

Diseño de un proceso de enseñanza de la derivada para estudiantes de ingeniería comercial en Chile

Maritza Galindo Illanes

maritza.galindo@uss.cl

<https://orcid.org/0000-0003-1394-2075>

Universidad San Sebastián (USS)

Concepción, Chile.

Adriana Breda

adriana.breda@ub.edu

<https://orcid.org/0000-0002-7764-0511>

Universitat de Barcelona (UB)

Barcelona, España.

Hugo Alvarado Martínez

alvaradomartinez@ucsc.cl

<https://orcid.org/0000-0002-3729-3631>

Universidad Católica de la Santísima Concepción (UCSC)

Concepción, Chile.

Recibido: 20/03/2023 **Aceptado:** 01/05/2023

Resumen

Este trabajo tiene como objetivo presentar un diseño instruccional de enseñanza de la derivada para estudiantes universitarios de ingeniería comercial en Chile, aplicando algunas herramientas del marco teórico del enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (EOS). El diseño metodológico considera diversas configuraciones ontosemióticas en las situaciones-problemas sobre tangentes, cálculo de tasas instantáneas de cambio y tasas instantáneas de variación, aplicaciones de la derivada para el cálculo de máximos y mínimos, análisis de gráficas de funciones, y el cálculo de derivadas a partir de reglas y teoremas de derivación. Además, integra las TIC en las diversas actividades, favoreciendo el tránsito entre los tipos de lenguajes escrito, numérico, gráfico y simbólico, permitiendo a los estudiantes construir de manera progresiva el significado de la derivada. El diseño metodológico se implementará en la asignatura de Cálculo Aplicado a los Negocios en una universidad chilena, por lo que el tiempo destinado para el diseño instruccional obedece a lo establecido en el programa de la asignatura, es decir, para la enseñanza de la derivada se dispone de 5 semanas, cada semana considera 4 sesiones presenciales de aula, de 80 minutos cada una, y 2 horas cronológicas de trabajo autónomo. La propuesta de diseño instruccional de enseñanza de la derivada espera superar algunas de las dificultades de aprendizaje de los estudiantes, evidenciadas en diversas investigaciones. En particular, las dificultades de los estudiantes de Ingeniería Comercial. Además de proporcionar un diseño instruccional de enseñanza que ejemplifique el uso de algunas herramientas del EOS.

Palabras clave: Derivada; Diseño Instruccional; Enfoque Ontosemiótico; Estudiantes de Ingeniería Comercial.

Desenho de um processo de ensino da derivada para estudantes de engenharia comercial no Chile

Resumo

Este artigo tem como objetivo apresentar o planejamento de um processo de ensino e aprendizagem da derivada para estudantes universitários de engenharia comercial no Chile, aplicando algumas ferramentas do quadro teórico da Abordagem Ontossemiótica (AOS). O desenho metodológico considera várias configurações ontossemióticas nas situações-problema sobre tangentes, cálculo de taxas instantâneas de variação, aplicações da derivada para o cálculo de máximos e mínimos, análise de gráficos de funções e cálculo de derivadas a partir de regras e teoremas de derivação. Além disso, integra as TIC nas diversas atividades, favorecendo a transição entre os tipos de linguagem escrita, numérica, gráfica e simbólica, permitindo que os alunos construam progressivamente o significado da derivada. O desenho metodológico será implementado na disciplina de Cálculo Aplicado aos Negócios em uma universidade chilena, portanto, o tempo destinado ao desenho instrucional obedece ao estabelecido no programa do curso, ou seja, para o ensino da derivada são 5 semanas, cada semana contempla 4 sessões presenciais, de 80 minutos cada, e 2 horas cronológicas de trabalho autônomo. A proposta de desenho instrucional para o ensino da derivada, além de fornecer um design de ensino instrucional que exemplifica o uso de algumas ferramentas do AOS, espera superar algumas das dificuldades de aprendizagem dos alunos de Engenharia Comercial, evidenciadas em pesquisas prévias.

Palavras chave: Derivada; Desenho Instrucional; Abordagem Ontossemiótica; Estudantes de Engenharia Comercial.

Design of a derivative teaching process for business engineering students in Chile

Abstract

This paper aims to present an instructional design for teaching the derivative to commercial engineering university students in Chile, applying some tools from the theoretical framework of the ontosemiotic approach (OSA). The methodological design considers various ontosemiotic configurations in the situations-problems on tangents, calculation of instantaneous rates of change and instantaneous rates of variation, applications of the derivative for the calculation of maximums and minimums, analysis of graphs of functions, and the calculation of derivatives from derivation rules and theorems. In addition, it integrates ICT in the various activities, favoring the transit between the types of written, numerical, graphic, and symbolic languages, allowing the student to progressively build the meaning of the derivative. The methodological design will be implemented in the subject of Calculus Applied to Business at a Chilean university, so the time allocated for the instructional design obeys what is established in the course program, that is, for the teaching of the derivative, It has 5 weeks, each week includes 4 classroom sessions of 80 minutes each and 2 chronological hours of autonomous work. The instructional design proposal for derivative teaching hopes to overcome some of the learning difficulties of students, evidenced in various investigations. In particular, the difficulties of the students of Commercial Engineering. In addition to providing an instructional teaching design that exemplifies the use of some EOS tools.

Keywords: Derivative; Instructional design; Ontosemiotic approach; Business Engineering students.

Introducción

La derivada es uno de los objetos matemáticos fundamentales presente en la formación de los ingenieros, lo que ha generado diversos estudios con relación a la complejidad de sus significados, sus múltiples representaciones, los procesos de enseñanza y aprendizaje, la idoneidad del significado de la derivada en los distintos currículos y los significados parciales en los textos universitarios de enseñanza para las ingenierías (LARIOS; JIMÉNEZ, 2022; LARIOS; MURILLO; REYES, 2021; PINO-FAN; GODINO; FONT, 2016; RODRÍGUEZ-NIETO; RODRÍGUEZ-VÁSQUEZ; FONT, 2022). Trabajar los distintos significados de un objeto matemático es un aspecto propuesto por el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción Matemáticos (EOS, a partir de ahora) (GODINO; BATANERO; FONT, 2007, 2019), lo cual se plantea analizar la complejidad de los objetos matemáticos por medio de sus pluri significaciones (significados parciales).

Algunos estudios de la derivada en carreras de Ingeniería Comercial destacan tener presente la relación entre los conceptos económicos y matemáticos, siendo los modos de representación los más utilizados en microeconomía (BALLARD; JOHNSON, 2004; BUTLER; FINEGAN; SIEGFRIED, 1994; GARCÍA; AZCÁRATE; MORENO, 2006; HEY, 2005). También, por las dificultades en la interpretación de situaciones económicas debido a la débil comprensión de los significados matemáticos que las organizan (ARIZA-COBOS; LINARES-CISCAR, 2009).

En esta línea, este trabajo hace parte de una investigación más amplia que pretende profundizar la comprensión de los futuros ingenieros comerciales acerca al objeto matemático derivada en el contexto chileno. Para atender dicho objetivo, se ha realizado un estudio en diferentes etapas.

La primera etapa fue un estudio diagnóstico, lo cual reveló que los futuros ingenieros comerciales presentan dificultades en el concepto de función y la concepción euclidiana de la recta tangente; la construcción del significado de recta tangente como límite de rectas secantes; la interpretación de la función derivada y su representación geométrica; realizar operaciones para calcular la pendiente de una recta y; operar con funciones (GALINDO ILLANES *et al.*, 2022; GALINDO ILLANES; BREDÁ, 2020).

La segunda etapa fue el estudio del tratamiento de la derivada en los programas de las asignaturas de las carreras de Ingeniería Comercial en Chile, lo cual mostró que, si bien la mayor

parte de las propuestas curriculares presentan similitudes en la organización de contenidos y en los elementos lingüísticos utilizados para la construcción del objeto derivada, se observan diferencias importantes en la preponderancia de la derivada interpretada como una razón de cambio y en los campos de problemas abordados (GALINDO ILLANES; BREDA, 2022).

La tercera etapa fue el estudio de los significados pretendidos de la derivada en libros de texto para las carreras de Ingeniería Comercial en Chile, que registró: a) un énfasis en el significado parcial de la derivada como el límite del cociente de incrementos y un predominante lenguaje simbólico en los argumentos; b) poca presencia de algunos teoremas importantes relacionados a la derivada y; c) falta de una representatividad de las definiciones de la derivada (GALLINDO ILLANES; BREDA, 2023).

Con base en lo anterior, este trabajo tiene como objetivo dar a conocer el diseño de un proceso de enseñanza y aprendizaje de la derivada para futuros ingenieros comerciales, estudiantes de la carrera de Ingeniería Comercial de una universidad chilena. Para ello, se ha tenido en cuenta, además de las herramientas teóricas del Enfoque Ontosemiótico (explicadas en la secuencia del texto), los resultados de las etapas del estudio previamente mencionado.

1. Marco teórico

Los desarrollos teóricos propuestos por el EOS, explicados recientemente en Godino, Batanero y Font (2019), tienen como objetivo dar respuesta a algunos problemas generados en el campo de la Educación Matemática. En el EOS, se asume que la actividad matemática es una actividad humana centrada en la resolución de problemas, que tiene lugar en un tiempo-espacio determinado, a través de una secuencia de prácticas que, a menudo, se consideran procesos (de significación, conjeturar, argumentar, etc.). Para ello, el EOS propone las nociones de situación-problema de práctica matemática (secuencia de prácticas) que tiene lugar durante la resolución de estas situaciones problema. Tales secuencias tienen lugar en el tiempo y se suelen considerar, en muchos casos, como procesos. En particular, el uso y/o la emergencia de los objetos primarios de la configuración (problemas, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos), tiene lugar mediante los respectivos procesos matemáticos de comunicación, problematización, definición, enunciación, elaboración de procedimientos (creación de algoritmos y rutinas) y argumentación (aplicando la dualidad proceso-producto). Asimismo, las dualidades antes descritas, dan lugar a los siguientes procesos: institucionalización – personalización,

generalización – particularización, análisis/descomposición – síntesis/reificación, materialización/concreción – idealización/abstracción, expresión/representación – significación.

El EOS también asume el principio de que el conocimiento de un objeto, por parte de un sujeto (ya sea individuo o institución), es el conjunto de funciones semióticas que este sujeto puede establecer en las que el objeto interviene como expresión o contenido. Además, la correspondencia entre un objeto y el sistema de prácticas donde tal objeto interviene se interpreta como el "significado de ese objeto" (institucional o personal). Por ejemplo, cuando un sujeto realiza y evalúa una secuencia de prácticas matemáticas, activa un conglomerado formado por situaciones-problemas, lenguajes, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos, articulados en lo que, en términos del EOS, se llama una configuración de objetos primarios (FONT, GODINO Y GALLARDO, 2013). Para delimitar los significados de un objeto matemático, el EOS propone la herramienta denominada análisis de sistemas de prácticas (personales e institucionales) y las configuraciones ontosemióticas involucradas en ellas (GODINO, 2014; GODINO Y BATANERO, 1994).

Representatividad de la complejidad de los objetos matemáticos en el EOS: el caso de la derivada

En Font, Godino y Gallardo (2013) se explica que la noción de complejidad del objeto matemático y la de articulación de los componentes de dicha complejidad juegan un papel esencial. Entender la complejidad en término de una pluralidad de significados es resultado de la visión pragmatista sobre el significado que se asume en el EOS. Desde un punto de vista pragmatista, el significado de un objeto matemático se entiende como el conjunto de prácticas en la que dicho objeto interviene de una manera determinante (o no). Un objeto matemático, que se ha originado como un emergente del sistema de prácticas que permite resolver un determinado campo de problemas, con el paso del tiempo queda enmarcado en diferentes programas de investigación. Cada nuevo programa de investigación permite resolver nuevos tipos de problemas, aplicar nuevos procedimientos, relacionar el objeto (y por tanto definir) de manera diferente, utilizar nuevas representaciones, etc. De esta manera, con el paso del tiempo aparecen nuevos subconjuntos de prácticas (sentidos) que amplían el significado del objeto.

Para el objeto matemático derivada, Pino-Fan, Godino y Font (2011) caracterizan su complejidad mediante nueve configuraciones de objetos primarios: 1) tangente en la matemática

griega; 2) variación en la edad media; 3) métodos algebraicos para hallar tangentes; 4) concepciones cinemáticas para el trazado de tangentes; 5) ideas intuitivas de límite para el cálculo de máximos y mínimos; 6) métodos infinitesimales en el cálculo de tangentes; 7) cálculo de fluxiones; 8) cálculo de diferencias; y 9) derivada como límite. En Pino-Fan, Castro, Godino y Font (2013) se utilizan estas nueve configuraciones para la reconstrucción del significado global de la derivada, el cual es utilizado para valorar la representatividad del significado pretendido en el currículo de Bachillerato de México (a partir de las configuraciones de objetos primarios activadas en las prácticas matemáticas propuestas tanto en el Plan de Estudios como en los libros de texto de dicho nivel). La caracterización de la complejidad de la derivada realizada en Pino-Fan, Godino y Font (2011) facilita tener elementos para diseñar cuestionarios que permiten caracterizar la comprensión de los estudiantes, futuros profesores o profesores en servicio sobre la derivada. Por ejemplo, en Pino-Fan, Godino y Font (2015), se diseñó un cuestionario para determinar la comprensión de futuros profesores sobre la derivada en el que se incluyeron tareas que activan los diversos significados parciales de la derivada caracterizados en Pino-Fan, Godino y Font (2011).

De acuerdo con el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemáticas (EOS) (GODINO, BATANERO Y FONT, 2019), por problemas sobre tangentes se entiende las prácticas que realiza el alumno para resolver problemas en los que la pendiente de la recta tangente (significado geométrico de la derivada) tiene un papel relevante en su resolución, lo cual implica concebirla también como “conocimiento y aplicación de las normas” que regulan la práctica y los objetos primarios que intervienen en ella (problemas, procedimientos, proposiciones, definiciones y argumentos) (GALINDO; BREDAS, 2020; GALINDO et. al., 2022). De igual forma, consideraremos, en este trabajo, las tres configuraciones epistémicas: manipulativas (el estudiante trabaja con dispositivos manipulativos sin utilizar notación o cálculo algebraico), algebraica (se caracteriza por un lenguaje simbólico y la demostración deductiva, así como el recurso de elementos de álgebra y análisis) y computacional (se caracteriza por el lenguaje icónico, incorpora como procedimiento la simulación y el argumento preferible es inductivo) adaptadas de Alvarado, Galindo y Retamal (2013), en el contexto de la derivada.

2. Metodología

En este apartado se explica el contexto del estudio, los instrumentos de colecta de datos y el análisis de estos.

Contexto del estudio

Participantes

Participarán en la investigación estudiantes de la carrera de Ingeniería Comercial de la Facultad de Economía y Negocios de una universidad del sur de Chile, con edades entre 19 y 20 años. El plan de estudios de Ingeniería Comercial considera la asignatura de cálculo aplicado a los negocios en el tercer semestre académico, y tiene como prerrequisito el curso de Álgebra o Métodos Cuantitativos.

Bases para una propuesta didáctica

El plan de intervención consideró, para el desarrollo de la enseñanza de la derivada, los siguientes elementos:

- a) **Campos de problema.** A partir del significado institucional pretendido y el análisis de referencia de Galindo y Breda (2023), la propuesta considera los campos de problemas sobre: tangentes (CP1), el cálculo de tasas instantáneas de cambio y de tasas instantáneas de variación (CP2), aplicaciones de la derivada para el cálculo de máximos y mínimos, análisis de gráficas de funciones (CP3), y el cálculo de derivadas a partir de reglas y teoremas de derivación (CP4).
- b) **Configuraciones epistémicas.** La propuesta considera las configuraciones epistémicas caracterizadas y utilizadas por Galindo et al. (2022), estas son:
 - (i) Configuración Manipulativa, el estudiante trabaja con papel, regla y lápiz. El lenguaje utilizado en esta configuración es el característico de los procedimientos descriptivos y de la geometría analítica.
 - (ii) Configuración Computacional, el estudiante dispone de notebook o celulares o Tablet, internet, *GeoGebra* (versión gratuita) y código QR. El lenguaje y los procedimientos son de tipo gráfico, geométrico y descriptivo.
 - (iii) Configuración Algebraica, el estudiante dispone de notebook o celulares o Tablet, internet, Software educativos como *Symbolab* (versión gratuita) y *Wolfram Alpha* (versión gratuita). El lenguaje y procedimientos son de tipo simbólico y tabular.

- c) **Trabajo presencial de aula y trabajo autónomo fuera de aula.** La trayectoria didáctica considera sesiones en aula y sesiones fuera del aula, todas dirigidas por el docente de la asignatura. Las sesiones de aula se desarrollan en formato presencial y en los horarios establecidos de clases. Sin embargo, las sesiones fuera de aula no tienen horario establecido y considera el trabajo autónomo del estudiante.

3. Resultados

Desarrollo de la enseñanza

El programa de actividad curricular de Cálculo Aplicado a los Negocios se desarrolla en 15 semanas, cada semana dispone de 4 sesiones presenciales en aula, cada sesión tiene una duración de 80 minutos. Además, cada semana dispone de 2 horas cronológicas de trabajo autónomo, declaradas en el programa curricular de la asignatura.

La unidad 1 de aprendizaje corresponde al estudio de la derivada de funciones reales, para el desarrollo de la enseñanza se contemplan 5 semanas de clases, considerando la Temporalización y Planificación descritas en el Cuadro 1:

Cuadro 1 – Temporalización y Planificación de los Campos de Problemas.

Semana	CP	Sesiones Presenciales (SP)	Tiempo SP	Sesiones Trabajo Autónomo (TA)	Tiempo TA
1	1	1 - 4	320 minutos	1	120 minutos
2	2	5 - 8	320 minutos	2	120 minutos
3	3	9 - 12	320 minutos	3	120 minutos
4	4	13 - 16	320 minutos	4	120 minutos
5	4	13 - 16	320 minutos	4	120 minutos

Fuente: Elaboración de los autores

Las sesiones presenciales de aula se realizaron en los horarios establecidos para las clases teóricas y prácticas, las actividades consideradas fueron individuales y grupales colaborativas favoreciendo el dialogo, la retroalimentación y la consolidación de los conocimientos adquiridos por el estudiante durante su trabajo autónomo. Las sesiones fuera de aula son parte del trabajo autónomo del estudiante e incluyen actividades como visualizar videos educativos, leer apuntes teórico-práctico y realizar las tareas, disponibles en la plataforma virtual Moodle.

La planificación del estudio de los campos de problemas de la derivada contempla veinte sesiones presenciales de aula y cinco sesiones de trabajo autónomo fuera de aula, en un tiempo de cinco semanas (ver Cuadros 2, 3, 4, 5 y 6).

Cuadro 2 – Semana 1: Temporalización y Planificación de los Problemas sobre Tangentes.

Sesión Presencial (SP)	Acción didáctica	Objetivo de la acción didáctica	Lenguajes	Configuraciones
1	Tarea SP1	Obtención de la pendiente de la recta tangente mediante aproximaciones por la pendiente de rectas secantes.	Tabular Geométrico Gráfico Descriptivo	Manipulativas Computacional
2	Tarea SP2	Identificación de la recta tangente a una curva.	Geométrico Gráfico Descriptivo	Manipulativas Computacional
3	Tarea SP3	Interpretación geométrica de la derivada en un punto particular. (Consolidar utilizando teoría de límite intuitivamente)	Simbólico Gráfica	Computacional Algebraica
4	Tarea SP4	Articulación de la derivada de una función en un punto y su función derivada. (Consolidar utilizando teoría de límite)	Tabular Gráfica Simbólico Descriptivo	Computacionales Algebraica
5	Tarea SP5	Aplicación de la función derivada (Utilizando definición de límite)	Gráfico Simbólico Descriptivo	Computacionales
Sesión Trabajo Autónomo (TA)	Acción didáctica	Objetivo de la acción didáctica	Lenguajes	Configuraciones
1	Tarea TA1	Estudio de manuscrito teórico-práctico del curso, que considera la construcción de la ecuación de una recta tangente a una curva.	Simbólico Gráfica	Computacional Algebraica
2	Tarea TA2	Aplicación de la recta tangente a problemas económicos. Aplicación de la interpretación geométrica de la derivada.	Tabular Gráfica Simbólico Descriptivo	Computacionales Algebraica

Fuente: Elaboración de los autores

Para comenzar el estudio de la derivada, es fundamental construir previamente el concepto de la recta tangente a una curva considerando las concepciones cartesiana y euclidiana (GALINDO, et al., 2022), para esto en la sesión presencial 1 y 2 (Tarea SP1 y Tarea SP2) y en las sesiones de trabajo autónomo (Tarea TA1 y Tarea TA2) se propone a los estudiantes resolver

tareas que le permitirán ampliar la concepción euclidiana a la cartesiana, mediante la construcción de la recta tangente como límite de rectas secantes utilizando configuraciones manipulativas y computacionales, a través de las gráficas utilizando regla y lápiz, y del uso de un applet de *GeoGebra*, el lenguaje utilizado será mayormente geométrico. Además, con el propósito de la tematización del esquema de recta tangente (GALINDO, et al., 2022) se consideran aplicaciones económicas, relacionando el concepto de pendiente de la recta secante con el de costo medio y el concepto de costo marginal como la aproximación de los costos medios calculados, destacando su equivalencia con la pendiente de la recta tangente.

En la sesión presencial 3, se considera la Tarea SP3 que relaciona la pendiente de la recta tangente a una curva con la derivada de la función en el punto de tangencia. El propósito es consolidar en el estudiantado el concepto de derivada puntual como límite de pendientes de rectas secantes, conociendo el proceso de la identificación de la tendencia de las pendientes de las rectas secantes con la derivada de la función en el punto de tangencia, (ORTS et al., 2016). En la sesión de trabajo autónomo (Tarea TA2) se consolida la interpretación geométrica de la derivada, fortaleciendo el vínculo entre la recta tangente y la derivada en un punto.

La sesión presencial 4, articula la derivada de una función en un punto y su función derivada. Para ello se considera la Tarea SP4 que promueve el tránsito entre las representaciones gráfica, tabular y analítica de f' , la expresión simbólica de la función $f(x)$ es conocida y se construye la función que cumplen todas las pendientes de las rectas tangentes, ésta corresponde a la función simbólica de $f'(x)$ (FONT, 2005), entre los ejercicios desarrollados se considera el problema propuesto por Galindo, et al., (2022).

En la sesión presencial 5, se generaliza la función derivada como la función que a cada valor le hace corresponder la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x, f(x))$. Se espera que el estudiante interprete la función derivada $f'(x)$ como la función cuyas imágenes, $y_0 = f'(x_0)$, corresponden a las pendientes de las rectas tangentes a la función f en x_0 , a través de la Tarea SP5 que corresponde a la manipulación de unos applets de *GeoGebra*.

A continuación, se consideran ejemplos de algunas tareas realizadas durante la semana1:

Figura 1 – Tareas sesión presencial 1

TAREA SESIÓN PRESENCIAL 1 CÁLCULO APLICADO A LOS NEGOCIOS

Objetivo de la acción didáctica: Obtención de la pendiente de la recta tangente mediante aproximaciones por la pendiente de rectas secantes.

Tiempo de duración: 80 minutos.

- i. Problema 1: 30 minutos.
- ii. Problema 2: 10 minutos.
- iii. Problema 3: 10 minutos.
- iv. Problema 4: 10 minutos.
- v. Reflexión y cierre por problema: 20 minutos.

PROBLEMA 1. Sea $f(x) = x^2$ una función real de variable real. Determine la pendiente de las rectas secantes que contiene a los puntos $P(-1,1)$ y $Q(x, f(x))$.

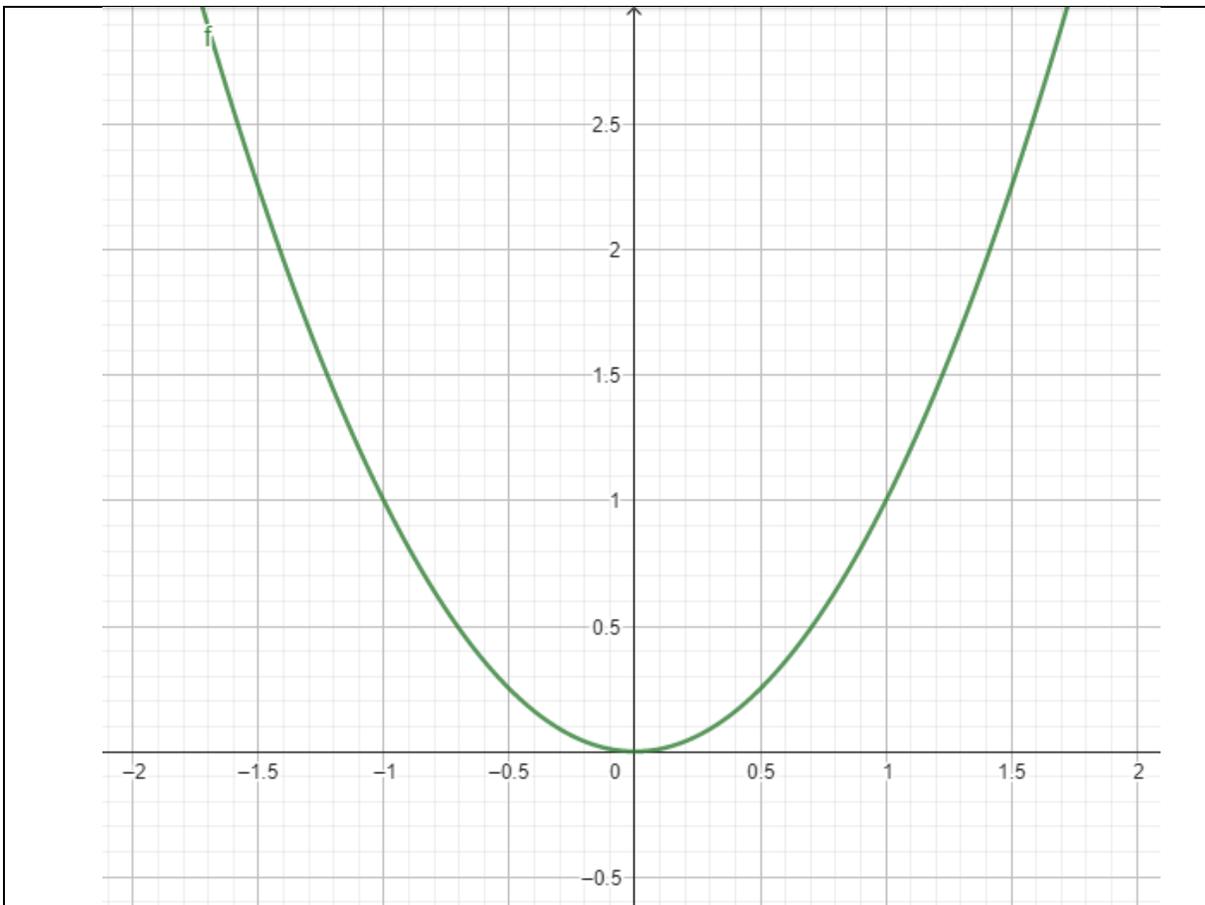
$Q(x, f(x))$	(1,1)	(0.5,0.25)	(-0.5,0.25)
<i>Pendiente PQ</i>			

Aproximándose al *Punto P* por la derecha:

- b) ¿Cuál es el valor aproximado de la *Pendiente de la recta PQ* cuando el *Punto Q* se aproxima a *P* por la derecha?
- c) Ahora, plantea dos nuevos puntos que se aproximen al *Punto P* por la derecha y calcula las respectivas *Pendientes de las rectas PQ*.

$Q(x, f(x))$	(,)	(,)
<i>Pendiente PQ</i>		

- d) Grafique las rectas secantes a f , considerando los puntos propuestos en a) y b).



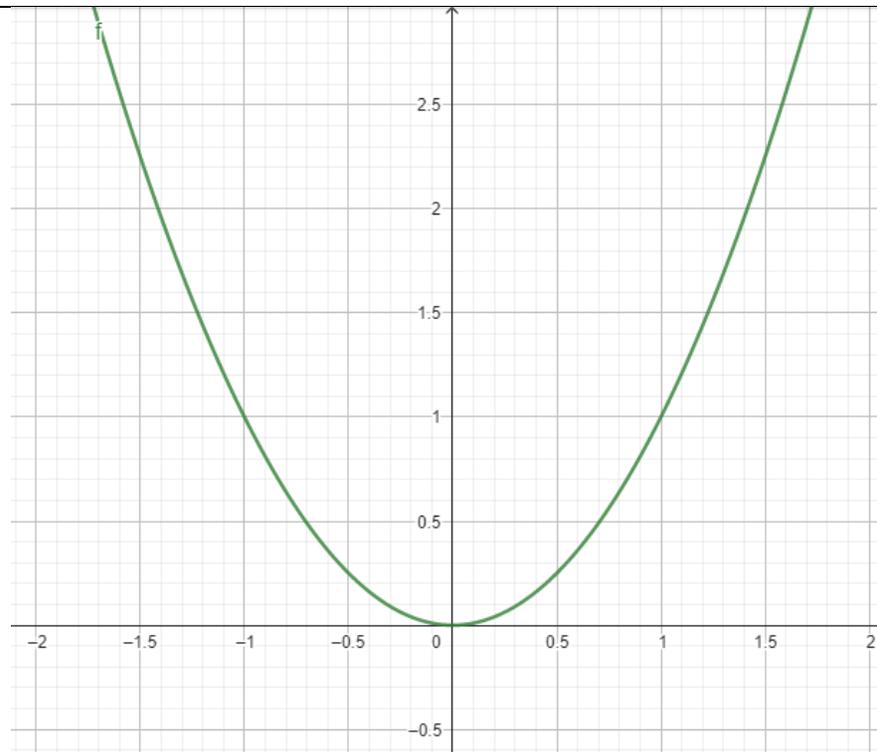
Aproximándose *Punto P* por la izquierda:

$Q(x, f(x))$	$(-2,4)$	$(-1.5,2.25)$	$(-1.3,1.69)$
<i>Pendiente PQ</i>			

- e) ¿Cuál es el valor aproximado de la *Pendiente de la recta PQ* cuando el *Punto Q* se aproxima a *P* por la izquierda?
- f) Ahora, plantea dos nuevos puntos que se aproximen al *Punto P* por la izquierda y calcula las respectivas *Pendientes de las rectas PQ*

$Q(x, f(x))$	$(,)$	$(,)$
<i>Pendiente PQ</i>		

- g) Grafique las rectas secantes a f , considerando los puntos propuestos en e) y f).



Ahora, concluya respecto a las gráficas elaboradas.

¿Entre qué valores debe estar la pendiente de la recta tangente a la curva en el *Punto P*?

PROBLEMA 2. Utilice su teléfono para escanear el siguiente código QR o acceda al siguiente link <https://ggbm.at/pPAJ6Zf8>.



Fije el punto *A* sobre la curva y aproxime el punto *B* (perteneciente a la gráfica de la función) *f*, hacia el punto *A*. Explique con sus palabras por qué puede determinar la pendiente de la recta tangente *f* en el punto de abscisa *a* y determine su valor.

Fuente: Elaboración de las autoras.

Figura 2 – Tareas sesión presencial 2

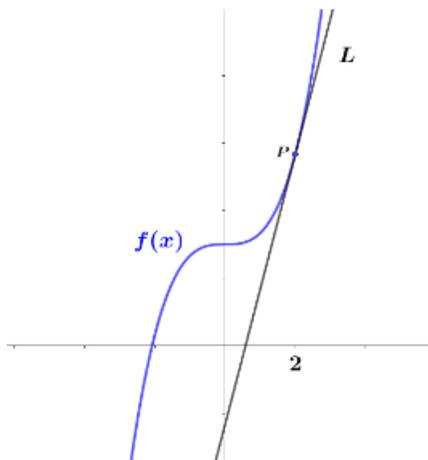
TAREA SESIÓN PRESENCIAL 2
CÁLCULO APLICADO A LOS NEGOCIOS

Objetivo de la acción didáctica: Interpretación geométrica de la derivada en un punto particular.

Tiempo de duración: 80 minutos.

- Problema 1: 20 minutos.
- Problema 2: 40 minutos.
- Reflexión de cierre: 20 minutos.

PROBLEMA 1. Considerando el gráfico de la función f . Determine la derivada de f en el punto de abscisa 2 , si se sabe que la recta L es tangente a la gráfica de f en el punto P de abscisa 2 y ésta corta al eje x en $7/12$ y corta al eje y en $-7/3$. Justifique adecuadamente.



PROBLEMA 2. Sea $f(x) = x^2$ una función real de variable real.

- Con apoyo de *Symbolab*, obtenga la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x_0 = 1$, es decir, $m_T = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
- ¿Cuál es el valor de la derivada de la función f en el punto de abscisa $x_0 = 1$?
- Complete la siguiente tabla.

x_0	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f'(x_0)$											

- Basado en la tabla anterior, represente los puntos $(x_0, f'(x_0))$ en un plano cartesiano.
- Trace la gráfica de la curva que contiene los puntos $(x_0, f'(x_0))$.

Modele la curva antes dibujada para cualquier punto y explique en propias palabras lo que ella representa.

Fuente: Elaboración de los autores.

Figura 3 – Tareas sesión presencial 4

**TAREA SESIÓN PRESENCIAL 4
CÁLCULO APLICADO A LOS NEGOCIOS**

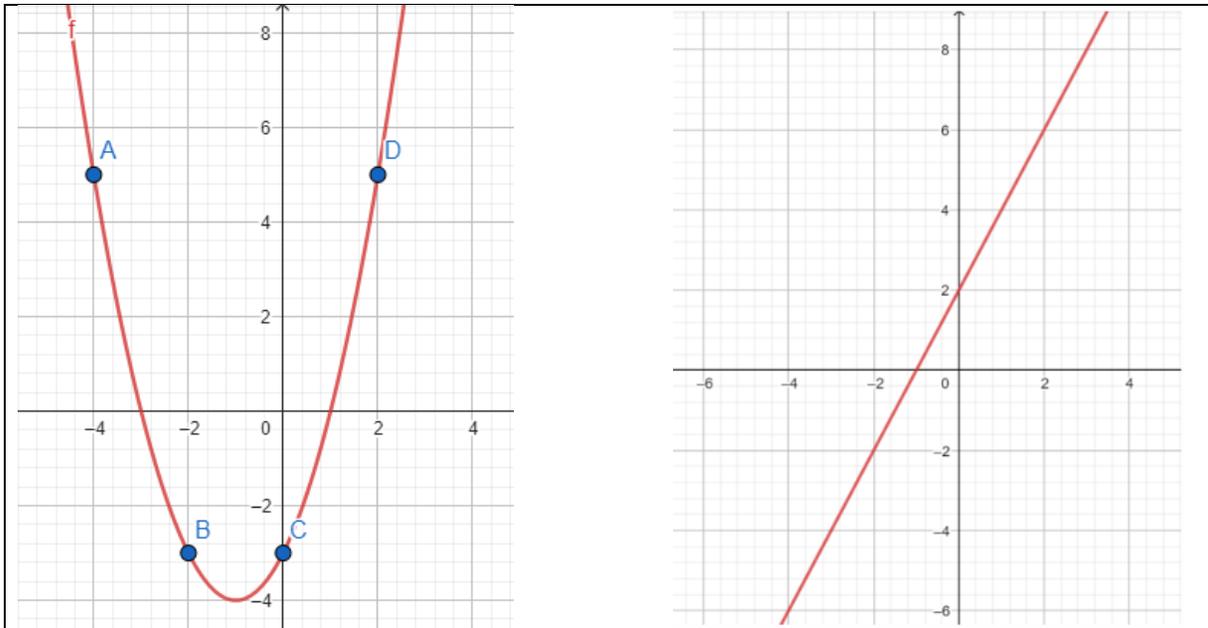
Objetivo de la acción didáctica: Aplicación de la función derivada

Tiempo de duración: 60 minutos.

- Problema 1: 20 minutos.
- Problema 2: 20 minutos.
- Problema 3: 20 minutos.
- Reflexión y cierre por problema: 20 minutos.

PROBLEMA 1.

Se sabe que la gráfica de una función f es: _____ y la gráfica de su función derivada f' es:



- Observando el gráfico de la función derivada, determine: $f'(-4)$, $f'(-2)$, $f'(0)$ y $f(2)$
- Determine la pendiente de la recta tangente a la función en $x = -4$, $x = -2$ y $x = 2$.
- Determine la ecuación de la recta tangente a la función en: $A(-4,5)$, $B(-2, -3)$, $C(0, -3)$ y $D(2,5)$
- Determine donde la $f'(x)$ es: positiva, negativa e igual a cero.

PROBLEMA 2. Realizar el cálculo de las funciones derivadas utilizando la definición de límite:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

a) $f(x) = x^2$

Utilice su teléfono para escanear el siguiente código QR o acceda al siguiente link

<https://www.geogebra.org/m/nymrqbbn>



Para los siguientes ítems utilice el applet anterior y cambie la función según corresponda.

- $f(x) = x^3$
- $f(x) = x^2 + 1$
- $f(x) = x^2 + 2x$

Fuente: Elaboración de los autores.

Figura 4 – Tareas sesión Trabajo Autónomo TA2

**TAREA TRABAJO AUTÓNOMO 2
CÁLCULO APLICADO A LOS NEGOCIOS**

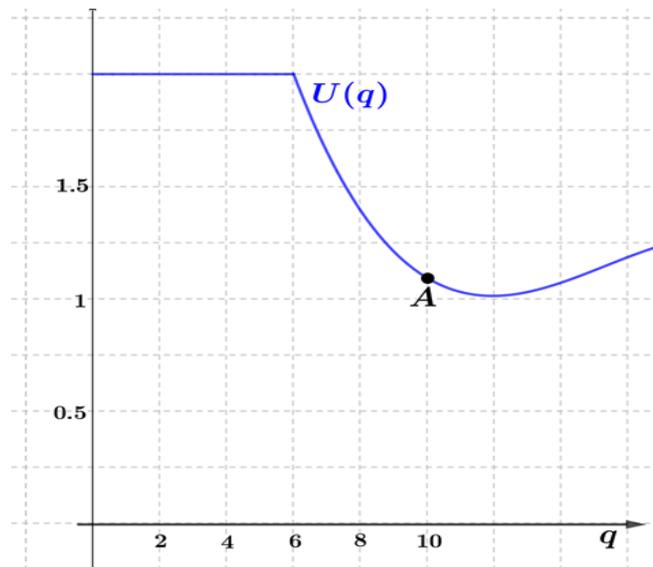
Objetivo de la acción didáctica: Aplicación de la recta tangente a problemas económicos. Aplicación de la interpretación geométrica de la derivada.

PROBLEMA 1. Considere la siguiente tabla que relaciona la **Utilidad** (U) (en unidades monetarias) y la cantidad producida y vendida (q) de un emprendimiento familiar de cajas de chocolates artesanales.

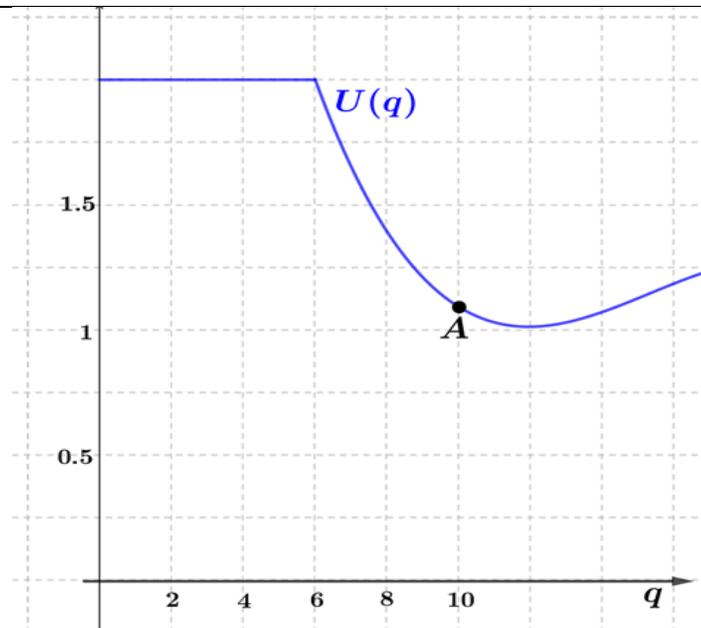
Tabla de valores				
q	9.7	9.8	9.9	10
$U(q)$	1.53	1.31	1.17	1.07

- a) Esboce las gráficas de las siguientes rectas secantes a la gráfica de U que contienen a los siguientes puntos y calcule en cada caso la utilidad media.

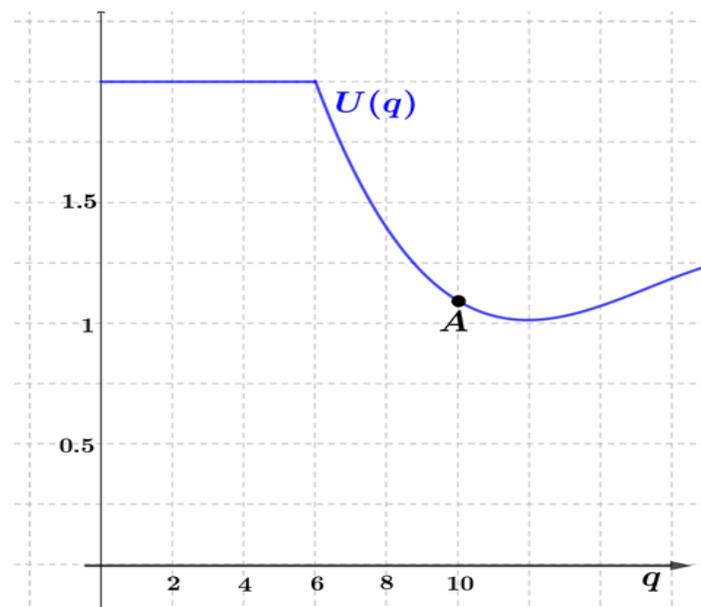
A(9.7, 1.53)	P (10, 1.07)	Utilidad media (U_{me}) =
--------------	--------------	-------------------------------



B(9.9, 1.17)	P (10, 1.07)	Utilidad media (U_{me}) =
--------------	--------------	-------------------------------



- b) Interprete los valores encontrados.
 c) Esboce la recta tangente a la gráfica de la función d en el punto $P(10,1.07)$.



- d) Explique de qué forma usted podría aproximar geoméricamente la Utilidad Marginal (U_{mg}) en el *Punto P* .
 e) ¿Cuál es el valor aproximado de la Utilidad Marginal (U_{mg}) en el *Punto P* ?

Fuente: Elaboración de los autores.

A continuación, se presenta la temporalización y la planificación de las semanas 2, 3, 4 y 5:

Cuadro 3 – Semana 2: Temporalización y Planificación de los problemas de cálculo de tasas instantáneas de cambio y de tasas instantáneas de variación

Sesión	Acción didáctica	Objetivo de la acción didáctica	Lenguajes	Configuraciones
6	Tarea SP6	Introducción a las tasas instantáneas de cambio y tasas instantáneas de variación, utilizando funciones reales y aplicaciones económicas.	Gráfico Simbólico Tabular	Manipulativas Computacional
7	Tarea SP7	Articulación entre la recta tangente en un punto, y las tasas instantáneas de cambio y de variación, utilizando aplicaciones físicas y económicas.	Tabular Gráfica Simbólico Descriptivo	Computacionales Algebraica
8	Tarea SP8	Articulación entre las tasas instantáneas de cambio y de variación, y la derivada de una función en un punto, utilizando aplicaciones físicas y económicas.	Gráfico Simbólico Descriptivo	Computacionales
9	Tarea SP9	Generalización de la derivada de una función en un punto y su función derivada (definición algebraica de la derivada como el límite de la razón de cambio)	Tabular Simbólico	Computacionales Algebraica
Sesión Trabajo autónomo	Acción didáctica	Objetivo de la acción didáctica	Lenguajes	Configuraciones
3	Tarea TA3	Estudio de manuscrito teórico-práctico del curso, que considera el cálculo de incrementos de funciones económicas.	Simbólico Gráfica	Computacional Algebraica
4	Tarea TA4	Estudio de manuscrito teórico-práctico del curso, que considera el cálculo de tasas promedios e instantáneas de funciones económicas utilizando derivadas.	Tabular Gráfica Simbólico Descriptivo	Computacionales Algebraica

Fuente: Elaboración de los autores.

Luego de robustecer la idea gráfica de derivada y su relación con la función, considerado un elemento clave para la comprensión de la medida de variación (ARIZA-COBOS; LINARES-CISCAR, 2009), es fundamental construir el concepto de la derivada como una razón de cambio, con el fin de entender las aplicaciones del cálculo diferencial (PORTILLO-LARA, et al., 2019).

En la sesión presencial 6 (Tarea SP6) y en las sesiones de trabajo autónomo (Tarea TA3) se propone a los estudiantes resolver tareas que permiten introducir el concepto de incremento y de tasas de cambio, de funciones reales y económicas, utilizando configuraciones computacionales, a través del uso de un applet de *GeoGebra* que ayuda a comprender la

variación en sus diferentes niveles cognitivos (PORTILLO-LARA, et al., 2019), el lenguaje utilizado será mayormente geométrico y simbólico.

En la sesión presencial 7, se considera la Tarea SP7 que relaciona las tasas instantáneas de cambio y de variación, con la pendiente de la recta tangente a una curva, con el propósito de desencapsular la recta tangente a través de tareas aplicadas a funciones económicas y físicas, favoreciendo la comprensión del concepto de la derivada como una razón de cambio.

La sesión presencial 8, se considera la Tareas SP8 que articula las tasas instantáneas de cambio y de variación, con la derivada de una función en un punto. Cuyo propósito es promover el tránsito entre las representaciones gráfica, tabular y analítica de f' como razón de cambio. A través de aplicaciones económicas y físicas.

En la sesión presencial 9, que generaliza la función derivada como la función que a cada valor le hace corresponder la razón de cambio de f en el punto $(x, f(x))$. Se espera que el estudiante interprete la función derivada $f'(x)$ como la función cuyas imágenes, $y_0 = f'(x_0)$, corresponden a las razones de cambio de la función f en x_0 , a través de la Tarea SP9 que corresponde a la manipulación de unos applets de *GeoGebra*.

A continuación, se presenta la temporalización y la planificación de la semana 3:

Cuadro 4 – Semana 3: Temporalización y Planificación de los problemas de cálculo de derivadas a partir de reglas y teoremas de derivación

Sesión Presencial	Acción didáctica	Objetivo de la acción didáctica	Lenguajes	Configuraciones
10	Tarea SP10	Definición del álgebra de las derivadas	Simbólico	Algebraica
11	Tarea SP11	Definición de las reglas de derivadas para las funciones: <ul style="list-style-type: none"> • $f(x) = x^n, \forall n \in \mathbb{R}$, x^n y x^{-n} bien definidas • $f(x) = e^x, \forall x \in \mathbb{R}$ • $f(x) = \ln(x), \forall x > 0$ Aplicación del álgebra de las derivadas y de las reglas de derivación.	Simbólico Gráfico	Computacional Algebraica
12	Tarea SP12	Definición de las derivadas de las funciones exponencial y logaritmo, y de la regla de la cadena, aplicada a funciones polinómicas, exponenciales y logarítmicas.	Simbólico Gráfico	Computacional Algebraica
13	Tarea SP13	Aplicación de las reglas de derivadas para el cálculo de marginales.	Simbólico	Algebraica

Sesión Trabajo autónomo	Acción didáctica	Objetivo de la acción didáctica	Lenguajes	Configuraciones
5	Tarea TA5	Estudio de manuscrito teórico-práctico del curso, que considera el cálculo de derivadas utilizando el álgebra de derivadas y las reglas de derivación.	Simbólico	Computacional Algebraica
6	Tarea TA6	Estudio de manuscrito teórico-práctico del curso, que considera el uso de las reglas de derivadas para el cálculo de marginales.	Simbólico	Computacional Algebraica

Fuente: Elaboración de los autores.

Luego de robustecer la interpretación geométrica de la derivada y el concepto de la derivada como razón de cambio, resulta beneficioso establecer el álgebra de la función derivada y las reglas de derivadas para las funciones establecidas en el programa de la asignatura.

La sesión presencial 10 (Tarea SP10) tiene el propósito de establecer el álgebra de la función derivada. Para definición de estas, se utilizará un lenguaje mayormente simbólico y la configuración será algebraica.

Las sesiones presenciales 11 y 12 (Tarea SP11, Tarea SP12, Tarea TA5) tienen por propósito, establecer las reglas de derivadas y aplicarlas junto álgebra de la función derivada. Si bien, al establecer las reglas de derivadas, el lenguaje será mayormente simbólico, también se utilizará un lenguaje gráfico, a través de un applet de GeoGebra que permitirá visualizar gráficamente la función derivada. Además, se utilizará Symbolab para verificar los resultados de los cálculos algebraicos involucrados en la obtención de las funciones derivadas.

En la sesión presencial 13 (Tarea SP13) y la sesión de trabajo autónomo (Tarea TA6) se propone a los estudiantes aplicar el álgebra de la función derivada y las reglas de derivación en el cálculo de funciones marginales (costo marginal, ingreso marginal y utilidad marginal), utilizando configuraciones algebraicas y un lenguaje simbólico.

Cuadro 5 – Semana 4: Temporalización y Planificación de los problemas de aplicaciones de la derivada para el cálculo de máximos y mínimos, y análisis de monotonía de funciones reales y económicas.

Sesión Presencial	Acción didáctica	Objetivo de la acción didáctica	Lenguajes	Configuraciones
14	Tarea SP14	Articulación de la interpretación geométrica de la derivada y el criterio de la primera derivada para extremos relativos.	Gráfico Simbólico	Computacional
15	Tarea SP15	Aplicación del criterio de la primera derivada a problemas	Gráfico Simbólico	Algebraica

		clásicos de optimización de funciones reales y económicas.		
16	Tarea SP16	Aplicación de la primera derivada al análisis de la monotonía de funciones reales y económicas, orientada al trazado de curvas.	Simbólico Gráfico	Computacional Algebraica
17	Tarea SP17	Aplicación del criterio de la segunda derivada a problemas clásicos de optimización de funciones reales y funciones económicas.	Gráfico Simbólico	Algebraica
Sesión Trabajo autónomo	Acción didáctica	Objetivo de la acción didáctica	Lenguajes	Configuraciones
7	Tarea TA7	Estudio de manuscrito teórico-práctico del curso, que considera la aplicación del criterio de la primera y segunda derivada a problemas clásicos de optimización de funciones reales y económicas.	Simbólico Gráfico	Computacional Algebraica
8	Tarea TA8	Estudio de manuscrito teórico-práctico del curso, que considera la aplicación de la primera derivada para el análisis de la monotonía de funciones reales y económicas.	Simbólico Gráfico	Computacional Algebraica

Fuente: Elaboración de los autores.

Luego de fortalecer la interpretación geométrica de la derivada en la semana 1, el concepto de la derivada como razón de cambio en la semana 2, y establecer el álgebra de la función derivada y las reglas de derivadas en la semana 3. En la semana 4, se pretende establecer los criterios de la primera y segunda derivada para la optimización de funciones reales y económicas, además de aplicar la primera derivada al trazado de curvas de funciones reales y económicas.

En la sesión presencial 14 (Tarea SP14) se establece una articulación entre la interpretación geométrica de la derivada y el criterio de la primera derivada, a través del análisis de la monotonía de una función real. Utilizando un lenguaje mayormente gráfico y en menor medida simbólico. La configuración será computacional gracias a la integración de un applet de GeoGebra.

La sesión presencial 15 y 16 (Tarea SP15, SP16) y trabajo autónomo (Tarea TA7 y Tarea TA8) tienen como propósito aplicar el criterio de la primera derivada a problemas clásicos de optimización de funciones reales y económicas. Además, se aplicará la primera derivada para el

análisis de la monotonía de funciones reales y económicas. Su lenguaje será gráfico y simbólico y las configuraciones serán computacionales y algebraicas, a través de un applet de Geogebra.

La sesión presencial 17 (Tarea SP17) y trabajo autónomo (Tarea TA7) tienen como propósito aplicar el criterio de la segunda derivada a problemas clásicos de optimización de funciones reales y económicas. Su lenguaje será gráfico y simbólico, y las configuraciones serán algebraicas.

Cuadro 6 – Semana 5: Temporalización y Planificación de los problemas de aplicaciones de la derivada para el cálculo de máximos y mínimos, y análisis de concavidad de funciones reales y económicas

Sesión Presencial	Acción didáctica	Objetivo de la acción didáctica	Lenguajes	Configuraciones
18	Tarea SP18	Aplicación de la segunda derivada al análisis de la concavidad de funciones reales y económicas, orientada al trazado de curvas.	Geométrico Gráfico	Computacional
19	Tarea SP19	Aplicación de la derivada a la optimización del costo en la construcción de una caja sin tapa.	Descriptivo	Manipulativa
20	Tarea SP20	Modelamiento de la función costo para la construcción de una caja sin tapa.	Geométrico Simbólico	Algebraica
21	Tarea SP21	Aplicación de la derivada a la optimización del costo en la construcción de una caja sin tapa.	Simbólico	Computacional Algebraica
Sesión Trabajo autónomo	Acción didáctica	Objetivo de la acción didáctica	Lenguajes	Configuraciones
7	Tarea TA9	Estudio de manuscrito teórico-práctico del curso, que considera la aplicación de la segunda derivada para el análisis de la concavidad de funciones reales y económicas.	Simbólico Gráfica	Computacional Algebraica
8	Tarea TA10	Estudio de manuscrito teórico-práctico del curso, que considera la aplicación de la primera derivada para el análisis de la monotonía de funciones reales y económicas.	Simbólico Gráfica	Computacional Algebraica

Fuente: Elaboración de los autores.

Luego de establecer como aplicación de la primera derivada, la optimización y el análisis de la monotonía, de funciones reales y económicas, y como aplicación de la segunda derivada

la optimización de funciones reales y económicas. La semana 5 tienen como propósito, por un lado, mostrar la aplicación de la segunda derivada para el análisis de la concavidad de funciones reales y económicas en el trazado de curvas (SP18, TA9 y TA10), y, por otro lado, consolidar de manera manipulativa la aplicación de los criterios de primera y segunda derivada para la optimización de una función costo (SP19, SP20, SP21).

Utilizando un lenguaje mayormente gráfico y geométrico, y en menor medida simbólico y descriptivo. La configuración será computacional, manipulativa y algebraica.

Instrumentos de colecta de datos

Al finalizar cada campo de problemas se considera un instrumento evaluativo que permitirá realizar un análisis exploratorio del aprendizaje de los estudiantes. A continuación, por motivos de espacio se presentan cuatro tareas representativas de cada instrumento aplicado. A continuación, se presenta una de las preguntas del instrumento que se aplicará al finalizar el campo de problemas 1, éste nos proporcionará información en torno al conocimiento especializado del estudiante sobre tangentes, ya que durante el desarrollo deberá llevar a cabo la tematización del esquema de recta tangente y concluir el significado geométrico de la derivada en un punto para dar respuesta al enunciado (Figura 5).

Figura 5 – Problema 2 que se aplicará a los estudiantes al finalizar el campo de problemas sobre tangente (CP1).

PROBLEMA 2. Se sabe que la función *Ingreso* (I) está dada por $I(q) = q^2$, con $q \geq 0$, donde q representa unidades.

Se sabe que la gráfica de la función *Ingreso* (I) es:

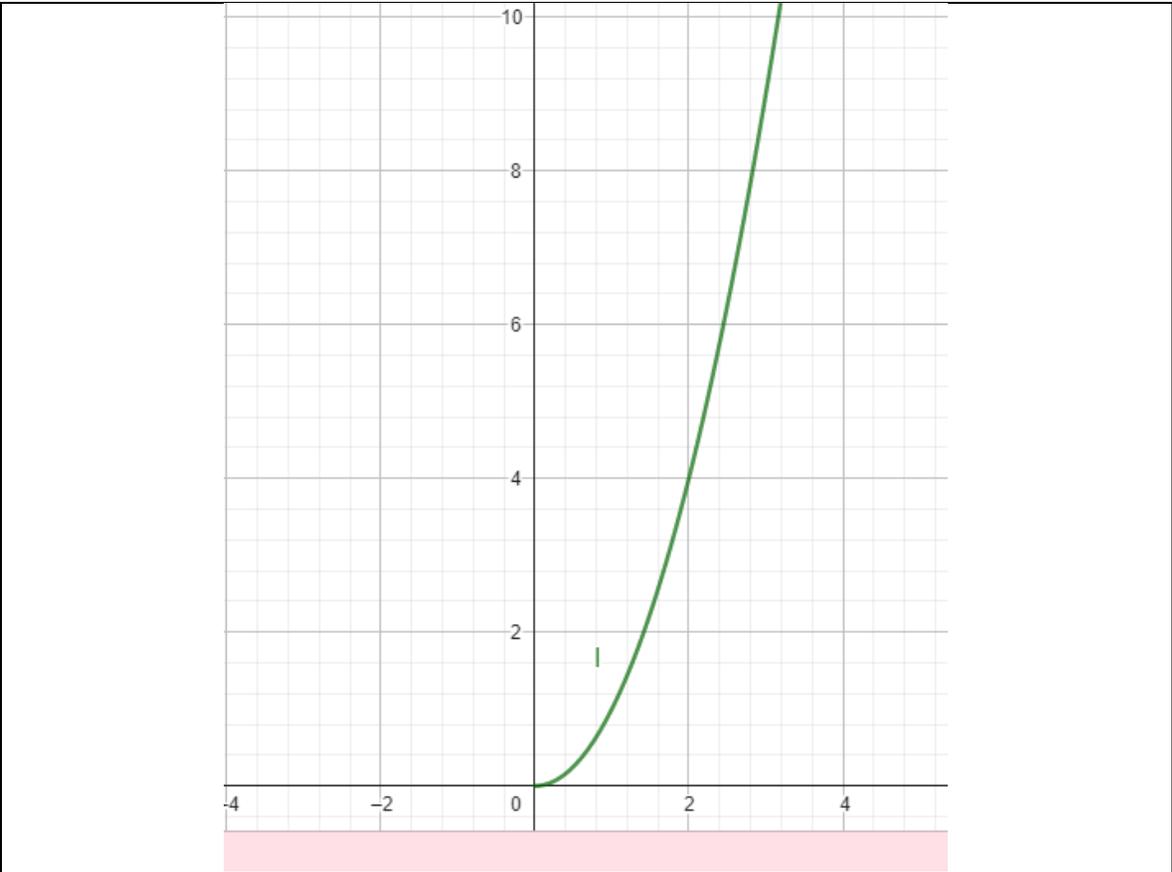


Gráfico 1: Función *Ingreso* ($I(q)$)

y la gráfica de su función derivada $I'(q)$ (Ingreso Marginal) es:

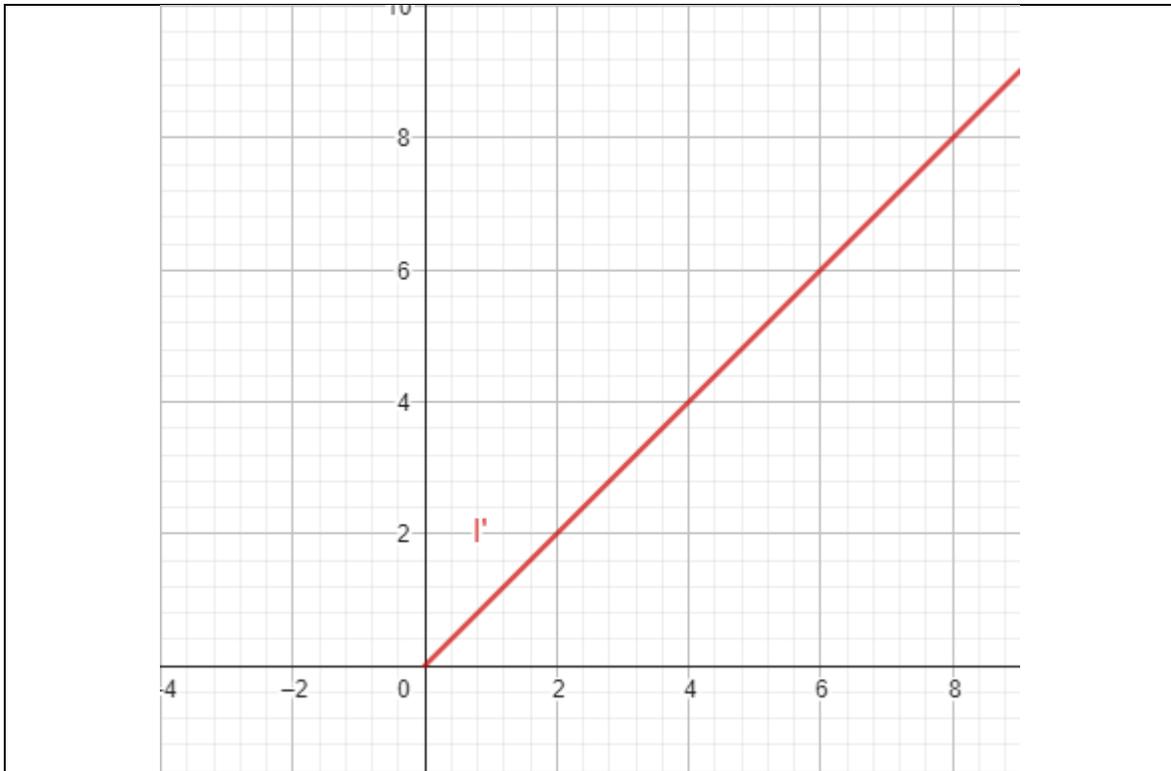


Gráfico 2: Función *Ingreso Marginal* ($I'(q)$)

- Determine la pendiente de la recta tangente en $q = 1$, $q = 4$ y $q = 0$.
- Determine la ecuación de la recta tangente a la función en $q = 4$ y $q = 0$.
- Determine dónde el **Ingreso Marginal** es positivo, negativo o igual a 0. Considerando que se trabaja con unidades.
- Explique con sus propias palabras el comportamiento de la función Ingreso y su relación con la gráfica del ingreso marginal.

Fuente: Elaboración de los autores.

En este problema el estudiante debe analizar los gráficos estableciendo la información que permitirá determinar las pendientes de las rectas tangentes solicitadas y la posterior construcción de éstas.

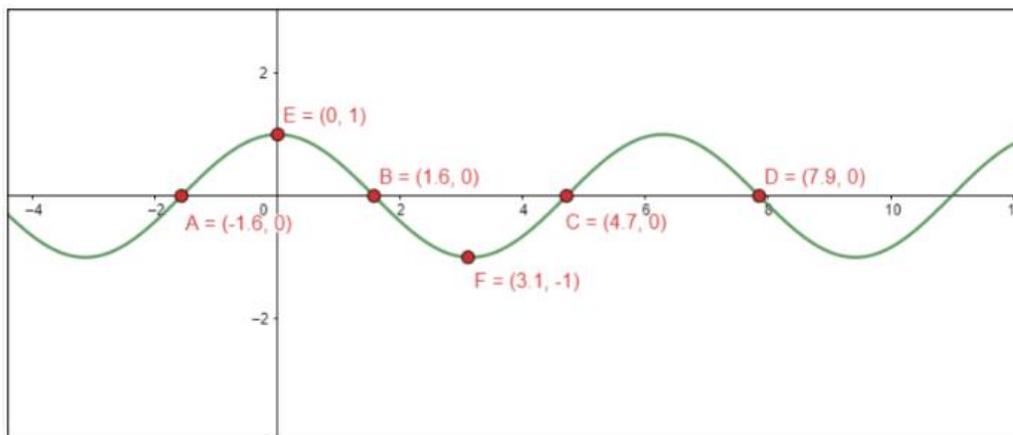
Por ejemplo:

- Para determinar la pendiente de la recta tangente en $q = 4$, el estudiante debe observar el gráfico 2 y establecer que la pendiente de la recta tangente es $I'(4) = m_{tg} = 8$. Finalmente, el estudiante puede construir la ecuación de la recta tangente ($I = 8q - 16$), observando del gráfico 1 que $I(4) = 16$.

A continuación, se presenta una de las preguntas del instrumento que se aplicará al finalizar el campo de problemas 4. El cual nos permite analizar la comprensión del estudiante en torno a la representación gráfica de la función derivada f' , a través del criterio de la primera derivada para extremos relativos. Ver Figura 6.

Figura 6 – Problema 1 que se aplicará a los estudiantes al finalizar el campo de problemas aplicaciones de la derivada para el cálculo de máximos y mínimos, y análisis de gráficas de funciones (CP4).

PROBLEMA 1. Considere la función f , cuyo gráfico de su función derivada (f') es el siguiente:



Determine si las siguientes alternativas son verdaderas o falsa, justificando adecuadamente:

- Los puntos A, C y D son máximos relativos.
- El punto F representa un mínimo relativo.
- El punto E representa un máximo relativo.
- La función alcanza un máximo relativo en B.

Fuente: Elaboración de los autores

En este problema se espera que el estudiante aplique el criterio de la primera derivada para justificar la alternativa que seleccionará. Para ello, debe analizar el gráfico de f' .

Por ejemplo:

- En A, B, C y D, $f'(x) = 0$, es decir son puntos críticos y posibles extremos relativos.
- Entre $]A, B[$, $f'(x) \geq 0$, es decir, la función f es creciente. Luego, entre $]B, C[$, $f'(x) \leq 0$, es decir, la función f es decreciente. El estudiante debe concluir que en B la función alcanza un máximo relativo justificando a través del criterio de la primera derivada para extremos relativos.

Luego de aplicar los instrumentos evaluativos, al finalizar la implementación del diseño instruccional, se realizará un análisis de tipo mixto (JHONSON; ONWUEGBUZIE, 2004), por medio de la noción de configuraciones de los objetos primarios del EOS, que nos permitirá realizar un análisis exploratorio, cuantificando la cantidad de acciones correctas (frecuencia) relacionadas a las resoluciones de los estudiantes en los problemas propuestos para cada uno de los objetos primarios. Además, desde el punto de vista cualitativo, será posible identificar las respuestas y argumentos correctos e incorrectos de los estudiantes al resolver las tareas propuestas.

4. Reflexiones finales

El objetivo de ese trabajo fue dar a conocer el diseño instruccional de enseñanza de la derivada para estudiantes universitarios de ingeniería comercial en Chile, aplicando algunas herramientas del marco teórico del enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (EOS). El diseño metodológico considera diversas configuraciones ontosemióticas en las situaciones-problemas sobre tangentes, cálculo de tasas instantáneas de cambio y tasas instantáneas de variación, aplicaciones de la derivada para el cálculo de máximos y mínimos, análisis de gráficas de funciones, y el cálculo de derivadas a partir de reglas y teoremas de derivación. Además, integra las TIC en las diversas actividades, favoreciendo el tránsito entre los tipos de lenguajes escrito, numérico, gráfico y simbólico, permitiendo a los estudiantes construir de manera progresiva el significado de la derivada.

El diseño metodológico que se implementará en la asignatura de Cálculo Aplicado a los Negocios en una universidad chilena espera superar algunas de las dificultades de aprendizaje de los estudiantes de Ingeniería Comercial.

Como línea futura, la implementación del curso será valorado a partir de la herramienta Criterios de Idoneidad Didáctica (BREDA; FONT; PINO-FAN, 2018), a fin de medir el grado en que el proceso de instrucción es de calidad y posibilita el aprendizaje de los alumnos.

Agradecimientos

Este artículo contó con el apoyo de la Vicerrectoría de Investigación y Doctorado de la Universidad San Sebastián- proyecto USS-FIN-23-DOCI-04 y por el proyecto PID2021-127104NB-I00 financiado por MCIN/ AEI/10.13039/501100011033/ y por "FEDER Una manera de hacer Europa".

Referencias

- ALVARADO MARTÍNEZ, H. A.; GALINDO ILLANES, M. K.; RETAMAL PÉREZ, M. L. Evaluación del aprendizaje de la estadística orientada a proyectos en estudiantes de ingeniería. **Educación Matemática**, Guadalajara, v. 30, n. 3, p. 151–183, 2018. DOI: <https://doi.org/10.24844/EM3003.07>
- ARIZA-COBOS, Á.; LINARES-CISCAR, S. Sobre la aplicación y uso del concepto de derivada en el estudio de conceptos económicos en estudiantes de Bachillerato y Universidad. **Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas**, Buenos Aires, v. 27, n. 1, p. 127-136, 2009. DOI: <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3667>
- BALLARD, C. L.; JOHNSON, M. F. Basic math skills and performance in an introductory economics class. **The Journal of Economic Education**, Filadelfia, v. 35, n. 1, p. 3-23, 2004. DOI: <https://doi.org/10.3200/JECE.35.1.3-23>
- BREDA, A.; FONT, V.; PINO-FAN, L. R. Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. **Bolema**, Rio Claro, v. 32, n. 60, p. 255–278, abr., 2018. DOI: <https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13>
- BUTLER, J. S.; FINEGAN, T. A.; SIEGFRIED, J. J. Does more calculus improve student learning in intermediate micro and macro-economic theory? **The American Economic Review**, Pittsburgh, v. 84, n. 2, p. 206-210, 1994.
- FONT, V. **Una aproximación ontosemiótica a la didáctica de la derivada**. En Maz, A., Gómez B., y Torralbo M. (Ed.), Investigación en Educación Matemática. Noveno Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Córdoba: SEIEM. pp. 109-128, 2005.
- FONT, V.; GODINO, J. D.; GALLARDO, J. The emergence of objects from mathematical practices. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 82, n. 1, p. 97-124, 2013. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10649-012-9411-0>
- GALINDO ILLANES, M. K. et al. Analysis of a teaching learning process of the derivative with the use of ICT oriented to engineering students in Chile. **EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education**, London, v. 18, n. 7, p. em2130, 2022. DOI: <https://doi.org/10.29333/ejmste/12162>
- GALINDO ILLANES, M. K.; BREDA, A. **Interpretación geométrica de la derivada en estudiantes de ingeniería comercial**. Actas del V Encuentro Internacional en Educación Matemática. **Anais...** Barranquilla: Universidad del Atlántico, 2020.
- GALINDO ILLANES, M. K.; BREDA, A. **El tratamiento de la derivada en el plan de estudios de Ingeniería Comercial en Chile**. Investigación en Educación Matemática XXV. **Anais...** Santiago de Compostela: SEIEM, 2022.
- GALINDO ILLANES, M. K.; BREDA, A. Significados de la derivada en los libros de texto de las carreras de Ingeniería Comercial en Chile. **Bolema**, Rio Claro, v. 37, n. 75, p. 271-295, 2023. DOI: <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n75a13>
- GARCÍA, L.; AZCÁRATE, C.; MORENO, M. Creencias, concepciones y conocimiento profesional de profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias

- económicas. **Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa**, Ciudad de México, v. 9, n. 1, p. 85-116, 2006.
- GODINO, J. D. **Síntesis del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática**: motivación, supuestos y herramientas teóricas. Granada: Universidad de Granada, 2014. Disponible en: <http://www.ugr.es/local/jgodino/eos/sintesis_EOS_24agosto14.pdf>. Acceso en: 23 jul. 2022
- GODINO, J. D.; BATANERO, C. Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. **Recherches en didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 14, n. 3, p. 325-355, 1994.
- GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. The onto-semiotic approach to research in mathematics education. **ZDM - International Journal on Mathematics Education**, Hamburgo, v. 39, n. 1–2, p. 127-135, 2007. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1>
- GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. The onto-semiotic approach: Implications for the prescriptive character of didactics. **For the Learning of Mathematics**, Edmonton, v. 39, n. 1, p. 37-42, 2019.
- HEY, J. D. I teach economics, not algebra and calculus. **The Journal of Economic Education**, Philadelphia, v. 36, n. 3, p. 292-304, 2005. DOI: <https://doi.org/10.3200/JECE.36.3.292-304>
- JOHNSON, R. B.; ONWUEGBUZIE, A. J. Mixed methods research: A research paradigm whose time has come. **Educational researcher**, [s.l.], v. 33, n. 7, p. 14-26, 2004. DOI: <https://doi.org/10.3102/0013189X033007014>
- LARIOS, V.; JIMÉNEZ, A. Significados parciales de la derivada en libros universitarios en la formación de ingenieros. **Praxis & Saber**, Tunja, v. 13, n. 33, p. e12274–e12274, 2022.
- LARIOS, V.; MURILLO, R. E. P.; REYES, H. M. Significados sobre la derivada evidenciados por alumnos de carreras de Ingeniería en una universidad mexicana. **Avances de Investigación en Educación Matemática**, Madrid, v. 20, n. 20, p. 105-124, oct. 2021. DOI: <https://doi.org/10.35763/aiem20.4002>
- PINO-FAN, L. R. *et al.* Idoneidad epistémica del significado de la derivada en el currículo de bachillerato. **Paradigma**, Maracay, v. 34, n. 2, p. 129-150, 2013.
- PINO-FAN, L. R.; GODINO, J. D.; FONT, V. Faceta Epistémica Del Conocimiento Didáctico-Matemático sobre la Derivada. **Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, v. 13, n. 1, p. 141-178, 2011.
- PINO-FAN, L. R.; GODINO, D. J.; FONT, V. Una propuesta para el análisis de las prácticas matemáticas de futuros profesores sobre derivadas. **Bolema**, Rio Claro, v. 29, n. 51, p. 60-89, abr., 2015. DOI: <https://doi.org/10.1590/1980-4415v29n51a04>
- PINO-FAN, L. R.; GODINO, J. D.; FONT, V. Assessing key epistemic features of didactic-mathematical knowledge of prospective teachers: the case of the derivative. **Journal of Mathematics Teacher Education**, Netherlands, v. 21, n. 1, p. 63-94, may 2016. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10857-016-9349-8>

PORTILLO-LARA, H. J.; ÁVILA-SANDOVAL, M. S., CRUZ-QUIÑONES, M. Á., LÓPEZ-RUVALCABA, C. Geogebra y problemas de optimización. **Cultura Científica y Tecnológica**, [s.l], v.16, n. 1, p.5-11, septiembre-diciembre, 2019. DOI: <https://doi.org/10.20983/culcyt.2019.1.2.1>

RODRÍGUEZ-NIETO, C.; RODRÍGUEZ-VÁSQUEZ, F.; FONT, V. Nueva mirada para analizar las conexiones desde dos lentes teóricos: la teoría ampliada de las conexiones matemáticas y el enfoque ontosemiótico. En: LUGO-ARMENTA, J. G. et al. (eds.). **Enfoque Onto-Semiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos: investigaciones y desarrollos en América Latina**. Osorno: Universidad de Lagos, 2022. p. 193-219 (Vol. 1).

Autores

Maritza Galindo Illanes

Docente Investigadora de la Universidad San Sebastián

(c)Doctorado en Didáctica las Ciencias, las Lenguas, las Artes y las Humanidades. Línea Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales (Universitat de Barcelona, España); Magister en Educación Superior Mención Pedagogía Universitaria (Universidad Católica de la Santísima Concepción, Chile); Licenciado en Matemática (Universidad de Concepción, Chile).

Dirección: Gobernador Juan Henríquez 1242, Lomas de San Andrés, Concepción, Chile.

Adriana Breda

Docente e investigadora en el Departamento de Educación Lingüística y Literaria, y Didáctica de las Ciencias Experimentales y de la Matemática de la Facultad de Educación de la Universidad de Barcelona. Doctora y Magister en Educación en Ciencias y Matemáticas (PUCRS). Licenciada en Matemáticas y Ciencias Actuariales (UFRGS).

Dirección: Passeig Vall d'Hebron, 171, 08035, Barcelona, España.

Hugo Alvarado Martínez

Profesor Asociado del Departamento de Matemática y Física Aplicadas de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Católica de la Santísima Concepción. Doctor en Didáctica de la Matemática por la Universidad de Granada, España. Magíster en Estadística por la Universidad de Concepción, Chile y Profesor de Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Chile.

Cómo citar el artículo:

GALINDO, M.; BREDAS, A; ALVARADO, H. Diseño de un Proceso de Enseñanza de la Derivada para Estudiantes de Ingeniería Comercial en Chile. **Revista Paradigma, Vol. XLIV, Edição Temática: EOS. Questões e Métodos**; junio de 2023 /321 – 350 DOI: [10.37618](https://doi.org/10.37618)