculo de derivadas de otras funciones compuestas por funciones polinómicas, exponenciales y logarítmicas.</p>	Simbólico Gráfico	Computacional Algebraica
12	CP2	Tarea SP9	<p>Aplicación de las reglas de derivación y álgebra de las derivadas para el cálculo de costos marginales e ingresos marginales.</p>	Simbólico	Algebraica
13	CP3	Tarea SP10	<p>Articulación de la interpretación geométrica de la derivada y el criterio de la primera derivada para extremos relativos.</p>	Gráfico Simbólico	Computacional

14	CP3	Tarea SP11	Aplicación del criterio de la primera derivada a problemas clásicos de optimización de funciones reales y económicas.	Gráfico Simbólico	Algebraica
15	CP3	Tarea SP12	Aplicación de la primera derivada al análisis de la monotonía de funciones reales y económicas, orientada al trazado de curvas.	Simbólico Gráfico	Computacional Algebraica
16	CP3	Tarea SP13	Aplicación del criterio de la segunda derivada a problemas clásicos de optimización de funciones reales y funciones económicas.	Gráfico Simbólico	Algebraica
17	CP3	Tarea SP14	Aplicación de la segunda derivada al análisis de la concavidad (hacia arriba y hacia abajo) de funciones reales y económicas, orientada al trazado de curvas.	Geométrico Gráfico	Computacional
18	CP3	Tarea SP15	Aplicación de la derivada a la optimización del costo en la construcción de una caja sin tapa.	Descriptivo	Manipulativa
19	CP3	Tarea SP16	Modelamiento de la función costo para la construcción de una caja sin tapa.	Geométrico Simbólico	Algebraica
20	CP3	Tarea SP17	Aplicación de la derivada a la optimización del costo en la construcción de una caja sin tapa.	Simbólico	Computacional Algebraica
<b>Sesión Trabajo Autónomo (TA)</b>	<b>Campo de problemas (CP)</b>	<b>Acción didáctica</b>	<b>Objetivo de la acción didáctica</b>	<b>Lenguajes</b>	<b>Configuraciones</b>
1	CP1	Tarea TA1	Estudio del manuscrito teórico-práctico del curso, que considera la construcción de la ecuación de una recta tangente a una curva. Aplicación de la recta tangente a problemas económicos.	Simbólico Gráfica	Computacional Algebraica

2	CP1	Tarea TA2	Aplicación de la interpretación geométrica de la derivada.	Tabular Gráfica Simbólico Descriptivo	Computacionales Algebraica
3	CP2	Tarea TA3	Estudio del manuscrito teórico-práctico del curso, que considera el cálculo de derivadas utilizando el álgebra de derivadas.	Simbólico	Computacional Algebraica
4	CP2	Tarea TA4	Estudio del manuscrito teórico-práctico del curso, que considera el uso de las reglas de derivadas para el cálculo de funciones marginales.	Simbólico	Computacional Algebraica
5	CP3	Tarea TA5	Estudio del manuscrito teórico-práctico del curso, que considera la aplicación del criterio de la primera y segunda derivada a problemas clásicos de optimización de funciones reales y económicas.	Simbólico Gráfico	Computacional Algebraica
6	CP3	Tarea TA6	Estudio del manuscrito teórico-práctico del curso, que considera la aplicación de la primera derivada para el análisis de la monotonía de funciones reales y económicas.	Simbólico Gráfico	Computacional Algebraica
7	CP3	Tarea TA7	Estudio del manuscrito teórico-práctico del curso, que considera la aplicación de la segunda derivada para la optimización de funciones reales y económicas.	Simbólico Gráfica	Computacional Algebraica
8	CP3	Tarea TA8	Estudio del manuscrito teórico-práctico del curso, que considera la aplicación de los criterios de primera y segunda derivada para la optimización de funciones económicas.	Simbólico Gráfica	Computacional Algebraica

*Nota:* Adaptación de Galindo Illanes et al. (2023).

Para comenzar el estudio de la derivada, es fundamental construir previamente el concepto de la recta tangente a una curva considerando las concepciones cartesiana y euclidiana

(Galindo Illanes et al., 2022) es por ello que durante las sesiones presenciales de 1 a 4 (tareas SP1 y SP2), y la sesión de trabajo autónomo 1 (tarea TA1) se propuso a los estudiantes resolver tareas que les permitió ampliar la concepción euclidiana (la tangente solo corta a la gráfica en un punto) a la cartesiana, mediante la construcción de la recta tangente como límite de rectas secantes (Galindo Illanes et al., 2023). Además, con la intención de tematizar el esquema de recta tangente —esto es, que el esquema pueda ser considerado una totalidad coherente o, en términos del EOS, que el objeto resultante de la tematización sea un objeto que se sitúa en el segundo de los dos niveles de emergencia de los objetos considerados en el EOS. Es decir, se trata de la emergencia de una referencia global asociada a diferentes configuraciones cognitivas desarrolladas por los alumnos (Font et al., 2016)—, se consideraron aplicaciones económicas, relacionando el concepto de pendiente de la recta secante con el de costo medio y el concepto de costo marginal como la aproximación de los costos medios calculados, destacando su equivalencia con la pendiente de la recta tangente (Galindo Illanes et al., 2022).

Con el propósito de relacionar la pendiente de la recta tangente a una curva con la derivada de la función en el punto de tangencia, las sesiones presenciales 5 y 6 (Tarea SP3) se enfocaron en el proceso de la identificación de la tendencia de las pendientes de las rectas secantes con la derivada de la función en el punto de tangencia (Galindo Illanes et al., 2023). En la sesión 2 de trabajo autónomo (Tarea TA2) se consolidó la interpretación geométrica de la derivada, fortaleciendo el vínculo entre la pendiente de la recta tangente y la derivada en un punto.

Posteriormente, se articuló la derivada de una función en un punto y su función derivada, a través de la sesión presencial 7 (Tarea SP4), que promovió el tránsito entre las representaciones gráfica, tabular y analítica de  $f'$ , la expresión simbólica de la función  $f(x)$  era conocida y se construyó la función que cumplía todas las pendientes de las rectas tangentes, ésta correspondió a la expresión simbólica de  $f'(x)$  (Font, 2005), entre las tareas desarrolladas se consideró el problema propuesto por Galindo y Breda (2023b). Después se generalizó la función derivada como la función que a cada valor le hace corresponder la pendiente de la recta tangente a la gráfica de  $f$  en el punto  $(x, f(x))$ . Finalmente, a través de la manipulación de un applet de *GeoGebra*, se esperó que el estudiante interpretara la función derivada  $f'(x)$  como la función cuyas imágenes,  $y_0 = f'(x_0)$ , correspondían a las pendientes de las rectas tangentes a la función  $f$  en  $x_0$ .

Las sesiones presenciales 8–9 (tarea SP5, SP6 y TA3) tenían el propósito de establecer la representación simbólica de la función derivada y el álgebra de ésta. Para ello, se utilizó un lenguaje mayormente simbólico y la configuración fue algebraica.

Las sesiones presenciales de 10–12 (tarea SP7, SP8, SP9, TA3 y TA4) tenían por propósito establecer y aplicar las reglas de derivación. Si bien, al establecer las reglas de derivación, el lenguaje fue mayoritariamente simbólico, también se utilizó un lenguaje gráfico, a través de un applet de *GeoGebra* que permitió visualizar gráficamente la función derivada. Además, se propuso a los estudiantes aplicar el álgebra de derivadas al cálculo de funciones marginales, utilizando configuraciones algebraicas y un lenguaje simbólico.

En las sesiones presenciales de la 13–15 (Tarea SP10, SP11, SP12, TA5 y TA6) se estableció una articulación entre la interpretación geométrica de la derivada y el criterio de la primera derivada, a través del análisis de la monotonía de una función real. Utilizando un lenguaje mayoritariamente gráfico y en menor medida simbólico. La configuración fue computacional gracias a la integración de un applet de *GeoGebra*. Finalmente, se estableció los criterios de la primera y segunda derivada para la resolución de problemas de optimización de funciones reales y económicas, además de aplicar la primera derivada al trazado de curvas de funciones reales y económicas.

Las sesiones presenciales 16–17 (Tarea SP13, SP14, TA7 y TA8) tuvieron como propósito aplicar el criterio de la segunda derivada a problemas clásicos de optimización de funciones reales y económicas. Su lenguaje fue gráfico y simbólico, y las configuraciones fueron algebraicas.

Finalmente, las sesiones de 18–20 tuvieron como propósito, consolidar de manera manipulativa la aplicación de los criterios de primera y segunda derivada para la optimización de una función costo (SP15, SP16, SP17). Utilizando un lenguaje mayoritariamente gráfico y geométrico, y en menor medida simbólico y descriptivo. La configuración fue computacional, manipulativa y algebraica.

### **6.7.3 Instrumentos de recolección de datos**

Durante la implementación de las actividades y al finalizar cada campo de problemas se aplicó un instrumento evaluativo que permitió realizar un análisis exploratorio del aprendizaje de los estudiantes. A continuación, por motivos de espacio se presentan tres tareas, una para cada campo de problemas. Para la realización de estas tareas, el estudiante dispone de *notebook*,

internet, *GeoGebra* (versión gratuita) y *Symbolab* (versión gratuita). El lenguaje y los procedimientos son de tipo gráfico, descriptivo y simbólico. Por lo que las configuraciones presentes son de tipo computacional y algebraica.

La pregunta del campo de problemas 1, proporcionó información en torno al conocimiento del estudiante sobre tangentes, ya que durante el desarrollo de las tareas deberían usar la configuración de recta tangente asociada al significado geométrico de la derivada en un punto para dar respuesta a las preguntas del enunciado (Figura 19).

**Tarea 1.** Se sabe que la función **Ingreso** ( $I$ ) está dada por  $I(q) = q^2$ , con  $q \geq 0$ , donde  $q$  representa unidades.

Se sabe que la gráfica de la función **Ingreso** ( $I$ ) es:

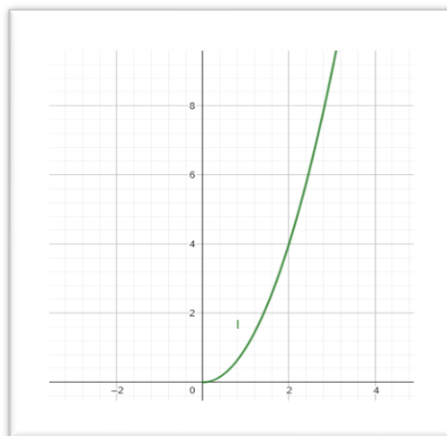


Gráfico 1: Función *Ingreso* ( $I(q)$ )

y la gráfica de la función Ingreso Marginal es:

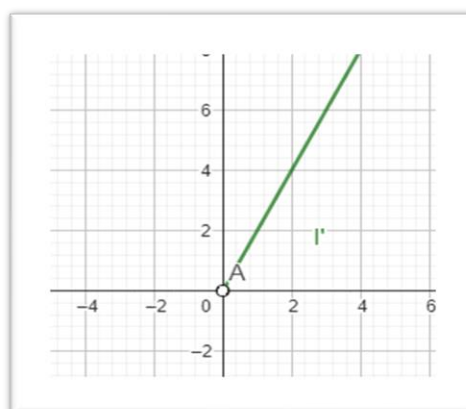


Gráfico 2: Función *Ingreso Marginal*



- Justificando adecuadamente determine la pendiente de la recta tangente a la función ingreso en  $q = 1$ ,  $q = 4$  y  $q = 0$ .
- Determine la ecuación de la recta tangente a la función ingreso en  $q = 4$  y  $q = 0$ .
- Determine dónde el *Ingreso Marginal* es positivo, negativo o igual a 0. Considerando que se trabaja con unidades.
- Explique con sus propias palabras el comportamiento de la función Ingreso y su relación con la gráfica del ingreso marginal.

**Figura 19.** Tarea 1 aplicada a los estudiantes al finalizar el campo de problemas sobre tangente (CP1)

Fuente: (Galindo Illanes et al., 2023).

En esta tarea se esperaba que el estudiante en a) analizara el gráfico de la función ingreso marginal y estableciera que las pendientes de las rectas tangentes en  $q = 1$ ,  $q = 4$  y  $q = 0$ , son  $m_{q=1} = 2$ ,  $m_{q=4} = 8$ ,  $m_{q=0} = 0$ . Además, darse cuenta de que la función ingreso marginal corresponde a la derivada de la función ingreso, por lo que su gráfico le provee la información necesaria para establecer las pendientes de las rectas tangentes. En b) se espera que para construir la ecuación de la recta tangente en  $q = 4$ , el estudiante utilice  $m_{q=4} = 8$  y del gráfico de la función ingreso obtenga  $I(4) = 16$ . Con esta información, la ecuación de la recta tangente a la función ingreso es:  $I = 8q - 16$ . En c) el estudiante debe analizar la gráfica de la función ingreso marginal y concluir que sólo es positiva para  $q > 0$  y no está definida para  $q \leq 0$ . Finalmente, el estudiante debe mencionar la relación que existe entre la monotonía de la función ingreso y su derivada, es decir, para  $q > 0$  la función ingreso marginal es positiva y en consecuencia la función ingreso es creciente.

A continuación, la pregunta asociada al campo de problemas 2, proporcionó información en torno a la aplicación de las reglas de derivación en el cálculo de funciones marginales, utilizando configuraciones algebraicas y un lenguaje simbólico (Figura 20).

**Tarea 2.** Considere la siguiente función costo e ingreso en unidades monetarias [UM]:

$$C(q) = \frac{q^4}{4} + \frac{2q^3}{3} - \frac{11q^2}{2} + 12q$$

$$r(q) = q^3 + \frac{2}{5q^2} + 40q$$

- Calcule e interprete el costo marginal ( $C'(q)$ ) y el ingreso marginal ( $r'(q)$ ) de producir la unidad número 11. No olvide indicar el álgebra de derivadas utilizadas y las reglas de derivación.
- Luego de realizar los cálculos en a), ¿Es conveniente producir la unidad número 11?

**Figura 20.** Tarea 2 aplicada a los estudiantes al finalizar el campo de problemas sobre cálculo de derivadas a partir de reglas y teoremas de derivación (CP2)

Fuente: Elaboración de las autoras.

En esta tarea, se esperaba que el estudiante aplicara el álgebra de las derivadas y derivadas de las funciones elementales (llamadas reglas de derivación) para el cálculo del costo marginal y del ingreso marginal, además debería indicarlas en orden a medida que fueron utilizadas. Por ejemplo: Considerando  $f$  y  $g$  funciones reales continuas,  $c$  y  $n$  una constante real,  $n \neq -1$ .

$$\begin{aligned}
 r'(q) &= \left( q^3 + \frac{2}{5q^2} + 40q \right)' \\
 &= (q^3)' + \left( \frac{2}{5q^2} \right)' + (40q)' && \text{Álgebra de la derivada} \\
 & && (f + g)' = (f)' + (g)' \\
 &= (q^3)' + \frac{2}{5}(q^{-2})' + 40(q)' && \text{Álgebra de la derivada} \\
 & && (c \cdot f)' = c \cdot (f)' \\
 &= 3q^2 + \frac{2}{5} \cdot -2 \cdot q^{-3} + 40 \cdot 1 && \text{Regla de derivadas} \\
 & && (x^n)' = n \cdot x^{n-1} \\
 & \text{Ingreso marginal} && r'(q) = 3q^2 - \frac{4}{5q^3} + 40
 \end{aligned}$$

Después, para determinar si es conveniente producir la unidad número 11. Se esperaba que el estudiante evaluara las funciones marginales del ingreso y costo en  $q = 10$ , para poder predecir la conveniencia de la producción de la unidad número 11. Es decir,

$$r'(10) = 3 \cdot 10^2 - \frac{4}{5 \cdot 10^3} + 40 = \frac{424999}{1250} \approx 340$$

$$c'(10) = 10^3 + 2 \cdot 10^2 - 11 \cdot 10 + 12 = 1102$$

El estudiante debería concluir que, como  $c'(10) > r'(10)$ , no es conveniente producir la unidad número 11.

Finalmente, se presenta una de las preguntas del instrumento que se aplicó al finalizar el campo de problemas 3. Esta pregunta nos permitió analizar la comprensión del estudiante en torno a la relación que existe entre la representación gráfica de la función y de su derivada  $f'$ , a través del criterio de la primera derivada para extremos relativos y el análisis de la monotonía (Figura 21).

**Tarea 3.** Para un producto la función de ingreso es  $I(q) = 450q - 4q^2$  y la función de costo total es  $c(q) = 0.004q^3 + 20q + 5000$ . Determinar:

- La monotonía de la función utilidad.
- ¿A qué nivel de producción se maximiza la utilidad y cuál es la utilidad máxima?
- Con la información obtenida, realice un bosquejo de la función utilidad.

**Figura 21.** Tarea 3 que se aplicó a los estudiantes al finalizar el estudio del campo de problemas aplicaciones de la derivada para el cálculo de máximos y mínimos, y análisis de gráficas de funciones (CP3)

Fuente: Elaboración de las autoras.

En este problema se espera que el estudiante modele la función utilidad, es decir:

$$U(q) = -0.004q^3 - 4q^2 + 430q - 5000, \quad q \geq 0$$

Después se espera que derive la función utilidad y analice para qué valores reales de  $q$ :

$$U'(q) = 0, \quad U'(q) > 0, \quad U'(q) < 0$$

Esto permitió al estudiante determinar la monotonía de la función utilidad, y, posteriormente, aplicar el criterio de la primera derivada para extremos relativos, obteniendo de esta forma el nivel de producción que maximiza la utilidad y la utilidad máxima. Finalmente, con la información de la monotonía de la función utilidad y los extremos relativos, el estudiante pudo realizar un bosquejo de la gráfica de la función.

#### 6.7.4 Método de análisis

Al finalizar la implementación, después de aplicar los instrumentos evaluativos, se realizó un análisis de tipo mixto (Johnson & Onwuegbuzie, 2004). Usando la noción de configuraciones de los objetos primarios del EOS, se cuantificó, para cada uno de los objetos primarios, la cantidad de acciones correctas (frecuencia) relacionadas a las resoluciones de los estudiantes en los problemas propuestos. Por otra parte, desde el punto de vista cualitativo, fue posible identificar las respuestas y argumentos correctos e incorrectos de los estudiantes al resolver las tareas propuestas.

### 6.8 ANÁLISIS Y RESULTADOS

A continuación, se presentan algunos resultados obtenidos a partir del análisis de las respuestas de los 90 estudiantes de Ingeniería Comercial. Además, se muestran evidencias (imágenes de respuestas) de los procedimientos y argumentos de algunos estudiantes.

La Tabla 23 explicita los resultados de la Tarea 1. Se observa que el 93% de los estudiantes identifica la relación entre la función ingreso y su marginal, y, por consiguiente, se puede inferir que comprenden que la función ingreso marginal proporciona las pendientes de las rectas tangentes. Además, se observa que el 78% identifican las pendientes de las rectas tangente a la función ingreso, a partir de la función ingreso marginal. Finalmente, el 42% de los estudiantes, para el análisis de la monotonía de la función ingreso, justifica correctamente el vínculo que existe entre la función ingreso marginal y la función ingreso.

Estos resultados indican una mejora en la construcción de la concepción cartesiana de la recta tangente, el aprendizaje de la relación que existe entre la recta tangente a una curva con la interpretación geométrica de la derivada y la aplicación de la derivada en el análisis marginal, superando de esta forma algunas de las dificultades evidenciadas por las investigaciones previas (Biza & Zachariades, 2010; Galindo Illanes et al., 2022; Orts Muñoz et al., 2016; Santi, 2011).

**Tabla 23.** Frecuencia de aciertos de la Tarea 1 (n=90)

<b>Acciones para los problemas sobre tangentes (CP1)</b>	<b>Objetos primarios</b>	<b>Frecuencia absoluta</b>	<b>Frecuencia relativa (%)</b>
Justifica correctamente el vínculo que existe entre la función ingreso marginal y la función ingreso, para el cálculo de rectas tangentes.	Argumento	84	93
Relaciona correctamente la pendiente de la recta tangente a la curva con la derivada de la función en el punto de tangencia.	Definición	84	93
Identifica las pendientes de las rectas tangentes a la función ingreso.	Representación	70	78
Utiliza correctamente la fórmula de la ecuación de la recta punto-pendiente.	Procedimiento	65	72
Justifica correctamente el vínculo que existe entre la función ingreso marginal y la función ingreso, para el análisis de la monotonía de la función ingreso.	Argumento	38	42

*Nota:* elaboración de las autoras.

En la Figura 22 se observa que un estudiante identifica las pendientes de las rectas tangentes observando la función ingreso marginal, es decir, conoce el vínculo existente entre la

función ingreso y su marginal. Además, construye correctamente las ecuaciones de las rectas tangentes a la función ingreso.

$x = -1$ $\downarrow$ $P(-1, 4)$ $m_{x=-1} = -7$ $y - 4 = -7(x - (-1))$ $y - 4 = -7x - 7$ $y = -7x - 3$	$x = 0$ $\downarrow$ $P(0, 0)$ $m_{x=0} = -3$ $y - 0 = -3(x - 0)$ $y - 0 = -3x + 0$ $y = -3x$	$x = 1$ $\downarrow$ $P(1, -2)$ $m_{x=1} = 1$ $y - (-2) = 1(x - 1)$ $y + 2 = x - 1$ $y = x - 3$
---	---	---

**Figura 22.** Desarrollo correcto de un estudiante en la construcción de la recta tangente a la función ingreso

La Figura 23, muestra que, si bien el estudiante comprende que la gráfica de la función derivada le proporcionará las pendientes de las rectas tangentes, aún presenta algunas ambigüedades al momento de definirla, manifestando que “Derivada es lo mismo que pendiente”. Se trata de una ambigüedad típica de este tema (derivada se puede referir tanto a la función derivada como a la derivada en un punto), que normalmente se desambigua por el contexto, que suele estar relacionada con el lenguaje utilizado por el profesor al momento de explicar la definición de derivada, por ejemplo, al utilizar expresiones metafóricas o un lenguaje simplificado para facilitar la comprensión del estudiante (Löbner, 2013); o bien, puede estar relacionada con la dificultad del estudiante por no poder manejar esta disparidad de significado que tiene el propio sujeto al momento de interpretar el término derivada (Godino et al., 2007).

R → Para cada ec. de la recta tangente, primero debí sacar mis coordenadas  $(x, y)$  y para eso debo ubicar mi "x" dada en la gráfica de la función  $f(x)$ , luego determinar las pendientes de cada punto y eso lo hago a través de la gráfica de función derivada ya que derivada es lo mismo que pendiente.

**Figura 23.** Ambigüedad de un estudiante al referirse a la derivada

La Figura 24, muestra que un estudiante, encuentra la función algebraica que corresponde a la gráfica de la función ingreso, después de eso obtiene su derivada, utilizando las reglas de derivación y construye las ecuaciones de las rectas tangente solicitadas. Esto indica que el estudiante comprende que la derivada le proporcionará las pendientes de las rectas tangentes que necesita, sin embargo, no vincula la derivada del ingreso con su marginal.

$I'(q) = (q^2)'$   
 $I'(q) = 2q$

ecuación de la recta tangente en el punto A (1,1)

$y - 1 = 2(x - 1)$   
 $y = 2x - 2 + 1$   
 $y = 2x - 1$

La ecuación de la recta tangente en la curva f en el punto A (1,1) es  $y = 2x - 1$

**Figura 24.** Desarrollo algebraico de un estudiante en la construcción de la recta tangente a la función ingreso

La Figura 25 muestra la justificación de un estudiante, en torno al vínculo que existe entre la función ingreso marginal y la función ingreso, para el análisis de la monotonía de la función ingreso. Sin embargo, se observa una imprecisión en la definición de punto crítico.

Relación que tiene la función ingreso con la grafica de la derivada, es que cuando mi derivada es positiva, la función es creciente, cuando mi derivada es negativa mi función sera decreciente y cuando la derivada es igual a 0, la función posee un extremo relativo que en este caso es un minimo relativo.

**Figura 25.** Justificación de un estudiante del comportamiento de la función Ingreso y su relación con la gráfica del ingreso marginal

La Tabla 24 presenta los resultados de la Tarea 2 que contestaron los estudiantes de Ingeniería Comercial, se observa que el 97% identifica y el 94% aplica de manera correcta el álgebra de las derivadas. Además, que el 89% identifica y el 78% aplica correctamente las reglas de las derivadas de las funciones elementales. Sin embargo, sólo el 44% de los estudiantes aplicó correctamente la derivada en el análisis marginal y tomaron la decisión correcta. Estos resultados indican que las actividades realizadas en el diseño instruccional permitieron que los estudiantes realizaran correctamente el cálculo de derivadas a partir de reglas y teoremas de derivación. Sin embargo, se observan dificultades al aplicar la derivada para la toma de decisiones.

**Tabla 24.** Frecuencia de aciertos de la Tarea 2 (n=90)

Acciones para los problemas sobre cálculo de derivadas a partir de reglas y teoremas de derivación (CP2)	Objetos primarios	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa (%)
--	-------------------	---------------------	-------------------------

Indica correctamente el álgebra de las derivadas utilizadas para el cálculo de las funciones marginales.	Proposiciones	87	97
Aplica correctamente el álgebra de las derivadas en el cálculo de funciones marginales.	Procedimiento	85	94
Indica las reglas de derivación utilizadas para el cálculo de las funciones marginales.	Proposiciones	80	89
Aplica correctamente las reglas de derivación en el cálculo de funciones marginales.	Procedimiento	70	78
Evalúa el costo marginal en $q = 10$ , para tomar una decisión en torno a la unidad número 11.	Procedimiento	40	44
Evalúa el ingreso marginal en $q = 10$ , para tomar una decisión en torno a la unidad número 11.	Procedimiento	40	44
Justifica correctamente que es conveniente producir la unidad número 11.	Argumento	40	44

*Nota:* elaborado por las autoras.

La Figura 26 ejemplifica la construcción, de un estudiante, de la función costo marginal, indicando las reglas de las derivadas de las funciones elementales y álgebra de la derivada de manera correcta. Es decir, el estudiante aplica la derivada para la obtención de las funciones de costo e ingreso marginales.

Paso 1: derivar funciones de costo e ingreso

- $C(q) = \frac{q^4}{4} + \frac{2q^3}{3} - 11\frac{q^2}{2} + 12q$
- $C'(q) = \frac{1}{4}(q^4)' + \frac{2}{3}(q^3)' - \frac{11}{2}(q^2)' + 12(q)'$ 
  - Algebra de la constante
  - Algebra de la d. suma
- $C'(q) = \frac{1}{4} \cdot 4q^3 + \frac{2}{3} \cdot 3q^2 - \frac{11}{2} \cdot 2q + 12$ 
  - regla del exponente  $\downarrow$
  - $(x^n)' = nx^{n-1}$
- $C'(q) = q^3 + 2q^2 - 11q + 12$  costo marginal

**Figura 26.** Procedimiento de un estudiante para la obtención del costo marginal

La Figura 27 muestra la interpretación correcta de la función costo marginal e ingreso marginal, al evaluarse en  $q = 10$ . Al estudiante se le solicita predecir para la unidad número 11

por lo que decide evaluar en la unidad 10, es decir, el estudiante aplica la derivada en la función de costo e ingreso marginales e interpreta correctamente.

$C'(10) = (10)^3 + 2(10)^2 - 11(10) + 12$   
 $C'(10) = 1000 + 200 + 110 + 12$   
 $C'(10) = 1402$  u.m.  
 R— al fabricar la unidad 11 mi costo marginal será de 1.402 u.m.

$r'(10) = 3(10)^2 - \frac{4}{5 \cdot (10)^3} + 40$   
 $r'(10) = 300 - \frac{4}{5000} + 40$   
 $r'(10) = 339,9992$  u.m.  
 R— al vender la unidad 11 mi ingreso marginal será de 339,9992 u.m.

Figura 27. Interpretación de las funciones de costo marginal e ingreso marginal al evaluar en  $q=10$

La Figura 28 expone la justificación correcta en la toma de decisión en torno a la producción de la unidad número 11, para ello el estudiante utiliza el costo marginal e ingreso marginal evaluado en  $q = 10$ .

$r'(10) < C'(10)$  — no es conveniente producir la unidad nº 11  
 No me conviene producir la unidad 11 ya que al evaluar mi ingreso sería inferior a mis costos produciendo una pérdida de dinero.

Figura 28. Justificación de no producir la unidad número 11

La Tabla 25 presenta los resultados de la Tarea 3 que contestaron los participantes, se observa que el 98% de los estudiantes modela correctamente la función utilidad y determina su derivada aplicando las reglas y teoremas de derivación, el 78% identifica los valores críticos y el 76% identifica los intervalos donde  $U'(q) > 0$  y  $U'(q) < 0$ . Los errores observados son mayoritariamente aritméticos y de álgebra básica, es decir conocimientos previos. El 70% de los estudiantes aplica correctamente la derivada para el análisis de la monotonía de la función, sin embargo, solo el 56% comprende que los valores críticos son posibles extremos y el 53% que deben ser analizados utilizando el criterio de la primera derivada para extremos relativos. Finalmente, sólo el 39% de los estudiantes realizó el bosquejo de la gráfica de la función utilidad. Los resultados indican que, si bien los estudiantes aplican la derivada para el cálculo de máximos y mínimos y análisis de gráficas de funciones, todavía se observan limitaciones, producto de la



complejidad de los objetos matemáticos necesarios para construir la derivada, específicamente, función real, gráfico de funciones reales y ecuaciones.

**Tabla 25.** Frecuencia de aciertos de la Tarea 3 (n=90)

Acciones para los problemas sobre aplicaciones de la derivada para el cálculo de máximos y mínimos, y análisis de gráficas de funciones (CP3)	Objetos primarios	Frecuencia	
		Absoluta	Frecuencia relativa
Modela correctamente la función utilidad.	Definición	88	98
Determina la derivada de la función utilidad, utilizando correctamente las reglas y álgebra de las derivadas.	Proposiciones	88	98
Determina correctamente los valores de $q$ en el dominio, tal que $U'(q) = 0$	Procedimiento	70	78
Determina correctamente los valores de $q$ en el dominio, tal que $U'(q) > 0$	Procedimiento	68	76
Determina correctamente los valores de $q$ en el dominio, tal que $U'(q) < 0$	Procedimiento	68	76
Relaciona correctamente $U'(q) > 0$ con el crecimiento de la función utilidad	Proposiciones	63	70
Relaciona correctamente $U'(q) > 0$ con el decrecimiento de la función utilidad	Proposiciones	63	70
Relaciona los valores de $q$ tales que $U'(q) = 0$ con los posibles extremos de la función utilidad.	Proposiciones	50	56
Aplica correctamente el criterio de la primera derivada para determinar el nivel de producción en el que se alcanza la utilidad máxima.	Proposiciones	48	53
Determina justificando correctamente la utilidad máxima	Argumento	48	53
El bosquejo realizado describe correctamente la monotonía y extremos de la función utilidad.	Procedimiento	35	39

*Nota.* Elaboración de las autoras.

La Figura 29 muestra la expresión simbólica correcta de la función utilidad y su derivada. Es decir, el estudiante comprende que para optimizar la función utilidad requiere trabajar con su función derivada.

$$a) U(q) = \frac{q^4}{4} - q^3 + q^2$$

$$U'(q) = \frac{1}{4} \cdot 4q^3 - 3q^2 + 2q$$

$$U'(q) = q^3 - 3q^2 + 2q \quad \text{función derivada de utilidad.}$$

**Figura 29.** Función utilidad y su derivada construida correctamente por un estudiante

La Figura 30 muestra la obtención de los valores críticos resolviendo la ecuación generada al igualar a cero la derivada de la función utilidad. Es decir, el estudiante conoce la definición de puntos críticos y resuelve correctamente una ecuación de tercer grado utilizando algebra básica, debemos observar que la función derivada no presenta discontinuidades.

$$b) \text{ Puntos críticos } \Rightarrow U'(q) = 0$$

$$q^3 - 3q^2 + 2q = 0$$

$$q(q^2 - 3q + 2) = 0$$

$$q(q-2)(q-1) = 0$$

- $q = 0$
- $q - 2 = 0$   
 $q = 2$
- $q - 1 = 0$   
 $q = 1$

Los puntos críticos los evaluamos en la función utilidad para obtener los puntos en el eje Y.

- $q = 0 \Rightarrow U(0) = \frac{0^4}{4} - 0^3 + 0^2 = 0 \quad A(0,0)$
- $q = 1 \Rightarrow U(1) = \frac{1^4}{4} - 1^3 + 1^2 = \frac{1}{4} \quad B(1, \frac{1}{4})$
- $q = 2 \Rightarrow U(2) = \frac{2^4}{4} - 2^3 + 2^2 = 0 \quad C(2,0)$

**Figura 30.** Obtención de los puntos críticos de la función utilidad

La Figura 31 muestra la respuesta de un estudiante sobre la producción y venta de 1.000.000 para alcanzar la utilidad máxima. Es decir, el estudiante aplica correctamente la derivada para la optimización de funciones económicas.

R- Debo producir y vender 1.000.000 de unidades para alcanzar la utilidad máxima ya que en ese punto (1000000, 250000) se genera un máximo representando la utilidad.

**Figura 31.** Justificación de la optimización de la función utilidad

## 6.9 CONCLUSIONES

El objetivo de ese artículo fue presentar los resultados de la implementación de un diseño instruccional de enseñanza de la derivada para futuros ingenieros comerciales en Chile. Dicho diseño pretendía presentar una cierta complejidad del objeto derivada, mediante el estudio de diversas configuraciones de objetos primarios: tangentes, aplicaciones de la derivada para el cálculo de máximos y mínimos, análisis de gráficas de funciones, y el cálculo de derivadas a partir de reglas y teoremas de derivación. Además, se incorporó el uso de las TIC en las

diversas tareas, favoreciendo el tratamiento y la conversión entre los lenguajes escrito, numérico, gráfico y simbólico (Galindo Illanes et al., 2023; Galindo Illanes & Breda, 2023b).

Los resultados evidencian que los estudiantes que participaron de esa implementación, aunque presentaron algunas limitaciones, tales como la dificultad en el bosquejo de la función utilidad o la aplicación de la derivada para la toma de decisiones, aprendieron la relación entre la tangente a una curva y la interpretación geométrica de la derivada y la aplicación de la derivada en el análisis marginal, mostrando, además, una mejora en la construcción de la concepción cartesiana de la recta tangente.

Esos resultados están directamente relacionados con los aspectos innovadores de esta investigación. El primer aspecto fue la utilización transversal, en toda la unidad didáctica, de recursos TIC (*applets*, *GeoGebra*, códigos QR). El segundo aspecto fue el tiempo dedicado, en la programación, a la interpretación geométrica de la derivada, una vez que fue esa noción la que permitió a los estudiantes resolver una mayor variabilidad de problemas presentes en la carrera de Ingeniería Comercial, tales como los de optimización. Además, fue a partir de la interpretación geométrica de la derivada que los participantes elaboraron de forma global la construcción del concepto de la derivada. El tercer aspecto fueron los problemas de aplicación. En esta investigación se ha trabajado, por ejemplo, grafica de funciones y optimización de funciones vinculados al contexto de Economía y Negocios. Dicho en términos de los criterios de idoneidad didácticos, el diseño puso el énfasis en el criterio epistémico, el mediacional y el ecológico y los resultados de la implementación muestra que se consiguió, en un grado razonable, el criterio cognitivo, contrariamente a los criterios que los profesores de matemáticas de facultades de ingeniería en el Perú utilizan (Garcés et al. 2021; 2022). En particular los estudiantes han construido un significado de la derivada con diferentes significados parciales bien conectados, que les permite una cierta competencia para resolver tareas relacionadas con su profesión.

Una de las limitaciones del estudio fue el insuficiente tiempo destinado al desarrollo de las tareas por parte de los participantes, dado que ellos no tenían todos los conocimientos previos necesarios para la comprensión de los nuevos conceptos. Por ejemplo, para que el estudiante pudiera realizar una tarea sobre la interpretación geométrica de la derivada, fue necesario destinar tiempo para retomar conocimientos previos sobre funciones. Otra limitación se ha dado por las fallas de conexión con la internet, dificultando la accesibilidad de los alumnos al material, ya que deberían conectar sus móviles a los códigos QR para accederlos.

Como perspectiva futura, esta investigación muestra que, para una mejor formación de ingenieros comerciales, entendida en términos de que sean competentes en la aplicación de las derivadas a problemas relacionados con su profesión, se hace necesario un cambio en los programas de estudio de las asignaturas que incluyen la enseñanza de la derivada, a fin de que estos contemplen explícitamente una más completa y significativa variabilidad de campos de problema, incorporando la complejidad de la derivada, en particular, su interpretación geométrica, dado que es la noción que más se utiliza en la Ingeniería Comercial. En particular la implementación realizada muestra que es posible implementar este tipo de enseñanza de la derivada. Además, se hace necesario un proceso de formación de los profesores que forman a esos futuros ingenieros, habilitándolos en la enseñanza de los diferentes significados de la derivada, sus diferentes campos de problemas, representaciones, procedimientos, argumentos, proposiciones y aplicaciones contextuales junto a los recursos TIC.



## CAPÍTULO 7. CONCLUSIONES FINALES

---

### 7.1 CONCLUSIONES CON RELACIÓN A LOS OBJETIVOS

En la memoria se muestra un estudio sobre la derivada que incorpora el estudio previo, el diseño y la implementación de una secuencia de enseñanza aplicada en un curso de Ingeniería Comercial de segundo año para la asignatura de Cálculo Aplicado a los Negocios de una universidad privada chilena. Además, se determina el significado personal adquirido por los estudiantes. En el Capítulo 1 se planteó un objetivo general y cuatro objetivos específicos. El objetivo general propuesto se expresó en los siguientes términos:

*Analizar un proceso de instrucción de la derivada para estudiantes de Ingeniería Comercial que considere el contexto, el tipo de estudiantes y el marco teórico en el que se fundamenta la investigación.*

Se ha pretendido dar respuesta a este objetivo mediante el diseño, implementación y evaluación de un proceso de instrucción fundamentado por un riguroso análisis de tipo teórico y experimental. El marco teórico permitió analizar el objeto "derivada" en partes específicas, que han sido estudiadas detalladamente, vistas de manera institucional y personal. Este objetivo general se logra dando cumplimiento a otros objetivos específicos, cuyos resultados y conclusiones se describen a continuación.

#### 7.1.1 Conclusiones relacionadas con el objetivo específico 1 (O1)

*Realizar un estudio diagnóstico de la comprensión que tienen los estudiantes de Ingeniería Comercial sobre la derivada, a través de las resoluciones que hacen sobre problemas de tangentes.*

Este objetivo se abordó en el Capítulo 2, donde se ha descrito que durante un periodo de tres años se realizó un estudio constante para diagnosticar la comprensión que tienen los estudiantes de Ingeniería Comercial sobre la derivada. Durante este periodo se han presentado los avances en congresos de Ingeniería, Ingeniería Comercial y de Educación Matemática con el fin de discutir con pares en torno a los resultados obtenidos.

A partir de las diversas configuraciones ontosemióticas en las situaciones-problema sobre tangentes del EOS, se ha establecido un diagnóstico de la comprensión que tienen los estudiantes de Ingeniería Comercial sobre la derivada, a través de las resoluciones que hacen sobre problemas de tangentes (Sección 2.7, Figura 1 y Figura 2). Dentro de los principales resultados se ha obtenido que los futuros ingenieros comerciales presentan dificultades en: el concepto de función y la concepción euclidiana de la recta tangente; la construcción del

significado de recta tangente como límite de rectas secantes; la interpretación de la función derivada y su representación geométrica; realizar operaciones para calcular la pendiente de una recta y; operar con funciones (Sección 2.8, Tabla 3 y Tabla 4).

Una posible explicación para esos resultados es: a) que la concepción euclídea obstaculiza la construcción de las concepciones cartesiana y leibniziana de la recta tangente a una curva, que son esenciales para comprender la relación existente entre la pendiente de la recta tangente a una curva y la derivada de la función en el punto de tangencia, relación fundamental para la construcción de la interpretación geométrica de la derivada. Este resultado no difiere de las investigaciones en torno a la recta tangente a una curva de Biza y Zachariades (2010), Santi (2011), y Orts Muñoz et al. (2016).

Aunque en el proceso de enseñanza se haya considerado actividades iniciales focalizadas en la construcción del significado de la recta tangente a una curva, estas no fueron suficientes; b) se puso en evidencia la consecuente influencia en la mala interpretación de conceptos matemáticos que dependen, en gran parte, del concepto de función, ya que, aproximadamente solamente la cuarta parte de los estudiantes de Ingeniería Comercial e Ingeniería Civil Informática, respectivamente, modela y explica la función corroborando con Gómez Guerra et al. (2015), Mercado et al. (2011), and Cuesta Borges et al. (2010).

Finalmente, se ha concluido que, si bien, la integración de las TIC ha permitido la construcción del significado de la derivada considerando las diversas configuraciones de los objetos primarios y ha ampliado el lenguaje en el diseño de actividades, se observa que ha implicado un coste cognitivo al estudiante, una vez que ellos deberían asimilar distintas formas de comunicación en un tiempo limitado de su carga académica del semestre. La mayor limitación fue el tiempo disponible que, aunque haya sido amplio para algunos de los estudiantes, fue insuficiente para que otros llegaran a asimilar todos los objetivos programados. Los resultados y principales conclusiones de este estudio fueron publicados en Galindo Illanes et al. (2022; 2022b).

Los resultados y conclusiones relacionadas al objetivo O1 de esta investigación, nos llevaron a estudiar, con mayor profundidad, cómo los programas de estudio de las asignaturas que contemplan la enseñanza de la derivada en los cursos de Ingeniería Comercial, en nivel de país (Chile), abordan la enseñanza de dicho objeto matemático. Es decir, qué significados de la derivada están contemplados en estos programas de estudio (objetivo específico 2 de esa investigación), cuyas conclusiones están en la siguiente subsección.

### 7.1.2 Conclusiones relacionadas con el objetivo específico 2 (O2)

*Identificar los significados pretendidos de la derivada en los programas de las asignaturas de las carreras de Ingeniería Comercial.*

Este objetivo se abordó en el Capítulo 3, donde se ha descrito que durante el año 2022 se realizó un estudio del tratamiento que tenía la derivada en ocho programas de Ingeniería Comercial de diversas universidades chilenas, para ello se utilizó la noción de configuración epistémica del EOS. Para establecer los significados pretendidos de la derivada se presentaron los avances en congresos de Ingeniería, Ingeniería Comercial y de Educación Matemática, con el fin de discutir con pares los resultados obtenidos.

Finalmente, se han organizado los contenidos de las asignaturas de cálculo de ocho universidades (sección 3.7, Tabla 5), y se ha identificado la presencia de los campos de problemas en ellos (sección 3.8, Tabla 6) y la presencia de los significados parciales de la derivada en los programas de las universidades (Sección 3.8, Tabla 7). Dentro de los resultados obtenidos se tiene que la mayor parte de los programas consideran: las reglas de derivación, criterios de la primera y segunda derivada para extremos relativos, criterios de concavidad, criterios de monotonía de una función real y regla de la cadena. En menor medida se observan el teorema de la función implícita, teorema del valor medio, teorema del valor intermedio y el teorema de Rolle.

Como conclusión del análisis de los significados de la derivada pretendidos en los 8 programas curriculares de las asignaturas que contemplan la unidad de aprendizaje de la derivada se tiene que, si bien la mayor parte de las propuestas curriculares presenta similitudes en la organización de contenidos y en los elementos lingüísticos utilizados para la construcción del objeto derivada, se observan diferencias importantes en la preponderancia de la derivada interpretada como una razón de cambio y en los campos de problemas abordados. Los resultados sobre las características del significado de la derivada presentes en el currículo de las carreras de Ingeniería Comercial en Chile son novedosos, lo que ha permitido ampliar el estudio realizado en Pino-Fan et al (2013), el cual se centra en el análisis del significado pretendido de la derivada del currículo de bachillerato de México. Los resultados y principales conclusiones de este estudio fueron publicados en Galindo Illanes y Breda (2022a, 2023a).

Los resultados y conclusiones relacionadas al objetivo O2 de esta investigación, nos llevaron a estudiar, con mayor profundidad, qué significados pretendidos de la derivada están presentes en los libros de texto para las carreras de Ingeniería Comercial en Chile. Es decir, qué



significados, campos de problemas, lenguaje, procedimientos, enunciados, propiedades y argumentos son considerados en una muestra representativa de libros de texto (objetivo específico 3 de esa investigación), cuyas conclusiones están en la siguiente subsección.

### **7.1.3 Conclusiones relacionadas con el objetivo específico 3 (O3)**

*Identificar los campos de problemas, lenguaje, procedimientos, enunciados, propiedades y argumentos, utilizados usualmente en la enseñanza de la derivada a ingenieros comerciales, en una muestra representativa de libros de texto destinados a estos estudiantes.*

Este objetivo se abordó en el Capítulo 4, donde se describe que durante el año 2022 se realizó el estudio de los significados pretendidos de la derivada en los libros de texto para las carreras de Ingeniería Comercial en Chile. Se analizaron 13 libros de texto (Sección 4.7, Tabla 8) de los cuales 6 son textos de matemática aplicada a economía y negocios, y 7 libros clásicos de enseñanza del cálculo para ingeniería. Después de seleccionar los capítulos que trataban la derivada, se establecieron las definiciones (Sección 4.7, Tabla 9), teoremas y proposiciones (Sección 4.7, Tabla 10) y campos de problemas (Sección 4.7, Tabla 11).

Finalmente, en cada texto se analizó la presencia de los campos de problemas (Sección 4.8, Tabla 12), definiciones (Sección 4.8, Tabla 13) y teoremas y proposiciones (Sección 4.8, Tabla 14). Dentro de los resultados obtenidos del análisis de los 13 libros textos contemplados en este estudio se observó que, en la mayor parte de ellos, hay un énfasis en el significado parcial de la derivada como el límite del cociente de incrementos y un predominante lenguaje simbólico en los argumentos.

Por un lado, los hallazgos del estudio realizado, aparte de dar un panorama de los significados pretendidos de la derivada en los libros de texto analizados, corroboran con otras investigaciones que utilizan las herramientas del EOS (Burgos et al., 2020; Castro et al., 2017; García-García et al., 2021; Monje et al., 2018; Pallauta et al., 2022; Pino-Fan et al., 2019), y se ha podido generar un abanico de subcategorías relacionadas a los campos de problemas identificados, ampliando, en alguna medida, el estudio realizado en Pino-Fan et al. (2013). Por otro lado, el análisis del objeto primario argumento que hacen los libros de texto sobre la derivada en las actividades propuestas, es un aspecto que creemos que debe ser contemplado en investigaciones futuras.

Se concluye que el estudio realizado proporciona resultados novedosos con relación a algunas características del significado de la derivada presentes en los libros de texto,

complementando, de esa forma, los análisis del significado de la derivada en los programas de asignatura de los programas de estudio de las carreras de Ingeniería Comercial en Chile (Galindo Illanes & Breda, 2022). Los resultados de ese estudio fueron publicados en Galindo y Breda (2023b).

Partiendo del supuesto que el objeto matemático derivada se encuadra en una disciplina caracterizada como una ciencia básica, las matemáticas, y que una de las competencias que debe desarrollar el futuro ingeniero en su proceso formativo es la de articular las ciencias básicas y las ciencias de la ingeniería (Comisión Nacional de Acreditación, 2011), la contribución práctica del estudio realizado es que, a partir de los resultados encontrados, se puede diseñar e implementar un ciclo formativo para futuros Ingenieros Comerciales en Chile teniendo en cuenta la complejidad del significado de la derivada, contemplando la mayor variabilidad de campos de problema y sus respectivas subcategorías, las definiciones, teoremas y proposiciones de forma representativa. Además de integrar actividades teóricas y prácticas, que permitan la adquisición de las habilidades de comunicación, pensamiento crítico, solución de problemas, interacción social y autoaprendizaje e iniciativa personal (objetivo específico 4 de esa investigación), cuyas conclusiones están en la siguiente subsección.

#### **7.1.4 Conclusiones relacionadas con el objetivo específico 4 (O4)**

*Diseñar un proceso de instrucción para la enseñanza de la derivada por medio de la selección de los campos de problemas, lenguaje, procedimientos, enunciados, propiedades y argumentos utilizados usualmente en la enseñanza de la derivada para estudiantes de Ingeniería Comercial. Seleccionar los elementos de significado adecuados para la construcción de la propuesta didáctica, considerando campos de problemas específicos y configuraciones didácticas adecuadas para abordarlos.*

La descripción de los campos de problemas en el Capítulo 4 permitió dirigir el diseño del proceso de instrucción sobre la derivada. En el Capítulo 5 se ha presentado el diseño de un proceso de enseñanza de la derivada para estudiantes de Ingeniería Comercial en Chile, además se han explicitado las bases de la propuesta didáctica en la sección 5.8, la temporalización y planificación (sección 5.8, Tabla 15), la temporalización y planificación de problemas de tangentes, cálculo de tasas instantáneas de cambio y de tasas instantáneas de variación, y aplicaciones de la derivada para el cálculo de máximos y mínimos, análisis de monotonía y concavidad de funciones reales y económicas (sección 5.8, Tabla 16, Tabla 17, Tabla 17, Tabla 19 y Tabla 20). Los resultados se publicaron el Galindo Illanes et al. (2023).

Los resultados de la implementación del diseño presentado en el Capítulo 5 (considerando algunas adaptaciones), se han mostrado en el Capítulo 6. En particular, la implementación y los cambios han podido ser visualizados en las bases de la propuesta didáctica en la sección 6.7 y, en la temporalización y planificación de las semanas de clases implementadas (Tabla 21 y Tabla 22 de la sección 6.7).

### **7.1.5 Conclusiones relacionadas con el objetivo específico 5 (O5)**

*Implementar y analizar el impacto del proceso de instrucción implementado en el aprendizaje de la derivada por los estudiantes de Ingeniería Comercial, evaluando y comparando el significado personal de los estudiantes con el significado institucional implementado.*

Este objetivo se ha abordado en el Capítulo 6, donde se han presentado los resultados de la implementación del diseño instruccional de enseñanza de la derivada para estudiantes universitarios de la carrera de Ingeniería Comercial en Chile. El diseño implementado ha pretendido presentar una cierta complejidad del objeto derivada, mediante el estudio de diversas configuraciones de objetos primarios: tangentes, aplicaciones de la derivada para el cálculo de máximos y mínimos, análisis de gráficas de funciones, y el cálculo de derivadas a partir de reglas y teoremas de derivación. Además, se incorporó el uso de las TIC en las diversas tareas, favoreciendo el tratamiento y la conversión entre los lenguajes escrito, numérico, gráfico y simbólico (Galindo Illanes et al., 2023; Galindo Illanes & Breda, 2023b). En el capítulo se muestra tareas representativas aplicadas al finalizar la implementación de actividades de cada campo de problemas (sección 6.7, Figura 19, Figura 20, Figura 21) y en la sección 6.8 se presenta el análisis y los resultados, a través de tablas de frecuencia de aciertos (Tabla 23, Tabla 24, Tabla 25) y evidencias con imágenes de los procedimientos y argumentos de las respuestas de algunos estudiantes (sección 6.8, Figuras 22 a la Figura 31).

Los resultados evidencian que los estudiantes que participaron de esa implementación, aunque presentaron algunas limitaciones, tales como la dificultad en el esbozo de la función utilidad o la aplicación de la derivada para la tomada de decisiones, aprendieron la relación entre la tangente a una curva y la interpretación geométrica de la derivada y la aplicación de la derivada en el análisis marginal, mostrando, además, una mejora en la construcción de la concepción euclidiana de la recta tangente, aspecto que difiere de investigaciones anteriores (Biza & Zachariades, 2010; Galindo Illanes et al., 2022; Orts Muñoz et al., 2016; Santi, 2011).

Consideramos que estos resultados pueden estar directamente relacionados con los aspectos innovadores de esta investigación. El primer aspecto fue la utilización transversal, en

toda la unidad didáctica, de recursos TIC (*applets*, *GeoGebra*, códigos QR). El segundo aspecto fue el tiempo dedicado, en la programación, a la interpretación geométrica de la derivada, una vez que fue esa noción la que permitió a los estudiantes resolver una mayor variabilidad de problemas presentes en la carrera de Ingeniería Comercial, tales como los de optimización. Además, fue a partir de la interpretación geométrica de la derivada que los participantes elaboraron de forma global la construcción del concepto de la derivada. El tercer aspecto fueron los problemas de aplicación. En esta investigación se ha trabajado, por ejemplo, las gráficas de funciones y optimización de funciones vinculados al contexto de Economía y Negocios.

Los resultados de ese estudio fueron aceptados para su futura publicación en la revista *Uniciencia* en el enero de 2024.

## 7.2 PRINCIPALES APORTACIONES DE LA INVESTIGACIÓN

La investigación presenta algunas contribuciones a la Didáctica de la Matemática a nivel universitario y en particular, al estudio de la enseñanza de la derivada en el contexto de la carrera de Ingeniería Comercial, que se reflejan en las diferentes publicaciones, congresos y jornadas presentadas y mencionadas a lo largo de esta memoria de tesis.

Aunque en la literatura se encuentran diferentes investigaciones que apuntan las dificultades que presentan los estudiantes para ingeniero en comprender el significado de la derivada y en la realización de diferentes problemas que involucran ese objeto matemático. En esa investigación se ha dado un paso más allá y se ha realizado un diagnóstico sobre el grado de comprensión de la derivada, adquirido, particularmente por los estudiantes de Ingeniería Comercial en Chile, analizando el acuerdo y desacuerdo entre el significado previsto y el adquirido por los estudiantes. Eso ha permitido tener una visión profunda y direccionada en el contexto que se pretendía realizar la investigación.

También, se presentó una descripción minuciosa del tratamiento de la derivada en los programas de asignatura que contemplan el estudio de la derivada en los cursos de Ingeniería Comercial en Chile, lo que permitió identificar los campos de problemas adecuados para su enseñanza a los futuros ingenieros comerciales.

Asimismo, se analizaron cualitativamente trece libros de textos utilizados para la enseñanza de la derivada en diferentes universidades chilenas, adecuados para la enseñanza de ingenieros comerciales. En los libros de texto se identificó y se estudió la presencia de los

diversos elementos del significado, proporcionando resultados novedosos con relación a algunas características del significado de la derivada presentes en los libros de texto para las carreras de Ingeniería Comercial en Chile.

Otro punto para destacar fue el diseño de un proceso de instrucción sobre la derivada dirigido a ingenieros comerciales, fundamentado en el análisis de los programas de las asignaturas y de los libros de texto, cuya organización permitió observar distintas aproximaciones hacia la comprensión de la derivada. Divergiendo de la forma tradicional de enseñanza, se han considerado diversas configuraciones ontosemióticas en las situaciones-problemas sobre tangentes, cálculo de tasas instantáneas de variación, aplicaciones de la derivada para el cálculo de máximos y mínimos, análisis de gráficas de funciones, y el cálculo de derivadas a partir de reglas y teoremas de derivación. Además, se ha integrado las TIC en las diversas actividades, favoreciendo el tránsito entre los tipos de lenguajes escrito, numérico, gráfico y simbólico, permitiendo a los estudiantes construir de manera progresiva el significado de la derivada.

Acreditamos que los resultados encontrados en las diferentes etapas de esa investigación permiten que se realice un proceso de instrucción de la derivada para futuros ingenieros comerciales en el cual hay una alta posibilidad de comprensión de los significados de la derivada y de la realización exitosa de problemas de contexto por parte de los estudiantes para ingeniero, disminuyendo así la brecha entre lo que se aprende en el ámbito universitario y las aplicaciones de lo que se aprende en la carrera profesional.

### 7.3 IMPLICACIONES PARA LA ENSEÑANZA DE LA DERIVADA EN UN CURSO DE CÁLCULO PARA INGENIERÍA COMERCIAL

La memoria también proporciona algunas conclusiones relacionadas a la docencia. Actualmente, la problemática del aula se centra en determinar y secuenciar los elementos prioritarios para una enseñanza eficaz y centrada en el estudiante.

Esta investigación proporciona evidencia de los distintos elementos que deberían tenerse presente al momento de preparar la lección de la derivada para estudiantes de Ingeniería Comercial, considerando, además, de las diferentes configuraciones del objeto matemático derivada, más de una forma de comunicar dicho objeto e incorporando las TICs a su enseñanza.

Todo ello podría ayudar a realizar una revisión sistematizada del currículum de la asignatura de Cálculo Aplicado a los Negocios, de los libros de textos adecuados para Ingeniería

Comercial, de las aplicaciones centradas en el área de conocimiento de interés y, de los teoremas y proposiciones fundamentales en esta materia.

#### 7.4 LIMITACIONES DEL ESTUDIO

Como en cualquier investigación en Didáctica de las Matemáticas. Esta investigación presenta algunas limitaciones.

La primera de ellas se relaciona a las limitaciones presentes en los resultados presentados en los Capítulos 3 y 4 y se relacionan, sobre todo, a los procesos de muestreo. Por ejemplo, una limitación fue el número reducido de universidades que han compartido sus programas de asignatura y por consecuencia, la limitación en la cantidad de libros de texto analizados, ya que, aunque las universidades pertenecían diferentes regiones del país (estableciendo una cierta representatividad por abordar distintas regiones), el número de universidades que han compartido sus programas se ha limitado a ocho.

La segunda limitación fue el tipo y número de estudiantes que participaron en la implementación (resultados presentados en el Capítulo 6), el tiempo limitado de enseñanza, el número limitado de ítems de evaluación y el número limitado de actividades y tareas.

#### 7.5 PERSPECTIVAS FUTURAS DE INVESTIGACIÓN

Considerando que todo proceso de enseñanza es perfectible consideramos que hay algunos puntos concretos en que la investigación podría continuarse desarrollando en el ámbito del marco teórico y del objeto matemático adoptados en ese estudio, son los siguientes:

- a) Valorar la idoneidad didáctica, desde los seis criterios de idoneidad didáctica (Breda et al., 2017, 2018; Font et al., 2010), del proceso de instrucción implementado para identificar en detalle su grado de idoneidad;
- b) A partir del estudio de la idoneidad didáctica proponer mejoras en el proceso de instrucción para que este permita superar las dificultades de los estudiantes que no fueron resueltas en esta investigación;
- c) Repetir el proceso de instrucción con estudiantes que presentan otras características académicas (por ejemplo, ingenieros comerciales en otras universidades o estudiantes de otras especialidades de ingenierías) para evaluar si se repiten los resultados y analizar qué cambios se deberían realizar;
- d) Diseñar, implementar y evaluar el proceso de instrucción con diferentes recursos tecnológicos y *applets*, y estudiar las consecuencias del cambio;

- e) Mejorar y actualizar los instrumentos de evaluación, para identificar conflictos semiótico presentados por los participantes.
- f) Diseñar e implementar un ciclo formativo para formadores de ingenieros comerciales en el cual considere, además de las diferentes configuraciones de la derivada en variados campos de problema contextualizados a la carrera de Ingeniería comercial, el uso de las TIC.

## 7.6 DIFUSION DE LOS RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN

La investigación se ha difundido por medio de publicaciones de los resultados en revistas científicas, capítulos de libro y actas de congresos nacionales e internacionales. Además, por medio de presentaciones orales en congresos nacionales e internacionales, talleres y conferencias en jornadas de Educación, fue posible extender los hallazgos a la comunidad académica y estudiantil interesada. A continuación, detallamos la divulgación, primero por tipología de publicación y segundo, por orden cronológico (de la más reciente a la más antigua).

### 7.6.1 Publicaciones en revistas indexadas

- a. Galindo Illanes, M. K.; Breda, A. (en prensa). Proceso de instrucción de la derivada aplicado a estudiantes de Ingeniería Comercial en Chile. *Uniciencia*. Publicación 31/01/2024
- b. Galindo Illanes, M. K., & Breda, A. (2023). Significados de la derivada en los libros de texto de las carreras de Ingeniería Comercial en Chile. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 37(75), 271–295. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v37n75a13>
- c. Galindo Illanes, M. K., Breda, A., & Alvarado Martinez, H. (2023). Diseño de un proceso de enseñanza de la derivada para estudiantes de Ingeniería Comercial en Chile. *Paradigma*, 44(4), 321–350. <https://doi.org/10.37618/paradigma.1011-2251.2023.p321-350.id1386>
- d. Galindo Illanes, M. K., Breda, A., Manríquez, D. D. C., & Martínez, H. A. A. (2022). Analysis of a teaching learning process of the derivative with the use of ICT oriented to engineering students in Chile. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 18(7), em2130. <https://doi.org/https://doi.org/10.29333/ejmste/12162>

### 7.6.2 Publicación en capítulo de libro

- a. Galindo Illanes, M., & Breda, A. (2022). Estudio da derivada com o uso das TIC realizado com estudantes de engenharia no Chile. In Cristiane Antônia Hauschild Johann & Sérgio Nunes Lopes (Eds.), *Docência e ciência: [re]valorização do conhecimento* (pp. 10–17). Editora da Univates.

### 7.6.3 Publicaciones en actas de congresos nacionales e internacionales

- a. Galindo Illanes, M. K., & Breda, A. (2023). A derivada no plano de estudos dos cursos de Engenharia Comercial no Chile. In A. L. Manrique & C. L. O. Groenwald (Eds.), *Anais do IX Congresso Iberoamericano de Educação Matemática* (pp. 2173–2183). Editora Akadem.
- b. Galindo Illanes, M., Breda, A. (2022). Estudio da derivada com o uso das TIC realizado com estudantes de engenharia no Chile. In Cristiane Antônia Hauschild Johann & Sérgio Nunes Lopes (Org.). *Anais do IV Congresso Internacional de Ensino e Aprendizagens, VIII, Seminário Institucional do Pibid/Univates, II Seminário do Residência Pedagógica/Univates* (pp. 194-197). Lajeado: Editora Univates.
- c. Galindo Illanes, M. K., & Breda, A. (2022). El tratamiento de la derivada en el plan de estudios de Ingeniería Comercial en Chile. In T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas, & J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 285–293). Santiago de Compostela: SEIEM.
- d. Galindo Illanes, M. K.; Breda, A. (2022). La derivada en los textos de enseñanza para Ingeniería Comercial en Chile. En Jesús Berrío Valbuena & Leonado Vargas Delgado. *Actas Del VI Encuentro Internacional en Educación Matemática (EIEM 6)* (pp. 144-145). Barranquilla: Universidad del Atlántico.
- e. Galindo Illanes, M. K., & Breda, A. (2020). Interpretación geométrica de la derivada en estudiantes de Ingeniería Comercial. *Actas Del V Encuentro Internacional En Educación Matemática (EIEM 5)* (pp. 158–163). Barranquilla: Universidad del Atlántico.



#### 7.6.4 Presentación de comunicaciones en congresos nacionales e internacionales

- a. Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa – RELME 36. Título: Implementación de un Proceso de Enseñanza de la Derivada para Estudiantes de Ingeniería Comercial en Chile. Fecha: 24 al 28 de julio 2023.
- b. Investigación en Educación Matemática XXV– SEIEM, 2022. Título: El tratamiento de la derivada en el plan de estudios de Ingeniería Comercial en Chile. Fecha: 1 al 3 de septiembre 2022.
- c. Primer Congreso Internacional de Didáctica de la Matemática – CIDIDMAT 2022, organizado por la Universidad de los Lagos y la Comunidad de Investigadores de Didáctica de la Matemática. Título: Análisis de un proceso de enseñanza y aprendizaje de la derivada con uso de TIC orientado a estudiantes de Ingeniería en Chile. Fecha: 26 de febrero al 26 de marzo 2022.
- d. XXXIV Congreso chileno de educación en ingeniería – SOCHEDI 2022. Título: ¿Cómo se aborda la derivada en Ingeniería Comercial? Fecha: 5, 6 y 7 de octubre 2022.
- e. XXXIV Congreso chileno de educación en ingeniería – SOCHEDI 2022. Título: La derivada en los programas de Ingeniería Comercial en Chile. Fecha: 5, 6 y 7 de octubre 2022.
- f. 6to Encuentro internacional de Investigación en Educación Matemática – EIEM 6. Título: La derivada en los textos de enseñanza para Ingeniería Comercial en Chile. Fecha: 20 al 21 de octubre 2022.
- g. “Primer Congreso Internacional de Investigación Interdisciplinas en Educación” y “IV Congreso Internacional Psicología de la Educación” – COIIED. Título: El tratamiento de la derivada en el plan de estudios de Ingeniería Comercial en Chile. Fecha: 19 al 21 de octubre 2022.

- h. XXXVIII Encuentro nacional de escuelas y facultades de administración – ENEFA 2022. Título: La derivada en el plan de estudios de Ingeniería Comercial en Chile. Fecha: 9 al 11 de noviembre 2022.
- i. XXXVIII Encuentro nacional de escuelas y facultades de administración – ENEFA 2021. Título: La derivada en los textos de enseñanza para Ingeniería Comercial en Chile. Fecha: 9 al 11 de noviembre 2022.
- j. IX Congreso Iberoamericano de Educación Matemática – CIBEM 2022. Título: A derivada no plano de estudos dos cursos de Engenharia Comercial no Chile. Fecha: 5 al 9 de diciembre 2022.
- k. IV Congresso internacional de ensino e aprendizagens, VIII Seminário institucional do PIBID/univates e II Seminário de residência pedagógica/univates - submissão, promovido pela Universidade do Vale do Taquari - UNIVATES, por meio da Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação – PROPESQ e da Pró-Reitoria de Ensino - PROEN. Título: Estudo da derivada com o uso das TIC realizado com estudantes de engenharia no Chile. Fecha: 24 al 26 de noviembre 2021.
- l. XXXVII Encuentro nacional de escuelas y facultades de administración – ENEFA 2021. Título: Dificultades de comprensión de la interpretación geométrica de la derivada en estudiantes de Ingeniería Comercial. Fecha: 10 al 12 de noviembre 2021.
- m. XXXIII Congreso chileno de educación en ingeniería – SOCHEDI 2021. Título: Propuesta de enseñanza del cálculo mediante la metodología Flipped Classroom en estudiantes de Ingeniería. Fecha: 27, 28 y 29 de octubre 2021.
- n. XXXIII Congreso chileno de educación en ingeniería – SOCHEDI 2021. Título: Diseño de enseñanza de la interpretación geométrica de la derivada con uso de TIC en estudiantes de ingeniería. Fecha: 27, 28 y 29 de octubre 2021.

- o. 5to Encuentro Internacional de Investigación en Educación Matemática –EIEM5. Título del trabajo: Interpretación Geométrica de la Derivada en Estudiantes de Ingeniería Comercial. Fecha: 14 y 15 de octubre 2020.

#### **7.6.5 Presentación de conferencias y talleres en jornadas de Educación**

- a. I Jornadas de innovación en educación superior STEM. Realizada por el Centro de Investigación en Creatividad y Educación Superior de la Universidad de Santiago de Chile. Conferencia titulada: ¿Es pertinente adaptar la enseñanza de la matemática al curriculum de las ingenierías? El caso de la derivada. Fecha: 11 de enero 2023.
- b. Jornada de enseñanza del cálculo, realizada por la Universidad de Tarapacá y la Universidad Católica de la Santísima Concepción, Chile, realizada el 14 y 15 de enero del 2021. Conferencia titulada: La derivada no es inmune a la pandemia.
- c. Jornada de enseñanza del cálculo, realizada por la Universidad de Tarapacá y la Universidad Católica de la Santísima Concepción, Chile, realizada el 14 y 15 de enero del 2021. Taller titulado: Un zoom a la derivada.
- d. Jornada regional de matemática educativa, realizada por la Universidad Católica de la Santísima Concepción, Chile, realizada el 6 y 7 de noviembre del 2020. Taller titulado: La derivada con ojos GeomÉTICs.

## REFERENCIAS

---

- Aguilera-Ruiz, C., Manzano-León, A., Martínez-Moreno, I., del Carmen Lozano-Segura, M., & Yanicelli, C. C. (2017). El modelo flipped classroom. *International Journal of Developmental and Educational Psychology*, 4(1), 261–266.  
<https://doi.org/https://doi.org/10.17060/ijodaep.2017.n1.v4.1055>
- Ahumada Torres, M. E. (2013). Las TIC en la formación basada en competencias. *Revista de La Universidad de La Salle*, 2013(60), 141–157.  
<http://revistas.lasalle.edu.co/index.php/ls/article/view/2388/2133>
- Alvarado Martínez, H. A., Galindo Illanes, M. K., & Retamal Pérez, M. L. (2018). Evaluación del aprendizaje de la estadística orientada a proyectos en estudiantes de ingeniería. *Educación Matemática*, 30(3), 151–183.  
<https://doi.org/10.24844/em3003.07>
- Antonio Zambrano, R., Escudero Ávila, D. I., & Flores Medrano, E. (2019). Una introducción al concepto de derivada en estudiantes de bachillerato a través del análisis de situaciones de variación. *Educación Matemática*, 31(1), 258–280.  
<https://doi.org/https://doi.org/10.24844/em3101.10>
- Ariza Cobos, Á., & Linares Ciscar, S. (2009). Sobre la aplicación y uso del concepto de derivada en el estudio de conceptos económicos en estudiantes de Bachillerato y Universidad. *Enseñanza de Las Ciencias: Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, 27(1), 127–136. <https://doi.org/https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3667>
- Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa RELIME*, 1(1), 40–55.
- Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., & Gómez, P. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. *Ingeniería Didáctica En Educación Matemática*, 1, 97–140.
- Arya, J., & Lardner, R. (2004). *Matemáticas Aplicadas a la Administración y a la Economía*. Pearson Educación.
- Azcárate, C. (1990). *La velocidad: introducción al concepto de derivada* [Tesis doctoral]. Universitat Autònoma de Barcelona.
- Badillo, E. R. J. (2003). *La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de Matemática de Colombia* [Tesis de doctorado]. Universitat Autònoma de Barcelona.

- Badillo, E. R. J., Azcárate, C., & Font, V. (2011). Análisis de los niveles de comprensión de los objetos  $f'(a)$  y  $f'(x)$  en profesores de matemáticas. *Enseñanza de Las Ciencias*, 29(2), 191–206. <https://doi.org/https://doi.org/10.5565/rev/ec/v29n2.546>
- Balcaza Bautista, T., Contreras de la Fuente, Á., & Font, V. (2017). Análisis de libros de texto sobre la optimización en el bachillerato. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 31(59), 1061–1081. <https://doi.org/https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n59a11>
- Ballard, C. L., & Johnson, M. F. (2004). Basic math skills and performance in an introductory economics class. *The Journal of Economic Education*, 35(1), 3–23. <https://doi.org/https://doi.org/10.3200/JECE.35.1.3-23>
- Berry, J. S., & Nyman, M. A. (2003). Promoting students' graphical understanding of the calculus. *The Journal of Mathematical Behavior*, 22(4), 479–495. <https://doi.org/10.1016/J.JMATHB.2003.09.006>
- Biza, I., & Zachariades, T. (2010). First year mathematics undergraduates' settled images of tangent line. *The Journal of Mathematical Behavior*, 29(4), 218–229. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2010.11.001>
- Bohle, S. L., & Rojas, L. P. (2007). Análisis exploratorio de los planes de estudio de Ingeniería Comercial en Chile. *Pensamiento & Gestión*, 23, 58–71.
- Borgen, K., & Manu, S. (2002). What do students really understand? *Journal of Mathematical Behavior*, 21, 151–165.
- Breda, A., Font, V., & Pino-Fan, L. R. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 32(60), 255–278. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13>
- Breda, A., Pino-Fan, L. R., & Font, V. (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: Criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 13(6), 1893–1918. <https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.01207a>
- Burgos, M., Castillo, M. J., Beltrán-Pellicer, P., Giacomone, B., & Godino, J. D. (2020). Análisis didáctico de una lección sobre proporcionalidad en un libro de texto de primaria con herramientas del enfoque ontosemiótico. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 34(66), 40–68. <https://doi.org/10.1590/1980-4415V34N66A03>
- Butler, J., Finegan, T. A., Siegfried, J., Butler, J., Finegan, T. A., & Siegfried, J. (1998). Does more calculus improve student learning in intermediate micro- and macroeconomic theory? *Journal of Applied Econometrics*, 13(2), 185–202. <https://EconPapers.repec.org/RePEc:jae:japmet:v:13:y:1998:i:2:p:185-202>

- Butler, J. S., Finegan, T. A., & Siegfried, J. J. (1994). Does more calculus improve student learning in intermediate micro and macro-economic theory? *The American Economic Review*, 84(2), 206–210. <https://doi.org/https://www.jstor.org/stable/2117830>
- Cantoral, R., & Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon*, 42(14), 3.
- Cantoral, R., & Farfán, R. M. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa, RELIME*, 6(1), 27–40.
- Castro, W. F., Martínez-Escobar, J. D., & Pino-Fan, L. R. (2017). Niveles de Algebrización de la Actividad Matemática Escolar: Análisis de Libros de Texto y Dificultades de los Estudiantes. *Journal of Research in Mathematics Education*, 6(2), 191. <https://doi.org/10.17583/REDIMAT.2017.1981>
- Comisión Nacional de Acreditación. (2011). Criterios de evaluación carrera de ingeniería comercial. In *CNA* (pp. 1–19). [http://www.acreditadordechile.cl/wp-content/uploads/2011/11/Ingenieria\\_Comercial.pdf](http://www.acreditadordechile.cl/wp-content/uploads/2011/11/Ingenieria_Comercial.pdf).
- Cuesta Borges, A., Deulofeu Piquet, J., & Méndez Salazar, M. A. (2010). Análisis del proceso de aprendizaje de los conceptos de función y extremo de una función en estudiantes de economía. *Educación Matemática*, 22(3), 5–21.
- Eснаоla Horacek, G. A., & de Ansó Lavin, M. B. (2019). Competencias digitales lúdicas y enseñanza. *ReiDoCrea: Revista Electrónica de Investigación y Docencia Creativa*, 8, 399–410.
- Flores, A. (2014). Enfoque conceptual del cálculo en la formación de docentes: Ejemplos con uso de tecnología interactiva. *El Cálculo y Su Enseñanza*, 5, 1–26.
- Font, V. (1999). *Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques. Aplicacions a la derivada* [Tesis de doctorado]. Universitat de Barcelona.
- Font, V. (2000). Representaciones ostensivas que pueden ser activadas en el cálculo  $f'(x)$ . *Uno: Revista de Didáctica de Las Matemáticas*, 25, 21–40.
- Font, V. (2005). Una aproximación ontosemiótica a la didáctica de la derivada. In A. Maz, B. Gómez, & M. Torralbo (Eds.), *Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM* (pp. 111–128). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).
- Font, V. (2008). Rappresentazioni attivate nel calcolo della derivata [Representations activated in the calculation of the derivative]. *Proceedings of the Congress of Didactic of Mathematics*, 13–24.
- Font, V. (2009). Formas de argumentación en el cálculo de la función derivada de la función  $f(x) = x^2$  sin usar la definición por límites. *Unión. Revista Iberoamericana de*

- Educación Matemática*, 18, 15–28.  
<https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/1103>
- Font, V., & Contreras, Á. (2008). The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 69, 33–52.  
<https://doi.org/https://doi.org/10.1007/s10649-008-9123-7>
- Font, V., Godino, J. D., & Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, 82(1), 97–124.  
<https://doi.org/https://doi.org/10.1007/s10649-012-9411-0>
- Font, V., Planas, N., & Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, 33(1), 89–105.  
<https://doi.org/10.1174/021037010790317243>
- Font, V., Trigueros, M., Badillo, E. R. J., & Rubio, N. (2016). Mathematical objects through the lens of two different theoretical perspectives: APOS and OSA. *Educational Studies in Mathematics*, 91, 107–122.  
<https://doi.org/https://doi.org/10.1007/s10649-015-9639-6>
- Fuentealba, C., Badillo, E. R. J., & Sánchez-Matamoros, G. (2015). Fases en la tematización del esquema de la derivada: comprensión en alumnos universitarios. In C. Fernández, M. Molina, & N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 259–268). SEIEM.
- Galindo Illanes, M., & Breda, A. (2022). Estudo da derivada com o uso das TIC realizado com estudantes de engenharia no Chile. In Cristiane Antônia Hauschild Johann & Sérgio Nunes Lopes (Eds.), *Docência e ciência: [re]valorização do conhecimento* (pp. 10–17). Editora da Univates.
- Galindo Illanes, M. K., & Breda, A. (2020). Interpretación geométrica de la derivada en estudiantes de ingeniería comercial. *Actas Del V Encuentro Internacional En Educación Matemática*, 158–163.
- Galindo Illanes, M. K., & Breda, A. (2022a). El tratamiento de la derivada en el plan de estudios de Ingeniería Comercial en Chile. In T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas, & J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 285–293). SEIEM.
- Galindo Illanes, M. K., & Breda, A. (2022b). Estudo da derivada com o uso das TIC realizado com estudantes de engenharia no Chile. In C. A. Hauschild Johann & S. Nunes Lopes (Eds.), *Docência e ciência: [re]valorização do conhecimento* (1st ed., Vol. 1, pp. 110–117). Editora Univates.
- Galindo Illanes, M. K., & Breda, A. (2023a). A derivada no plano de estudos dos cursos de Engenharia Comercial no Chile. In A. L. Manrique & C. L. O. Groenwald (Eds.),

*Anais do IX Congresso Iberoamericano de Educação Matemática* (pp. 2173–2183). Editora Akadem.

- Galindo Illanes, M. K., & Breda, A. (2023b). Significados de la derivada en los libros de texto de las carreras de Ingeniería Comercial en Chile. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 37(75), 271–295. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v37n75a13>
- Galindo Illanes, M. K., Breda, A., & Alvarado Martinez, H. (2023). Diseño de un proceso de enseñanza de la derivada para estudiantes de Ingeniería Comercial en Chile. *PARADIGMA*, 44(4), 321–350. <https://doi.org/10.37618/paradigma.1011-2251.2023.p321-350.id1386>
- Galindo Illanes, M. K., Breda, A., Manríquez, D. D. C., & Martínez, H. A. A. (2022). Analysis of a teaching learning process of the derivative with the use of ICT oriented to engineering students in Chile. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 18(7), em2130. <https://doi.org/https://doi.org/10.29333/ejmste/12162>
- Garcés, W., & Font, V. (2022). Criterios que guían la práctica del profesor de matemáticas en cursos de ciencias básicas para ingeniería. *Uniciencia*, 36(1), 66–81. <https://doi.org/http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.5>
- Garcés, W., Font, V., & Morales-Maure, L. M. (2021). Criteria that guide the Professor's practice to explain mathematics at basic sciences courses in engineering degrees in Peru. A case study. *Acta Scientiae*, 23(3), 1–33. <https://doi.org/https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.6389>
- García-García, J. I., Imilpán Rivera, I., Díaz Levicoy, D., & Arredondo, E. H. (2021). Las medidas de tendencia central en libros de texto de séptimo básico de Chile. *Conrado*, 17(81), 261–268.
- García González, M. del S., & Dolores Flores, C. (2016). Diseño de una situación de aprendizaje para la comprensión de la derivada. *UNIÓN-Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 12(46), 49–70. <http://revistaunion.org/index.php/UNION/article/view/560>
- García, L., Azcárate, C., & Moreno, M. (2006). Creencias, concepciones y conocimiento profesional de profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, 9(1), 85–116. [https://doi.org/https://www.scielo.org.mx/scielo.php?pid=S1665-24362006000100005&script=sci\\_arttext](https://doi.org/https://www.scielo.org.mx/scielo.php?pid=S1665-24362006000100005&script=sci_arttext)
- Godino, J. D. (2014). Síntesis del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática: motivación, supuestos y herramientas teóricas. In *Universidad de Granada* (pp. 1–60). [http://www.ugr.es/local/jgodino/eos/sintesis\\_EOS\\_24agosto14.pdf](http://www.ugr.es/local/jgodino/eos/sintesis_EOS_24agosto14.pdf)



- Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 14(3), 325–355.
- Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, 39(1–2), 127–135. <https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1>
- Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2019). The onto-semiotic approach: Implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics*, 39(1), 37–42. <https://www.jstor.org/stable/26742011>
- Gómez Guerra, E. M., Hernández Patermina, H. E., & Chaucanés Jácome, A. E. (2015). Dificultades en el Aprendizaje y el Trabajo Inicial con Funciones en Estudiantes de Educación Media. *Scientia et Technica*, 20(3), 278–285.
- González-Gómez, D., Jeong, J. S., Cañada-Cañada, F., & Picó, A. G. (2017). La enseñanza de contenidos científicos a través de un modelo “Flipped”: Propuesta de instrucción para estudiantes del Grado de Educación Primaria. *Enseñanza de Las Ciencias: Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, 35(2), 71–87. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2233>
- Gustafsson, G., Newman, D. J., Stafström, S., & Wallin, H. P. (2002, September). First-year introductory courses as a means to develop conceive–design–implement–operate skills in engineering education programmes. *SEFIrenze 2002*.
- Gutiérrez Mendoza, L., Buitrago Alemán, M. R., & Ariza Nieves, L. M. (2017). Identificación de dificultades en el aprendizaje del concepto de la derivada y diseño de un OVA como mediación pedagógica. *Revista Científica General José María Córdova*, 15(20), 137–153. <https://doi.org/http://dx.doi.org/10.21830/19006586.170>
- Habre, S., & Abboud, M. (2006). Students’ conceptual understanding of a function and its derivative in an experimental calculus course. *The Journal of Mathematical Behavior*, 25(1), 57–72. <https://doi.org/10.1016/J.JMATHB.2005.11.004>
- Haeussler, E. F., & Paul, R. S. (2003). *Matemáticas para administración y economía*. Pearson educación.
- Hernández-Silva, C., & Tecpan Flores, S. (2017). Aula invertida mediada por el uso de plataformas virtuales: un estudio de caso en la formación de profesores de física. *Estudios Pedagógicos (Valdivia)*, 43(3), 193–204. <https://doi.org/http://dx.doi.org/10.4067/S0718-07052017000300011>
- Hey, J. D. (2005a). I teach economics, not algebra and calculus. *The Journal of Economic Education*, 36(3), 292–304. <https://doi.org/https://doi.org/10.3200/JECE.36.3.292-304>

- Hey, J. D. (2005b). I teach economics, not algebra and calculus. *The Journal of Economic Education*, 36(3), 292–304.  
<https://doi.org/https://doi.org/10.3200/JECE.36.3.292-304>
- Hitt, F. (2005). Dificultades en el aprendizaje del cálculo. Reflexiones sobre el aprendizaje del cálculo y su enseñanza. *Décimo Primer Encuentro de Profesores de Matemáticas Del Nivel Medio-Superior*.
- Hitt, F., & Dufour, S. (2014). Un análisis sobre la enseñanza del concepto de derivada en el nivel preuniversitario, del rol de un libro de texto y su posible conexión con el uso de tecnología. In C. CuevasF. Pluvinae (Ed.), *La enseñanza del Cálculo diferencial e integral. Compendio de investigaciones y reflexiones para profesores, formadores e investigadores en Matemática Educativa* (pp. 19–42). Pearson Educación.
- Hoffmann, L., Bradley, G., & Rosen, K. (2006). *Cálculo para administración, economía, ciencias biológicas y sociales* (8th ed.). McGraw-Hill.
- Inglada, N., & Font, V. (2003). Significados institucionales y personales de la derivada. Conflictos semióticos relacionados con la notación incremental. *XIX Jornadas Del Seminario Interuniversitario de Investigación En Didáctica de Las Matemáticas (SI-IDM)*, 1–18.
- Johnson, R. B., & Onwuegbuzie, A. J. (2004). Mixed methods research: A research paradigm whose time has come. *Educational Researcher*, 33(7), 14–26.  
<https://doi.org/https://doi.org/10.3102/0013189X033007014>
- Lagrange, J., Artigue, M., Laborde, C., & Trouche, L. (2001). A meta study on IC technologies in education. Towards a multidimensional framework to tackle their integration. *Proceedings of de 25 Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1, 111–122.
- Larios, V., & Jiménez, A. (2022). Significados parciales de la derivada en libros universitarios en la formación de ingenieros. *Praxis & Saber*, 13(33), e12274–e12274.  
<https://doi.org/https://doi.org/10.19053/22160159.v13.n33.2022.12274>
- Larios, V., Murillo, R. E. P., & Reyes, H. M. (2021). Significados sobre la derivada evidenciados por alumnos de carreras de Ingeniería en una universidad mexicana. *Avances de Investigación En Educación Matemática*, 20(20), 105–124.  
<https://doi.org/10.35763/AIEM20.4002>
- Letelier, M., López, L., Carrasco, R., & Pérez, P. (2005). Sistema de competencias sustentables para el desempeño profesional en ingeniería. *Revista Facultad de Ingeniería-Universidad de Tarapacá*, 13(2), 91–96.  
<https://doi.org/http://dx.doi.org/10.4067/S0718-13372005000200011>
- Löbner, S. (2013). *Understanding semantics*. Routledge.

- Londoño, N., Kakes, A., & Decena, V. (2013). Algunas dificultades en la resolución de problemas con derivadas. In R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 935–942). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- López, R. R. L., & Hernández, M. W. H. (2016). Principios para elaborar un modelo pedagógico universitario basado en las TIC. Estado del arte. *Revista UNLANDES Episteme*, 3(4), 575–593.  
<http://186.46.158.26/ojs/index.php/EPISTEME/article/view/450/241>
- López Sánchez, R. C. (2008). *Nuevas tecnologías en la enseñanza-aprendizaje del cálculo: una aproximación al estado de la cuestión* [Tesis de Maestría]. Universidad de Granada.
- Marquès Graells, P. R. (2013). Impacto de las TIC en la educación: funciones y limitaciones. *3Ciencias (TIC): Cuadernos de Desarrollo Aplicados a Las TIC*, 2(1), 14–29.
- Martínez, C., Muñoz, M., Cárdenas, C., & Cepeda, M. (2013). Adopción de la Iniciativa CDIO en los Planes de Estudio de las Carreras de la Facultad de Ingeniería de la UCSC. *Proceedings of the 11th Latin American and Caribbean Conference for Engineering and Technology*.
- Martín, M. M., Hernández-Suárez, C. A., & Mendoza-Lizcano, S. M. (2017). Ambientes de aprendizaje basados en herramientas web para el desarrollo de competencias TIC en la docencia. *Revista Perspectivas*, 2(1), 97–104.
- Martín R., D., & Tourón, J. (2017). El enfoque flipped learning en estudios de magisterio: percepción de los alumnos. *RIED. Revista Iberoamericana de Educación a Distancia*, 20(2), 211. <https://doi.org/10.5944/RIED.20.2.17704>
- Mercado, L. C., Aguas, N. J., & Arrieta, W. J. (2010). Comprensión del concepto de función a través de situaciones problema relacionadas con el contexto. In P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 495–503). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa AC.
- Monje, Y., Seckel, M. J., & Breda, A. (2018). Tratamiento de la inecuación en el currículum y textos escolares chilenos. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 32(61), 480–502.
- Moreno Reyes, H. (2017). Valoración de la idoneidad didáctica de un proceso de instrucción de Cálculo Diferencial por los estudiantes. In J. M. Contreras, G. R. C. P. Arteaga, G. M. M, B. Giacomone, & M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos* (pp. 1–10). Universidad de Granada.  
[http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/moreno\\_reyes.pdf](http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/moreno_reyes.pdf)
- Núñez, A., & Gutiérrez, I. (2016). Flipped learning para el aprendizaje del inglés en Educación Primaria. *EDUTECH, Revista Electrónica de Tecnología Educativa*, 56, 89–102.

[http://www.edutec.es/revista/index.php/edutec-e/article/viewFile/654/Edutec\\_n56\\_Nu%C3%B1ez\\_Gutierrez](http://www.edutec.es/revista/index.php/edutec-e/article/viewFile/654/Edutec_n56_Nu%C3%B1ez_Gutierrez)

- Orton, A. (1983). Students' understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics*, 14(3), 235–250. <https://www.jstor.org/stable/3482279>
- Orts Muñoz, A., Llinares Ciscar, S., & Boigues Planes, F. J. (2016). Elementos para una Descomposición Genética del concepto de recta tangente. *Avances de Investigación En Educación Matemática*, 10, 111–134. <https://doi.org/https://doi.org/10.35763/aiem.v0i10.164>
- Pallauta, J. D., Gea, M. M., Batanero, C., & Arteaga, P. (2022). Significado de la tabla estadística en libros de texto españoles de educación secundaria. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 35(71), 1803–1824.
- Pico Macías, R. J., Díaz Silva, F. O., & Escalona Reyes, M. (2017). Enseñanza y aprendizaje del cálculo diferencial aplicando el asistente matemático Derive. *Revista Tecnología Educativa*, 2(1), 24–31.
- Pineda Izasa, W. B., Augusto Hernández Suárez, C., Rodrigo, W., & Castro, A. (2020). Propuesta didáctica para el aprendizaje de la derivada con Derive. *Praxis & Saber*, 11(26), e9845–e9845. <https://doi.org/10.19053/22160159.V11.N26.2020.9845>
- Pino-Fan, L. R., Castro, W. F., Godino, J. D., & Font, V. (2013). Idoneidad epistémica del significado de la derivada en el currículo de bachillerato. *Paradigma*, 34(2), 129–150. [https://doi.org/http://ve.scielo.org/scielo.php?pid=S1011-22512013000200008&script=sci\\_arttext](https://doi.org/http://ve.scielo.org/scielo.php?pid=S1011-22512013000200008&script=sci_arttext)
- Pino-Fan, L. R., Godino, D. J., & Font, V. (2015). Una propuesta para el análisis de las prácticas matemáticas de futuros profesores sobre derivadas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 29(51), 60–89. <https://doi.org/https://doi.org/10.1590/1980-4415v29n51a04>
- Pino-Fan, L. R., Godino, J. D., & Font, V. (2011). Faceta Epistémica Del Conocimiento Didáctico-Matemático sobre la Derivada. *Educ. Matem. Pesq.*, 13, 141–178. <https://doi.org/http://funes.uniandes.edu.co/24491/1/Pino-Fan2011Faceta.pdf>
- Pino-Fan, L. R., Godino, J. D., & Font, V. (2016). Assessing key epistemic features of didactic-mathematical knowledge of prospective teachers: the case of the derivative. *Journal of Mathematics Teacher Education* 2016 21:1, 21(1), 63–94. <https://doi.org/10.1007/S10857-016-9349-8>
- Pino-Fan, L. R., Parra-Urrea, Y. E., & Castro-Gordillo, W. F. (2019). Significados de la función pretendidos por el currículo de matemáticas chileno. *Magis, Revista Internacional de Investigación En Educación*, 11(23), 201–220. <https://doi.org/10.11144/javeriana.m11-23.sfpc>

- Portillo-Lara, H. J., Geogebra Problemas de Optimización, al, Jesús Portillo Lara, H., Ávila-Sandoval, M. S., Á Cruz-Quiñones, M., & López-Ruvalcaba, C. (2019). Geogebra y Problemas de Optimización. *Cultura Científica y Tecnológica*, 16(1), 5–11. <https://doi.org/10.20983/CULCYT.2019.1.2.1>
- Ramírez Leal, P., Prada Nuñez, R., & Hernández Suarez, C. A. (2018). Perspectivas actuales de los docentes de Educación Básica y Media acerca de la aplicación de las Competencias Tecnológicas en el aula. *Espacios*, 39(43), 1–13. <http://www.revistaespacios.com/a18v39n43/a18v39n43p19.pdf>
- Robles, M. G., Del Castillo, A. G., & Font, V. (2010). La función derivada a partir de una visualización de la linealidad local. In M. Moreno, A. Estrada, & J. Carrillo T. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 523–532). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.
- Rodríguez-Nieto, C., Rodríguez-Vásquez, F., & Font, V. (2022). Nueva mirada para analizar las conexiones desde dos lentes teóricos: la teoría ampliada de las conexiones matemáticas y el enfoque ontosemiótico. In J. G. Lugo-Armenta, L. R. Pino\_fan, M. Pochulu, & W. F. Castro (Eds.), *Enfoque Onto-Semiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos: investigaciones y desarrollos en América Latina* (1st ed., Vol. 1, pp. 193–219). Universidad de Lagos.
- Rondero, C., & Font, V. (2015). Articulation of the mathematical complexity of the arithmetic mean. *Enseñanza de Las Ciencias*, 33(2), 29–49. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1386>
- Salas-Rueda, R.-A., & Lugo-García, J.-L. (2019). Impacto del aula invertida durante el proceso educativo sobre las derivadas. *Edmetec*, 8(1), 147–170. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6775503>
- Salinas, P., & Alanís, J. A. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del cálculo dentro de una institución educativa. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, 12(3), 355–382.
- Sánchez-Matamoros, G. (2004). *Análisis de la comprensión en los alumnos de bachillerato y primer año de la universidad sobre la noción matemática de derivada (desarrollo del concepto)* [Tesis de doctorado]. Universidad de Sevilla.
- Sánchez-Matamoros, G., García Blanco, M. M., & Llinares Ciscar, S. (2006). El desarrollo del esquema de derivada. *Enseñanza de Las Ciencias. Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, 24 (1), 85-98.
- Sánchez-Matamoros, G., García, M., & Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, 11(2), 267–296.

- Santi, G. (2011). Objectification and semiotic function. *Educational Studies in Mathematics* 2011 77:2, 77(2), 285–311. <https://doi.org/10.1007/S10649-010-9296-8>
- Stewart, J. (2018). *Cálculo Trascendentes Tempranas* (8th ed.). Cengage Learning Editores.
- Tall, D. (2001). Natural and formal infinities. *Educational Studies in Mathematics*, 48(2–3), 199–238.
- Thomas, G., Weir, M., Hass, J., & Heil, C. (2015). *Cálculo Una Variable* (13th ed.). Pearson Educación.
- Tourón, J., & Santiago, R. (2015). El modelo Flipped Learning y el desarrollo del talento en la escuela. *Revista de Educación*, 368, 196–231.
- Zandieh, M. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative. In E. Dubinsky, A. Shoenfeld, & J. Kaput (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education. IV CBMS Issues in Mathematics Education* (Vol. 8, pp. 103–127). American Mathematical Society.
- Zúñiga, L. (2007). El cálculo en carreras de ingeniería: un estudio cognitivo. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, 10(1), 145–175. [https://doi.org/http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1665-24362007000100007](https://doi.org/http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362007000100007)



ANEXO 1. CARTA DE ACEPTACIÓN DE ARTÍCULO

	
<p>24 de agosto de 2023</p>	
<p>UNA-UNICIENCIA-FCEN-CONS-054-2023</p>	
	<p><b>CONSTANCIA DE ACEPTACIÓN A QUIEN INTERESE</b></p>
<p>Por medio de la presente, en calidad de director de la Revista Uniciencia certifico que el artículo: Proceso de instrucción de la derivada aplicado a estudiantes de Ingeniería Comercial en Chile, de los autores Maritza Katherine Galindo Illanes y Adriana Breda fue valorado favorablemente por nuestro comité evaluador (dos pares en revisión ciega) y fue aceptado por el comité editor de nuestra revista.</p>	
<p>Se aclara que la publicación final dependerá de que los autores cumplan los criterios editoriales faltantes hasta su colocación en nuestro sitio web.</p>	
<p>Atentamente,</p>	
<p> YURI MORALES LOPEZ (FIRMA) PERSONA FISICA, CPF-01-1025-0819. Fecha declarada: 24/08/2023 03:04:30 PM</p>	
<p>Yuri Morales López. Director Revista Uniciencia Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional. 86-3000, Heredia, Costa Rica. <a href="mailto:revistauniciencia@una.cr">revistauniciencia@una.cr</a> <a href="http://www.revistas.una.ac.cr/uniciencia">http://www.revistas.una.ac.cr/uniciencia</a></p>	
	<p><i>YML</i> Nota: Este documento no tiene ninguna validez si no posee firma digital. Para validación de este documento ingrese a la dirección <a href="https://www.centraldirecto.fi.cr/Sitio/FVA_ValidarDocumentoPublico/ValidarDocumentoPublico">https://www.centraldirecto.fi.cr/Sitio/FVA_ValidarDocumentoPublico/ValidarDocumentoPublico</a></p>



ANEXO 2. MODELO DE CONSENTIMIENTO INFORMADO DEL PARTICIPANTE

CONSENTIMIENTO INFORMADO DEL PARTICIPANTE

**Título del proyecto de investigación:** Proceso de enseñanza y aprendizaje de la derivada con estudiantes de Ingeniería Comercial.

**El voluntario debe leer y contestar las siguientes preguntas con atención:**

**(Hay que rodear la respuesta que se considere correcta)**

¿Ha leído toda información que le ha sido facilitada sobre este proyecto?	SI / NO
¿Ha tenido la oportunidad de preguntar y comentar cuestiones sobre el proyecto?	SI / NO
¿Ha recibido suficiente información sobre este proyecto?	SI / NO
¿Ha recibido respuestas satisfactorias a todas las preguntas?	SI / NO

¿Qué investigador le ha hablado de este proyecto? (nombre y apellidos):

.....

¿Ha comprendido que usted es libre de abandonar este proyecto sin que esta decisión pueda ocasionarle algún perjuicio?	SI / NO
En cualquier momento	SI / NO
Sin dar ninguna razón	SI / NO
¿Ha comprendido los posibles riesgos asociados a su participación en el mismo proyecto?	SI / NO
¿Está de acuerdo en participar?	SI / NO
¿Recibirá algún tipo de compensación por participar?	SI / NO

**Firma:** ..... **Fecha:** 6 de marzo del 2023

**Nombre y apellidos del voluntario:**

.....

En caso de que más adelante usted quiera hacer alguna pregunta o comentario sobre este proyecto, o bien si lo desea revocar su participación en el mismo, por favor contacte con:

Nombre del investigador: Maritza Katherine Galindo Illanes.

Facultad, universidad y dirección: Facultad de Economía y Negocios de la Universidad San Sebastián Chile, Lientur 1457, Concepción, Chile.

Correo de contacto: [maritza.galindo@uss.cl](mailto:maritza.galindo@uss.cl)

Teléfono de contacto: 41-2487350

Lugar, fecha y firma del investigador: Chile, Concepción, 06 de marzo del 2023

.....