CUADERNOS DE FORMACIÓN DEL PROFESORADO

EDUCACIÓN SECUNDARIA

LUIS RICO (Coord.)
ENCARNACIÓN CASTRO, ENRIQUE CASTRO,
MOISÉS CORIAT, ANTONIO MARÍN,
LUIS PUIG, MODESTO SIERRA, MARTÍN SOCAS

LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN LA ENSEÑANZA SECUNDARIA

12

2ª Edición

ice
Institut de Ciències de l'Educació
UNIVERSITAT DE BARCELONA

HORSORI
EDITORIAL

Colección Cuadernos
de Formación del Profesorado

TÍTULOS PUBLICADOS

1. **La educación lingüística y literaria en la Enseñanza Secundaria.**
   Carlos Lomas (Coord.)
2. **Política, legislación e instituciones en la Educación Secundaria.**
   Manuel de Puelles (Coord.)
3. **La atención a la diversidad en la Educación Secundaria.**
   Elena Martín y Teresa Mauri (Coord.)
4. **Enseñar y aprender Filosofía en la Educación Secundaria.**
   Luis Cifuentes y J. M.ª Gutiérrez (Coord.)
5. **La orientación educativa y profesional en la educación Secundaria.**
   Elena Martín y Vicent Tirado (Coord.)
6. **Enseñar y aprender Ciencias Sociales, Geografía e Historia en la Educación Secundaria.**
   Pilar Benejam y Joan Pagès (Coord.)
7. **Diseño y desarrollo del curriculum en la Educación Secundaria.**
   Juan Manuel Escudero (Coord.)
8. **Psicología del desarrollo: el mundo del adolescente.**
   Eduardo Martí y Javier Onrubia (Coord.)

ice
Institut de Ciències de l'Educació
UNIVERSITAT DE BARCELONA

HORSORI
EDITORIAL

CUADERNOS DE FORMACIÓN DEL PROFESORADO

EDUCACIÓN SECUNDARIA

12

LUIS RICO (Coord.)
ENCARNACIÓN CASTRO,
ENRIQUE CASTRO, MOISÉS CORIAT,
ANTONIO MARÍN, LUIS PUIG,
MODESTO SIERRA, MARTÍN SOCAS

LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN LA ENSEÑANZA SECUNDARIA

ICE / HORSORI
Universitat de Barcelona

Primera Edición: Octubre 1997
Segunda Edición: Diciembre 2000

I.C.E. Universitat Barcelona
Pg. Vall d'Hebron, 171. Edifici de Migdia (08035) Barcelona
Editorial Horsori. Roger de Flor, 77-79. 2º 3ª (08013) Barcelona

Depósito legal: B. 52.085-2000
I.S.B.N.: 84-85840-65-8
Impreso en Liberduplex, SL., Constitució, 19 (08014) Barcelona

Índice

CAPÍTULO IV. REPRESENTACIONES Y MODELIZACIÓN.
Encarnación Castro, Enrique Castro

CAPÍTULO V. DIFICULTADES, OBSTÁCULOS Y ERRORES EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS EN LA EDUCACIÓN SECUNDARIA. *Martín Socas*

Presentación

Han transcurrido varios años desde que fue promulgada la Ley de Ordenación General del Sistema Educativo que se proponía estructurar y renovar el Sistema Educativo Español, adaptándolo a las necesidades de una sociedad abierta y avanzada, inserta en la Unión Europea y preparada para las necesidades del nuevo milenio. Uno de los factores especialmente considerados en esta ley ha sido la formación del Profesorado:

> «Hay todo un conjunto de factores estrictamente educativos cuyas mejoras confluyen en una enseñanza cualitativamente mejor. La ley los recoge y regula en su Título Cuarto y se detiene específicamente en la cualificación y formación del profesorado, la programación docente, los recursos educativos y la función directiva, la innovación e investigación educativa, la orientación educativa y profesional, la inspección educativa y la evaluación del sistema educativo.
>
> La ley considera la formación permanente del profesorado como un derecho y una obligación del profesor, así como una responsabilidad de las Administraciones educativas. Desde esa concepción, y con los apoyos precisos, ha de abordarse la permanente adaptación del profesorado a la renovación que requiere el carácter mutable, diversificado y complejo de la educación del futuro. Reconoce igualmente a los Centros la autonomía pedagógica que les permita desarrollar y completar el currículo en el marco de su programación docente, a la vez que propicia la configuración y ejercicio de la función directiva en los mismos. A las Administraciones educativas corresponde el fomento de la investigación y de la innovación en los ámbitos curricular, metodológico, tecnológico, didáctico y organizativo.» (LOGSE, 1990)

Como viene ocurriendo a lo largo de la historia de la educación en España, las propuestas legales describen situaciones utópicas con escasas posibilidades de ponerse en práctica en plazos razonables. La retórica pedagógica diseña y construye marcos de actuación, perfectos en su redacción, a los que sólo falta el *pequeño detalle* de su viabilidad práctica. Éste parece ser el caso de los planes para la formación del Profesorado cuyo desarrollo se viene aplazando de manera regular y sistemática.

Como suele suceder con buena parte de las innovaciones educativas se aducen razones presupuestarias para los aplazamientos. De esta manera trata de ocultarse la falta de voluntad política y de ideas sólidas sobre la educación y su valor por parte de nuestros responsables técnicos y políticos y de nuestros especialistas en educación. La necesidad de contar con profesionales cualificados que desarrollen una educación de calidad basada en el dominio de los campos disciplinares y de las competencias didácticas sobre dichos campos, carece de una reflexión extensa, profunda y elaborada entre los profesionales de Ciencias de la Educación en España. En términos coloquiales podemos decir que carecemos de ideas propias, asumidas por la comunidad de especialistas en educación, con las que abordar eficaz y adecuadamente la organización de la formación de los profesionales de la educación, en especial la formación de los profesores de educación secundaria.

Las tareas del educador son variadas y complejas y necesitan ir acompañadas de una formación adecuada que permita abordar con competencia su realización práctica. Como se ha recordado recientemente:

> «El profesor de bachillerato no puede nunca olvidar que su obligación es mostrar en cada asignatura un panorama general y un método de trabajo a personas que en su mayoría no volverán a interesarse profesionalmente por esos temas. No sólo ha de limitarse a informar de los hechos y las teorías esenciales, sino que también tiene que intentar apuntar los caminos metodológicos por los que se llegó a ellos y pueden ser prolongados fructuosamente. Informar de lo ya conseguido, enseñar cómo puede conseguirse más: ambas tareas son imprescindibles, porque no puede haber creadores sin noticias de lo fundamental que les precede –todo conocimiento es transmisión de una tradición intelectual– ni sirve para nada memorizar fórmulas o nombres a quién carece de guía para la indagación personal.» (Savater, 1997)

Bajo su aparente sencillez la cualificación profesional del profesor de secundaria encierra una enorme complejidad técnica a cuya comprensión y control se ha dedicado cierto esfuerzo en los últimos años. Pero aún van a ser necesarios muchos más años de trabajo coordinado para disponer de un cuerpo de conocimientos fundados que sirvan de cimiento a una adecuada capacitación profesional de los educadores en España.

Ésta es una de las tareas que se han iniciado últimamente: dotar de contenidos al conocimiento pedagógico del profesor, profundizar en el conocimiento didáctico de cada una de las áreas curriculares. También éste es un campo de trabajo que viene ocupando a la comunidad de los educadores matemáticos españoles de manera creciente. Si las carencias actuales en formación de profesorado nos vuelven escépticos sobre el interés que tienen los responsables políticos y académicos en el tema, ello mismo nos hace sentir moralmente obligados al sostenimiento del esfuerzo clarificador en este campo.

En este contexto, el material que aquí se presenta quiere proporcionar al profesor de matemáticas de secundaria una serie de herramientas para el diseño, organización y gestión de unidades didácticas en el área de matemáticas. Con ello contribuimos al conocimiento profesional del educador matemático. La estructura del libro presenta ordenadamente cinco de estas herramientas: análisis fenomenológico, representaciones y modelos, errores y dificultades, materiales y recursos, y desarrollo histórico del tópico. Esta presentación se realiza en los capítulos III a VII de este manual. En el capítulo I se presenta un marco curricular general del área de matemáticas en secundaria, mientras que en el capítulo II se proporcionan argumentos sobre la conveniencia de contar con herramientas propias que permitan organizar el currículo de matemáticas de secundaria. Finalmente, el capítulo VIII ofrece un ejemplo de uso conjunto de los organizadores del currículo, presentados a lo largo de los capítulos anteriores, en la elaboración de una unidad didáctica.

De este modo esperamos haber contribuido, desde el área de Didáctica de la Matemática, a la mejora de nuestra autonomía intelectual como profesores de matemáticas y al ejercicio de nuestra capacidad crítica para la realización del trabajo social que como educadores hemos asumido.

Capítulo I

Consideraciones sobre el Currículo de Matemáticas para Educación Secundaria

Luis Rico

1. CONOCIMIENTO PROFESIONAL EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

La idea de que para trabajar en la enseñanza de las matemáticas son necesarios conocimientos y destrezas específicos, que sean complemento del saber convencional del profesor de matemáticas sobre estructuras formales y algoritmos, se ha desarrollado con fuerza en fechas recientes. Las propias características de la profesión docente junto con las limitaciones y dificultades que los profesores encuentran para su trabajo profesional en el sistema educativo muestran a la comunidad de educadores matemáticos la necesidad de trabajar con esquemas fundados, mediante los cuales organizar el conocimiento pedagógico de los contenidos, así como contrastar pautas de actuación con las que poner en práctica tales esquemas.

El desempeño de los profesionales de la enseñanza de las matemáticas necesita una organización conceptual que integre y coordine el dominio sobre esta disciplina con el conocimiento sobre desarrollo de capacidades cognitivas de los estudiantes y con el campo de fenómenos y problemas a cuya interpretación y solución se orientan las matemáticas escolares; una teorización de estas características también ha de considerar los medios y recursos para el aprendizaje de las matemáticas junto con las necesidades propias del sistema educativo. La puesta en práctica del currículo escolar de matemáticas mediante el diseño, elaboración y gestión de propuestas didácticas y otros materiales curriculares necesita bases teóricas sobre las que estructurar el conocimiento profesional del educador matemático.

Este libro ha sido pensado y está escrito con la intención de contribuir a la conceptualización teórica y a la organización práctica del trabajo de los Profesores de Matemáticas de Secundaria. En su comienzo queremos plantear explícitamente algunas reflexiones que orientan nuestro estudio.

Abreviadamente, tales ideas son:

- Existe un campo profesional, denominado *Educación Matemática*, en el que trabajan los profesores del Sistema Educativo y los investigadores implicados en la enseñanza de las matemáticas y comprometidos en la solución de los problemas que esta actividad plantea. El campo profesional del Educador Matemático tiene entidad propia, es ejercido por decenas de miles de profesionales en nuestro país y afecta a millones de escolares (Rico y Sierra, 1991).
  Los profesores de matemáticas de secundaria del sistema educativo constituyen parte importante y diferenciada del colectivo de los educadores matematicos.
- Al ejercicio de la profesión de profesor de matemáticas de secundaria se llega con una formación inicial descompensada. Hay una fuerte valoración y, por tanto, una preparación considerable sobre algunos componentes científicos y técnicos que se hace coincidir con una ignorancia cultivada sobre los diversos componentes didácticos y técnicos necesarios para el ejercicio de la profesión.
  La mala organización de la formación de los profesores de matemáticas tiene carácter estructural, repercute en la calidad de la enseñanza que reciben los escolares y afecta al nivel cultural, científico y técnico de los ciudadanos.
- Con carácter general, los planes de formación inicial y permanente del profesorado tienen una estructura administrativa inadecuada, están mal diseñados, carecen de calidad en su realización, y su ejecución conlleva una mala gestión de recursos públicos. En particular, las sucesivas reformas institucionales en los planes de formación del profesorado en España no terminan de encajar en la Universidad, no encuentran el apoyo científico, académico, estructural y económico adecuado, no contemplan la necesaria especialización profesional.
  Entre las deficiencias más llamativas señalamos la desconsideración hacia las necesidades de formación propias de los profesores de matemáticas y el desconocimiento y olvido de los especialistas en didáctica de la matemática. Las carencias existentes en los planes de formación al uso hacen que los profesores de matemáticas, así como los de otras disciplinas, tengan sus capacidades profesionales limitadas por falta de formación adecuada.

- Aunque el perfil del profesor de matemáticas en ejercicio no es uniforme, se encuentran rasgos compartidos por los distintos profesionales que indican necesidades formativas comunes a todos ellos. Los profesores de matemáticas tienen interés genérico por actividades para el aula, ejercicios y problemas, unidades didácticas elaboradas, pruebas de evaluación y, en general, por los nuevos materiales de orientación práctica. Manifiestan curiosidad por la historia y la filosofía de la matemática cuando se presentan en términos divulgativos; este interés decrece cuando los temas se presentan con cierto nivel de profundidad.

- Los profesores de matemáticas presentan acusadas carencias formativas en psicología, pedagogía, sociología de la educación, epistemología, historia y didáctica de la matemática, lo cual implica una desconexión entre su trabajo profesional y las bases y desarrollos teóricos correspondientes. Esta desconexión produce una falta de criterios claros sobre cuáles deben ser los conocimientos necesarios y el marco teórico adecuado para ejercer satisfactoriamente la profesión de profesor de matemáticas. Tampoco se dispone de criterios para valorar la excelencia profesional.

- Los profesores de matemáticas son razonablemente críticos ante los planteamientos innovadores. Aceptan con muchas reservas los cambios y modificaciones en profundidad sobre el diseño y desarrollo del currículo de matemáticas.
  En el momento actual, los profesores de secundaria españoles sienten animadversión y cierto nivel de rechazo al planteamiento curricular derivado de la Ley de Ordenación General del Sistema Educativo de 1990. Esto es debido, entre otras razones, a que carecen de criterios fundados para distinguir entre diversos proyectos curriculares y evaluar cada uno de ellos. Hay una fuerte tendencia a confundir las necesidades de cambio con propuestas concretas de la administración educativa.

- Por encima de todo el profesor de matemáticas de secundaria es un profesional honesto, que quiere realizar su trabajo lo mejor posible. A veces se encuentra desorientado por la falta de un marco conceptual preciso con propuestas claras, y por la pérdida creciente de legitimidad del plan inicial de formación con el que inició su trabajo.

Desde el problema genérico que expresan los enunciado anteriores queremos avanzar una reflexión: no estamos satisfechos con las propuestas de formación para profesores de matemáticas elaboradas hasta el momento por la Administración Educativa y por la Universidad Española. Estamos, lamentablemente, insatisfechos con los resultados conseguidos hasta el momento. Sin embargo, esta denuncia es sólo un primer paso para delimitar los datos de un problema. Como especialistas en Didáctica de la Matemática, conocidos los datos del problema tenemos que pasar a diseñar estrategias para su solución. Es nuestra responsabilidad que los problemas detectados se resuelvan y no se enquisten.

Este trabajo elabora reflexiones y avanza respuestas para profundizar en el conocimiento profesional en Educación Matemática. Este primer capítulo está dedicado a delimitar la cuestión con la que nos queremos enfrentar y a indicar la dirección que han tomar las estrategias para su solución. Los capítulos siguientes presentan un desarrollo de las estrategias elegidas y proponen modos de abordar y resolver el problema planteado.

1.1 Situación actual de la formación del profesorado

La formación inicial y permanente del profesorado se ubica en la Universidad, pero, de hecho, la formación del profesor de Secundaria se mantiene sobre una serie de excepcionalidades que dan forma a un sistema superpuesto a la organización universitaria.

La formación inicial se hace en un curso postgrado, renunciando a ubicarla en especialidades didácticas dentro de las licenciaturas correspondientes. Las enseñanzas de formación inicial se consideran, en la mayor parte de las universidades, como terreno de nadie, y se gestionan al margen de los Departamentos Universitarios y Áreas de Conocimiento.

Estos estudios se organizan mediante estructuras administrativas alternativas a Facultades y Escuelas; se asigna la docencia a un grupo de profesores especialmente seleccionados, pero no se asigna a los Departamentos Universitarios; se elaboran programas discrecionales no sometidos al control y debate de los especialistas en las correspondientes Áreas de Conocimiento; se retribuye la docencia de estos cursos como gratificación complementaria y no se consideran parte de la carga docente de los Departamentos. Por lo general, son profesores poco cualificados los que imparten la docencia en estos cursos.

Los cursos actuales de Formación Inicial de Secundaria se sostienen sobre este sistema de excepcionalidades. Así se pone de manifiesto la falta de compromiso real de la Universidad Española con la formación inicial del Profesorado de Secundaria.

La Universidad está organizada sobre la base de Áreas de Conocimiento y Departamentos que establecen un sistema para la docencia y la investigación en todos los campos de actuación. Las alternativas y excepcionalidades significan una falta de participación real de los órganos naturales de trabajo universitario y una discrecionalidad en las actuaciones que encubre un desinterés manifiesto de la Universidad Española por la Formación del Profesorado.

La carencia actual por parte de las Universidades de planificación propia, seria y fundada para la formación inicial y permanente del profesorado de secundaria se explica por la ignorancia de estas instituciones sobre el desarrollo actual de las disciplinas educativas y didácticas, al no tener en cuenta los recursos propios y los especialistas en las diferentes Áreas de Conocimiento, en nuestro caso, de manera muy especial, a los profesores e investigadores en Didáctica de la Matemática.

1.2 Necesidades formativas del profesor de matemáticas

El profesor es un profesional que se ha iniciado en la práctica de la enseñanza mediante ensayo y error, que ha logrado su competencia y capacitación con escasa ayuda institucional. Es tarea del profesor ayudar a sus alumnos a introducirse en una comunidad de conocimientos y capacidades que otros ya poseen. Su trabajo es una actividad social que se lleva a cabo mediante el desarrollo y puesta en práctica del currículo de matemáticas.

El desempeño adecuado de esta actividad profesional, que consiste en la educación de niños y jóvenes mediante las matemáticas, exige el desarrollo y puesta en práctica de un complejo plan de formación. El profesor ha de tener formación y conocimientos adecuados para controlar y gestionar la complejidad de relaciones que se presentan en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

El profesor de secundaria trabaja sobre las relaciones entre teoría y práctica en los planes para la formación de jóvenes en matemáticas. Las herramientas con las que tiene que trabajar no se limitan a esta disciplina, ya que incluyen una variedad de campos. El profesor de matemáticas de secundaria necesita conocimientos sólidos sobre los fundamentos teóricos del currículo y sobre los principios para el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas de matemáticas. Sin una formación teórica adecuada en este campo, los profesores ven limitadas sus funciones a las de meros ejecutores de un campo de decisiones cuya coherencia y lógica no dominan y no entienden.

A los profesores no les basta con dominar los contenidos técnicos de su materia. El campo de actuación en el que el profesor de matemáticas tiene que desempeñar su tarea como educador necesita del conocimiento didáctico del contenido que tiene otras bases disciplinares.

Para un desempeño profesional correcto es necesario proporcionar a los profesores herramientas conceptuales bien construidas y funcionalmente potentes, con las que mejorar la propia formación y disponer de un marco de referencia adecuado. Estas herramientas han de permitir un mayor grado de autonomía intelectual y facilitar la gestión cooordinada de la complejidad de problemas derivados de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas dentro del sistema educativo. Este objetivo debe contemplarse tanto para profesores en formación como para profesores en ejercicio.

El educador matemático que concebimos es un profesional intelectualmente autónomo y crítico, responsable de sus actuaciones, con capacidad para racionalizar sus acuerdos y sus desacuerdos con sus colegas de profesión en el ejercicio de sus tareas.

El educador matemático debe contar con unas bases teóricas e instrumentos conceptuales que le permitan planificar y coordinar su trabajo, tomar decisiones fundamentadas y encauzar sus actuaciones en el logro de las finalidades establecidas por un plan de formación socialmente determinado.

2. CAMPO DE TRABAJO: MATEMÁTICAS ESCOLARES

El aula de matemáticas es el campo de trabajo del profesor y su argumento son las matemáticas escolares. La reflexión y la valoración sobre las matemáticas escolares han experimentado en los últimos años cambios profundos y consistentes derivados de los nuevos avances en el campo de la educación, de los estudios sobre sociología del conocimiento, del desarrollo de la Educación Matemática y de la profesionalización creciente de los educadores matemáticos.

Este marco concibe la educación como *ese proceso mediante el cual un individuo en formación es iniciado en la herencia cultural que le corresponde* (Mead, 1985), el modo en que cada generación transmite a las siguientes sus pautas culturales básicas. La educación hace referencia a un sistema de valores, considera la práctica social en la que se incardina, se basa en unos fundamentos éticos y reflexiona sobre las implicaciones políticas conexas. La enseñanza de las matemáticas forma parte de ese sistema de valores, tiene fundamento éticos y se incardina en una práctica social. Las matemáticas forman parte de la educación obligatoria porque satisfacen plenamente las condiciones anteriores.

La sociología del conocimiento establece que, como en el resto de las disciplinas científicas, las representaciones matemáticas son construcciones sociales. La conjetura de la construcción social ubica el conocimiento, la cognición y las representaciones en los campos sociales de su producción, distribución y utilización. El conocimiento científico es constitutivamente social debido a que la ciencia está socialmente orientada y los objetivos de la ciencia están sostenidos socialmente (Restivo, 1992). El conocimiento matemático, como toda forma de conocimiento, representa las experiencias materiales de personas que interactúan en entornos particulares, culturas y períodos históricos.

Teniendo en cuenta esta dimensión social, el sistema educativo –y, en particular, el sistema escolar– establece multitud de interacciones con la comunidad matemática, ya que se ocupa de que las nuevas generaciones sean iniciadas en los recursos matemáticos utilizados socialmente y en la red de significados o visión del mundo en que se encuentran enclavados; esto es, organiza un modo de práctica matemática.

En las modernas sociedades el sistema escolar es una institución compleja, que implica a multitud de personas y organismos y trata de satisfacer, simultáneamente, una diversidad de fines no siempre bien delimitados y coordinados. Dentro del sistema escolar tiene lugar gran parte de la formación matemática de las generaciones jóvenes. Esta institución debe promover las condiciones para que los más jóvenes lleven a cabo su construcción de los conceptos matemáticos mediante la elaboración de significados simbólicos compartidos.

«Las matemáticas deben mucho a su prestigio académico y social al doble carácter que se les atribuye de ser una ciencia exacta y deductiva. La cualidad de la exactitud, sin embargo, representa sólo una cara de la moneda, las más tradicional en las matemáticas, que en la actualidad comprenden también ámbitos tales como la teoría de la probabilidad, la de la estimación, o la de los conjuntos borrosos en los que la exactitud juega un papel diferente. De modo semejante, la tradicional idea de las matemáticas como ciencia puramente deductiva, idea ciertamente válida para el conocimiento matemático en cuanto producto desarrollado y ya elaborado, ha de corregirse con la consideración del proceso inductivo y de construcción a través del cual ha llegado a desarrollarse ese conocimiento» (Real Decreto 1345/1991).

La dimensión educativa lleva a considerar el conocimiento matemático como una actividad social, propia de los intereses y la afectividad del niño y del joven, cuyo valor principal está en que organiza y da sentido a una serie de prácticas útiles, a cuyo dominio hay que dedicar esfuerzo individual y colectivo. El educador se ocupa de iniciar a los niños y adolescentes en la cultura de la comunidad a la que pertenecen y de transmitirles sus valores sociales. De esta cultura también forma parte el conocimiento matemático, que debe comunicarse en toda su plenitud a cada generación. La tarea del educador matemático conlleva una gran responsabilidad, puesto que las matemáticas son una herramienta intelectual potente, cuyo dominio proporciona ventajas intelectuales. Como toda tarea social debe ofrecer respuestas a una multiplicidad de opciones e intereses que, permanentemente, surgen y se entrecruzan en el mundo actual.

«Conviene tener en cuenta por eso que en el desarrollo del aprendizaje matemático en el niño y el adolescente desempeña un papel de primer orden la experiencia y la inducción. A través de operaciones concretas como contar, comparar, clasificar, relacionar, el sujeto va adquiriendo representaciones lógicas, y matemáticas, que más tarde valdrán por si mismas de manera abstracta, y serán susceptibles de formalización en un sistema plenamente deductivo, independiente ya de la experiencia directa.» (Real Decreto 1345/1991).

También, y de modo no secundario, al reflexionar sobre las matemáticas escolares debe tenerse en cuenta el continuo y permanente trabajo de miles de profesores, cientos de equipos de trabajo y seminarios permanentes, decenas de reuniones, congresos, jornadas y simposios, que se expresan y manifiestan en las revistas y publicaciones periódicas, en las actas de los congresos y en los libros especializados en Educación Matemática. Todos estos espacios de comunicación y fuentes documentales constituyen el entramado actual que informa sobre una situación rica y fecunda y que profundiza en la innovación sobre nuestros hábitos de razonamiento y la forma de adquirirlos y enseñarlos.

En los últimos años la comunidad docente ha ido decantando una nueva visión de las matemáticas escolares basada en:

- La aceptación de que el conocimiento matemático es resultado de una evolución histórica, de un proceso cultural cuyo estado actual no es, en muchos casos, la culminación definitiva del conocimiento y del que los aspectos formales constituyen sólo una faceta.

- La necesaria consideración pragmática e instrumental del conocimiento matemático, interpretando los conceptos y estructuras matemáticas como herramientas mediante las que se realizan determinadas funciones cognitivas y se ponen en práctica determinadas competencias.
- El reconocimiento de que un núcleo importante de conceptos y procedimientos de las matemáticas forman parte del bagaje de los conocimientos básicos que debe dominar el ciudadano medio; por ello, las matemáticas no pueden ser un filtro sino un elemento de promoción y homologación de los alumnos.
- La consideración de los procesos constructivos y de la interacción social en el aprendizaje del conocimiento matemático, en la creación de los sistemas de símbolos y estructuras matemáticas significativas.
- La necesidad de incorporar, buscar e implementar nuevas tecnologías que pongan a jóvenes y niños en contacto con los aspectos más avanzados de la sociedad y les preparen para desenvolverse en un mundo cambiante.
- La conveniencia de una visión activa de la enseñanza, en la que la manipulación de objetos y la elaboración de modelos constituyan etapa obligada en la adquisición y dominio de los conceptos; al mismo tiempo, una enseñanza menos dirigista y más centrada en la creatividad, el aprendizaje interactivo, la resolución de problemas y la valoración crítica de las decisiones.

3. ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

Las matemáticas escolares suscitan la concurrencia de dos disciplinas de indagación científica bien diferentes. Por un lado, tenemos la Enseñanza de las Matemáticas, cómo deben enseñarse y, por otro, el Aprendizaje de las Matemáticas, cómo se aprenden. Las teorías del aprendizaje describen cómo el niño aprende, es decir, cómo se apropia y construye el conocimiento y, en función de ello, modifica su conducta y avanza en su comprensión. Las teorías instructivas tratan de emitir conclusiones sobre cómo la enseñanza debería llevarse a cabo.

Unas teorías son descriptivas y las otras son prescriptivas, y la conexión entre ambas debiera estar más consolidada. Pese a ello, parece aceptado que la instrucción necesita ser consistente con lo que ya sabemos sobre cómo el niño aprende o piensa.

Los docentes podemos extraer una serie de consideraciones de la interconexión entre teorías del aprendizaje, basadas en los avances recientes de la psicología cognitiva y los conocimientos sobre la enseñanza. Entre estas consideraciones destacamos:

- Las matemáticas escolares no se deben asumir como una disciplina estáticamente acotada, centrada sólo en el dominio de hechos y destrezas mediante una reiteración de tareas. Esta visión supone un empobrecimiento de lo que es el conocimiento matemático, olvidando la riqueza de relaciones que están en la base de cualquier concepto y de las conexiones entre los mismos. Por otra parte, al limitar los procedimientos a la ejecución mecánica de tareas se prescinde de la invención, el ensayo, la creatividad, las conjeturas y refutaciones, la significación dentro de un contexto y tantos otros aspectos que una visión amplia de los procedimientos matemáticos permite contemplar.
- Adoptar una concepción más completa de las potencialidades del alumno y no verlo como *recipiente vacío* que asimila pasivamente contenidos aislados de las acciones concretas y de su utilidad, en lugar de experimentarlos por sí mismo para dotarlos de significado. Aceptar que el alumno va construyendo su propio conocimiento al integrar nueva información en redes conceptuales ya existentes.
- El aprendizaje de las matemáticas escolares es siempre un proceso activo, resultado de una variedad de interacciones del alumno con su maestro, compañeros, familia y sociedad. Conviene desterrar el determinismo individualista que considera que el niño aprende aisladamente y por sí solo. Por ello conviene fomentar la participación, la discusión y la libre expresión de las propias ideas; insistir en la capacidad de justificar los propios argumentos y proporcionar razones que los hagan creíbles; estimular la capacidad para extraer implicaciones de una situación hipotética. Todo ello conlleva una flexibilización en los agrupamientos, el estímulo del trabajo en equipo, el intercambio de ideas y la selección y elaboración de información de modo compartido.
- El aprendizaje de las matemáticas escolares se produce sobre la base de conocimientos previos, algunos de tipo intuitivo e informal. La acción sobre objetos reales, las manipulaciones a las que se pueden someter esos objetos, las representaciones ingenuas que podemos hacer de los mismos, y, en general, cualquier actuación que ponga de manifiesto relaciones que pueden considerarse entre objetos diversos, son un paso previo imprescindible en la comprensión y asimilación de los conceptos matemáticos. La fase experimental proporciona una rica base de representaciones, en las que las relaciones que constituyen un concepto quedan asimiladas por el alumno, integrándose en la red conceptual previamente existente.
- Conviene también tener en cuenta que el conocimiento matemático no se genera de modo rápido, acabado y completo. Todo proceso de aprendizaje es lento, necesita claves de procesamiento continuo y nunca está totalmente concluido. Nosotros adultos nos vemos a veces sorprendidos por el descubrimiento de nuevas e insólitas relaciones, que proporcionan visiones fecundas a nuestro conocimiento matemático ya consolidado. La

red de relaciones entre los hechos, conceptos y estructuras matemáticas es prácticamente inagotable, y su capacidad para plantear nuevos algoritmos y generar procedimientos imprevistos es igualmente ilimitada. Por ello, no podemos dar por finalizado el dominio de ningún concepto en un breve periodo de tiempo.

Es distintivo de las matemáticas que todo nuevo conocimiento se ponga, de un modo u otro, en conexión con conocimientos previamente establecidos. De esta forma se consolida el sistema en su globalidad y se mejora la capacidad de razonamiento del alumno.

En este marco general de reflexión debemos tener en cuenta que para insertar el aprendizaje de las matemáticas en la realidad escolar es necesario trabajar en todos los contextos en los que esta materia toma sentido. La escuela no es sólo taller, granja, fábrica, laboratorio o asamblea. Es todo eso y algo más: es el entorno ecológico donde se lleva a cabo la parte principal del proceso de culturización de las generaciones en formación.

4. LAS MATEMÁTICAS COMO ELEMENTO DE CULTURA

Conviene reflexionar, brevemente, sobre la dimensión cultural de las matemáticas dentro del sistema escolar.

Las matemáticas son un ingrediente básico de la cultura, pues existen en un medio social y humano determinado, constituyendo un modo importante de relación y comunicación entre personas, que da forma y permite expresar múltiples actividades del hombre. Las matemáticas son un elemento de la cultura, una herramienta que la interpreta y elabora, puesto que atienden a planes, fórmulas, estrategias y procedimientos que gobiernan la conducta; permiten ordenar el comportamiento del hombre, marcar pautas de racionalidad, y ayudar a que surja y se desarrolle el pensamiento científico. El pensar matemático, que es social y público, consiste en dar significado y compartir un simbolismo lógico, espacial y cuantitativo que permite expresar y desarrollar las capacidades humanas de relación, representación y cuantificación.

Este proceso de enculturación lo denominamos Educación Matemática, proceso que, cuando se lleva a efecto en el sistema escolar obligatorio, debe abarcar dos niveles: *alfabetización matemática básica*, constituido por los conocimientos elementales y competencias básicas sobre números, formas y relaciones, y *perfeccionamiento matemático*, conocimientos necesarios para desenvolverse con holgura en la sociedad y desempeñar un puesto profesional de cualificación media. Queda un tercer nivel, el de *especialización*, ajeno a la escolaridad obligatoria, que se manifiesta en la utilización de conocimientos matemáticos de alto nivel de complejidad, y que se presenta en sectores sociales y profesionales con mayor nivel de responsabilidad científica, económica o cultural.

El proceso de enculturación que llamamos Educación Matemática se lleva a efecto principalmente mediante la enseñanza y el aprendizaje de determinados conocimientos matemáticos básicos a los que hemos denominado, globalmente, matemáticas escolares.

Constituye un rasgo distintivo de las sociedades con mayor avance científico y técnico contemplar la Educación Matemática como uno de los elementos esenciales en la preparación de las generaciones en formación. Uno de los retos clave en el momento actual consiste en la democratización de la cultura, siendo por ello necesaria la incorporación de la totalidad de la población al conocimiento, los valores y las pautas de actuación marcados por la Educación Matemática, de manera que nuestra disciplina deje de ser un criterio fuerte de discriminación y pase a constituir un factor más de la necesaria igualdad básica entre los ciudadanos que preconiza una sociedad democrática.

5. FINES Y METAS DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Las razones con las que usualmente se justifica la presencia de las matemáticas en la educación obligatoria responden a tres tipos de argumentos.

En primer lugar, se considera que las matemáticas tienen un alto valor formativo porque desarrollan las capacidades de razonamiento lógico, simbolización, abstracción, rigor y precisión que caracterizan al pensamiento formal. En este sentido, las matemáticas son valiosas ya que permiten lograr mentes bien formadas, con una adecuada capacidad de razonamiento y organización.

En segundo lugar, aprender matemáticas tiene interés por su utilidad práctica. Las matemáticas aparecen en todas las formas de expresión humana, permiten codificar información y obtener una representación del medio social y natural, suficientemente potente como para permitir una actuación posterior sobre dicho medio. Al describir un fenómemo en términos de un modelo matemático se pueden inferir conclusiones lógicas sobre el modelo que predicen el comportamiento futuro del fenómeno y, de ahí, conjeturar los cambios que se pueden producir o las regularidades que se van a mantener.

En tercer lugar, las matemáticas proporcionan, junto con el lenguaje, uno de los hilos conductores de la formación intelectual de los alumnos. Las matemáticas necesitan de un desarrollo continuo y progresivo que, a su vez, permite apreciar el desarrollo alcanzado por el alumno. La madurez alcanzada por cada niño a lo largo de su formación escolar tiene dos indicadores principales: su capacidad de expresión verbal –que se pone de manifiesto en su dominio del lenguaje– y su capacidad de razonamiento –puesta de manifiesto por las matemáticas, de modo destacado. Por otra parte, debido a su carácter de herramienta, las matemáticas suponen un instrumento común de trabajo para el resto de las disciplinas.

> «A lo largo de la educación obligatoria las matemáticas han de desempeñar, indisociable y equilibradamente, un papel formativo básico de capacidades intelectuales, un papel aplicado, funcional, y un papel instrumental, en cuanto armazón formalizador de conocimientos en otras materias.» (Real Decreto 1345/1991)

Desde una perspectiva más general la enseñanza de las matemáticas debe satisfacer las necesidades formativas y de desarrollo de las capacidades cognitivas y afectivas de los escolares; también debe considerar las finalidades sociales, que comprenden el dominio de destrezas matemáticas básicas por todos los ciudadanos y la formación de profesionales cualificados, productores de conocimientos matemáticos. Las finalidades culturales, que ya se han mencionado, forman parte de la orientación que debe tener la enseñanza de las matemáticas, destacando el carácter histórico, incompleto y culturalmente mediado del conocimiento matemático, así como sus conexiones con otras ramas del conocimiento. Finalmente, la enseñanza de las matemáticas debe estar orientada por principios éticos, dirigida a la consecución de valores democráticos y vinculada al ejercicio fundado de la crítica.

6. NOCIÓN DE CURRÍCULO

En su acepción educativa, el concepto de currículo se ha convertido en un término genérico con el que se denomina toda actividad que planifique una formación. Recientemente hemos dedicado una extensa reflexión al Currículo de Matemáticas para Educación Secundaria (Rico, 1997), por lo que remitimos a ese trabajo al lector interesado en un estudio teórico más extenso. Destacamos en este apartado algunas ideas adecuadas a nuestro propósito.

El currículo de la Educación Obligatoria es un plan de formación que se propone dar respuesta a las siguientes cuestiones:

¿Qué es, en qué consiste el conocimiento?
¿Qué es el aprendizaje?
¿Qué es la enseñanza?
¿Qué es, en qué consiste el conocimiento útil?

La intención del currrículo es ofrecer propuestas concretas sobre:

- modos de entender el conocimiento,
- interpretar el aprendizaje,
- poner en práctica la enseñanza,
- valorar la utilidad y dominio de los aprendizajes realizados.

Estas cuestiones marcan dimensiones prioritarias para organizar la reflexión curricular, pero no señalan su contenido explícito.

La primera cuestión ¿qué es el conocimiento? sirve de referencia para otras cuestiones más precisas, tales como:

¿qué es, en qué consiste el conocimiento matemático?
¿qué características relevantes diferencian este conocimiento de otros?
¿por qué es importante este conocimiento?
¿qué relaciones sostiene el conocimiento matemático con las determinaciones culturales de nuestra sociedad?

La discusión sobre ¿qué es el conocimiento matemático? no es trivial y afecta profundamente al diseño y desarrollo del currículo de matemáticas.

La segunda cuestión: ¿qué es el aprendizaje? interviene en el diseño y desarrollo del currículo. También esta cuestión genérica encierra un núcleo amplio de cuestiones importantes:

¿en qué consiste el aprendizaje?,
¿cómo se produce? ¿cómo aprenden niños y jóvenes?
el aprendizaje, ¿es resultado de una evolución o efecto de la instrucción, o de ambas cosas?
¿qué función tiene una teoría del aprendizaje?

Por lo que se refiere a nuestra disciplina la pregunta básica se enuncia así:

¿cómo se caracteriza el aprendizaje de las matemáticas?

Todo currículo de matemáticas necesita estar basado en alguna teoría o esquema conceptual que permita dar respuesta fundada a cuestiones generales como las siguientes:

¿cómo son las personas en el trabajo con matemáticas?
¿cómo se desarrolla la comprensión de los conceptos matemáticos?
¿en qué consiste la capacidad matemática?

La tercera cuestión ¿qué es la enseñanza? da también lugar a una diversificación de cuestiones específicas y precisas. Entre estas cuestiones encontramos las siguientes:

¿en qué consiste educar?
¿en qué consiste la educación matemática?
¿cómo puede llevarse a cabo la formación de niños y jóvenes en un campo específico del conocimiento?
¿en qué consiste la instrucción?

Finalmente, la cuarta cuestión ¿para qué sirve el conocimiento? admite una una serie de cuestiones mas precisas:

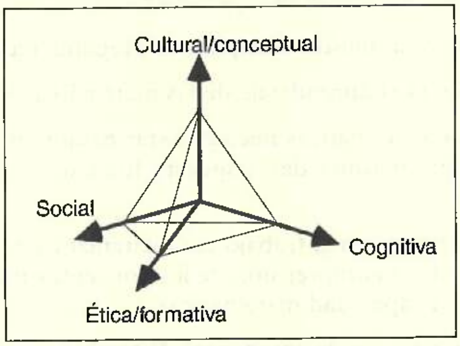
¿cómo se establece la utilidad del conocimiento matemático?
¿cuándo un individuo dispone de conocimiento útil?
¿qué criterios determinan la capacidad matemática de una persona?
¿mediante qué instrumentos se valora la capacidad matemática de una persona?
¿cuáles son los mecanismos sociales que sostienen esa valoración?
¿mediante qué criterios se valora la eficacia de un currículo?
¿cómo y con qué criterios se valora la capacidad de un profesor o de unos materiales curriculares?
¿qué mecanismos permiten modificar un currículo, cómo se ponen en práctica?
¿quiénes tienen la responsabilidad de la valoración y de los cambios?

6.1 Dimensiones del currículo

Las cuatro cuestiones consideradas permiten establecer cuatro dimensiones en torno a las que organizar los niveles de reflexión curricular (Rico, 1997).

Estas cuatro dimensiones son:

- Dimensión cultural/ conceptual
- Dimensión cognitiva
- Dimensión ética
- Dimensión social



Dimensiones del currículo

Estas cuatro dimensiones las hemos considerado cuando hemos reflexionado sobre las finalidades de la enseñanza de las matemáticas. Igualmente se pueden considerar otros niveles de reflexión sobre el currículo, que se pueden analizar en términos de estas cuatro dimensiones.

Dos de los niveles de reflexión usuales en los estudios sobre el currículo de matemáticas son el nivel de planificación para el aula y el nivel de planificación para el sistema educativo –ambos niveles están fuertemente conectados y pueden estructurarse mediante las mismas cuatro dimensiones, pero se trata de niveles distintos. En el cuadro se presentan las componentes por cada dimensión de los dos niveles mencionados:

Dimensiones ======= Niveles	1ª dimensión: Cultural/ conceptual	2ª dimensión: Cognitiva o de desarrollo	3ª dimensión: Ética o formativa	4ª dimensión: Social
Planificación para el aula	Contenidos	Objetivos	Metodología	Evaluación
Sistema Educativo	Conocimientos	Alumnos	Profesor	Escuela

Niveles y dimensiones en el estudio del currículo

Como desarrollo de las directrices generales que marcan los documentos oficiales, en los que se concretan y marcan actuaciones para los planes de formación que se llevan a cabo por medio del Sistema Educativo, cada uno de los materiales que contribuyen al diseño y puesta en práctica de un determinado proyecto curricular expresan una concrección de los objetivos, de la organización del contenido, de los métodos y recursos para trabajar en el aula y de los medios e instrumentos para la evaluación.

7. OBJETIVOS DEL CURRÍCULO DE MATEMÁTICAS

A la hora de interpretar los objetivos que establecen los documentos curriculares para el Área de Matemáticas de la Educación Secundaria Obligatoria es conveniente recordar el carácter formativo general y la obligatoriedad de esta etapa educativa.

La enseñanza de las Matemáticas en la etapa de Educación Secundaria Obligatoria tendrá como objetivo contribuir a desarrollar en los alumnos y alumnas las capacidades siguientes:

«1. Incorporar al lenguaje y modos de argumentación habituales las distintas formas de expresión matemática (numérica, gráfica, geométrica, lógica, algebraica, probabilística) con el fin de comunicarse de manera precisa y rigurosa.
2. Utilizar las formas de pensamiento lógico para formular y comprobar conjeturas, realizar inferencias y deducciones, y organizar y relacionar informaciones diversas relativas a la vida cotidiana y a la resolución de problemas.
3. Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permitan interpretarla mejor, utilizando técnicas de recogida de datos, procedimientos de medida, las distintas clases de números y mediante la realización de los cálculos apropiados a cada situación.
4. Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos, y valorando la conveniencia de las estrategias en función del análisis.
5. Utilizar técnicas sencillas de recogida de datos para obtener información sobre fenómenos y situaciones diversas, y para representar esa información de forma gráfica y numérica y formarse un juicio sobre la misma.
6. Reconocer la realidad como diversa y susceptible de ser explicada desde puntos de vista contrapuestos y complementarios: determinista/ aleatorio, finito/ infinito, exacta/o aproximadamente, etcétera.
7. Identificar las formas y relaciones espaciales que se presentan en la realidad, analizando las propiedades y relaciones geométricas implicadas y siendo sensible a la belleza que generan.
8. Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, gráficos, planos, cálculos, etc.) presentes en las noticias, opiniones, publicidad, etc., analizando críticamente las funciones que desempeñan y sus aportaciones para una mejor comprensión de los mensajes.

9. Actuar, en situaciones cotidianas y en la resolución de problemas, de acuerdo con modos propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.
10. Conocer y valorar las propias habilidades matemáticas para afrontar las situaciones que requieran su empleo o que permitan disfrutar con los aspectos creativos, manipulativos, estéticos o utilitarios de las matemáticas.» (Real Decreto 1345/1991).

Vemos que se trata de enunciados genéricos, vinculados a uno o varios bloques de contenidos generales. Estos objetivos marcan prioridades en el desarrollo de las capacidades de los alumnos, pero dejan abierto un campo muy amplio a la autonomía de los profesores. Los enunciados de estos objetivos imponen la necesidad de buscar criterios que permitan tomar decisiones adecuadas sobre su concreción.

8. ORGANIZACIÓN DEL CONTENIDO

Para la organización de los contenidos en el currículo actual de matemáticas de la Educación Obligatoria se combinan dos criterios: uno disciplinar y otro cognitivo. El criterio disciplinar clasifica los contenidos del currículo en cinco grandes bloques. El criterio cognitivo clasifica los conocimientos matemáticos en conceptuales y procedimentales, con diferentes niveles en cada uno de estos campos; además, añade unos conocimientos actitudinales.

Los cinco bloques en los que la organización disciplinar agrupa los contenidos de matemáticas son:

1. Números y operaciones
2. Medida, estimación y cálculo de magnitudes
3. Representación y organización en el espacio
4. Interpretación, representación y tratamiento de la información
5. Tratamiento del azar

Estos cinco bloques se han modificado en las Comunidades Autónomas con competencias educativas.

8.1 Organización cognitiva de los contenidos

Compartimos el punto de vista cognitivo que considera el conocimiento matemático organizado en dos grandes campos: conceptual y procedimental.

> «El conocimiento conceptual se caracteriza más claramente como conocimiento que es rico en relaciones. Puede pensarse como una membrana conectada de conocimiento, una red en la que las relaciones de conexión son tan importantes como las piezas discretas de información. Las relaciones saturan los hechos y proposiciones

individuales de modo que todas las piezas de información están conectadas a alguna red. De hecho, una unidad de conocimiento conceptual no puede ser una pieza aislada de información; por definición es una parte del conocimiento conceptual sólo si su poseedor reconoce su relación con otras piezas de información.» (Hiebert y Lefevre)

El conocimiento procedimental consiste en los modos de ejecución ordenada de una tarea, lo constituyen las

> «reglas, algoritmos o procedimientos empleados para resolver una tarea. Hay instrucciones paso por paso que prescriben cómo concluir una tarea. Un rasgo clave de los procedimientos es que se ejecutan en una secuencia lineal predeterminada. Es la naturaleza claramente secuencial de los procedimientos la que probablemente los diferencia de otras formas de conocimiento.» (Hiebert y Lefevre).

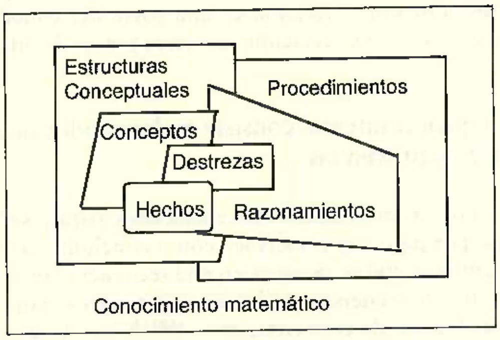
Los *conceptos* son aquello con lo que pensamos y, según su mayor o menor concrección, podemos distinguir tres niveles de conocimientos en el campo conceptual:

i) los *hechos*, que son unidades de información y sirven como registros de acontecimientos;
ii) los *conceptos* propiamente tales, que describen una regularidad o relación de un grupo de hechos, suelen admitir un modelo o representación y se designan con signos o símbolos;
iii) las *estructuras conceptuales*, que sirven para unir conceptos o para sugerir formas de relación entre conceptos constituyendo, a veces, conceptos de orden superior, ya que pueden establecer algún orden o relación entre conceptos no inclusivos.

Los *procedimientos* son aquellas formas de actuación o ejecución de tareas matemáticas; igualmente podemos distinguir tres niveles diferentes en el campo de los procedimientos:

i) las *destrezas* consisten en la transformación de una expresión simbólica en otra expresión. Para ello, hay que ejecutar una secuencia de reglas sobre manipulación de símbolos; por lo general, las destrezas se ejecutan procesando hechos;
ii) los *razonamientos* se presentan al procesar relaciones entre conceptos, y permiten establecer relaciones de inferencia entre ellos;
iii) las *estrategias*, que se ejecutan sobre representaciones de conceptos y relaciones; las estrategias operan dentro de una estructura conceptual y suponen cualquier tipo de procedimiento que pueda ejecutarse, teniendo en cuenta las relaciones y conceptos implicados.

Esquemáticamente expresamos así nuestra consideración del conocimiento matemático:



En el cuadro se indican las relaciones de inclusión entre los diferentes niveles de cada uno de los campos y las conexiones entre ellos. En este cuadro no está incluido el conocimiento actitudinal, ni tampoco las capacidades metacognitivas.

En cada uno de los niveles anteriores se pueden distinguir varios tipos, que pasamos a presentar brevemente.

1. **Hechos.** Se distinguen cuatro tipos de hechos: términos, notaciones, convenios y resultados.

Términos: son las denominaciones o vocablos con los que designamos los conceptos o las relaciones entre conceptos. En matemáticas hay términos específicos y otros que proceden del lenguaje común.

Notaciones: son los signos y símbolos empleados en matemáticas para expresar una idea de modo breve y preciso.

Convenios: son acuerdos tácitos o consensuados para comunicar información sin ambigüedad, evitando largas explicaciones.

Resultados: son unidades de información producto directo e inmediato de relaciones entre términos, suceptibles de memorizar, cuyo dominio y control conviene disponer para trabajar en matemáticas sin tener que partir siempre de cero.

2. **Técnicas y Destrezas.** Las técnicas y destrezas suponen el dominio de los hechos y de los procedimientos usuales que se pueden desarrollar de acuerdo con rutinas secuenciadas. Distinguimos las destrezas según el campo de las matemáticas escolares en el que operan, y las clasificamos en: aritméticas, métricas, geométricas, gráficas y de representación.

Destrezas Aritméticas: son aquellas necesarias para un correcto dominio del sistema decimal de numeración y de las cuatro operaciones básicas. Entre las más destacadas podemos señalar la lectura y escritura de números, el cálculo mental con dígitos y algunos números de dos cifras, el cálculo con papel y lápiz, y el empleo de la calculadora.

Destrezas Métricas: son las destrezas necesarias para emplear correctamente los aparatos de medida más comunes de las magnitudes longitud, tiempo, amplitud, capacidad, peso y superficie; también se incluye aquí el dominio del sistema métrico decimal.

Destrezas Geométricas: comprenden las rutinas para construir un modelo de un concepto geométrico, para manipularlo o para hacer una representación del mismo en el plano; también se incluye el dominio y empleo correcto de determinados convenios para expresar relaciones entre conceptos geométricos.

Destrezas Gráficas y de Representación: el uso de modelos gráficos no está limitado a la representación de conceptos geométricos; cuando se hace una representación lineal de los números, cuando se emplea una gráfica para expresar una relación entre dos variables, o cuando se simboliza una fracción sobre una figura, se están utilizando destrezas de tipo gráfico, que suponen el empleo de determinados convenios para dar una imagen visual de un concepto o relación.

3. **Conceptos.** Consideramos los conceptos como una serie de unidades de información (hechos) conectados entre sí mediante una multiplicidad de relaciones. El concepto lo constituyen tanto los hechos como sus relaciones y se representan mediante sistemas simbólicos y gráficos. Usualmente todo concepto admite una o varias representaciones de carácter gráfico o simbólico. Cada concepto se caracteriza por la mayor o menor complejidad de relaciones que se pueden establecer entre los hechos cuya regularidad expresa que, a su vez, va a permitir establecer nuevas relaciones con otros conceptos.

4. **Razonamiento.** La capacidad para establecer nuevas relaciones entre las unidades de información que constituyen un concepto se expresa mediante una secuencia argumental a la que solemos llamar razonamiento. El razonamiento es la forma usual de procesar conceptos, es decir, de derivar unos conceptos de otros o implicar una nueva relación sobre la base de las relaciones ya establecidas. El *razonamiento lógico-deductivo* se ha considerado como la forma de razonamiento matemático preferente, lo cual no deja de ser una simplificación. En matemáticas, además del razonamiento deductivo, se emplean el *razonamiento inductivo* y el *razonamiento analógico*. En cualquiera de los razonamientos se utilizan destrezas de diferentes clases. Cuando un determinado razonamiento se ejecuta con unas pautas de rigor, precisión, concisión y elegancia se estandariza con alguna denominación especial: prueba, teorema, etc. En el trabajo con alumnos de la Educación Obligatoria, un razonamiento será todo argumento suficientemente fundado que dé razón o justifique una propiedad o relación. Las capacidades de expresión y comunicación de los alumnos las consideramos como una parte importante de su capacidad de razonamiento.

5. **Estructuras conceptuales.** Los conceptos, a su vez, no constituyen unidades aisladas de información; entre ellos se puede establecer una gran riqueza de relaciones que forman auténticas redes conceptuales. Las relaciones entre conceptos dan lugar a nuevas estructuras, en las que cada uno de los conceptos que la forman queda caracterizado por las relaciones que mantiene con el resto. Las

relaciones que se trabajan en el periodo de la Educación Obligatoria son importantes porque van poniendo las bases de algunas de las estructuras conceptuales claves para la formación matemática de cada alumno. Las estructuras aditiva y multiplicativa y el razonamiento proporcional están entre los ejemplos más conocidos. Las estructuras conceptuales constituyen la esencia del conocimiento matemático organizado, los hechos y destrezas toman sentido y significado dentro de ellas. Por ello, el establecimiento y reconocimiento de las relaciones que se dan entre los conceptos con los que se está trabajando debe ser un elemento permanente de reflexión.

6. Estrategias. En el entramado de relaciones que constituyen una estructura conceptual hay multitud de vías para responder a una determinada cuestión, que toma su sentido cuando se enuncia en términos de los conceptos que forman parte de esa estructura. En unos casos se puede seguir un camino prioritariamente deductivo, es decir, siguiendo las reglas de razonamiento lógico; pero la mayor parte de las veces no suele ocurrir esto, sino que se combinan argumentos deductivos con otros de carácter inductivo, con representaciones y modelos, algunas intuiciones y razonamientos no explicitados. Cualquier procedimiento o regla de acción que permite obtener una conclusión o responder a una cuestión (resolución de problemas) haciendo uso de relaciones y conceptos, generales o específicos de una determinada estructura conceptual, se denomina estrategia. Las estrategias comprenden al razonamiento y a las destrezas, pero no se reducen a ellos; las estrategias procesan dentro de una estructura conceptual y, por tanto, pueden existir estrategias diferentes para alcanzar un mismo resultado. El uso de estrategias supone un dominio de la red conceptual sobre la que deben ejercitarse y, al mismo tiempo, grandes dosis de creatividad e imaginación para descubrir nuevas relaciones o nuevos sentidos en relaciones ya conocidas. Las estrategias más usuales en los niveles de la Educación Obligatoria son: estimar, aproximar, elaborar un modelo, construir una tabla, buscar patrones y regularidades, simplificar tareas difíciles, conjeturar y comprobar. Unas son metodológicas y otras específicas.

Entendemos que el alumno de estos niveles puede irse entrenando en el uso de estrategias, que le permitirán poner en funcionamiento el máximo de relaciones entre los conceptos estudiados, considerando nuevas facetas y aspectos no previstos de los mismos.

9. EVALUACIÓN

La evaluación es un campo de estudio e investigación que se plantea cuestiones mucho más amplias que las que se derivan directamente de la pregunta: ¿cómo calificar a nuestros alumnos? La evaluación en el periodo de la Educación Obligatoria no debe utilizarse para controlar la promoción de los alumnos sino, en todo caso, para detectar situaciones anómalas y proceder a un tratamiento específico que permita superarlas (diagnóstico y remedio). Hacer sinónimos los términos evaluación y examen es una identificación confusa que se suele realizar con frecuencia, y que lleva a un rechazo acrítico de todo lo relativo al enjuiciamiento y valoración del aprendizaje escolar. Scriven (1967) introdujo una distinción importante entre evaluación formativa y evaluación sumativa. La primera actúa de forma continua y su papel consiste en diagnosticar e informar para permitir la recuperación en aquellos aspectos en los que se comprueben deficiencias; también sirve para que el profesorado modifique su orientación e incorpore elementos nuevos en el proceso de enseñanza. La evaluación sumativa expresa la agregación de los logros conseguidos por un alumno en diversos aspectos del aprendizaje de un concepto, y suele dar lugar a una calificación. También la evaluación tiene una importante componente orientativa, que ayuda al alumno a explorar sus características cognitivas y al profesor a explicitar las estrategias más idóneas en su trabajo con los alumnos, lo que se denomina estilo de enseñanza.

El punto de vista actual se centra en que *para evaluar hay que comprender*, lo cual supone que se ha hecho un juicio razonado de algún aspecto de un trabajo desarrollado por los alumnos ante una tarea; se trata de una visión distinta de la convencional, en la que no se trata de comprender ningún proceso de aprendizaje, sino de establecer un éxito o un fracaso. Un nuevo enfoque para la evaluación debe discutir y poner en claro varias cuestiones: ¿por qué valorar el trabajo de los alumnos?, ¿qué hay que valorar?, ¿cómo hay que valorar? y ¿qué decisiones deben afectar a la evaluación? La legitimidad del error, como parte constitutiva de los procesos de aprendizaje y de elaboración del conocimiento objetivo, se sustenta en una posición epistemológica que trata de fomentar el análisis y la consideración crítica del conocimiento eludiendo la tendencia a culpabilizar a los escolares de la comprensión deficiente, ayudándoles a detectar tales deficiencias y buscar vías para su superación.

Desde esta perspectiva nos planteamos las cuatro preguntas anteriores.

9.1 ¿Por qué hay que valorar el trabajo de los escolares?

Al valorar y corregir el trabajo de los alumnos les informamos de cómo han realizado determinada tarea; también podemos determinar el grado de asimilación de un concepto, el dominio de una destreza, la habilidad en la elección de un procedimiento y en el uso y manejo de estrategias. También el profesor está interesado en conocer lo que la clase puede hacer y lo que no puede hacer, determinar los niveles generales en los que se encuentran sus alumnos y las diferencias entre ellos; puede, igualmente, localizar los errores usuales aún no superados y valorar el rendimiento logrado por el grupo respecto de un determinado tópico. Tanto los padres como los administradores educativos, las autoridades locales y las asociaciones de profesores tienen intereses legítimos en una evaluación lo más completa posible del aprendizaje realizado por los alumnos.

9.2 ¿Qué valorar?

Si entendemos la pregunta en el sentido de cuáles son las actividades matemáticas de los alumnos que deben considerarse prioritarias para establecer un juicio sobre ellos, se pueden dar multitud de respuestas válidas: precisión, resultados, método de trabajo, claridad de pensamiento, asimilación de ideas matemáticas, transferencia en la comprensión, dominio en la ejecución de técnicas y destrezas, tiempo en el desempeño de las tareas, esfuerzo personal, creatividad, adecuación en la elección de estrategias, organización de las secuencias, e incluso pulcritud y claridad en la presentación de los trabajos. También hay que considerar las observaciones que hace el profesor cuando los alumnos trabajan autónomamente o en grupos e, igualmente, las intervenciones que hacen en las discusiones dirigidas.

Si entendemos la pregunta inicial en el sentido de cuál es la parte adecuada de la actividad del alumno para emitir un juicio sobre su competencia matemática, la consideración se centra ahora en procurar que la evaluación no se haga atendiendo a un único tipo de criterios y actividades, ya que puede tener un efecto contraproducente. Es decir, si nos limitamos a evaluar destrezas de cálculo mecánico mediante pruebas en las que se controlan los resultados, se favorece un tipo de aprendizaje rutinario y mecánico.

9.3 ¿Cómo evaluar?

Las pruebas estandarizadas de papel y lápiz, bien en versión de un test de cuestiones y respuestas puntuales, bien mediante una prueba para el desarrollo más extenso de cuestiones y la resolución de problemas más complejos, se pueden considerar instrumentos insuficientes para emitir un juicio útil sobre la competencia matemática de los alumnos. Con estos instrumentos se puede poner de manifiesto fácilmente el conocimiento de hechos y el dominio en la ejecución de destrezas; también es posible comprobar el conocimiento de enunciados, definiciones y propiedades, junto con algunas secuencias de razonamientos, pero no es posible comprobar la comprensión real de los conceptos, el dominio de las estructuras conceptuales, la capacidad personal de razonamiento y la habilidad en la elección y desarrollo de estrategias. Todos estos aspectos son tan importantes o más que los primeros, y quizás el mayor inconveniente para su control está en que no disponemos de instrumentos suficientemente constrastados para su realización. Sin embargo, no cabe duda de que es posible hacer una valoración bastante aproximada de las competencias señaladas mediante un seguimiento del trabajo individual y colectivo que se realiza en el aula.

9.4 ¿Qué decisiones deben afectar a la evaluación?

Un profesor del periodo obligatorio de la enseñanza debe ser totalmente consciente de que su función no es seleccionar las mentes más capacitadas para la educación superior sino capacitar a cada estudiante para alcanzar el máximo desarrollo de sus potencialidades, que le permitan incorporarse a una sociedad democrática. La escuela no puede, y no debe, ensanchar las diferencias culturales debidas a los distintos medios sociales y económicos de los que proceden sus alumnos. La escuela no debe ahondar en las diferencias intelectuales que presentan los niños, esa no es su misión y el profesorado debe tenerlo claro. Por todo ello, las matemáticas deben abandonar el papel de filtro y selección que, tradicionalmente, han desempeñado en el Sistema Escolar. En este sentido hay que enfatizar la función orientadora de la evaluación y recordar que, aunque el alumno es el autor de su aprendizaje, el profesor también es responsable de los logros y avances conseguidos.

9.5 Criterios para seleccionar tareas de evaluación

La preocupación por encontrar instrumentos adecuados mediante los que llevar adelante la evaluación de los alumnos en matemáticas ha conducido a los especialistas a discutir las características generales que deben tener tales instrumentos. Bell, Burkhardt y Swan (1992) establecieron las siguientes condiciones para las tareas de evaluación:

1. *Relevancia práctica*: muchas cuestiones presentan una situación de la vida real, pero plantean cuestiones que no tienen significado práctico.

2. *Coherencia o fragmentación de la tarea*: muchas tareas conducen al estudiante a través de una secuencia de pequeños pasos, que reducen o suprimen la capacidad de decisión del estudiante (resuelve la ecuación E utilizando el método M, o similar). Pocas tareas invitan al estudiante a seleccionar su repertorio de técnicas, recorrer una cadena de razonamientos o comparar métodos alternativos.

3. *Rango de respuestas posibles*: ¿hasta qué punto podemos proponer tareas que proporcionen la oportunidad a los estudiantes de trabajar con un amplio rango de capacidades y talentos? Usualmente el nivel de respuestas posibles ha venido determinado más por la tarea que por el estudiante.

4. *Extensión y valor de la tarea*: el pensamiento de orden superior se muestra mejor, por lo general, en tareas extensas que en tareas cortas. Es necesario que estas actividades constituyan por sí mismas experiencias de aprendizaje válidas y aceptables.

5. *Modo de trabajar las tareas*: tradicionalmente los estudiantes han trabajado las tareas individualmente y en silencio. Estas condiciones artificiales se han impuesto en beneficio de la fiabilidad, y probablemente se mantendrán en el sistema. Sin embargo, hay una gran necesidad de explorar cómo se puede evaluar la capacidad de los estudiantes para trabajar cooperativamente, quizá utilizando formas de comunicación orales y prácticas en un ambiente usual de trabajo.

10. CONCLUSIÓN

En la historia reciente de la Educación Matemática los profesionales de este campo de trabajo se encuentran, por primera vez, enfrentados a la responsabilidad de asumir su desarrollo profesional de una manera crítica y renovada. Las demandas sociales de una educación de calidad, formativa, con el énfasis puesto en la difusión de los valores democráticos y las relaciones de comunicación a través de todas las diciplinas del currículo escolar, marcan cambios fundamentales en la consideración de las matemáticas escolares.

El educador matemático emerge como un profesional crítico y reflexivo, cuyas necesidades de formación inicial y permanente se han incrementado con la incorporación de nuevas disciplinas y la importancia cada vez mayor asignada al campo de la práctica. Esta formación debe tener rango académico suficiente y debe ubicarse en los departamentos y centros universitarios; pero la comunidad de educadores matemáticos no debe esperar que las soluciones le vengan dadas, debe adelantarse a reflexionar sobre sus propias carencias y limitaciones y plantear sus propias necesidades de formación con la extensión y profundidad necesarias.

La reflexión, crítica y discusión realizada sobre estas necesidades debe dar paso a programas de formación adecuados que proporcionen las bases suficientes para el desempeño de la compleja tarea que denominamos Educación Matemática.

El profesor de matemáticas necesita autonomía intelectual y capacidad crítica en el ejercicio de su profesión; para ello, es imprescindible conocer y dominar las herramientas conceptuales de esa profesión.

Los profesores de matemáticas tienen necesidad de herramientas funcionales, elaboradas conceptualmente para el ejercicio de su profesión. Una de estas herramientas es la noción de currículo, que hemos presentado resumidamente en este capítulo y que sustentamos en una serie de dimensiones mediante las cuales estructurar el concepto. Pero con el concepto de currículo el profesor de matemáticas no dispone aún de toda la información necesaria para llevar a cabo sus tareas profesionales. En los próximos capítulos presentaremos nuevos conceptos que completen el dominio conceptual fundado del profesor y que, al mismo tiempo, le proporcionen nuevas herramientas funcionales para su trabajo en el aula de matemáticas.

CAPÍTULO II

Los Organizadores del Currículo de Matemáticas

Luis Rico

1. EL PROBLEMA DE LAS UNIDADES DIDÁCTICAS

Cuando el profesor inicia la puesta en práctica de las directrices curriculares con un grupo concreto de alumnos necesita tomar una serie de decisiones de carácter general. Estas decisiones se concretan mediante criterios para la selección, secuenciación y organización de los contenidos; criterios para la organización, desarrollo y control del trabajo en el aula; prioridades en el proceso de construcción del conocimiento y en la asignación de significados por parte de los alumnos y, finalmente, criterios para valorar los logros en el aprendizaje y para el tratamiento adecuado de los errores.

Estos criterios se ajustan a las cuatro componentes generales del currículo: contenidos, metodología, objetivos y evaluación. Se trata de componentes que surgen cuando consideramos el aula como espacio de trabajo y al profesor como agente principal del proceso educativo. Estas cuatro componentes determinan un esquema conocido, usual en el diálogo que mantiene la administración educativa con el profesorado y también en la comunicación que deben mantener los profesores entre sí, cuando trabajan a un nivel general de planificación. Es por ello que los documentos curriculares que elabora la administración educativa para el profesorado en ejercicio suelen venir estructurados mediante estas cuatro componentes. También ocurre que, cuando un Departamento quiere expresar sus intenciones formativas en relación con una materia o asignatura, tal planificación se organiza por medio de las cuatro componentes mencionadas: objetivos, contenidos, metodología y evaluación.

El esquema que aportan estas cuatro componentes es amplio y versátil; de hecho es el que utiliza la propuesta curricular del Ministerio de Educación y las de las Consejerías de Educación de las Comunidades Autónomas. Esto puede inducir a que el profesorado adopte sin cautelas el mismo esquema y trate de utilizarlo directamente en todos los niveles de planificación de una materia. Se produce así una confusión, al proponerse concretar y planificar mediante esas cuatro componentes cada una de las unidades didácticas en las que se desglosan los bloques de contenidos y, a continuación, las lecciones que constituyen el programa para un curso.

Pero la estructura de los documentos curriculares sólo aporta un marco de referencia, que no es exhaustivo. Si consideramos cada uno de los tópicos o unidades de contenidos de Matemáticas para la Educación Secundaria Obligatoria y nos proponemos establecer objetivos generales para cada una de ellas encontramos que, con pequeñas diferencias, los objetivos para las unidades de números no son muy distintos de los objetivos para las de álgebra o para las de funciones; más bien lo que surgen son concreciones o puntualizaciones de los objetivos generales para cada una de las unidades, pero no objetivos distintos para cada una de ellas. Por tanto, los diferentes bloques de contenidos y unidades no se distinguen por sus objetivos, no al menos con el grado de precisión con que aparecen en los documentos curriculares.

Esto es lo que se sigue del diseño curricular base elaborado por el Ministerio de Educación y por las Consejerías de Educación de las Comunidades con competencias educativas: consideran unos objetivos generales para el área de Matemáticas en Secundaria, y no específicos para cada bloque y, menos aún, para cada unidad didáctica. Resulta posible establecer objetivos más concretos, vinculados a los contenidos específicos de cada tema. Pero no es ésta la opción elegida en el Currículo de Matemáticas para Educación Secundaria que ha optado por unos objetivos generales para el área, válidos para la mayoría de bloques de contenidos y unidades didácticas.

La opción del actual Currículo de Matemáticas evita los objetivos vinculados al aprendizaje de conceptos y procedimientos concretos. Al optar por unos objetivos generales esta referencia no permite diferenciar entre unas unidades didácticas y otras.

Igualmente, si consideramos las orientaciones de los documentos curriculares sobre metodología, es difícil establecer diferencias para los distintos bloques de contenidos y, de ahí, para los diversos tópicos de la asignatura de matemáticas. Desde la perspectiva del profesor no hay un tratamiento metodológico esencialmente distinto para cada bloque que se derive de las consideraciones metodológicas que aparecen en el Currículo de Matemáticas. Cuando hay que mencionar la componente metodológica de cada unidad didáctica encontramos los mismos criterios generales como única referencia. Esta consideración es válida también cuando tratamos de establecer criterios propios para cada tópico en relación con la evaluación.

Constatamos así un hecho: los bloques de contenidos y las unidades didácticas se distinguen unos de otros por sus contenidos específicos, casi con exclusividad; esto es lo que se desprende del Currículo de Matemáticas. En sí mismo no tiene por que considerarse un hecho positivo o negativo, sino que es la opción adoptada para el actual Currículo.

Por ello, cuando nos proponemos planificar cada una de las unidades a partir del Currículo para el área de matemáticas, encontramos unos enunciados generales sobre objetivos, metodología y evaluación, válidos para todas ellas, y unos contenidos específicos distintos para cada una.

Hay algo que no encaja cuando pretendemos diseñar unidades didácticas en matemáticas mediante las cuatro componentes convencionales del currículo (objetivos, contenidos, metodología y evaluación) tal y como aparecen indicadas en los documentos curriculares, ya que, en este caso, el análisis de las cuatro componentes se reduce al análisis de los contenidos y a consideraciones genéricas sobre las otras tres componentes. El grado de generalidad con que aparecen tres de las componentes: objetivos, metodología y evaluación, resulta dispar con la mayor precisión con la que aparecen detallados los contenidos.

Con la reflexión que se puede realizar a partir de los decretos curriculares resulta explicable por qué se produce una confusión entre currículo y programa en multitud de ocasiones. Si en la planificación de los temas y unidades el componente diferenciador son los contenidos ¿para qué considerar el resto de las componentes curriculares?

Esta confusión está más extendida de lo que se admite; el profesor está dispuesto a reconocer la importancia de los objetivos generales, de los criterios metodológicos y de los principios para la evaluación, pero, en el momento de planificar su actividad cotidiana, su reflexión se centra en los contenidos ya que es mediante ellos cómo se distinguen unas unidades de otras usualmente. El trabajo del Seminario de Matemáticas y la planificación de cada profesor se concreta sobre los contenidos; la consideración sobre las otras tres componentes curriculares es de un carácter general, muy distinto.

Esta confusión tiene también su fundamento en los planes de formación del profesorado que mantiene la administración educativa española para los profesores de secundaria. Por un lado, se ofrece a estos profesores una formación científica sólida, de cinco años de duración y correspondiente a una licenciatura. Esta formación capacita para gestionar los contenidos adecuadamente. Por otro, y sin conexión explícita, hay una formación pedagógica, en un curso de 90 horas de duración, que se lleva a cabo en un trimestre y da lugar al título de Capacitación Pedagógica. La formación didáctica que se proporciona en este curso es superficial y sin apenas estructuración. Esta formación debe capacitar a los profesores para trabajar sobre los objetivos, la metodología y la evaluación, en relación con cada uno de los contenidos del programa; de hecho, sólo les capacita para dotar de cierto sentido unos enunciados genéricos que nunca llegan a conectar con los bloques de contenidos y las unidades didácticas.

Nuestra crítica está dirigida, en este caso, hacia la deficiente preparación didáctica que recibe el profesor en formación, que sólo le capacita para discutir sobre los contenidos. Es necesario enriquecer esa preparación y superar el estado actual de la formación inicial.

2. PROGRAMACIÓN DE UNIDADES DIDÁCTICAS

Podría derivarse de la argumentación anterior que el concepto de currículo no es útil para la planificación y diseño de unidades didácticas ya que, de sus cuatro componentes, sólo una de ellas tiene peso especifico propio en cada unidad. No es esa la tesis que sostenemos. Hemos visto en el capítulo anterior la complejidad del concepto de currículo y los diversos niveles de reflexión con los que se puede abordar tal concepto. Este concepto lo hemos presentado como una herramienta básica para el trabajo del profesor de matemáticas de secundaria; por ello, debe resultar válido igualmente para la planificación y desarrollo de unidades didácticas.

Nuestra tesis es que el profesor de matemáticas de secundaria de hoy no dispone de herramientas conceptuales adecuadas y suficientemente desarrolladas a partir de la cuales realizar una buena planificación. Estas deficiencias provocan las dificultades señaladas en el uso del concepto de currículo, considerado como conjunto de objetivos, contenidos, metodología y evaluación. Los documentos para el Currículo de Matemáticas no proporcionan información suficiente para utilizar de manera efectiva las cuatro componentes mencionadas en la planificación de temas y unidades. Esto es así puesto que no ofrecen criterios para la selección, secuenciación y organización de los contenidos, criterios para la organización, desarrollo y control del trabajo en el aula, prioridades en el proceso de construcción del conocimiento y en la asignación de significados por parte de los alumnos, y criterios para valorar los logros en el aprendizaje y para el tratamiento adecuado de los errores, para cada una de las unidades del currículo de matemáticas. Tampoco el profesor dispone de formación adecuada para realizar las adaptaciones correspondientes.

Necesitamos un nuevo nivel de reflexión curricular conectado con la programación y, por tanto, nuevas herramientas conceptuales con las que trabajar en este nivel y mediante las que abordar las tareas de diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas en el área de matemáticas. La caracterización operacional del currículo mediante objetivos, contenidos, metodología y evaluación, no es inadecuada, sólo lo es su empleo en tareas de diseño y planificación del trabajo para el aula, sin criterios de referencia. Esperamos, a la conclusión de este capítulo, haber presentado estos nuevos conceptos y herramientas junto con los criterios mediante los que llevar a cabo la planificación de unidades didácticas.

Tratemos de poner de manifiesto algunas limitaciones que surgen al considerar el concepto general de currículo anteriormente descrito. Una de tales limitaciones se produce por olvidar la funcionalidad de ese concepto y el contexto en el que se presenta. Cuando encontramos un discurso sobre objetivos, contenidos, metodología y evaluación no debemos olvidar que se trata de un medio dialéctico que elabora la administración educativa, o los expertos en educación, para dirigirse a los profesores en ejercicio. Este discurso se encuentra en los documentos oficiales o en los libros elaborados para la orientación profesional. Mediante tal discurso se organiza el diálogo que la administración establece con los profesionales de la educación. La reflexión sobre objetivos, contenidos, metodología y evaluación va dirigida, casi en exclusiva, a profesores y educadores; nunca va dirigida a los alumnos.

Por ello carece de sentido que, cuando los profesores reflexionan sobre su trabajo en relación con los alumnos, traten de reiterar el esquema anterior y comportarse como si cada profesor fuese el legislador o la administración para sus alumnos. No tiene sentido que el profesor organice inicialmente su reflexión y planificación sobre unidades didácticas en términos de objetivos, contenidos, metodología y evaluación, con carácter general, puesto que la relación del profesor con sus alumnos es distinta de la que tiene la administración educativa con los profesores. Empeñarse en ese esquema produce una simplificación y trivialización de las actividades de programación que, como ya hemos visto, no resulta saludable para su puesta en práctica.

Veremos más adelante que es posible expresar las unidades didácticas mediante estas cuatro componentes: objetivos, contenidos, metodología y evaluación, pero como resultado de un proceso de reflexión más elaborado, cuyo hilo conductor tiene unos elementos conceptuales y unas bases disciplinares diferentes a las componentes mencionadas. Se argumentará que tales referencias conceptuales proporcionan criterios adecuados para organizar el currículo de matemáticas.

El profesor, cada profesor, no es el Ministro o Consejero de Educación de sus alumnos, por ello la línea de reflexión que cada profesor elabora para desarrollar el trabajo de sus alumnos tiene una base argumental diferente de la línea de reflexión que la administración educativa elabora para organizar el trabajo de los profesores. El único elemento coincidente que hemos admitido, hasta el momento, para ambas líneas de reflexión es el que se denomina *contenidos*, que vamos a tomar como referencia para la búsqueda de nuevos elementos que permitan caracterizar la elaboración de unidades didácticas.

Esta confusión también se produce por tratar de resolver los problemas de un campo disciplinar específico, como es la Educación Matemática, mediante los instrumentos de un campo disciplinar diferente y más genérico, la Teoría Curricular, sin matizaciones ni cautelas.

3. LA BÚSQUEDA DE NUEVOS ELEMENTOS

Como los profesores disponen de información suficiente sobre los contenidos puede parecer que éstos no están nunca en discusión. Nada más lejos de la realidad. Los profesores de matemáticas suelen sostener planteamientos diversos sobre el modo de organizar cada uno de los bloques de contenidos. Precisamente por ello, las discusiones en los seminarios o departamentos de matemáticas suelen centrarse sobre los contenidos y tienen un vigor y un nivel de profundidad en ocasiones envidiables. Al compartir una cultura matemática con cierto nivel de profundidad los profesores pueden articular de maneras diversas sus conocimientos sobre cada uno de los temas y, aun cuando no las compartan plenamente, son capaces de entender opciones alternativas y apreciar sus ventajas o señalar sus inconvenientes. Dicho en otros términos, los profesores de matemáticas tienen formación suficiente y fuentes documentales adecuadas para dar forma y expresión coherente a sus coincidencias sobre los contenidos pero también, lo cual es aún más importante, a sus discrepancias.

Dos profesores distintos pueden diseñar esquemas y organizaciones diferentes para los contenidos de una unidad didáctica concreta, pero tales esquemas pueden ser perfectamente entendidos e, incluso, asumidos por el otro. Es posible que los esquemas sean muy diferentes, pero tienen unas referencias comunes que permiten que un profesor pueda sustituir provisionalmente al otro; también permiten que, si se produce un cambio de profesor en un grupo de alumnos de un curso para otro, cada uno de los profesores sepa cómo conectar los conocimientos previos de los alumnos y sus esquemas de organización para conceptos y procedimientos con su modo particular de organizar esos mismos contenidos.

Lo interesante de los contenidos en las unidades didácticas es que expresan una información común para todos los profesores sobre la cual se pueden establecer coincidencias pero, sobre todo, se puede disentir y estas disensiones se pueden delimitar sin que ello suponga problemas especiales de planificación y ejecución. Esta información básica común la encontramos en unos libros y documentos de referencia sobre matemáticas que están a disposición de los profesores en las bibliotecas de los centros e, incluso, en las bibliotecas particulares de los profesores de matemáticas. Basta muchas veces con que se mencione el libro de consulta que está siguiendo un profesor para que quede clara la orientación que se está dando a los contenidos de un tema o de un bloque de temas concreto. En un planteamiento clásico esto queda claro: cuando un profesor dice «estoy siguiendo el Apostol (o el Guzmán o el Spivak) para el concepto de límite», expresa una opción que se diferencia claramente de otras.

Volviendo a nuestra reflexión inicial sobre las cuatro componentes del currículo está claro que no hay una cultura compartida equivalente para los objetivos, la metodología y la evaluación por cada uno de los bloques de temas. Hay unas prácticas compartidas con multitud de variantes, pero no un marco teórico que permita tratar con objetividad tales prácticas. Los profesores encuentran muy difícil exponer con precisión sus propios puntos de vista sobre estas tres componentes, pero encuentran mucho mas difícil aún dar validez objetiva a los puntos de vista de los compañeros. Si ya resulta complicado expresar las coincidencias, es casi imposible caracterizar las discrepancias y encontrar referencias comunes que permitan asumir provisionalmente el punto de vista alternativo como opción propia. Cuando los profesores de matemáticas hablamos de objetivos, metodología y evaluación, salvo excepciones, empleamos un discurso muy personal, genérico e impreciso, con pocas referencias externas y datos objetivos, con soporte físico concreto. No hay apenas bases documentales de referencia y, cuando las hay, son desconocidas para la mayoría de los profesores o vuelven a ser tan genéricas que no resultan útiles para el trabajo común de los profesores de un mismo seminario.

4. CARACTERIZACIÓN DE LOS ORGANIZADORES DEL CURRÍCULO

Como consecuencia de las reflexiones anteriores nos planteamos las siguientes preguntas: ¿es posible encontrar otros elementos, distintos de los contenidos, que expresen un conocimiento objetivo y útil para la elaboración de unidades didácticas? ¿existen fuentes objetivas de conocimientos, adecuadas para organizar unidades didácticas en matemáticas? ¿qué otros conocimientos, distintos de los contenidos, son útiles y necesarios para una adecuada programación? ¿sobre qué tópicos pueden discutir los profesores cuando están planificando cada uno de los temas? ¿es posible encontrar organizadores para este nivel de reflexión sobre el currículo de matemáticas, además de los contenidos?

Está claro que la respuesta ha de ser afirmativa ya que no es cierto que la planificación de un tema se reduzca a una simple organización secuenciada de conceptos y procedimientos. En nuestra más extendida tradición de organización de unidades didácticas, es decir, en los libros de texto encontramos otros elementos, distintos a los contenidos, mediante los cuales se organizan cada una de las lecciones. Quizás tales elementos no aparezcan explícitamente mencionados, pero resultan necesarios para la planificación de cada lección y los encontramos ejemplificados en cada una de ellas. ¿Qué ideas subyacen en la organización de un libro de texto? ¿qué organizadores permiten estructurar las distintas unidades didácticas en el área de matemáticas?

Cuando los profesores indagan en su propia práctica, sobre la base de las reflexiones anteriores, comienzan a encontrar respuestas adecuadas. Hay algunas opciones más obvias y otras más difíciles de localizar, pero, tras alguna sesión de debate sobre las características de un organizador, cualquier grupo motivado de profesores puede encontrar una lista de organizadores aceptable sobre la cual continuar la discusión. Vamos a llamar ***organizadores*** a aquellos conocimientos que adoptamos como componentes fundamentales para articular el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas. Hablamos así de organizadores del currículo.

Una condición exigida para aceptar un tipo de conocimientos como organizador del currículo de matemáticas debe ser su carácter objetivo y la diversidad de opciones que genere. Un organizador debe ofrecer un marco conceptual para la enseñanza de las matemáticas, un espacio de reflexión que muestre la complejidad de los procesos de trasmisión y construcción del conocimiento matemático y unos criterios para abordar y controlar esa complejidad. Los organizadores deben mostrar su potencialidad para establecer distintos marcos de estructuración de las unidades didácticas, con una base objetiva de interpretación y discusión. Los organizadores han de ubicar las distintas opciones de los profesores para la planificación, gestión y evaluación de unidades didácticas y han de situar estas opciones en unas referencias comunes, que permitan precisar las coincidencias y las discrepancias. Los organizadores deben tener una base disciplinar adecuada, que permita su tratamiento objetivo. El conocimiento didáctico sobre cada uno de los contenidos del currículo de matemáticas ha de quedar estructurado mediante la aportación que hacen cada uno de los organizadores a dicho contenido.

También ha de resultar posible encontrar documentos y fuentes de información sobre cada uno de los organizadores, ya que éstos no deben ser producto de la inspiración de un grupo de personas o de una moda; cada profesor debe tener acceso a diversos documentos, libros y publicaciones mediante los que sea posible profundizar en la aportación que cada uno de ellos hace a cada tópico y, además, proporcionar información contrastada sobre la validez y utilidad de estas aportaciones. Los documentos que organizan la información sobre los diversos modos de estructurar una determinada unidad didáctica proporcionan las bases conceptuales para tomar acuerdos o disentir sobre los diferentes modos de trabajar en la misma. De esta manera, cada organizador proporciona una base sólida y unos criterios para estructurar todas y cada una de las unidades didácticas y para la delimitación del conocimiento didáctico de sus contenidos.

5. ORGANIZADORES PARA EL CURRÍCULO DE MATEMÁTICAS

Las diferentes disciplinas matemáticas (Álgebra, Análisis, Aritmética, Geometría, Estadística, Probabilidad) satisfacen todas las condiciones que acabamos de mencionar: tienen carácter objetivo, ofrecen una diversidad de opciones para estructurar unidades didácticas, permiten reconocer coincidencias y discrepancias entre distintas estructuraciones así como discutir sobre ellas; tienen, obviamente, una fundamentación disciplinar y académica, y se dispone de fuentes documentales diversificadas que proporcionan información suficiente para cada tópico. Pero las disciplinas matemáticas no agotan las necesidades organizativas del currículo de matemáticas; de ahí que, como se ha argumentado, sea necesario proceder a la búsqueda de nuevos organizadores.

En la planificación de cada uno de los temas o unidades didácticas, además de las posibles opciones matemáticas de organización para un tópico, resulta imprescindible tener en cuenta otros aspectos, de los que vamos a hacer una selección y destacar los que, a nuestro juicio, resultan más relevantes.

En primer lugar, consideramos los errores y dificultades usualmente detectados en el aprendizaje de las matemáticas, que se presentan sobre cada tópico, así como los problemas u obstáculos de aprendizaje que se detectan o plantean para cada concepto.

En segundo lugar, la diversidad de representaciones utilizadas para cada sistema conceptual, junto con algunas de las modelizaciones usuales de los correspondientes conceptos.

En tercer lugar, la fenomenología de los conocimientos implicados, así como las aplicaciones prácticas de cada bloque de contenidos.

En cuarto término, la diversidad de los materiales de tipo manipulativo y de los recursos que pueden emplearse en la enseñanza de cada tópico.

Y, en quinto término, la evolución histórica de cada campo e, incluso de cada concepto.

Estas cinco perspectivas, junto con los propios contenidos, no agotan las posibilidades de reflexionar sobre cada una de las unidades del currículo de matemáticas desde un planteamiento didáctico. Posiblemente hay otras alternativas u otros modos de considerar los organizadores que acabamos de presentar, pero son éstos los que constituyen nuestra opción y sobre los que vamos a centrar nuestra reflexión en este trabajo. Todos ellos, conjuntamente, ofrecen la posibilidad de realizar un análisis didáctico de cada uno de los temas del currículo de matemáticas, es decir, un análisis de los contenidos de las matemáticas al servicio de la organización de su enseñanza en el sistema educativo. Este análisis forma parte ineludible del trabajo que los profesores de matemáticas deben realizar en sus tareas de planificación de unidades didácticas, y es por ello que son necesarios unos organizadores, los mencionados u otros alternativos.

Usualmente, la información sobre los organizadores considerados se presenta incorporada en las tareas y actividades que se encuentran en los libros de texto, sin que de ello se haga mención explícita, ni tampoco una presentación sistemática. Por ello no es usual que el profesor perciba su interés para la estructuración de las unidades didácticas.

Veamos unos cuantos ejemplos de cómo aparece información sobre diferentes organizadores en los libros de texto; tomamos como referencia los textos de *Matemáticas para Educación Secundaria Obligatoria. Proyecto 2000*, de la Editorial Algaida (Rico, Coriat, Marín y Palomino, 1994-a y 1994-b).

Los errores se ponen de manifiesto como conocimientos inadecuados, por ello su detección se organiza mediante un escalonamiento de ejercicios, problemas y actividades; también se tratan de controlar en las recomendaciones que los autores van haciendo al lector para que ponga atención sobre determinados aspectos o para que no confunda nociones similares. Durante la realización de los ejercicios es necesario un observador externo para evaluar la distancia entre la afirmación errónea y el conocimiento correcto, y conducir al alumno extraviado hasta el conocimiento que se ha estipulado como correcto. Encontramos un ejemplo de aproximación a los errores en el libro de Matemáticas para tercer curso (Rico, Coriat, Marín y Palomino,1994-a):

Para comparar números decimales hay que tener en cuenta algunas ideas importantes. Así, si queremos ordenar 0.1, 0.23 y 0.115, observamos que:

Mayor número de cifras en un decimal no significa que sea mayor; la comparación no puede hacerse por el número de cifras decimales.

Entre dos números decimales el mayor no tiene por que ser el de más cifras: 0.115 es menor que 0.23.

(pg. 39)

Las diferentes representaciones para los conceptos y procedimientos matemáticos se presentan explícitamente, así como las conexiones entre ellas, pero raras veces se insiste en que expresan diversas facetas y propiedades de un mismo concepto. Un ejemplo de uso explícito de diferentes representaciones lo encontramos en el libro de Matemáticas para 4º curso (Rico, Coriat, Marín y Palomino, 1994-b):

Cuando n no es un cuadrado perfecto, la expresión $\sqrt{n}$ (raíz cuadrada de n) representa:

Primero, una operación para calcular números de un orden decimal determinado, cuyo cuadrado es el valor más próximo a n (por defecto o por exceso) para ese orden decimal.

Segundo, un punto de la recta, con un proceso de construcción explícito y conocido.

Tercero, una notación decimal con infinitas cifras no periódicas.

Cuarto, un segmento de longitud $\sqrt{n}$, inconmensurable con el segmento unidad.

(pg. 31)

La consideración del conocimiento matemático como modelo también la podemos encontrar con frecuencia; igualmente las modelizaciones surgen en los problemas de aplicación. En cada uno de los siguientes ejemplos, tomados del texto de 3º, tenemos una propuesta para considerar un tipo de modelo matemático:

La proporcionalidad es un modo de asociar cantidades de dos magnitudes. Las personas usamos el razonamiento proporcional en una gran variedad de situaciones.

El razonamiento proporcional es muy útil y frecuente, pero en muchas situaciones no resulta adecuado. Debes aprender a distinguir las situaciones en las que éste no es apropiado

(pg. 50)

> Los poliedros, como modelos de estructuras y como modelos que rellenan una región del espacio, se usan como herramientas para resolver problemas de muy diversas clases, como las modernas teorías cristalográficas y las teorías de la estructura molecular de los sólidos.

(pg. 91)

La fenomenología de cada uno de los conceptos debiera estar en la base de los diferentes ejercicios y actividades que se proponen o de las actividades de motivación y ampliación; no es usual que los libros de texto hagan un barrido explícito de las principales opciones fenomenológicas para un determinado concepto, pero está claro que, si se quiere presentar un tópico matemático en toda su riqueza y pluralidad de significados, debe considerarse en conexión con diferentes fenómenos y debe aplicarse a otros campos diferentes del conocimiento. En el texto ya mencionado, encontramos:

> Hay situaciones cotidianas en las que escogemos o seleccionamos grupos de objetos. La elección de un almuerzo de un menú de un restaurante es un ejemplo de selección.
>
> Con frecuencia establecemos ordenaciones; las posiciones de los muebles en una habitación o las formas de alojarse cuatro personas en un vehículo implican posibles ordenaciones. Nuestro lenguaje o el sistema de numeración decimal se compone de agrupaciones ordenadas –palabras o números– tomadas del alfabeto o de los 10 dígitos.
>
> Las situaciones comentadas y muchas otras similares se denominan situaciones combinatorias. Se reconocen porque existe un conjunto sobre cuyos objetos aplicamos algún criterio de colocación, selección u ordenación, generándose varias soluciones acordes con el criterio

(pg. 200)

La caracterización histórica de cada tópico se viene incorporando recientemente a nuestros libros de texto; de nuevo tenemos un ejemplo:

> El Álgebra se caracteriza por sus métodos para determinar valores o cantidades desconocidos mediante las relaciones que guardan con otras cantidades conocidas; estos métodos conllevan el uso de letras y expresiones literales con las que se realizan operaciones.
>
> Descartes (1596-1650), en su *Geometría* publicada en 1637, se expresaba así:
>
> «Una ecuación está integrada por varios términos, algunos de ellos conocidos y algunos de ellos desconocidos, siendo unos iguales a otros, o más bien, considerados todos conjuntamente son iguales a cero.»

(pg. 149)

Todavía resulta necesario profundizar más y mejor en los usos didácticos de la evolución histórica del concepto o conceptos que se estén considerando para cada unidad didáctica.

Materiales y recursos son tópicos más familiares al profesor de matemáticas, y es usual encontrar referencias explícitas en los libros de texto:

> Si dispones de un balón, marca con rotulador sobre él una red de paralelos y meridianos. Elige dos puntos que estén en el mismo paralelo y, estimando, traza el círculo máximo que pasa por esos dos puntos; comprueba que la distancia entre esos dos puntos medida sobre el círculo máximo es inferior a la distancia medida sobre el paralelo.

(pg. 100)

> Tres pelotas de tenis se venden en contenedores cilíndricos; se trata de un ejemplo de apilamiento de esferas congruentes. Queremos calcular la fracción del volumen del cilindro ocupado por las esferas

(pg. 116)

Es evidente que en la realización de un libro de texto intervienen, con mayor o menor extensión, profundidad y sistematicidad, los tipos de información que acabamos de revisar. Un libro de texto moderno no queda nunca reducido a la simple presentación secuenciada de definiciones, conceptos, operaciones, propiedades, estructuras y teoremas matemáticos.

El trabajo de los profesores de matemáticas tampoco puede reducirse a planificar los estrictos conocimientos formales de matemáticas. Sin embargo, por la cultura en la que han sido formados, los únicos datos que los profesores parecen compartir son las informaciones exclusivamente matemáticas, y es sobre estos datos sobre los que únicamente se producen discusiones en las tareas de planificación y diseño. Se trata de una consideración obviamente deficiente, que tiene su repercusión en las tareas de elaboración, puesta en práctica y valoración de unidades didácticas. También tiene implicaciones para el trabajo dentro del seminario o departamento de matemáticas, y en la consideración de la dimensión social de ese trabajo.

6. LOS ORGANIZADORES Y EL CONOCIMIENTO PROFESIONAL

El estudio de los organizadores se encamina a profundizar en el conocimiento profesional sobre cada uno de los tópicos del currículo de matemáticas; por ello consideramos que las reflexiones e informaciones que se presentan y emplean han de ser variadas y procedentes de diversas disciplinas.

El conocimiento profesional que necesita el educador matemático no se limita a las disciplinas matemáticas. El profesor de matemáticas necesita de un conocimiento profesional propio, que le dote de autonomía intelectual, que le permita valorar críticamente las propuestas de la administración y los materiales y libros elaborados por editoriales y casas comerciales, que le proporcione la competencia adecuada para elaborar sus propios materiales. Para ello necesita ampliar sus perspectivas sobre los contenidos del currículo de matemáticas de manera que su consideración no sea exclusivamente formal y técnica. Esto plantea la necesidad de considerar igualmente una aproximación cognitiva para cada uno de los contenidos; también son necesarios un análisis semiótico, una reflexión fenomenológica, una perspectiva histórica y, en su caso, epistemológica, una valoración de contextos en los que se presenta cada concepto y de sus usos y significados, y una revisión de los materiales y recursos con los que puede mostrarse. Estos tipos de conocimientos son organizadores del currículo, se presentan como las principales fuentes de información para el profesor de matemáticas y como instrumentos concretos en su actividad profesional para las tareas de planificación y diseño de unidades didácticas. Ofrecen referencias para estructurar el trabajo de los seminarios o departamentos de matemáticas en los centros escolares, ya que proporcionan marcos organizativos e información contrastada mediante la que compartir dichas propuestas y criterios para establecer diferentes modos de ponerlas en práctica.

Una formación profesional adecuada para los profesores de matemáticas de secundaria incorporaría en sus planes de estudio asignaturas como Historia de la Matemática, Filosofía de la Matemática, Teorías del Aprendizaje de las Matemáticas, Fenomenología Didáctica de las Estructuras Matemáticas, Bases Teóricas para el Currículo de Matemáticas y Análisis Didáctico del Currículo de Matemáticas de Secundaria. Estas disciplinas aportan la formación necesaria y los elementos de análisis adecuados para la planificación y realización de su trabajo profesional; es decir, aportan la formación teórica necesaria para el conocimiento didáctico del contenido de las matemáticas de secundaria. De este modo se hace posible equilibrar la formación estrictamente técnica que aportan las disciplinas matemáticas tradicionales, con una formación científica y didáctica, imprescindible para ejercer con preparación adecuada la difícil profesión de profesor de matemáticas.

Esta formación no es necesario inventarla o construirla desde cero; existen documentos y libros en los que se encuentran sistematizaciones bien realizadas sobre cada uno de los campos considerados; existen, igualmente, estudios e investigaciones que tratan de indagar sobre todas y cada una de las facetas mencionadas del conocimiento didáctico del contenido matemático. Aunque una parte importante de estos estudios no está escrita en español, ya hay un volumen considerable de información sobre estos campos disponible para los profesores del sistema educativo español.

Las revistas profesionales editadas por Sociedades o Grupos de Innovación, las colecciones temáticas en Didáctica de la Matemática, la diversidad de libros de texto y libros del profesor, las actas de Congresos, Jornadas y Encuentros, las publicaciones de materiales curriculares realizadas por las diversas Administraciones Educativas, además de otros materiales menos difundidos realizados por grupos de profesores y equipos de innovación, proporcionan un volumen considerable de documentos mediante los cuales se puede obtener información diversificada y detallada sobre diferentes aproximaciones a los contenidos del currículo de matemáticas.

Pero mientras llega el momento en que la comunidad de educadores matemáticos asuma la plenitud de su responsabilidad, en que se esfuerce por establecer con precisión sus necesidades profesionales y delimite las componentes básicas formativas que dan satisfacción a esas necesidades, el momento en que se exija de las instituciones universitarias que atiendan adecuadamente a tales necesidades formativas poniendo a su servicio las estructuras académicas adecuadas, mientras llega ese momento, no podemos limitar nuestro trabajo a la denuncia, la queja o la autocompasión. Hay que reflexionar y elaborar propuestas concretas que faciliten las tareas del profesor y mejoren sus conocimientos didácticos. Éste es un objetivo de este libro: aportar una reflexión sistemática para el profesor de matemáticas, bien fundada y eficaz para la organización de sus actividades de planificación y diseño de unidades didácticas. Por ello hemos dedicado un capítulo independiente a cada uno de los organizadores mencionados y hemos reservado el último capitulo a ejemplificar cómo se movilizan los diferentes organizadores en el diseño de un tópico matemático concreto.

7. PROPUESTA DE ORGANIZADORES PARA EL CURRÍCULO DE MATEMÁTICAS

Desde un planteamiento más convencional son varias las informaciones y datos que se deben tener en cuenta cuando se inicia la planificación de cada una de las unidades didácticas. Por ello, además de los organizadores que hemos mencionado, vamos a considerar otros datos e informaciones, necesarios para dicha planificación, y vamos a realizar una primera descripción de cada uno de los organizadores.

Una primera información, que actúa como organizador para cada unidad didáctica, es la ubicación y tratamiento de cada uno de los tópicos que se consideran en el Currículo del Ministerio y en el de la correspondiente Comunidad Autónoma en la que cada profesor se encuentre trabajando. Con esta información se trata, obviamente, de situar cada uno de los temas o unidades dentro de la legislación editada por el Ministerio y las correspondientes Consejerías de Educación autonómicas.

En cada caso hay que disponer de los Reales Decretos y de los Decretos publicados en el Boletín Oficial del Estado sobre el Currículo de Secundaria; igualmente de los decretos de los Boletines Oficiales autonómicos. La organización de cada tema o unidad debe realizarse, prioritariamente, en relación con estos documentos. En segundo término se podrán citar otras fuentes documentales.

Un segundo organizador debe presentar detalladamente la estructura de los contenidos de cada uno de los temas, teniendo en cuenta la organización cognitiva de los conocimientos matemáticos que ha adoptado el Currículo de Matemáticas. Se trata de la organización de los contenidos matemáticos de cada una de las unidades mediante su clasificación en conceptos, procedimientos, estrategias y actitudes. El tratamiento que realiza el Real Decreto 1345/1991 ha de servir de referencia, pero no puede adoptarse como esquema rígido e inamovible sino que debe analizarse y tratar de ampliarse y enriquecerse, ya que las perspectivas y prioridades no se encuentran agotadas por la propuesta ministerial o autonómica.

Un tercer organizador lo proporciona el análisis fenomenológico de los conocimientos matemáticos. La aproximación que ofrece la fenomenología didáctica de los conocimientos realiza un balance de aquellos fenómenos para cuya comprensión y dominio se elaboraron los correspondientes conocimientos matemáticos. Por ello conviene conocer cuáles son los fenómenos que están en la base de los contenidos tratados en cada una de las unidades. Las situaciones en las que se presentan y emplean los diferentes conceptos y procedimientos y las funciones que en cada caso se destacan, constituyen una dimensión importante para el análisis y tratamiento didáctico del conocimiento matemático, como ya puso Freudenthal de manifiesto.

Un profesor que trabajase la multiplicación utilizando sólo las tablas de multiplicar de los números pares estaría dando una información incompleta y proporcionando una formación deficiente a sus alumnos. Cuando un profesor utiliza sólo determinados contextos y situaciones para mostrar las bases y aplicaciones del conocimiento matemático, deja un campo de fenómenos sin explorar y, por tanto, ofrece a sus alumnos, igualmente, una información incompleta y deficiente.

Las necesarias conexiones con las ciencias experimentales, con el arte, la economía y otras ramas del conocimiento, las diferentes utilizaciones que se hacen de los conocimientos matemáticos, son otros tantos fenómenos que conviene considerar en el momento de seleccionar y organizar los contenidos y de diseñar las secuencias metodológicas, ejemplos, motivaciones y materiales para su transmisión.

El cuarto organizador se refiere a los aspectos visuales y simbólicos del conocimiento matemático y de su aprendizaje. A esta fuente de información la hemos denominado modelos y representaciones.

La noción de representación hace referencia al modo en que los sujetos expresan sus conocimientos con notaciones simbólicas o mediante algún tipo de gráfico. Mediante las representaciones las personas organizan su información sobre un concepto u operación para poder pensar sobre ellos, expresar su comprensión, y utilizarla en situaciones y problemas prácticos o en situaciones escolares convencionales. Los modelos sirven para la presentación y desarrollo de un determinado concepto; también las representaciones matemáticas se utilizan para modelizar fenómenos naturales o sociales.

Un quinto organizador, que hemos denominado errores y dificultades, tiene por finalidad poner en conocimiento del profesor los resultados de las investigaciones realizadas en torno a las dificultades de comprensión durante la enseñanza y aprendizaje de los contenidos matemáticos correspondientes. Uno de los datos que surgen en estos estudios son los errores de los alumnos, tanto en los aspectos conceptuales como en los procedimentales.

También se observa que hay determinados conocimientos que lleva más tiempo comprender o en los que hay un mayor número de alumnos que no comprenden correctamente; estos conocimientos son los que consideramos difíciles o de mayor dificultad. Al realizar la programación de un tema el Profesor debe disponer de información sobre cuáles son aquellos puntos que van a tener una dificultad especial, así como aquellos errores o conocimientos insuficientes que sus alumnos pueden encontrar. No sólo es necesaria esa información sino que también el profesor debe saber cómo diagnosticar los errores de sus alumnos y qué tratamiento debe seguir con ellos para remediar sus deficiencias. Aunque no es mucho lo que se sabe sobre técnicas correctivas, sí es conveniente disponer de información ya contrastada.

Los materiales y recursos constituyen el séptimo organizador. Los materiales son concreciones de modelos realizadas por casas comerciales o por el profesor. Así, las regletas de Cuisenaire son una concreción del modelo con medidas para el aprendizaje de los números naturales, pero no es la única concreción de ese modelo. Los recursos proporcionan situaciones, o ayudas para trabajar en una situación, en las que el concepto estudiado se emplea significativamente y permite desarrollar algunos procedimientos. La noción de recurso es más amplia e imprecisa, ayuda a evocar el concepto y a trabajar sobre él empleándolo en situaciones prácticas. Dentro de los recursos actuales encontramos los materiales derivados de las nuevas tecnologías de los que conviene hacer mención explícita cada vez que resulte adecuado.

El séptimo organizador tiene por finalidad señalar algunos momentos a lo largo de la historia de la matemática en los que el conocimiento matemático considerado tuvo un desarrollo especial o desempeñó algún papel de interés. Hemos denominado desarrollo histórico del tópico a este organizador. La información histórica puede servir en la programación para motivaciones, ejemplos y también para proponer algún ejercicio curioso. Los alumnos se sienten especialmente interesados cuando se les proporciona información adecuada sobre historia de las matemáticas y los antecedentes de un contenido. Se trata de poner el énfasis en la dimensión cultural e histórica del conocimiento matemático, pero no se pretende hacer un estudio exhaustivo y completo de la evolución histórica de cada uno de los tópicos. La revisión de algunas dificultades históricas en la construcción de un determinado concepto puede servir de aliciente a los estudiantes para superar ellos mismos tales limitaciones.

Finalmente, hay un octavo organizador ineludible en toda programación, que consiste en la elaboración de una bibliografía básica para cada uno de los temas que se esté considerando. Esta bibliografía debe recoger los documentos más significativos por cada uno de los apartados anteriores y debe ofrecer ejemplos de unidades didácticas sobre el tópico que se esté tratando, elaboradas con anterioridad por los profesores del seminario. Disponer de documentos de referencia y de propuestas construidas por los propios profesores no es una tarea trivial ya que proporciona un soporte físico a la totalidad de reflexiones que se realizan, dando oportunidad a la crítica y a la revisión de las ideas trabajadas. En tanto no entre en la cultura de los profesores la realización y conservación de documentos relativos a la planificación de unidades didácticas no será posible dar objetividad, peso y continuidad a estas actividades.

En los capítulos que siguen se tratan con mayor detalle los principales organizadores considerados, es decir, del tercero al séptimo. El segundo organizador ya se presentó en el capítulo anterior. Mientras que el primer organizador y el último contextualizan el marco general en que se sitúa cada unidad didáctica y el estado de su concrección, respectivamente.

8. ORGANIZADORES Y COMPONENTES DEL CURRÍCULO

Hemos comenzado este capítulo poniendo en cuestión la utilidad de la información que ofrecen los documentos oficiales sobre las cuatro componentes del currículo (objetivos, contenidos, metodología y evaluación) para la elaboración de unidades didácticas. Las deficiencias detectadas para el análisis y construcción de unidades didácticas con el esquema que proporcionan estas componentes nos llevaron a elaborar la noción de organizador y a profundizar en ella. Tomando como referencia las aportaciones que hacen cada uno de los organizadores sostenemos que es posible un análisis didáctico en profundidad de los distintos temas del currículo de matemáticas. Aunque no hemos entrado todavía en tal análisis con detalle, los organizadores se han escogido para satisfacer esta demanda.

Pero los organizadores ya proporcionan un primer resultado: obtenida la información más relevante sobre cada tópico, en relación con los diferentes organizadores, es posible establecer criterios precisos mediante los cuales estructurar la información disponible y organizar un diseño de las unidades didácticas según el esquema general de las cuatro componentes del currículo.

Analicemos estas relaciones.

La información que se obtiene a partir del análisis fenomenológico de un campo o estructura matemática ofrece orientaciones para organizar los contenidos correspondientes a los temas de ese campo; también ofrece criterios para establecer objetivos de aprendizaje, al conectar cada campo matemático con un conjunto de contextos y aplicaciones en los que tales estructuras toman significado. Igualmente, al permitir la selección de situaciones sobre las que ejemplificar determinadas nociones o iniciar su presentación, el análisis fenomenológico aporta directrices para el tratamiento metodológico de cada tema. Finalmente, la valoración del aprendizaje deberá tener en cuenta los contextos en los que los contenidos adquieren significado, y esta interpretación viene dada por el análisis fenomenológico.

El estudio de los errores y dificultades también proporciona esquemas con los que organizar los contenidos, en cuanto que una determinada secuenciación facilita la superación de dificultades específicas; proporciona criterios para establecer objetivos, en cuanto marca los errores prioritarios que deben evitarse y los obstáculos que hay que superar; proporciona orientaciones metodológicas en cuanto permite diseñar situaciones que planteen conflictos cognitivos a los alumnos en las que sea necesario reestructurar los conocimientos previos y superar las dificultades conceptuales. Finalmente, el conocimiento de los errores y dificultades de cada tópico facilita las tareas de evaluación sobre cada tema ya que señala las tareas sobre las que conviene valorar el conocimiento de los alumnos para diagnosticar sus carencias y ayudarles en su superación.

El organizador modelos y representaciones está vinculado, principalmente, con los contenidos y la metodología. La vinculación con los contenidos parece clara ya que cada concepto viene determinado por sus representaciones y los procedimientos derivados se ponen en práctica mediante actividades de modelización. La vinculación con la metodología es también fácilmente justificable ya que la secuencia y el orden en que se presentan las diversas representaciones de un mismo concepto deben estar planificadas y diseñadas para conseguir su mejor integración; igualmente, las posibles modelizaciones ayudan a ejemplificar los conceptos matemáticos y encauzan la estrategia para su desarrollo. Pero también los modelos y representaciones proporcionan criterios para establecer los objetivos y para determinar la evaluación. En los objetivos debe quedar claro qué tipos de representaciones deben manejarse sobre cada concepto clave y en qué niveles deben poderse convertir unas en otras; así mismo, deben marcarse los usos de los principales conceptos en tareas de modelización. Finalmente, la evaluación deberá poner de manifiesto las carencias y limitaciones en el uso de las diversas representaciones y en las tareas de traducción entre ellas.

El organizador materiales y recursos está vinculado principalmente con la metodología, ya que ayuda a establecer las secuencias metodológicas y las determina; los materiales y recursos proporcionan los soportes con los que se presentan y refuerzan los conceptos y procedimientos matemáticos. Pero también cabe considerar diversos niveles de complejidad en los materiales y recursos, que inciden igualmente en los objetivos, metodología y evaluación. Incluir en la planificación de una unidad didáctica determinado software puede modificar totalmente su tratamiento. Basta pensar en el programa Cabri-Geomètre para la enseñanza de la geometría, el programa Derive en la enseñanza del cálculo o en las calculadoras programables para la introducción al álgebra. Los materiales y recursos proporcionan nuevas tareas de evaluación, más abiertas y creativas, que permiten superar las pruebas convencionales de papel y lápiz.

El organizador evolución histórica de los conceptos matemáticos se vincula con los contenidos y la metodología, principalmente. Con los contenidos, ya que pone de manifiesto qué propiedades de cada concepto han tenido relevancia en distintos momentos históricos, qué notaciones se utilizaron y qué limitaciones se presentaron en cada caso. Con la metodología, ya que ayuda a reforzar el interés de los alumnos por las distintas facetas de cada concepto. Pero también la consideración de la evolución histórica satisface objetivos educativos, ya que muestra el carácter contingente del conocimiento matemático, su proceso de elaboración por personas concretas y su vinculación con épocas históricas determinadas, para dar respuesta a problemas científicos de cada época.

La consideración del proceso histórico permite valorar la belleza de las construcciones intelectuales y la importancia de las tareas bien hechas. Por otra parte, relativiza las dificultades del aprendizaje y los fallos en la evaluación, ya que muestra cómo algunos de los errores de los alumnos han tenido unos antecedentes históricos, que fueron superados por necesidades de coherencia y precisión.

Al concluir la revisión de cada uno de los tópicos o bloques de contenidos según los organizadores indicados, es el momento de hacer una selección de los documentos, informaciones y materiales obtenidos con el fin de preparar el desarrollo de cada uno de los temas o unidades didácticas concretas. No toda la información recogida sobre cada uno de los organizadores para cada tema puede desarrollarse en el aula, de la misma forma que el profesor no explica ni desarrolla todos sus conocimientos matemáticos sobre cada uno de los temas. Esta información forma parte del depósito de conocimientos que comparten los profesores del seminario de matemáticas, en base al cual hacen una selección razonada para el diseño de cada unidad didáctica.

El diseño general debe tener en cuenta diferentes alternativas, a partir de las cuales los profesores llevan adelante sus tareas de planificación. En cada caso es necesario establecer unas prioridades y hacer una selección de la información aportada por los diferentes organizadores. De este modo se obtienen informaciones concretas para establecer los objetivos, contenidos, metodología y evaluación de cada tema. En el paso de la información obtenida con los organizadores a las decisiones sobre cada una de las cuatro dimensiones del currículo, se tendrá en cuenta el siguiente marco:

1. Objetivos, que harán referencia a:

1.1. Prioridades en el dominio conceptual y procedimental de cada tema.

1.2. Conocimiento de los sistemas de representación y dominio de las tareas de conversión entre los diferentes sistemas. Niveles convenientes de dominio en cada caso.

1.3. Competencias en la ejecución de procedimientos, con especial énfasis en las tareas de modelización.

1.4. Familiaridad con los contextos y situaciones en las que los conceptos y procedimientos tienen un uso y aplicación convenidos; comprensión de los principales significados de cada campo conceptual.

1.5. Control de los errores usuales y superación de las dificultades conceptuales de cada tópico.

1.6. Prioridades en los medios tecnólogicos, en la selección de recursos específicos y en el dominio de tales medios y recursos.

1.7. Fomento de actitudes positivas respecto a las matemáticas tales como: satisfacción por la tarea bien hecha, por la construcción coherente de argumentos, la resolución de problemas, búsqueda de la verdad y apreciación de la belleza en las realizaciones matemáticas.

2. Contenidos, que harán referencia a:

2.1. Criterios para organizar y estructurar cada campo conceptual.

2.2. Organización y secuenciación de dificultades que se prevén en cada caso.

2.3. Selección de los sistemas de representación adecuados, de sus relaciones y limitaciones, y de los procedimientos relacionados.

2.4. Delimitación de los campos de aplicaciones y de los fenómenos en cuya modelización se va a trabajar.

2.5. Preconceptos y errores previsibles, así como su conexión con la estructura del campo conceptual.

2.6. Prioridades en los materiales y recursos mediante los que se van a tratar cada uno de los temas.

2.7. Conexión de cada campo conceptual con algunos de los momentos relevantes de su evolución histórica.

3. Metodología prevista, con referencia a:

3.1. Criterios para seleccionar situaciones que permitan ejemplificar los principales conceptos de cada tema.

3.2. Diseño de activades para detectar creencias previas de los alumnos y plantearles conflictos cognitivos; diseño de estrategias para su superación.

3.3. Secuencias de actividades y ejercicios para presentar los diversos sistemas de representación y las conexiones entre ellos.

3.4. Criterios para diseñar tareas que favorezcan el aprendizaje cooperativo y la discusión de los significados asociados a cada tópico.

3.5. Selección de materiales y recursos mediante los que trabajar con los diversos conceptos y procedimientos.

3.6. Criterios para la motivación, presentación, tratamiento del tema y modo de trabajo en el aula.

3.7. Indicaciones y propuestas para reforzar el interés de los alumnos por el tema en estudio.

4. Evaluación, con referencia a:

4.1. Diseño y selección de tareas sobre las que valorar la comprensión y dominio alcanzados en conocimientos concretos.

4.2. Diagnóstico y corrección de errores conceptuales y procedimentales.

4.3. Cuestiones relevantes que controlar; detección de carencias en el uso de las representaciones y en las tareas de traducción entre ellas.

4.4. Tareas abiertas mediante las que valorar la comprensión global y las estrategias de alto nivel.

4.5. Sistemas para obtener información sobre el conocimiento logrado por los alumnos, seleccionarlo y registrarlo.

4.6. Métodos adecuados para la valoración del aprendizaje alcanzado y de las actitudes desarrolladas por los alumnos.

Cerramos así el esquema general de la propuesta que se presenta en este trabajo. Hemos argumentado que, antes de comenzar la planificación de las unidades didácticas sobre las cuatro dimensiones convencionales del currículo, es necesario hacer una reflexión amplia sobre el conocimiento didáctico de cada uno de los temas. Esta reflexión pretendemos que no sea arbitraria y carente de criterios. Para ello la hemos basado en unas fuentes disciplinares a las que hemos llamado organizadores del currículo, las cuales, conjuntamente, enmarcan el conocimiento didáctico de los contenidos del área de matemáticas.

En lo que sigue hay una presentación extensa y autónoma de cada uno de estos organizadores, de sus bases conceptuales y de su aplicación práctica para el estudio de algunos temas. Hemos tomado la opción de presentar cada uno de los organizadores independientemente y, en el último capítulo, resumir la reflexión mediante el diseño de una unidad concreta.

Capítulo III

Análisis fenomenológico

Luis Puig

1. LA IDEA FREUDENTHALIANA DE FENOMENOLOGÍA DIDÁCTICA

1.1 El análisis fenomenológico como componente del análisis didáctico

El análisis didáctico de las matemáticas, esto es, el análisis de los contenidos de las matemáticas que se realiza al servicio de la organización de su enseñanza en los sistemas educativos, tiene varios componentes, que organizan varios de los capítulos de este libro. Uno de los componentes toma su nombre de la obra de Hans Freudenthal *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures* y es el objeto de este capítulo. Voy, pues, a desarrollar aquí los rasgos característicos y algunas consecuencias de lo que yo entiendo por análisis fenomenológico de las matemáticas como un componente de su análisis didáctico. Mi exposición se referirá continuamente a la obra de Freudenthal, pero me tomaré algunas libertades con la terminología que él utiliza e introduciré otra que le es ajena.

No puedo pretender desarrollar un análisis fenomenológico pormenorizado de los contenidos matemáticos de la educación secundaria en el espacio de unas pocas páginas, así que me extenderé más en consideraciones de índole general alrededor de dos ideas básicas que para mí son cruciales para entender a dónde puede conducir este análisis –o, al menos, qué sentido le he dado yo. La primera atañe a la naturaleza de los objetos matemáticos y de la práctica matemática y, en consecuencia, a la naturaleza de la actividad que hay que dar la oportunidad a los alumnos que realicen para que puedan tener acceso a genuina experiencia matemática; de ella me ocuparé en el siguiente apartado. La segunda es una toma de partido sobre cuáles son los objetivos que hay que perseguir en la enseñanza de las matemáticas para capas amplias de la población, con respecto a la naturaleza de los conocimientos matemáticos que se propone que adquieran, y se cifra en la expresión de Freudenthal *constitución de objetos mentales versus adquisición de conceptos*; esta idea la desarrollaré en el apartado tercero. Finalmente, recorreré los bloques de contenidos del currículo de matemáticas de secundaria, esbozando el sentido en que se ha hecho su análisis fenomenológico o el sentido en que, a mi entender, habría que hacerlo. El lector puede recurrir a los minuciosos análisis que Freudenthal desarrolló en sus libros –aunque a pesar de su volumen tampoco encontrará en ellos cubierto el conjunto de la educación secundaria– o bien usar como ejemplo los textos de Freudenthal traducidos al castellano que se indican en el apéndice y ejercitarse en el análisis fenomenológico.

1.2 El análisis fenomenológico

Tanto la exposición de las dos ideas que acabo de indicar como los esbozos de análisis que les seguirán son parte constitutiva de una descripción de en qué consiste un análisis fenomenológico y permiten, por tanto, que se pueda concebir qué es la fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas en el sentido de Freudenthal. Si quiero ser coherente con las ideas que voy a exponer, no puedo comenzar por una definición de fenomenología y pretender que esté dado de una vez por todas su concepto. Freudenthal comienza su exposición con un ejemplo y sólo tras él presenta, en el capítulo titulado *El método*, su caracterización. Pero para hacer concebir la fenomenología didáctica yo tengo una ventaja sobre el propio Freudenthal, a saber, puedo comenzar con la propia caracterización que él hace, plantearla como problemática y perseguir que el lector pueda constituir un objeto mental 'fenomenología didáctica' como consecuencia del sentido que él produzca a partir de su lectura de las páginas subsiguientes de este capítulo.

Freudenthal comienza indicando que le ha dado a su método de análisis de los contenidos matemáticos el nombre de 'fenomenología' porque parte de la contraposición establecida en la tradición filosófica entre lo que se expresa en esa tradición con los términos 'fenómeno' y 'noúmeno'. Esa contraposición, cuyo carácter de antítesis pone en duda, la establece en las matemáticas entre los conceptos o estructuras matemáticas, que serían noúmenos y los fenómenos que esos conceptos organizan. Así, por ejemplo, las figuras geométricas como objetos matemáticos organizan un conjunto de fenómenos que globalmente considerados se puede calificar como el mundo de los contornos.

El análisis fenomenológico de un concepto o de una estructura matemática consiste entonces en describir cuáles son los fenómenos para los que es el medio de organización y qué relación tiene el concepto o la estructura con esos fenómenos. La descripción de los fenómenos para los que es un medio de organización ha de considerar la totalidad de los fenómenos para los que actualmente es así, esto es, ha de tomar las matemáticas en su desarrollo actual y en su uso actual, pero también es conveniente que se indique cuáles son los fenómenos para cuya organización fue creado y a qué fenómenos se extendió posteriormente. La descripción de la relación con los fenómenos en cuestión ha de mostrar de qué manera actúa sobre esos fenómenos como medio de organización y de qué poder nos dota sobre ellos. Veremos más adelante que la relación entre fenómenos y conceptos se torna más compleja al intervenir un tercero en la relación, el objeto mental, y que el análisis fenomenológico ha de tomar en consideración también las relaciones entre fenómenos y objeto mental y entre objeto mental y concepto.

1.3 Fenomenología sin noúmenos

He mencionado que los términos que dan origen al nombre del método los toma Freudenthal de la tradición filosófica, pero no he indicado qué significan en ella. Un primer motivo para no haberlo hecho es que esos términos tienen una larga historia en la filosofía y su significado varía de un sistema filosófico a otro. Freudenthal es de poca ayuda al respecto ya que apenas va más allá de dar una caracterización negativa: taxativamente afirma que cuando usa el término 'fenomenología' no se refiere al sentido que le dan Hegel, Husserl o Heidegger, pero tampoco acompaña esta negación de una afirmación de adscripción, sintonía o simpatía con otros filósofos. 'Noúmeno' lo identifica con "objeto de pensamiento" sin más explicaciones y respecto a 'fenómeno' sólo dice que consideramos algo como un fenómeno cuando tenemos experiencia de ello. No voy a intentar dilucidar aquí si estas someras indicaciones pueden interpretarse como una filiación kantiana; por un lado, escapa a mi competencia, pero, por otro lado, no me interesa buscar filiaciones sino derivar consecuencias del uso que Freudenthal hace de los términos que adopta cuando los pone en funcionamiento.

Los términos 'noúmeno' y 'fenómeno' provienen de hecho del griego. 'Noúmeno' procede de 'nous' [νουσ] y puede decirse que significa "lo que es pensado mediante la razón" o "lo inteligible". 'Fenómeno' proviene de 'phainómenon' [φαινομενον], que significa "lo que aparece". Los fenómenos son, por tanto, las apariencias o lo que se nos aparece de las cosas. En su origen, pues, los fenómenos se contraponen a la realidad verdadera. Por otro lado, en la tradición filosófica "realista" el mundo de los noúmenos es el que se califica de real. La contraposición entre fenómenos y noúmenos es una contraposición entre mundos, el mundo de lo sensible y el de lo inteligible, el marco de la experiencia posible y lo que cae fuera de nuestra experiencia. Identificar entonces los conceptos matemáticos con noúmenos los sitúa fuera del campo de nuestra experiencia. Sin embargo, esto se compagina mal con una de las características de las matemáticas que el mismo Freudenthal señala de inmediato: un concepto matemático que es el medio de organización de un fenómeno o unos fenómenos, pasa a formar parte de un campo de fenómenos que son organizados por un nuevo concepto matemático, y este proceso se repite una y otra vez. Los conceptos matemáticos no caen fuera del campo de nuestra experiencia, ni están en un mundo distinto del mundo de los fenómenos que organizan.

Con el fin de poder seguir interpretando las ideas de Freudenthal en el sentido que acabo de apuntar, me parece pues prudente, en vez de cargar los términos con el peso de los significados que han sido producidos por los filósofos, despojarlos al máximo de ellos. Prescindiré por completo del término 'noúmeno', que substituiré simplemente por 'medio de organización', esto es, por la función de los conceptos cuando se consideran en su relación con los fenómenos. Mantendré el término 'fenómeno' como una manera de hablar de lo que es objeto de nuestra experiencia matemática, dejando de lado explícitamente su significado original de apariencia, y teniendo presente que los medios de organización de los fenómenos, aquello con lo que pretendemos dar cuenta de nuestra experiencia matemática, es tomado a su vez como objeto de experiencia. El par fenómenos/medios de organización está definido así por la relación entre ambos y no por la pertenencia a mundos distintos y se despliega en una serie fenómenos/medios de organización en la que los medios de organización de un par pasan a ser fenómenos del siguiente. Hacer fenomenología es entonces describir una de esas series o uno de sus pares.

1.4 Tipos de análisis fenomenológico

El análisis fenomenológico desarrollado por Freudenthal, aunque tome prestados términos de la filosofía –como acabamos de ver– y tenga consecuencias para cómo se conciba la naturaleza de las matemáticas –como veremos en el apartado siguiente–, está hecho al servicio de la didáctica. Sin embargo, Freudenthal distingue varios tipos de fenomenología, todos importantes desde el punto de vista de la didáctica, pero sólo uno de ellos calificado de didáctico. Esos tipos son:

Fenomenología
Fenomenología didáctica
Fenomenología genética
Fenomenología histórica

Lo primero que caracteriza cada uno de estos análisis fenomenológicos es los fenómenos que se toman en consideración con respecto al concepto cuyo análisis se realiza. En el primer caso se trata de los fenómenos que están organizados en las matemáticas tomadas en su estado en el momento actual y considerando su uso actual. En el caso didáctico intervienen los fenómenos presentes en el mundo de los alumnos y los que se proponen en las secuencias de enseñanza. En el caso genético, los fenómenos se consideran con respecto al desarrollo cognitivo de los aprendices. En el caso histórico se presta especial atención a los fenómenos para cuya organización se creó el concepto en cuestión y cómo se extendió a otros fenómenos.

La descripción de las relaciones entre los fenómenos y el concepto toma en consideración, en el primer caso, las que están establecidas y, en los otros tres, cómo se produjeron, se adquirieron o se conformaron esas relaciones en el sistema educativo, con respecto al desarrollo cognitivo o en la historia, respectivamente.

Además, en el caso de la fenomenología pura, los conceptos o las estructuras matemáticas se tratan como *productos* cognitivos, mientras que en el caso de la fenomenología didáctica se tratan como *procesos* cognitivos, es decir, situados en el sistema educativo como materia de enseñanza y siendo aprendidos por los alumnos. Freudenthal dice que al escribir una fenomenología didáctica uno puede pensar que debería estar basada en una fenomenología genética, pero que esta idea es errónea. El orden en que hay que desplegar los distintos tipos de análisis fenomenológico comienza por la pura fenomenología (para la que basta conocer las matemáticas y sus aplicaciones), se completa con una fenomenología histórica, sigue por una fenomenología didáctica (para lo que hay que conocer el proceso de enseñanza y aprendizaje) y termina, en todo caso, con una fenomenología genética. Ningún análisis fenomenológico puede resultar efectivo cuando se organice posteriormente la enseñanza a partir de él si no se sustenta en un sólido análisis de pura fenomenología.

2. UNA CONCEPCIÓN DE LA NATURALEZA DE LAS MATEMÁTICAS

2.1 Un solo mundo en expansión

El análisis fenomenológico de Freudenthal tiene como objetivo servir de base para la organización de la enseñanza de las matemáticas y no pretende elaborar una explicación de la naturaleza de las matemáticas. Cabría la posibilidad de utilizarlo sin adoptar ningún compromiso epistemológico u ontológico sobre las matemáticas, es decir, aceptar que para la organización de la enseñanza podemos ver los conceptos matemáticos como medios de organización de fenómenos, sin mantener que las cosas sean realmente así. Sin embargo, las ideas que los alumnos se forman de la naturaleza de las matemáticas y las que tienen los profesores influyen de forma extremadamente importante en cómo unos y otros conciben la actividad matemática que hay que realizar en las clases y los conocimientos que unos elaboran y los otros pretenden enseñar. Por ello, voy a exponer en este apartado un esbozo de una concepción de la naturaleza de las matemáticas que me parece compatible con la interpretación que acabo de hacer del análisis fenomenológico de Freudenthal.

Partiremos, por tanto, de la afirmación de que los conceptos matemáticos son medios de organización de fenómenos del mundo. Ahora bien, esta caracterización nos dice poco si no precisamos a qué nos referimos cuando hablamos del mundo y si no establecemos qué fenómenos organizan los conceptos matemáticos. Sin embargo, una de las tareas de la fenomenología es precisamente indagar, analizando los conceptos matemáticos, cuáles son los fenómenos que organizan, de modo que no se puede pretender saber de antemano cuáles son. Yo tampoco puedo pretender caracterizar de entrada el *tipo* de fenómenos organizados por las matemáticas, porque para ello necesitaría haber engarzado la fenomenología de las matemáticas en una fenomenología general en la que se establezca una tipología de los fenómenos –tarea que podría abordarse, a mi entender, con la fenomenología de Peirce–, de modo que sólo podremos tener una idea del tipo de fenómenos de que se trata a partir de los análisis concretos que realicemos.

Es posible interpretar, por otro lado, que de la afirmación precedente se deriva que las matemáticas se encuentran en un mundo separado del mundo cuyos fenómenos organiza y que éste es el mundo que nos rodea, el mundo real. Esa interpretación, sin embargo, no me parece la más adecuada.

En efecto, si nos situamos en el origen, o en el nivel más bajo, podríamos decir que los fenómenos que van a ser organizados por los conceptos matemáticos son fenómenos de ese mundo real, físico, cotidiano. Nuestras experiencias con ese mundo físico tienen que ver con los objetos del mundo, sus propiedades, las acciones que realizamos sobre ellos y las propiedades que tienen esas acciones. De modo que los fenómenos que van a organizar las matemáticas son los objetos del mundo, sus propiedades, las acciones que hacemos sobre ellos o las propiedades de esas acciones, cuando objetos, propiedades, acciones o propiedades de acciones son vistos como lo que organizan esos medios de organización y se consideran en su relación con ellos.

Esta primera interpretación sirve para hacer patente la idea de que los conceptos matemáticos no están, pues, en un mundo ideal cuyo reflejo estudiamos, ni tienen una existencia anterior a la actividad matemática, ni ésta consiste por tanto en el descubrimiento de la geografía del mundo en el que están esos objetos. Pero tampoco, al ser creados como medios de organización de fenómenos del mundo, se instalan en un mundo ajeno a nuestra experiencia. La interpretación anterior no es afortunada en este punto porque no toma en cuenta que Freudenthal no se queda en el nivel más bajo describiendo la actividad matemática simplemente como un juego entre fenómenos del mundo y medios de organización de las matemáticas, en el que los fenómenos solicitan ser organizados y se crean medios para ello en las matemáticas. Por el contrario, el proceso de creación de objetos matemáticos como medios de organización lo acompaña Freudenthal de un proceso por el que los medios de organización se convierten en objetos que se sitúan en un campo de fenómenos. En consecuencia, los objetos matemáticos se incorporan al mundo de nuestra experiencia, en el que entran como fenómenos en una nueva relación fenómenos / medios de organización en la que se crean nuevos conceptos matemáticos, y este proceso se reitera una y otra vez.

Las matemáticas están, por tanto, en el mismo mundo de los fenómenos que organizan: no hay dos mundos sino uno que crece con cada producto de la actividad matemática. Los fenómenos que organizan los conceptos matemáticos son los fenómenos de ese mundo que contiene los productos de la cognición humana y en particular los productos de la propia actividad matemática. Los fenómenos que organizan los conceptos matemáticos son los objetos de ese mundo, sus propiedades, las acciones que realizamos sobre ellos y las propiedades de esas acciones, en tanto se encuentran en el primer término de un par fenómenos / medios de organización.

La progresión escalonada de pares fenómenos / medios de organización comporta dos procesos: el proceso de creación de conceptos matemáticos como medios de organización, que viene indicado por cada par, y el proceso por el cual se objetiva un medio de organización de forma que puede entrar a formar parte de un nuevo par, ahora en la posición de los fenómenos. La progresión escalonada dibuja una imagen de la producción de objetos matemáticos cada vez de nivel más elevado, más abstractos, y muestra que la actividad matemática genera su propio contenido.

He dicho que en el proceso de creación de conceptos matemáticos lo que se crea no son objetos ideales que se sitúan en un mundo ajeno a nuestra experiencia. Desde mi punto de vista esto es así fundamentalmente por el papel que desempeñan los sistemas de signos en que se expresan, se representan o se escriben las matemáticas en la práctica matemática. De ello me ocupo a continuación.

2.2 Sistemas matemáticos de signos

Los textos matemáticos aparecen a cualquier mirada, experta o profana, plagados de signos que no pertenecen al lenguaje vernáculo. Este hecho hace que sea corriente hablar del lenguaje de las matemáticas como un lenguaje distinto del vernáculo. Además, en la historia de las matemáticas hay episodios en los que la elaboración de un lenguaje propio de la matemáticas ha constituido una tarea esencial. De la combinación de ambos hechos se deriva que la idea más ampliamente extendida sea que existe un lenguaje propio de las matemáticas diferente del lenguaje vernáculo. Esta idea está presente radicalmente en quienes conciben que las verdaderas matemáticas o las matemáticas rigurosas son las escritas en un lenguaje totalmente formalizado y que, si en su práctica cotidiana los matemáticos no escriben las matemáticas así, es porque sería extraordinariamente penoso y por ciertas limitaciones internas de los formalismos; por usar la expresión de Bourbaki, los textos matemáticos efectivamente escritos están llenos de "abusos de lenguaje", ya que están escritos en parte en lenguaje vernáculo y éste se ve como un substituto torpe y grosero del lenguaje matemático.

Una consecuencia de esta idea incluso en sus versiones más alejadas del formalismo es que las descripciones que se suelen hacer del lenguaje en que están escritos los textos matemáticos distinguen dos subconjuntos de signos en ellos: uno formado por signos que suelen llamarse "artificiales" y se subrayan como los propios de las matemáticas y otro por los signos de alguna lengua vernácula. Ahora bien, lo que a mi entender interesa más desde un punto de vista didáctico no es el estudio de los signos y sus tipos, sino el estudio de los procesos de significación y producción de sentido. Entonces, esa diferencia entre un "signo artificial" –que sería el propiamente matemático– deja de ser crucial, para colocar en primer plano el sistema de signos considerado globalmente. Lo que hay que calificar de matemático entonces no es un tipo particular de signos, sino sobre todo determinados sistemas de signos, es decir, hay que hablar de *sistemas matemáticos de signos* y no de *sistemas de signos matemáticos*.

Lo que se está usando en la actividad matemática no lo voy a separar, por tanto, en signos matemáticos o un sistema de signos matemáticos, el lenguaje vernáculo y, quiza, otros medios de representación. Por el contrario, voy a considerar que todos los signos que se usan, están combinados constituyendo un sistema matemático de signos. Ahora bien, una vez he subrayado que lo voy a tratar como un sistema, tengo que señalar que, a diferencia de lo que sucede con el sistema de las lenguas vernáculas, sus signos no son homogéneos. Además, como quiero tomar en consideración todos los signos que se usan en la actividad matemática, me parece más conveniente adoptar una terminología tomada de la semiótica, en vez de una tomada de la lingüística, ya que muchos de los signos que se usan en la actividad matemática no tienen naturaleza lingüística. En ese sentido, prefiero no usar la pareja significante / significado que introdujo Saussure para describir las dos caras del signo, sino hablar –como hacen Eco o Barthes, siguiendo a Hjemslev– de expresión y contenido de un signo (o una función semiótica, en general). En esos términos, los sistemas matemáticos de signos contienen signos cuya materia de la expresión es heterogénea –característica que los separa de las lenguas vernáculas, como ya he dicho, y que comparten con los sistemas de signos de otras actividades humanas como el cine o la canción.

Vale la pena señalar que el par expresión / contenido, en las teorías semióticas a las que me he referido, se presenta mediante el diagrama

<table>
<tr><td colspan="2">expresión</td><td>contenido</td></tr>
<tr><td>expresión</td><td>contenido</td><td></td></tr>
</table>

ya que el signo, que se compone de expresión y contenido, se sitúa en la relación de ser la expresión de un contenido al que remite o que implica (y que es de hecho otro signo).

Este carácter dinámico, implicativo del signo, resulta a mi entender particularmente esclarecedor para los sistemas matemáticos de signos, ya que éstos se ven involucrados en la relación fenómenos / medios de organización, y en ella los conceptos matemáticos son creados por los sistemas matemáticos de signos que los describen. De ahí que los objetos matemáticos así creados no sean entonces objetos ideales que se coloquen fuera del mundo de nuestra experiencia ya que tienen la existencia material que les dan los sistemas de signos que simultáneamente los describen y los crean.

Correlativamente, la abstracción progresiva generada en el proceso de objetivación de los medios de organización y su situación como fenómenos ante unos nuevos medios de organización tiene su expresión en la creación de sistemas matemáticos de signos también más abstractos, con los que se crean esos conceptos más abstractos.

2.3 Otros trazos que hacen el cuadro más complejo

Lo que he expuesto hasta aquí son los rasgos más importantes de una concepción de la naturaleza de las matemáticas que hace uso de ideas que se derivan de la fenomenología de las matemáticas desarrollada por Freudenthal y de una idea de sistemas matemáticos de signos que tiene su origen en trabajos realizados por Eugenio Filloy (1988). Sin embargo, es obvio que el cuadro que trazan es todavía demasiado simple. En lo que sigue apunto algunas ideas que a mi entender son necesarias para completar el cuadro. Esas ideas proceden de Lakatos y de Kitcher; como no voy a desarrollarlas en detalle sino sólo relacionarlas con las anteriormente expuestas, remito al lector a los textos correspondientes que aparecen en la bibliografía.

2.3.1 *Las acciones permitidas*

Lo que se convierte en objeto de experiencia en la actividad matemática lo he descrito como objetos del mundo, propiedades de los objetos, acciones que realizamos sobre esos objetos y propiedades de esas acciones. Kitcher introduce la idea, esencial para poder dar cuenta de gran parte de las matemáticas que efectivamente han sido producidas a lo largo de la historia, de que las acciones mencionadas no son las que nosotros efectivamente realizamos o somos capaces de realizar, sino que son las acciones que establecemos que puede realizar un sujeto ideal al que dotamos de poderes de actuación que van más allá de los que tenemos, por ejemplo, recorrer la secuencia de los números naturales o usar la función de elección de Hilbert.

Esta idea de Kitcher tiene el peligro de hacer pensar que las matemáticas puedan desarrollarse a partir de estipulaciones arbitrarias de esos poderes y que, por tanto, generen conceptos matemáticos carentes de todo fin epistémico o práctico. Este peligro está de hecho presente, pero se conjura en la práctica de varias maneras.

Una tiene que ver con la idea que he introducido anteriormente del papel de los sistemas matemáticos de signos en la creación de los conceptos matemáticos y la elaboración, correlativa al ascenso en la cadena fenómenos / medios de organización, de sistemas matemáticos de signos más abstractos. Esos sistemas matemáticos de signos no sólo nos permiten organizar los fenómenos creando los conceptos pertinentes, sino que también nos hacen capaces de realizar nuevas acciones sobre los objetos matemáticos o de apreciar la posibilidad de que, si estuviéramos liberados de ciertas limitaciones de tiempo o consumo de energía, pudiéramos realizarlas. En este sentido, las acciones nuevas que establecemos que son realizables no son acciones arbitrarias sino aquéllas que vienen sugeridas por los sistemas matemáticos de signos más abstractos –y, en este sentido, extienden acciones que en un nivel inferior nos habíamos visto capaces de realizar o habíamos establecido que eran realizables.

Por otro lado, desempeña un papel importante como mecanismo de regulación la aceptación por parte de la comunidad de matemáticos de que esas nuevas acciones van a incorporarse al elenco ya establecido –aceptación que no está exenta de controversia, como el propio ejemplo de la función de elección de Hilbert atestigua.

2.3.2 *Los conceptos no son inmutables. Conceptos generados por la prueba*

Hemos visto que los conceptos matemáticos se crean en el proceso fenómenos / medios de organización, pero esto no significa que una vez creados permanezcan inmutables. Por el contrario, los conceptos matemáticos se modifican en la historia como consecuencia de su uso y de los nuevos sistemas matemáticos de signos en que se describen. Esto no quiere decir, sin embargo, que las modificaciones de un concepto indiquen que el concepto original era erróneo y que tengamos que ver la historia de los conceptos matemáticos como un avance hacia la verdad, ya que hemos rechazado que los objetos matemáticos tengan una existencia anterior al proceso que los crea.

Una idea distinta de la evolución de los conceptos en la historia es la que desarrolló Lakatos en su libro *Pruebas y refutaciones*. Para lo que aquí nos interesa, Lakatos examina en ese libro cómo evolucionan los conceptos bajo la presión de la prueba de teoremas en los que están involucrados.

Lakatos narra cómo tras el establecimiento de la conjetura de que para un poliedro cualquiera se verifica la relación $C + V = A + 2$ y su prueba por Euler surgen ejemplos de sólidos que no encajan con la prueba realizada o, lo que es más importante, con el teorema probado. Desde una concepción de la naturaleza de los objetos matemáticos según la cual hay un objeto ideal preexistente al que llamamos poliedro y la actividad matemática lo que hace es descubrir sus propiedades, el asunto está claro: esos sólidos no son verdaderos poliedros o la demostración es errónea. La reconstrucción de la historia que hace Lakatos no es ésta.

Lakatos separa los dos tipos de contraejemplos que acabo de mencionar, y los llama contraejemplos locales y globales, respectivamente. Un contraejemplo local es el que tiene características que hacen que para él la prueba no sea aplicable, pero que verifica la relación. Estos contraejemplos no refutan la conjetura: lo que hacen es indicar que en la prueba se ha usado una propiedad que se suponía valida para todos los poliedros, pero que esto no es así. Lo que queda entonces refutado es un lema que se ha usado implícitamente y, por tanto, la prueba. La presencia de estos contraejemplos introduce una diferencia en los conceptos que antes no estaba presente.

Los efectos de la aparición de contraejemplos globales tienen más importancia para lo que estamos examinando. Un contraejemplo es global cuando refuta la conjetura. Lakatos presenta como primeros contraejemplos globales del teorema planteado por Euler el sólido que consiste en un cubo con un hueco cúbico en su interior, y un sólido formado por dos tetraedros unidos por una arista o un vértice; más adelante presenta el caso aún más interesante de un sólido estrellado, que verifica o no la relación según que se considere que sus caras son los polígonos estrellados o no. La presencia de esos sólidos como contraejemplos produce una tensión entre el concepto, el teorema y su prueba. Esa tensión puede resolverse de varias maneras que afectan todas ellas al concepto de poliedro. Las más elementales son:

1. Exclusión de monstruos.

Los contraejemplos presentados no se consideran ejemplos genuinos del concepto de poliedro, sino monstruos, esto es, seres cuya existencia es posible pero no deseada. La posibilidad de su existencia viene determinada por la definición de poliedro que se está utilizando, ya sea explícita o implícitamente, de modo que, para salvar el teorema, se elabora una nueva definición del concepto de poliedro que los excluye explícitamente.

2. Exclusión de excepciones.

Los contraejemplos presentados se consideran ejemplos del concepto, cuya existencia no se había previsto al enunciar la conjetura. La conjetura se modifica con la intención de retirarse a un terreno seguro. Para ello se introduce una diferencia en el concepto, que separe a estos ejemplos.

3. Ajuste de monstruos.

Los objetos se miran de otra manera que hace que dejen de ser contraejemplos; es el caso de las dos formas de ver los poliedros estrellados: como compuestos de polígonos estrellados o no.

Aunque éstas sean sólo las formas más elementales de enfrentarse a la tensión creada, simplemente con ellas podemos ver que el concepto de poliedro se ve afectado en todos los casos. Ya se acepten o se excluyan los contrajemplos como ejemplos del concepto, el campo semántico se amplía. En un caso, porque el contenido de la expresión aumenta o, dicho de otra manera, el campo de fenómenos para los que el concepto se había creado –que es lo que constituye su campo semántico– no contenía los correspondientes a los objetos y las propiedades que ahora están presentes y se extiende a ellos. En el otro caso, porque el concepto entra en un juego de relaciones con esos nuevos objetos de los que se desmarca explícitamente en la nueva definición, que forman también parte constitutiva de su contenido.

La historia completa es más compleja y en ella intervienen también los sistemas matemáticos de signos progresivamente más ricos o más abstractos a los que se traducen los conceptos expresados inicialmente en otros sistemas matemáticos de signos menos ricos o menos abstractos, y hace afirmar a Lakatos que los conceptos generados por la prueba no mejoran los conceptos originales, no son especificaciones ni generalizaciones de ellos, sino que los convierten en algo totalmente distinto, crean nuevos conceptos. Esto es precisamente lo que me interesa subrayar: el resultado del proceso que presenta Lakatos de tensión entre conceptos, teoremas y pruebas no es la delimitación del verdadero concepto de poliedro que se correspondería al objeto ideal preexistente, sino la creación de nuevos conceptos.

Una buena ilustración del resultado de la historia que narra Lakatos es leer las definiciones de polígono y poliedro que pueden encontrarse hoy en día en los libros de matemáticas. Por ejemplo, las que transcribo a continuación, acompañadas de las definiciones correspondientes de polígono regular y poliedro regular, tomadas todas ellas del mismo libro (Coxeter (1974):

Polígono:
En el espacio euclídeo n-dimensional, un *polígono* $A_0A_1A_2$... es una figura formada por una sucesión de puntos llamados *vértices*, unidos en pares sucesivos por segmentos A_0A_1, A_1A_2... llamados *aristas.*

Polígono regular:
Para una isometría cualquiera S, un punto no invariante A_0 tiene una órbita, que es el conjunto de puntos A_n en los que se transforma el punto A_0 por las potencias S^n, en las que n recorre los enteros. Diremos entonces que el polígono $A_0A_1A_2$... así generado es *regular.* Ya que los valores posibles de n incluyen los enteros negativos, la sucesión de puntos va tanto hacia adelante como hacia atrás, y el polígono $A_0A_1A_2$... debería describirse de forma más precisa así:
...$A_{-2}A_{-1}A_0A_1A_2$...

Poliedro:
Un *poliedro* es un conjunto finito de polígonos planos, llamados *caras*, junto con todos sus *aristas* y *vértices*, que satisfacen las tres condiciones siguientes:

i) Toda arista pertenece exactamente a dos caras y esas caras no están en el mismo plano.
ii) Las caras que comparten un vértice forman un único ciclo, esto es, su sección por una esfera suficientemente pequeña, centrada en el vértice común, es un polígono esférico único.
iii) Ningún subconjunto propio de las caras satisface la condición i).

Poliedro regular:

Para un poliedro cualquiera, definimos como una *bandera* $(A, AB, ABC\ldots)$ la figura formada por un vértice A, una arista AB que contiene a ese vértice y una cara $ABC\ldots$ que contiene a esa arista. Un poliedro es *regular* si su grupo de simetrías es *transitivo en sus banderas*.

Este ejemplo es particularmente notable porque la definicion propuesta de polígono y la de poliedro llevan la huella, cada una de ellas, de formas distintas de responder a la tensión que estamos examinando. Salta a la vista que la definición de polígono está elaborada aceptando nuevos objetos y ampliando así inmensamente de forma explícita el contenido del concepto (y se acompañará después de un desglose necesario en polígonos de múltiples tipos).

En la definición de poliedro, por el contrario, cada una de las condiciones está introducida para excluir determinados objetos. Así, por ejemplo, la condición i) no permite considerar como poliedro el sólido formado por dos tetraedros unidos por una arista y responde por tanto a la exclusión de monstruos. Sin embargo, esa misma condición no permite que un poliedro estrellado se interprete como un poliedro cuyas caras no son los polígonos estrellados correspondientes, ya que, si se hace esto, hay necesariamente caras que están en un mismo plano. Así que esa condición no autoriza el ajuste de ese monstruo y, por tanto, los poliedros estrellados son poliedros a condición de que sus caras sean los polígonos estrellados correspondientes. El aumento del contenido del concepto de poliedro está aquí en las relaciones que cada una de las condiciones establece con otros objetos matemáticos y en su expresión en el sistema de signos en que se presenta.

2.3.3 *Resolver problemas, definir y otros procesos que también generan conceptos*

De Lakatos acabo de extraer la idea de que los conceptos matemáticos no permanecen inmutables una vez creados. También he esbozado cómo los conceptos cambian, impelidos por la tensión que les produce el estar involucrados en pruebas y refutaciones. Ahora bien, la actividad matemática no consiste solamente en probar teoremas. Uno de los motores fundamentales del desarrollo de las matemáticas es la resolución de problemas y ésta engloba la prueba de teoremas, pero también otras actividades.

La resolución de problemas engloba la prueba de teoremas en dos sentidos. En el primer sentido, la resolución de problemas engloba la prueba de teoremas considerada globalmente, ya que, si seguimos la terminología de Polya y en vez de distinguir entre problemas y teoremas como hicieron por primera vez los matemáticos griegos los llamamos a todos problemas y distinguimos entre problemas de encontrar y problemas de probar, entonces la prueba de teoremas no es sino un tipo de resolución de problemas: la resolución de problemas de probar.

En el segundo sentido, más importante, la resolución de problemas engloba la prueba de teoremas en la resolución de cada problema en particular; en efecto, lo que caracteriza la resolución de problemas en matemáticas, incluso cuando se trata de problemas de encontrar, es que la obtención del resultado tiene que acompañarse de un argumento que justifique que el resultado obtenido verifica las condiciones del problema, esto es, cualquier problema es un problema de probar o, si es de encontrar, contiene un problema de probar –el problema de probar que el resultado encontrado verifica las condiciones del enunciado.

Este hecho ya nos obliga a extender el terreno en que los conceptos se ven sometidos a la tensión que los modifica más allá de la prueba de teoremas a la resolución de problemas. Pero además aún resulta más necesario hacerlo si tomamos en consideración otras partes de la resolución de problemas que no son la prueba de teoremas, en concreto, el planteamiento de nuevos problemas o el estudio de familias de problemas.

La resolución de problemas tampoco agota el campo de actividades matemáticas, ni el de actividades matemáticas que generan conceptos. Otras actividades que son responsables de la creación de gran parte de los conceptos matemáticos tal y como ahora los conocemos tienen que ver con la *organización* de conjuntos más o menos extensos de resultados –obtenidos en la actividad de resolver problemas y probar teoremas– en un *sistema deductivo*. Esa organización sistemática ha adoptado formas distintas a lo largo de la historia, y puede ser más local o más global, más o menos axiomática o formalizada, pero en cualquier caso constituye un componente esencial de las matemáticas, desde que los matemáticos pasaron de acumular resultados y técnicas para obtenerlos a escribir "elementos". En efecto, aunque aquí no voy a detallar ese conjunto de actividades, un rasgo esencial suyo es que ha transformado el sentido en que se usan las definiciones en las matemáticas. En matemáticas, una definición no sirve simplemente para explicar a la gente lo que significa un término, sino que, cuando consideramos las actividades matemáticas mediante las cuales se organizan sistemas deductivos, las definiciones –usando una expresión de Freudenthal– son *eslabones en cadenas deductivas*.

El proceso de definir es, entonces, un medio de organización deductiva de las propiedades de un objeto matemático, que pone en primer plano las que se juzga que permiten constituir un sistema deductivo, local o global, en el que ese objeto matemático esté incorporado. Ahora bien, resaltar unas propiedades como las que definen un concepto no es una operación inocente, neutral con respecto al concepto, ya que, por un lado, hace aparecer ese concepto como creado originalmente para organizar los fenómenos correspondientes y, por otro, hace que el contenido del concepto sea a partir de ese momento lo que se derive de esa definición en el sistema deductivo al que se ha incorporado. Por tanto, al igual que sucede al probar teoremas, este proceso de definir crea también nuevos conceptos. En el apartado siguiente examinaremos este extremo con respecto al concepto de número que definió Peano.

3. CONSTITUCIÓN DE OBJETOS MENTALES VS. ADQUISICIÓN DE CONCEPTOS

3.1 Objetos mentales y conceptos

En los apartados anteriores he hablado de los conceptos matemáticos, de su creación en una relación fenómenos / medios de organización, de la objetivación de los medios de organización y su entrada en una relación fenómenos / medios de organización de nivel superior; también he hablado de las transformaciones de los conceptos como consecuencia de las actividades matemáticas de probar teoremas, resolver problemas, organizar en un sistema deductivo y del proceso de definir. Todo ello acompañado de la afirmación de que los conceptos matemáticos no tienen una existencia independiente de la actividad matemática que los crea. En este apartado voy a hacer entrar en escena una nueva idea desarrollada por Freudenthal que nos obligará a volver a pensar lo que he desarrollado hasta aquí: se trata de la idea de objeto mental, contrapuesta a concepto.

Para mí esta idea es importante sobre todo porque a partir de ella Freudenthal adopta una toma de partido didáctica: el objetivo de la acción educativa en el sistema escolar ha de ser básicamente la constitución de objetos mentales y sólo en segundo lugar la adquisición de conceptos –en segundo lugar tanto temporalmente como en orden de importancia. Esta toma de partido es además particularmente importante para la etapa obligatoria de la escolaridad ya que en ella hay que considerar qué hay que ofrecer de las matemáticas al conjunto de la población. Pero además es importante para el análisis fenomenológico de los conceptos matemáticos; más aún si ese análisis es una fenomenología didáctica y se tiene en mente que el análisis es previo a la organización de la enseñanza y se realiza con ese objetivo. De ese aspecto es del que voy a tratar aquí.

En una primera aproximación, la contraposición objeto mental / concepto que plantea Freudenthal puede verse como la consecuencia de considerar a las personas que conciben o usan las matemáticas frente a las matemáticas como disciplina o conjunto de saberes histórica, social o culturalmente establecidos. En los apartados anteriores, al hablar de los conceptos matemáticos los hemos considerado básicamente en la disciplina y apenas hemos hecho intervenir a las personas concretas; en todo caso ha aparecido su trasunto, el sujeto ideal que realiza acciones con poderes superiores a los que nosotros tenemos. Podemos partir, pues, de una imagen inicial: la contraposición objeto mental / concepto es una contraposición entre lo que está en la cabeza de las personas –los objetos mentales– y lo que está en las matemáticas como disciplina –los conceptos.

Como éste es el sentido en que Freudenthal usa esos términos y en el que los voy a usar aquí, conviene advertir antes de continuar que en el uso corriente no suele aparecer el término "objeto mental". Lo habitual es que también se hable del concepto que tiene una persona –de número o de triángulo o de cualquier otra cosa, ya pertenezca a las matemáticas o no–, o que se use el término "concepción" en vez de "concepto" y se hable de la concepción que una persona tiene de circunferencia, por ejemplo; pero en este caso suele quererse subrayar que lo que hay en la mente de esa persona es una parte o una forma de ver el concepto.*

El concepto de perro no puede ladrar. Los alumnos a los que se intentó inculcar en la época de las llamadas "matemáticas modernas" el concepto de número –en una versión escolar de la construcción cantoriana de los cardinales– hubieran salido de la escuela sin poder numerar, si no hubieran constituido un objeto mental de número al margen de lo que los programas oficiales querían que se les enseñara. Usaré como ejemplo ese concepto complejo y múltiple para mostrar la diferencia entre objeto mental y concepto, describiéndola en términos semióticos en vez de como lo hace Freudenthal.

Si consideramos la actividad mundana de las personas y no sólo las actividades matemáticas de los matemáticos o las actividades escolares de los alumnos en las clases de matemáticas, el número o, mejor, los números se usan en contextos muy diversos. Una lista de esos contextos puede incluir los contextos de secuencia, recuento, cardinal, ordinal, medida, etiqueta, guarismo escrito, mágico, cálculo. La descripción de las características de cada uno de los contextos no es mi objeto aquí: me interesa sólo mencionar la lista para mostrar que es posible distinguir una buena cantidad de ellos. Lo que me importa es explorar el significado que el número adopta en cada uno de esos contextos. Siguiendo por un momento a Wittgenstein, entenderé el significado constituido por el uso que se hace de un término, siendo el uso no un uso arbitrario, el producto de lo que a una persona le venga en gana hacer con el término en cuestión, sino una práctica sometida a reglas.

Los usos de los números en cada uno de esos contextos siguen reglas distintas: así, por ejemplo, cuando se dice «mi número de teléfono es tres, ochenta y seis, cuarenta y cuatro, ochenta y seis», el número se refiere a un objeto y no describe ninguna propiedad suya ni de su relación con otros, sino que sirve para identificarlo –ése es el contexto de etiqueta, y en él, cuando la expresión es oral, las cifras que componen el número suelen expresarse aisladamente o en bloques de dos, como en el ejemplo que he referido–; en un contexto ordinal, el número se refiere a un objeto que está en un conjunto ordenado de objetos y describe qué lugar ocupa –«llegó el tercero» o «es el que hace tres»–; en un contexto cardinal, el número se refiere a un conjunto de objetos (sin orden o cuyo orden no se toma en consideración) y describe la numerosidad del conjunto –«hay tres»–; etc.

---

* El término 'concepción' contrapuesto a 'concepto' no sólo aparece en el uso cotidiano. También es un concepto de la didáctica de las matemáticas tal como la desarrolla la escuela francesa. Yo no voy a discutir aquí las diferencias entre la contraposición concepto / objeto mental en Freudenthal y la contraposición concepto / concepción en esa teoría. Tampoco sus diferencias con la contraposición concepto / imagen del concepto teorizada inicialmente por Vinner. Aunque las tres parezca que se refieren al mismo asunto, al estar enmarcadas en teorías diferentes no sólo lo explican de forma distinta sino que hablan de cosas distintas.

La totalidad de los usos de los números en todos los contextos constituye el *campo semántico* de "número", el significado enciclopédico de "número". La identificación del contexto en que el número se está usando permite a quien lee el texto, o recibe el mensaje, atenerse a la *restricción semántica* que establece el contexto y poder interpretarlo así de forma afortunada. Ahora bien, el sujeto que lee un texto o ha de interpretar un mensaje no opera en el conjunto de la enciclopedia –es decir, la totalidad de los usos producidos en una cultura o una episteme– sino en su campo semántico personal, que ha ido elaborando produciendo sentido –sentidos que se convierten en significados si la interpretación es afortunada– en situaciones o contextos que le exigían nuevos usos para "número" o los números.

Lo que Freudenthal llama "objeto mental número" se corresponde en mi descripción semiótica a este "campo semántico personal". La toma de partido didáctica de Freudenthal por la constitución de objetos mentales es que la intención de los sistemas educativos tendría que ser, expresada en los términos que estamos usando, que el campo semántico personal de los alumnos sea lo suficientemente rico –abarque suficientemente la enciclopedia– como para permitirle interpretar de forma afortunada todas las situaciones en las que haya de usar "número" o los números.

Los contextos de uso mundano de los números son los distintos lugares en que podemos experimentar los fenómenos que han sido organizados mediante el concepto de número, tanto los fenómenos para los que originalmente se creó como otros a los que se encuentra extendido en la actualidad. La idea de objeto mental que acabamos de introducir hay que verla también, pues, como un medio de organización de fenómenos: con el objeto mental número las personas son capaces, entre otras cosas, de numerar. Los objetos mentales se constituyen en cadenas fenómenos / medios de organización, de la misma manera que sucede con los conceptos, con el consiguiente aumento de nivel –de hecho, los contextos de uso mundano de los números que he mencionado se sitúan en los niveles más bajos, y, para dar cuenta de la riqueza fenomenológica del número en la secundaria, hay que tomar en consideración otros contextos, entre ellos contextos ya matematizados.

Ésta es mi explicación inicial de lo que es un objeto mental y cómo se constituye, pero esto que Freudenthal llama objeto mental podía haberse denominado simplemente el concepto que una persona tiene de número. Para justificar la introducción de un término que lo distinga hace falta explicar para qué otra cosa se reserva el término de "concepto" y en qué se distingue de lo que acabamos de denominar "objeto mental". Ya he dicho que la primera distinción es que los objetos mentales están en la mente de las personas y los conceptos están en las matemáticas. Pero esto apenas sería razón suficiente para contraponer objeto mental a concepto si pensáramos que el objeto mental es el reflejo del concepto en la mente de las personas. La relación entre objeto mental y concepto no es sin embargo una relación especular. Lo explicaré de nuevo en términos semióticos.

El objeto mental número lo he identificado con el campo semántico personal y éste proviene de todos los usos de los números en todos los contextos en que éstos se usan, de un campo semántico formado por todos los significados culturalmente establecidos. Los conceptos matemáticos de número natural –y uso el plural para poner de relieve que considero como conceptos distintos los elaborados por Peano, Cantor o Benacerraf, por ejemplo– tal como están en las matemáticas actuales son el producto de una larga historia, cuyo proceso de creación y modificación de conceptos ya he examinado en los apartados anteriores. Desde la descripción semiótica que estoy usando ahora, cualquier concepto matemático de número que quiera examinarse una vez ya creado aparece como resultado del proceso de definir que lo ha incorporado a un sistema organizado deductivamente como un *recorte del campo semántico*. Así, por ejemplo, el concepto de número natural elaborado por Peano –sobre todo en sus versiones más modernas– puede verse como el desmenuzamiento del significado propio del contexto de secuencia y su presentación en forma de una serie de axiomas, que dan cuenta exhaustiva de sus componentes. El concepto de número natural que se deriva de la construcción cantoriana, por su parte, se adscribe, desde el propio nombre que le dio Cantor en su intención original, al contexto cardinal.

Los conceptos aparecen en esta explicación relacionados directamente con una parte del objeto mental, ya que en el proceso de definir se ha seleccionado parte del significado que abarca el objeto mental. De inmediato señalaré que ésa no es la única diferencia y que la relación entre objeto mental y concepto no quiero dar a entender que sea una relación entre una parte del contenido del objeto mental y la totalidad de su contenido. Pero antes de ello quiero indicar que lo que esta explicación establece fundamenta la toma de partido de Freudenthal que he mencionado al comienzo de este apartado: la adquisición del concepto es un objetivo educativo secundario, que puede posponerse a una sólida constitución de los objetos mentales, y, en todo caso, es posterior a ésta.

La relación entre objeto mental y concepto es más compleja de lo que muestra la explicación que acabo de dar usando el ejemplo de número, porque mi explicación se ha limitado a comparar el despliegue del campo semántico de número y la definición de Peano, como si no hubiera toda una historia de siglos que ha producido tanto los contextos de uso –que ya nos los vamos a encontrar con huellas de su organización por conceptos de número– como la definición de Peano. Tomando en cuenta lo que ya he expuesto de la naturaleza de los procesos de creación y modificación de conceptos que hay presentes en esa historia, la relación entre el objeto mental que puede constituirse a partir de los contextos mencionados y el contenido del concepto de número creado por la definición de Peano no se reduce a una relación parte / todo.

Constituir un objeto mental conlleva poder dar cuenta con él de todos los usos en todos los contextos o poder organizar todos los fenómenos correspondientes, entonces el objeto mental está bien constituido. El objetivo de los sistemas educativos que marca Freudenthal es esta constitución de buenos objetos mentales. Adquirir el concepto implica examinar cómo ha sido establecido en las matemáticas organizado local o globalmente en un sistema deductivo. La relación particular que cada concepto matemático tiene con el objeto mental correspondiente determina cómo se relaciona la constitución del objeto mental con la adquisición del concepto. Los constituyentes del objeto mental bueno se determinan gracias al análisis fenomenológico del concepto correspondiente.

3.2 Objetos mentales y conceptos en la historia de las matemáticas

El análisis que nos ha conducido a distinguir entre objeto mental y concepto es un análisis didáctico. Esto es, en el análisis tenemos presente que lo que nos interesa es examinar las matemáticas, sus conceptos y sus estructuras, en la medida en que hay personas que quieren aprenderlas y hay un sistema, el sistema escolar, que quiere enseñar contenidos social y culturalmente establecidos. Por ello, hemos de tener presentes, por un lado, los conocimientos que los alumnos elaboran –los objetos mentales– y, por otro, los contenidos social y culturalmente establecidos que son los conocimientos a los que queremos que los alumnos accedan –los conceptos. La contraposición objetos mentales / conceptos la estamos examinando en el sistema educativo. Los objetos mentales los he situado en la mente de las personas porque son lo que éstas elaboran a partir de su experiencia, como medios de organización que le permiten dar cuenta de ella, y lo que les da poder sobre ella. Los conceptos los he estado situando en las matemáticas como disciplina, pero también son medios de organización de fenómenos y como tales los estamos tratando. Lo que sucede en el sistema escolar es que para los alumnos los conceptos preexisten a su experiencia con los fenómenos correspondientes y lo que el sistema quiere es que los alumnos constituyan un objeto mental como medio de organización de esos fenómenos y que tengan acceso a los medios de organización que la historia nos ha legado como medios valiosos de organización de esos fenómenos, es decir, a los conceptos.

Ahora bien, en la historia los conceptos matemáticos no son algo que preexista a nuestra experiencia, sino que es la actividad matemática la que los crea y la actividad matemática no es otra cosa que la actividad de los matemáticos. En ese sentido, los conceptos matemáticos, vistos ahora en la historia, no son sino cristalizaciones de objetos mentales. Incluso puede darse el caso, como señala Freudenthal, de que los matemáticos trabajen durante mucho tiempo con un objeto mental sin convertirlo en concepto: es lo que sucedió con la continuidad. ¿Qué quiere decir aquí "convertir un objeto mental en un concepto"? No estoy distinguiendo de la misma manera objeto mental de concepto ahora que cuando he examinado esa distinción como se presenta en el sistema escolar. Aquí no estoy hablando de aprender algo que ya está establecido en las matemáticas y que, por tanto, preexiste a nuestra experiencia, sino de la creación de nuevos conceptos matemáticos. Lo que ahora pongo de relieve es que uno de los procesos que crean nuevos conceptos matemáticos es el análisis de los objetos mentales que los matemáticos están usando como medios de organización de fenómenos con el fin de definirlos conceptualmente, es decir, incorporarlos al sistema de las matemáticas. La actividad matemática produce, pues, conceptos a partir de objetos mentales. Lakatos señala algo parecido en el relato que narra en *Pruebas y refutaciones* cuando en uno de sus episodios dice que poliedro aún no está definido, pero que se supone una *familiaridad* con el concepto.

Los asaltos al concepto por sucesivos contraejemplos producidos como consecuencia de la prueba de teoremas y las formas de modificar el concepto estudiadas por Lakatos de las que ya he hablado, también los podemos trasladar ahora al proceso por el cual un objeto mental se analiza y se perfila creando un concepto. A menudo entre el objeto mental y el concepto creado a partir de él se producen desajustes. Entonces uno puede admitir que su objeto mental no estaba tan bien constituido como pensaba y modificarlo o intentar una revisión de la definición conceptual.

Freudenthal señala el caso de la continuidad como ejemplo de ese desajuste, de esa distancia entre el objeto mental y el concepto creado a partir de él. Tan pronto se dio la primera definición explícita de continuidad, el objeto mental continuidad fue asaltado por numerosos ejemplos, que ahora eran ejemplos de funciones continuas de acuerdo con la definición, pero que nunca habían sido pensadas como tales con anterioridad –no eran ejemplos del objeto mental. Sin embargo, las nuevas generaciones de matemáticos –dice Freudenthal– se acostumbran pronto a esas nuevas funciones continuas aberrantes: educados por la definición de continuidad, por el concepto de continuidad, revisan su objeto mental primitivo. Ahora bien, ese objeto mental primitivo fue indispensable para el desarrollo de las matemáticas, y no ha sido substituido simplemente por el concepto, sino por un nuevo objeto mental que contiene al concepto creado por la definición, o que es compatible con él, al menos provisionalmente.

3.3 De los fenómenos a los objetos mentales y a los conceptos a través de la enseñanza

Entre los objetos mentales y los conceptos la relación es variada. Ambos se constituyen como medios de organización de fenómenos, los objetos mentales preceden a los conceptos y éstos no substituyen a los primeros sino que contribuyen a la formación de nuevos objetos mentales que los contienen o con los que son compatibles.

La distancia entre el objeto mental o, mejor, el primer objeto mental y el concepto puede ser un abismo: es el caso del objeto mental curva y el concepto de curva de Jordan, por ejemplo. En general, en la topología los objetos mentales no conducen muy lejos y es preciso formar conceptos y además mediante una formación de conceptos que involucra más que una organización local. Esos conceptos, entran en un campo de fenómenos que son organizados en un nivel más elevado por objetos mentales como espacios y variedades de dimensión arbitraria, que a su vez son convertidos en conceptos mediante nuevos procesos de organización y la creación de sistemas de signos más abstractos para describirlos. Como muestra este ejemplo, tras introducir la idea de objeto mental, el proceso de ascenso progresivo a través de la cadena de pares fenómenos / medios de organización se engarza con un proceso de transformación de objetos mentales en conceptos.

En otros dominios de las matemáticas, por el contrario, se puede avanzar mucho sin conceptos: es el caso de la geometría elemental en la que los objetos mentales son suficientes para organizar gran cantidad de fenómenos. Aquí, además, la formación de conceptos puede hacerse con organizaciones locales en las que se resuelvan las distancias entre los objetos mentales y los conceptos. Es el caso, por ejemplo, de rectángulo, cuyo primer objeto mental, es decir, el constituido a partir de las experiencias que organiza no es razonable que contenga a "cuadrado", pero que basta una organización local para que su concepto y su nuevo objeto mental modificado por el concepto pueda contenerlo sin conflicto.

Sin embargo, también hay en la geometría ejemplos de distancia entre el objeto mental y el concepto: es el caso de los conceptos elementales de punto, línea y superficie, que parecen estar muy cerca de objetos del mundo físico. Algunos objetos del mundo físico, en efecto, sugieren los objetos mentales: una mota o una marca hecha con un objeto punzante, un hilo tenso, una hoja de papel sugieren, respectivamente, que no se puede dividir más, que el ancho no tiene importancia con respecto al largo o que el grueso no la tiene respecto del largo y el ancho. Luego hay que perfilar esos objetos mentales para convertirlos en los conceptos que están expresados en las definiciones con las que Euclides encabeza el libro primero de los *Elementos*:

Un punto es lo que no tiene partes
Una línea es una longitud sin anchura
Una superficie es lo que sólo tiene longitud y anchura

Freudenthal señala que desde el punto de vista del desarrollo cognitivo, el camino no va de una dimensión a tres, sino más bien al contrario: se tiene experiencia de las superficies como superficie de un cuerpo. Ahora bien, las fuentes fenomenológicas de la línea son tanto el correspondiente paso de tres dimensiones a dos, esto es, experimentar las líneas como bordes de superficies, como otras tales como flechas, hilos, caminos y cortes. En esta diferencia entre las fuentes fenomenológicas con las que se constituyen los objetos mentales correspondientes y la presentación de los conceptos dados por sus definiciones euclídeas ya reside la distancia entre objetos mentales y conceptos en este caso. Pero esta distancia se torna aún mayor si nos fijamos en el objeto mental involucrado en el paso de uno a otro de éstos, es decir, en la dimensión. La transformación de la dimensión en un concepto se hace en topología; en ella aparece una distancia entre el objeto mental y el concepto que no sólo es tremenda, sino además de un tipo nuevo, producida por el hecho de que propiedades que desde el objeto mental son evidentes se tornan extremadamente difíciles de probar como, por ejemplo, que el producto cartesiano de n segmentos es n-dimensional.

La apoteosis de la distancia entre el objeto mental y el concepto de dimensión llega cuando se crean nuevos objetos que obligan a hablar de dimensiones fraccionarias.

Los análisis de fenomenología didáctica han de sustentarse en análisis de pura fenomenología teniendo presente que en muchos más casos de los que uno puede imaginar la distancia entre el objeto mental y el concepto es tan grande que no se pueden tender puentes entre uno y otro por medios didácticos en la escuela secundaria.

Para la constitución de objetos mentales a través de la enseñanza teniendo los conceptos presentes, la distancia entre ellos y las distintas formas que adopta esa distancia tienen entonces importancia. Además de los ejemplos que acabo de mostrar, vale la pena mencionar otros casos como los siguientes:

- En ocasiones, hay componentes esenciales para la formación del concepto que no son pertinentes para la constitución del objeto mental. Es el caso del número cardinal: la comparación de conjuntos sin estructura es esencial para el concepto, pero apenas desempeña papel alguno para la constitución del objeto mental porque, en las situaciones reales en que una persona experimenta el fenómeno que se organiza con el objeto mental número en su significado cardinal, los conjuntos de objetos rara vez carecen de estructura y, además, la estructura es un medio para realizar la comparación, en vez de algo que hay que eliminar para hacerla.
- En ocasiones, lo que muestra una fenomenología didáctica es que los fenómenos organizados por el concepto son tan variados que se constituyen de hecho en objetos mentales diferentes según el campo de fenómenos que se elija para explorar en la enseñanza, o varios objetos mentales si se exploran varios tipos de fenómenos. Para la adquisición del concepto es preciso integrar entonces esos distintos objetos mentales en un único objeto mental. Éste es el caso, por ejemplo, del concepto de área.

Longitudes, áreas y volúmenes son las magnitudes que se miden en la geometría elemental. Hace falta por tanto que se adquieran esos conceptos como parte del aprendizaje de la medida y la medición. La comparación entre cualidades de objetos es el comienzo de la actividad de medición. Ésta se convierte en medida por el intermedio del establecimiento de una unidad y la consideración de los objetos que se tratan como objetos de los que se puede predicar esa cualidad – por ejemplo, se les puede predicar la longitud si tiene sentido decir de ellos que son "largos".

Ahora bien, longitud, área y volumen, como conceptos, son problemáticos por la variedad de enfoques para la constitución del objeto mental área (o volumen). En efecto, las figuras planas se pueden comparar con respecto al área directamente, si una es parte de otra, o indirectamente, después de transformaciones de cortar y pegar, congruencias y otras aplicaciones que preservan el área, o bien midiéndolas ambas. La medida puede hacerse cubriendo la figura con unidades de área, o mediante aproximaciones interiores y exteriores, para lo cual se usa la aditividad del área bajo la composición de figuras planas que son mutuamente disjuntas, salvo sus fronteras (de dimensión uno), o la convergencia de las áreas por aproximación. No está claro que estos enfoques conduzcan al mismo resultado, y, de hecho, la prueba de que el resultado de la medición siguiendo todos esos procedimientos es la misma no es simple. La constitución del objeto mental volumen tiene además la complicación adicional de considerar los fenómenos correspondientes a la capacidad, que, usualmente, se miden con unidades distintas.

- En ocasiones, incluso es difícil distinguir el objeto mental del concepto. Al menos si se quiere tener un objeto mental unitario: sólo mediante el acceso al concepto es posible unificar un conjunto heterogéneo de objetos mentales. Éste es el caso del concepto de función. (Ver las notas sobre una fenomenología y una fenomenología histórica del concepto de función expuestas en 4.9)
- Finalmente, hay objetos mentales cuyo campo de fenómenos sólo se presenta en un contexto matemático o matematizado. Un ejemplo de ello en la Educación Secundaria lo proporcionan los conceptos de la geometría analítica.

En efecto, en la historia, la localización global utilizando coordenadas conduce a la algebrización de la geometría. Mientras que el sistema de coordenadas polares utilizado para describir la bóveda celeste y la superficie terrestre ha servido para sistematizar la localización, el sistema de coordenadas cartesianas resulta particularmente eficaz para describir figuras geométricas y movimientos mecánicos y, más adelante, funciones en general. Una figura se traduce algebraicamente en una relación entre coordenadas, un movimiento en una función que depende del tiempo y una aplicación geométrica en un sistema de funciones de un cierto número de variables.

Los fenómenos que son propios de la geometría analítica son, pues, fenómenos producidos por la expresión de las propiedades geométricas en el complejo sistema de signos en que las expresiones algebraicas y la representación cartesiana se refieren mutuamente. Son, por tanto, fenómenos que sólo pueden explorarse en contextos matematizados previamente mediante el uso de esos sistemas de signos.

4. NOTAS PARA UNA FENOMENOLOGÍA DE LOS CONCEPTOS MATEMÁTICOS DE LA EDUCACIÓN SECUNDARIA

4.1 Número

Usar el singular en el caso del concepto de número es erróneo. No sólo hay conceptos distintos de número por la calificación que lleven (naturales, enteros, racionales, reales), sino que estrictamente hablando son conceptos distintos de número (natural) los elaborados, por ejemplo, por Cantor, Peano, Frege o Benacerraf. Ahora bien, la profusión del uso civil de los números en múltiples contextos, el encuentro de los niños con estos contextos y estos usos desde la más temprana edad y la referencia desde el lenguaje natural como 'número' a todos ellos obliga a una fenomenología didáctica a considerar la constitución de un objeto mental que integra otros objetos mentales adecuados para dar cuenta de cada uno de los usos de 'número' en cada uno de los contextos.

La exploración fenomenológica por parte de los alumnos que conduce a este objeto mental se ha iniciado fuera de la escuela y se ha proseguido a lo largo de la etapa de Primaria. Para introducir los análisis fenomenológicos que son pertinentes para la etapa de Secundaria hay que hacer referencia, aunque sea sucintamente, a esos primeros fenómenos y estudiar las extensiones y modificaciones de significado que producen los nuevos fenómenos con que se enfrentan los alumnos en esta etapa.

Como ya hemos mencionado en el apartado anterior, el objeto mental número se constituye para organizar fenómenos de naturaleza diversa, cuyas características pueden describirse fijándose en cuáles son los objetos a los que los números se refieren (objetos individuales, conjuntos, palabras, los propios números), si los objetos son discretos o continuos, si están previamente ordenados o no, de qué naturaleza son las unidades y qué es lo que describe el número de esos objetos a los que se refiere. Las distintas posibilidades que tienen esas características pueden clasificarse en términos de contextos de uso de los números, siendo una clasificación bastante común, la que considera los contextos cardinal, ordinal, de medida, de secuencia, de recuento, de etiqueta, mágico, de lectura de guarismos. El conjunto de todos los usos en todos los contextos compone el campo semántico de número y los que una persona concreta ha experimentado contribuyen a la constitución de su objeto mental 'número'. La adquisición de los conceptos de número –ahora en plural– sólo puede hacerse a partir de buenos objetos mentales, mediante recortes de ese campo semántico.

Lo que importa para la Secundaria es que este proceso de constitución de objetos mentales no puede decirse que culmina en un determinado momento con la constitución de un objeto mental inmutable, tras el cual se tratará de constituir otros objetos mentales. Así, por ejemplo, el uso de números negativos modifica significados del contexto ordinal y de secuencia, y las expresiones decimales lo hacen en el contexto de medida.

Además hay que tener en cuenta que en el nivel de la secundaria los números no sólo se usan en los contextos que hemos señalado, que son contextos de uso de los números de nivel bajo, sino que también se usan en otros contextos matematizados. Las extensiones del significado de los números tienen su apoteosis en lo que podemos llamar el acceso algebraico al concepto de número. Este acceso se realiza tomando como fenómenos que hay que organizar las propias operaciones aritméticas y construye un concepto de número de nivel más elevado y de estilo muy distinto de todos los que se generan a partir de los contextos anteriores. Es número aquello con lo que pueden realizarse las operaciones aritméticas. Este nuevo concepto de número está presente en la historia haciendo posible la consideración como números legítimos de todos los números que cuando se han usado anteriormente se han calificado de ajenos al (verdadero) concepto de número, y se les ha puesto nombre de acuerdo con esta exclusión (imaginarios, falsos). La extensión de las operaciones de la aritmética a objetos no considerados como números con el fin de convertirlos en tales está presente ya en la obra de algebristas árabes del siglo XI como al-Karaji que tratan los objetos del álgebra explícitamente como números, y forma parte, por ejemplo, de los esfuerzos de Cantor para convencer a sus contemporáneos de que los números transfinitos que había creado podían realmente calificarse de números.

4.2 Operaciones aritméticas

Lo dicho para "numero" es también aplicable para cada una de las operaciones aritméticas. Así, la adición y la substracción como objetos mentales combinan los significados derivados de las acciones de seguir contando, unir conjuntos y yuxtaponer magnitudes en un campo semántico en que esos significados se han integrado gracias a las correspondencias entre ellos que proporcionan artefactos didácticos como, por ejemplo, la recta numérica. Multiplicación y división tienen una riqueza aún mayor de significados. Más que en el caso de "número", los significados de las operaciones se ven afectados por la experiencia de nuevos fenómenos y tipos de números. Así, por ejemplo, es preciso extender el significado de "número de veces" si se quiere dar sentido a la multiplicación de fracciones o de números decimales. Por otro lado, en los contextos más matematizados la extensión de las operaciones se concibe como extensión algebraica.

4.3 Razón y proporción

La razón es una función de un par ordenado de números o de valores de una magnitud. Las operaciones aritméticas elementales también lo son, pero en ellas lo que importa es el valor que la función asigna a cada par y éste puede obtenerse por procedimientos algorítmicos. Ahora bien, si una razón se lee como el valor que se obtiene al efectuar la división correspondiente, la razón desaparece. El significado de razón no reside en el proceso por el que se le asigna un valor, sino en la posibilidad de hablar de igualdad (o desigualdad) de razones, sin conocer el tamaño de la razón. El significado de razón viene de poder decir con sentido "*a* es a *b* como *c* es a *d*", sin anticipar que "*a* es a *b*" se puede reducir a un número que es el mismo al que se puede reducir "*c* es a *d*".

El estatuto lógico de la razón desde el punto de vista fenomenológico ha de describirse entonces en términos de la relación de equivalencia "tener la misma razón". Éste es de hecho también el que le dio Euclides, ya que en el libro V de los *Elementos*, definición 5, lo que realmente define no es "razón", sino "tener la misma razón". El estatuto lógico de la razón es, pues, desde este punto de vista, de un nivel más elevado que el de número, fracciones, longitudes y otros conceptos con los que los alumnos se han tropezado previamente en su escolaridad. El sentido en que calificamos el nivel de más elevado es el que le da el provenir de una relación de equivalencia: lo que organiza es una propiedad *intensiva* y no una propiedad *extensiva* de objetos o conjuntos de objetos.

La variedad de propiedades intensivas de objetos organizados por la razón es enorme. Aquí sólo señalaremos una gran división que es preciso tomar en cuenta en la enseñanza: la razón puede ser una relación *en* una magnitud o *entre* magnitudes. La situación se puede esquematizar así:

Hay dos espacios de medida –o magnitudes– y una aplicación lineal entre ellos. La razón *en* una de las magnitudes es interna; *entre* las dos magnitudes, externa. Una proporción conlleva una función lineal entre los espacios de medida. El que sea lineal significa que las razones internas son invariantes bajo la función y que las razones externas entre elementos que la función hace corresponder es constante. La linealidad viene dada respecto de las razones internas implícitamente –"en tiempos iguales se recorren espacios iguales"–, y respecto de las razones externas, explícitamente –$f(x)=\alpha x$, para todo x.

Una fenomenología didáctica muestra, por otra parte, que en el camino hacia la constitución del objeto mental razón y proporción desempeñan un papel importante objetos mentales precursores del objeto mental de razón y proporción. Aquí sólo señalo que un buen número de ellos tienen carácter cualitativo y que involucran comparaciones de razones como el contexto en el que se le puede dar sentido a la igualdad de razones, es decir, a la proporción. Entre ellos me parece particularmente importante lo que Freudenthal llama el objeto mental "relativamente". Este objeto mental es el que permite decir con sentido, por ejemplo, que un chocolate es más dulce que otro porque contiene –relativamente– más azúcar, y ese relativamente se refiere a un criterio de comparación que puede estar implícito o explícito –el peso, por ejemplo.

El objeto mental "relativamente" se constituye en la enseñanza gracias a:

- Entender que las ordenaciones pueden relativizarse (relativamente mayor, menor, más, menos).
- Entender "relativamente" en el sentido de "en relación a...", con el criterio de comparación en el lugar de los puntos suspensivos.
- Usar con sentido "relativamente" y "en relación a".
- Completar "relativamente" y "en relación a" en un contexto.
- Conocer operativamente lo que "relativamente" y "en relación a" significan.
- Explicar lo que "relativamente" y "en relación a" significan.

4.4 El álgebra del currículo de Secundaria y el punto de vista fenomenológico

El álgebra moderna organiza fenómenos que tienen que ver con las propiedades estructurales de conjuntos de objetos arbitrarios en los que hay definidas operaciones. Esas propiedades y esos objetos provienen de la objetivación de medios de organización de otros fenómenos de nivel más bajo y son el producto de una larga historia con sucesivos ascensos de nivel.

Una manera de recorrer la historia consiste en situarse en el siglo IX en el momento en que al-Khwarizmi escribe el Libro conciso de *al-jabr* y *al-muqabala* y tomar ese acontecimiento como nacimiento del álgebra en tanto disciplina claramente identificada entre las matemáticas. Lo que hace al-Khwarizmi, que lo separa de todos los trabajos que desde el suyo se verán como álgebra, es comenzar estableciendo "todos los tipos de números que son necesarios para los cálculos" –tesoros, raíces y simples números o dirhams, en su terminología–, a continuación todas las combinaciones posibles de esos tipos –seis tipos: "tesoros más raíces igual a números", etc.– y luego un algoritmo para resolver cada uno de los tipos –hallar su tesoro o su raíz. Cada uno de los tipos es una forma canónica a la que se puede reducir cualquier problema por el intermedio de su traducción en términos de cosas, tesoros, raíces y dirhams. Lo que es nuevo en al-Khwarizmi no son, pues, los métodos de resolución, sino el establecimiento de un conjunto completo de formas canónicas todas ellas resolubles y la organización posterior de la aplicación a los problemas cuyas soluciones se organizan por esas formas canónicas.

El siguiente salto de nivel lo da Galois al dejar de buscar nuevas soluciones para estudiar las condiciones de resolubilidad de las ecuaciones. Y el resto de la historia hasta el álgebra moderna actual puede verse también como sucesivos saltos de nivel por objetivación de los medios de organización de fenómenos del nivel anterior.

Sin embargo, esta fenomenología histórica apenas es pertinente para el álgebra del currículo actual de secundaria, en el que ha desaparecido todo vestigio del álgebra moderna que se introdujo en los años setenta. Al estar considerada en su aspecto de lenguaje, la fenomenología que es pertinente desde el punto de vista didáctico resulta ser un análisis de los rasgos del lenguaje natural y los sistemas de signos de la aritmética escolar, en cuyo contexto y a partir de los cuales han de adquirir los alumnos el nuevo lenguaje del álgebra. Para realizar ese análisis Freudenthal recorre los puntos siguientes en el texto que se indica en el apéndice:

- Reglas de transformación (en el lenguaje natural).
- Lenguaje aritmético.
- Lenguaje como acción.
- Formalizar como un medio y como un objetivo.
- Construcción algorítmica de los nombres propios.

- Reglas de puntuación.
- Variables en el lenguaje vernáculo.
- Variables en el lenguaje de las matemáticas.
- El signo igual.
- Estrategias y tácticas algebraicas
- Substitución formal.
- El principio de permanencia algebraico.
- Traducción algebraica.

El álgebra lineal, por su parte, está planteada como una herramienta aplicada. El punto de vista fenomenológico no consiste en este caso tampoco en buscar en la historia los fenómenos que dieron origen a lo que hoy entendemos por álgebra lineal. Lo que se trata aquí es de considerar las aplicaciones como un terreno en el que hay fenómenos que el álgebra lineal puede organizar y buscar el significado de los conceptos del álgebra lineal en ese mundo particular de fenómenos. Así, la operación de producto de matrices se puede dotar de sentido a través de su aplicación a matrices de conectividad de grafos y usarse después en otros contextos de aplicación en el plano puramente de la expresión, sin referencia al contenido.

4.5 Objetos geométricos. Figuras y dibujos

El espacio como objeto mental y como concepto matemático no está en el punto de partida de la geometría, sino que es el producto de un largo proceso de elaboración. Como dice Freudenthal, los objetos geométricos, como conceptos, están en el espacio, pero los objetos mentales correspondientes a esos conceptos, están en un contexto geométrico. De donde se parte, en la historia y en la historia de cada persona no es de fenómenos –experimentables sólo en un nivel ya matematizado– que se organizan con el concepto de espacio, ni tampoco de contextos geométricos, sino es de otros fenómenos y otros contextos.

Los fenómenos organizados inicialmente son formas y configuraciones que se encuentran en un contexto visual –contornos y líneas de visión–, ligados muy pronto a la propia fabricación humana, que produce formas "geométricas". Los objetos geométricos, como conceptos, se elaboran a partir de los objetos mentales constituidos como medios de organización de las figuras "geométricas" observadas o trazadas en la tierra, para lo que sus definiciones han de desprenderse de las propiedades sensibles de esas figuras que pretenden organizar. Así Euclides se fuerza a definir, "un punto es lo que no tiene partes", "una línea es una longitud sin anchura", con propiedades que indican carencias, desprendimientos, creando un concepto que se separa del objeto mental que organiza los fenómenos correspondientes. Por ello, a partir de entonces lo que se puede hacer con las figuras o lo que se vea en ellas tendrá que ser sometido a análisis para poder aceptarse para los objetos geométricos, porque si se traza en el suelo o en un papel una circunferencia y una recta tangente a ella, en el dibujo no se cortan en un punto sino "en toda una longitud", como argumentaba Protágoras contra los matemáticos de su época, mostrando la distancia entre el concepto construido por Euclides y el objeto mental primitivo. Pero las figuras geométricas trazadas en el papel, los dibujos geométricos, se usan a su vez para representar los objetos geométricos.

Esta relación entre figura, dibujo y objeto geométrico está presente en la constitución de los objetos mentales correspondientes y en la ulterior adquisición de los conceptos. Un buen objeto mental tendrá que llevar incorporado el análisis de la figura en sus elementos y las relaciones entre ellos.

Además, las relaciones entre el dibujo y el objeto geométrico son más complejas porque el paso del dibujo al objeto geométrico es el resultado de una interpretación por un sujeto humano. De ello se deduce que un dibujo geométrico no es necesariamente interpretado por su lector como algo que le remita a un objeto geométrico, y, por otra parte, que las interpretaciones de un mismo dibujo en tanto que signo o, mejor dicho, expresión de la que un objeto geométrico es el contenido son múltiples por dos razones: la primera consiste en que las interpretaciones dependen del lector y de sus conocimientos así como del contexto; la segunda tiene que ver con la naturaleza misma del dibujo, que por sí solo no puede caracterizar un objeto geométrico. Un dibujo remite a los objetos teóricos de la geometría en la medida en que el que lo lee decide hacerlo: la interpretación evidentemente depende de la teoría con la que el lector elige leer el dibujo, así como de los conocimientos de dicho lector. El contexto desempeña un papel fundamental en la elección del tipo de interpretación. Para el aprendizaje de la geometría hay que situar, pues, los dibujos en contextos geométricos. Además, estas relaciones entre el dibujo y el objeto geométrico no pueden ser aprendidas si no media su enseñanza.

Una manera de abordar este asunto es la propuesta por Colette Laborde (1996) en el contexto del Cabri-geómetra. En esa propuesta se plantea a los alumnos las dos caras de la relación entre los dibujos y los objetos geométricos:

- situaciones problema que traten de dibujos, en las que la geometría sea una herramienta eficaz de modelización y de solución; por ejemplo, en las que permita hacer dibujos que satisfagan restricciones dadas, de manera menos costosa que el tanteo controlado por la percepción y que la geometría garantice la corrección del resultado: por ejemplo, la geometría nos asegura la tangencia de una recta a un círculo cuando es perpendicular al radio.

- situaciones en geometría en las que el recurso al dibujo y la experimentación con él eviten perderse en soluciones teóricas demasiado largas.

Por otro lado, la consideración de un entorno informático como es el Cabri-geómetra modifica las relaciones entre dibujo y objeto geométrico, cuyo análisis acabamos de esbozar. En efecto, los dibujos realizados con el Cabri en la pantalla del ordenador, los Cabri-dibujos, se comportan de manera diferente a los dibujos realizados con lápiz en un papel, ya que no se trazan "a mano", sino que se definen mediante las primitivas del programa, que se corresponden siempre con propiedades geométricas. La modificación de un Cabri-dibujo por desplazamiento de alguno de sus elementos hace que no puedan mantenerse determinadas interpretaciones del dibujo fundadas en sus propiedades espaciales.

Finalmente, en la experiencia de los alumnos, el mundo de fenómenos que son organizados por los objetos geométricos que hay que abordar en la Secundaria es tan extraordinariamente rico, con sólo que se busque en la naturaleza, el arte o las construcciones humanas, que no vamos a elaborar aquí ninguna lista. Sólo señalaremos que esta abundancia de fenómenos geométricos se ha incrementado enormemente en los últimos tiempos con todos los productos infográficos: videojuegos, imágenes digitales que aparecen como carátulas de programas de televisión, videoclips, juegos de ordenador, etc.

4.6 Movimientos y transformaciones geométricas

Las transformaciones geométricas están relacionadas con movimientos físicos de figuras geométricas. Ahora bien, también hay una relación compleja y conflictiva entre las características o propiedades geométricas de las transformaciones geométricas y las propiedades espaciales de los movimientos. Freudenthal lo expresa mostrando tres diferencias básicas:

el movimiento	mientras que la transformación
es	es
de un objeto	*del espacio*
se realiza	se realiza
dentro del espacio	*sobre el espacio*
y sucede	y sucede
en el tiempo	*de golpe*
a lo largo de un recorrido	*sin recorrido intermedio*

Ésta es la fuente de dificultades como la de identificar como iguales todas las transformaciones cuyo resultado sea el mismo aunque el recorrido de las figuras al efectuar el movimiento correspondiente sea diferente, la de aceptar como transformación la identidad, ya *se llame* "traslación de vector 0" o "giro de centro A y ángulo 0°", etc.

Teniendo presente esta distancia entre fenómeno y concepto matemático, también puede ser numeroso el mundo de fenómenos presentes en el entorno de los alumnos o que se les puede ofrecer para su exploración que son pertinentes para la constitución del objeto mental de transformación geométrica.

4.7 Estadística

Los conceptos de la estadística descriptiva se han desarrollado con el fin de organizar la información que proporcionan datos numéricos. Esos datos provienen de una gran diversidad de fenómenos de la vida social, política y económica, cuya enumeración sería interminable. Ahora bien, todos esos fenómenos no son más que los contextos en los que se usan los conceptos de la estadística, y tiene interés didáctico tomarlos en consideración como contextos de uso, ya que constituyen un campo de experimentación de los sujetos en la constitución de los objetos mentales de la estadística. Los fenómenos de los que éstos realmente tratan tienen que ver con la información cuantitativa que hay en los datos y lo que los conceptos organizan es esa información cuantitativa resumiéndola, caracterizándola, tipificándola, disponiéndola de forma que pueda ser comparada con otras informaciones provenientes de datos masivos.

En la vida cotidiana de los alumnos, los conceptos estadísticos aparecen en la prensa, la televisión y otros medios de comunicación aplicados a cuestiones diversas para describirlas; en las noticias de las campañas políticas, para predecir el comportamiento de los votantes. Desde el punto de vista de la fenomenología didáctica, todos estos elementos *en los que la estadística ya está presente, en su uso civil,* forman parte también de las experiencias con que los alumnos configuran los objetos mentales correspondientes.

En el terreno de la inferencia estadística, los fenómenos son más complejos y de naturaleza más abstracta, ya que atañen a la posibilidad de obtener conocimiento a partir de la observación de los rasgos de casos. Ian Hacking ha discutido la dificultad de constitución de la inferencia estadística bajo el dominio del paradigma de la ciencia galileana, ya que ésta ha de luchar con lo que se entiende por "evidencia aceptable para establecer una verdad" en un momento histórico determinado y en unas prácticas sociales concretas. Esta dificultad sólo puede romperse con Fisher, que introduce la idea de que el rechazo de la hipótesis nula no equivale a su refutación, ya que la alternativa no es "rechazar la hipótesis nula" / "aceptar la hipótesis nula", sino "rechazar la hipótesis nula" / "equivocarse al rechazar la hipótesis nula".

4.8 Probabilidad

En el origen del cálculo de probabilidades como en el mundo en que viven los alumnos, están los juegos de azar, los fenómenos con varios resultados posibles de los que se desconoce cuál va a suceder, los sorteos, el tiempo atmosférico, etc. En el lenguaje oral, el término "probable" o la expresión "es probable" tanto quiere decir "puede que suceda" como "creo que va a suceder", y la desambiguación suele venir producida por el énfasis que pone el que habla; además, estos términos comparten el campo semántico con "posible" y "es posible".

Los puntos de vista logicista, subjetivista y frecuencialista, que se han propuesto para fundamentar la idea de probabilidad, muestran el rango de fenómenos subyacentes y las dificultades para delimitar los conceptos básicos de probabilidad y aleatoriedad. Unos buenos objetos mentales de lo aleatorio y la probabilidad pueden constituirse con componentes que se derivan de las estipulaciones de Kolmogorov:

La experiencia tiene más de un resultado posible.

Con los conocimientos de quien observa la experiencia, lo que sucederá es impredecible.

La experiencia puede suponerse que es reproductible en las mismas condiciones *n* veces, *n* suficientemente grande.

La secuencia de resultados obtenidos en la repetición carece de un patrón que quien observa pueda predecir.

Las fluctuaciones de las frecuencias relativas se hacen cada vez más estables cuando *n* crece y su amplitud disminuye con una cierta regularidad.

4.9 Variable, dependencia, función

La costumbre establecida en las matemáticas actuales de llamar "variables" a lo que en realidad son medios para formular proposiciones de carácter general –lo que Freudenthal llama "nombres polivalentes"– es reciente. "Variable" había estado significando de siempre algo que realmente varía, algo del mundo físico, social, mental, o del propio mundo de las matemáticas, que se percibe o se imagina que está variando. Así, desde los fenómenos físicos, sociales y mentales variables se pasa a números, magnitudes o puntos concebidos también como variables, esto es, a objetos matemáticos variables.

El origen fenomenológico del concepto de función está en el momento en que se enuncia, se postula, se produce o se reproduce una dependencia entre variables, que se presenta en el mundo físico, social o mental, así como entre variables matemáticas que, a su vez, están relacionadas con variables de los otros mundos.

La misma dependencia puede, a su vez, ser objetivada, esto es, se le puede dar el estatuto de objeto mental. En el camino hacia esa objetivación, la dependencia ha de ser experimentada mentalmente, usada, provocada, hecha consciente, experimentada como un objeto, nombrada como un objeto, situada en un contexto más amplio de dependencias.

Una mirada a la historia muestra que la palabra "función" no se usa de forma parecida a como lo hacemos ahora hasta Euler, pero es posible interpretar como funciones hechos tan antiguos como las descripciones mediante tablas de los movimientos de los cuerpos celestes hechas por los astrónomos desde los tiempos paleobabilónicos. Lo que la historia nos enseña para una fenomenología de las funciones puede resumirse así:

- Las funciones hicieron su aparición como relaciones entre magnitudes variables cuya variabilidad se comparaba en términos infinitesimales.
- La libertad de cambiar las variables de dependiente a independiente y entre independientes condujo a un nuevo tipo de operación con funciones: la composición y la inversión. Es esta nueva riqueza operatoria la que ha causado el éxito del concepto de función.
- La necesidad de distinguir entre las variables dependientes e independientes condujo a poner en primer plano las funciones en vez de las relaciones. A pesar de lo que sugieren las expresiones algebraicas y analíticas, el desarrollo tendió hacia las funciones univalentes.
- Un cambio de perspectiva condujo de la descripción de datos visuales mediante funciones expresadas analíticamente a la visualización de funciones mediante gráficas.
- La función arbitraria hace su aparición con el cálculo variacional y la resolución de ecuaciones diferenciales. Esta "arbitrariedad" no sólo atañe al carácter de la dependencia funcional, sino a la naturaleza de las variables, que pueden ser números, puntos, curvas, funciones, elementos de conjuntos arbitrarios.
- Las funciones del análisis, las transformaciones geométricas, las permutaciones de los conjuntos finitos, las aplicaciones entre conjuntos arbitrarios confluyen para generar el concepto general de función.
- Ese concepto se usa a su vez para organizar una gran variedad de objetos: desde las operaciones algebraicas a los predicados lógicos.

Esta riqueza final de fenómenos tan variados que se integran en el concepto general de función, fenómenos que, además, pertenecen muchos de ellos al propio mundo de las matemáticas, hace que la función como objeto mental sea mucho más compleja que el número, los objetos geométricos o incluso la razón. La adquisición del concepto de función sólo puede hacerse en etapas avanzadas de la escolaridad en que los alumnos puedan haber tenido experiencia de un buen número de esos fenómenos.

Lo que de hecho puede constituirse como objeto mental en la Educación Secundaria es la idea de variable y de dependencia funcional y es difícil tender puentes siquiera con las transformaciones geométricas, que también se están experimentando.

4.10 Límite, continuidad, infinito

Una fenomenología de estos conceptos, que no vamos a abordar aquí, muestra el abismo enorme entre esos conceptos y los fenómenos iniciales y los primeros objetos mentales que se constituyen tanto en la historia de las matemáticas como en la historia de cada persona. La frase de Cantor a Dedekind «Lo veo, pero no lo creo» a propósito de su conclusión derivada del método de la diagonal de la existencia de cardinales infinitos distintos es una muestra clara de ello. No hay de hecho nada en la experiencia física de las personas que se corresponda con los conceptos matemáticos de continuidad y, sobre todo, de infinito –que, por otra parte, no está claro que sea un único concepto. Los fenómenos para cuya organización han elaborado los matemáticos esos conceptos pertenecen al mundo de las matemáticas en el que hay objetos que los producen o se producen en contextos altamente matematizados. Una didáctica de estos conceptos también ha de tener en cuenta que sólo pueden constituirse buenos objetos mentales de ellos a condición de poder experimentar los fenómenos que organizan.

Si el análisis fenomenológico de estos conceptos muestra estas dificultades para su adquisición, eso no quiere decir que haya que abandonarlos. En el camino hacia la adquisición del concepto, lo que una didáctica ha de hacer es organizar un campo de experiencias que abarque el mayor número de fenómenos en cuestión y organizar la instrucción de modo que pueda constituirse un objeto mental con el cual se sea capaz de tratar con esos fenómenos. Además, no hay que perder de vista que muchos de los fenómenos pertinentes para la constitución de buenos objetos mentales de ellos son fenómenos de los propios medios matemáticos de organización, tomados como objeto de estudio en un nivel superior.

CAPÍTULO IV
Representaciones y Modelización

Encarnación Castro y Enrique Castro

1. CONOCIMIENTO MATEMÁTICO Y VISUALIZACIÓN

Entre las verdades comunes aportadas por el empirismo filosófico se encuentra que la percepción y observación son fuentes privilegiadas del conocimiento humano. Cada ser humano lleva en sí mismo, en sus facultades de percepción sensorial, una vía de acceso al conocimiento. Los sentidos son los cauces por los que los seres humanos recibimos información del exterior. Por ello, resulta adecuado considerar la intervención de los sentidos en la transmisión, adquisición y construcción de cualquier tipo de conocimiento. De la premisa anterior se deriva que los sentidos desempeñan un importante papel en los procesos de aprendizaje que requieren de la mediación de la inteligencia. «Los sentidos son los factores de nuestra inteligencia y los agentes de nuestras facultades» (Michelet, 1988).

Desde este planteamiento general también es adecuado considerar que el conocimiento matemático se recibe y se transmite, prioritariamente, mediante dos canales de información: el auditivo y el visual (y, de manera complementaria, por el tacto). Enunciados verbales y organizaciones visuales gráficas o simbólicas son los medios usados con mayor frecuencia en la emisión, transmisión y recepción de conocimiento matemático. De ahí que los dos sentidos mencionados tengan una importancia primordial en los procesos que intervienen en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Y esto es así por la función esencial de los enunciados declarativos y las expresiones gráficas o simbólicas en la formación y comunicación del conocimiento matemático.

Este capítulo dirige nuestra atención hacia la función que desempeñan los datos e informaciones visuales en el aprendizaje de las matemáticas como generadores de imágenes y objetos mentales, y destacamos su aportación en relación a la formación de conceptos y el desarrollo de procedimientos matemáticos por parte del sujeto que aprende, subrayando de este modo la necesidad de considerar el pensamiento visual en las situaciones de enseñanza. Nos centramos en dos de los medios por los que, fundamentalmente, se proporciona información adecuada para la elaboración de imágenes mentales y se potencia la formación del conocimiento matemático. Estos medios son las representaciones y los modelos, a los que nos referimos a continuación de forma breve. Salvo limitaciones físicas, las personas reciben información sobre representaciones y modelos por medio de la vista, de ahí la importancia de la componente visual en el aprendizaje de las matemáticas; pero en los casos de discapacidad visual el tacto puede suplir satisfactoriamente muchas de las informaciones anteriores, igualmente, sobre la base de los modelos y las representaciones.

Representaciones y modelos están ligados entre sí, como veremos en una descripción más detallada que haremos de estos conceptos, en párrafos posteriores.

Representaciones: son las notaciones simbólicas o gráficas, específicas para cada noción, mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos matemáticos así como sus características y propiedades más relevantes. Por ejemplo: la notación *decimal* para la escritura de los números reales; el *diagrama cartesiano*, que asigna un punto del plano a cada pareja de números; los puntos de la *circunferencia unidad*, con centro en el origen, cuyas coordenadas representan los valores de las funciones seno y coseno. Las notaciones simbólicas pueden alcanzar gran complejidad, por lo general se basan en signos alfanuméricos estructurados; las gráficas se basan en combinaciones de figuras o iconos, también estructuradas.

En este capítulo, la noción de representación la vinculamos con los signos, notaciones, figuras y expresiones usuales de las matemáticas; las representaciones forman parte específica de los sistemas matemáticos de signos, incluidos los gráficos.

Modelos: esquemas o materiales estructurados, conectados mediante leyes o reglas, que ofrecen una imagen isomorfa de un determinado concepto respecto a determinadas relaciones y propiedades. Ejemplo: los *bloques multibase* son un modelo isomorfo a sistemas de numeración en distintas bases; el *geoplano* es un modelo finito del plano, con una distribución de puntos equiforme o en cuadrícula.

La noción de modelo no es interior a las matemáticas; se trata de una relación entre un fenómeno, material o esquema y un concepto, estructura o procedimiento matemático. Un material estructurado *modeliza* un concepto matemático, pero también se dice que una ecuación matemática modeliza un determinado fenomeno físico, como ocurre con la ecuación del calor. La relación de modelización se da entre objetos matemáticos y no matemáticos.

Las representaciones y modelos, en el sentido en que se acaban de mencionar, son representaciones o modelos *externos*, es decir, tienen una traza o soporte físico tangible aun cuando dicho soporte pueda llegar a alcanzar grados de abstracción elevados. Una actividad usual para expresar conceptos o procedimientos matemáticos, y para derivar conclusiones de los mismos, consiste en hacer una representación de ellos o asignarles un modelo sobre el cual se opera o actúa siguiendo unas determinadas reglas sintácticas y de procedimiento. Mediante las representaciones externas y las operaciones convenidas comunicamos nuestro conocimiento matemático.

Además de comunicar nuestro conocimiento sobre conceptos y operaciones también necesitamos pensar sobre tales objetos; en este caso formamos imágenes mentales que se denominan representaciones *internas*. No todas las imágenes mentales consideran características figurativas o gráficas del concepto; cuando en una representación mental predominan los componentes figurativos o gráficos hablamos de visualización. La visualización es usual cuando imaginamos objetos geométricos familiares; así ocurre cuando pensamos en las figuras de un cuadrado, un círculo o un triángulo equilátero. Menos usual es tener una imagen gráfica de otros conceptos (como el de término general de una sucesión), o de algunos procedimientos (como divisibilidad de polinomios). Las personas con facilidad para formarse imágenes mentales gráficas emplean éstas en sus razonamiento matemáticos; se dice que son buenos visualizadores.

Iniciamos este capítulo introduciendo algunas ideas sobre la noción de visualización. En apartados posteriores precisamos las nociones de representación, modelo y símbolo, tal como nosotros las consideramos. Cerramos el capítulo con la presentación de algunas representaciones y modelos, que ejemplifican en conceptos matemáticos específicos su función en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

2. NATURALEZA Y CARACTERÍSTICAS DEL PENSAMIENTO VISUAL

El término *visualización* se emplea, por lo general, con referencia a figuras o representaciones pictóricas ya sean éstas externas o internas, es decir, sobre soporte material (papel, pantalla, etc.) o en la mente. Se aprecia así que en la idea de visualización aparecen dos facetas básicas complementarias, una externa a los sujetos (con soporte material) y otra interna a los mismos sujetos (imagen mental). La noción de visualización o pensamiento visual está fuertemente ligada a la capacidad para la formación de imágenes mentales. Lo que caracteriza a una *imagen mental* es hacer posible la evocación de un objeto sin que el mismo esté directamente presente.

La capacidad para visualizar cualquier concepto matemático, o problema, requiere habilidad para interpretar y entender información figurativa sobre el concepto, manipularla mentalmente, y expresarla sobre un soporte material. Cuando se usan las representaciones gráficas de conceptos matemáticos como herramientas para interpretar conceptos o resolver problemas, la visualización no es un fin en sí misma sino un medio para llegar a su comprensión o resolución. Se trata de expresar alguna propiedad específica de un concepto o alguna relación importante para la resolución de un problema a través de un diagrama, un dibujo o una gráfica.

Se usa el término *pensamiento visual* para describir los aspectos del pensamiento matemático que están basados o se pueden expresar en términos de imágenes mentales. Es posible educar a los niños y adolescentes para que su capacidad visualizadora se desarrolle y tienda a mejorar. Zimmermann (1991) considera que se puede adquirir habilidad respecto a la visualización y divide estratégicamente esta habilidad en cinco categorías, a las que considera como objetivos de aprendizaje. Tales objetivos son:

Objetivos básicos
Objetivos funcionales
Objetivos generales
Objetivos relacionados específicamente con el cálculo
Objetivos de alto nivel

Los objetivos básicos de este autor hacen referencia a:

Entender el álgebra y la geometría como lenguajes alternativos para expresar las mismas ideas matemáticas.

Entender la información matemática implícita en una representación gráfica.

Extraer información de un diagrama así como utilizar las gráficas y los diagramas para representar información matemática.

En los objetivos funcionales contempla la capacidad para entender qué conceptos están representados en un diagrama y utilizarlos para realizar demostraciones y para resolver problemas.

Con la denominación de objetivos generales se refiere a aquellos aspectos de la visualización que tienen amplia aplicación en distintas áreas de las matemáticas; incluye aquí la habilidad para realizar estimaciones y aproximaciones en un contexto geométrico, reconocer y explicar simetrías, apreciar la periodicidad, captar la similitud, entender y reconocer patrones, entender trasformaciones geométricas, o conseguir un amplio repertorio de imágenes visuales.

Los objetivos relacionados específicamente con el cálculo incluyen la habilidad de entender conceptos como el de diferenciación, visualizar elementos infinitesimales en figuras geométricas y visualizar superficies y figuras de tres dimensiones.

Finalmente, los objetivos de alto nivel hacen referencia a la habilidad de apreciar la belleza de las matemáticas, interpretar fenómenos y experiencias visuales de la vida real, explorar y descubrir visualmente ideas matemáticas.

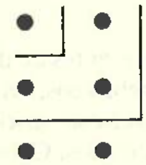
2.1 Visualización y enseñanza de las matemáticas

Si aceptamos que la matemática está compuesta por entes de distinta naturaleza como son elementos espaciales, kinestésicos, algebraicos, aritméticos, lógicos, e intuitivos, entre otros, será necesario diferenciar distintos tipos de conocimientos e implementar tareas para cada uno de ellos. Consideramos que la comprensión alcanzada mediante procesamiento de información visual y la que se consigue por procedimientos analíticos se complementan, por lo que el aprendizaje debe lograrse integrando ambos tipos de códigos.

El papel que juegan las imágenes visuales en los procesos de pensamiento humano, así como el interés en determinar la relación entre las imágenes visuales y el conocimiento matemático han sido objeto de estudio por parte de especialistas e investigadores procedentes tanto del campo de la psicología como del campo de la educación matemática. La influencia de las imágenes visuales en el pensamiento matemático, en el aprendizaje de las matemáticas y en su comprensión, es una cuestión que ha despertado interés entre psicólogos y educadores matemáticos. Hadamard (1947) realizó una encuesta a matemáticos importantes de su época, preguntándoles por el papel que desempeñaban las imágenes en su trabajo de creación matemática y el tipo de imágenes que utilizaban. La conclusión fue que las imágenes mentales desempeñaban un papel importante para gran parte de los matemáticos encuestados y eran, en la mayoría de los casos, visuales aunque también podían ser de otra clase, por ejemplo, cinéticas o auditivas.

Ball y Wittrok (1973) sostienen que los sujetos que han dibujado por sí mismos un diagrama para la formación de un concepto, recuerdan dicho concepto más significativamente que cuando se les ha proporcionado el dibujo con el concepto. Por otra parte, los sujetos que realizan un dibujo de un concepto lo aprenden mejor que aquellos que sólo conocen su definición verbal. Una explicación admitida de este fenómeno es que la generación activa de una imagen visual por parte del que aprende facilita más el aprendizaje que la simple presencia de la imagen visual. Es una hipótesis generalmente admitida que mejorando la educación visual en matemáticas aumenta la intuición y se proporciona al sujeto una mayor capacidad de entendimiento (Cuningham, 1991). Hay un alto consenso entre investigadores y especialistas relativo a que el desarrollo de las capacidades que caracterizan el pensamiento visual proporciona a los alumnos nuevos caminos para pensar y hacer matemáticas.

La visualización cobra especial importancia en procesos de razonamiento inductivo y deductivo (Ben-Chaim, 1991); así, por ejemplo, formar una conjetura a partir de un patrón y generalizarla es una componente propia del razonamiento inductivo. Como ejemplo consideremos la Figura 1 en la que, a partir de la representación puntual de una cantidad en forma de cuadrado, y considerando las líneas de separación que indican el paso de un cuadrado al inmediatamente mayor que él se puede inferir un patrón numérico el cual, por generalización, permite enunciar la siguiente regla «el cuadrado de un número natural es igual a la suma de tantos números impares como indique dicho número».



$$1 + 3 = 4 + 2^2$$
$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$1 + 3 + 5.^{(n)}..\ 2n - 1 = n^2$$

Figura 1

La expresión visual actúa en este caso a modo de catalizador para comprender una regla y producir razonamiento inductivo.

Probar conjeturas a partir de un argumento o soporte lógico, o encontrar un contraejemplo es la esencia del razonamiento deductivo. Los patrones tanto numéricos como geométricos pueden ayudar a los alumnos en la construcción de nociones de álgebra. La visualización permite entender de manera intuitiva un razonamiento deductivo, cuyo tratamiento algebraico se realizará posteriormente. La Figura 2 muestra dos formas de representar una implicación, la segunda de carácter visual.

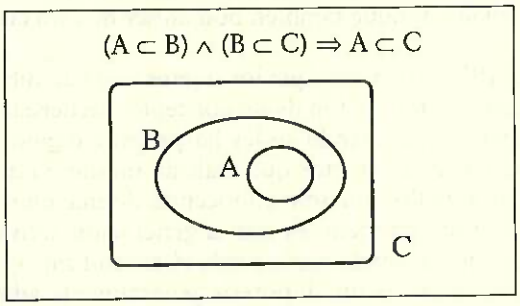


Figura 2

Multitud de investigaciones realizadas aportan datos que indican que muchas dificultades en el aprendizaje del cálculo, el álgebra y la geometría pueden diluirse e incluso evitarse si a los estudiantes se les anima a usar e interiorizar gráficos o representaciones visuales asociadas a dichos conceptos. Pero también es un hecho comprobado que existe rechazo por parte de muchos enseñantes de matemáticas a usar recursos visuales en el desarrollo de su labor. Una causa de dicho distanciamiento se encuentra en que la enseñanza basada en la visualización requiere que los profesores dispongan de una formación adecuada para poner en marcha diversas habilidades pedagógicas. En este caso, no sólo se requiere entender la matemática, sino también saberla comunicar visualmente.

3. SOBRE LA NOCIÓN DE REPRESENTACIÓN

3.1 Análisis conceptual

Cuando recordamos, razonamos o comunicamos nuestras reflexiones usualmente no lo hacemos presentando los objetos o conceptos sobre los que tratamos sino que nos servimos de expresiones, dibujos o símbolos que, de algún modo, las representan. Para pensar y razonar sobre ideas matemáticas es necesario hacerse una representación interna de las mismas de forma que la mente tenga posibilidad de operar con tales representaciones. Para comunicar estas ideas es preciso representarlas externamente para que sea posible dicha comunicación (Rivière, 1986; Hiebert y Carpenter, 1992).

Se postula que los signos, gráficos o notaciones, con soporte físico externo, que usamos para la representación tienen un equivalente en la mente del sujeto que los utiliza, lo que hace necesario distinguir entre representaciones externas y representaciones internas. Las relaciones existentes entre estas dos modalidades de representación las expresa Duval (1993) en los siguientes términos: desde un punto de vista genético, las representaciones mentales y las representaciones externas no pueden verse como dos dominios diferentes. El desarrollo de las representaciones mentales se efectúa como una interiorización de la representaciones externas; la diversificación de representaciones de un mismo objeto o concepto aumenta la capacidad cognitiva de los sujetos y, por consiguiente, su capacidad de pensamiento sobre ese objeto o concepto. De manera recíproca, las representaciones externas, como son los enunciados en el lenguaje natural, las fórmulas algebraicas, las gráficas, las figuras geométricas, entre otras muchas, son el medio por el cual los individuos exteriorizan sus imágenes y representaciones mentales haciéndolas accesibles a los demás.

Las representaciones externas juegan, desde este punto de vista, una doble función:

(a) actúan como estímulo para los sentidos en los procesos de construcción de nuevas estructuras mentales,
(b) permiten la expresión de conceptos e ideas a los sujetos que las utilizan.

Dependiendo del tipo de símbolos, gráficos o notaciones con los que un estudiante interactúe en el proceso de aprendizaje de un concepto matemático, dará lugar a unos tipos determinados de representaciones internas del mismo. De igual manera, las vías que un sujeto utilice para representar externamente un concepto sirven para mostrar, generalmente, cómo es la información que posee sobre tal concepto.

Nosotros nos centramos aquí en las representaciones externas de los conceptos y procedimientos matemáticos convencionales; nuestro interés viene fijado por la diversidad de modos de representación que abarcan un mismo concepto.

Dentro de las reprentaciones externas se suelen distinguir dos grandes familias: las representaciones digitales, discretas, de carácter alfanumérico, que se pueden simular mediante programas infórmaticos y cuya sintaxis viene descrita mediante una serie de reglas de procedimiento, y las representaciones analógicas, continuas, de tipo gráfico o figurativo, cuya sintaxis viene dada principalmente por reglas de composición y convenios de interpretación. En matemáticas estas dos familias se denominan, comúnmente, representaciones o sistemas de representación simbólicos y sistemas de representación gráficos, respectivamente. Estos planteamientos llevan a incluir las diferentes escrituras simbólicas, el lenguaje natural (enunciados), las figuras y gráficos, las tablas, cuadros y las notaciones algorítmicas que expresen un modo de operar como sistemas de representación en matemáticas (Rico, 1995).

3.2 Representaciones y construcción de conceptos

La hipótesis de que los tipos de representaciones externas de los conceptos matemáticos son elemento fundamental para su comprensión y, de ahí, para su enseñanza y aprendizaje ha concitado el interés de los especialistas en los últimos tiempos. Esta idea va unida al carácter positivo que se asigna al desarrollo de la capacidad de visualización en dichos procesos. Todo ello ha llevado a un incremento progresivo en el interés por el tratamiento y estudio de las diversas representaciones, incluidas las gráficas, superando el predominio anterior en el trabajo casi exclusivo con representaciones simbólicas.

Dos cambios importantes, desde una perspectiva didáctica, se han producido como consecuencia de estos planteamientos. El primero está ligado a los manuales y libros de texto para los alumnos cuya presentación ha pasado, en pocas generaciones, de estar limitada sólo a un texto escrito a incrementar, progresivamente, la presencia de una diversidad de esquemas, cuadros, figuras e ilustraciones, en general, como representaciones distintas para los conceptos tratados.

El segundo cambio se producido por el hecho de que muchos investigadores han dedicado trabajo y tiempo a precisar el concepto de "representación" (Kaput, Goldin, Duval, Glaeserfeld, Vergnaud) así como a estudiar el papel que juegan las representaciones gráficas en el razonamiento de los estudiantes. Una de las conclusiones a que se ha llegado es que el incremento en la capacidad de visualización que se produce en el trabajo con representaciones gráficas ayuda al estudiante en su proceso de comprensión de los conceptos matemáticos.

No obstante, se hace hincapié en que en necesario distinguir el objeto matemático de su representación. Es fundamental no confundir los objetos matemáticos (el número, las funciones, la recta) con sus representaciones (la escritura decimal o fraccionaria, la gráfica, el trazo lineal, etc.)

La conceptualización actual del conocimiento matemático, basada en la noción de estructura, sostiene que los conceptos y propiedades matemáticas se construyen a partir de relaciones entre objetos, fenómenos o conceptos previos. Estas relaciones llegan a convertirse en entidades abstractas y su expresión viene dada por enunciados y demostraciones que exigen de algún sistema de representación. El conjunto de símbolos, gráficos y reglas que permite representar una estructura matemática han de responder a su carácter sistémico, por lo que hablamos de sistemas de representación en vez de representación simplemente.

3.3 Pluralidad de sistemas de representación para un mismo concepto

Generalmente, los conceptos matemáticos vienen expresados mediante varios sistemas de representación específicos. Janvier y col. (1993) denominan representaciones sinónimas a las representaciones diferentes de un mismo objeto matemático. Cada uno de los modos distintos de representar un mismo concepto matemático proporciona una caracterización diferente de dicho concepto; no hay un único sistema capaz de agotar en su totalidad la complejidad de relaciones que cada concepto matemático encierra.

Como ejemplo, en la Figura 3, se muestran seis modos distintos de representar la misma idea: un medio.

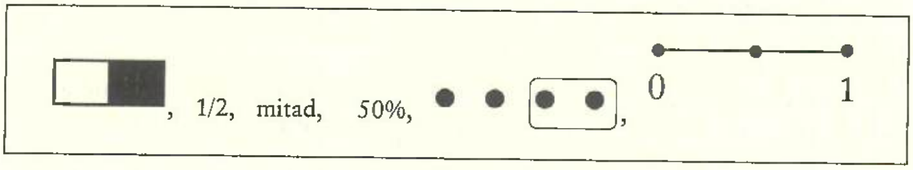


Figura 3

Cada uno de estos sistemas de representación destaca alguna propiedad importante del concepto representado y dificulta la comprensión de otras propiedades. Así, en la primera representación que aparece en la figura 3, sobre un rectángulo se destaca su partición en dos partes iguales; en la segunda destaca la idea de cociente asociada a la fracción; en la tercera expresión, el término "mitad" destaca la igualdad de las dos partes en que se ha dividido el todo; la cuarta representación hace patente la consideración de tomar el valor 100 como unidad; en la quinta expresión se destacan dos de cuatro unidades, mientras que la sexta representación señala un punto equidistante de 0 y 1 en la recta numérica. Dominar un concepto matemático consiste en conocer sus principales representaciones, el significado de cada una de ellas, así como operar con las reglas internas de cada sistema; también consiste en convertir o traducir unas representaciones en otras, detectando qué sistema es más ventajoso para trabajar con determinadas propiedades.

Los estudios de Janvier, Kaput, Goldin y Duval han centrado el estudio de las representaciones de los conceptos matemáticos escolares en diversos sistemas simbólicos y gráficos, así como en las relaciones entre ellos. Para los contenidos de matemáticas de educación secundaria encontramos los sistemas numéricos y los algebraicos entre los primeros, mientras que entre los segundos están los sistemas basados en la medida, la recta real, el plano cartesiano, etc. Es característico de todo concepto matemático relevante disponer de varios sistemas alternativos de representación, gráficos y simbólicos. Pensemos, por ejemplo, en el concepto de número real con cuatro sistemas de representación destacados: notación decimal, notación algorítimica, recta real y medida relativa de una pareja de segmentos. O en el conocido estudio sobre los sistemas de representación para una función real de variable real, que considera cuatro sistemas: enunciado verbal, tabla de valores, ley algebraica y gráfico de la función.

3.4 Manejo de diferentes sistemas de representación

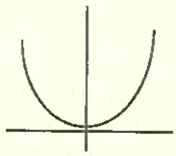
Aceptamos que las representaciones están fuertemente ligadas a los procesos de enseñanza y aprendizaje de los conceptos matemáticos, y que, a menudo, crean problemas de comprensión debidos a su uso simultáneo no controlado. Por esto sostenemos la conveniencia de que los profesionales de la enseñanza conozcan y consideren las dificultades que los estudiantes pueden encontrar en el manejo conjunto de varios sistemas de representación para un mismo concepto.

Los investigadores están de acuerdo en que hay que ayudar al estudiante a enriquecer el mundo de sus representaciones internas para que puedan relacionar, de forma eficaz, los significados correspondientes a los objetos mentales que elabora y construye. Como consecuencia podrá controlar mejor el manejo de las representaciones externas. Pero no parece que los estudiantes puedan inventar o interpretar por sí mismos las representaciones convencionales, sino que han de ser instruidos y educados en su uso y comprensión.

En muchos casos se producen fallos cuando esta instrucción se realiza y existen evidencias que muestran pocos aciertos y incluso desaciertos en esta actividad. Son varias las causas posibles para esta situación; entre ellas destaca el hecho de que las relaciones entre las representaciones pictóricas y las estructuras conceptuales, durante los procesos de enseñanza y aprendizaje, son generalmente más complejas de lo que a simple vista parece. La creencia de que las representaciones icónicas son más naturales puede inducir a su utilización acrítica para representar estructuras conceptualmente complejas y para las que los alumnos no estén intelectualmente preparados, lo que llevará a un fracaso en el aprendizaje pretendido.

Los procesos de traducción entre distintos sistemas de representación de un mismo concepto no son una cuestión trivial, como parecía entenderse hasta fechas recientes. Veamos un ejemplo. La noción de función y sus diversas representaciones ha sido ampliamente estudiada por distintos autores; para esta noción se consideran: descripciones verbales, tablas, gráficas y fórmulas como sistemas de representación posibles. En la Figura 4 se muestran varias representaciones correspondientes a la función cuadrática simple.

$y = x^2, \quad y(x) = x^2, \quad f(x) = x^2, \quad f: x \longrightarrow x^2,$



x	0	-1	1	-2	2	-3	3
y	0	1	1	4	4	9	9

Figura 4

Entre las expresiones distintas que admiten las funciones se pueden establecer todas las conversiones o traducciones posibles. La Figura 5 reproduce la tabla de doble entrada propuesta por Burkhard (Janvier, Girardon y Morand, 1993), en la que se recogen dichas conversiones expresadas mediante un verbo de acción. La lectura de dicha tabla hay que hacerla desde el encabezamiento de la fila al encabezamiento de la columna.

desde \ hasta	Descripciones verbales	Tablas	Gráficas	Fórmulas
Descripciones verbales	X	Medición	Destrezas de modelización o bosquejo descriptivo	Modelización analítica
Tablas	Lectura	X	Trazado	Ajuste
Gráficas	Interpretación	Lectura	X	Ajuste de curvas
Fórmulas	Reconocimiento de parámetros	Cómputo	Bosquejo	X

Figura 5

La tabla proporciona información sobre las distintas situaciones de traducción que pueden presentarse en el aprendizaje de las funciones y en el dominio de sus diferentes sistemas de representación. La carencia de trabajo sistemático en este campo conlleva una merma de calidad en tal aprendizaje.

4. SOBRE LA NOCIÓN DE MODELO

4.1 Análisis conceptual

Al igual que el término representación, el término "modelo" es polisémico. En el diccionario *Vocabulario Científico y Técnico* (Real Academia de Ciencias, 1990) aparecen 44 entradas diferentes para dicho término. Con carácter general, este diccionario establece: «Modelo: esquema conceptual suceptible de un tratamiento matemático, que interpreta o predice el comportamiento de un sistema en el que se desarrolla un fenómeno determinado. Réplica a pequeña escala de un determinado sistema.» En esta descripción están encerradas dos nociones complementarias del término modelo.

Bachelard (citado en Arca y Guidoni, 1989) da los siguientes significados al término modelo: Arquetipo al que nos referimos, al que consideramos ejemplar y al que tratamos de imitar. Prototipo de una clase donde se agrupan objetos, hechos, procesos o situaciones con características similares al prototipo. Estructura hipotética de la realidad, inaccesible a la evidencia directa. Esquematización construida con una multiplicidad de datos de la experiencia (de la realidad) que proporciona una abstracción satisfactoria de cómo funcionan las cosas. El modelo es una abstracción de una realidad fenomenológica y sirve de intermediario entre dicha realidad y un determinado campo teórico. El estudio e investigación de la realidad da lugar a la construcción del modelo.

Según Swetz (1989) el término modelo evoca la imagen de una entidad física. Un modelo, en el sentido usual de la palabra, es una réplica, frecuentemente a escala, de algún objeto. Pero no toda la modelización es de naturaleza física, así los modelos teóricos son colecciones de principios o reglas que describen exactamente el comportamiento de un fenómeno en la mente de un observador; se habla, pues, de modelo económico, modelo demográfico, etc. En este sentido, cuando la matemática es base de un modelo teórico se crea un modelo matemático.

De todo lo anterior destacamos que *un modelo es una esquematización abstracta de la realidad*, entendiendo que esta realidad puede pertenecer al mundo de los fenómenos o al de los conceptos. Esto hace de los modelos poderosos instrumentos conceptuales, que permiten a los sujetos alcanzar y representar múltiples relaciones y estructuras que se presentan en la realidad, las cuales y dada su complejidad, no son comprensibles y manejables en muchas ocasiones fuera del modelo.

Los modelos son de uso constante en todas las ramas de la ciencia. Por ejemplo, en química se usa un modelo hecho de pequeñas esferas conectadas para representar el átomo. En arquitectura se usan dibujos a escala como modelos para esquematizar edificios. En ciencias sociales se utilizan gráficas para representar procesos de cambio, demográficos, económicos u otros, que son objeto de estudio para dichas ciencias.

También en matemática elemental se utiliza el término modelo en un sentido genérico; así, se dice: *matematizar la realidad a través de un modelo* cuando determinados hechos y sus relaciones se expresan a través de términos y relaciones matemáticas abstractas. Por ejemplo, una acción de reunir «a» objetos con «a» objetos reiteradamente hasta «b» veces, da siempre el mismo resultado independientemente de la naturaleza de los objetos; esta acción se esquematiza mediante un modelo matemático: a•b, y se dice de esta expresión simbólica que modeliza la acción de reunir «b» colecciones de «a» elementos cada una.

De acuerdo con lo anterior *modelo matemático es una estructura matemática que aproxima o describe ciertas relaciones de un hecho o fenómeno.*

De otro lado, en los procesos de enseñanza y aprendizaje los contextos se usan a modo de ayudas o herramientas para la adquisición de aquella ideas o conceptos abstractos a los que se quiere llegar. Por ejemplo, cuando se introduce a los niños en la operación de producto a•b es posible la utilización de varios contextos, es decir, de varias esquematizaciones de la realidad que ejemplifican o representan la idea de producto. Éste es el caso del contexto cardinal, la representación cartesiana, u otros. Un contexto cardinal consiste en tomar tantos grupos de objetos como indique uno de los factores «a»; todos los grupos han de tener tantos elementos como indique el otro factor «b»; el recuento de la reunión de todos los elementos es el resultado del producto a•b. La representación cartesiana consiste en tomar un diagrama o tabla de doble entrada y trazar tantas divisiones en uno de los ejes del diagrama como indique el factor «a» y en el otro eje tantas divisiones como indique el factor «b»; el recuento de los puntos de intersección de las líneas trazadas por las divisiones es el resultado del producto a•b.

En tanto que ejemplifican el concepto matemático de producto, puede decirse también que un contexto cardinal concreto proporciona un modelo manipulativo para el producto a•b, o que la representación cartesiana facilita un modelo gráfico del mismo producto.

Como vemos *la noción de modelo es relativa*: el concepto es un modelo abstracto para los fenómenos y éstos, a su vez, ofrecen modelos concretos para el concepto. En el primer caso se trata del esquema conceptual, mientras que en el segundo de una réplica o maqueta.

4.2 Clases de modelos

Como hemos visto, la noción de modelo es relativa, admite la consideración de tipos muy distintos y de diversas clasificaciones. Fischbein (1987) considera tres distinciones o dicotomías para clasificar modelos. La primera dicotomía distingue entre *Modelos Intuitivos y Modelos Abstractos.* Los modelos intuitivos son de tipo sensorial, pueden ser percibidos, representados o manipulados, tal como la maqueta de un edificio o polígonos troquelados para construir poliedros; las relaciones matemáticas, fórmulas o funciones, son modelos abstractos de ciertas realidades concretas. Un modelo intuitivo no es necesariamente reflejo directo de una cierta realidad; a veces está basado en una interpretación abstracta de esta realidad. Los modelos intuitivos son sustitutos válidos y aceptables que permiten trabajar nociones intuitivamente difíciles.

Otra dicotomía distingue entre: *Modelos Explícitos y Modelos Implícitos.* En ocasiones los modelos se elaboran para una situación concreta, con el propósito de llegar más fácilmente a una solución; en otros casos, los modelos se producen automáticamente y se usan tácitamente en conexión con una cierta realidad.

La tercera dicotomía distingue entre: *Modelos Analógicos y Modelos Paradigmáticos.* En el primer caso el modelo y su original pertenecen a dos sistemas conceptuales distintos, aunque existen semejanzas sistemáticas entre ellos que permiten asumir la existencia de otras semejanzas. En el caso de los modelos paradigmáticos el original consiste en una cierta clase de entidades mientras que el modelo viene dado por un ejemplar o una subclase de la categoría considerada.

Estos tipos de modelos ofrecen una versión simplificada de una serie de hechos o ideas originales, lo cual permite un mejor y más completo control de un conjunto de datos y relaciones entre ellos. Como vemos, la noción de modelo es una noción compleja que tiene importancia en el proceso de construcción de conceptos matemáticos.

Gagatsis y Patronis (1990) consideran que los modelos usados con más frecuencia en educación matemática se pueden dividir en dos grupos, que persiguen la misma finalidad: mejorar la enseñanza y el aprendizaje de la materia. Pero existe entre estos dos grupos una diferencia importante por lo que se refiere a su naturaleza y uso. Los modelos del primer grupo se caracterizan, generalmente, como modelos de aprendizaje de procesos; se usan exclusivamente por investigadores y educadores en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Por el contrario, los modelos del segundo grupo reflejan el proceso intuitivo implícito en el desarrollo del pensamiento. En este segundo grupo distinguen tres tipos: *Modelos concretos,* que representan una idea matemática mediante un objeto tridimensional; *Modelos pictóricos,* que representan ideas matemáticas mediante diagramas o ilustraciones y *Modelos simbólicos,* que representan estructuras matemáticas por medio de un sistema de símbolos y reglas específicos, comúnmente aceptados, que comprenden conceptos, operaciones y relaciones. Estos dos últimos tipos de modelos son los que nosotros hemos denominado representaciones.

5. RELACIONES ENTRE REPRESENTACIONES Y MODELOS

La relación entre modelos y representaciones es, como venimos considerando, muy estrecha. Las representaciones constituyen los diversos sistemas para expresar un determinado concepto matemático; cuando queremos expresar un concepto matemático lo hacemos por medio de una representación. Las representaciones son notaciones, reglas y convenios, que expresan determinados aspectos y propiedades de un concepto; ninguno de los sistemas de representación de un concepto agota por sí solo a dicho concepto.

Hay esquemas o maquetas procedentes del mundo físico o de otras disciplinas que, en ocasiones, pueden ejemplificar a un determinado concepto matemático. También se les llama modelos, pero el modelo no se identifica con el concepto, sólo lo ejemplifica.

Al utilizar el término *representación* hemos elegido un sistema estructurado de signos que utilizamos como objetos matemáticos. Al utilizar el término *modelo* queremos indicar que se trata de un esquema procedente de un campo ajeno a las matemáticas, que sirve para pensar sobre las relaciones abstractas de ese otro campo conceptual en términos de nociones y propiedades matemáticas. A veces la distinción puede ser sutil, ya que utilizamos signos matemáticos para hacer modelizaciones matemáticas de algún otro tipo de fenómenos; esto es lo que ocurre cuando empleamos la notaciones de la derivación para modelizar fenómenos de la física.

Las representaciones siempre ocurren en el interior de las propias matemáticas, aun cuando los símbolos o gráficos elegidos procedan de otros campos. Las modelizaciones ponen en conexión el campo de las matemáticas con otros campos del conocimiento o con un campo de fenómenos que no se consideran matemáticos; en este caso, *las matemáticas modelizan los fenómenos*, pero a su vez, *los fenómenos ejemplifican u ofrecen modelos para un concepto matemático.*

Representaciones y modelos son importantes en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas ya que, las primeras, ofrecen signos o figuras que actúan como expresiones del concepto sobre los que manipular propiedades u operaciones matemáticas y, los segundos, esquematizan el uso de las matemáticas para interpretar y predecir fenómenos del mundo físico, fenómenos que, a su vez, ejemplifican los conceptos matemáticos.

Cada concepto o estructura conceptual dispone de unos sistemas de representación prioritarios que conviene conocer y cuyas relaciones de conversión entre sistemas hay que comprender y manejar. Este conocimiento proporciona el dominio formal de cada estructura conceptual.

También cada estructura conceptual modeliza familias de fenómenos, que les sirven de ejemplos. El uso de las estructuras matemáticas permite un control y previsión de los fenómenos modelizados. Conocer los principales usos de cada estructura matemática como sistema modelizador proporciona el dominio técnico y aplicado del conocimiento matemático, por el cual este conocimiento muestra su utilidad y carácter práctico.

Modelos y representaciones forman parte destacada del conocimiento didáctico del contenido matemático y han de ser útiles para organizar la información relevante de cada tema.

5.1 Utilidad e interés didáctico de representaciones y modelos

La representaciones y los modelos sirven para comunicar ideas matemáticas e intervienen en la actividad de construcción de nuevos conceptos. La historia proporciona ejemplos de cómo algunos avances en matemáticas han surgido por la utilización de un modelo pictórico, por la creación de representaciones icónicas potentes o ingeniosas que, en su inicio, funcionaron como modelos exteriorizados de ideas o estructuras que ya eran conocidas. Más tarde, estas representaciones proporcionaron nuevas herramientas que generaron nuevas ideas. Consideremos, como ejemplo, la idea de Descartes de aritmetizar el plano mediante la introducción de coordenadas y representar en forma de curva plana las ecuaciones algebraicas de dos incógnitas; esta idea contribuyó al desarrollo de la matemática superior a partir del siglo XVII. Todo ello permite valorar la importancia que tiene desarrollar y emplear códigos y convenios para el razonamiento matemático.

5.2 La matemática ofrece modelos para situaciones reales

Al proceso mediante el cual se construye y desarrolla un modelo matemático se le conoce como *modelización matemática*. Modelizar una situación de la vida real significa matematizarla. Autores como de Lange (1987) y Swetz (1991) consideran cinco pasos en todo proceso de modelización matemática:

1. Identificar un problema real, organizar la información, estructurarla y obtener diversos patrones o regularidades entre sus datos, a la vez que se identifican relaciones y otros aspectos matemáticos.
2. Interpretar el problema matemáticamente; el modelo matemático más formal y abstracto se irá desarrollando por aproximaciones a la situación real, normalmente por medio de gráficas, ecuaciones, y tablas de valores.
3. Emplear teorías y herramientas matemáticas para abordar y obtener la solución del problema; este modelo es entonces aplicado a la situación problemática real para describirla y predecir nuevos fenómenos.
4. Evaluar e interpretar la solución del problema; el modelador examina y evalúa el modelo a la luz de la situación real original.
5. Refinar la solución técnica para obtener mejor respuesta en los problemas que quedan bajo la consideración del modelo.

Queda así reflejado que la modelización matemática es, fundamentalmente, una forma de resolución de problemas de la vida real; pero no es una forma cualquiera, sino que conlleva la consideración del problema como un todo. Para ello no sólo tiene en cuenta la solución del mismo sino que exige la utilización de una gran número de habilidades matemáticas; no llega sólo a una respuesta específica sino a un rango de respuestas que describen la conducta del fenómeno considerado y da al resolutor sentido de participación y control en los procesos de solución. Esto hace que la modelización matemática sea un poderoso instrumento de aprendizaje significativo, a tener en cuenta para trabajar en el aula.

Los autores mencionados señalan tres contextos de aula en los que se puede realizar la modelización. El primero se refiere a resolver problemas en los cuales las operaciones matemáticas surgen como generalización de acciones reales. En el segundo caso, el estudiante toma un problema de la vida real, lo organiza, estructura, a continuación determina la matemática relevante necesaria y, finalmente, resuelve el problema; en otras palabras, el estudiante aplica a una situación real conceptos matemáticos de los que disponía previamente. En el tercer contexto, el punto de partida es un problema de la vida real para el que se introducen y desarrollan nuevos conceptos matemáticos.

5.3 Modelos de conceptos matemáticos

No sólo los hechos reales pueden ser modelizados matemáticamente, sino que, a su vez, las ideas y conceptos matemáticos pueden ser ejemplificadas a través de modelos. Éste es el caso de los materiales didácticos, que permiten una presentación sobre soporte físico de determinados conceptos. Así ocurre, como se ha mencionado, con las regletas de Cuisenaire que ofrecen un modelo parcial para el sistema decimal de numeración, o con el geoplano que ofrece un modelo para el estudio de algunas propiedades geométricas de las figuras planas. Estos modelos responden a la caracterización dada por Fischbein (1987)

> «Un sistema B representa un modelo del sistema A si, sobre la base de cierto isomorfismo, una descripción o una solución producida en términos de A puede reflejarse consistentemente en términos de B y viceversa».

Según esta descripción el modelo ofrece al usuario, generalmente resolutor de un problema, un esquema que sustituye al concepto original y que, por sus cualidades, está mejor adaptado a la naturaleza del pensamiento humano que el original; esto facilita al resolutor su tarea, de ahí la ventaja del uso de estos modelos, a los que denomina modelos heurísticos.

La utilidad general de un modelo heurístico es doble: por una parte, facilita la interpretación de propiedades o relaciones matemáticas y, por otra, ayuda a resolver problemas o cuestiones matemáticas dotando a sus enunciados de una concreción física. Esto hace que el uso de modelos deba potenciarse en la enseñanza, pues se trata de una herramienta esencialmente heurística. En este caso, el problema a resolver, se traslada a los términos específicos del modelo y a través de éste se debe encontrar la solución usando sólo sus propias reglas y elementos.

Un modelo es didácticamente útil si es, por sí mismo, una fuente de problemas y de soluciones, teniendo una correspondencia significativa con el original. Los buenos modelos heurísticos han de ser generativos, internamente consistentes y bien estructurados, deberán codificar los datos del original (sus propiedades, procesos y relaciones) en los términos que le son específicos e intuitivamente aceptables. Los problemas se resuelven en términos del modelo y se reinterpretan en términos del original.

6. SIMBOLIZACIÓN

En los apartados anteriores hemos fijado la noción de símbolo como uno de los modos de representación de conceptos y procedimientos matemáticos; no es el único significado que puede tomar este término ya que hay autores que lo adoptan y utilizan en un sentido más amplio. Así, Newell (1990) define símbolo como sinónimo de representativo, cualquier cosa que representa desempeña una función simbólica. Símbolo es un ente que se toma como sustituto de otro, al cual se le llama referente. Estos entes pueden tomar una gran variedad de formas, desde objetos concretos a marcas escritas en el papel y pueden representar desde conceptos simples a otros más complejos (Fernández y Rico, 1992). No obstante, mantenemos el sentido restrictivo adoptado en el apartado 3 y con el que hacemos referencia a los símbolo matemáticos.

Queremos mencionar aquí la capacidad de simbolización, que aparece en los estudios sobre formación, evolución y aprendizaje de conceptos. La capacidad de simbolización no queda reducida a las matemáticas. Piaget (1977) sostiene que el juego simbólico aparece al mismo tiempo que el lenguaje, pero independientemente de éste, y desempeña un papel considerable en el pensamiento de los niños y niñas como fuente de representaciones individuales y de esquematización representativa. Una de las características humanas por excelencia es la capacidad destacada de simbolización, que comienza con la palabra y da lugar a una simbolización general de todos los modos de relación humana con las cosas. El hombre hace uso inteligente de los símbolos, los utiliza en lugar de objetos, preocupándose de que las manipulaciones de los símbolos puedan trasladarse en todo momento a manipulaciones sobre los objetos. Los símbolos que han sido conectados con ideas pueden utilizarse para pensar sobre los conceptos que representan. Uno de los hechos más potentes de la matemática es la facilidad con que pueden ser manipuladas ideas complejas a través de símbolos.

En sentido amplio, un sistema de símbolos matemáticos constituye un modo específico de representación, un lenguaje de la materia (Skemp, 1980), que satisface las siguientes funciones:

Facilitar la comunicación. Dado que los conceptos son objetos puramente mentales y no hay forma de observar directamente el contenido de la mente es necesario un medio visible que permita el acceso a los productos de la mente. El símbolo es un medio visible que está conectado a una idea, que es su significado.

Registrar el conocimiento. Entre las características de las ideas están el ser invisibles, inaudibles y perecederas; esto hace necesario un registro de las mismas que asegure la comunicación.

Formación de clasificaciones múltiples correctas. Un mismo objeto se puede clasificar de múltiples formas. Por la asignación de un símbolo a la clasificación somos capaces de concentrar nuestra atención sobre propiedades diferentes del mismo objeto. Cuantos más símbolos se puedan ligar a un objeto mayor será el número de clasificaciones en que pueda intervenir el mismo.

Hacer posible la actividad reflexiva. Esta actividad permite a las personas ser conscientes de sus propios conceptos y esquemas, percibir sus relaciones y estructuras y llegar a manipularlas de diversas maneras.

Ayuda para mostrar las estructuras. Por la reflexión los individuos son conscientes de sus ideas y la relación que existe entre ellas. La selección correcta de símbolos puede ser de gran ayuda para evocar los conceptos correctos, o un obstáculo si no se eligen adecuadamente.

Automatizar manipulaciones rutinarias. El progreso en matemáticas exige que los procesos elementales se hagan automáticos, liberando así la atención del individuo que podrá centrarla en nuevas ideas. Esto se lleva a cabo separando el concepto del símbolo y llegando a manipular éste de acuerdo con hábitos adecuadamente formados.

Actividad mental creativa. El uso de símbolos asociados a un concepto posibilita el control voluntario, la comunicación y el registro de conocimiento.

En términos generales podemos afirmar que los símbolos, en particular, los símbolos matemáticos, ayudan a generalizar ideas, a aplicar dichas ideas a diversas situaciones, y a facilitar la transferencia del aprendizaje. Sin embargo, hay que ser cautos ya que este proceso no se realiza de manera automática; a menudo los estudiantes generan respuestas manejando símbolos sobre el papel de acuerdo con reglas memorizadas. Raramente se trata de una actividad reflexiva, incluso cuando realizan bien la tarea propuesta y han dado lugar a habilidades específicas; un análisis más a fondo puede mostrar que son habilidades aplicadas de forma rígida y están asociadas sólo a tareas concretas. Se ha especulado recientemente sobre la hipótesis de que muchas de las dificultades en matemáticas proceden de un énfasis prematuro en el simbolismo y las reglas, sin tener en cuenta la comprensión del significado matemático del referente.

En la instrucción para el desarrollo de competencias con símbolos es fundamental que, cuando se introduzcan a los estudiantes nuevos símbolos matemáticos, se realce el establecimiento de conexiones entre el símbolo y el significado asociado del referente.

7. ALGUNOS EJEMPLOS DE REPRESENTACIONES Y MODELOS

Todos los tópicos que configuran el currículo de matemáticas de la Educación Secundaria Obligatoria necesitan de algún sistema de representación, en unos casos de tipo gráfico en otros de tipo simbólico, y de ambos tipos en la mayor parte de los casos. Para todos los conceptos resulta conveniente trabajar utilizando los distintos sistemas de representación y modelos que dichos tópicos poseen, ya que la comprensión de los conceptos mejora y los alumnos, a la vez, perfeccionan su capacidad de visualización con las representaciones y modelos gráficos. En el trabajo con representaciones habrá que tener en cuenta que ver no equivale a visualizar y que una mirada no produce necesariamente entendimiento. Habrá que dibujar figuras simples para representar problemas matemáticos, interpretar aquellas representaciones que ilustran situaciones dadas, de forma comprensiva y usar de manera adecuada diagramas y modelos para resolver problemas planteados, todas estas acciones son destrezas eminentemente visuales.

A continuación presentamos algunos ejemplos de representaciones y modelos así como de su utilización en relación con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Hemos procurado ejemplificar distintos conceptos que configuran el currículo de matemáticas para educación secundaria.

7.1 Números figurados

La conceptualización actual de los números se basa en la noción de sistema, en el sistema intervienen los conceptos así como las estructuras numéricas. Una estructura numérica es un conjunto de entes abstractos expresados simbólicamente al que se ha dotado de unas operaciones o modos de componer números y unas relaciones mediante las que se comparan dichos entes; la consideración conjunta de los entes, sus operaciones y sus relaciones es lo que caracteriza una estructura numérica (Feferman, 1989). De las ideas expuestas se deriva la necesidad de distiguir entre los conceptos y estructuras numéricas y los sistemas de representación mediante los que se expresan. Esta diferencia no se considera cuando se identifican los números naturales con los numerales que se obtienen utilizando las reglas del sistema decimal de numeración, ignorando que se trata sólo de una forma más de representar números, que en este caso usa las combinaciones lineales de las sucesivas potencias de 10. Si se considera el Teorema Fundamental de la Aritmética se pueden expresar los números como producto de factores primos, lo que da lugar a una expresión distinta de los mismos lo que, a su vez, supone un modo diferente de trabajar y de representar propiedades.

Cada una de las formas de representación de los números pone énfasis en algunas de sus propiedades y dificulta la expresión de otras. El carácter dinámico del sistema de los números naturales queda oculto en el uso de la representación decimal usual; dicho carácter dinámico considera que los números se determinan por sus relaciones mútuas. Por ejemplo, saber lo que significa 15 no sólo es conocer que se trata de una 1 decena y 5 unidades, sino que también es: 3 veces 5, 5 veces 3, siguiente de 14, anterior a 16, la suma de los números consecutivos 7 y 8, la suma de los tres números consecutivos 4, 5 y 6, la suma de los números consecutivos 1, 2, 3, 4 y 5, el cuadrado de 4 menos 1, suma de dos números por su diferencia: (4+1).(4-1), etc. Desde esta perspectiva cada número es un nudo en el que se entrelazan una multiplicidad de relaciones, es un elemento de una red compleja, fuertemente conectada, cuyo dominio determina la comprensión real que cada sujeto alcanza del sistema de los números naturales (Rico, 1995).

Estas consideraciones ponen de manifiesto que, sobre la base del sistema decimal, hay otros sistemas de representación para los números naturales, uno de ellos es el análisis aritmético de los números, que considera cada número como resultado de operaciones con otros números. Una representación gráfica para los números la proporcionan las configuraciones puntuales o números figurados, cuyo origen se remontan a la escuela pitagórica. La idea básica de este sistema de representación es considerar cada número como un agregado de puntos distribuidos según una figura geométrica plana o espacial.

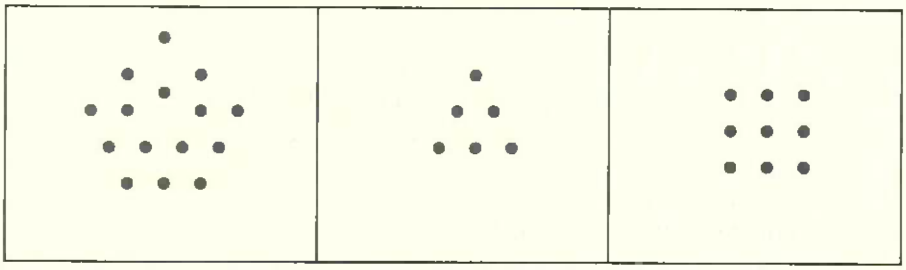


Figura 6

Mediante este sistema de representación se consiguen dos informaciones importantes sobre el número representado. Se visualiza al menos un análisis aritmético del número: un número triangular es la suma de números consecutivos empezando desde 1, un número cuadrado es la suma de números impares consecutivos empezando desde 1. Esta información visual permite conocer propiedades del número en cuestión y relacionarlo con otros. En segundo lugar, distintos números comparten un mismo tipo de configuración puntual. El análisis aritmético que expresa la configuración correspondiente se convierte en una propiedad de todos estos números que puede generalizarse. De esta forma, el sistema de representación mediante configuración puntual es un instrumento para establecer propiedades comunes a varios números y descubrir nuevas relaciones entre ellos.

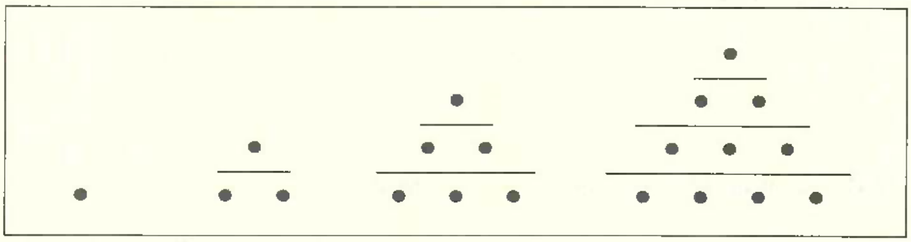


Figura 7

Tomando como base estas reflexiones proponemos actividades para el aula en las que se representen sucesiones de números en tres sistemas simbólicos distintos: patrones puntuales, secuencia usual y desarrollo aritmético (Figura 8) como situaciones previas a la tarea de hallar el término general de una sucesión.

representación:	• • •	• • • • •	• • • • • • •
secuencia numérica:	3	5	7
desarrollo aritmético:	2+1	3+2	4+3

Figura 8

Con tareas de este tipo se trabaja en los procedimientos siguientes:

traducción de uno a otro de los sistemas de representación,
continuación de la secuencia,
extrapolación de términos de la secuencia,
expresión del término general,
obtención de términos particulares a partir del término general.

A partir de la Figura 9 se presentan varios ejemplos de tareas:

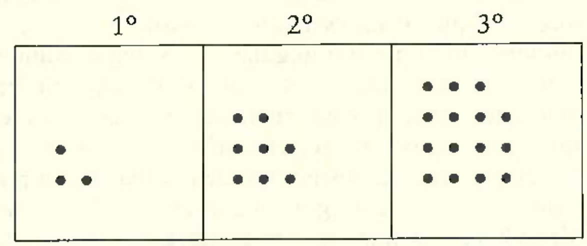


Figura 9

Dibuja el término siguiente.
Dibuja el término 7°
Indica cómo es el término de lugar n.
Escribe debajo de cada figura el número que representa.
Debajo de cada número escribe su desarrollo.

7.2 Representación de razones trigonométricas

Las razónes trigonométricas de un ángulo α tienen una representación inmediata sobre los lados del mismo. Trazando una perpendicular cualquiera desde uno de los lados del ángulo hasta el otro lado:

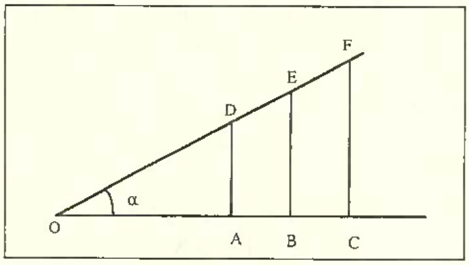


Figura 10

se definen las razones trigonométricas del mismo en función de los segmentos obtenidos, como sigue: el seno es el cociente entre segmento opuesto al ángulo, partido por el segmento contiguo y no perpendicular al anterior

$$\text{sen } \alpha = AD/OD = BE/OE = CF/OF$$

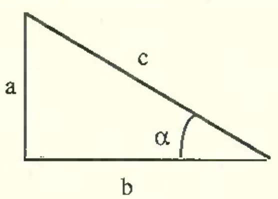
El coseno del ángulo α es el cociente entre el segmento contiguo y perpendicular al trazado y el contiguo no perpendicular al mismo

$$\cos \alpha = OA/OD = OB/OE = OC/OF$$

La tangente del ángulo es el cociente entre los segmentos opuesto y contiguo al mismo y, a su vez, perpendiculares, o sea, el cociente entre los valores de seno y coseno,

$$\text{tg } \alpha = AD/OA = BE/OB = CF/OC$$

El triángulo rectángulo ofrece un esquema adecuado para la representación de las razones trigonométricas, como se muestra en la figura 11:



sen α =a/c, cos α =b/c, tg α =a/b

Figura 11

Por su parte, la circunferencia goniométrica o de radio unidad es la representación más adecuada para el estudio de las razones trigonométricas de un ángulo. El ángulo ha de estar centrado en el origen de coordenadas uno de cuyos lados ha de coincidir con la parte positiva del eje de abcisas y orientado en sentido contrario al de las agujas del reloj. Cumpliéndose todos estos requisitos, las razones trigonométricas del ángulo están determinadas por las coordenadas del punto P, de corte entre la semirrecta que determina el lado "libre" y dicha circunferencia unidad.

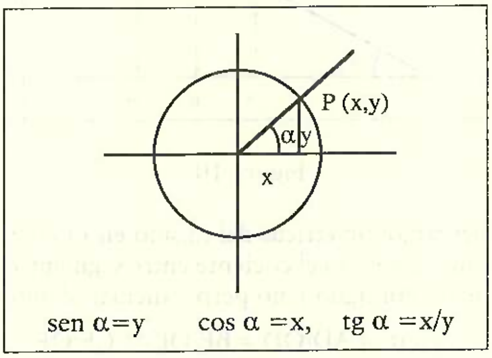


Figura 12

7.3 Modelos tridimensionales

Hay investigaciones (Ben-Chaim, 1989) que evidencian que, a menos que los estudiantes de los grados medios tengan experiencias con objetos concretos y semi-concretos, como son las construcciones con sólidos, la representación en dos dimensiones de objetos de tres dimensiones y sepan también leer tales representaciones, encontrarán dificultades para comprender las partes ocultas en una representación plana de los objetos de tres dimensiones, o para realizar de forma correcta actividades en las que intervengan isometrías o dibujos de sólidos. Conscientes de estas dificultades se aconseja incorporar experiencias con modelos de cuerpos geométricos, como es el caso de los poliedros, antes de pasar a la representación en el plano de los cuerpos.

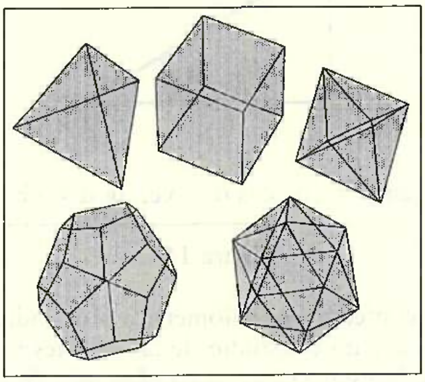


Figura 13

Así mismo se aconseja utilizar modelos de elementos geométricos para visualizar propiedades algebraicas. Por ejemplo, en la Figura 14 se observa un cubo compuesto por una serie de paralelepípedos cuyas aristas miden a y b, con este cubo se visualiza el desarrollo del cubo de la suma de un binomio $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

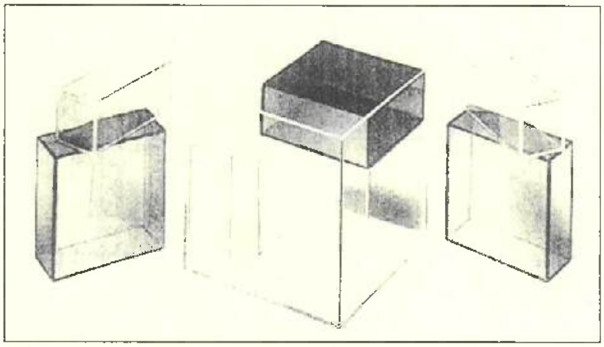


Figura 14

7.4 El área del rectángulo como modelo

El área del rectángulo, y como caso particular el área del cuadrado, presenta grandes posibilidades heurísticas cuando se toma como modelo, es decir, como esquema para presentar algunos conceptos. Exponemos ejemplos del uso que se puede hacer del rectángulo para modelizar distintos conceptos matemáticos. Estos conceptos corresponden a distintos niveles del sistema educativo.

La Figura 15 visualiza cada uno de los productos 2x3, 2x13 y 12x13, en un rectángulo distinto; en los dos últimos casos se hacen patentes las unidades de distinto orden.

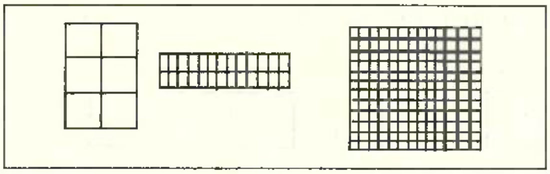


Figura 15

En la Figura 16 se representa el producto de dos números decimales: 0.7x1.2 = 0.94

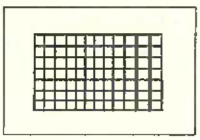


Figura 16

El área de un rectángulo dividida en partes iguales se utiliza para modelizar el concepto de fracción y la noción de fracciones equivalentes (Figura 17).

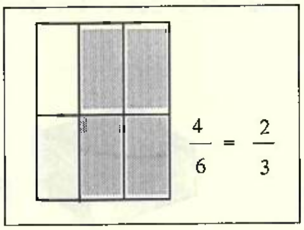


Figura 17

La operación de suma y producto de fracciones también pueden ser presentadas mediante este modelo. La figura 18 muestra como 2/3 + 1/2 (ignorando las líneas horizontales) es igual que 4/6 + 3/6 (tomando ahora en cuenta las líneas horizontales)

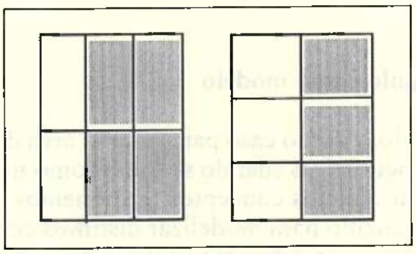


Figura 18

La noción de porcentaje es posible esquematizarla en una barra, como caso particular de rectángulo. Las ideas de 50 % y 120 % no resultarán tan abstractas:

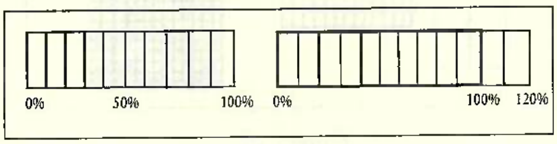


Figura 19

Con la barra se pueden resolver problemas como el siguiente: ¿Si 32 es el 80 % de un número ¿Cuál es ese número? Designando el total de la barra (100 %) por el número desconocido n, y haciendo coincidir 80 % con 32 se visualiza el problema:

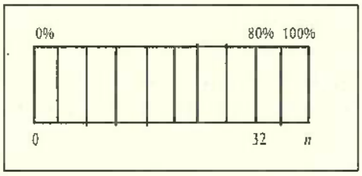


Figura 20

Es posible visualizar propiedades aritméticas expresadas simbólicamente como la propiedad distributiva del producto respecto de la suma o el desarrollo del cuadrado de un binomio

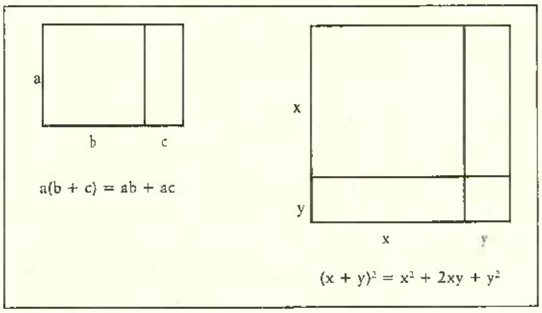


Figura 21

Otros problemas de nivel más elevado se pueden resolver también utilizando el área del rectángulo. Por ejemplo problemas de mezclas de dos cantidades que se combinan de alguna manera, para obtener otra cantidad que satisfaga unas condiciones dadas, como el siguiente: Se dispone de un frasco con una solución compuesta por 25 % de antiséptico y 75 % de agua. ¿Cuánta agua se ha de añadir para obtener una solución con el 15 % de antiséptico? En la Figura 22 se han representado dos rectángulos, uno corresponde a la situación inicial y el otro a la situación final

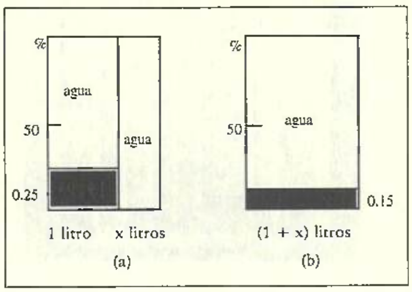


Figura 22

Llamando x a la cantidad de agua que hay que añadir, por lo que en el primer rectángulo se ha marcado 1 litro y x litros que hay que añadir. En la vertical de ambos rectángulos se ha marcado el pocentaje de antiséptico. En los dos casos la cantidad de antiséptico es la misma, lo que se puede expresar por la siguiente expresión algebraica:

$$0.25(1)=0.15(1+x)$$

cuya solución $x=2/3$ de litro es la solución del problema. (Bennet y Maier, 1996).

En los casos ejemplificados el esquema rectángulo se ha presentado como auxiliar del concepto en estudio; no cabe duda que en algunos de los ejemplos propuestos el rectángulo se puede considerar como una representación del mismo concepto.

7.5 Modelos para nociones de probabilidad

El experimento de lanzar una moneda al aire y comprobar el resultado obtenido, repetido un numero considerable de veces, puede ser modelizado realizando un registro de los resultados de la experiencia y una posterior representación, mediante una gráfica, de la distribución de los mismos.

Un experimento menos simple que el anterior es la utilización de una máquina de probabilidad o de Galton. Una adaptación de la misma aparece en la Figura 23:

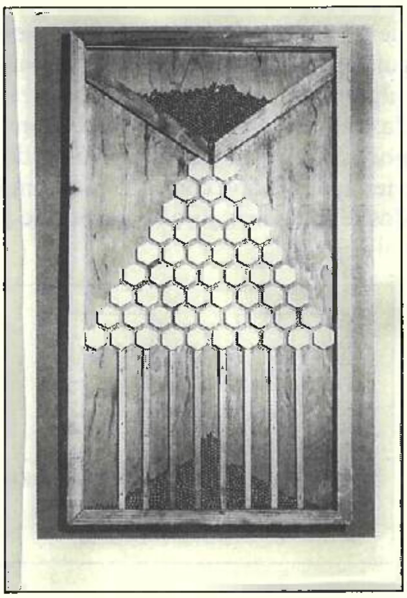


Figura 23

Se introducen por la parte superior de la máquina 256 bolas; en el dibujo se observa la posición de las bolas después de haber discurrido por los distintos canales. Su distribución en la posición final es una aproximación a la distribución binomial, y por su disposición proporciona una aproximación de la distribución normal.

Existe paralelismo entre la acción de dejar caer las 256 bolas en esta máquina de 8 niveles y tirar 8 monedas 256 veces. Estos dos experimentos son equivalentes en el siguiente sentido: el número de bolas esperado al final de cada uno de los nueve canales procede de los ocho anteriores; a cada uno de ellos le llega a través de los dos últimos canales que a su vez les llega de dos anteriores y así sucesivamente; esto se corresponde, respectivamente, con el número de posibilidades de obtener cara (0 caras, 1 cara, 2 caras y así sucesivamente) si se tiran 8 monedas 256 veces.

La siguiente actividad utiliza el proceso de la máquina de Galton y permite obtener una representación gráfica y una expresión simbólica de sus resultados.

El material necesario es un gráfico como el de la Figura 24 y una moneda (o un dado):

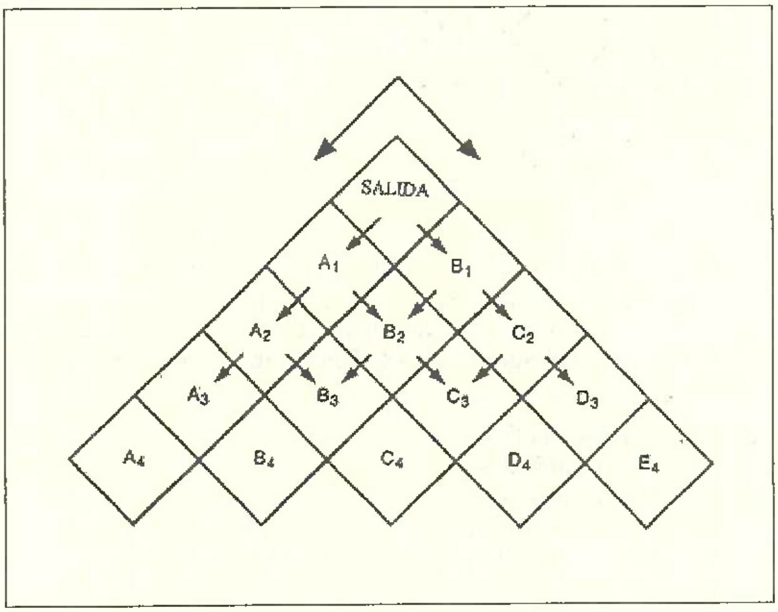


Figura 24

Se coloca una ficha en la casilla de salida y se arroja la moneda al aire, si sale cara (c) se mueve hacia abajo a la izquierda y si sale cruz (x) se mueve hacia abajo a la derecha (en el caso de tomar un dado se considera como opciones que el resultado obtenido sea un número par o impar). Hay que llegar a una de las últimas casillas A, B, C o D. El experimento se puede repetir un número elevado de casos. Si se registran los resultados del experimento se puede comprobar que las casillas B y C son las que más llegadas registran. La justificación a este hecho se puede encontrar haciendo un estudio de las distintas trayectorias que puede registrar la ficha dependiendo del resultado obtenido en la moneda:

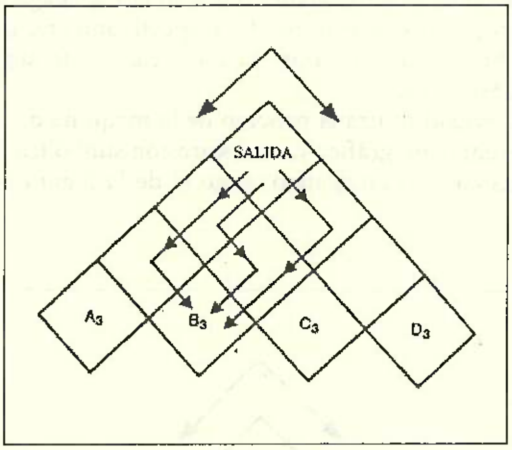


Figura 25

Hay una sola ruta que lleva a las casillas A y C (cccc y xxxx) y tres rutas que llevan a B y D (xxc, cxc, xcc para B; ccx, xcx, cxx para D).

Aumentando el número de filas, repitiendo el proceso de contar las trayectorias y anotando los resultados tenemos el siguiente patrón numérico:

para una fila	1	1				
para dos filas	1	2	1			
para tres filas	1	3	3	1		
para cuatro filas	1	4	6	4	1	
para cinco filas	1	5	10	10	5	1

Este patrón permite seguir escribiendo filas hasta la posición que se desee, hablar del triángulo de Pascal y relacionar con los coeficientes de un binomio así como con la relación con la distribución binomial.

CAPÍTULO V

Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria

Martín Socas

1. INTRODUCCIÓN

El aprendizaje de las matemáticas genera muchas dificultades a los alumnos y éstas son de naturalezas distintas. Algunas tienen su origen en el macrosistema educativo, pero en general, su procedencia se concreta en el microsistema educativo: alumno, materia, profesor e institución escolar. Las dificultades, por tanto, pueden abordarse desde varias perspectivas según pongamos énfasis en uno u otro elemento: desarrollo cognitivo de los alumnos, currículo de matemáticas y métodos de enseñanza.

Estas dificultades se conectan y refuerzan en redes complejas que se concretan en la práctica en forma de obstáculos y se manifiestan en los alumnos en forma de errores.

El error va a tener procedencias diferentes, pero, en todo caso, va a ser considerado como la presencia en el alumno de un esquema cognitivo inadecuado y no solamente como consecuencia de una falta específica de conocimiento o de un despiste.

Tomaremos como contenido matemático el lenguaje algebraico y a él nos remitiremos para ilustrar de manera concreta las cuestiones que se van planteando a lo largo del capítulo.

El propósito de este capítulo es hacer una reflexión general sobre este tema central en el aprendizaje de las matemáticas y poner en contacto al lector con los aspectos más relevantes en torno a las dificultades, obstáculos y errores que presentan los alumnos en la construcción del conocimiento matemático. Para ello, analizaremos el origen de estas dificultades, la noción de obstáculo y los diferentes errores que cometen los alumnos al trabajar con las matemáticas; también comentaremos las razones por las que se origina.

Al conocer de manera general o específica estas razones, podemos propiciar una enseñanza adecuada y facilitar un mejor aprendizaje de las matemáticas.

2. DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

Las dificultades y los errores en el aprendizaje de las matemáticas no se reducen a los menos capaces para trabajar con las matemáticas. En general, algunos alumnos, casi siempre, y algunas veces, casi todos, tienen dificultades y cometen errores en el aprendizaje de las matemáticas.

Estas dificultades que se dan en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas son de naturaleza diferente y se pueden abordar, obviamente, desde perspectivas distintas.

Aceptando que la naturaleza de las dificultades del aprendizaje de las matemáticas es de diversa índole y que se conectan y se refuerzan en redes complejas, éstas pueden ser agrupadas en cinco grandes categorías: las dos primeras asociadas a la propia disciplina (objetos matemáticos y procesos de pensamiento), la tercera ligada a los procesos de enseñanza de las matemáticas, la cuarta en conexión con los procesos cognitivos de los alumnos, y una quinta, relacionada con la falta de una actitud racional hacia las matemáticas.

De manera más explícita estas dificultades se pueden organizar, en líneas generales en los siguientes tópicos:

1. Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos de las matemáticas.
2. Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático.
3. Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las matemáticas.
4. Dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos.
5. Dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas.

Parece necesaria una reflexión más detallada de cada uno de estos tópicos para situarnos mejor en la naturaleza de estas dificultades.

2.1 Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos de las matemáticas

La comunicación de los objetos matemáticos, principalmente de forma escrita, se realiza a través de los signos matemáticos con la ayuda del lenguaje habitual que favorece la interpretación de estos signos.

Nos encontramos, de esta manera, con diferentes conflictos asociados a la comprensión y comunicación de los objetos matemáticos. Uno de estos conflictos nace de la ayuda que la lengua común presta a la interpretación de los signos matemáticos. El lenguaje habitual usado en la comunicación puede expresar su significado aunque se cometan abusos morfosintácticos, tales como roturas de reglas gramaticales o faltas de ortografía. El significado puede ser comunicado por alusión o asociación. Sin embargo, el lenguaje de las matemáticas es más preciso, está sometido a reglas exactas, y no comunica su significado, salvo por la interpretación exacta de sus signos. Este conflicto involucrado en el uso del lenguaje ordinario, dentro del contexto matemático, es un conflicto de precisión.

Otro problema del lenguaje en matemáticas es el originado por el vocabulario común. Palabras como, por ejemplo, raíz, potencia, producto, matriz, primo, factor, diferencial, integral, semejante, índice, función, etc., tienen significados diferentes en matemáticas y en el lenguaje habitual, de modo que el uso de tales palabras puede producir dificultades a causa de la confusión semántica implicada.

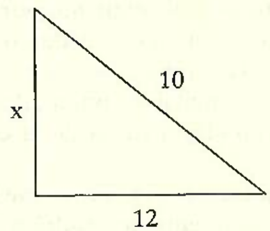
Hay también algunas palabras usadas en ciertos contextos que pueden ocasionar confusiones de conceptos y que, probablemente, podrían ser evitadas, particularmente, cuando se emplean connotaciones del lenguaje diario para atraer la atención sobre un signo. Se puede oscurecer así su significado más que destacar el concepto subyacente; por ejemplo, "añadir un cero" en la multiplicación por 10, "reducir una fracción" o "reducir una expresión algebraica" en la simplificación, que connota hacerla más pequeña, identificar una letra con un significado algebraico como una determinada "fruta" ($3x+2y$, igual a tres peras más dos manzanas)...

Igualmente en relación con los conceptos, tenemos palabras específicamente matemáticas, por ejemplo, hipotenusa, paralelogramo, coeficiente, isósceles, divisor, múltiplo, etc., que por ser poco familiares y frecuentemente mal entendidas, suelen presentar al alumno considerables dificultades, al encontrarse con ellas únicamente en sus lecciones de matemáticas.

Las palabras de igual significado en la lengua común y en matemáticas tienen su principal problema en saber que, en efecto, el significado es el mismo. A veces, los alumnos pueden pensar que una palabra de lenguaje habitual, toma un significado distinto y a veces "misterioso", cuando se emplea en matemáticas. Pertenecen estas dificultades a otro dominio del lenguaje matemático que es la Pragmática y se refiere al estudio del sentido que se da al discurso en función del contexto en el que se enuncia. Hay una infinidad de cuestionamientos por parte de los alumnos en función de que la palabra se encuentre en un contexto o en otro. Se presentan por la influencia que tiene el contexto en la palabra. De igual manera, las preguntas o cuestiones que planteamos a nuestros alumnos están también influenciadas por el contexto. Recordemos el ya clásico ejemplo: ¿Cuál es la edad del capitán?, que tiene su origen en una encuesta realizada en 1979 en el IREM de Grenoble (Instituto de Investigación de la Enseñanza de las Matemáticas) que se publicó en el Boletín de la Asociación de Profesores de Matemáticas de la enseñanza pública en 1980 y que dio origen a un libro del mismo título realizado por Stella Baruk en 1985.

Se trata del siguiente problema: Hay un barco que tiene tanto de largo y tanto de ancho, que transporta tantas ovejas y tantas toneladas de trigo...,y después se pregunta: ¿Cuál es la edad del capitán? Se propusieron problemas de este tipo y se vio que la mayor parte de los alumnos daban la edad del capitán.

Se podría pensar que se trata de un hecho excepcional. Sin embargo, cuando se está reunido con profesores de matemáticas para seleccionar y hacer ejercicios y se proponen ejemplos análogos en los que aparecen situaciones mal formuladas como: Encontrar x en:



o resolver $||x - 2| - 5| = -3$

todos podemos estar sometidos a dar respuestas parecidas, si estamos en una situación escolar.

Otros aspectos del lenguaje de las matemáticas que difieren de la lengua común, son los que hacen referencia al lenguaje de los signos, y que son fuente de confusión en muchos alumnos; por ejemplo, su sintaxis –reglas formales de las operaciones– puede algunas veces entenderse y desarrollarse más allá del dominio original de sus aplicaciones. Esto pertenece a lo que denominamos la naturaleza abstracta de los conceptos matemáticos. Pero esta naturaleza abstracta debe ser entendida como un proceso de abstracción caracterizado por diferentes etapas. Para situar mejor las dificultades y los errores que se originan en el desarrollo de los signos matemáticos, conviene analizar los diferentes estadios de desarrollo que se dan en los sistemas de representación cognitivos, tomando como ejemplo algunos objetos matemáticos. Así, en el proceso de aprender a usar correctamente los exponentes, podemos diferenciar tres etapas distintas.

Primeramente, el sistema nuevo de signos es caracterizado por el sistema antiguo, ya conocido de los alumnos, que es en este caso el conjunto de las operaciones de sumar, restar, multiplicar y dividir; de esta manera, se definen los elementos del sistema nuevo 3^4 ó a^4 como:

$$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \qquad \text{o} \qquad a^4 = a \times a \times a \times a$$

Es un estadio que se denomina *semiótico*, donde los alumnos aprenden signos nuevos que adquieren significado con los signos antiguos ya conocidos.

En un segundo estadio, el sistema nuevo se estructura según la organización del antiguo, y así, mediante procesos como:

$$\begin{array}{ccccc} 3^4 & \times & 3^3 = & ? = & 3^7 \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Uparrow \\ (3 \times 3 \times 3 \times 3) & \times & (3 \times 3 \times 3) & \Longrightarrow & \end{array}$$

llegamos al esquema general $a^4 \times a^3 = a^{4+3} = a^7$, que puede ser expresado simbólicamente como $a^m . a^n = a^{m+n}$.

Asimismo empleando los métodos de manipulación de fracciones aritméticas y algebraicas, se puede obtener, mediante el sistema antiguo, un esquema para la división:

$a^5 : a^3 = \dfrac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a} = a \cdot a = a^2$, que puede ser expresado simbólicamente como $a^m : a^n = a^{m-n}$ obteniendo así la ley de los exponentes.

Es este segundo estadio, el denominado estadio *estructural*, donde el sistema antiguo organiza la estructura del sistema nuevo. Comienzan a aparecer, en este estadio estructural, diferentes problemas que nos obligan en un primer momento a poner restricciones, por ejemplo, $m > n$, ya que a^0 ó a^{-2} no tienen explicación en el sistema antiguo; por el contrario, situaciones como $(2/3)^4 = (2/3) \times (2/3) \times (2/3) \times (2/3)$, sí tienen significado en el sistema antiguo.

Aparecen en este estadio estructural verdaderas dificultades cognitivas que al no ser explicadas por el sistema antiguo, se recurre a la observación de regularidades y comportamientos patrones, para dotarlos de significado, por ejemplo, en este caso:

$3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$
$3^2 = 3 \times 3 = 9$
$3^1 = 3$
$3^0 = 1$
$3^{-1} = 1/3$.

Hemos eliminado algunas restricciones, pero todavía quedan signos que no pueden ser dotados de significado, ni siquiera con la técnica de la regularidad y de los comportamientos patrones; en este momento estos signos actúan con significados propios, independientemente del sistema anterior. Es el estadio *autónomo* del sistema nuevo, en nuestro ejemplo:

$$e^{2/5} = \sqrt[5]{e^2} \quad \text{o} \quad e^{i\pi} = -1, \text{ etc.}$$

Es éste el proceso de generalización de las matemáticas y es una característica de la misma, como parte inherente del desarrollo de sus signos. Es, por tanto, el sistema nuevo una fuente de dificultades al encontrarnos con elementos que no pueden ser conocidos en términos del sistema de signos antiguo.

Hemos analizado con cierto detalle el caso de las potencias, pero este desarrollo descrito antes no es exclusivo del proceso de aprender el uso de exponentes. Encontramos situaciones similares en el desarrollo de los signos matemáticos si, a título de ejemplo, observamos las funciones trigonométricas.

Las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente, aparecen frecuentemente en su estadio *semiótico* relacionándose con triángulos, rectángulos y formuladas en términos de medida de los lados "adyacente", "opuesto" o "hipotenusa".

Posteriormente, en el estadio estructural, junto con las propiedades que pueden ser organizadas con el sistema antiguo, aparecen propiedades como la periodicidad o la naturaleza funcional, que nuevamente han de ser dotadas de significado por el principio de regularidad y los comportamientos patrones, para llegar a una etapa autónoma donde estos signos actúan con significado propio; observemos, a título de ejemplo, que en el cálculo diferencial, la función cos (x^2) es significativa, aunque el cuadrado de un ángulo no lo sea.

Vemos cómo el lenguaje de las matemáticas opera en dos niveles, el nivel semántico –los signos son dados con un significado claro y preciso–, y el nivel sintáctico –los signos pueden ser operados mediante reglas sin referencia directa a ningún significado–. Es decir, los objetos de las matemáticas (números, lenguaje algebraico, funciones, etc.) se presentan bajo un aparente dilema con estatus diferentes: el estatus operacional, de carácter dinámico, donde los objetos son vistos como un proceso, y el estatus conceptual, de carácter estático, donde los objetos son vistos como una entidad conceptual. Ambos estatus constituyen, obviamente, los dos aspectos integrantes del objeto de la matemática.

Son estos aspectos los que ponen de manifiesto la naturaleza abstracta y la complejidad de los conceptos matemáticos.

2.2 Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático

Las dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático se ponen de manifiesto en la naturaleza lógica de las matemáticas y en las rupturas que se dan necesariamente en relación con los modos de pensamiento matemático.

Siempre se ha considerado como una de las principales dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, el aspecto deductivo formal. El abandono de las demostraciones formales en algunos programas de matemáticas de la Secundaria se ha estimado como adecuado, pero esto no incluye el abandono sobre el pensamiento lógico; es decir, la capacidad para seguir un argumento lógico, siendo esta incapacidad una de las causas que genera mayor dificultad en el aprendizaje de esta ciencia. El abandonar ciertas demostraciones formales en beneficio de una aplicación más instrumental de las reglas matemáticas, no debe implicar de ninguna manera el abandono del pensamiento lógico, por ser éste una destreza de alto nivel que resulta necesaria para alcanzar determinados niveles de competencia matemática.

El fomentar esta capacidad para seguir un argumento lógico no se debe contraponer a los métodos intuitivos, a las conjeturas, a los ejemplos y contraejemplos, que también permiten obtener resultados y métodos correctos, sino que, más bien, esta capacidad se desarrolla con la práctica de estos métodos informales; sin embargo, sí estaría en contra de la intención ingenua de los métodos rutinarios, de las conjeturas aleatorias, etc.

Este enfoque lógico de las matemáticas debe conducir a resolver los problemas por medio de un pensamiento matemático inteligente, y, en este sentido, desarrolla una idea más amplia que la propia deducción formal. La deducción lógica no debe confundirse ni con la deducción formal ni con los procedimientos algorítmicos. El pensamiento lógico debe estar presente en todas las actividades matemáticas.

¿Qué ocurre con las matemáticas escolares? ¿Están organizadas y desarrolladas con estos principios lógicos? En general, la "lógica" de las matemáticas escolares depende muchas veces de la situación en la que se encuentre el alumno. Ya hemos mencionado la pragmática como un dominio del lenguaje, donde el sentido de la palabra está en función del contexto en que se enuncia; en un sentido más general, podemos hablar de la influencia de lo social sobre lo lógico. Generalmente, cuando planteamos cuestiones buscamos el interés matemático, el planteamiento de la ecuación, pero, a veces, el contexto escogido es socialmente absurdo.

El siguiente problema:

"Dos obreros instalan doce metros de tubería en nueve horas. Completa el cuadro:

Número de obreros	Número de metros de tubería instalados	Tiempo (horas)
2	12	9
?	24	9
6	12	?
1	?	18

Parece de lo más normal, esperamos que se aplique la proporcionalidad; esto se comprende bien. Sin embargo, profundizando, tampoco es razonable aplicarla en esta situación ya que sabemos bien que el trabajo en equipo no genera un trabajo proporcional al número de personas sino al ritmo de cada una de ellas. Podría ocurrir que alumnos con una actitud crítica no respondieran, como esperamos, a la última pregunta.

Parece que en el ámbito escolar generamos con las matemáticas una "lógica escolar" diferente de la "lógica social", y esta lógica escolar lleva al alumno a responder, no a la pregunta que realizamos en el problema sino a una meta-pregunta: ¿qué espera el profesorado que yo haga?

Por ello, a efectos de aminorar las dificultades de los alumnos en el aprendizaje de las matemáticas, parece necesario potenciar el pensamiento lógico de las matemáticas y conjugar esta lógica interna de la matemática con la "lógica social" en la que está inmerso el alumno.

Otras veces esta "lógica social" dificulta el verdadero sentido de los objetos matemáticos. Veamos algunos ejemplos. Los números decimales se presentan en la vida corriente como parejas de números enteros; así decimos: Víctor mide un metro ochenta y no se trata del número 1,80, sino de dos números enteros, 1 y 80, con dos unidades distintas, el metro y el centímetro. Este modelo del número decimal como pareja de números enteros es de naturaleza social y queda en la mente del alumno, y podemos encontrarnos con errores que se justifican vía esta "lógica social":

$$1{,}3 < 1{,}28 \text{ porque } 3 < 28, \text{ ó}$$
$$0{,}3 \times 0{,}3 = 0{,}9 \text{ porque } 0 \times 0 = 0 \text{ y } 3 \times 3 = 9, \text{ ó}$$

entre 1,3 y 1,4 no hay otro número porque no hay número entre 3 y 4.

Otro ejemplo lo podemos encontrar en el modelo social más utilizado para clasificar, la partición, es decir, en conjuntos de intersección vacía. De esta manera para el artesano que hace baldosas, una baldosa cuadrada no es rectangular. Nos encontramos con errores asociados a esta forma de clasificar.

Los modos de pensamiento matemático provocan rupturas que se convierten en dificultades en el proceso normal de construcción del conocimiento matemático. El saber matemático anterior produce modelos implícitos para resolver los problemas matemáticos. Muchas veces estos modelos son adecuados, pero otras, por el contrario, aparecen como dificultades para el saber matemático nuevo.

Estas dificultades, en general, no se pueden evitar ya que forman parte del proceso normal de construcción del conocimiento matemático, pero los profesores tienen que conocerlos y reflexionar sobre ellos para facilitar su explicitación por parte de los alumnos. Si se quedan implícitos, es muy difícil incorporar otro saber nuevo.

Veamos a título de ejemplo dos rupturas importantes que se dan en relación con los modos de pensamiento matemático: El modelo aditivo crea dificultades al modelo multiplicativo y lineal y éste, a su vez, crea dificultades a otros modelos.

Como hemos visto en el apartado anterior, en la escuela primaria, se introduce la multiplicación como una adición que se repite

$$\underbrace{a + \dots\dots\dots + a}_{\text{(b veces)}} = ba \qquad \text{(estadio semiótico)}$$

Esta adición que se repite no puede dar sentido a la multiplicación con otros números (enteros negativos o racionales). Constituye una fuente de dificultades ya que conduce únicamente a una ley externa:

$x \in Z$ y $n \in N$; $x + \ldots\overset{n}{} \ldots + x = n\,x$
$p/q \in Q$ y $n \in N$; $p/q + \ldots\overset{n}{} \ldots + p/q = n \cdot p/q$

pero $N \subset Z$ y $N \subset Q$, es decir que $n \in Z$ y $n \in Q$, será necesario dotar de significado a la multiplicación dentro de Z y Q y facilitar las identificaciones sucesivas entre los números.

Hemos de cambiar el punto de vista muchas veces a propósito del número, el número sirve para contar (conjunto N), para medir (conjuntos Q^+ y R^+) y para operar (Z y Q).

Cuando el modelo lineal queda implícito, éste constituye un conflicto para los otros modelos. Así, por ejemplo, a los modelos $a\,x + b$, x^2, $\sqrt{x}$ ó $1/x$, se le suelen aplicar las propiedades de linealidad:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2, \quad \sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b} \quad \text{y} \quad 1/(x+y) = 1/x + 1/y$$

donde este primer error adquiere más fuerza a causa de la analogía con

$$(a+b)\,(a-b) = a^2 - b^2.$$

A otras funciones también se les aplica las propiedades de linealidad

$$\text{sen } 3a = 3 \text{ sen } a \quad \text{ó} \quad 2^{n+m} = 2^n + 2^m.$$

En actividades de resolución de problemas con relación al comportamiento exponencial nos encontramos en situaciones análogas; por ejemplo, si pedimos a nuestros alumnos que tomen una hoja de papel y la doblen, una vez, dos veces, etc., y preguntamos: ¿si doblo n veces cuántos pedazos de papel tengo? Bastantes alumnos contestan "2n", es decir, recurren al modelo lineal. Con bastante reflexión determinan 2^n.

Vemos cómo los modelos implícitos que generan ciertos modos de pensamiento se convierten en dificultades para el proceso en el conocimiento matemático, dificultades que, por otro lado, no se pueden evitar. Los profesores deben conocer y reflexionar sobre estos obstáculos, con el fin de no facilitar en la enseñanza la formación de estas dificultades.

2.3 Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza

Las dificultades asociadas a los procesos de enseñanza tienen que ver con la institución escolar, con el currículo de matemáticas y con los métodos de enseñanza.

La institución escolar debe propiciar una organización escolar que tienda a reducir las dificultades del aprendizaje de las matemáticas dependiendo de los materiales curriculares, de los recursos y de los estilos de enseñanza. Esta organización afecta tanto a los elementos espacio-temporales como a los agrupamientos en clases homogéneas o heterogéneas, de acuerdo con sus habilidades en matemáticas.

La organización curricular en matemáticas puede originar diferentes dificultades en el aprendizaje de las mismas. Cuatro serían los elementos básicos a considerar como dificultades en el currículo de matemáticas: las habilidades necesarias para desarrollar capacidades matemáticas que definen la competencia de un alumno en matemáticas, la necesidad de contenidos anteriores, el nivel de abstracción requerido y la naturaleza lógica de las matemáticas escolares.

Por último, nos referimos a los métodos de enseñanza que deben estar ligados tanto a los elementos organizativos de la institución escolar, como a la organización curricular. Varios son los aspectos a considerar, por ejemplo, el lenguaje, que debe adaptarse a las capacidades y comprensión de los alumnos; la secuenciación de las unidades de aprendizaje que debe estar adaptada a la lógica interna de las matemáticas; el respeto a las individualidades que tiene que ver con los ritmos de trabajo en clase; los recursos y la representación adecuada.

2.4 Dificultades asociadas al desarrollo cognitivo de los alumnos

La posibilidad de tener información sobre la naturaleza de los procesos de aprendizaje y conocimiento del desarrollo intelectual, permite conocer el nivel de dificultades, realizaciones y respuestas a cuestiones esperadas de los alumnos. Conocer los estadios generales del desarrollo intelectual, representado cada uno de ellos por un modo característico de razonamiento y por unas tareas específicas de matemáticas que los alumnos son capaces de hacer, constituye una información valiosa para los profesores a la hora de diseñar el material de enseñanza. Nos encontramos, sin embargo, con diferentes teorías generales sobre el desarrollo cognitivo que por distintas razones no han tenido un efecto claro y directo en las aulas de matemáticas de Secundaria; también es verdad que muy pocas de estas teorías se han ocupado de manera específica de las Matemáticas.

Diferentes son los enfoques que podemos considerar: el enfoque jerárquico del aprendizaje, el enfoque evolutivo, el enfoque estructuralista, el enfoque constructivista y el enfoque del procesamiento de la información, entre otros muchos. Un texto de interés en el que se puede considerar algunos de estos enfoques es el libro de L.B. Resnick y W.W.Ford (1990): *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos.*

2.5 Dificultades asociadas a las actitudes afectivas y emocionales

Sabemos que a muchos estudiantes, incluyendo a algunos de los más capacitados, no les gustan las matemáticas. Muchos alumnos tienen sentimientos de tensión y miedo hacia ellas. Sin lugar a duda muchos son los aspectos que influyen en esta aversión. Por ejemplo, la naturaleza jerárquica del conocimiento matemático, la actitud de los profesores de matemáticas hacia sus alumnos, los estilos de enseñanza y las actitudes y creencias hacia las matemáticas que les son transmitidas.

Muchas de las actitudes negativas y emocionales hacia las matemáticas están asociadas a la ansiedad y el miedo. La ansiedad por acabar una tarea, el miedo al fracaso, a la equivocación, etc., generan bloqueos de origen afectivo que repercuten en la actividad matemática de los alumnos.

Buxton (1981), en su libro *Do you Panic about Maths?*, cita las principales creencias sobre la naturaleza de las matemáticas y que son transmitidas de padres a hijos:

Las matemáticas son:

1. fijas, inmutables, externas, intratables, irreales;
2. abstractas y no relacionadas con la realidad;
3. un misterio accesible a pocos;
4. una colección de reglas y hechos que deben ser recordados;
5. una ofensa al sentido común en algunas de las cosas que aseguran;
6. un área en la que se harán juicios, no sólo sobre el intelecto, sino sobre la valía personal;
7. sobre todo cálculo.

Esta perspectiva externa de las matemáticas las trata como la realización de una aventura arriesgada a la que uno se enfrenta con pocas herramientas. En esta situación es lógico que aparezcan la ansiedad y el miedo.

Los aspectos afectivos comienzan a ser objeto de las investigaciones en educación matemática. Una obra interesante es: *Affect and Mathematical Problem Solving*, de D.B. McLeod y V.M. Adams (1989).

3. OBSTÁCULOS EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

Presentadas en términos generales las dificultades que se dan en el proceso de enseñanza aprendizaje, analizamos el segundo aspecto que tiene que ver en la organización de los errores: los obstáculos.

El concepto de obstáculo fue introducido por primera vez por el filósofo francés Bachelard (1938) en el contexto de las ciencias experimentales y bajo la denominación de obstáculo epistemológico. El autor señala el sentido en que debe entenderse y dice:

«[...] Hay que plantearse el problema del conocimiento científico en términos de obstáculos. Y no se trata de considerar obstáculos externos, como la complejidad y la fugacidad de los fenómenos, ni tampoco de culpar la debilidad de los sentidos y de la mente humana, pues es, precisamente, en el mismo acto de conocer, íntimamente, cuando surgen, como una necesidad funcional, torpezas de entendimiento y confusiones. Es ahí donde mostraremos causas de estancamiento e incluso de regresión, y donde descubriremos causas de inercia que llamaremos obstáculos epistemológicos.»

Identifica varias clases de los mismos que surgen desde:

- la tendencia a confiar en engañosas experiencias intuitivas,
- la tendencia a generalizar; esto puede ocultar la particularidad de la situación,
- el lenguaje natural.

El traslado del concepto de obstáculo epistemológico al campo de la Didáctica de las Matemática es objeto de debate, ya que plantea dificultades que han sido descritas por autores como Brousseau (1983), Sierpinska (1985) y Artigue (1989), y aunque pensamos igual que Brousseau (1983), que, «la propia noción de obstáculo está constituyéndose y diversificándose: no es fácil decir generalidades pertinentes sobre este tema, es mucho mejor estudiar caso por caso». Una revisión y organización de este concepto y de sus posibles implicaciones en el análisis de errores, nos puede ayudar a tener una visión más amplia en el tema que nos ocupa.

Este autor considera que los obstáculos que se presentan en el sistema didáctico pueden ser:

De origen *ontogénico o psicogénico*, debidos a las características del desarrollo del niño.

De origen *didáctico*, resultado de una opción o de un proyecto del sistema educativo, esto es, de las elecciones didácticas que se hacen para establecer la situación de enseñanza.

De origen *epistemológico*, intrínsicamente relacionados con el propio concepto. Se les puede encontrar en la historia de los mismos conceptos. Esto no quiere decir que se deban reproducir en el medio escolar las condiciones históricas donde se les ha vencido.

Siguiendo con las obstrucciones en el aprendizaje del álgebra, interesa destacar lo que indica Tall (1989), en su trabajo *Different Cognitive Obstacles in a Technological Paradigm*. El no hace distinciones entre los obstáculos. Los llama simplemente obstáculos cognitivos, y distingue dos tipos:

(a) Obstáculos **basados en la secuencia de un tema**, en que afirma que la razón para creer en obstáculos surge fundamentalmente del hecho de que ciertos conceptos tienen un grado de complejidad, por lo que es preciso familiarizarse con ellos en un cierto orden. Por ejemplo, el caso del álgebra, en el que las destrezas operatorias son enseñadas con anterioridad a ideas conceptuales aparentemente más profundas.

(b) Obstáculos **basados sobre casos simples**, posiblemente causados por limitar al estudiante a casos simples por un período sustancial de tiempo, antes de pasar a casos más complejos.

Observamos que la idea de obstáculo parte de la misma fuente: el "obstáculo epistemológico" de Bachelard.

Tanto Bachelard como Brousseau caracterizan un obstáculo como: «aquel conocimiento que ha sido en general satisfactorio durante un tiempo para la resolución de ciertos problemas, y que por esta razón se fija en la mente de los estudiantes, pero que posteriormente este conocimiento resulta inadecuado y difícil de adaptarse cuando el alumno se enfrenta con nuevos problemas.»

Podemos precisar expresando que:

Un obstáculo es un conocimiento adquirido, no una falta de conocimiento. No se trata de una falta de conocimiento, sino de algo que se conoce positivamente, o sea, está constituyendo un conocimiento.

Tiene un dominio de eficacia. El alumno lo utiliza para producir respuestas adaptadas en un cierto contexto en el que el dominio de ese conocimiento es eficaz y adecuado.

Cuando se usa este conocimiento fuera de ese contexto genera respuestas inadecuadas, incluso incorrectas; el dominio resulta falso.

Es resistente, y resultará más resistente cuanto mejor adquirido esté o cuanto más haya demostrado su eficacia y su potencia en el anterior dominio de validez. Es indispensable identificarlo e incorporar su rechazo en el nuevo saber.

Después de haber notado su inexactitud, continúa manifestándolo esporádicamente.

De todo ello podemos obtener como primera reflexión que en el contexto del desarrollo del pensamiento matemático éste está lleno de obstáculos caracterizados como epistemológicos. Sin embargo éstos, no están especificados en términos de experiencia de enseñanzas regladas y organizadas en el sistema educativo; no obstante, aceptamos que tales organizaciones de las Matemáticas en el sistema escolar pueden originar obstáculos que podemos caracterizar como didácticos. Ahora bien, la adquisición por parte del alumno de nuevos esquemas conceptuales está salpicado de obstáculos que podemos considerar cognitivos.

Estas consideraciones teóricas no están exentas de discusión, pero nos ayudarán a organizar e interpretar mejor los errores que manifiestan nuestros alumnos así como a organizar las lecciones de Matemáticas, y eso es de lo que se trata.

Por ejemplo, para bastantes alumnos de secundaria las representaciones gráficas de las funciones parecen haber perdido su valor de representación de la función y son tomadas como si fueran a la vez significante y significado. Así, la función no sería para ellos una relación entre dos magnitudes x e y; una ordenada positiva f (x) ya no sería la longitud de un segmento que representara una magnitud. El concepto de función se reduce, en cierta manera, a la imagen visual que su curva genera; la expresión analítica $y = f(x)$ sirve únicamente para designar esta curva y para identificarla entre otras formas distintas; de esta manera, la coordenada $(x, f(x))$ sería el nombre dado a tal o cual punto particular de la curva, esto genera errores; entre otros, el suponer que las gráficas son siempre continuas debido a que las situaciones manejadas por los estudiantes siempre tienen esta propiedad.

Aquí cabe preguntarse si la misma enseñanza no es la que origina esta concepción parcial de la noción de función. En efecto, con demasiada frecuencia se considera a la curva que la representa como un objeto de estudio en sí, y no como un modo de representación de una ley de variación.

La presencia de obstáculos epistemológicos fuera de los obstáculos cognitivos, se justifica por la impresión de que los obstáculos epistemológicos deben su existencia a la aparición y resistencia de ciertos conceptos matemáticos a lo largo de la historia, así como a la observación de conceptos análogos en los alumnos, más que a la confirmación de la resistencia de esas concepciones en los alumnos de hoy. Esta condición parece esencial por la disparidad de las normas que rigen la construcción del conocimiento matemático en la historia y la construcción del conocimiento matemático en el contexto escolar. El análisis histórico puede ayudar al didáctico en su búsqueda de núcleos de resistencia al aprendizaje matemático, pero no puede, en ningún caso, aportar por sí solo la prueba de la existencia de tal o cual obstáculo para los alumnos de hoy.

4. ERRORES EN MATEMÁTICAS

Algunos matemáticos han encontrado en los errores una gama de problemas dignos de estudio, ya sea porque plantean acertijos o pasatiempos o porque sugieren teoremas interesantes. Abordamos este apartado considerando el papel de los errores en el desarrollo del conocimiento matemático, mostrando algunos procedimientos erróneos, aprovechables didácticamente, y analizando algunas pseudo-demostraciones.

Lakatos (1981) en algunos de sus artículos muestra cómo la discusión de los errores detectados en algunas teorías permite la transformación o enriquecimiento de éstas, por ejemplo, cuando analiza el trabajo de Cauchy señala: «¿qué decir de los bien conocidos "errores" de Cauchy? ¿Cómo podía probar en su famoso *Cours d' Analyse* (1821) –catorce años después del descubrimiento de las series de Fourier– que cualquier serie convergente de funciones continuas siempre tiene una función límite continua? ¿Cómo podía probar la existencia de la integral de Cauchy para cualquier función continua? ¿Todo esto constituye sólo una serie de errores técnicos "desafortunados", fruto del olvido o del descuido?

Pero si los "errores" de Cauchy no fueron más que fragantes descuidos, ¿cómo es que uno de ellos sólo fue subsanado en 1847 (por Seidel) y el otro tan sólo en fecha tan tardía como 1870 (por Heine)?»

La respuesta a esta pregunta permite explicar el desarrollo de ciertos conceptos y el nacimiento de nuevas teorías, las cuales tal vez no se hubieran desarrollado sin el análisis crítico de las concepciones vigentes.

Continúa Lakatos: –«La teoría de Robinson nos ofrece la pista crucial para su solución [...]»

« [...] A esta luz, se comprende ahora la historia de los "errores" de Cauchy, y también otros aspectos de la historia de la convergencia uniforme y de la continuidad uniforme.»

Y concluye: «Cauchy no cometió en absoluto ningún error, sino que probó un teorema completamente distinto, sobre secuencias transfinitas de funciones que Cauchy-convergen sobre el continuo de Leibniz.»

Esto es, el teorema demostrado por Cauchy es válido en un sistema donde (* es una extensión del sistema de los números reales R, pero es falso al considerarlo sólo en R.

Éste es un buen ejemplo en lo referente a los errores cometidos en el desarrollo histórico del conocimiento matemático. Algunos autores como Lakatos, prefieren considerar otros errores como "concepciones limitadas", matiz totalmente válido, pues decimos que algún procedimiento es correcto o no, a partir de los elementos que conforman las teorías actuales, pero con ello cometemos el error de hacer juicios con marcos de referencia que no corresponden a la situación que se analiza.

Este matiz de "concepción limitada" que se le da a los errores en la historia de las matemáticas, puede ser válido también en el caso de los errores cometidos por los estudiantes, puesto que muchos de éstos pueden explicarse a través de los métodos que ellos desarrollan con el tiempo, siendo dichos métodos válidos en algunos casos solamente. Queda claro que no todos los errores de los alumnos pueden explicarse de esta forma; por lo tanto, este matiz no es válido, en general, para reflexionar sobre los errores cometidos por los estudiantes, pero constituye un elemento más a tener en cuenta.

Procedimientos erróneos.

Analizamos en este apartado algunos procedimientos erróneos que suelen cometer los alumnos de Secundaria.

1. Nos encontramos a veces con alumnos que realizan la suma de fracciones como sigue:

$$a/b + c/d = (a+c)/(b+d)$$

este procedimiento incorrecto, en general, no lo es en algunos casos. Si despejamos "a" obtenemos:

$$a = - b^2 c / d^2$$

Algunas soluciones enteras de ésta nos conducen a las siguientes soluciones:

$$(-18)/3 + 8/2 = (-18)+8/3+2; \quad (-12)/2+3/1 = (-12)+3/2+1; \ldots$$

2. Es frecuente como ya hemos indicado que frente al cuadrado del binomio se comporten así:

$(x+a)^2 + (x+b)^2 = (x+c)^2$, entonces
$x^2 + a^2 + x^2 + b^2 = x^2 + c^2$, pero es válido si, $a + b = c$
Esto puede generalizarse como sigue:
Si $c = ad + bc$, de la igualdad:
$(dx+a)^2 + (ex+b)^2 = (x+c)^2$, se puede pasar a la igualdad
$d^2x^2 + a^2 + e^2x^2 + b^2 = x^2 + c^2$

3. Un error muy conocido y discutido en diversos artículos y libros de curiosidades o paradojas matemáticas es la cancelación:

$$\frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4} = \frac{1}{4}$$

Si consideramos el caso general con a,b,c, dígitos no nulos, obtenemos

$$\frac{a\cancel{b}}{\cancel{b}c} = \frac{a}{b}$$

que se puede escribir de la forma $10\,a + b\,/\,10\,b + c = a/c$, de donde después de algunas transformaciones algebraicas sencillas, obtenemos:

$$9ac = b\,(10\,a - c),$$

si $a=b$ ó $a=c$, se obtienen $a=c$ ó $a=b$, respectivamente, lo que nos conduce a:

$$\frac{1\cancel{1}}{1\cancel{1}} = \frac{1}{1}\ ;\ \frac{2\cancel{2}}{2\cancel{2}} = \frac{2}{2}\ ;\ ...$$

Si consideramos $b = 6$, la ecuación anterior se convierte en $a = 2c/20\text{-}3c$, de donde obtenemos algunas soluciones que corresponden a los siguientes casos:

$a=1, b=6, c=4$; $a=2, b=6, c=5$; $a=6, b=6, c=6$;

de ahí que algunas soluciones son:

$$\frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4} = \frac{1}{4}\ ;\ \frac{2\cancel{6}}{\cancel{6}5} = \frac{2}{5}\ ;\ \frac{6\cancel{6}}{\cancel{6}6} = \frac{6}{6}$$

análogamente se puede ir considerando otras posibilidades. Un estudio detallado se encuentra en Johnson (1987).

4. Otro ejemplo sobre cancelación recogido en Carman (1971) es el siguiente:

$$\text{sen } \alpha + \text{sen } 2\alpha + \ldots + \text{sen } n\alpha = \text{sen } (n+1)\, \alpha/2 \,.\, \text{sen } n\, \alpha/2 \,/\, \text{sen } \alpha/2$$

"cancelando sen" obtenemos:

$$\alpha + 2\alpha + \ldots + n\alpha = (n+1)\, \alpha/2 \,.\, n\, \alpha/2/\alpha/2$$

"cancelando α"se llega a:

$$1+2+\ldots+n = (n+1)/2.\ n/2\ (\ 1/2, \text{ y esto es:}$$
$$1+2+\ldots+n = (n+1)\,.\,n/2$$

5. Sucede a veces que la suma de dos errores da como resultado un acierto. White (1981) da un ejemplo de esto; al derivar:

$$y = (x^2 + 1)^{3x}$$

algunos alumnos utilizan:

$d/dx\ (u^n) = n.u^{n-1}\ du/dx$ y otros aplican $d/dx\ (a^u) = a^u (\ln a)\ du/dx$,

y obtienen respectivamente:

$y_1' = 3x\,(x^2+1)^{3x-1}(2x)$ ^ $y_2' = (x^2+1)^{3x}(\ln(x^2+1)).(3)$, con a=cte. y u=u(x),

podemos comprobar que la respuesta correcta es $y' = y_1' + y_2'$

Las pseudo-demostraciones

Con frecuencia nos encontramos en matemáticas (Aritmética, Álgebra o Geometría) con demostraciones aparentemente correctas, pero que chocan con la intuición y el sentido común: Son curiosidades o acertijos como:

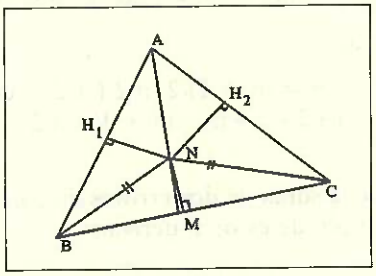
Puedo probar matemáticamente que "4 es igual a 5", o que "2 es igual a 1" o que "todos los triángulos son isósceles", y planteamos demostraciones como:

Para el ejemplo: "4 es igual a 5"
$-20 = -20$,
$16 - 36 = 25 - 45$,
$16 - 36 + (9/2)^2 = 25 - 45 + (9/2)^2$,
$(4 - 9/2)^2 = (5 - 9/2)^2$,
$4 - 9/2 = 5 - 9/2$, y entonces $4=5$

Análogamente, para el ejemplo: "2 es igual a 1".

$x = 1$,
$x^2 = x$,
$x^2-1 = x-1$,
$x + 1 = 1$,
$1+1=1$, y entonces $2=1$.

En el tercer caso: "Todos los triángulos son isósceles", tomemos como ejemplo la demostración debida a Lewis Carroll.



Dado un triángulo ABC cualquiera, demostrar que es isósceles:

Se traza la bisectriz de A y también la mediatriz del lado BC. Se afirma con autoridad, que se cortan en N, se trata de demostrar que el ángulo en B es igual al ángulo en C; se trazan los segmentos NH_1, y NH_2 perpendiculares respectivamente a AB y AC, y se tiene entonces $\Delta BNH_1 \cong CNH_2$, luego los ángulos ABN y ACN son iguales.

Por otra parte se tiene que NB= NC, luego los ángulos NBC y NCB son iguales, de donde se deduce la igualdad de los ángulos de los vértices B y C del triángulo ABC.

La trampa en este último caso consiste en que N se colocó en el interior del triángulo, ocurriendo que siempre N está en el exterior. Un interesante libro sobre errores en las demostraciones geométricas es el de Dubnov (1993).

El aprovechamiento de los casos anteriores en el contexto escolar puede realizarse atendiendo a la serie de propiedades ocultas que generan estos errores y permiten ampliar la comprensión de algunos contenidos matemáticos. Pueden ser entonces de gran utilidad en las clases de matemáticas de Secundaria, bien a nivel de grupo, bien a nivel individual. Por ejemplo, si algún alumno comete el error $a+b/a+c=b/c$, se puede plantear, ¿en qué casos es válido esto?, e indagar en los casos en que es posible hacer un "procedimiento erróneo", permitiéndole confiar en sus propios recursos para salir de dudas. Análogamente, en las pseudo-demostraciones, podemos desarrollar cuestiones relacionadas con la igualdad y las potencias y analizar que:

$a = b \Longrightarrow a^2 = b^2$, pero que: $a = b \not\Longrightarrow \sqrt{a} = \sqrt{b}$, y potenciar la búsqueda de situaciones similares cómo:

$$1 = \sqrt{1^2} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{(-1)^2} = -1;$$

o con la igualdad y las operaciones de +, -, x, /, donde:

$$a = b \Longrightarrow a \pm k = b \pm k, \text{ y } \quad a \cdot k = b \cdot k, \text{ y } a:k = b:k \ (k \neq 0)$$

Este uso de los errores en la clase de matemáticas consiste en plantear el propio error como un problema matemático.

5. ERRORES EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS: EVALUACIÓN Y DIAGNÓSTICO

Un conocimiento de los errores básicos es importante para el profesor porque le provee de información sobre la forma en que los alumnos interpretan los problemas y utilizan los diferentes procedimientos para alcanzar una buena meta.

En general, aceptamos que incluso la mayoría de los alumnos que tienen una actuación aparentemente satisfactoria en matemáticas, oculta probablemente serios errores conceptuales que dificultarán el aprendizaje subsiguiente. Parece necesario diagnosticar y tratar mucho más seriamente los errores de los alumnos, discutiendo con ellos a nivel intuitivo acerca de sus concepciones erróneas y presentarles luego situaciones matemáticas, para seguir pensando en aquello que les permite reajustar sus ideas.

La interpretación y análisis de los errores cometidos en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas puede enriquecerse con el apoyo de algunas teorías de la psicología educativa, algunas de ellas se refieren a determinados procesos que se dan en la matemática. La posición cognitiva sugiere que la mente del alumno no es una página en blanco. El alumno tiene un conocimiento anterior que parece suficiente y establece en la mente del alumno un cierto equilibrio. Dos parecen las razones básicas a tener en cuenta en la adquisición de un nuevo conocimiento. Primero, el nuevo conocimiento debe tener significado para el alumno y para ello debe contestar a preguntas que él se ha hecho a sí mismo, o por lo menos recuperar algunas representaciones que ya estaban en su mente, es decir, el alumno debe asumir la responsabilidad de la construcción del saber y considerar los problemas como suyos y no como problemas del profesor. Y segundo, el saber anterior produce modelos implícitos que a veces son favorables con el nuevo conocimiento matemático y que, por tanto, hay que explicitarlos, y otras veces, al contrario, son un obstáculo. En ningún caso el conocimiento nuevo se añade al saber antiguo, muy al contrario se construye luchando contra él, porque debe provocar una estructuración nueva del conocimiento total.

Podemos caracterizar a nuestro juicio, en dos grupos las causas principales de los errores en el aprendizaje de las matemáticas. Errores que tienen su origen en un obstáculo y errores que tienen su origen en una ausencia de significado.

Estos últimos, tendrían dos procedencias distintas, una, relacionada con las dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos y a los procesos de pensamiento matemático, y otra, relacionada con las dificultades asociadas a las actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas.

Recordando algo que parece obvio aceptar: la complejidad de las dificultades del aprendizaje de las matemáticas, y que estas dificultades se traducen en errores que cometen los alumnos y que éstos se producen por causas muy diversas que muchas veces se refuerzan en redes complejas, parece útil, desde la perspectiva de la enseñanza tener elementos de análisis de estos errores. Una manera útil de abordarlos sería considerar las tres direcciones antes mencionadas, a modo de tres ejes de coordenadas que nos situaría con más precisión en los orígenes del error y nos permitiría como profesores arbitrar procedimientos y remedios más efectivos.

Estos tres ejes estarían determinados por:

I) Errores que tienen su origen en un obstáculo.
II) Errores que tienen su origen en ausencia de sentido.
III)Errores que tienen su origen en actitudes efectivas y emocionales.

A modo de ejemplo y tomando como referencia el lenguaje algebraico con relación a los primeros ejes tenemos:

I. Errores que tienen su origen en un obstáculo:

Como ejemplo podemos citar el que indica Collis (1974) relacionando las dificultades que los niños tienen en el álgebra con la naturaleza abstracta de los elementos utilizados. Él apuntó la idea de que los estudiantes que comienzan a estudiar álgebra ven las expresiones algebraicas como enunciados que son algunas veces incompletos. Por ejemplo, si se les requiere que dos números conectados por una operación sean reemplazados por el resultado de la operación, y, posteriormente, se les introduce al álgebra con expresiones tales como x + 7 y 3x para ser remplazadas por un tercer número, como en este caso no pueden"cerrarse", son expresiones "incompletas", los alumnos no lo aceptan y él lo expresa diciendo que **"no hay aceptación de la falta de clausura"**.

Davis (1975), por su parte, también plantea algunas situaciones a los estudiantes en las que se les hace difícil dar respuestas "legítimas". Esta dificultad está relacionada con la distinción entre la **adición aritmética**, donde "+" es una pregunta o un problema (3+7), y la **adición algebraica**, como en x + 7, donde la expresión describe, a la vez, la operación de sumar y el resultado. Esto necesita por parte de los alumnos un "reajuste cognitivo" y es lo que Davis ha llamado dilema proceso-producto donde, simultáneamente, se describe el proceso y se nombra la respuesta.

La "**concatenación**", esto es, la yuxtaposición de dos símbolos, es otra fuente de dificultad para el estudiante principiante de álgebra (Herscovics, 1989). También Matz (1980), había observado que, en aritmética, la concatenación denota adición implícita, como en la numeración de valor posicional y en la notación numérica mixta. Sin embargo, en álgebra, concatenación denota multiplicación. Esto explica por qué varios estudiantes, cuando se les pidió sustituir 2 por a en 3a, pensaron que el resultado sería 32. Sólo cuando específicamente se les requirió responder "en álgebra", respondieron "3 veces 2" (Chalouh y Herscovics, 1988).

II. Errores que tienen su origen en ausencia del sentido.

Al originarse estos errores en los diferentes estadios de desarrollo que se dan en los sistemas de representación (semiótico, estructural y autónomo), podemos diferenciar errores en tres etapas distintas.

(A) Errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética.– El significado de los signos usados es el mismo en ambas ramas de las Matemáticas. El álgebra no está separada de la aritmética y aquella se puede considerar con la perspectiva de aritmética generalizada. De aquí que para entender la generalización de relaciones y procesos se requiere que éstos sean antes asimilados dentro del contexto aritmético. Por eso, a veces las dificultades que los estudiantes encuentran en álgebra, no son tanto dificultades en el álgebra como problemas que se quedan sin corregir en la aritmética; por ejemplo, en el caso de las fracciones, uso de paréntesis, potencias, etc.

Ejemplos de estos errores son los cometidos por los alumnos que no dominan las operaciones con fracciones y dan resultados como:

$$1/2 + 1/3 = 1 / (2 + 3) \quad \Longrightarrow \quad 1/x + 1/y = 1 / (x + y)$$
$$1/2 + 1/3 = 2 / (2 + 3) \quad \Longrightarrow \quad 1/x + 1/y = 2 / (x + y)$$
$$1/2 + 1/3 = 1 / (2 \,.\, 3) \quad \Longrightarrow \quad 1/x + 1/y = 1 / (x \,.\, y)$$

También surgen muchos errores en la suma o la resta de fracciones. Por ejemplo, para calcular $3 / 28 + 8 / 35$, escriben

$$3 / 28 + 8 / 35 = (3 + 8) / (4.\ 7.\ 5)$$

que, traducido algebraicamente, da

$$x / (y \,.\, z) + k / (y \,.\, p) = (x + k) / (y \,.\, z.\ p)$$

Otras veces, con la preocupación de no olvidar los factores por los que hay que multiplicar los numeradores primitivos, omiten éstos. Así

$$3 / 28 + 8 / 35 = (5 + 4) / (4.\ 7.\ 5)$$

Y, de forma análoga,

$$x / (y \,.\, z) + k / (y \,.\, p) = (z + p) / (y.\ z.\ p)$$

El signo "-", sobre todo cuando va colocado delante de un paréntesis o de una fracción, genera frecuentes errores:

$$- (3 + 5) = - 3 + 5 \quad \Longrightarrow \quad - (a + b) = - a + b$$
$$- (3 + 5) /4 = - 3 / 4 + 5/4 \quad \Longrightarrow \quad - (a + b) / c = - a / c + b / c$$

(B) Errores de procedimientos.

El uso inapropiado de "fórmulas" o "reglas de procedimientos" también da lugar a errores de este tipo. Se debe a que los alumnos usan inadecuadamente una fórmula o regla conocida, que han extraído de un prototipo o libro de texto, y la usan tal cual la conocen o la adaptan a una situación nueva. Tienden así un "puente" para cubrir el vacío entre reglas conocidas y problemas no familiares. La mayoría de estos errores se originan como falsas generalizaciones sobre operadores, fundamentalmente, por falta de linealidad de estos operadores.

La linealidad describe una manera de trabajar con un objeto que puede descomponerse tratando cada una de sus partes independientemente. Un operador es empleado linealmente, cuando el resultado final de aplicarlo a un objeto se consigue aplicando el operador en cada parte y luego se combinan los resultados parciales. La linealidad es bastante natural para muchos alumnos, ya que sus experiencias anteriores son compatibles con hipótesis de linealidad.

Entre los errores derivados, distinguimos:

1. Errores relativos al mal uso de la propiedad distributiva:

(a) Extensión de la propiedad distributiva de la multiplicación con relación a la adición (o sustracción) al caso de la multiplicación:

$$3 \,.\, (4 + 5) = 3 \,.\, 4 + 3 \,.\, 5 \implies a \,.\, (b + c) = a \,.\, b + a \,.\, c$$
$$3. \,(4 \,.\, 5) = 3 \,.\, 4 \,.\, 3 \,.\, 5 \implies a \,.\, (b \,.\, c) = a \,.\, b \,.\, a. \,c$$

y también nos encontramos que

$$(3 + 4) / 5 = 3 / 5 + 4 / 5 \text{ se extiende a } 3/ (4 + 5) = 3/4 + 3/ 5$$

y, de manera análoga,

$$(a + b) / c = a / c + b / c \text{, se extiende a } a / (b + c) = a / b + a / c$$

(b) La estructura $(a \,.\, b)^2 = a^2 \,.\, b^2$, en la que se relaciona el producto y la potencia, se extiende fácilmente al caso de la suma, $(a + b)^2 = a^2 + b^2$, de un modo inconsciente, para los alumnos como algo muy natural, a veces incluso después de ser cuestionado. Es la misma situación que en el trabajo con números, aunque en el caso de la suma, y si se trata de números pequeños en valor absoluto, suelen resolver primero la operación indicada entre paréntesis.

Y, también:

$$2^{2+3} = 2^2 \,.\, 2^3 \quad \text{a} \quad 2^{a+b} = 2^a \,.\, 2^b$$
$$2^{2\,.\,3} = 2^2 + 2^3 \quad \text{a} \quad 2^{a\,.\,b} = 2^a + 2^b$$

(c) De la misma forma que con las potencias, sucede con las raíces: es muy frecuente extender la distributividad de la radicación respecto a la multiplicación, a la distributividad de la radicación respecto a la adición o sustracción.

2. Errores relativos al uso de recíprocos

$1/3 + 1/5 = 1 / (3 + 5) \implies 1/x + 1/y = 1 / (x + y)$
$1/2 + 1/3 = 2 / (3 + 5) \implies 1/x + 1/y = 2 / (x + y)$
$1/3 + 1/5 = 1 / (3 . 5) \implies 1/x + 1/y = 1 / (x . y)$

3. Errores de cancelación:

(Indicaremos sólo la versión algebraica)
$(x . y) / (x . z) = y / z$ se extiende a $(x + y) / (x + z) = y + z$
y también a:
$(a . x + b . y) / (x + y) = a + b$
$(a . x + b) / b = a . x$
$(a . x - b) / a = x . b$
Los dos últimos se pueden obtener por analogía con
$a / (a . x) = 1 / x$

Estos tipos de errores parecen indicar que los alumnos generalizan procedimientos que se verifican en determinadas ocasiones. Tanto los errores de cancelación como los cometidos al trabajar con recíprocos, se podrían haber evitado si el alumno hubiese modificado la situación para que encajase con la regla, en vez de extender la regla para abarcar la situación. Por ejemplo, para el error de recíprocos, la solución podría ser igualar una fracción a otra, encontrando el denominador común, y después, expresando la suma de fracciones en una sola fracción.

(C) Errores de álgebra debidos a las características propias del lenguaje algebraico.

Estos errores son de naturaleza estrictamente algebraica y no tienen referencia explícita en la aritmética.

Como ejemplo de ellos mencionaremos: el sentido del signo "="en su paso de la aritmética al álgebra, y la sustitución formal.

En el primero (sentido del signo "="), aparece un cambio importante. El sentido de igualdad aritmética se conserva en el álgebra cuando trabajamos con tautologías algebraicas, pero no en expresiones como $4 x - 3 = 2 x + 7$, que sólo es verdadera cuando $x = 5$. A diferencia de las tautologías, las ecuaciones no son afirmaciones universales verdaderas, pues el signo igual en una ecuación no conexiona expresiones equivalentes, aunque sí condiciona a la incógnita. Dada una ecuación, la tarea para resolverla consiste en determinar los valores desconocidos (restricciones) que hacen a la ecuación verdadera.

En el segundo (sustitución formal), queremos señalar que los procesos de sustitución que conducen de $3 . 5 = 5 . 3$, a, $a . b = b . a$, son procesos formales, que no incluimos en la sustitución formal propiamente dicha, y que denominamos procesos de generalización.

La sustitución formal se extiende más allá de la generalización. Por ejemplo, de la identidad $(a + b) . (a - b) = a^2 - b^2$ se obtiene, al reemplazar a por a + c y b por b + d, la igualdad $(a + c + b + d) \cdot (a + c - b - d) = (a + c)^2 - (b + d)^2$ donde, variables de una expresión, son sustituidas por expresiones más complejas que son nuevamente variables.

Estas transformaciones algebraicas constituyen un poderoso instrumento de cálculo algebraico que está a medio camino entre lo puramente formal y un conocimiento explícito de su significado.

La sustitución formal es un instrumento de cálculo algebraico importante a causa de su amplio campo de aplicaciones, que se manifiesta en diferentes procesos matemáticos, tales como: generalización, simplificación, eliminación, complicación estructural y particularización.

Esta distinción de los errores en tres ejes, obviamente no disjuntos, nos hace posible centrar la atención en tres direcciones que permite una evaluación y diagnóstico más eficaz, para poder ayudar a los estudiantes en sus dificultades cognitivas y sus carencias de sentido de los objetos matemáticos y en el desarrollo de una actitud racional hacia las matemáticas.

Desde luego que la evaluación y el diagnóstico de los errores de los alumnos es importante, pero el profesor ha de usar este conocimiento para promover un mejor aprendizaje del alumno. Desde un punto de vista práctico, esto supone pasar de una enseñanza caracterizada por dos fases: contenidos y aplicaciones, donde el error tiene sólo una función negativa cuando realizamos la evaluación del alumno, a una enseñanza caracterizada por tres fases, donde la primera: evaluación y diagnóstico, es la más importante, y en la cual la explicitación de los errores se tiene que hacer.

La evaluación diagnóstica es un conjunto de situaciones de aprendizaje diseñadas para identificar las dificultades específicas del aprendizaje, que tratan de determinar la naturaleza de las mismas. Esta evaluación diagnóstica tiene lugar al comienzo de las unidades didácticas, pero la detección de errores y la determinación de su naturaleza también tiene lugar en el desarrollo de la unidad didáctica, es decir, en el curso del aprendizaje. El objeto de la evaluación diagnóstica es claro: determinar inmediatamente una acción conveniente de remedio.

6. ESTRATEGIAS DE PREVENCIÓN Y REMEDIOS

Analizar las dificultades del aprendizaje de las matemáticas en término de prevención y remedio supone combinar estrategias generales y específicas a largo plazo con estrategias particulares e inmediatas. La prevención requiere arbitrar estrategias generales de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, con estrategias específicas dependiendo del contenido concreto a tratar. La prevención, al tender a minimizar las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, debe estar orientada de manera general por las dificultades asociadas a la complejidad de los objetos de las matemáticas, a los procesos de pensamiento matemático, a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos, a los procesos de enseñanza y a las actitudes afectivas y emocionales de los alumnos hacia las matemáticas, (analizadas en el párrafo 1 de este capítulo) y de manera específica, por los obstáculos y errores concretos de cada uno de los bloques temáticos objeto de aprendizaje.

Los remedios tienen que ver más con el día a día, con la interacción diaria en clase entre el profesor y el alumno. Su eficacia viene determinada, en gran medida, por una buena evaluación y diagnóstico.

El análisis de errores tiene un doble interés: de una parte, sirve para ayudar a los profesores a organizar estrategias generales y específicas para conducir mejor la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, insistiendo en aquellos aspectos que generan más dificultades, y de otra, contribuye a una mejor preparación de estrategias de corrección de los mismos. En este sentido, el profesor debe entender los errores específicos de sus alumnos como una información de las dificultades de las matemáticas, que requiere un esfuerzo preciso en las dos direcciones anteriores.

Veamos algunas de estas estrategias generales de prevención. Todas ellas tienen que ver, como hemos señalado, con las áreas de dificultades analizadas en el párrafo 1. Si tomamos como ejemplo la complejidad de los objetos matemáticos y, en particular, los estadios de desarrollo que se dan en los sistemas de representación cognitivos, tenemos como estrategia general de enseñanza aprendizaje de las matemáticas:

Introducir los conceptos y procesos matemáticos respetando las etapas de desarrollo que se dan en los sistemas de representación cognitiva.

Esto nos conduce a reflexionar sobre la necesidad de tener presente estrategias generales que están involucradas con éste, tales como:

- Asegurarse que los objetos matemáticos del sistema antiguo de signos no presenten dificultades.
- No precipitar el aprendizaje del nuevo objeto.
- Evitar una innecesaria complejidad de los signos matemáticos.
- Asegurarse de que los diferentes sentidos de un objeto matemático están claramente diferenciados.

Todas las estrategias de prevención deben ir dirigidas a evitar o minimizar los obstáculos para que puedan ser superados, a dotar de sentido a los objetos y al pensamiento matemático y a crear un clima de actitudes afectivas y emocionales positivas hacia las matemáticas.

Las estrategias de remedio vienen determinadas por el diagnóstico inicial del error y también, conviene recordarlo una vez más, por el posicionamiento del profesor. Situados dentro del paradigma conductual influenciado por la teoría de la absorción, el remedio para un error de concepto o de procedimiento, pasa por olvidar el alumno este concepto o procedimiento al facilitarle el profesor, con ejemplos adecuados, una buena definición del concepto y los procedimientos correctos. El alumno subsanará este error mediante la realización de ejercicios donde use el concepto o los procedimientos.

El profesor situado en el paradigma cognitivo se coloca en la posición que el error lo ha construido el alumno, y es, por tanto, una estructura cognitiva del dominio del mismo. La estrategia de remedio pasa porque el alumno modifique esa estructura cognitiva errónea y la sustituya por la correcta, para ello, el profesor debe facilitar actividades que provoquen conflicto y haga tambalear esa estructura cognitiva errónea.

Aceptado el origen del error, las estrategias de remedio van dirigidas a superar un obstáculo, a dar sentido a los objetos matemáticos o a crear una actitud racional hacia las matemáticas.

¿Cómo superar un obstáculo en este sentido de conocimiento anterior que se revela inadaptado en un momento determinado del aprendizaje?

Brousseau (1983) se manifiesta en los siguientes términos:

« [...] para superar un obstáculo se requiere un esfuerzo de la misma naturaleza que cuando se establece un conocimiento, es decir, interacciones repetidas, dialécticas del alumno con el objeto de su conocimiento. Esta observación es fundamental para distinguir un verdadero problema; es una situación que permite esa dialéctica y que la explica.»

Nos interesa poner de manifiesto los conocimientos adquiridos por el alumno, que responden a una "lógica personal" y que en este momento producen errores. Se trata de superar ese obstáculo, y aceptarlo no como algo que no debiera haber aparecido, sino como algo cuya aparición es interesante, ya que su superación nos va a permitir la adquisición de un nuevo y mejor conocimiento. Debemos entender, como señala Bachelard, que es en la superación de ese obstáculo donde vamos a conseguir el conocimiento nuevo.

¿Cómo superar la falta de sentido en los objetos matemáticos?

Tomando como referencia los tres estadios de desarrollo que se dan en los sistemas de representación cognitiva, tenemos que la falta de sentido va desde el estadio semiótico, donde el sistema nuevo toma todo su significado en el sistema antiguo y no tiene aún ningún tipo de estructura, hasta el estadio autónomo donde el sistema nuevo adquiere significado en sí mismo, a veces adoptando ciertas convenciones, pasando por el estadio estructural donde el sentido unas veces se obtiene con ayuda del sistema antiguo y otras, donde el sistema antiguo es insuficiente para dotar de significado a ciertos aspectos del sistema nuevo como ya hemos mostrado en ejemplo de las potencias en el párrafo 1.

Tomemos un ejemplo de álgebra, que a veces planteo a mis alumnos del último curso de la Licenciatura en Matemáticas que cursan la asignatura de Metodogía y Didáctica de las Matemáticas. Les pido que den explicaciones para lograr que los alumnos comprendan que

$\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$ y corrijan este error.

Las respuestas casi inmediatas son:

"damos los siguientes valores: $a=3$ y $b=4$, y entonces":

$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$, pero $a + b = 7$, por lo que la igualdad no es válida".

Entonces les indico, ¿y si un alumno les dice que sí es válida porque $\sqrt{0^2 + 1^2} = 0 + 1$?, entonces dicen:

«bueno, en este caso es válida pero no lo es en general.»

Ante esta afirmación alguien comenta:

«Entonces, como para $x = 0$, $3x + 5 = 11$ no es válida, entonces no es válida en general».

Muchos señalan: «no estamos hablando de una ecuación.» Otro responde: ¿no? Y saliendo a la pizarra dice: «observen»:

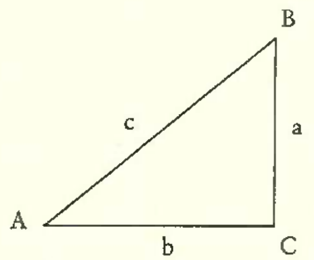
$\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$,

$a^2 + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$,

$2ab=0$, entonces: $a=0$ y $b \in R$ ó $b=0$ y $a \in R$, suponiendo que a y $b \in R$.

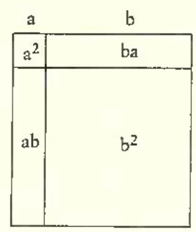
Alguien intervino: «pero, bueno, se está confundiendo lo que es una identidad algebraica con una ecuación.»

Otro más, dijo: «yo creo que estamos obsesionados con el enfoque numérico; de ser cierta la expresión anterior $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$, nos encontraríamos que la hipotenusa de un triángulo rectángulo debería ser igual a la suma de los catetos, lo cual es imposible.»



$c = a + b$

A veces aparecen intervenciones ingeniosas como: «la expresión es falsa porque no se puede llenar un cuadrado de lado a+b con dos cuadrados de lado a y b, respectivamente.»



Este tipo de experiencia pone de manifiesto cómo es posible poner en conflicto el error en diferentes situaciones. Con frecuencia consideramos la situación que en apariencia es más fácil, pero que a veces para el alumno se puede convertir en muy difícil.

Pensamos que el alumno entiende que para establecer la falsedad de la proposición $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$, $\forall$a,b $\in$ R, basta probar que $\exists$ a,b $\in$ R y $\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$ es verdadera.

Ciertamente esto es lo que tratamos de hacer, pero, a pesar de que cuando los alumnos cometen el error $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$ y los profesores les ofrecen un contraejemplo para convencerlos, se sabe que el error se sigue cometiendo sistemáticamente, lo que es un indicador de que sólo un argumento de esta naturaleza no convence realmente. Sería interesante recurrir también a otras situaciones tal vez más familiares o que creen esquemas más fáciles de recuperar, por ser argumentos apoyados en sistemas de representación visual y no solamente en argumentos formales.

Parece razonable pensar que la falta de sentido se recupera poniendo a los alumnos en una situación de conflicto que genere esquemas que doten de sentido al concepto o proceso erróneo que presentan y que estas situaciones son variadas, y van desde considerar un ejemplo numérico o más simple, hasta usar diferentes contextos o sistemas de representación que pongan en evidencia que existe un defecto en la comprensión del concepto o en el procedimiento de la actuación del alumno.

Los errores que cometen los alumnos por falta de una actitud racional hacia las matemáticas son errores que llamamos casuales o de descuido, y se manifiestan de formas diversas, que van desde una excesiva confianza en la tarea matemática hasta un bloqueo que le incapacita para la citada tarea, pasando por situaciones intermedias que están mediatizadas por las creencias sobre la tarea en el contexto escolar.

Uno de estos errores es el que se origina por los cuestionamientos que generamos en nuestros alumnos (aspecto comentado en el apartado 1).

Para intentar paliar los errores que se dan por los diferentes cuestonamientos que generamos en los alumnos al inducirles en el ámbito escolar una "lógica escolar" diferente a la "lógica social", podemos comenzar por incorporar problemas que tengan algún dato inútil, que carezca de algún dato útil y no limitarnos a los que tradicionalmente se plantean, problemas que sólo tienen datos útiles, tradición que por otra parte no es preceptiva en la institución escolar.

También podemos incorporar preguntas como: ¿Podemos con estos datos obtener el resultado pedido? Que los alumnos descubran que hay datos que no sirven, que aprendan a hacer si no un razonamiento matemático formal, sí algo un poco menos formal y cerca del sentido común, es decir, de la "lógica social".

Es probablemente el intento de potenciar un automatismo matemático basado en el adiestramiento, el que conduce a comportamientos automáticos que son las respuestas a la meta-pregunta, en la que utilizan simplemente combinaciones de todos los datos sin pensar en lo que eso significa.

La superación de los errores por parte de los alumnos constituye un tema básico en el aprendizaje que genera grandes dificultades. Las investigaciones actuales señalan que los errores están profundamente interiorizados por los alumnos y que no son de fácil eliminación. Incluso en muchos casos, parece ser que los estudiantes han superado un error y luego lo vemos, con desilusión, resurgir al poco tiempo. Por ello, plantear a los estudiantes que su comprensión conceptual de una parte de la matemática es incorrecta y darles entonces una explicación, es, a menudo, insuficiente para eliminar el error.

El estudiante debe participar activamente en el proceso de superar sus propios errores. Para ello, el profesor debe provocar conflicto en su mente a partir de la inconsistencia de sus propios errores, forzándolo a participar activamente en la resolución del conflicto, sustituyendo los conceptos falsos por la comprensión conceptual adecuada. El profesor rara vez indica a los alumnos cuál es la respuesta correcta, sino que simplemente les pide comprobaciones y pruebas que intentan provocar contradiciones que resultan de los falsos conceptos de los estudiantes. Los alumnos están dirigidos a conseguir la resolución de la contradicción mediante la solicitud de más comprobaciones y pruebas. El objetivo no es tanto hacer escribir a los estudiantes la fórmula o regla de procedimiento adecuada, como hacerlos enfrentarse con la contradicción y eliminar sus falsos conceptos de forma que éstos no vuelvan a aparecer.

Otra ventaja de esta forma de tratar el problema, dado que es muy poco probable que toda la clase esté de acuerdo al mismo tiempo con la respuesta correcta, es que en la clase se generen discusiones que son excelentes no sólo para mostrar los diferentes conceptos falsos que los estudiantes puedan tener, sino también para ayudarles a superarlos a través de sus propias interacciones.

En otro nivel de reflexión sobre los errores, podríamos pensar en usarlo no tanto para poner el énfasis en el desarrollo del currículo, para mejorar la enseñanza de las matemáticas, con especial interés en la complejidad de los objetos matemáticos y en los procesos de pensamiento (simbolización, generalización, etc,.), para evitar los errores de los alumnos, como para partir desde un punto de vista diferente, es decir, tomar los mismos errores de los alumnos en Matemáticas como punto de partida y plantearnos cómo debe ser dirigida la enseñanza para diagnosticar y después eliminar esos errores. Todo ello supondría colocar a los alumnos en situación de reflexionar sobre sus ideas erróneas, y pensando por sí mismo, a partir de esa reflexión, orientarse hacia conceptos más amplios y correctos. Es ésta una concepción del aprendizaje que entiende al alumno como un aprendiz activo, que intenta comprender y darle significado a los objetos matemáticos y que posee un sistema estable de ideas matemáticas que cambia sólo cuando el conflicto entre las mismas llega a ser lo suficientemente persistente y poderoso. Por tanto, las estrategias de enseñanza deben ir encaminadas a detectar los errores y provocar el conflicto en los alumnos, fomentando ideas que permanezcan activas más allá de la clase de Matemáticas y capacitándoles para evaluar si sus ideas o métodos son o no correctos en una determinada tarea matemática.

A modo de resumen, vemos cómo las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas son debidas a múltiples situaciones que se entrelazan entre sí y que van desde una deficiente planificación curricular hasta la naturaleza propia de las matemáticas que se manifiestan en sus simbolismos y en sus procesos de pensamiento, pasando por el desarrollo cognitivo de los alumnos, así como por sus actitudes afectivas y emocionales.

Establecidas las hipótesis:

(a) los errores de los alumnos en matemáticas son producto de su experiencia previa y del desarrollo interno de esas experiencias,

(b) los errores pueden tener tres orígenes distintos: obstáculo, carencia de sentido y actitudes afectivas y emocionales que entrelazan entre sí.

Podemos concluir que secuencias alternativas del currículo, donde éstas sean factibles, podrían cambiar la naturaleza y comprensión de los errores. Y que una buena propuesta de estrategias de prevención y remedio comienza por parte del profesor con un mejor conocimiento de sus alumnos. En la medida en que el profesor conozca mejor a cada uno de sus alumnos, podrá intervenir más adecuadamente en su aprendizaje, aceptando que los errores, más que indicadores del fracaso en matemáticas, deben ser considerados como elementos que ayuden a nuestro trabajo como profesores de matemáticas, guiado por el siguiente principio: **Todo error puede ser el comienzo de un buen aprendizaje.**

CAPÍTULO VI

Materiales, recursos y actividades: un panorama

Moisés Coriat

1. INTRODUCCIÓN

Los materiales, recursos y actividades generan un campo de problemas en Educación Matemática, principalmente desde el punto de vista de la práctica educativa, pero también como temas de investigación.

En primer lugar, estos tipos de objetos son de difícil caracterización; ¿se ha de considerar como material didáctico un libro de texto? Al contestar afirmativamente, ¿no estamos desvirtuando el significado del material como algo manipulativo, cuya "física" modeliza o representa algunas relaciones matemáticas? Lo mismo cabe decir de los recursos. ¿Constituye la prensa escrita un recurso para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas? En caso afirmativo, ¿cómo se usa un periódico en clase? (Sobre esta última pregunta consúltese, por ejemplo, Rico y Fernández (1992).) No está claro si, por ejemplo, el término recurso abarca los materiales didácticos, como parece deducirse del trabajo de Hernán y Carrillo (1988), o si, por el contrario, se trata de dos nociones diferentes, pero cuyos campos semánticos respectivos está en fuerte interacción...

En cierto modo, debemos aceptar la polisemia de ambos términos, su posible intercambio, su no definición neta a menos que se enuncie la idea generatriz en que se apoya esa definición. En este capítulo adopto un punto de vista pragmático (Apartado 2) que no resuelve las dificultades teóricas mencionadas, pero permite afrontar otras cuestiones no menos importantes.

En segundo lugar, el uso escolar de materiales didácticos y recursos, ¿constituye un problema metodológico? Se puede afirmar que sí, y de ahí extraer importantes consecuencias. (Consultar, por ejemplo, Alcalá, Cachafeiro y Pérez (1994).) En este capítulo, sin embargo, he optado por enraizar el uso escolar de materiales didácticos y recursos como un problema no sólo metodológico, sino también de la cultura escolar del Centro; a lo largo de los diferentes Apartados se encontrarán comentarios que se apoyan en esta afirmación. Dichos comentarios no están organizados para convencer al lector, simplemente se usa la idea central para dar a entender que no basta con que un profesor o profesora individual esté convencido de las "bondades" de tales objetos, también es necesario que considere dos líneas de actuación:

- una, se refiere a sus colegas del Seminario o Departamento de matemáticas, por lo menos (posiblemente la tradición del Centro tenga algo que decir al respecto);
- la otra, a su actuación en clase con materiales o recursos.

En tercer lugar, los materiales didácticos y recursos plantean dificultades curriculares. Mencionaré algunas de ellas.

(A) Nivel de *diseño curricular e infraestructura*.

- En Formación inicial y permanente de Profesores. Consultar el texto ya citado de Alcalá y otros (1994), cuya frescura de ideas necesitaría desarrollos más profundos. En un estilo telegráfico, los mencionados autores proponen o se interrogan en estos términos:

« Formación inicial:
. En una fase práctica.
. Estudiando un material concreto como parte de una solución didáctica a un problema dado.
. Estudiando los materiales como una unidad separada:
. Materiales existentes
. ¿Cómo sacar provecho a un material?
Formación permanente:
. Cursos. Problemas de la diversidad.
. Seminarios y grupos. ¿Se puede constituir un grupo / seminario suficientemente homogéneo?»

- En dotación de medios. ¿Puede un Centro adquirir materiales y recursos en cantidad suficiente como para que un Grupo-Clase (al menos) trabaje con ellos? En caso afirmativo, ¿qué materiales se deben adquirir sistemáticamente y cuáles de forma ocasional? ¿Qué apoyo brindará la Administración educativa a las iniciativas encaminadas a usar materiales y recursos en clases de matemáticas?

- En espacios adecuados para usar esos materiales y recursos. ¿Es imperativo disponer de un "laboratorio" de matemáticas? ¿Cuáles son las principales limitaciones que un aula corriente impone al uso escolar de materiales y recursos?

(B) Nivel del *currículo planificado*
- ¿Cuáles son las decisiones principales que se toman desde el Departamento?
- ¿Cuáles son las decisiones principales que cada Profesor toma desde la metodología?
- ¿De qué manera se plasman esas decisiones en la elaboración y mejora de las actividades con los Alumnos?
- ¿Cómo adquirir la seguridad de va a ocurrir "algo nuevo" en la enseñanza o en los aprendizajes?

(C) Nivel del *currículo implementado*
- ¿Cómo evaluar el uso de materiales didácticos y recursos?
- ¿Hay aportaciones en la atención a la diversidad?
- ¿Cómo evaluar el trabajo de los Alumnos con materiales didácticos?

Por lo que respecta a (A) este capítulo no aporta informaciones ni sugerencias; con (B) intento sugerir vías de respuesta, aunque no todas ellas reciben un tratamiento con la misma profundidad.

En el Apartado 3 del capítulo me ocupo de la primera pregunta indicada en (C), ilustrando el uso de un recurso (la fotografía) mediante comentarios muy particulares de autoevaluación de una actividad y contando brevemente su historia durante 6 cursos. Espero poner de manifiesto cómo un Profesor puede darse cuenta, poco a poco, de si está ocurriendo realmente algo, en este caso, al usar recursos. Se trata de un relato autobiográfico (en el sentido de la investigación educativa) que no debería extrapolarse (aunque, desde luego, la idea la ofrezco a quien desee usarla).

El Apartado 4 es el más denso y teórico porque persigue dos objetivos:

1. Poner de manifiesto que el uso de materiales didácticos o recursos constituye un desafío para la Educación matemática. De hecho, el Profesor que suscita su uso en clase no lo hace a la ligera, porque "están de moda", "dan ayudas" u otras razones análogas y superficiales; es consciente de que su decisión se integra en una red (de decisiones, propias y ajenas) que tiene influencia en la educación matemática de sus Alumnos; por tanto, busca puntos de equilibrio entre lo que se puede hacer con un material didáctico o recurso y lo que va a proponer que se haga. Naturalmente, en 4.1 no utilizo este estilo "ético"; elijo algunos tipos de materiales didácti-

cos y recursos y analizo sus limitaciones y ventajas, confiando en el buen juicio de cada Profesor para determinar su "punto de partida" en relación con estos objetos. Los recursos mencionados son principalmente de tipo informático porque estoy convencido de que es necesario debatir estos temas desde la perspectiva de la Educación Matemática. Era necesario sacrificar alguna etiqueta de los materiales y recursos y he decidido omitir los comentarios que permiten referirse a éstos como representaciones (uso sólo la relativa a modelos).

2. Indicar, en cascada, las principales decisiones que llevan a resolver el problema didáctico que representa el uso de materiales y recursos. Estas decisiones se refieren, por una parte a la cultura escolar y, por otra, a cuestiones metodológicas (eludo, en este nivel general, las decisiones relacionadas con la evaluación del material y la de Alumnos). Las últimas ponen de manifiesto cómo los materiales didácticos y recursos, en general, constituyen un organizador (en el sentido que se da a este término en el Capítulo II de este mismo libro).

A lo largo del capítulo se encontrarán algunos ejemplos puntuales (salvo el Apartado 3 que describe una actividad con ayuda de un recurso) destinados a matizar determinadas afirmaciones. Dado que la bibliografía en castellano comienza a ser de un cierto tamaño, he intentado, sin afán de exhaustividad, limitarme a ella.

Debo anotar que manejo los términos Profesor, Alumno, Centro y Conocimiento matemático como arquetipos que se definen mutuamente. (En Rico (1997), se hallará un estudio más detallado de sus influencias recíprocas.) Las personas, Profesor y Alumno, las entiendo como individuos genéricos, no como colectivos (para estos últimos disponemos de términos más adecuados).

2. ACERCAMIENTO PRAGMÁTICO

En este capítulo utilizo las caracterizaciones de recursos y materiales didácticos descritas en Carretero, Coriat y Nieto (1995; pp. 82-3).

Recursos

«Se entiende por recurso cualquier material, no diseñado específicamente para el aprendizaje de un concepto o procedimiento determinado, que el Profesor decide incorporar en sus enseñanzas. Son recursos habituales la tiza y el encerado o el cuaderno del alumno. También lo son, sin ninguna pretensión de exhaustividad, la calculadora sencilla, científica o gráfica, la fotografía en papel o en diapositivas, la prensa, programas y anuncios de radio y televisión, los vídeos, los programas de ordenador llamados "de propósito general" (procesadores de textos, hojas de cálculo, editores de gráficos, gestores de bases de datos), los juegos, el retroproyector y la historia de las matemáticas.»

Materiales didácticos

«Se distinguen de los recursos porque, inicialmente, se diseñan con fines educativos (si bien, en general, un buen material didáctico trasciende la intención de uso original y admite variadas aplicaciones; por ello, no hay una raya que delimite claramente qué es un material didáctico y qué es un recurso).

Son ejemplos de materiales didácticos los siguientes: las hojas de trabajo preparadas por el profesor en una unidad didáctica, los programas de ordenador de propósito específico (como, por ejemplo, algunos "paquetes" de estadística elemental o de probabilidad), distintos materiales manipulativos como los troqueles de polígonos del mismo lado que permiten construir diferentes poliedros, los ábacos, los papeles pautados, los geoplanos, los dados, las fichas de colores y los cordeles, por citar solamente unos pocos.

El uso de materiales didácticos y de recursos impone condiciones generales que merece la pena explicitar. Se necesita:

- Una disponibilidad en el momento en que se decide usar; esto conlleva, a veces, dificultades previas de presupuesto y de gestión.
- Un equipamiento suficiente para todos los alumnos (o los grupos).
- Una cierta práctica, por parte del profesor y de los alumnos, en el manejo antes de empezar a razonar matemáticamente con ellos.
- Una temporización adecuada que permita extraer consecuencias a la mayoría de los alumnos en los momentos previstos (aunque estas consecuencias no se caractericen todas por el mismo nivel de profundización).»

Listas de materiales didácticos y recursos

Se encontrará alguna información explícita sobre marcas comerciales en el Capítulo "Recursos Materiales" del libro "Matemáticas" (Secundaria Obligatoria), editado por el Ministerio de Educación y Ciencia, 1992, páginas 199 a 222.)

Más recientemente, la Consejería de Educación del Gobierno de Canarias ha editado una guía de Recursos para la Educación Secundaria: (Fernández, 1996).

Las revistas *Suma* y *Epsilon*, entre otras, incluyen secciones dedicadas a presentar materiales y recursos; casi siempre estas presentaciones incluyen ideas para su uso en las clases de matemáticas.

En general, las empresas comercializadoras publican catálogos (no los actualizan con la misma frecuencia, conviene asegurarse de que se tiene entre las manos el último de los publicados).

Un nuevo recurso, la información sobre clases y problemas, empieza a estar fácilmente disponible a través de Internet (principalmente, en idioma Inglés). He seleccionado dos direcciones de páginas Web (Febrero de 1997); en la primera, una corta navegación permitirá encontrar enunciados y soluciones de problemas así como planes de clases. La segunda dirección exige navegar algo más hasta llegar a enunciados de problemas de matemáticas:

http://forum.swarthmore.edu/dr.math/dr-math.html

(La primera parte de la dirección anterior –hasta edu/ incluido– permite acceder a la página principal del Math Forum, que aporta informaciones relacionadas con la Educación Matemática y la Investigación y permite el acceso a foros específicos.)

http://www.mathpro.com/math/mathCenter.html

(Esta página permite navegar por el mundo de los problemas de matemáticas, a través de revistas, electrónicas o no.)

Razones para usar materiales didácticos y recursos

Cada material didáctico modeliza parcialmente el rico y extenso sistema de relaciones que corresponde a un tema de matemáticas. He aquí algunos ejemplos:

- Las Hojas de trabajo dan prioridad absoluta a las relaciones entre símbolos y a las representaciones planas.
- Los cubos macizos (cerrados) modelizan algunas relaciones en el cubo (como paralelismo y perpendicularidad de aristas y caras o cruce de aristas).
- Los esqueletos de cubos modelizan, principalmente, relaciones entre partes (o secciones)

La decisión genérica de ir ampliando el abanico de materiales didácticos y recursos está ligada a cambios de actitud de los Profesores sobre las relaciones de enseñanza y aprendizaje. Supone el establecimiento de nuevos equilibrios en la consideración de ambos. Un criterio que ayuda a considerar como positiva la variedad de materiales didácticos y recursos es lo que la LOGSE engloba bajo la etiqueta *atención a la diversidad*.

Ejemplo 1

Consideremos el siguiente problema: «En el cubo de la Figura 1 marcamos los puntos A, B, C y D. A y C son vértices del cubo. B y D son puntos medios de aristas. (1) ¿Definen esos cuatro puntos un rombo? En caso afirmativo, (2) ¿cuánto miden sus diagonales?»

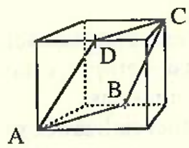


Figura 1

Pasemos por alto la primera pregunta, aceptando que se trata de un rombo, y analicemos la segunda. Los alumnos "ven" sobre la Figura 6.1 que el segmento AC coincide con la diagonal del cubo; en cambio, muy pocos llegan a comprender que el segmento BD coincide con la diagonal de cara. Un cubo macizo ayuda a alcanzar esa comprensión; después de marcar los puntos B y D en ese objeto físico la conclusión tarda poco tiempo en obtenerse. (Una alumna explicó que lo había comprendido desplazando sus dedos, colocados en B y D, hasta tocar dos vértices opuestos de una misma cara; utilizó sin saberlo una traslación.)

Invito al lector a contestar a la primera pregunta usando el esqueleto de un cubo.

Este ejemplo muestra una *condición esencial* para el uso de materiales didácticos y recursos:

«Las tareas que se propongan deben estar muy bien definidas para evitar el exceso de dispersión en los trabajos de las alumnas y alumnos.» (Carretero y otros, o.c.)

Más abajo veremos otros ejemplos con tareas mucho más abiertas que en el caso del rombo, pero siempre tenderán a estar "muy bien definidas".

Los recursos y materiales didácticos también tienen una incidencia en las actitudes de los alumnos hacia las matemáticas. La posibilidad de "salir" de la lógica implícita en el libro de texto, los apuntes, las Hojas de trabajo y las fotocopias tarda un tiempo en imponerse, pero termina haciéndoles partícipes de dos grados de libertad asociados a los materiales y recursos manipulativos:

- en primer lugar, es posible comprender una afirmación del Profesor o una pregunta;
- en segundo lugar, es posible encontrar una respuesta o un razonamiento (aunque no siempre sea posible presentarlos simbólicamente).

Ejemplo 2

En un examen se pidió «estimar el volumen en litros de una caja de zapatos (del número 38) indicando cómo haces la estimación». Muchas respuestas se orientaron a estimar las tres dimensiones básicas de la caja (en cm), calcular el volumen con ayuda de la fórmula largo x ancho x alto y expresarlo en litros (hubo muchos errores al pasar los cm^3 a litros; nadie expresó directamente las dimensiones en dm). Algunos alumnos optaron por imaginar cuántos paquetes de 1 l de leche cabrían en esa caja de zapatos; esto les llevó a usar un estilo de respuesta muy matemático: al decir «entre 3 y 4» o «entre 4 y 5» litros, tuvieron la suerte o el saber necesarios para dar el resultado usando una acotación.

Estos ejemplos también ilustran otra cualidad potencial distintiva de los materiales didácticos y recursos manipulativos:

- En primer lugar, liberan la imaginación del esfuerzo necesario para seguir un argumento significativo escrito o hablado. (En el Ejemplo 1, la alumna mencionada pudo establecer una relación que, de otro modo, le habría estado vedada –la habría aceptado autoritariamente–.)
- En segundo lugar, potencian la imaginación para idear modelos o adaptaciones del problema que ayudan a resolverlo significativamente. (En el Ejemplo 2, donde no se usaron materiales explícitamente, la imaginación aportó un poderoso criterio de estimación.)

Sin embargo, los recursos y materiales didácticos no son panaceas; su "rentabilidad" en las clases de matemáticas debe valorarse siempre en contexto y a medio plazo. Es aquí donde el sentido crítico del Profesor juega un papel básico:

- ¿Tengo confianza en las potencialidades didácticas del material que me propongo usar?
- ¿He conseguido integrarlo en las actividades o tareas de los Alumnos?

– ¿Qué ventajas e inconvenientes soy capaz de observar cuando la actividad o tarea se realiza con ese material? (Dificultades o no en la gestión de la clase; discusiones matemáticas suscitadas o no por el material (en tanto que modelo físico de determinadas relaciones.)
– ¿Lo volveré a usar? En caso afirmativo, ¿qué modificaciones introduciré en las actividades o tareas?

3. UN EJEMPLO DE RECURSO: LA FOTOGRAFÍA

La fotografía se viene utilizando de muy diferentes maneras.

– En diapositivas, suelen usarse para ilustrar algún concepto matemático (por lo general, geométrico) y sucesivos detalles del mismo.
– Son muy conocidas las exposiciones *Fotografía y matemáticas* que, anualmente, aportan una panorámica de la inventiva y capacidad de los Alumnos para establecer, reconocer o descubrir relaciones matemáticas a través de la fotografía.

Una actividad y su historia

Quisiera relatar aquí una actividad que realiza mi alumnado en Primer Curso de los Estudios de Magisterio (varias titulaciones) en el marco del tema de Geometría. La "historia" se adapta sin dificultad a las matemáticas de ESO y Bachillerato, con o sin apoyo en otras materias tradicionalmente más manipulativas.

El planteamiento básico es el siguiente: casi todos los alumnos proceden de COU, tienen una aceptable formación en geometría analítica y una escasa visión espacial. El objetivo de la actividad es, precisamente, desarrollar esa concepción espacial.

En esencia, la tarea consiste en fotografiar "algo" y describir geométricamente los objetos que se ven en el encuadre de la foto. Los alumnos pueden buscar objetos espaciales y planos, así como transformaciones geométricas "en acto".

El propio enunciado ha ido evolucionando desde el curso 1990/91 en que comencé a proponerla tras quedar fuertemente impresionado por el concurso Fotografía y Matemáticas, que el Profesor D. Evaristo González viene realizando con el alumnado del Colegio «Sierra Nevada» de Granada (Primaria y Primer Ciclo de ESO), entre otros (González (1989a, 1989b, 1997).)

Al principio, la actividad de los alumnos exigía una fuerte inversión de tiempo de evaluación, ya que no es fácil comprender la descripción de la foto y ponerse en el lugar de cada alumno; generalmente, les hacía venir a Tutoría para que explicaran lo que habían visto y lo que habían querido decir.

Me fui convenciendo de que la tarea de evaluación debía integrarse en la propia actividad, de manera que mi trabajo como evaluador no se orientara hacia el contenido de la foto y su correspondiente descripción, sino a la coherencia entre el uno y la otra. Cada variante exige esperar un año. Sucesivamente, intenté:

- la actividad como tarea de pequeño grupo con exposición en clase de la descripción (y respuesta consiguiente a las peticiones de aclaración);
- la actividad como tarea de pequeño grupo con valoración crítica y descripción de desacuerdos.

Ninguna de estas opciones resultó convincente; la primera, porque el gran grupo no se interesaba verdaderamente en las fotos ajenas (prácticamente, sólo este Profesor pedía aclaraciones) y la segunda, porque aumentaba el volumen de material que tenía que evaluar.

Durante el Curso 95/96, encontré una nueva idea de ataque. Debo reconocer que no se me ocurrió inmediatamente y que fue resultado de un encuentro casual: estuve a punto de "chocar" en la Facultad con unas alumnas que transportaban una maqueta y, tras excusarnos y comprobar que la maqueta no había sufrido daños, me interesé por su contenido y dificultad de realización.

La maqueta me dio la idea básica con la que estoy trabajando actualmente.

La actividad, para pequeños grupos, consiste en hacer dos fotos una descripción y una maqueta; la primera foto y la descripción se refieren a lo ya indicado. Con ayuda de esa descripción, los alumnos hacen una maqueta en plastilina u otro material, fotografían la maqueta y entregan: las dos fotos y la descripción de la primera. (La maqueta no es necesaria.)

Esta solución, sin ser perfecta todavía, incorpora innumerables ventajas. La más importante no es que se aumentan las tareas de los alumnos (por ejemplo: para construir una maqueta tienen que tomar decisiones sobre la escala y sobre los materiales a usar), sino que se afronta de manera elemental, como se indica en la Figura 2, el trabajo con cuerpos y figuras como modelos del espacio físico (Carretero y otros, o.c., p. 78).

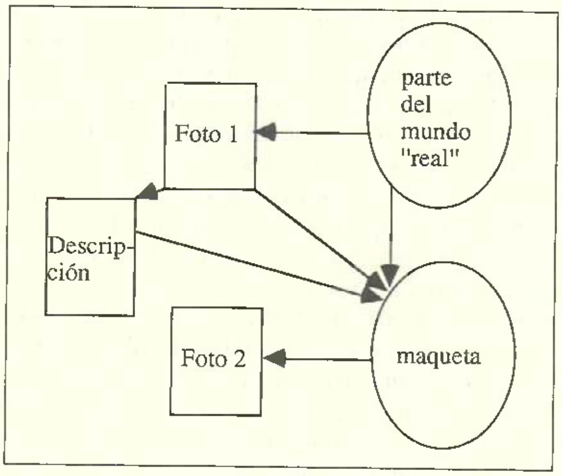


Figura 2

En segundo lugar, el tiempo de evaluación (y, por tanto, de comentario de los trabajos) se reduce espectacularmente; en cierto modo, la Foto 2 da un resumen sin palabras de la descripción, de modo que puedo apelar a los siguientes criterios para comentar los trabajos: Plano-espacio, Descomposición, Redacción y Nota resumen.

En "Plano-espacio", valoro la lista de cuerpos y figuras usados, así como el equilibrio entre los elementos planos y espaciales. Cualquier tendencia a trabajar en el plano queda limitada por la construcción de la maqueta. (Excepcionalmente, alguna Foto 2 muestra que los alumnos han trabajado exclusivamente lo plano. Un grupo fotografió un pequeño puente y la maqueta que construyó representaba una vista frontal –alzado– construida con varillas hechas en plastilina.)

El apartado "Descomposición" lo utilizo para comparar las Fotos 1 y 2. Por ejemplo, me pregunto: ¿Cuáles son los elementos geométricos que se mantienen en ambas fotos? ¿Cuáles se pierden entre la 1 y la 2? Este ítem presenta algunas dificultades, de las que mencionaré dos:

1. La inmensa mayoría de los pequeños grupos hace una selección adecuada de la geometría de la Foto 1 y, apoyándose en la descripción, compone la maqueta, tal y como se pidió, a partir de la descripción; sin embargo, algunos pequeños grupos dan prioridad en su respectiva Foto 1 a un solo objeto geométrico, con lo que la maqueta queda muy simplificada.
2. Los grupos, en ocasiones, primero imaginan la maqueta y, a partir de ella realizan la Foto 1; así, un pequeño grupo utilizó un rincón vacío de una habitación donde colocó una serie de objetos físicos fácilmente reconocibles geométricamente: caja de leche, colador, etc.

Atribuyo estas dificultades a una incomprensión o a una insuficiente explicación de las exigencias de la actividad.

En "Redacción", valoro la descripción (puente entre Foto 1 y Foto 2). Suele ser escueta y se orienta siempre a describir propiedades y nombres de los objetos básicos que se ven en la maqueta, raramente se reconocen transformaciones. Por último, la "Nota resumen", contiene lo que indica su nombre, una puntuación en una escala arbitraria. La calidad de las fotografías no se tiene en cuenta, sólo los tres descriptores indicados.

En Anexo de este capítulo doy un ejemplo: el "mejor" trabajo presentado durante el Curso 96-97. El grupo vino tres veces a la Tutoría para pedir aclaraciones sobre las tareas. Se podrán observar las dos fotos (originalmente, en color) y algunos fragmentos del texto recibido.

La principal razón por la que, año tras año, voy modificando la actividad sin renunciar a ella a pesar de que nunca quedo completamente satisfecho, es la siguiente: la tarea impone una manera de "ver" la realidad circundante. De algún modo, los Alumnos reciben la tarea como una consigna («reconocer la geometría en el entorno») mal comprendida al principio. A medida que ponen manos a la obra, van (auto)educándose en un tipo de percepción abstracta a través de la cual cualquier objeto físico se simplifica (geométricamente hablando) hasta quedar reducido a un objeto conocido y, por tanto, descriptible con palabras. Es cierto que algunos grupos se limitan a fotografiar "lo primero" que ven; en este caso, la foto no es útil y tienen que volver al escenario real para comparar y anotar.

4. CONSIDERACIONES CURRICULARES

Las creencias sobre las matemáticas de cualquier Profesor deben considerarse desde dos perspectivas:

1. Ajuste con la cultura escolar del Centro en que trabaja y, en particular, con las creencias de otros colegas del Departamento de matemáticas.
2. Ajuste con la realidad educativa (niveles, heterogeneidad, motivación de sus Alumnos).

Esto dos niveles de ajuste no siempre son coherentes, al menos en el tema que nos ocupa. Encontramos Profesores que justifican el uso de materiales didácticos aludiendo al escaso interés de sus Alumnos hacia las matemáticas; otros, sin confiar plenamente en su uso, se encuentran con que el Departamento ha asumido su empleo (y lo suscita). En ocasiones, si un Profesor desea usar en sus clases cubos de porespán (por ejemplo), no sólo tendrá que diseñar sus actividades de Aula de manera que dicho material tenga cabida, también deberá convencer a sus colegas de Departamento sobre lo acertado de la decisión y responder a objeciones genéricas, principalmente relacionadas con el retraso que el uso de esos cubos genera en la impartición del programa acordado por el Departamento. La inmensa mayoría de los Profesores dice simplemente: «no; ahí no hay matemáticas».

En parte, el uso de recursos y materiales didácticos constituye un problema de decisión que se relaciona con las creencias sobre las matemáticas (y su aprendizaje) por parte de distintas personas. Si se considera que pensamiento, acción y lenguaje se apoyan mutuamente para lograr nuevos aprendizajes, el uso de materiales y recursos está más justificado que si se consideran aisladamente dichas componentes del quehacer matemático. Análogamente, si se atribuye a los compañeros y compañeras del Grupo-Clase un papel en el aprendizaje individual, también los materiales didácticos y recursos tendrán mejor cabida que si se interpreta el aprendizaje como una simple cuestión individual.

La decisión genérica sobre el uso de una colección más o menos amplia de materiales didácticos y recursos se toma desde el Departamento de matemáticas y está condicionada por la cultura escolar del Centro. (Sobre la cultura escolar, ver Miller y Lieberman (1988).) En Coriat y Martínez (1997, p. 3) se reconoce que el Departamento de matemáticas toma decisiones acerca de los contextos (un contexto básico para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas lo constituyen, precisamente, los materiales didácticos y recursos).

En cualquier caso, no basta con adoptar tal decisión; el uso de materiales y recursos constituye también un problema didáctico. Ya se han indicado algunas condiciones generales que es necesario satisfacer; conviene mencionar algunas otras, también generales, que inciden en la resolución sobre el papel de dicho problema didáctico. Para su descripción, parece conveniente separar (en algunos momentos de la exposición) los materiales manipulativos de los recursos simbólicos (ordenadores y calculadoras).

4.1 Universalidad de materiales manipulativos y recursos simbólicos

Me atrevo a afirmar que, para cualquier tema de ESO o Bachillerato (con no más de dos excepciones, que comentaré más abajo), es posible encontrar o idear un material didáctico o recurso *ad hoc*. ¿Es posible o deseable desarrollar todos los temas de una programación usando materiales didácticos o recursos? Ignoro si tiene sentido enunciar una respuesta afirmativa; lo que sí sabemos es que ningún Seminario o Departamento de matemáticas español aceptaría actualmente dicho desafío (salvo para propósitos de experimentación), con lo que debemos concluir que no es posible trabajar todos los temas usando materiales didácticos. Se trata de una limitación que refleja, por supuesto, más una situación actual que una cuestión de principio, pero conviene atenerse a ella.

De esto se deduce una importante consecuencia: en los niveles de planificación –Secuenciación, Organización y Actividades de Aula– (v. Carretero y otros, o.c.), el Departamento de matemáticas y los Profesores deben precisar claramente cuáles son los temas que se van a trabajar en clase con materiales didácticos. Posiblemente la elección no se hará apelando a razones de principio; más bien, se usarán materiales en los que se den las condiciones de uso indicadas en 6.1; aquí el énfasis queremos ponerlo en la selección necesaria de materiales desde el punto de vista de la planificación.

Dos son los principales criterios que guiarán las decisiones de los Departamentos a la hora de realizar tal selección: versatilidad y no-exhaustividad. De ellos surgirá una característica que no suele mencionarse: la posibilidad de plantear problemas (pseudo)abiertos.

(A) El caso de los materiales manipulativos

Versatilidad frente a uniformidad

Algunos materiales didácticos son adecuados para actividades muy variadas mientras que otros (salvo que se inventen nuevas actividades) son de uso más uniforme. Esto último ocurre, por ejemplo, con los dominós, que "solamente" suelen usarse para enlazar objetos matemáticos siguiendo algún criterio (generalmente, si se cambia de criterio se necesita un nuevo dominó). Mucho más versátiles son los polígonos, troquelados o de plástico, a la hora de afrontar situaciones relacionadas con el espacio; un simple cubo puede usarse en actividades de reconocimiento (desde caras, vértices y aristas hasta elementos que lo dejan invariante), de razonamiento (retómese el Ejemplo 1, pregunta (1) con un cubo macizo), de volumen o de compactación.

No Exhaustividad intrínseca

Los materiales manipulativos modelizan físicamente algunas relaciones de un sistema matemático (pero no todas). Pueden usarse de modo exhaustivo para desarrollar un tema, pero el Profesor (o el Departamento) no debe olvidar que, junto con sus cualidades, incorpora limitaciones y, con toda metodología, se suscitan dificultades debidas al material.

Ejemplo 3

Los geoplanos n x n modelizan el plano de un modo discreto; no es posible materializar una recta que no pase por dos puntos de la cuadrícula, siendo el caso que hay rectas que solamente pasan por uno de tales puntos (como $y=\sqrt{2}\,x$), y tampoco hay tres puntos (de la cuadrícula) que formen un triángulo equilátero, lo que prueba que estamos ante un modelo menos potente que el generado por la regla y el compás. A pesar de sus limitaciones, los geoplanos aportan la posibilidad de indagar y obtener, de manera sistemática, respuestas a preguntas matemáticas no triviales, como: polígonos diferentes (construibles en el geoplano) de área dada o de perímetro dado; caminos para circular entre dos puntos dados (con o sin posibilidad de retroceso, "tocando" exactamente o como máximo k vértices); polígonos constructibles en una cuadrícula.

Análogamente, las regletas de Cuisenaire acompañan algunas Actividades de aprendizaje de la medida de segmentos, pero, llegado el momento (y éste ocurre, salvo excepciones, durante la Secundaria Obligatoria), es necesario abandonarlas para enriquecer la fenomenología de la magnitud distancia, que no se limita a longitudes de segmentos ostensibles, sino que abarca también la distancia entre dos puntos dados (sin "nada" que los una "físicamente", salvo la comprensión de que definen un segmento) y la distancia recorrida por un punto al moverse entre dos posiciones dadas.

Problemas abiertos

La modelización inherente en todos los materiales manipulativos tiene también una ventaja general: permite dar vida, sin autoritarismo por parte del Profesor, a la noción de problema abierto (en matemáticas). La imposibilidad provisional de construir determinadas configuraciones (triángulo equilátero en el geoplano n x n; tetraedro [regular] en los mecanos habituales; raíz cuadrada de 2 con las regletas de Cuisenaire) ayuda a introducir, desde edades tempranas, la necesidad de convencer y demostrar en matemáticas; hay un paralelismo evidente entre las siguientes afirmaciones:

- no es posible construir un triángulo equilátero en un geoplano n x n, pero sí con regla y compás;
- no es posible construir un cuadrado del mismo área que un círculo dado con regla y compás, pero sí con la integral de Riemann.

Casi todos los Profesores estamos convencidos de que la segunda afirmación no se puede justificar plenamente en Secundaria; en cambio, la primera sí está al alcance de los estudiantes avanzados de estas Etapas, lo que ayuda a fortalecer las conexiones entre conocimientos procedentes de distintas partes de las matemáticas.

(B) El caso de los recursos simbólicos

Selección de características

Por lo que respecta a los recursos con capacidad de procesamiento simbólico, como calculadoras y programas de ordenador, conviene hacer notar algunas características específicas (además de la posibilidad de realizar simulaciones, que es general prácticamente en todos ellos).

- Cuando se necesita manejar muchos datos numéricos (como en estadística), el Departamento tiene que decidir si va a dar más importancia al manejo de los algoritmos o a la interpretación de los resultados obtenidos con éstos. Los paquetes estadísticos no eximen al usuario de organizar bien la información de entrada, sólo de realizar operaciones tediosas.

- Los programas de geometría plana equivalen, estructuralmente, al geoplano (la cuadrícula está constituida por pixels) pero simulan el plano euclídeo continuo con precisión adecuada (aunque es posible encontrar "contraejemplos" sencillos en los que se pone de manifiesto el elemento estructural, como ocurre cuando se trata de hallar la bisectriz de un segmento constituido por un número pequeño y par de pixels). Esta limitación es comparable (en sus efectos) a la que tienen la regla de un solo borde y el compás físicos a la hora de realizar una construcción concreta sobre el papel. Recuérdese que, con las tarjetas gráficas habituales en los ordenadores personales, 1 pixel ocupa una superficie del orden de 10^{-1} mm^2, inferior (pero comparable) a la de un "punto" marcado con un lápiz de 0'5 mm.

- Los programas de cálculo simbólico permiten, por ejemplo, transformar expresiones, simplificar o resolver ecuaciones; en general, su potencia de cálculo es superior a las necesidades conceptuales de la Secundaria.

- Las representaciones gráficas generadas con calculadora gráfica o con ordenador simulan las funciones mediante sucesiones de pixels que, a simple vista, se confunden con las gráficas de perfil suave y aspecto continuo.

- En los programas de propósito general (procesadores de texto, hojas de cálculo, etc), no conviene descartar el trabajo con las popularmente llamadas «macros» (secuencias de acciones muy repetidas por cada usuario que el propio programa se encarga de almacenar y, en su caso, ejecutar);

las macros son ejemplos de "destrezas" operatorias. La comparación de macros inventadas por diferentes Alumnos permite elegir la mejor (siguiendo algún criterio, como "mínimo" número de pulsaciones en la macro), relativizar la importancia de las destrezas (una acción del ordenador se puede obtener siempre de varias maneras) y justificar la conveniencia de que las personas dispongamos también de algunas de ellas, prestas a ser usadas en cualquier circunstancia.

Posibilidades específicas

Hay mucha documentación acerca de las posibilidades de uso de estos recursos simbólicos en las Etapas de Secundaria. Afortunadamente, comienza a haberla también en Castellano. Remito al lector al trabajo de García, Martínez y Miñano (1995), donde se hallarán ejemplos concretos con calculadoras y diferentes programas de ordenador. En general, los manuales que acompañan a los programas contienen ejemplos que son escolarmente adaptables; por otra parte, el desarrollo actual de las técnicas de programación permiten disponer de ayudas sensibles al contexto que facilitan enormemente el empleo rápido de nuevos programas.

(C) ¿Una o dos excepciones?

Los materiales manipulativos no pueden hacer ostensible ningún proceso infinito (pero sí su patrón estructural, si existe) ni el continuo (como consecuencia de la estructura cospuscular de la materia). Algunos programas de cálculo simbólico pueden realizar un proceso infinito de cálculo con una variable discreta, pero no con una variable continua (en el sentido del Análisis clásico).

Ejemplo 4

En Coriat y otros (1989; pp. 23-7) se describe cómo Alumnos de 2° de BUP consiguieron calcular la serie

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{4^n}+\ldots$$

recortando cuadrados y accediendo así al entendimiento del proceso que, evidentemente, no puede efectuarse en su totalidad.

También en Coriat, Martínez y Baena (1993) se describe el fenómeno del agotamiento, es decir, la limitación intelectual, con que se encuentra un resolutor, de efectuar indefinidamente operaciones manipulativas o numéricas con un patrón de actuación predeterminado (el hecho de disponer de una máquina de cálculo en el caso numérico no aporta ninguna mejora).

Ejemplo 5

Algunos programas de ordenador que manejan expresiones simbólicas permiten realizar uno de los pasos críticos en los denominados cálculos por inducción. En García y otros (1995, p. 81) se podrá ver un caso concreto. Ese ejemplo ilustra cómo las herramientas de cálculo se ponen al servicio del resolutor. Sea a demostrar la conjetura:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

1°. La propiedad se cumple para $n=1$ (ambos términos son idénticos).

2°. Si la propiedad se cumple para $n=p$, demostremos que se cumple para $n=p+1$. (Esta parte de la demostración es la que puede hacerse cómodamente con ayuda de algunos programas de cálculo simbólico.)

Los cálculos por inducción no agotan las variantes de la inducción matemática (Goloviná y Yaglom (1981) describen hasta seis usos diferentes sólo en geometría).

No cabe duda que el avance en las técnicas de programación permitirá en breve afirmar que las relaciones de recurrencia serán completamente manejables con ayuda de ciertos programas.

Ejemplo 6

Al comenzar el Análisis clásico, justo después de dar una definición de función continua en un punto, los Alumnos se encuentran con un enunciado típico, como: «demostrar, utilizando la definición, que la función $f(x) = \frac{x}{x+1}$ es continua en $x=0$». En la respuesta es necesario manejar un proceso infinito continuo en un número finito de etapas que, hasta donde he podido indagar, los ordenadores no saben realizar. En los ordenadores se pueden instalar programas del tipo "motor" de inferencia o cualquier otro ingenio procedente del campo de la Inteligencia Artificial. Gracias a ellos, las máquinas pueden reconocer que f se expresa simbólicamente como cociente de dos polinomios, apelar a una regla (teorema) que afirma: una función racional es continua en todo punto en que está definida, y concluir que f es continua en $x=0$. Se trata de un razonamiento impecable que no utiliza proceso infinito alguno, sino patrones de reconocimiento de expresiones simbólicas y reglas de decisión. En espera de futuras producciones de los ingenieros, podemos afirmar que el manejo de los procesos infinitos continuos constituye la única barrera matemática actualmente existente entre la inteligencia humana y la inteligencia artificial.

En cierto modo, el continuo matemático (el cuerpo R de los números reales definido en términos del Análisis clásico) constituye la *terra incognita*, el *non plus ultra* de los programas de ordenador actuales. (Algunas cuestiones relacionadas con la riquísima variedad de números irracionales y su "determinación" con ordenadores podrán consultarse en Recio (en prensa).)

Resumo estos comentarios sobre los materiales manipulativos y los recursos simbólicos con unas pocas indicaciones:

- pueden ayudar en prácticamente todas las situaciones matemáticas escolares (pero no ayudan obligatoriamente);
- es conveniente circunscribir su uso en clase para que las propiedades del modelo no se impongan sobre las relaciones matemáticas que se desea trabajar con ellos (esta restricción también puede eliminarse aumentando a más de uno el tipo de material elegido).

Los materiales y recursos son excelentes mediadores para "dar sentido" en la enseñanza comprensiva. El Profesor que no desee utilizarlos puede apelar a limitaciones como las indicadas, pero la experiencia demuestra cada vez más que un uso variado y bien temperado de los mismos es fructífero a medio plazo, aportando a los Alumnos una mayor grado de autonomía, y una mejor capacidad para dar sentido y profundizar en matemáticas.

4.2 Materiales y recursos como organizadores de las actividades

En este último nivel de planificación de la Interacción con el Grupo-Clase (las Actividades), las cuatro variables curriculares (Objetivos, Contenidos, Metodología y Evaluación) deben contemplarse microscópicamente, a partir de una idea concreta y teniendo en cuenta a los Alumnos a los que va a ir dirigida. La última condición es la más importante (porque las Actividades se diseñan para que los Alumnos aprendan) y la más limitadora (porque sólo el Profesor conoce bien a sus Alumnos, de manera que unas consideraciones generales como las de este capítulo tienen que ser "filtradas" por la cultura escolar de cada Centro y por cada Profesor en particular antes de que sean operativas).

Una vez que se ha decidido desarrollar una idea con un material didáctico o recurso, el Profesor todavía debe tomar algunas decisiones.

1. ¿Se usará para fines expositivos (del Profesor) o se permitirá que los Alumnos los toquen? En este capítulo supongo que se toma la decisión de que los alumnos "manoseen". No obstante, existen magníficos materiales que permiten exhibir ideas concretas en matemáticas.

Ejemplo 7

El metacrilato transparente, en distintos colores, está recibiendo amplísimas aplicaciones geométricas. Las principales secciones planas de poliedros y cuerpos redondos (incluyendo las cónicas) resultan así directamente observables.

2. ¿Se usará material ya preparado o lo construirán los Alumnos (o ambas cosas)? Realmente, una primera consideración de esta cuestión la hace parecer irrelevante; no es así, en absoluto. Un material ya fabricado tiene incomparables ventajas sobre un material artesanal, pero la fabricación "enseña" mucho, a quien reflexiona sobre ello, acerca de las limitaciones de los materiales. Conjuntamente, ayudan a perfilar la comprensión de que se trata de modelos mejorables y físicos de relaciones matemáticas. En ocasiones, con simples pliegues

de folios, he sentido la necesidad de preparar algunos ejemplos para estar seguro de que los Alumnos razonaban sobre objetos físicos "cercanos" a los del enunciado de un problema.

Ejemplo 8

> En un folio no transparente, marcar un punto o una recta y ponerlo del revés. Marcar nuevamente. ¿Se trata del mismo punto, de la misma recta? El pequeño grosor del folio ayuda a comprender que estamos ante un modelo del plano, pero que determinadas propiedades debe analizarse con atención. Como el folio, el plano tiene dos caras; a diferencia del folio, las caras del plano sólo son accesibles con la imaginación y el pensamiento, no con una acción "física". Pese a todo, usamos la misma expresión coloquial ("dar la vuelta") cuando sometemos el plano a un giro de 180º alrededor de una de sus rectas.

3. ¿Se apelará al material o recurso desde el primer momento o se recurrirá a él en el caso de que surjan dificultades? Se trata de una decisión metodológica no siempre trivial. Es trivial cuando el enunciado de la situación se refiere a objetos concretos (como cubos, calculadoras o geoplanos), pero no lo es cuando, constatada la dificultad y el "atasco" por parte de los Alumnos, el Profesor, en lugar de dar la respuesta, recurre a los materiales como sugerencia para volver a analizar la situación. (Esto es lo que hice en el Ejemplo 1, pidiendo a quienes tuvieran una respuesta que no la dieran sin comprobar, con ayuda del material, que era acertada y a quienes no la habían obtenido que se dieran otra oportunidad tocando los cubos macizos y los esqueletos de cubos.)

4. En el caso de los ordenadores: ¿se darán las clases en el Aula de Informática buscando Actividades que exigen el uso del ordenador?

Ejemplo 9

> 1. Las Hojas de Cálculo constituyen magníficas herramientas para dar significado a preguntas sobre sucesiones y series. Si en la columna A generamos los primeros 500 números naturales, en la B podemos generar los valores numéricos correspondientes a una sucesión como $\frac{n+1}{n}$ y, a la vista de la tabla, contestaremos (por lo menos, empíricamente) a preguntas como: ¿es creciente, decreciente o de otro tipo en el rango de valores calculado?; ¿a partir de qué valor de n se cumple que $a_n < 1'003$?; ¿en qué rango de naturales se cumple que los valores de la sucesión están comprendidos entre 1'5 y 1'99? También haremos conjeturas: ¿parece creciente o decreciente?: ¿a qué valor parece acercarse cada vez más?
>
> 2. Para generar la tabla indicada no es necesario programar la Hoja de Cálculo. La columna A se genera del siguiente modo: colocar el puntero en la celda A1, teclear 1 Intro y recolocar el puntero en A1. Buscar el comando «Serie» y, en el cuadro de diálogo, indicar el salto (1) y el término superior (500) y ordenar que la «Serie» se construya como columna. La columna B se genera así: colocar el puntero en B1 y teclear =(A1+1)/A1 Intro. Volver a colocar el puntero en B1, buscar el ángulo inferior derecho de manera que adopte el aspecto del signo de sumar (+), hacer click y arrastrar hasta B500, soltando entonces el ratón. Con eso queda construida la sucesión.
>
> 3. ¿Conviene que los Alumnos dediquen un tiempo de la clase de matemáticas a construir esta tabla por sí mismos en un ordenador? Se trata de una importante pregunta. Los Profesores que contestan negativamente "ganan" esos 10 minutos para otras cosas. Los que contestan afirmativamente, también creen que los Alumnos "ganan": manejo global de grandes conjuntos de números; potencia de cálculo numérico; observación de limitaciones de las máquinas, etc. Se trata de una decisión muy personal que no debe llevarse a la práctica sin planificación.

Las decisiones correspondientes a al menos uno de estos cuatro puntos, implican secuencias didácticas diferentes a partir de una misma idea concreta.

Ejemplo 10

> Secuencia 1. El Profesor A comienza explicando las progresiones aritméticas y, en un momento dado, pone un problema de aplicación con palillos; espera de este modo recalcar el papel del primer término y la diferencia.
>
> Secuencia 2. El Profesor B decide iniciar el estudio de las progresiones aritméticas con palillos, proponiendo una situación antes de explicarlas de manera más general. (Esta última opción se desarrolla, por ejemplo, en Rico, Coriat, Marín y Palomino (1994, p. 119 y ss.).)
>
> Secuencia 3. El Profesor C opta por las calculadoras (científicas no gráficas). Su situación inicial consiste en pedir a los alumnos que piensen un número y lo introduzcan en la calculadora, tecleen dos veces el signo más, introduzcan otro número y pulsen varias veces la tecla =, anotando todo lo que han hecho. Se trata ahora de interpretar matemáticamente lo que está ocurriendo. Como consecuencia final, explicará las progresiones aritméticas.
>
> Secuencia 4. El Profesor D explica, primero, las progresiones aritméticas. En segundo lugar, lleva a los Alumnos al Aula de informática para que experimenten con la Hoja de Cálculo. Aquí cabe "sumar" 500 términos consecutivos con la fórmula de la suma (ya explicada en clase) o indicando a la máquina que la efectúe (=suma(B1:B500)). Después de una sesión (o dos) de cálculos numéricos propone ejercicios de aplicación y problemas.

Entre estas cuatro secuencias, ¿hay algunas mejores que otras? Teóricamente, no es posible contestar. Se observa en ellas cómo el material o recurso utilizado impone, parcialmente, algunos pasos de la Actividad (incide, por tanto, en la secuencia didáctica y en la metodología) y enfatiza de modo natural algunos contenidos frente a otros (dentro del mismo tema); en este sentido, ese material juega el papel de organizador. Creo que las cuatro secuencias están ordenadas en el sentido de menor a mayor trabajo de gestión por parte del Profesor (el trabajo de explicación es aproximadamente equivalente en todos los casos). Algunos Profesores prefieren hacer mínima la gestión. En todos los casos, el discurso del Profesor es mejor comprendido, asimilado y aprendido por sus Alumnos cuando las tareas se "sienten" como cercanas.

Ejemplos de Actividades más completas con materiales didácticos manipulativos pueden encontrarse, por ejemplo, en Rico y otros (o.c.) y en Baena, Coriat, Marín y Martínez (1996, pp. 208-251).

5. CONCLUSIONES

No hay una manera única de *producir* nuevos conocimientos matemáticos ni un modo único de aprenderlos. La primera parte de la afirmación anterior halla muchos ejemplos en la historia de las matemáticas; Dedekind y Cantor, por ejemplo, no argumentaron de modo equivalente sus respectivas construcciones de la aritmética. La segunda parte de esa misma afirmación es obvia para cualquier Profesor experto.

Los materiales didácticos y recursos aportan a la enseñanza y el aprendizaje una variedad de ayuda potencial a los Profesores y Alumnos durante la Interacción educativa. La variedad también es evidente.

En cambio, la ayuda es sólo potencial por diferentes razones que resumo a continuación.

1. El Profesor, considerado como profesional aislado, no tiene tiempo material de "sopesar" las ventajas e inconvenientes de un material o recurso; posiblemente, tampoco tiene capacidad para valorar adecuadamente todos y cada uno de los materiales actualmente disponibles. Necesita un apoyo y el más natural lo constituye el Departamento de matemáticas en el que se integra. Los otros Profesores, con su crítica, comentario o aliento, siempre en el contexto de la realidad educativa que comparten, son los mejores interlocutores para promover o inhibir el uso sistemático y sensato de materiales didácticos y recursos. Por esta razón, la principal argumentación la he hecho desde la perspectiva de la cultura escolar del Centro. No conocemos maneras sistemáticas de promover o suscitar cambios en las culturas escolares para inducir el uso de materiales didácticos y recursos. La principal vía seguida hasta ahora ha sido la de la innovación, que se instala aleatoriamente en los distintos Centros del territorio. En Formación Permanente se ha abordado el tema, pero desde una política difusa que impide conocer el impacto real. En Formación Inicial, los escasos lugares de España en los que se trabaja con futuros Profesores de Secundaria (como las Universidades de Granada, Autónoma de Barcelona, La Laguna, Almería o Valencia) incluyen de manera sistemática el trabajo con materiales didácticos o recursos (desde una reflexión general hasta un caso práctico), pero no se han hecho seguimientos biográficos para establecer las consecuencias de la formación en este aspecto.

2. Dentro de una cultura escolar, el uso adecuado de materiales o recursos constituye un problema principalmente metodológico para cada Profesor. Una vez conocidas las ventajas y limitaciones principales del "objeto" elegido, es necesario tomar una serie de decisiones para llevarlo a la clase; también es conveniente analizar el comportamiento global del Grupo-Clase para determinar si está ocurriendo algo "nuevo" como consecuencia del uso del material. Cada material o recurso es más adecuado para dar énfasis a determinados contenidos. Así, la Secuencia 4 del Ejemplo 10 parece más adecuada para hacer significativas preguntas en las que intervienen desigualdades –al estilo del Ejemplo 9 (1)–. Esto es general, los cambios metodológicos no se pueden aislar de cambios en los contenidos, objetivos y evaluación.

3. Ni materiales didácticos ni recursos tienen propiedades mágicas. Simplemente, modelizan (o representan) algunas relaciones matemáticas (siempre son pocas, en comparación con la riqueza de relaciones abstractas entre objetos matemáticos) bien a través de los procedimientos de construcción o bien a través de la observación, uso o manipulación. Para que el material o recurso cumpla alguna función positiva en el aprendizaje es necesario que:

– el Profesor indique claramente a sus Alumnos lo que espera que hagan y
– el Grupo-Clase tenga ocasión de reflexionar sobre las relaciones matemáticas efectivamente "manipuladas".

Los materiales y recursos permiten enunciar contextos de aplicación de algunas relaciones que se han visto en el modelo.

4. Cuando el Profesor ha adquirido un cierto dominio con materiales didácticos y recursos (no sólo de su manejo, sino también de su uso fructífero en clase), dispone de una buena herramienta para cumplir un imperativo básico de la LOGSE: la atención a la diversidad. Para lograr el "dominio" indicado se necesita tiempo, años. Una vez conseguido, la acumulación de estrategias metodológicas genera una relativización del discurso del Profesor y potencia la adaptación de éste a las diferentes necesidades educativas observadas en los Grupos-Clase. Serían necesarias políticas de formación permanente mucho más claras y adecuadas que las actuales.

6. ANEXO: UN TRABAJO CON FOTOGRAFÍAS

1. Autoras. Mª Carmen Sánchez Gómez, Rosario Sáez Maldonado, Mónica Saavedra Requena, Mª Angustias Rodríguez Rodríguez, Raquel Quesada Escolano y Patricia Fernández Burgos. (Alumnas de la Asignatura Educación Matemática Infantil, Primer Curso de Magisterio, titulación de Maestro en Educación Infantil, Curso 1996-97.)

2. Descipción general del trabajo. 11 páginas repartidas así: título (1), foto 1 (1), descripción (5), reseña de construcción de la maqueta (1), dos fotos de la maqueta (1), opinión personal [sic] (1) y autoras (1).

La descripción está hecha con ordenador (el texto) y a lápiz (las figuras). Comienza indicando los objetos con sus nombres, «casa», «árbol», «seto», etc. y prosigue con la descomposición geométrica. He aquí algunos fragmentos de ésta y, en su caso, mis comentarios:

> «El edificio está representado por un cubo y su parte superior, el tejado, consta de 2 trapecios paralelos y dos triángulos también paralelos y perpendiculares a los trapecios. Las aristas que unen estos lados del tejado están cubiertas por tejas formando medio cilindro cortados verticalmente pero sin bases semicirculares. De igual modo el tejado está cubierto por estos semicilindros de menor tamaño.»

Comentario: No disponen de nombre geométrico para el tejado, por lo que cambian la descripción y usan términos propios de la geometría plana. La foto 1 permite deducir que ni los trapecios ni los triángulos son paralelos ni los diedros del tejado rectos. En el caso del cilindro, carecen del término cilindro hueco, pero la descripción es correcta. Imputo esta carencia a la propia estructura geométrica de la teja, ya que el término sí aparece (pero no completamente bien usado) unos párrafos más abajo.

> «Debajo de estas tres ventanas [exhaustivamente descritas] y en la izquierda vemos una ventana en forma de círculo que visto desde la perspectiva de la fotografía es un cilindro hueco.»

Así transcurren las cinco páginas: selección de un objeto, descripción y asociación con un cuerpo geométrico o una figura plana.

Dando entrada a las fotos de la maqueta se lee el siguiente comentario:

> «En esta segunda parte, hemos tratado de reconstruir la fotografía. Esto lo hemos hecho utilizando distintos materiales con las formas geométricas correspondientes a la primera parte de nuestro trabajo.
>
> Una vez que hemos conseguido hacer dichas figuras, las hemos unido de forma que pudiéramos representar lo que en la fotografía aparece.
>
> Los materiales utilizados en la realización de esta composición han sido: cartón, corcho blanco, plastilina, palillos, alambre, cerillas, cola, témperas, rotuladores.
>
> A continuación podemos ver la fotografía hecha a nuestra maqueta.»

Y, tras las dos fotografías de la maqueta, dan la siguiente opinión "personal":

> «Este trabajo nos ha resultado muy laborioso a la hora de realizarlo, ya que ha sido mucho el tiempo que hemos dedicado a hacerlo.
>
> En la primera parte, sobre todo al principio nos costó bastante trabajo centrarnos en lo que debíamos hacer, es decir, la descomposición en figuras geométricas. No sabíamos si lo estábamos orientando bien o mal. Más adelante nos fue un poco mejor.
>
> En la segunda parte lo que más difícil nos resultó fue proporcionar bien las distintas partes de la maqueta, además de hacer que ésta se pareciera a la fotografía inicial.
>
> Podemos decir que ha sido un trabajo entretenido y que nos ha ayudado a conocer un poco más que las figuras se encuentran presentes en nuestra vida diaria.»

Foto 1

Foto 2

Foto 3

Notas sobre las fotos

Las tres fotos, inicialmente en color y de escasa calidad técnica, han sido tratadas de la siguiente manera:

- Lectura como imagen en un escáner.
- Transformación de colores en tonos de grises.
- Ajuste de iluminación y suavizado (varios).

El producto final es solamente ilustrativo.

La foto 1 corresponde al "original" y las otras dos a la maqueta.

Capítulo VII

Notas de Historia de las Matemáticas para el Currículo de Secundaria

Modesto Sierra

1. INTRODUCCIÓN

Este capítulo trata acerca del uso de la historia de las matemáticas en su enseñanza seguido de una breves notas históricas que pueden ayudar a los profesores en formación a capturar una nueva perspectiva de las matemáticas y a utilizarla en el aula. En primer lugar, se presentan algunas de las causas que han motivado el renacimiento del interés por la componente histórica, señalando algunas muestras de ese renacimiento y se argumenta sobre las razones que se pueden tener para el uso de la historia de las matemáticas en su enseñanza, enunciando algunas de las maneras en que se puede implementar dicho uso en el aula. A continuación, teniendo en cuenta los bloques de contenidos establecidos por el M.E.C. para la enseñanza secundaria obligatoria, se han elegido cinco tópicos, uno por bloque, de los que se presenta, necesariamente de modo conciso, su desarrollo histórico. Este desarrollo histórico no es exhaustivo y se ha escrito a partir de las lecturas de libros y artículos de historia de las matemáticas, pretendiéndose simplemente abrir nuevos horizontes a los futuros profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria, de modo que la componente histórica sea uno de los organizadores del currículo, posibilitando el uso de estas notas en el aula y para que en futuras lecturas profundicen históricamente sobre éstos y otros temas de las matemáticas.

2. USO DE LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS EN SU ENSEÑANZA

Desde el establecimiento de los sistemas nacionales de educación, en cada generación se han levantado voces en favor de una aproximación histórica en la enseñanza de las matemáticas y, en particular, del uso de la historia de las matemáticas en su enseñanza.

Como señala Fauvel (1991), un fuerte argumento para ello, sobre todo al comenzar nuestro siglo, fue el punto de vista genético debido a Herbert Spencer según el cual la génesis del conocimiento en cada niño debe seguir el mismo camino que la génesis del conocimiento en la raza. En la educación matemática este punto de vista alcanzó su apogeo con las ideas de Benchara Branford en los primeros años de nuestro siglo.

Precisamente en nuestro país, las ideas de Branford influyen de modo importante en la Institución Libre de Enseñanza; en el *Boletín* de la Institución aparecen traducidos algunos de sus trabajos inmediatamente después de su aparición en inglés y la perspectiva histórica en la educación matemática se impone en las ideas de los institucionistas.

> Las investigaciones del autor del presente trabajo (Benchara Branford) se limitan a la educación matemática del individuo por la génesis del conocimiento geométrico de la raza, a demostrar el paralelismo entre el actual modo de evolución del conocimiento geométrico de la raza, desde los tiempos más antiguos a que puede llegar la auténtica información histórica, y el que se sigue para que los jóvenes escolares puedan formar más fácil y eficazmente el suyo en esta rama de la ciencia (Branford,1899, p. 46)

Esta misma idea aparece en el plan de estudios de formación de maestros de la República, el plan de 1931, conocido como *profesional.* En la introducción al cuestionario de la asignatura Metodología de la Matemática puede leerse lo siguiente:

> Tampoco puede prescindirse de incluir en el cuestionario algo sobre historia de la ciencia que estudiamos, ya que la evolución experimentada por la Matemática a través de los siglos ha sido la misma que va sufriendo en nuestro espíritu según la vamos adquiriendo, estimando, por tanto, el conocimiento de la historia de la Matemática, a más de un grado de ampliación de cultura en nuestros alumnos, una base precisa para el estudio de su metodología (Ministerio de Instrucción Pública y Bellas Artes, S.A.)

Más adelante, autores de reconocido prestigio como Rey Pastor y Puig Adam preconizarán esta aproximación histórica, incluyendo en sus libros de texto notas de historia de la matemática adaptadas a los alumnos.

Después de la reforma esencialmente antihistórica de la *matemática moderna*, a partir de los años setenta se ha vuelto a intensificar de nuevo el interés por los aspectos históricos en educación matemática. Schubring (1983) señala algunas muestras de este renacimiento:

i) Fundación del Grupo Inter-IREMs de Historia de las Matemáticas (*Institutes de Recherche pour l´Enseignement des Mathématiques*), cuyo objetivo es la utilización de la historia de las matemáticas en la enseñanza de las mismas

ii) Aparición del Grupo Internacional de Estudio sobre las relaciones entre la Historia y la Pedagogía de las Matemáticas *(International Study Group on the Relations Beetwen History and Pedagogy of Mathematics*) (HPM)

iii) Aparición de trabajos que estudian las relaciones entre historia de las matemáticas y enseñanza bajo puntos de vista diferentes, realizados por autores como Janke, Otte y Schubring (los tres en Bielefeld), Pyenson (en Montreal), Dhombres (en Nantes), Eccarius (en Eisenach) y Filloy (en México D.F.), entre otros

iv) Publicación de trabajos acerca de la enseñanza de las matemáticas desde el punto de vista de sus enseñantes, como los realizados por Howson (en Southampton)

v) Publicación de trabajos acerca de la historia del desarrollo de la Didáctica de las Matemáticas, como los de Glaeser (en Estraburgo) y Schmidt (en Colonia)

Se constata que estas iniciativas conciernen a objetos de estudio relacionados entre sí: uso de la historia de las matemáticas en su enseñanza, historia de la educación matemática y de la didáctica de la matemática.

Ciñéndonos al objeto de este capítulo, es decir, el uso de la historia de las matemáticas en su enseñanza tenemos que destacar, entre otras, las siguientes iniciativas:

i) La publicación en el año 1969 por el National Council of Teachers of Mathematics de la obra *Historical Topics for the mathematical Classroom* en la que se ofrece una serie de materiales históricos para la educación matemática

ii) La obra colectiva de los IREMs franceses *Mathematiques au fil des âges* en la que, previa selección de una serie de tópicos, se ofrece una selección de textos que muestran cómo ha evolucionado históricamente.

iii) Los Congresos del Grupo HPM ya citado, entre los que destacan las dos Conferencias Internacionales sobre Historia y Epistemología en la Educación Matemática celebrados en Montpellier (Francia) en 1993 y en Braga (Portugal) en 1996.

A destacar igualmente el número monográfico que la revista *For the Learning of Mathematics* publicó en Junio de 1991, culminando el interés de esta publicación periódica por fomentar en sus páginas el debate acerca del uso de la Historia de la Matemática en el aprendizaje de las matemáticas.

También en España ha aumentado de modo notable la preocupación por los aspectos históricos en educación matemática desde diversas perspectivas, como se puede comprobar por las ponencias y comunicaciones presentadas en congresos nacionales e internacionales, tesis doctorales, artículos y monografías así como por la organización de seminarios especializados y cursos de doctorado. Sin ánimo de ser exhaustivos se pueden citar los trabajos de M. Hormigón y colaboradores (Universidad de Zaragoza), J. de Lorenzo (Universidad de Valladolid), J. Echevarría y colaboradores (Universidad del País Vasco), M. Martínez (Universidad Complutense), Seminario Orotava de Historia de la Ciencia (Tenerife), L. Puig y B. Gómez (Universidad de Valencia), J. M. Núñez y colaboradores (Universidad Central de Barcelona), L. Rico y M. Sierra (Universidades de Granada y Salamanca, respectivamente). Igualmente desde los poderes públicos se está reconociendo la importancia de esa perspectiva histórica como lo prueban los documentos oficiales donde se fijan los programas mínimos de nuestra materia para educación secundaria, suficientemente conocidos por lo que se obvia su presentación en este trabajo.

Algunas de las razones que se apuntan para la integración de la historia de las matemáticas en su enseñanza son las siguientes:

Para el profesor constituye un antídoto contra el formalismo y el aislamiento del conocimiento matemático y un conjunto de medios que le permiten apropiarse mejor de dicho conocimiento, a la vez que le ayudan a ordenar la presentación de los temas en el currículo. La exploración de la historia por parte del profesor le ayuda igualmente a descubrir los obstáculos y dificultades que se han presentado, los errores cometidos por los propios matemáticos (que a veces se reproducen en los alumnos), así como la visión de la actividad matemática como actividad humana con sus glorias y miserias.

Para los alumnos prepara un terreno donde las matemáticas dejan de jugar el papel de edificio acabado, restableciéndose su estatus de actividad cultural, de actividad humana, a la vez que les ayuda en su motivación para el aprendizaje. Además facilita conocer la génesis de los conceptos y los problemas que han prentendido resolver, ayudando a su comprensión.

Si bien parece que hay una cierta tendencia a considerar interesante el uso de la historia de la matemática en la enseñanza, numerosos investigadores y profesores se cuestionan cómo hacerlo; así, por ejemplo, se constata la enorme dificultad para la comprensión de algunos textos históricos no solamente por los alumnos sino por los mismos investigadores (a título de anécdota, el mismísimo Isaac Newton tuvo dificultades para comprender la *Géométrie* de Descartes, según nos cuenta uno de sus biógrafos). A mi juicio, no se puede dar una respuesta única a esta cuestión y, de hecho, son numerosas las vías que se han utilizado en diversas experiencias e investigaciones. De acuerdo con Fauvel (1991) algunas de las formas del uso de la historia de las matemáticas en el aula son las siguientes:

i) Mencionar anécdotas matemáticas del pasado
ii) Presentar introducciones históricas de los conceptos que son nuevos para los alumnos
iii) Fomentar en los alumnos la compresión de los problemas históricos cuya solución ha dado lugar a los distintos conceptos que aprenden en clase
iv) Impartir lecciones de historia de las matemáticas
v) Idear ejercicios utilizando textos matemáticos del pasado
vi) Fomentar la creación de posters, exposiciones u otros proyectos con un tema histórico
vii) Realizar proyectos en torno a una actividad matemática local del pasado
viii) Usar ejemplos del pasado para ilustrar técnicas o métodos
ix) Explorar errores del pasado para ayudar a comprender y resolver dificultades de aprendizaje
x) Idear aproximaciones pedagógicas al tópico de acuerdo con su desarrollo histórico
xi) Idear el orden y estructura de los temas dentro del programa de acuerdo con su desarrollo histórico

Sin embargo, hay que señalar que en la educación secundaria el uso de la historia de las matemáticas debe estar subordinado a su enseñanza, esto es, no puede tener un fin en sí mismo, ni por supuesto ser materia objeto de examen. Cumpliendo estas condiciones la historia de las matemáticas puede ayudar a restituir a las matemáticas su dimensión cultural a menudo olvidada en su presentación escolar. Las notas que aparecen a continuación, como ya se ha escrito, están pensadas para que el profesor considere la dimensión histórica como uno de los organizadores del currículo y pueda hacer uso de ellas en el aula de alguna de las formas señaladas anteriormente.

3. NÚMEROS Y OPERACIONES: NÚMEROS PERFECTOS; NÚMEROS DE MERSENNE

La presentación a los alumnos de educación secundaria de ciertos aspectos históricos de la teoría de números contribuye a entender que

> Las matemáticas, en fin, constituyen un área particularmente propicia para el desarrollo de ciertas actitudes relacionadas con los hábitos de trabajo, la curiosidad y el interés por investigar y resolver problemas, con la creatividad en la formulación de conjeturas, con la flexibilidad para cambiar el propio punto de vista, con la autonomía para enfrentarse con situaciones desconocidas y con la confianza en la propia capacidad de aprender y de resolver problemas (Anexo del Real Decreto por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria).

La historia de los números perfectos y de los números de Mersenne (1588-1648), que se presenta sucintamente a continuación, utilizada por el profesor de alguna de las maneras señaladas, puede ayudar en este sentido.

Como es bien conocido de todos, los pitagóricos se mostraron vivamente interesados por la teoría de números. Entre ellos están los números perfectos. Un número es perfecto si es igual a la suma de todos lo que le miden excluido él mismo o, en lenguaje actual, si es igual a la suma de todos sus divisores excluido el propio número. Así, son perfectos el 6, 28, 496 y 8128 que ya eran conocidos como tales por los griegos. Pero ¿cómo encontrar números perfectos? Euclides (330?-275? a.C.) en el libro IX de sus *Elementos* demostró que un número de la forma 2^{p-1} $(2^p- 1)$ con 2^p-1 primo, es un número perfecto. Hubo que esperar a Euler (1707-1783) para saber que el teorema recíproco es cierto para los perfectos pares, puesto que probó que todo número perfecto par es de la forma $2^{p-1}(2^p-1)$ con 2^p-1 primo. Y ésta es una de las características sorprendentes de los perfectos, a saber, que hasta ahora no se ha encontrado ningún número perfecto impar, pero tampoco se ha demostrado que, necesariamente todos los perfectos sean números pares.

Algunas de las propiedades de estos números son:

i) Son triangulares, es decir, son sumas parciales de la serie 1+2+3+4+....
ii) Excluido el 6, todo número perfecto es suma parcial de la serie de los cubos de los números impares.
iii) La suma de los inversos de los divisores de todo número perfecto es 2

En las obras que tratan de teoría de números aparecen listas de números perfectos. En Sierra et al (1989) se pueden encontrar los 29 números perfectos hallados hasta 1984.

Dado que la obtención de números perfectos pares está ligada a que 2^p - 1 sea un número primo, este tipo de números es de notable interés. Precisamente se define como número de Mersenne M_n a todo número de la forma 2^p-1; si este número es primo, entonces se llama número primo de Mersenne.

El nombre y la historia de Mersenne es una muestra de cómo se transmitía la ciencia en una época en la que no existía ninguna organización matemática de tipo profesional. En Boyer (1968) podemos leer que Mersenne, fraile minimita, sirvió como central de información por su labor de transmisión de resultados entre los matemáticos de la época.

Volviendo a los números de Mersenne, éste se dio inmediatamente cuenta que si p no es primo entonces M_p tampoco lo es (usando calculadoras en clase se pueden hacer comprobaciones acerca de esta afirmación). Pero, ¿qué ocurre cuando el exponente es primo? Mersenne afirmó que había comprobado que M_p era primo para los primos comprendidos entre 2 y 257 si y sólo si p = 2, 3, 5, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257. Sin embargo, esta afirmación es falsa (también los matemáticos cometen errores); en primer lugar M_{61} es primo. En segundo lugar M_{67} no es primo; esto fue probado de modo indirecto por Edouard Lucas (1842-1891) en 1876. Hubo que esperar a 1903 para concluir que M_{67} no era primo. La puesta en escena de esta demostración es sorprendente y merece la pena ser relatada tal y como lo hace Dunham (1995)

El año fue el de 1903 y el problema fue resuelto en una Reunión de la American Mathematical Society. Entre los conferenciantes programados figuraba Frank Nelson Cole de la Universidad de Columbia. Cuando le tocó hablar, se adelantó al extremo de la sala y en silencio multiplicó 2 por 2, 67 veces, le restó 1 y obtuvo la enorme cifra de 147.573.952.588.676.412.927.

Tras ser testigos de este cálculo sin palabras, los perplejos espectadores observaron atentamente a Cole, quien escribió en la pizarra

193.707.721 x 761.838.257.287

que también calculó en silencio, obteniendo el producto

147.573.952.588.676.412.927

Cole tomó asiento.

Los presentes que acababan de asistir a la descomposición del número de Mersenne $2^{67} - 1$ en dos gigantescos factores quedaron tan sin habla momentáneamente como el mismo Cole. Seguidamente prorrumpieron en un aplauso incontenible y le dieron una ovación prolongada. Este reconocimiento era de esperar que reconfortara a Cole, ya que más tarde admitió que había estado trabajando en este cálculo durante las dos últimas décadas (Durham, 1995, p. 24).

Los números de Mersenne siguen siendo fuente inagotable en la teoría de números por su relación con los primos; de hecho el mayor número primo conocido, hasta 1992, es un número primo de Mersenne $M_{756.839} = 2^{756.839} - 1$, que es un número con 227.832 cifras (¿cómo se sabe que hay este número de cifras?). Sin embargo, el problema general de determinar qué números de Mersenne son primos está aún sin resolver.

4. MEDIDA: DE LAS CONSTANTES NATURALES AL SISTEMA MÉTRICO DECIMAL

La constitución de un sistema universal de medidas no ha sido una tarea trivial en la historia de la humanidad. La historia de esta construcción desde las medidas naturales hasta el sistema métrico decimal puede ayudar a comprender la riqueza de este sistema así como las dificultades (técnicas, políticas, etc.) que surgieron hasta su formulación definitiva.

Desde la más remota antigüedad el hombre sintió la necesidad de medir. En un principio se utilizaron los miembros del cuerpo humano, y, así, en todas partes el dedo, el palmo, el codo, el pie, el paso, etc. han servido al hombre para sus primeras mediciones rudimentarias.

Las antiguas civilizaciones (egipcia, babilónica, hebrea, hindú, china, etc.) se dotaron de sistemas de medidas. Los sistemas métricos de hebreos, griegos y romanos se han conservado en los libros, con todas sus relaciones pero las longitudes absolutas se han perdido; así, por ejemplo, en el Libro de Ezequiel del Antiguo Testamento aparecen una serie de medidas de la civilización judía. Durante un tiempo se pensó que sería fácil reconstruir los prototipos, pero la tarea se mostró imposible por cuanto que con la misma denominación aparecían medidas diferentes; por ejemplo, el pie romano de los sepulcros difiere del de los obeliscos, del de las piedras miliarias, del encontrado en las ruinas y edificios conservados. La pérdida de los tipos romanos dio lugar a confusión y discrepancias de modo que durante la Edad Media cada ciudad tenía su propia medida y, en general, en todas partes el pie se hizo más corto que el romano.

La creciente expansión del comercio durante el siglo XVIII se veía entorpecida por la diversidad de unidades, sintiéndose en los medios políticos, científicos y comerciales la necesidad de unificar el sistema legal de medidas. Dos eran las características que debería tener el nuevo sistema: sus unidades debían estar relacionadas de modo fácil de modo que los múltiplos y divisores fuesen potencias de diez y se debía fundamentar en una unidad simple, susceptible de ser reproducida. Esta idea de un sistema métrico basado en las potencias de diez ya había sido anticipada, en 1670, por el inglés Gabriel Mouton.

En cuanto a la unidad de medida hubo un empeño en buscar en la naturaleza tipos constantes y permanentes de longitud. Dos eran los candidatos, la longitud del péndulo que bate segundos y una longitud derivada de la del meridiano. El péndulo era preferido por los ingleses y holandeses y el meridiano por los franceses. Pero el péndulo presentaba enormes dificultades (material, altura, latitud, temperatura, etc.) y a tratar de solucionarlas se dedicaron entre otros Harrison, Grahan, Cavendish y Ayry (En Benot (s.a.) se dan referencias precisas), hasta que la idea de tomar como unidad de longitud la del péndulo que bate segundos fue desechada, ganando los defensores de relacionar dicha medida con la longitud del meridiano. Precisamente en 1791 la Comisión francesa nombrada por la Academia de Ciencias presentó a la Asamblea Nacional una memoria en la que se proponía adoptar como unidad fundamental de longitud la diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre y dar a esta longitud el nombre de metro.

Dejando aparte las mediciones de Eratóstenes (siglo III a.C.) y de Al - Mamun (siglo IX), el matemático holandés Snell (1580-1626) fue el primero en medir, en 1615, un arco de meridiano, siguiendo un método que fue utilizado posteriormente: primero se fijaba una base, y desde ella haciendo una conveniente triangulación y utilizando instrumentos adecuados, se medía el arco. Posteriormente la Academia francesa acordó enviar dos expediciones al Perú y a Laponia para que cada una midiese un arco de meridiano; la primera estaba formada por los académicos franceses Bouguer, La Condamine y Godin y los españoles Jorge Juan (1713-1773) y Antonio de Ulloa (1716-1795) y la segunda por Maupertuis (1698-1759), Clairaut (1713-1765), Camus, Lemmonier y Outhier. Finalmente la misma Academia encargó a Méchain y Delambre la medición del arco comprendido entre Dunquerque y Barcelona. Las medidas se hacían en toesas, estableciéndose la longitud de un cuadrante de meridiano en 5.130.740 toesas (1 toesa = 1,949 metros). De resultas de estos trabajos y de los hechos en Perú, la Comisión francesa, en 1799, estableció el patrón definitivo de longitud, los nombres de todas las unidades de medida y los nombres y notación de sus múltiplos y divisores. Este sistema se adoptó en Francia a partir de Enero de 1840 y se fue imponiendo hasta nuestros días progresivamente en el resto del mundo.

En el caso español cada provincia tenía sus propias unidades de medidas, siendo tediosa la transformación de unas a otras. El gobierno español consciente de los problemas que generaba esta situación envió dos representantes, Agustín Pedrayes y Gabriel Ciscar, a la Comisión que se había creado en París.

Precisamente este último redactó su *Memoria elemental sobre los nuevos pesos y medidas decimales fundados en la naturaleza*, publicada en Madrid en 1800. Pero Carlos IV no se atrevió a introducir el nuevo sistema, temeroso de la reacción popular; finalmente, por Ley de 19 de Julio de 1849 se adoptó el nuevo sistema estableciendo el primero de Enero de 1860 como fecha de entrada en vigor, debiendo enseñarse obligatoriamente en las escuelas públicas o privadas a partir del primero de Enero de 1852. A pesar de lo estipulado en esta Ley, se siguió, y se siguen, usando medidas tradicionales, especialmente en las zonas rurales.

ANTIGUO SISTEMA

DE

PESAS Y MEDIDAS ESPAÑOLAS (1)

Vara .... Vale.	0,835905 metros.
Metro	1,196308 varas, ó 1 vara, 0 pies, 7 pulgadas, 0 líneas, 805 milésimas de línea.
Vara cuadrada..........	0,698737169025 metros cuadrados.
Metro cuadrado.........	1,431153292 varas cuadradas, ó 1 vara cuadrada, 8 pies cuadrados, 126 pulgadas cuadradas, 111 líneas cuadradas, 552 milésimas de línea cuadrada.
Vara cúbica............	0,584077893273842625 metros cúbicos.
Metro cúbico...........	1,71210040906 varas cúbicas, ó 1 vara cúbica, 19 pies cúbicos, 391 pulgadas cúbicas, 1 307 líneas cúbicas, 552 milésimas de línea cúbica.
Libra..................	0,460093 kilogramos.
Kilogramo	2,173474 libras, ó 2 libras, 2 onzas, 12 adarmes, 409 milésimas de adarme.
Cántara ó arroba de vino..	16,133 litros.
Litro de vino...........	1,983512 cuartillos, ó 1 cuartillo, 3 copas, 934 milésimas de copa.
Arroba de aceite	12,563 litros.
Litro de aceite..........	1,989971 libras, ó 1 libra, 3 panillas, 960 milésimas de panilla.
Fanega de áridos.........	55,501 litros.
Litro de grano...........	0,864849 cuartillos, ó 3 ochavillos, 459 milésimas de ochavillo.
Fanega superficial de 9 216 varas cuadradas, llamada de marco real.......	64,395617 áreas.
Area	143,115929 varas cuadradas, ó 143 varas cuadradas, 1 pie cuadrado, 38 milésimas de pie cuadrado.
Legua de 6 666 $^2/_3$ varas..	5,572699 kilómetros.
Kilómetro..............	1 196,308 varas, ó 1 196 varas, 0 pies, 924 milésimas de pie.

(1) Comunmente llamadas *Medidas y pesas legales de Castilla*, y mandadas antiguamente emplear en todo el Reino por la ley 5.ª, tít. IX, lib. IX, Novísima Recopilación, al intentarse por segunda vez la unificación en España.

Figura 1

En Benot (s.a.) se puede ver la equivalencia entre las antiguas medidas españolas y las del nuevo sistema métrico decimal, en la tabla que se presenta a continuación

Como es bien conocido, en el mundo anglosajón hasta hace escasas fechas se ha continuado utilizando su sistema tradicional de medidas, a pesar de las disposiciones legales que imponían el sistema métrico decimal.

Es sabido que la primera definición del metro ha sido refinada posteriormente, pero esto ya pertenece a la historia actual que sale de nuestro interés.

5. EL TEOREMA DE PITÁGORAS

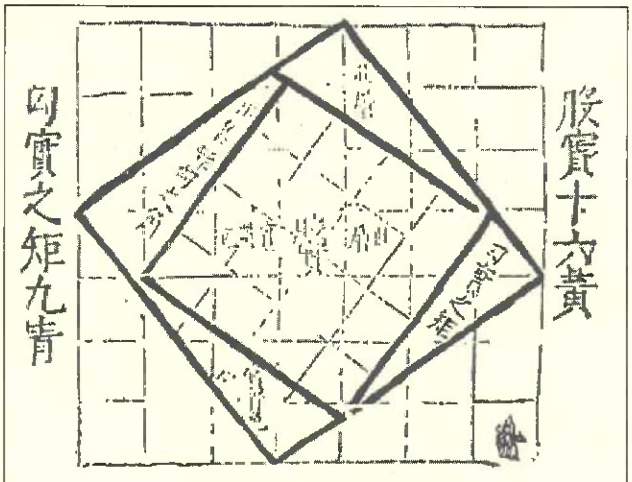
Sin lugar a dudas el Teorema de Pitágoras (siglo VI a.C.) es una de las joyas de las matemáticas. Sin embargo, a mi juicio, la aritmetización que ha sufrido ha cercenado su riqueza geométrica. Si se pregunta a adultos y escolares el enunciado de este teorema, la respuesta más usual es: *En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.* Es decir, el énfasis se pone en una relación entre números, en lugar de una relación entre áreas que es su enunciado original: *el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos.* Además el teorema recíproco también es cierto, es decir, si en un triángulo se verifica que la suma de los cuadrados de las longitudes de dos lados es igual al cuadrado de la longitud del otro lado, entonces dicho triángulo es rectángulo, con lo que el teorema de Pitágoras es una caracterización de los triángulos rectángulos. La perspectiva histórica puede ayudar a restituir su rica dimensión geométrica.

Civilizaciones anteriores a la griega conocieron y utilizaron el teorema aunque no su demostración, atribuida históricamente a Pitágoras. Así, los agrimensores egipcios utilizaron el recíproco del teorema para construir ángulos rectos en sus trabajos de deslindes de terrenos en las crecidas periódicas del Nilo. Para ello utilizaban una cuerda con trece nudos. Doblando la cuerda de modo que se forme un triángulo de lados 3, 4 y 5 nudos, resulta que dicho triángulo es rectángulo, con lo que se pueden trazar perpendiculares. Otras relaciones de este tipo se han encontrado en un papiro de aproximadamente el 2000 a.C. hallado en Kahun, siendo una de estas relaciones $1^2 + (3/4)^2 = (1\ 1/4)^2$ (Smith, 1953).

La civilización babilónica conoció y utilizó el teorema, lo que se pone de manifiesto en distintos problemas cuya solución correcta no podía lograrse sin este teorema, y en especial mediante un texto: el *Plimpton 322* (del nombre de la colección que se conserva en la Columbia University) que se dio a conocer en 1945 y que presupone la ley de formación de las ternas pitagóricas (Rey Pastor y Babini, 1985)

También los agrimensores hindúes utilizaban este recurso; en el *Sulvasutra* de Apastamba (siglo V o VI a.C.) se dan reglas para construir ángulos rectos haciendo nudos en las cuerdas de las siguientes formas: 3,4,5; 12, 16, 20;15, 20, 25; 5, 12, 13; 15, 36, 39; 8,15, 17 y 12, 35, 37.

La civilización china tenía asimismo conocimiento del teorema. Su libro matemático más antiguo es el *Chou-pei* o *Chou pei Suang-King*, de autor y fecha desconocida pero que se suele datar hacia el 1105 a.C.; según señala Smith (1953) hay razones para creer que sufrió cambios importantes desde que fue escrito por primera vez. Smith señala que el hecho de que el emperador Shi Huang-Ti ordenara, en el 213 a.C., quemar todos los libros y sepultar a los estudiantes pudiera haber dado lugar a alterar el antiguo tratado, pero argumenta que aun en el caso de que el libro fuese efectivamennte destruido su contenido se habría transmitido verbalmente, y que en definitiva las noticias que tenemos de este libro son de la misma clase que las que tenemos de ciertos textos atribuidos a Boecio, Alcuino, o a ciertos autores griegos, que asumimos como conocidos. Lo que nos interesa destacar es que en él aparecen enunciados como: *Rompe la línea y traza la anchura 3 y la longitud 4; entonces la distancia entre las esquinas es 5*. La siguiente figura que aparece en este libro chino nos muestra el teorema pero no lo prueba.



CHÓU-PEÏ SUAN-KING

Figura 2

En otro libro chino, el *K´iu -ch´ang Suan- Su* (Aritmética en Nueve Secciones), aparecen igualmente ternas pitagóricas.

La demostración del teorema es atribuida a Pitágoras por varios autores como Proclo, Plutarco, Cicerón y Diógenes Laertius, pero ninguno de ellos fue contemporáneo de Pitágoras por lo que solamente tenemos una fuerte tradición en la que apoyar la creencia general de que fue Pitágoras el primero en probar el teorema. La proposición 47 del libro I de los *Elementos* de Euclides es el teorema de Pitágoras, con una demostración que Proclo atribuye al mismo Euclides.

La figura que utilizó Euclides en su demostración es la siguiente

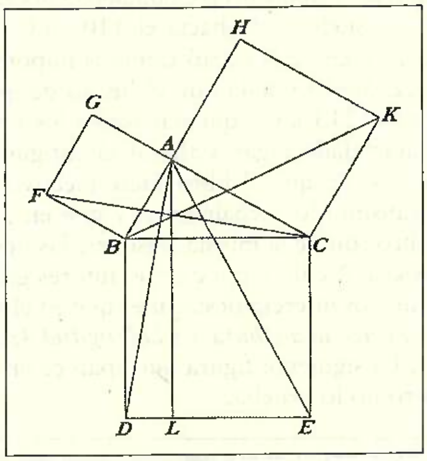


Figura 3

Desde Euclides se han dado numerosas demostraciones del teorema. En el libro de Elisha Scott Loomis (1907) *The Pythagorean Proposition* se recogen 370 demostraciones. Según señala Hirschy (1969) la más abreviada es la dada por el hindú Bhaskara (siglo XII) que presentó la siguiente figura y junto a ella la palabra: ¡Mira!

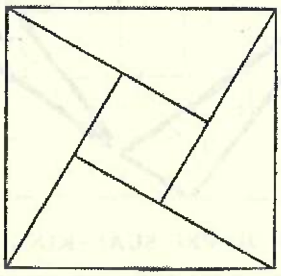


Figura 4

Esta breve historia del teorema de Pitágoras nos muestra la riqueza de esta proposición conocida y utilizada desde hace algo más de tres mil años por la humanidad.

6. INTERPRETACIÓN, REPRESENTACIÓN Y TRATAMIENTO DE LA INFORMACIÓN: LA INTRODUCCIÓN DE COORDENADAS

Sin lugar a dudas el concepto de función es un concepto central en la matemática de nuestro tiempo. Numerosas investigaciones (ver por ejemplo Harel y Dubinsky, 1992) han mostrado las dificultades en la comprensión de este concepto por los estudiantes de enseñanza secundaria. Una conclusión generalizada en estas investigaciones es que más que presentar la definición formal de función que contiene elementos poco asequibles para el estudiante es preferible encontrar una definición que cumpla el papel dual de ser familiar a los estudiantes y provea de las bases para un desarrollo matemático posterior. Youschevitch (1976) presenta un excelente trabajo sobre el desarrollo histórico de función, que aparece resumido en Azcárate y Deulofeu (1990).

Ligado al concepto de función aparece su representación gráfica. De acuerdo con los autores citados más arriba la representación gráfica más usual de una función es la gráfica cartesiana con la introducción de un sistema de coordenadas. A continuación se presenta, brevemente, la historia de una idea, a saber, los sistemas de coordenadas, que en principio parece simple, pero que, como en el caso de tantas otras, tuvieron que pasar muchos siglos hasta cristalizar en las matemáticas.

La idea de introducción de coordenadas estaba ya presente en los agrimensores egipcios, pero la primera referencia aparece en la obra de los astrónomos y geógrafos griegos. Hiparco (siglo II a.C.) localizó puntos en el cielo y en la tierra mediante la longitud y la latitud. Los romanos dividían sus ciudades respecto de dos ejes, el *decimanus* que iba del este al oeste y el *cardo* perpendicular al anterior, organizando las calles en un sistema de coordenadas rectangulares, como el que hoy en día aparece en algunas modernas ciudades.

Es entre los geómetras griegos donde comienza a desarrollarse la idea de coordenadas dentro de las matemáticas, especialmente en Menecmo (siglo IV a.C.) y en Apolonio (262?-190? a.C.). Como señala Boyer (1968) los métodos que utiliza Apolonio en las *Cónicas* son tan semejantes al pensamiento matemático moderno que su obra se ha considerado como una anticipación a la geometría analítica de Descartes (1596-1650) en dieciocho siglos. Sin embargo, no parece presentarse ningún caso en la geometría griega en el que se fije un sistema de referencia *a priori* con el fin de representar gráficamente una función o una relación expresada de modo simbólico o retórico, es decir, las coordenadas, variables y ecuaciones fueron, pues, conceptos subsidiarios derivados de una situación geométrica concreta.

Es en la Edad Media, con Nicole Oresme (1313-1382) cuando se da un impulso notable a las coordenadas. En sus obras *Tractatus de latitudinibus formarum* y *Tractatus de uniformitate et defformitate intensionum* se contienen las ideas fundamentales de su teoría de la *latitud de las formas* (Smith, 1953). Los términos latitud y longitud que utilizaba Oresme vienen a ser equivalentes a nuestras ordenadas y abcisas, respectivamente, y su representaciones gráficas se parecen mucho a nuestra geometría analítica. Oresme parece haberse dado cuenta del principio esencial de que una función de una variable se puede representar mediante una curva, pero no fue capaz de hacer un uso efectivo de esta observación salvo en el caso de la función lineal. Parece constatado históricamente que la obra de Oresme influye de modo notable en Galileo (1564-1642) y Kepler (1571-1630).

Es con Descartes y con Fermat (1601-1665) con los que el método de coordenadas adquiere su estatus definitivo. En el año 1637, Descartes publicó su *Discours de la Méthode pour bien conduire sa raison et chercher la verité dans les sciences* (Discurso del método para dirigir bien la razón y buscar la verdad en las ciencias), al que unió tres apéndices, uno de los cuales era *La Géométrie*. Está dividida en tres libros: el primero trata de la resolución de ecuaciones cuadráticas; el segundo se dedica a la clasificación de las curvas distinguiendo entre las geométricas y las mecánicas; el tercero trata de tópicos como el número de soluciones de una ecuación, falsas soluciones y transformación de ecuaciones. Como señala Boyer (1968) el objetivo de su método era doble: i) liberar en lo posible a la geometría, a través de los métodos algebraicos, del uso de las figuras. ii) dotar de un significado a las operaciones del álgebra por medio de su interpretación geométrica. En cuanto al método empleado Rey Pastor y Babini (1985) lo describen de la siguiente manera

> A cada problema geométrico corresponderá cierta relación entre letras, es decir una ecuación.....De ahí que en el caso de tratarse de dos incógnitas, resultará que si una de éstas representa un segmento variable sobre una recta fija, uno de cuyos extremos es fijo, y la otra coincide con uno de los extremos del segmento de dirección fija distinta de la anterior que representa la segunda incógnita, el otro extremo de este segmento dibujará una curva que resuelve el problema. Tal es la manera cartesiana de introducir el método que luego se denominó de las coordenadas, aunque este nombre no figure en los escritos de Descartes como tampoco la mención a los ejes (Rey Pastor y Babini, 1985, p. 46)

El método de las coordenadas está igualmente asociado al nombre de Fermat. Estudioso de los griegos de los que reconstruyó obras perdidas, escribió su *Ad locos planos et solidos isagoge* (Introducción a los lugares geométricos planos y sólidos) antes de *La Géométrie* de Descartes, pero publicada póstumamente en 1679, donde aparecen los principios fundamentales del método de coordenadas.

La Géométrie de Descartes fue publicada, en 1649, en versión latina, con comentarios explicativos, por el holandés Franciscus van Schooten (1615-1660), lo que ayudó al conocimiento y a la comprensión de esta obra que contiene pasajes poco explícitos, porque como decía Descartes en carta a Mersenne no quería privar al lector de descubrir las cosas por sí mismos. También Schooten se dedicó difundir y perfeccionar el método de coordenadas, que de modo tan poderoso ha sido utilizado por las matemáticas desde entonces.

7. TRATAMIENTO DEL AZAR: DE LOS JUEGOS DE AZAR A LA LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS

La probabilidad y la estadística han sido las partes más olvidadas en los programas de enseñanza en nuestro país. Los actuales programas pretenden corregir este estado de cosas siendo, a mi juicio, una idea acertada el mayor peso de estos dos temas en los mismos. La historia de los comienzos de la teoría de la probabilidad, con el énfasis puesto en la evolución de las ideas probabilísticas desde los juegos de azar hasta el enunciado y demostración de las ley de los grandes números (con el trabajo correspondiente de profesores y alumnos sobre la base de esta historia) puede ayudar a comprender cómo matematizar situaciones que, aparentemente, se escapan a la indagación matemática.

Se considera a Pascal (1623-1662) y Fermat como los inventores del cálculo de probabilidades por resolver dos problemas planteados por el caballero De Meré. Los problemas versaban sobre juegos, algo ajeno a la actividad habitual de los matemáticos hasta esas fechas. En realidad los problemas fueron propuestos por De Meré a Pascal quien a su vez los trasladó a Fermat, y se conocen con el nombre del *problema de los dados* y el *problema de las partidas*; se presentan aquí con el enunciado en que aparecen en Rey Pastor y Babini (1985).

El *problema de los dados* consistía en demostrar que con 4 tiradas con un solo dado es más probable que salga un 6 que el caso contrario; y que en cambio, en 24 tiradas con dos dados, es menos probable que salga un doble 6. El *problema de las partidas* consistía en averiguar cómo debía distribuirse la bolsa entre dos jugadores de igual habilidad si se suspendía el juego antes de terminarlo y se conocían los puntos logrados por cada jugador en el momento de la suspensión. En forma distinta, aunque con resultados concordantes, Fermat y Pascal resolvieron estos problemas. La solución de Fermat en el *problema de las partidas* fue la siguiente

> En el problema de las partidas Fermat utiliza la teoría combinatoria. Considera el ejemplo concreto en el que dos jugadores A y B suspenden el juego cuando al jugador A le faltan 2 puntos para ganar y al jugador B le faltan 3 puntos. Como a lo sumo la partida se habría terminado a las 4 jugadas, Fermat hace las 16 posibles combinaciones con repetición de dos letras a y b tomadas de 4 en 4, cuenta las combinaciones en las que a aparece dos o más veces y las restantes en las que b aparece tres o más veces. Como las primeras son 11 y las segundas son 5, Fermat deduce que las probabilidades de ganar están entre sí como 11 es a 5, proporción en la que debe entonces dividirse la bolsa. (Rey Pastor y Babini, 1985, p.61)

En realidad estos problemas no eran nuevos. En una edición de la *Divina Comedia* de Dante, la de 1477, comentada por Benvenuto D´Imola aparecen cuestiones relativas a tiradas de dados y en la *Suma* de Luca Pacioli(1145?-1514) se plantea ya el problema de las partidas. Por su parte Cardano(1501-1576) y Tartaglia (1500?-1557) también trataron este problema.

Volviendo a Pascal y Fermat, en realidad ellos no publicaron sus resultados, que conocemos por la obra de Huygens (1629-1695) *Tractatus de ratiociniis in* *ludo aleae*, publicada en 1657, tomando como base la correspondencia entre éstos, y que constituye el primer tratado relativo al cálculo de probabilidades. También apareció un tratado de Pierre Remond de Montmort, en 1708, titulado *Essai d´analyse sur les jeux d´hasard*.

El cálculo de probabilidades tomaría un gran impulso gracias a la labor de Jakob Bernouilli(1654-1705) con su obra *Ars conjectandi* (Arte de la conjetura), publicado en 1713, después de la muerte de su autor, que consta de cuatro partes. La primera reproduce el libro de Huygens con comentarios; la segunda trata de permutaciones y combinaciones, con la primera demostración correcta del teorema del binomio para exponentes enteros positivos; las dos últimas partes están dedicadas a problemas sobre el cálculo de probabilidades. En particular, la cuarta parte contiene el teorema que lleva su nombre, conocido también como ley de los grandes números que en esencia afirma que el límite de las frecuencias relativas converge a la probabilidad. La originalidad de esta cuarta parte, según apuntan Dhombres et al.(1987) consiste en la explicación que hace Bernouilli de la posibilidad de utilizar las probabilidades empíricamente y aplicarlas a hechos morales, políticos y económicos. Bernoulli sobrepasa el estudio de frecuencias tal y como lo habían hecho anteriormente otros matemáticos (como por ejemplo John Graunt, en 1662, para sacar conclusiones sobre la tasa de mortalidad en Londres) y elabora realmente una ley empírica: un número limitado de experiencias es suficiente para tener un máximo de información sobre la probabilidad.

Posteriormente a Bernoulli, De Moivre (1667-1754) escribió su *Doctrine of Chances*, publicada en 1718, de contenido parecido al *Ars conjectandi* y Thomas Simpson (1710-1761) su *Laws of Chance*, en 1740. En los últimos ciento cincuenta años se ha producido un desarrollo espectacular de la probabilidad con grandes esfuerzos por parte de los matemáticos para dar un base sólida a esta teoría. Por lo que se refiere al tema que nos ocupa, la ley de los grandes números, tenemos que señalar el teorema de Tchebycheff (1821-1894) que constituye una demostración rigurosa de la misma.

CAPÍTULO VIII

Programación de unidades didácticas

Antonio Marín

1. LA UNIDAD DIDÁCTICA: UN INSTRUMENTO DE PLANIFICACIÓN EDUCATIVA Y DE GESTIÓN DE LA CLASE

La planificación educativa del proceso de enseñanza-aprendizaje implica la toma de decisiones en distintos ámbitos de concreción hasta culminar en un documento en el que el profesor concreta los objetivos, contenidos, tareas, recursos y materiales, instrumentos de evaluación y orientaciones metodológicas que serán objeto de trabajo en clase con los alumnos, en un período corto de tiempo (3-4 semanas) y que, a juicio del profesor, mantienen unidad según algunos criterios principalmente conceptuales. El profesor diseña una unidad didáctica.

La unidad didáctica es la línea de choque de la planificación educativa con la práctica docente. Por ello, debe contener los instrumentos de planificación en su grado más concreto y los indicadores para detectar cómo se va produciendo el proceso de enseñanza-aprendizaje para facilitar la retroalimentación al profesor y al alumno y el previsible cambio en el diseño de tareas o el uso de recursos.

Por otra parte, cada unidad didáctica no es una isla en la programación general del curso. Está relacionada con las demás para que, entre todas, abarquen los objetivos previstos para el curso por el Departamento didáctico y para el Centro Educativo, por el Claustro de Profesores o el Consejo Escolar. Los alumnos son personas que viven distintos focos de aprendizaje y los relacionan en un mismo esquema intelectual. Es bueno unificar criterios de información, metodológicos y de evaluación en el Claustro de Profesores. Sus efectos llegarán hasta la unidad didáctica.

En la tarea de confeccionar una unidad didáctica la capacidad de acceso personal a las fuentes de información que se han presentado en los capítulos anteriores determina el producto. No es igual limitarse a consultar un solo libro de texto que trabajar sobre varios libros de texto, varios documentos especializados en contenidos matemáticos con análisis didácticos, participar en grupos de trabajo, etc. Por ello, la variedad en la información y el deseo de elaboración personal del producto son pilares básicos en esta tarea.

La multiplicidad de factores que inciden en el diseño de una unidad didáctica hace necesario recurrir a una cierta secuencia de tareas. El objetivo básico de este capítulo es describir un proceso de elaboración de unidades didácticas, argumentando y comentando las decisiones tomadas. Como fuentes de información para la elaboración de una unidad didáctica utilizaremos los distintos organizadores presentados en capítulos anteriores.

Las fases que cada profesional de la educación se propone en la construcción de cada unidad dependen de la historia personal del autor, del tiempo disponible, del acceso a la información educativa, de su experiencia como profesor, etc. El marco delimitado por estos organizadores es el que permite profundizar de manera específica para cada tópico considerado, en relación con los objetivos, metodología y evaluación. Sin los organizadores la especificidad de la unidad vendría establecida únicamente por sus contenidos, limitándose las otras dimensiones del currículo a descripciones genéricas. La potencialidad de los organizadores presentados se pone a prueba en el diseño de las unidades didácticas, a cuyo estudio dedicamos este capítulo.

2. ENMARQUE DE LA UNIDAD DIDÁCTICA EN EL PROYECTO DE CENTRO

Para elaborar una unidad didáctica, adoptaremos un proceso de "aproximaciones sucesivas". Cada tipo de decisión curricular concretará el diseño aunque sea necesario pasar varias veces por el mismo grupo de criterios. Este tipo de diseño, no estrictamente deductivo, trata de responder a interrogantes que un profesor de matemáticas se hace según la tarea a la que se enfrenta.

El Proyecto Curricular del Área elaborado por el Departamento Didáctico debe haber marcado algún énfasis en los objetivos que se quieren priorizar. Por ejemplo, si existen datos de diagnósticos iniciales respecto a grupos de alumnos que no manejan con soltura técnicas básicas de trabajo intelectual como la lectura comprensiva, expresión escrita de las ideas propias, recogida de apuntes de clase, etc., habrá que diseñar actividades orientadas a este objetivo a lo largo de las unidades didácticas, ya sean de proporcionalidad o de geometría de transformaciones.

Además, el Proyecto de Centro es un documento que caracteriza a la comunidad escolar marcando prioridades en los objetivos, criterios de evaluación, normas de funcionamiento y organización. Por ejemplo, si el centro de referencia se marca una prioridad educativa en la defensa del medio ambiente, la selección de tareas de la unidad didáctica pueden ampliarse en esta línea. Cuando los objetivos generales del centro subrayan el aprendizaje de procedimientos o técnicas de trabajo intelectual, las actividades propuestas a los alumnos deberán estar en consonancia con esta prioridad y probablemente, la selección de contenidos también resulte influenciada.

2.1 Decisiones sobre la selección de objetivos generales y específicos de la unidad

La primera referencia habitual para un profesor de matemáticas es determinar el contenido matemático que va a trabajar con los alumnos. Un acercamiento directo para deducir de los objetivos del Área los contenidos matemáticos más adecuados, es un proceso poco usado. Además una primera aproximación a los contenidos matemáticos ya viene prescrita por los currículos oficiales. Incluso, en el Proyecto Curricular del Centro, el Departamento habrá elaborado una referencia de contenidos para el curso diana.

Elegimos como curso diana 3º de ESO. Uno de los contenidos que aparecen en las prescripciones legales es la proporcionalidad. Alrededor de él se construirán elementos para unidades didácticas en este capítulo.

Si se adopta como enfoque para la selección y organización de los contenidos matemáticos de la unidad didáctica la *organización matemática de los contenidos,* se enmarcaría la proporcionalidad numérica junto a lecciones con números y operaciones y la proporcionalidad geométrica con las lecciones de geometría con el triángulo o en un capítulo general de semejanzas de polígonos. Al trabajar con funciones se daría una referencia a las similitudes entre función lineal y la proporcionalidad simple y directa. La hipérbola equilátera podría contener alguna referencia a la proporcionalidad inversa.

En este enfoque el criterio fuerte de decisión es la formalización. La Aritmética, la Geometría, las Funciones son grandes ventanales por los que se conoce y explora el cuerpo matemático. Este enfoque presupone que para un buen aprendizaje de conceptos elementales matemáticos –propios de una enseñanza básica y obligatoria–, deben presentarse compartimentados, primando la coherencia del sistema de representación sobre la comprensión global e interrelacionada de un concepto.

Alternativamente, aquí se defiende otra forma de seleccionar y organizar los contenidos matemáticos desde criterios fundamentados en corrientes actuales de la Didáctica de las Matemáticas que priman *las metas de la Educación matemática* en esta Etapa de la Enseñanza Obligatoria. Por ejemplo, los objetivos generales del currículo del Area de Matemáticas en la Educación Secundaría Obligatoria se han fijado en el Real Decreto de Enseñanzas mínimas 1007/91 (B.O.E. nº 92). Cada Comunidad autónoma concretó estos Objetivos y como muestra de ellos reseñamos los que redacta el Decreto de enseñanzas de la Junta de Andalucía (B.O.J.A. nº 56 de 20/6/92):

«1. Utilizar el conocimiento matemático para organizar, interpretar e intervenir en diversas situaciones de "la realidad".
2. Comprender e interpretar distintas formas de expresión matemática e incorporarlas al lenguaje y a los modos de argumentación habituales.
3. Reconocer y plantear situaciones en las que existan problemas susceptibles de ser formulados en términos matemáticos, resolverlos y analizar los resultados utilizando los recursos adecuados.
4. Reflexionar sobre las propias estrategias utilizadas en las actividades matemáticas.
5. Incorporar los hábitos y actitudes propios de la actividad matemática.
6. Reconocer el papel de los recursos en el propio aprendizaje.»

En las metas generales de la enseñanza de las Matemáticas que reclama este ejemplo, se presentan tres orientaciones de la matemática escolar que ya postulaban el Informe Cockcroft (Cockcroft, 1982) o algunos informes del ICMIE (Howson y Kahane, 1986): Matemática útil para desenvolverse en la realidad circundante, Matemática como instrumento de comunicación, Matemática como contenido capaz de desarrollar capacidades cognitivas (dimensión formativa).

2.2 Decisiones sobre la secuenciación, selección y organización de contenidos

La selección y organización de los contenidos matemáticos estará en función de los contenidos que resulten más convenientes para el desarrollo de las capacidades enunciadas en los objetivos anteriores.

Una forma de orientarse en la selección adecuada de contenidos matemáticos es reflexionar sobre los criterios de selección de contenidos marcados por algún documento curricular actual. Estos documentos contienen, en forma de guía resumen, bastantes de las ideas destacadas en los capítulos anteriores. Si seguimos con el documento de la Junta de Andalucía, elegido como ejemplo de objetivos generales y mostrado con anterioridad, los criterios de selección y organización de contenidos que presenta se resumen en el Cuadro 1:

Cuadro 1:

Criterios para la organización y selección de contenidos (a) Representatividad respecto a la lógica de la disciplina; (b) relevancia social y cultural; (c) significatividad psicológica; (d) funcionalidad (multiplicidad) didáctica; (e) potencialidad vertebradora (facilita conexiones y transferencias).

Como en la selección de los contenidos de la unidad didáctica se condicionan ya los tipos de tareas escolares, cuando se prima la organización por áreas de contenidos matemáticos (proporcionalidad en aritmética, en funciones, en geometría) uno de los riesgos que se corre es reducir el campo de las tareas a los problemas que se pueden resolver en el ámbito de este núcleo de las matemáticas, perdiéndose la perspectiva unificadora del concepto y de sus usos en situaciones cotidianas no necesariamente ligadas a un aspecto de la matemática exclusivamente.

2.2.1 *Sobre la selección de los contenidos*

Aprovechando que la noción de proporcionalidad entre magnitudes se constituye en los alumnos como un modelo de razonamiento que impregna multitud de argumentaciones correctas y erróneas (a través de la regla de tres explícita o encubierta), se ha seleccionado este contenido para manejarlo mediante distintos sistemas de representación (lenguaje aritmético, algebraico, funcional, geométrico,) utilizarlo como modelo matemático y ajustarlo a situaciones cotidianas de proporcionalidad o reducibles a ella (Objetivos 1, 2, 3) del Área de Matemáticas marcados.

Veamos un breve análisis del contenido matemático siguiendo el cuadro nº1:

Representatividad del concepto en la disciplina matemática y potencialidad vertebradora: No es éste el lugar para analizar los conceptos matemáticos implicados en la proporcionalidad de magnitudes y cómo se concatenan lógicamente. Pueden verse dos desarrollos adaptados a los conocimientos necesarios para la enseñanza obligatoria en (Fiol,-Fortuny,1990) y en (Luengo et al., 1990).

Al analizar la proporcionalidad que aparece en el currículo de la ESO se observa que:

- es un concepto vertebrador en las matemáticas, con su propia aritmética operacional y no compleja
- utiliza la hipótesis de que dos magnitudes numéricas son proporcionales para resolver una gran variedad de problemas en los que la solución es una predicción de relaciones y control de fenómenos
- se utiliza como herramienta para construir figuras o clasificarlas (semejantes). Resuelve problemas geométricos (descriptivos o predictivos) por comparación de magnitudes y establecimiento de la proporcionalidad

- se usa para reconocer un modelo de dependencia muy común, la dependencia lineal, y al que se pueden reducir otras dependencias como la dependencia afín
- es modelo aproximativo de otras dependencias, logarítmica, cuadrática, etc., mediante la interpolación lineal
- es el instrumento para comparar la variación media entre funciones
- es un soporte aritmético al concepto laplaciano de Probabilidad
- es un modelo de dependencia aleatoria entre dos variables (recta de regresión)

Relevancia social y cultural: La selección y organización de los contenidos debe estar al servicio de la consecución de las metas generales propuestas, capacidad para comprender y usar conceptos y métodos matemáticos "en situaciones cotidianas", capacidad para aprender por sí mismo, capacidad para incorporar como hábitos y actitudes, procedimientos, métodos, razonamientos, estilos de trabajo propios de la matemática.

La proporcionalidad adquiere aquí gran importancia social y cultural. Basta comentar algunas de sus aplicaciones en el cálculo comercial, las relaciones entre magnitudes físicas, químicas, biológicas o geográficas cartográficas, medidas topográficas, etc.

Además la construcción matemática del concepto no precisa de un lenguaje matemático que la soporte muy sofisticado, lo que le da mayor potencialidad para su uso social.

Desde la perspectiva fenomenológica analizada en el capítulo 3, los apartados anteriores inician una respuesta al análisis fenomenológico puro de la proporcionalidad, mientras que los apartados siguientes penetran en el terreno de la fenomenología didáctica propiamente dicha.

Significatividad psicológica: Desde la perspectiva psicológica, los contenidos matemáticos de la proporcionalidad requieren el uso de un tipo de razonamiento llamado proporcional, que ya investigó Piaget como un esquema operatorio fundamental en la etapa de las operaciones formales. Este razonamiento se utiliza en el primer ciclo de la ESO, su aprendizaje es complejo y presenta una diversidad de errores y dificultades investigados por autores como Inhelder y Piaget (1955), Karplus y otros (1977), Hart (1980) y otros españoles como Corral (1986 y 1987). Así, por ejemplo, entre las estrategias para reconocer si dos magnitudes son proporcionales se utilizan frecuentemente comparaciones de tipo aditivo en las que el aumento, por suma, de las cantidades es condición para asegurar la proporcionalidad, en lugar de la comparación de cocientes o el aumento por constantes multiplicativas (Corral, 1987). En términos de los errores y dificultades analizados en el capítulo V, el alumno tiene obstáculos en el aprendizaje, por aplicar conocimientos anteriores y eficaces a otras situaciones, de estos nuevos problemas.

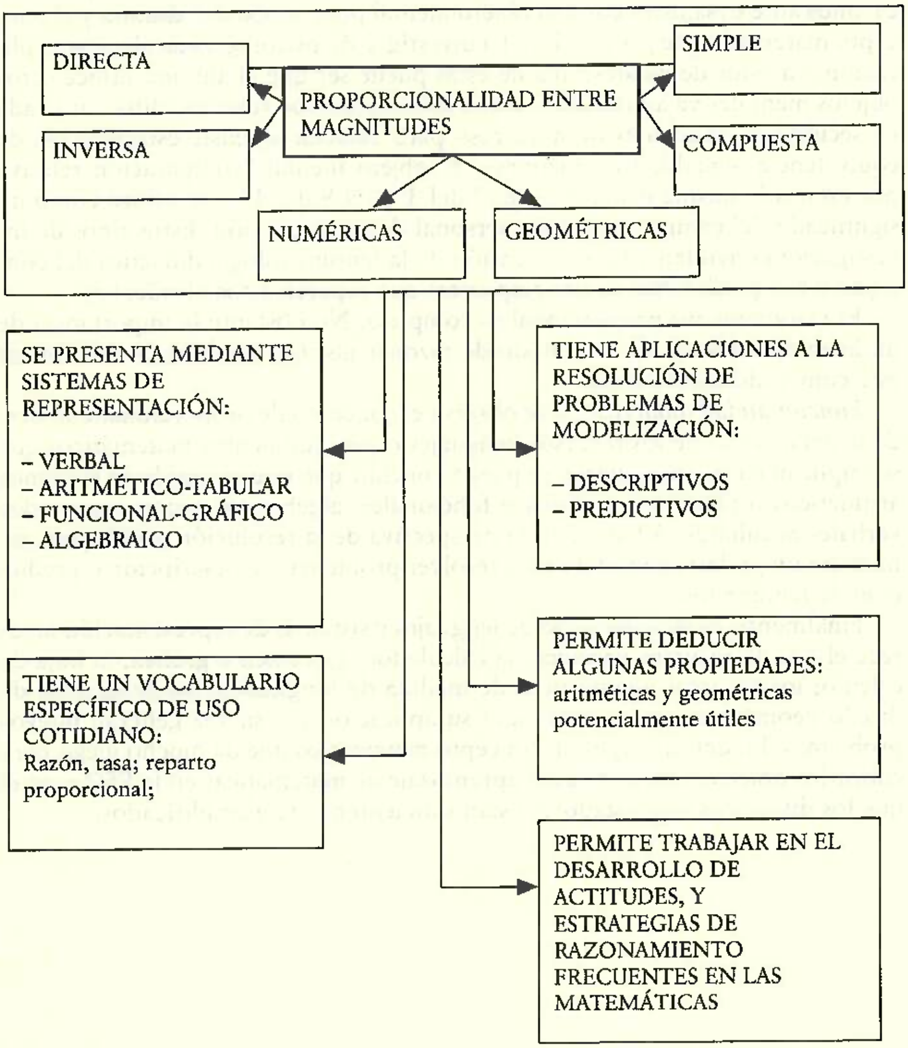
El estudiante de 3° de ESO ya posee un objeto mental sobre la proporcionalidad (campo semántico de significados en términos fenomenológicos). A través de las tareas de aula se detectan, por ejemplo, alumnos que argumentan la igualdad de dos razones cuando se obtiene una de la otra por suma de una cantidad constante a las dos magnitudes de la otra. Según se explicó en el capítulo 3, estamos ante desajustes entre el objeto mental proporción del alumno y el concepto matemático de proporción. La investigación psicológica da algunas explicaciones a estos desajustes; una de éstas puede ser que el alumno utilice otros objetos mentales ya adquiridos –como la comparación relativa aditiva utilizada en secuencias ordenadas de números– para detectar si existe esta relación de equivalencia –igualdad de razones–. El objeto mental "comparación relativa por estar a la misma distancia" "el 7 del 3", "el 8 del 4"... se utiliza como un significado del campo semántico personal de la proporción. Estos tipos de investigaciones ayudan a la comprensión de la fenomenología didáctica del concepto y a la posibilidad de dar respuestas que superen estos obstáculos.

El razonamiento proporcional es complejo. No obstante la importancia de un buen aprendizaje de este modo de razonar justifica también la elección de este contenido matemático.

Funcionalidad didáctica: Si se observa el concepto de proporcionalidad desde la perspectiva de los recursos, lenguajes o procedimientos matemáticos que se implican en su aprendizaje, se puede concluir que es expresable en términos aritméticos o tabulares, gráficos o funcionales, algebraicos o con enunciados verbales peculiares. Además, en la perspectiva de la resolución problemas, suministra un poderoso modelo para resolver problemas de descripción o predicción de fenómenos.

Finalmente, la multiplicidad de lenguajes y sistemas de representación favorece el uso de recursos variados: la calculadora científica o gráfica; la hoja de cálculo; los recursos geométricos de medida de longitudes; los programas de diseño geométrico, encuentran aquí su aplicación y a su vez generan nuevos problemas. En definitiva, es un concepto matemático que da mucho juego para cubrir los objetivos generales del aprendizaje de matemáticas en la ESO y en el que los diferentes organizadores están suficientemente ejemplificados.

Cuadro 2: Selección del contenido



2.2.2 *Contenidos para conseguir objetivos*

Por los argumentos esgrimidos, (ver Cuadro resumen nº 2) la proporcionalidad puede ser un nudo conector entre un buen número de unidades didácticas de 3º de ESO sin agotarse en este curso, recogiendo aproximaciones de cursos anteriores y algunas ideas para profundizar en 4º de ESO.

Pero esta potencialidad del objeto matemático se pone al servicio de una multiplicidad de objetivos educativos específicos que se podrían agrupar en cuatro grandes grupos:

(a) Objetivos destinados a reconocer, expresar y traducir la proporcionalidad tanto al lenguaje usual como a otro modo de representación funcional, algebraico, tabular o geométrico.
(b) Objetivos destinados a desarrollar la capacidad de resolver problemas de descripción o predicción de algún fenómeno a través del modelo de proporcionalidad.
(c) Objetivos destinados a desarrollar actitudes propias de las matemáticas. Los documentos que prescriben el currículo español, al redactar los objetivos generales curriculares, incluyen el desarrollo de capacidades instrumentales con la pretensión de conseguir actitudes o valores personales.

Así, por ejemplo, en el R.D. de Enseñanzas Mínimas para la ESO (BOE, nº 152, 1991) se lee:

Objetivo general nº 1: «Incorporar al lenguaje y modos de argumentación habituales *las distintas formas de expresión matemática* (numérica, gráfica, geométrica, lógica, algebraica, probabilística) con el fin de *comunicarse de manera precisa y rigurosa*.»

Comentario: La intencionalidad del objetivo es conseguir un hábito.

Objetivo general nº 7: «*Identificar las formas* y relaciones espaciales que se presentan en la realidad, *analizando las propiedades y relaciones* geométricas implicadas y *siendo sensible a la belleza* que generan».

Comentario: Objetivo instrumental en búsqueda de desarrollar valores estéticos.

Objetivo general nº 9: «*Actuar*, en situaciones cotidianas y en la resolución de problemas, de acuerdo con los *modos propios de la actividad matemática*, tales como una exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.»

Comentario: La intención es contribuir a un perfil de ciudadano que incorpore formas de comportamiento (a través de hábitos, valores y normas) que son características de la metodología de trabajo con las matemáticas.

Objetivo general nº 10: «*Conocer y valorar las propias habilidades* matemáticas para *afrontar las situaciones* que requieran su empleo o que *permitan disfrutar* con los aspectos creativos, manipulativos, estéticos o utilitarios de las matemáticas.»

Comentario: Se busca conseguir que el estudiante conozca su destreza(/ignorancia) en el uso de las matemáticas, valore poseerla(/no poseerla) y disfrute(/odie/ignore) por ello. Este objetivo abarca la globalidad del joven y entra de lleno en la configuración de la imagen que se va formando de sí mismo.

(d) Objetivos destinados a iniciarse en estilos de razonamiento: (particularización-generalización; justificación por contraejemplos; búsqueda de regularidades y patrones; selección de los procedimientos más adecuados al problema, etc.) frecuentes en el que trabaja con las matemáticas.

2.2.3 Secuenciación, selección y organización

Analizados los grandes objetivos específicos, procede secuenciar contenidos matemáticos, seleccionarlos y organizarlos en pequeños núcleos que compongan cada unidad.

Las decisiones sobre la selección y organización de contenidos dependerán de la *selección horizontal* de los demás contenidos que se hayan marcado para todo el curso de referencia. Esta propuesta de contenidos trabaja en 3° de ESO con fracciones y expresiones decimales, geometría en el plano y geometría de transformaciones, funciones y algunas nociones de probabilidad y estadística.

Selección jerarquizada de contenidos en la unidad didáctica: Cuando se opta por una organización de los contenidos no fundamentada exclusivamente en la lógica interna de la materia, en una misma unidad se manejan uno o varios aspectos conceptuales en los que se proponen tareas para su comprensión y aplicación, pero, a la vez, se utilizan también otros conceptos de tipo procedimental que ayudan a comprender la idea central y se ejercitan consolidando más su aprendizaje. Por ejemplo, el concepto de fracción como "representación de la parte-de-un-todo" es de uso habitual en algunos problemas de la proporcionalidad con porcentajes o razones entre magnitudes iguales. En una unidad didáctica de proporcionalidad no se introducen ejercicios para comprender este concepto; sin embargo, el manejo de las fracciones en la proporcionalidad puede detectar errores en la noción de fracción o consolidar el concepto al aplicarlo a nuevas situaciones. Tanto en un caso como en el otro, hay un contenido procedimental que se sigue "aprendiendo" y otro contenido que asume el papel de contenido conceptual en esta unidad y es el que se aprende como un concepto nuevo o en una dimensión nueva.

Esta distinción entre los contenidos centrales y secundarios es útil en la planificación de unidades didácticas aunque pueda generar alguna controversia. Ayuda a decidir qué contenidos de otras unidades constituyen una herramienta de trabajo en la que se pretende planificar.

Los contenidos secundarios en una unidad deben haberse tratado en unidades anteriores, cursos anteriores o introducidos en la misma unidad si no requieren mucha dificultad de comprensión. (Transformar una fracción en porcentaje puede trabajarse en una unidad de proporcionalidad; comprender el algoritmo de la suma de fracciones requiere una unidad específica.)

Seleccionar un contenido como secundario tampoco implica que su aprendizaje esté muy afianzado. Por ejemplo, hay reglas de cálculo o modos de representación de funciones que se irán repitiendo en varias unidades y, a medida que se practican, pueden aumentar su consolidación.

Para conseguir una habilidad alta, no hay necesidad de mantenerse trabajando mucho tiempo, en la unidad x, un contenido que, será contenido secundario en la unidad x+1 o x+2; es probable que esta habilidad se consiga también al final de curso si se manejan actividades que la refuercen en otras unidades sucesivas; además, se evita el aburrimiento de los que ya dominan la técnica, y se avanza en nuevos contenidos conceptuales que darán otras perspectivas a los mismos algoritmos.

La selección de los contenidos actitudinales: Los contenidos actitudinales son expresión de los objetivos del mismo tipo señalados con anterioridad. Tienen un carácter transversal para todas las unidades didácticas. Según el contenido de una unidad se elegirán los más afines. Estamos menos habituados a seleccionarlos para lograr su desempeño y tener una valoración final. Por ello, conviene comenzar a trabajarlos procurando seleccionar dos o tres y tener una valoración global al final de cada trimestre, tomando algunas observaciones valorativas en cada unidad.

En el cuadro 3 se presenta un resumen de los contenidos actitudinales más frecuentes en el Decreto de Enseñanzas mínimas del Estado para la ESO documento prescriptivo para la elaboración del resto de currículos autonómicos.

Cuadro 3

Algunos Contenidos Actitudinales en las matemáticas (Decreto de Enseñanzas mínimas. R.D. 1007/91 de 14 de Junio B.O.E. nº 152)

1. Incorporar los lenguajes de la matemática a la forma de proceder habitual.
2. Confianza en las propias capacidades para afrontar problemas y realizar operaciones matemáticas.
3. Disposición favorable a la realización correcta de las tareas, revisión y mejora del resultado de cualquier operación o problema.
4. Sensibilidad y gusto por la presentación ordenada y clara del proceso seguido y de los resultados obtenidos en problemas y cálculos.
5. Cuidado y precisión en cálculos y usos de los instrumentos de medida.
6. Perseverancia y flexibilidad en la búsqueda y mejora de soluciones a los problemas.
7. Interés y respeto por las estrategias y soluciones a problemas distintas de las propias.
8. Valoración de la incidencia de los nuevos métodos tecnológicos para el tratamiento de la información y la representación gráfica.

Propuesta de secuenciación y selección de contenidos.

Concretando en la proporcionalidad, la *secuenciación y selección* puede quedar así:

- Trabajar por primera vez, de forma sistemática, las nociones de la proporcionalidad con magnitudes en 1º y 2º de ESO.
- Introducir, previamente a las unidades de proporcionalidad, en 3º de ESO, una unidad en la que se manejen las fracciones como operadores, como representación de la relación entre el todo y la parte y como expresión de una medida.

- Organizar los contenidos de proporcionalidad, en 3° de ESO desarrollando la Proporcionalidad directa e inversa, Proporcionalidad compuesta y proporcionalidad geométrica (con introducción a las razones trigonométricas).
- Utilizar el concepto de proporcionalidad en la probabilidad (3° ESO)
- Afianzar el concepto proporcionalidad en la geometría de transformaciones para trabajar con figuras semejantes. (en 3° y/o 4° de ESO)
- Afianzar el concepto de proporcionalidad en la interpolación funciones y el análisis de la variación media de una función. (en 4° de ESO)
- Afianzar el modelo de dependencia aleatoria entre magnitudes, en la estadística, con la recta de regresión centrada en el punto de coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ en 4° de ESO.

Algunos criterios implícitos a la secuenciación:

(a) Solamente en 3° de ESO se proponen varias unidades didácticas cuyo objetivo central es el aprendizaje de la proporcionalidad.

(b) El aprendizaje de la proporcionalidad continuará en otras unidades aunque subordinado a nuevos conceptos matemáticos que actuarán de organizadores de la unidad didáctica: Por ejemplo, la proporcionalidad en un contexto de análisis de modelos de dependencia de funciones, se encuadra en la idea de aproximar una función por otra de más fácil manejo y que ofrece resultados prácticos semejantes.

(c) No se mantiene el criterio de subordinar la proporcionalidad a la "trigonometría" o a la "semejanza de polígonos".

(d) Tampoco se sigue el criterio de organizar los contenidos por "afinidad en el lenguaje"

Organización en unidades didácticas: Además, queda por decidir algún aspecto importante de la organización.

¿Se agrupan todos los conceptos de proporcionalidad en una única unidad didáctica? Esta decisión depende de algunas variables como:

(a) El conjunto de objetivos de tipo procedimental propios del tema o de unidades anteriores que se necesiten implicar en la unidad.

En este caso, en las tareas de proporcionalidad con magnitudes discretas se opta por repasar muchos contenidos procedimentales: conversiones con porcentajes y decimales, cálculo con ecuaciones sencillas, representaciones gráficas, traducciones del enunciado verbal a la formalización matemática sin apoyo del dibujo, etc. Algo similar ocurre con las tareas de proporcionalidad geométrica: repaso de figuras: descripción y propiedades, técnicas de dibujo, afianzamiento de algunas nociones mediante tareas de manipulación o taller, etc.

(b) El foco motivador de la unidad didáctica: "Vamos a trabajar con la proporcionalidad" no es, generalmente, muy motivador para los jóvenes de 3° de ESO. Suele llamar más la atención tipos de tareas o problemas cotidianos cercanos a ellos, a la profesión de sus padres, noticias de los medios de comunicación interesantes, tareas que puedan dar respuesta a algunos de sus interrogantes, etc.

En el caso que nos ocupa disponemos de dos buenos generadores de situaciones interesantes: las que se agrupan en la matemática comercial y las que se justifican por el diseño, la geometría de la medida, el cálculo de alturas sin medir directamente, interpretar y manejar mapas.

(c) La complejidad de los conceptos para los alumnos: Si la expresión matemática de la proporcionalidad es simple, su fenomenología didáctica es muy amplia y si entendemos que la formación de los esquemas conceptuales pasa por un análisis fenomenológico muy variado, el tiempo necesario para ello se amplía considerablemente.

Combinando las variables anteriores, por una parte el tipo de repaso y afianzamiento de todos los contenidos procedimentales es grande, lo que multiplica la duración de la unidad y, por otra, la variedad de motivos para las tareas de clase es tanta que no se perdería gran interés si se desglosan las actividades en dos unidades: las propias del trabajo con magnitudes discretas y las que se refieren a magnitudes geométricas; además, la amplitud de tareas necesarias para adquirir un buen esquema mental, avala la división en varias unidades. Cada unidad puede tener una duración comprendida entre 3 y 4 semanas. Según los contenidos de dependencia funcional que se introduzcan, las extensiones de la proporcionalidad geométrica que se hagan hacia la trigonometría, la clasificación/construcción de polígonos o la propia dinámica de la gestión de la clase, las unidades pueden alcanzar, sensatamente, 12 a 14 horas cada una.

2.3 Decisiones sobre los criterios de evaluación de la unidad didáctica

Entre las concepciones de evaluación actuales, en este capítulo se defiende que la evaluación consiste en una relación de tareas y decisiones que conducen a valorar el proceso de enseñanza y aprendizaje, globalmente, observando múltiples factores del mismo y detectando posibles causas de algunos comportamientos o problemas. En términos actuales es *procesual* (se realiza a lo largo de todo el proceso) y *formativa* (detecta problemas y facilita el que puedan corregirse). La evaluación se refiere al alumno y a las acciones y decisiones del profesor en la gestión del proceso.

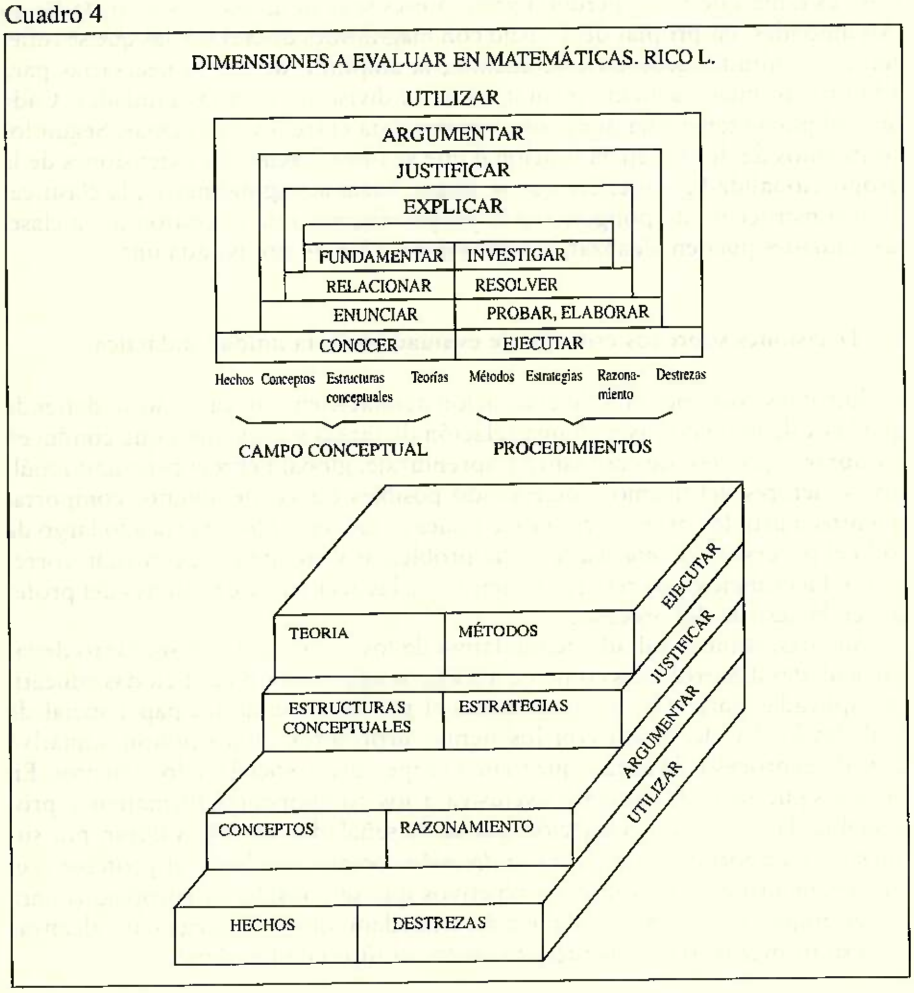
Además, como resultado acumulativo de los datos del proceso, tanto de las capacidades desarrolladas como de los logros adquiridos o las medidas educativas aplicadas para corregir problemas, el profesor asume un papel social de "calificador" y da, junto con los demás profesores, una opinión sumativa de todo el proceso –la nota–, que tiene su repercusión social en documentos. En lo que sigue se hará mención exclusiva a los componentes formativo y procesual de la noción de evaluación que se ha señalado, sin infravalorar, por supuesto, la importancia que tiene la *decisión social* que adopta el profesor o el Departamento al seleccionar los objetivos que se consideran apropiados para poder etiquetar con un Suficiente a un ciudadano que se le juzga para alcanzar o no su primer reconocimiento educativo –el título de Graduado–.

Al hilo de una idea de la evaluación procesual y formativa se concretan algunos criterios que contestan a las preguntas clásicas ¿Qué evaluar? ¿Cómo evaluar? ¿Cuándo evaluar?

2.3.1 *¿Qué evaluar?*

Hay varias categorías de objetivos a evaluar. El Cuadro 4 Rico, L. en (Tortosa y otros, 1995) muestra una clasificación válida en este análisis. Dimensiones distintas según el campo: conceptual (hechos, conceptos, etc.) o procedimental (Destrezas, razonamientos, etc.), o según el tipo de conducta implicada: utilizar, argumentar, justificar, etc.

Cuadro 4



El análisis de detalle de los objetivos a evaluar siguiendo estas categorías se concretará en el apartado 3, aquí, no obstante, es conveniente fijar algunos criterios sobre el *peso de cada tipo de objetivos.*

En la ESO, los objetivos se redactan en términos de capacidades para: "*utilizar y argumentar* hechos y conceptos" o "*utilizar y argumentar* destrezas algorítmicas, estrategias sencillas y algunas técnicas de razonamiento". (Objetivos generales de la ESO) Estos objetivos se traducen a capacidades más detalladas en los criterios de evaluación. Un ejemplo de tipos de capacidades propuestas para evaluar en esta etapa es el Cuadro 5 en el que se resumen las capacidades contenidas en los criterios de evaluación que publicó la Junta de Andalucía para la ESO (decreto citado anteriormente).

Cuadro 5

criterio de evaluación	capacidades Decreto de enseñanzas C.E.J.A.:
Adquisición de conceptos y procedimientos	Expresar ideas y relaciones matemáticas utilizando terminologías, notaciones y estructuraciones adecuadas al nivel de aprendizaje donde se está trabajando
	Elaborar y manejar representaciones para expresar conceptos, discriminando entre sus características más o menos relevantes y, establecer relaciones entre los mismos
	Justificar los distintos pasos de un procedimiento valorando la oportunidad de los mismos
Capacidad de abstracción	Sistematizar y resumir conclusiones de un trabajo realizado e interpretar las ideas matemáticas presentes en distintas formas de expresión
	Traducir los elementos de un problema de un modo de expresión a otro
	Localizar un mismo concepto en distintos contextos, valorando su utilidad como modelo explicativo
Adquisición jerárquica de contenidos	Conocer hechos específicos, con la terminología adecuada y relacionar conjuntos estructurados de hechos mediante conceptos
	Utilizar algoritmos para efectuar operaciones y conocer sus limitaciones
	Organizar y analizar datos e informaciones, reconocer y descubrir relaciones
Uso de herramientas lógicas	Reconocer patrones y proponer hipótesis explicativas
	Verificar conclusiones y realizar inferencias empleando distintas formas de razonamiento (inductivo, informal...
	Enunciar argumentos para convencer a los demás, valorar y criticar los argumentos de otros y elaborar contraejemplos
	Ejemplificar procedimientos y resultados generales
Uso adecuado de notaciones y procedimientos	Utilizar distintas notaciones, argumentando la conveniencia de cada uno para describir y trabajar en una situación
	Comparar las ideas matemáticas con la misma o distinta notación, valorando el papel del simbolismo
	Utilizar distintos procedimientos, argumentar su conveniencia
	Describir el procedimiento seguido al resolver un problema
	Efectuar ampliaciones, generalizaciones y optimizaciones de procedimientos para resolver problemas no rutinarios

Comentamos algunos criterios:

Adquisición de conceptos y procedimientos, adquisición jerárquica de los contenidos y uso adecuado de notaciones y procedimientos: Al proponer tareas a los alumnos se puede valorar el grado de desempeño de estas capacidades. Por ejemplo, para detectar la adquisición del concepto de proporcionalidad se pueden proponer a unas tareas:

- detectar si una tabla numérica con datos de dos magnitudes representa una proporcionalidad
- obtener nuevas cantidades, dada una proporcionalidad en forma de tabla, enunciado verbal, gráfica, etc.
- descubrir si una relación entre magnitudes es de proporcionalidad, o establecer nuevas condiciones para que lo sea (ejemplos: detectar hasta cuándo hay proporcionalidad en las ofertas de los hipermercados; indicar algunas variables que pueden incidir en que la relación entre el "número de albañiles que hacen un muro / horas que tardan en construirlo" no sea de proporcionalidad inversa)
- explicar los pasos que se han seguido para calcular la altura de un edificio manejando proporcionalidad de magnitudes o detectar algún error en el procedimiento valorando por qué no es correcto

La valoración de los procedimientos más convenientes o los algorítmos más eficientes se observa de manera natural en la originalidad con que un alumno resuelva algún problema o en la discusión que se establece en el grupo-clase, o en el pequeño grupo, cuando se discuten las posibles formas de atacar una tarea y se valoran. No obstante, se debe propiciar esta discusión y no cerrarla con diálogos como éste:

> *Alumno: Profesor, yo lo he hecho de otra manera*
> *Profesor: Vamos a ver, ¿te ha dado el mismo resultado?*
> *Alumno: Sí*
> *Profesor: Vale, entonces lo tienes bien*

o como éste:

> *Alumno: Profesor, yo lo he hecho de otra manera*
> *Profesor: Vamos a ver, (observa el procedimiento en la libreta) Está bien pero no debes hacerlo así porque es mas largo/ te equivocarás más/ lo has hecho por la cuenta de la vieja / no has usado ecuaciones/...*

En el primer diálogo, se corta toda posibilidad de valorar colectivamente el procedimiento. En el segundo, es el profesor el que hace una valoración para el alumno (que puede o no compartirse) a la que éste, si es obediente y capaz, le hará caso, aunque, probablemente no quede muy convencido. En cualquiera de los dos casos se escapa la posibilidad de discutir entre el grupo las ventajas e inconvenientes de ambos procedimientos. Si se da esta posibilidad puede ocurrir:

(Un alumno en la pizarra explica cómo ha hecho un problema, al terminar, otro alumno habla)

> *Alumno: Profesor, yo lo he hecho de otra manera*
> *Profesor: Vamos a ver, sal y explica tu procedimiento*
> *Alumno: (Explica el nuevo procedimiento)*
> *Profesor: Está bien pero el procedimiento anterior es más rápido y usa las ecuaciones que es el tema que estamos dando. Debéis de hacerlo así.*
> *Coro de alumnos (la mayoría): Es que de esa manera no sabemos hacerlo*

Posiblemente, esta situación no le sirva a los alumnos para valorar el mejor procedimiento pero al profesor sí que le sirve para diagnosticar que, en estas circunstancias, el procedimiento que la ciencia (en boca de su depositario) entiende como más eficaz, no lo es para la mayoría porque no lo entienden.

La capacidad de abstraccion y el uso de herramientas lógicas implican un pensamiento más elaborado si bien no deben posponerse al aprendizaje de algoritmos o hechos específicos. Por ejemplo, reconocer un patrón de proporcionalidad en un tabla simple puede ser más sencillo que aprender a dividir con decimales. Descubrir que hay proporcionalidad en el cálculo de costes de productos, en la obtención de distancias en mapas, con escalas, o en el movimiento de vehículos a velocidad constante, es un objetivo sensato y asequible.

En el cuadro número 5 hay un peso muy alto de capacidades que se denominan actualmente "pensamiento de alto orden" y que se postulan como un eje de las capacidades a valorar más en el futuro (Romberg, T. y otros, 1995). Los profesores no tenemos acumulada mucha experiencia en los instrumentos de evaluación para estas capacidades y hay un grave riesgo de no tratar de desarrollarlas por su dificultad al valorarlas. La apuesta por incrementar los objetivos referidos a este tipo de capacidades y reducir otros objetivos de destrezas algorítmicas y de conocimiento de hechos está hecha.

Objetivos actitudinales: Además de las capacidades de índole cognitiva, ¿Qué objetivos actitudinales conviene tener en cuenta para evaluar? Algunos objetivos actitudinales están *ligados a la metodología de trabajo* con los estudiantes. Por ejemplo, si los resultados de las observaciones y pruebas se presentan a los alumnos como un ascenso progresivo en el desarrollo de capacidades en los que se respeta una evolución más lenta, donde hay que alcanzar metas progresivas y asequibles que den seguridad por el éxito parcial, se estará más cerca de conseguir que el alumno valore su trabajo en las matemáticas confiando en que "puede" aunque con más dificultad que otros.

Cuando los resultados de las pruebas se presentan cerrados, con oportunidad única para aprobar o suspender, valorando resultados exclusivamente, con tareas muy por encima de los conocimientos de la mayoría, sin dar cuartel al que menos sabe, se contribuye a que la imagen personal de los que aprenden más lentamente se deteriore, aumente el bloqueo y el odio hacia la asignatura y se perpetúe la imagen de las matemáticas incomprensibles.

Hay quien defiende que el alumno, a través de la evaluación debe ser estimulado con metas que no alcance, para incrementar su "amor propio". La aplicación de este criterio puede ser eficaz sólo para los alumnos que tienen sus capacidades bastante desarrolladas y para los que el reto les coge seguros de poder afrontarlo. Los demás tienen la meta tan lejana que se reconocen incapaces de afrontarla, abandonan y anotan un fracaso más en su autoestima intelectual y en su imagen personal.

En consecuencia, la forma de gestionar la evaluación contribuye a desarrollar en un sentido o en el otro el objetivo número 10 que señalábamos en el apartado 2.2.2.

En la construcción de las unidades didácticas, apartado3 haremos referencia a alguna tarea en las que es posible observar este tipo de objetivos mediante los contenidos actitudinales que hemos resumido en el Cuadro 3 de 2.2.3.

2.3.2 *¿Cuándo y cómo evaluar?*

En el supuesto que se hayan seleccionado las tareas con las que el profesor desarrollará las clases y vistos los grandes objetivos a evaluar, la tarea de evaluación pasa por un registro sistemático de información que puede organizarse en tres grandes etapas.

Evaluación inicial: El profesor tiene que conocer en grandes líneas, el punto de partida de los alumnos al comenzar una unidad.

Para este análisis se admite que ha estudiado algo de proporcionalidad. Sin embargo, hay que entrar en los detalles de observación en el nivel de partida de todos acerca de:

- conocer sus destrezas en el manejo de fracciones en situaciones cotidianas y la invariancia de la fracción al modificarse el todo y las partes: noción de razón
- hasta qué punto se ha utilizado ya con soltura la proporcionalidad entre magnitudes (regla de tres, comparación de razones, obtención de la magnitud incógnita, etc.)

Los instrumentos de detección pueden ser muy variados y, en función de ellos, el tiempo que se tarde en detectarlos. Una prueba general puede dar alguna información, pero exige un buen diseño, su corrección y tener en cuenta que los alumnos, en ocasiones, cuando se les pregunta algo sin entrar aún en la temática parece que todo lo hubiesen olvidado; en cambio, recuerdan de pronto cuando se les proponen tareas y dialogan, preguntan algo, trabajan en grupo, discuten o consultan un texto. Otro instrumento de detección, en esta línea de argumentación, es facilitarles una tarea que llamaremos "situación inicial" en la que sin introducir nueva información el alumno se enfrente a un reto con lo que él sabe. Hay experiencia suficiente como para aventurar la hipótesis de que con este tipo de tareas se recuerdan conceptos perdidos en la mente y se descubren errores importantes en los alumnos. Algunos otros errores conceptuales, que no se hayan detectado, irán apareciendo a medida que se desarrolla la unidad didáctica y siempre que la observación del trabajo de los estudiantes sea cotidiana.

Evaluación de seguimiento: Durante la unidad didáctica se introducen nuevas ideas, se proponen tareas de dificultad creciente, los alumnos van consolidando su noción de proporcionalidad.

En esta etapa, que ocupa la mayor parte del tiempo, el profesor necesita ir registrando información con dos funciones esenciales:

(a) **Diagnóstico del aprendizaje:** Analizar cómo progresan los alumnos, detectar los diversos ritmos de aprendizaje y adecuar nuevas tareas a la diversidad que aparece. En este diagnóstico, desde el punto de vista de los objetivos del aprendizaje surgirán casos como éstos:

- alumnos que piensan que si le suman dos cantidades iguales a dos magnitudes proporcionales, se mantiene la proporción
- alumnos que presentan dificultades al dibujar la gráfica de una proporcionalidad en unos ejes cartesianos porque no localizan aún los puntos correctamente
- alumnos que, al hacer las operaciones con una calculadora y equivocarse al pulsar alguna tecla, no son capaces de detectar que aquél resultado es disparatado respecto al previsto
- alumnos que, al leer un problema, traducen confundiendo el tipo de proporcionalidad
- alumnos que despejan mal x en la proporción a/x =b/c
- alumnos que no muestran interés en lo que se trabaja en clase
- alumnos que acaban bien las tareas antes que nadie y se aburren

etc.

Esta multiplicidad de situaciones se pueden organizar en varios tipos, siguiendo las apreciaciones señaladas en el capítulo 5:

- errores del aprendizaje propios de la unidad didáctica y debidos a obstáculos u otras dificultades
- errores que proceden de aprendizajes anteriores no afianzados: persisten algunos obstáculos y/o hay procedimientos carentes de sentido que se manejan de memoria
- errores que proceden de una falta de motivación, distracciones o de una problemática específica de la personalidad del estudiante. En este caso hay que analizar si el método de esnseñanza facilita algún obstáculo didáctico que a su vez genera un efecto desmotivador. No siempre es así y la problemática puede ser externa a la institución escolar
- errores del alumno que se desmotiva por aburrimiento ante la homogeneidad del método de enseñanza. En estos casos, la pretensión, muy común entre el profesorado, de llevar a todos los alumnos al mismo ritmo genera errores del método de enseñanza tanto por el lado de los alumnos que comprenden más lentamente como por el otro nivel de los que comprenden con más rapidez. Una metodología adaptada a distintos ritmos puede disminuir errores y evitar en la clase conductas disruptivas de los que se desmotivan porque el ritmo de la enseñanza no se adapta a su propio ritmo de aprendizaje.

La evaluación durante el seguimiento de la unidad debería tener como objetivo detectar estas situaciones para aplicar medidas educativas.

(b) **Retroalimentación de la gestión de la enseñanza:** No sólo los ojos de un joven indican si éste comprende una información. El registro sistemático de dificultades da mejor diagnóstico. Este registro nunca será exhaustivo pero sí facilita, en primer lugar, cuándo y con quiénes hay que comenzar a diversificar las tareas. Los alumnos van descubriendo su situación y nuestra gestión del tiempo dará lugar a que se dediquen espacios para responder a las dificultades del proceso y tipos de tareas más precisas y adecuadas a cada caso. La pura individualización del aprendizaje no está aún en manos de las disponibilidades económicas del sistema; sin embargo, la detección de alumnos que frecuentan dificultades análogas sí que permite, utilizando un símil médico, proponerles un antibiótico específico, aunque sea de amplio espectro, para ayudarles a resolver sus dificultades. Sin obtener esta información diagnóstica amplia, aunque no muy precisa, la retroalimentación del diagnóstico a la enseñanza se limitaría a sentenciar al final del trimestre *el alumno está suspenso y debe recuperar.*

Evaluación a término: Al finalizar el tiempo dedicado a una o varias unidades didácticas el profesor dispone de información acumulada de las tareas propuestas y observadas (proyectos de trabajo, pruebas, etc.) Esta información se contrasta con los objetivos previstos en este período y realmente desempeñados. Como resultado del contraste hay una nueva información diagnóstica para recuperar aspectos no debidamente afianzados y otra información sumativa, con validez social, que se suministra a las familias, se debate con los demás profesores para formarse una imagen más global del alumno y, a final del curso, se acumula a las demás para decidir, entre todo el equipo educativo, si el alumno aprueba, suspende o promociona de curso.

Los objetivos de evaluación a término de cada unidad se suelen referir a los contenidos específicos y se clasifican en conceptuales, procedimentales y actitudinales. Una vez diferenciados, en grandes líneas, es necesario plantear cuáles se considera necesario alcanzar en esa unidad –logros adquiridos– y cuáles seguirán consolidándose en otras unidades debiendo, en la unidad de referencia, haber manifestado cierto desarrollo en su desempeño.

Por ejemplo, en una unidad de proporcionalidad, detectar la proporcionalidad directa en una tabla o gráfica, obtener el valor de una magnitud proporcional a otra cuando se conoce la razón, justificar por qué se reconocen las magnitudes directamente proporcionales, o traducir del lenguaje verbal al gráfico o algebraico una relación y justificar su proporcionalidad, son logros que deberían alcanzarse al terminar una unidad didáctica en 3° de ESO. En cambio, no equivocarse en el cálculo con fracciones en errores menores, o detectar cuándo un cálculo está equivocado y da un resultado disparatado, son objetivos que se deben conseguir a lo largo de uno o varios cursos y no son logros en esta unidad.

En los párrafos anteriores se ha dibujado una panorámica de las etapas en las que puede dividirse la evaluación durante el desarrollo de una unidad didáctica dando algunas sugerencias para organizar los tipos de objetivos que se pretenden evaluar en cada momento. Al entrar en el diseño de tareas que sirven para observar y registrar información, obviamente, cualquier tarea escolar no sirve para observar el logro o desempeño de un objetivo. Por ejemplo, en los objetivos orientados a la capacidad de expresarse verbalmente y discutir o entender los argumentos del otro, tiene que haber un diálogo, no pueden observarse en pruebas escritas. Las tareas en las que se construye un concepto por manipulación de materiales, como la proporcionalidad de magnitudes con triángulos semejantes, no es posible detectar dificultades si se hacen en silencio o en la casa; hay que hacerlas en clase. Un error en el cálculo con porcentajes se detecta mejor en un ejercicio escrito.

Esta obviedad, sin embargo, implica que si se quieren detectar o desarrollar ciertas capacidades es imprescindible poner a los alumnos en situación de que las pongan en práctica, aunque se invierta más tiempo. La diversidad de tareas es necesaria. La acumulación de tareas de un mismo tipo esconde las demás capacidades que no se ejercitan en ellas. Una decisión inicial, al construir la unidad es repasar el Cuadro 6. y encuadrar algunas tareas en el tipo de objetivo que se pretende y el momento o lugar en que está previsto desarrollarlas.

Cuadro 6

U.D./núcleo/eva...n

Capacidades cognitivas

Contexto de la tarea / contenidos	Indicadores de tipos de tareas (	Grupo: clase	Grupo: pequeño	Ind. casa/ clase	Ind. cuaderno	Ind. prueba parc.	Ind. prueba glob.	Otro
Comprende conceptos	Reconoce, relaciona, conecta entre varios núcleos							
Maneja procedimientos: (algoritos, cálculo mental)	Recuerda, aplica, construye, generaliza, optimiza, valora							
Maneja sistemas de notaciones y representaciones	Reconoce, visualiza, construye, describe, interpreta, traduce							
Afronta y resuelve problemas y ejercicios	· Comprende, modeliza/plantea/ traduce · Descubre estrategias · Soluciona · Valida la solución,... · Extiende							
Utiliza instrumentos de razonamiento	... descubre, infiere, contraargumenta, generaliza, deduce							

adaptado de los criterios de observación de BON DIAS MATES P.C. Cataluña

3. LA CONSTRUCCIÓN Y GESTIÓN DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

Las páginas anteriores han ido desbrozando criterios y decisiones que orienten la selección concreta de objetivos, contenidos, actividades y formas de evaluar. En este apartado se concretan las tareas de acuerdo a análisis más de detalle, que requieren nuevas decisiones.

(a) La unidad didáctica se organizará en varias fases que pueden solaparse en el tiempo:

<table>
<tr><td>Fase</td><td>1 ó 2 horas</td><td>6 a 8 horas</td><td>3 ó 4 horas</td></tr>
<tr><td>Motivación y exploración inicial</td><td colspan="2">*************</td><td></td></tr>
<tr><td>Desarrollo</td><td colspan="3">*****************</td></tr>
<tr><td>Consolidación y ajuste de ritmos</td><td></td><td colspan="2">***********</td></tr>
</table>

Este desglose es una decisión de tipo *metodológico;* parte de una concepción de la enseñanza que persigue un aprendizaje significativo de los conceptos, por lo que la exploración inicial sirve para conectar con las ideas previas.

Además, en la fase de desarrollo se persigue una exploración de los conceptos desde perspectivas fenomenológicas distintas y complementarias, apoyándose en sistemas de representación distintos y favoreciendo las traducciones entre ellos.

La fase de consolidación y ajuste de ritmos pretende que la mayoría de los alumnos cimenten su esquema de pensamiento y resuman los procedimientos aplicados. Habrá algunos que avancen en tareas de ampliación que otros no podrán trabajar en el mismo momento, y otros que insistan en algunas ideas que necesitan más tiempo para consolidarse.

La decisión del tiempo dedicado a cada fase o el tiempo en que una y otra se solapan para algunos alumnos o si la segunda y tercera fase se pueden confundir en una sola, serán decisiones que dependan de la gestión de la clase, el tipo de alumnos, su dinámica de trabajo y otras variables que no se han hecho explícitas. No obstante, este desglose sirve para preparar tareas diversas según su función en la unidad didáctica.

En los apartados que siguen, se proponen objetivos, contenidos y tareas de dos unidades didácticas: proporcionalidad con magnitudes geométricas y aritméticas (discretas). En algunos casos, se sugieren tareas que superen los contenidos de la unidad y se entronquen en otras unidades de las que se han comentado en el apartado 2.2.3.

3.1 Objetivos de las unidades didácticas

Proporcionalidad con magnitudes discretas

Objetivos	Tipos
Reconocer y expresar relaciones de proporcionalidad simple y directa o inversa entre magnitudes mediante enunciados verbales, tablas, representaciones, gráficas y leyes algebraicas	Desarrollo
Aplicar las propiedades de proporcionalidad directa de magnitudes en el cálculo de cantidades, tasas y porcentajes	Desarrollo
Resolver problemas con magnitudes proporcionales o reducibles a ellas	Desarrollo
Aplicar la proporcionalidad a repartos	Desarrollo
Reconocer y expresar relaciones de proporcionalidad compuesta entre no más de 4 magnitudes mediante enunciados verbales y tablas	Desarrollo
Aplicar la proporcionalidad compuesta al interés simple	Desarrollo
Utilizar tablas de organización de datos para comprender enunciados de problemas de proporcionalidad	Seguimiento
Traducir las relaciones de proporcionalidad de un lenguaje de representación a otro.	Seguimiento
Afianzar operaciones y aproximaciones con números racionales: forma decimal, fracción (con y sin calculadora)	Seguimiento
Afianzar el concepto de razón	Seguimiento
Afianzar la estimación previa de resultados de un problema	Seguimiento
Justificación algebraica de algunas propiedades de la proporcionalidad	Ampliación
Explorar alguna relación no proporcional entre magnitudes y construidas desde ésta: Por ej. El interés compuesto	Ampliación

Proporcionalidad con magnitudes geométricas

Objetivos:	Tipos
Reconocer y Expresar relaciones de proporcionalidad directa entre magnitudes geométricas dadas en figuras, gráficas o enunciados verbales	Desarrollo
Localizar proporcionalidades entre segmentos de figuras planas aplicando el Teorema de Thales	Desarrollo
Resolver problemas de cálculo de distancias con magnitudes proporcionales	Desarrollo
Reconocer figuras poligonales semejantes aplicando criterios de proporcionalidad	Desarrollo
Justificar las conversiones entre unidades de medida de longitudes con la proporcionalidad de magnitudes	Desarrollo
Reconocer y aplicar las proporciones que existen entre las áreas de figuras semejantes.	Desarrollo
Destrezas en visión espacial y representación plana con útiles de dibujo de situaciones.	Seguimiento
Traducir las relaciones de proporcionalidad de un lenguaje de representación a otro.	Seguimiento
Afianzar operaciones y aproximaciones con números racionales: forma decimal, fracción. (con y sin calculadora)	Seguimiento
Afianzar los cálculos y conversiones entre unidades de medida	Seguimiento
Afianzar la estimación previa de resultados de un problema	Seguimiento
Justificación del Teorema de Thales	Ampliación
Explorar el significado de razón trigonométrica en triángulos rectángulos	Ampliación

Detalle de contenidos de las unidades:

En los Cuadros 7 y 8 siguientes se presentan los contenidos fundamentales de las dos unidades. Además de la clasificación habitual se incluyen los hechos, las destrezas y las estrategias. Los hechos pueden corresponder al campo de los conceptos ya adquiridos y triviales para el alumno o a instrumentos específicos de trabajo o vocabulario de términos de manejo habitual. Las destrezas son procedimientos muy sencillos y, por lo general, trabajados en otras unidades y bastante automatizados. Las estrategias son procedimientos no algorítmicos, que necesitan decisiones en cada problema acerca de los conceptos o procedimientos a manejar al ponerla en práctica.

Cuadro 7

CLASIFICACIÓN DE LOS CONTENIDOS MATEMÁTICOS

PROPORCIONALIDAD DIRECTA, INVERSA Y COMPUESTA

Conceptos

Relaciones de:
proporcionalidad directa entre magnitudes
proporcionalidad inversa entre magnitudes
proporcionalidad compuesta entre magnitudes
Razón de una magnitud: tasa entre magnitudes
Linealidad de la proporcionalidad directa
Magnitud de referencia y magnitudes independientes en la proporcionalidad compuesta
Reparto directamente proporcional

Destrezas

Representación de gráficas a escala
Operaciones con números fraccionarios y decimales
Obtención e interpretación de porcentajes

Procedimientos

Reconocer relaciones de proporcionalidad directa o inversa, dadas en tablas, gráficas, leyes albebraicas o verbalmente
Representar relaciones de proporcionalidad directa e inversa
Obtener la tasa de proporcionalidad en una relación entre magnitudes
Repartir proporcionalmente

Hechos

magnitudes
cantidades
medida de magnitudes
Interés bancario, Capital, Rédito
magnitudes dependientes e independientes

Estrategias

Detectar relaciones de proporcionalidad del lenguaje verbal a otro gráfico o algebraico y calcular cantidades
Estimación de resultados de operaciones o problemas a priori

Actitudes

Gusto por el orden, la precisión y el trabajo metódico
Confianza en las propias posibilidades
Seguridad en la potencialidad de las matemáticas en resolución de problemas habituales en la vida

Cuadro 8

CLASIFICACIÓN DE LOS CONTENIDOS MATEMÁTICOS

PROPORCIONALIDAD CON MAGNITUDES GEOMÉTRICAS

Conceptos

Relaciones de:
proporcionalidad directa entre magnitudes
Razón de una magnitud;
Semajanza de figuras
Proporcionalidad de segmentos por el Teorema de Thales.

Destrezas

Uso de instrumentos de representación geométrica
Operaciones con números fraccionarios y decimales
Aproximaciones de medidas y errores

Hechos

Tipos de figuras planas
Magnitudes geométricas: longitud, superficie, ángulos
Medidas de magnitudes geométricas
Escalas

Procedimientos

Reconocer relaciones de proporcionalidad entre segmentos incluidos en figuras aplicando el Teorema de Thales o la semejanza de triángulos
Reconocer relaciones de proporcionalidad directa e inversa entre magnitudes geométricas
Obtener la razón de proporcionalidad en una relación entre magnitudes geométricas

Estrategias

Detectar relaciones de proporcionalidad en problemas geométricos y obtener cantidades
Estimación de resultados de operaciones o problemas a priori
Traducir un problema al lenguaje geométrico, resolverlo manejando la proporcionalidad geométrica y validar el resultado por estimaciones

Actitudes

Gusto por el orden, la precisión y el trabajo metódico
Confianza en las propias posibilidades
Seguridad en la potencialidad de las matemáticas en resolución de problemas habituales en la vida
Apreciación estética de la proporción

3.2 La selección de actividades de aula y recursos

El texto de una misma actividad propuesta a los alumnos puede ser susceptible de diferentes usos. Por ello, es importante acompañar a las tareas, el contexto de la unidad en que se ponen en juego, las intenciones previstas y algunos comentarios de variaciones u observaciones metodológicas, fruto de la experiencia propia o ajena, y referencias a dificultades o concepciones erróneas que se hayan previsto o conozcan de la amplia bibliografía didáctica.

En las páginas siguientes se presentan actividades de aula, en una ficha, siguiendo las pautas comentadas:

Actividad: Situación inicial
Texto:
Intenciones:
Comentarios:
Fuente:

Fase de motivación y exploración inicial:

Se recuerdan algunos conceptos y se explora con ellos para valorar el conocimiento previo, estimular la motivación, adiestrarse en la manipulación de algunas ideas, antes de conceptualizarlas.

Actividad: Motivación y Exploración Inicial. Conocimientos previos
Texto: Una editorial necesita valorar el número de líneas de un libro original para presupuestar el coste de su "picado" (escritura) en el ordenador. El editor, cuenta las líneas de una página cualquiera completa que son 27 y observa que el original tiene 204 páginas. Estima que tiene 5.508 líneas. ¿cómo ha razonado? ¿qué es lo que ha supuesto? ¿se podría hacer una estimación más precisa? Dar pistas.
Intenciones: Detectar conocimientos previos sobre proporcionalidad directa y estrategias de cálculo con estimaciones
Comentarios: Se puede trabajar en grupos pequeños y ver lo que hacen. En la puesta en común se extrae una primera información sobre los conocimientos previos (sin asumir, como generales, los conocimientos de los que contestan casi siempre bien).
Fuente: Matemáticas de 3° de ESO. Editorial Algaida (adaptada)

Actividad: Situación inicial

Texto: En un hipermercado ofertan paquetes de arroz de 1.150 gr a 175 ptas. Regalan uno al comprar 2. Otra oferta, en arroz de similar calidad son paquetes de 920 gr a 160 ptas. paquete. Al comprar tres regalan uno ¿Qué oferta es más ventajosa?

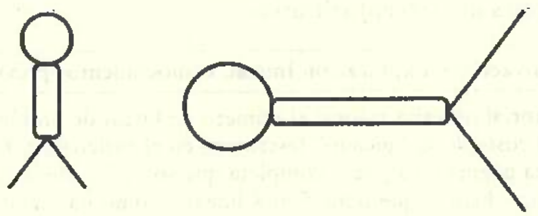
Intenciones: Aplicar cálculos usando implícitamente la proporcionalidad. Comparar y discutir procedimientos y soluciones. Afianzar una actitud de confianza en la utilidad de las matemáticas.

Comentarios: Una de las líneas de ampliación del ejercicio consiste en analizar por qué las ofertas más ventajosas suponen tener que pagar más dinero aunque sea inferior la tasa pta/kilo. Es interesante aprovechar y convertir la tarea en un problema más abierto en el que se recuerden algunos conceptos de matemática comercial. Por ejemplo, el capital que adelanta el consumidor al comprar varias unidades que no consume inmediatamente, se transforma en capital para el hipermercado del que puede obtener un beneficio adicional financiero...

Fuente: Matemáticas de 3° de ESO. Editorial Algaida (adaptada)

Actividad: Situación inicial

Texto: Observa los dos monigotes. ¿Podrías decir que son semejantes? ¿Qué ocurre si comparamos por separado la cabeza, el cuerpo y las piernas? Expresa lo que quiere decir para ti la frase "figuras semejantes".



Intenciones: Detectar objetos mentales de los alumnos sobre semejanza de figuras. Iniciar el proceso para precisar el concepto de semejanza manejando el concepto de proporcionalidad

Comentarios: Es obligado utilizar algún instrumento de medida. Al comparar figuras distintas debería llegarse a descubrir que algunas no son semejantes (el rectángulo) y comparar la constantes de proporcionalidad del triángulo de los pies y el radio de la circunferencia de la cabeza

Fuente: Elaboración propia

Fase de desarrollo de nuevas ideas:

Las actividades conducen a conclusiones en las que se conceptualizan las nociones fundamentales de la unidad. Se resumen los pasos de cada procedimiento. Se enuncian algunas pistas para aplicar a la resolución de problemas no procedimentales (tablas para organizar datos, claves para detectar los datos, incógnitas y condiciones del problema, indicadores para atacar los problemas con modelos de proporcionalidad directa, inversa o compuesta, etc.)

Las metodologías de trabajo con los alumnos son muy diversas. No obstante, la edad, el nivel de enseñanza y la psicología del adolescente aconsejan actividades variadas, motivadoras, poco tiempo de explicación continuada del profesor, necesidad de resumir y concluir en cada sesión los aspectos fundamentales (por los alumnos o por el profesor, y manifestar un nivel de exigencia regular en las tareas para educar en el trabajo sistemático).

Actividad: Desarrollo de nuevas ideas
Texto: Una mecanógrafa escribe 300 pulsaciones por minuto. a) Expresa esta relación en forma de tabla y de gráfica los 10 primeros minutos. b) Compara la tabla y dibuja la gráfica del trabajo de otra mecanógrafa que tiene una tasa de 250 pulsaciones por minuto c) ¿Cuántas pulsaciones habrá aventajado una a otra a los 35 minutos?
Intenciones: Expresar una relación de proporcionalidad directa dada la tasa de la relación en distintos lenguajes
Comentarios: El dibujo de la segunda proporcionalidad permite introducir la "inclinación de la gráfica" como índice de variación.
Fuente: Elaboración propia

Actividad: Desarrollo de nuevas ideas
Texto: Una subvención de 15.000.000 de ptas. se repartirá entre tres municipios X, Y, Z para asfaltado de sus calles. Hay dos sistemas de reparto. Sistema A) Todos los municipios reciben la misma cantidad. Sistema B) Cada municipio recibe en proporción directa a los Kilómetros de calles del municipio (municipio X: 100 Km; municipio Y: 150 Km; municipio Z: 250 Km).
Realizar la distribución de la subvención por ambos sistemas, teniendo en cuenta lo que cada municipio recibiría por km. de calle. ¿Cuál es la tasa de la proporción en el sistema B? ¿A quién favorece cada sistema de distribución? ¿Cuánto recibe cada municipio por km de calle en cada sistema de distribución?
Intenciones: Efectuar repartos proporcionales. Comparar con otros sistemas de reparto.
Comentarios: La idea central es llevar a los alumnos a la conclusión de que la tasa del reparto proporcional es la razón entre la suma de las cantidades de ambas magnitudes Conviene insistir en que no todos repartos son proporcionales
Fuente: Elaboración propia

Actividad: Desarrollo de nuevas ideas

Texto: En una editorial hay 6 mecanógrafos, que trabajando 8 horas diarias durante 4 días, pasan 640 páginas de un manuscrito a) ¿De qué magnitudes depende las páginas del manuscrito que se pasan a mecanografían? Calcula en una tabla el número de páginas escritas cuando:

* Sólo se modifica el número de mecanógrafos: 2, 4, 6

* Sólo se modifica el número de horas de trabajo diario: 2, 4, 8

* Sólo se modifica el número de días de trabajo: 1, 2, 3, 4

(b) ¿Cómo se modifica el número de páginas cuando variamos una sola de las magnitudes? ¿Qué relación hay entre ellas y el número de páginas?

(c) ¿Cómo se podría saber las páginas escritas por 4 mecanógrafos, trabajando 2 horas diarias, durante 3 días?

(d) Explica el procedimiento que se ha seguido en el apartado anterior.

Intenciones: Detectar la multilinealidad de la proporcionalidad compuesta. Expresar un procedimiento en lenguaje verbal

Comentarios: Comprender la expresión que ligue la razón de la magnitud incógnita con el producto de las razones de las demás magnitudes requiere un proceso constructivo. Aquí se opta por calcular tablas que permitan reconocer esta multilinealidad.

Fuente: Matemáticas 3° ESO. Algaida (Adaptada)

Actividad: Desarrollo de nuevas ideas

Texto: Para determinar la altura de un objeto se puede colocar un espejo en el suelo y alejarse la distancia necesaria para observar el punto más alto del objeto. Este procedimiento se basa en una ley de la reflexión de la luz: «El ángulo incidente en el espejo debe ser igual al ángulo reflejado.» Representa este procedimiento en un croquis y calcula la altura de una casa cuando un observador, de 1,70 m de altura, ve su tejado si coloca el espejo a 14 m del edificio y a 2 m del observador.

Intenciones: Modelizar geométricamente una situación. Reconocer la semejanza de triángulos. Utilizar la proporcionalidad para obtener cantidades desconocidas.

Comentarios: Esta actividad puede presentar una fase exploratoria en la que los alumnos experimenten con espejos reales, tomen medidas, y se enfrenten a las aproximaciones necesarias para que el error no se dispare. Al manejar este procedimiento para comparar las estaturas de una pareja de alumnos, en función de la distancia del espejo a cada uno de ellos, se detecta mejor la necesidad de precisar el error en la medida.

Fuente: Matemáticas 3° ESO. Editorial Algaida.(Adaptada)

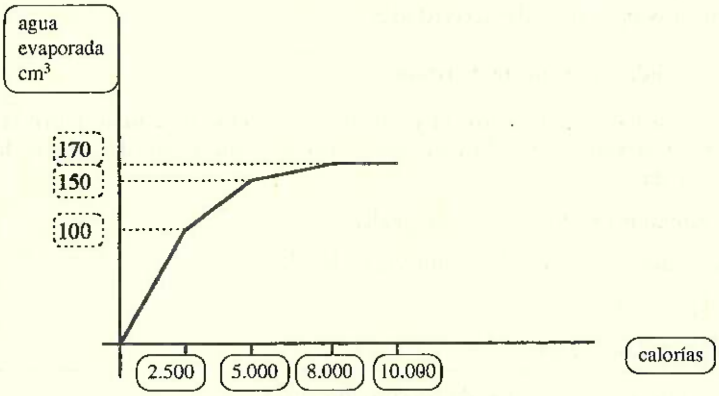
Fase de consolidación y ajuste de ritmos:

Cuando en la unidad didáctica se planifican actividades para todos los alumnos el proceso habitual lleva a que algunos mantengan ritmos más lentos y otros más rápidos. Las razones de ello son importantes de determinar para ajustar las tareas. Partiendo del supuesto de deseo sensato de los chavales en un trabajo sin agobios, es necesario preparar actividades para casa y para clase con intenciones distintas. Algunas consolidarán conocimientos avanzados, otras insistirán en conceptos básicos.

Veamos algunos ejemplos de actividades

Actividad: Consolidación y ajuste de ritmos
Texto: Establece si hay relación directa y, en su caso proporcionalidad, entre las parejas de magnitudes siguientes. Justifica cada caso: a) Pesos de pintura empleada y superficie pintada. (b) Lados de polígonos y número de diagonales (c) Longitud de lados de cuadrados y superficie de ellos (d) Edades de personas y peso (e) Edad y consumo de tabaco
Intenciones: Reconocer situaciones de proporcionalidad
Comentarios: Posiblemente habrá que establecer estrategias para generar contradicciones que superen el concepto de proporcionalidad subyacente a argumentos simplificados del tipo «*sí lo es, porque cuando aumenta una aumenta la otra*»
Fuente: Matemáticas 3º ESO. Editorial Algaida

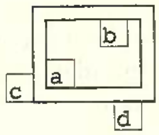
Actividad: Consolidación y ajuste de ritmos
Texto: Un comprador pregunta extrañado a la vendedora de una marquetería: ¿Por qué me cobró usted la semana pasada por enmarcar una foto de 24 x 36 cm 2.928 pta. y ahora, por enmarcar una foto de 48 x 72 cm me cobra 9.312 ptas.? Si la foto mide el doble de la anterior por qué el precio es más del triple? Busca argumentos que justifiquen esta diferencia en el precio y la aparente desproporción. Datos: Precio de cada metro del marco 1000 ptas. Precio de cada cm^2 de vidrio 2 ptas.
Intenciones: Comparar la proporcionalidad entre longitudes y entre superficies de figuras.
Fuente: Matemáticas 3º ESO. Editorial Algaida.

Actividad: Consolidación y ajuste de ritmos
Texto: La gráfica de la figura presenta la cantidad de agua que pierde un líquido según las cantidades de calor (calorías) que se le aplican: (a) Interpretando la gráfica, explica lo que sucede en el experimento (b) ¿Qué agua se ha evaporado al suministrarle 8.000 calorías, y 8.400 calorías? (c)Si la proporción de agua que se evapora hasta las 2.500 calorías se mantuviese hasta las 10.000 calorías ¿cuánta agua se habría evaporado? 
Intenciones: Interpretar gráficas definidas con trozos rectilíneos. Asociar la proporcionalidad directa con su gráfica en contextos no elementales para predecir un resultado.
Comentarios: Puede considerarse una actividad para evaluar a término algunas capacidades de las previstas en los objetivos
Fuente: Elaboración propia

Actividad: Consolidación y ajuste de ritmos

Texto: En los Elementos de Euclides (300. a.C.) acostumbraban a representar cantidades mediante segmentos. Así la semejanza de rectángulos indica la proporción entre los lados:

a/c=b/d.



En cambio, la expresión a.d = b.c indica que hay igualdad entre las superficies de dos rectángulos de lados a, d y b, c respectivamente.

Construye dos rectángulos semejantes a partir de otros dos con la misma superficie y viceversa. ¿Todas las figuras semejantes tienen igual área? ¿Las figuras con igual superficie son necesariamente semejantes?

Intenciones: Combinar dos características de las figuras y diferenciarlas

Comentarios: Es una actividad para comentar alguna noticia histórica y poner a unos alumnos a desarrollar pequeñas exploraciones más abiertas, mientras los demás consolidan otros aprendizajes.

Fuente: Matemáticas 3º ESO. Editorial Algaida.

3.3 Gestión de la unidad didáctica

Para poner en práctica las actividades de aula en cada sesión de clase es conveniente planear algunos detalles metodológicos, concretar tiempos orientativos o fijar algunas conductas que se van a observar sistemáticamente. El cuaderno del profesor es el documento de registro sistemático de las tareas previstas y el documento en el que se resumen conclusiones y se adoptan decisiones para rectificar en la próxima unidad o en el próximo curso.

El formato de un cuaderno del profesor puede ser muy diverso. Una propuesta de formato se basa en registrar lo que se ha previsto en una clase y los resultados a posteriori. Los grandes objetivos de la sesión, las claves de las tareas que se piensan proponer, las notas metodológicas que se conozcan, dificultades previstas, errores más frecuentes, recursos a manejar, deben tener un lugar en el formato.

Por último, los criterios de evaluación analizados anteriormente deben ocupar un lugar en este formato ligados a tareas concretas. Por ejemplo, una sesión en la que los alumnos trabajan en grupos pequeños es buena ocasión para observar cómo razonan alguna propiedad o qué papel juegan en el grupo: activos, pasivos, pendientes de lo que haga el compañero, críticos con los argumentos de otro. Una sesión de desarrollo de nuevas ideas en la que el profesor propone tareas, anima a los alumnos a intervenir, genera contradicciones en los argumentos para acotar los conceptos, puede servir para detectar los alumnos que captan más lentamente una idea, o no intervienen porque presentan una actitud permanente a “no hacer” sino “copiar” las matemáticas, etc. o presentan una hiperactividad a contestarlo todo. También las sesiones de ajuste de ritmos y consolidación son buenos momentos para sentarse con los chavales e ir revisando cómo trabajan en el cuaderno, su capacidad para tomar apuntes, qué parte de su contrato de trabajo están cumpliendo, y, a su vez, comentar con ellos los cambios de ritmos necesarios para llegar a las metas apetecidas. El cuaderno del profesor, con estas pautas anteriores, puede adoptar un formato de ficha como la del Cuadro 9 y que se rellena por sesiones o semanas según la profundidad que se desee. Esta información acumulada a lo largo del curso es una buena forma de aprovechar, de un año para otro, la experiencia docente, modificando sobre el trabajo realizado y haciendo posible el dicho «caminante no hay camino, se hace el camino al andar”.

Cuadro 10

Sesión	Guión de actividades de aula	Tareas e intervenciones del profesor	Notas metodológicas
Contenidos específicos			

Supuestos prácticos y actividades complementarias

1. Para el profesor en formación es conveniente disponer de los Reales Decretos y Decretos Autonómicos que regulan el Currículo de Secundaria Obligatoria y de los distintos Bachilleratos para el área de matemáticas así como realizar una lectura atenta de estos documentos. Sobre tales documentos es conveniente analizar, en cada caso, la conexión de los objetivos del área con los objetivos de ciclo y con los fines generales de la Educación Matemática. También es adecuado estudiar la conexión de los criterios de evaluación con los objetivos y con los contenidos del área. Igualmente conviene considerar los materiales y tareas usuales de evaluación y discutir su adecuación para los objetivos y criterios de evaluación establecidos por el currículo oficial. Las orientaciones metodológicas para el área de matemáticas en secundaria y los principios generales que las caracterizan deben ser igualmente analizados.

2. Desde la perspectiva específica de la Educación Matemática debe realizarse también el análisis crítico de los libros de texto para el área de matemáticas. Es conveniente analizar y estudiar la estructura general de los libros y la específica de cada capítulo; la organización y presentación de los contenidos; los elementos no convencionales utilizados en los libros; los organizadores usuales que aparecen en los libros de texto y la ejemplificación de variantes para cada uno de ellos. Para una puesta en práctica eficaz de esta actividad es conveniente hacer un estudio comparativo de textos redactados por equipos diferentes.

3. El análisis fenomenológico presenta cierta dificultad conceptual. Por ello conviene trabajar en grupo inicialmente para realizar el análisis fenomenológico de alguno de los temas del currículo de matemáticas de secundaria. Cada profesor en formación puede comenzar por establecer individualmente referencias fenomenológicas relevantes para un tema en cuestión; con posterioridad, se pueden discutir en grupo los componentes encontrados y elaborar un resumen del grupo. Conviene verificar la presencia o ausencia en un libro de texto de cada una de las referencias fenomenológicas encontradas. Igualmente, resulta adecuado valorar el uso de componentes fenomenológicas en actividades de motivación, presentación de conceptos, explicación de procedimientos, ejercicios y problemas, actividades de ampliación y actividades complementarias.

4. Para el estudio de los sistemas de representación de los tópicos de secundaria resulta conveniente comenzar por determinar los sistemas de representación utilizados en un tema de cada uno de los siguientes bloques: Números, Geometría, Álgebra, Funciones, Magnitudes, Estadística y Probabilidad. Para precisar los conceptos que se manejan resulta conveniente diseñar una actividad en la que sea necesario trabajar simultáneamente con más de uno de los sistemas de representación considerados, en cada uno de los temas analizados.

5. El estudio de los modelos puede trabajarse sobre tópicos concretos. Por ejemplo, se puede comenzar por localizar y describir un modelo que sea útil para ejemplificar conceptos algebraicos. A partir de ese modelo es posible diseñar una actividad para cada uno de los conceptos en las que se ponga de manifiesto la utilidad del modelo considerado.

6. Para trabajar sobre los errores se puede proponer la realización individual de un listado con la descripción resumida de los 10 errores más frecuentemente detectados al comenzar y al concluir el estudio de los números decimales en el segundo ciclo de secundaria. Se continuará con el intercambio de información con los compañeros del Seminario para delimitar las concordancias y discrepancias en la consideración de los errores mencionados. Finalmente se elaborará un documento conjunto de los errores conceptuales y procedimentales más comunes sobre decimales de los alumnos del segundo ciclo de secundaria.

7. En el trabajo con materiales y recursos se puede comenzar por la realización de un listado de materiales didácticos y de recursos adecuados para la enseñanza del concepto de volumen. La construcción de algunos de estos materiales y la recolección de algunos de los recursos se puede acompañar de una ficha que indique cuál aspecto del concepto de volumen queda ejemplificado, qué utilización puede darse y qué tipo de actividades pueden proponerse a los alumnos a partir de ese material. La presentación en grupo de los diversos materiales y de las fichas para su utilización pueden venir seguidas por una discusión relativa a las posibilidades de integrar diferentes materiales en una misma secuencia didáctica para la enseñanza del concepto de volumen.

8. Finalmente, el trabajo sobre historia de las matemáticas puede centrarse en realizar una elección de los momentos históricos más significativos en la evolución del concepto de función. Sobre cada uno de los periodos históricos señalados deberá hacerse una selección de los modos de expresar el concepto de función, autores que trabajaron sobre este concepto, obras significativas que se publicaron, modo de entender el concepto y cuanta información resulte pertinente para caracterizar el tratamiento dado a las funciones en cada periodo. Hecha la selección mencionada de información se pasará a discutir en grupo su utilización didáctica en el aula de matemáticas.

Lecturas Recomendadas

BACHELARD, G. 1985. *La formación del espíritu científico.* México: Siglo XXI Editores.

Este texto es un clásico de la epistemología de la ciencia. En palabras de su autor, trata sobre el psicoanálisis del conocimiento del mundo objetivo, es decir, sobre el crecimiento del espíritu científico en su esfuerzo por comprender los fenómenos físicos. Aunque no se refiere explícitamente a la formación del espíritu matemático, sin embargo sus ideas han tenido influencia y difusión considerables en Didáctica de la Matemática.

El libro se estructura en doce capítulos. Desde el primero se plantea la noción de obstáculo epistemológico que determina toda la estructura de la obra, afirmando que las investigaciones de las condiciones psicológicas del progreso de la ciencia hay que plantearlas en términos de obstáculos epistemológicos. La noción de obstáculo epistemológico también se puede estudiar en el desarrollo del pensamiento científico y en la práctica de la educación. Los capítulos 2° a 11° están dedicados a analizar diferentes obstáculos; de especial interés es el capítulo 11° que aborda los obstáculos del conocimiento cuantitativo, donde analiza las dificultades de la información geométrica y numérica y los problemas que plantea formar una física matemática susceptible de provocar descubrimientos. Concluye el libro con una reflexión sobre la objetividad científica y el psicoanálisis.

BAUMGART, J. 1989. *Historical Topics for the Classroom.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Editado por vez primera en 1969, este *libro del año* de la Sociedad Norteamericana de Profesores de Matemáticas ha sido reeditado y ampliado, debido a su interés y carácter práctico para el aula de matemáticas de secundaria. El

libro está organizado en artículos cortos, cada uno de los cuales proporciona información histórica sobre un concepto o un tópico de las matemáticas de secundaria. En total hay 120 de estos artículos, agrupados en 6 bloques de contenidos: Historia de los números y numerales, Historia de las operaciones y algoritmos, Historia de la geometría, Historia del álgebra, Historia de la trigonometría e Historia del cálculo. En estos artículos se encuentran referencias que abarcan desde «el origen del 0» hasta «la historia de $\sqrt{-1}$», pasando por los principales teoremas y resultados que delimitan el currículo de secundaria. Cada artículo presenta los sistemas de representación utilizados a lo largo de la historia en cada concepto y ubica al lector en un periodo histórico en el que el concepto en cuestión tuvo un desarrollo importante. En cada caso se acompañan unas referencias bibliográficas que permiten ampliar la información para los lectores interesados por el estudio de un tópico concreto.

BERGASA, J., ERASO, M. D., GARCÍA, M.V., y SARA, S. 1996. *Matemáticas. Materiales Didácticos.* Pamplona; Gobierno de Navarra. Departamento de Educación, Cultura, Deporte y Juventud.

Este manual presenta 14 unidades didácticas de matemáticas para el Primer Ciclo de Enseñanza Secundaria Obligatoria. Las diferentes unidades se organizan con un mismo esquema: Introducción, Análisis de contenidos, Objetivos, Estructura del proceso de enseñanza y aprendizaje, y Evaluación. Cada unidad didáctica viene acompañada por una colección detallada de actividades, en las que se hace un análisis exhaustivo para el aula de algunos tópicos del bloque en estudio. El manual está editado en dos volúmenes y presenta más de 200 actividades para el aula. Este trabajo ofrece un buen ejemplo del esfuerzo realizado por algunos gobiernos autónomos en la edición de materiales didácticos: en particular, se trata de un trabajo muy completo publicado en el área de matemáticas para educación secundaria obligatoria, dedicado en exclusiva a la elaboración de unidades didácticas.

BOYER, C. 1986. *Historia de la matemática.* Madrid: Alianza Universidad.

En la perspectiva adoptada por nosotros la evolución histórica de las matemáticas es una referencia básica para la organización de los bloques de contenidos y de las unidades didácticas en educación secundaria. El conocimiento matemático, como cualquier conocimiento humano, es contingente y está sometido a cambio, es producto de una determinada época histórica, resultado de la actividad de grupos humanos organizados y elaborado para satisfacer necesidades intelectuales y prácticas. Por ello es importante recomendar al profesor de secundaria la lectura de un manual general de historia de la matemática, que plantee una visión general de los principales cambios ocurridos en esta disciplina a lo largo de los siglos y en el transcurso de las culturas. Hay excelentes manuales generales de historia de las matemáticas, publicados hoy día, que proporcionan esta panorámica general. Hemos elegido el libro de Boyer por ser un clásico, de fácil lectura y riguroso en el tratamiento de la información al mismo tiempo, con una documentación amplia y bien estructurada. Pero no cabe duda que este manual puede completarse con otros más específicos o de desarrollo más técnico.

FISCHBEIN, E. 1987. *Intuition in Science and Mathematics. An Educational Approach.* Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Este libro hace un análisis detallado y organiza los conceptos relacionados con la noción de intuición que pone de manifiesto el papel real que desempeñan las intuiciones en la comprensión, formación y adquisición del conocimiento matemático. La obra está dividida en dos partes. La primera de ellas hace una elaboración teórica sobre la intuición; la segunda parte está dedicada a analizar los factores que conforman la intuición. El papel de los modelos en el conocimiento intuitivo y su empleo en matemáticas constituyen parte importante de este trabajo. Se clasifican los modelos en tipos, se analiza el papel de las analogías en la construcción de modelos, se estudia el empleo de modelos analógicos en matemáticas y se señala la función de los modelos en la formación de nociones falsas.

Este libro es un manual valioso, ya clásico en educación matemática; su mayor interés lo centramos en el estudio exhaustivo sobre la noción de modelo y sus implicaciones didácticas.

FIOL, M.L. y FORTUNY, J.M. 1990. *Proporcionalidad Directa.* Madrid: Síntesis.

El libro que comentamos es uno de los 34 volúmenes de la Colección *Matemáticas Cultura y Aprendizaje* de la Editorial Síntesis, dedicados al análisis didáctico de los contenidos matemáticos. Este manual ofrece un buen ejemplo de análisis didáctico de la relación de proporcionalidad directa, siguiendo una estructura similar a la que proporcionan los organizadores del currículo. En primer término presenta un marco conceptual de la estructura matemática de las magnitudes, de sus medidas, las relaciones entre medidas y los conceptos de razón y proporción. A continuación se presentan una serie de aplicaciones del concepto y se describen las características de los fenómenos que este concepto matematiza. Las investigaciones sobre aprendizaje de este tópico y sobre las dificultades y errores en la adquisición de este objeto mental se presentan en una revisión bastante completa, realizada desde un planteamiento psicológico. La parte final propone, a lo largo de más de 60 páginas, una serie de actividades para el aprendizaje de la proporcionalidad directa tanto con magnitudes discretas como con magnitudes continuas, clasificadas según criterios metodológicos complementarios.

FREUDENTHAL, H. 1994. *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. (Textos seleccionados).* Traducción notas e introducción de Luis Puig. México, DF: CINVESTAV del IPN.

Este libro contiene tres de los diecisiete capítulos de *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures* traducidos al castellano. Los tres capítulos seleccionados son el capítulo 2, *El método*, el 5, *Fracciones*, y el 16, *El lenguaje algebraico*.

El capítulo dedicado al método describe de forma general y en muy pocas páginas los principios que inspiran el análisis fenomenológico, la intención con la que se hace y una toma de partido didáctica que se fundamenta en ellos. El capítulo titulado *Fracciones* es uno de los más completos porque, junto a un

análisis fenomenológico exhaustivo, también incluye un ejemplo de secuencia didáctica que toma en cuenta ese análisis en toda su extensión. El capítulo titulado *El lenguaje algebraico*, convierte el análisis fenomenológico en un análisis minucioso de lo que sirve de soporte en el lenguaje vernáculo para el lenguaje de la aritmética y del álgebra y de las complejas relaciones entre esos tres lenguajes cuando se ven desde la perspectiva de la enseñanza del álgebra en la que el lenguaje de ésta ha de elaborarse a partir del lenguaje de la aritmética y del lenguaje vernáculo.

Guzmán, M. de 1996. *El rincón de la pizarra. Ensayos de visualización en Análisis Matemático*. Madrid: Pirámide.

Después de un capítulo de presentación de algunas nociones sobre el papel de la visualización en el aprendizaje de conceptos matemáticos, se desgranan a lo largo de 15 capítulos una colección de representaciones gráficas que ejemplifican la utilización de recursos visuales para la enseñanza y el aprendizaje del análisis. Tradicionalmente las representaciones gráficas han sido un buen instrumento de apoyo intuitivo para la presentación y comprensión de multitud de conceptos y procedimientos del análisis matemático, en particular para el estudio de las funciones reales de variable real. Un extremismo axiomático de raíz estructuralista llevó hace pocos años a rechazar todo tipo de representaciones gráficas en el estudio del análisis matemático por las limitaciones formales de los razonamientos basados en tales representaciones; con ello se consiguió eliminar una herramienta básica para el conocimiento y la comprensión de las propiedades de las funciones. Este libro se esfuerza por recuperar el apoyo intuitivo que proporcionan los esquemas y gráficos utilizados tradicionalmente para pensar y entender los conceptos fundamentales del análisis.

Resnick, L. y Ford, W. 1990. *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos*. Barcelona: Paidós.

El objetivo del libro está en plantear y buscar respuesta a las mismas preguntas que proponen los psicólogos experimentales y del desarrollo sobre el aprendizaje, el pensamiento y la inteligencia, pero enfocando estas cuestiones desde un contenido determinado: las matemáticas. En 8 capítulos este libro hace una revisión de parte importante de los estudios psicológicos sobre los procesos de pensamiento, la comprensión de los conceptos matemáticos y la capacidad matemática. Se trata de una revisión a lo largo del tiempo, y también a lo largo de distintas escuelas de investigadores. Los principales temas estudiados son: la habilidad de cálculo y la comprensión matemática, el papel de la práctica en el aprendizaje de las matemáticas, las representaciones mentales en el aprendizaje, la elaboración propia del conocimiento matemático por oposición al conocimiento recibido, y las diferencias individuales en el aprendizaje de las matemáticas. El libro ofrece una aproximación psicológica al aprendizaje de las matemáticas seria y rigurosa, útil para el conocimiento sobre errores y dificultades.

RICO, L. (edt.) 1997. *Bases Teóricas del Currículo de Matemáticas para Educación Secundaria.* Madrid: Editorial Síntesis.

Este trabajo está dirigido a delimitar y desarrollar el conocimiento profesional del profesor de matemáticas; para ello se centra en estudiar el concepto de currículo elaborado desde la educación matemática. En el primer capítulo se presenta una aproximación pragmática del concepto de currículo y se recorre su historia en España en el periodo 1970-1990. El tercer capítulo ubica el currículo de matemáticas, sus agentes, relaciones y procesos de cambio en una consideración cultural del conocimiento matemático. En los capítulos segundo, cuarto y quinto se presenta una selección de estudios e investigaciones sobre el currículo de matemáticas junto con un análisis crítico y un balance de reflexiones teóricas hechas por distintos especialistas en educación y educación matemática, que han tenido influencia constrastable en los recientes procesos de cambio educativo ocurridos en España. El capítulo sexto presenta una discusión sobre finalidades de la educación matemática y elabora una clasificación de tales finalidades. Finalmente, se presenta una fundamentación teórica del concepto de currículo en el capítulo séptimo basada en cuatro dimensiones que se caracterizan desde cuatro niveles de análisis distintos.

SHELL CENTRE FOR MATHEMATICAL EDUCATION 1993. *Problemas con Pautas y Números.* Bilbao: Universidad del País Vasco.

Se trata de una traducción reciente de un manual ya clásico, elaborado por el Shell Centre de la Universidad de Nottingham. Este libro propone una estrategia de trabajo para el aula basada en la resolución de problemas no convencionales. Se presentan y desarrollan unos materiales elaborados para el trabajo de los alumnos en clase, centrados en tres unidades de complejidad creciente. Cada una de las unidades propone a los alumnos diversas estrategias para el ataque y resolución de los problemas planteados. Como complemento se proponen 15 problemas con los que desarrollar y aplicar las estrategias estudiadas en las tres unidades didácticas. Una de las características de este material es la reflexión que aportan para evaluar la actividad realizada por los alumnos durante su trabajo en la resolución de problemas y los criterios para orientar y reconducir a los alumnos bloqueados durante el proceso. La importancia concedida a los diferentes sistemas de representación de los conceptos matemáticos es uno de los rasgos distintivos de este manual.

Referencias bibliográficas

ALCALÁ, M., CACHAFEIRO, L. y PÉREZ, L. 1994. Materiales curriculares y criterios para medios, modelos y recursos en el aula de matemáticas. En L. Rico y J. Gutiérrez (edts.), *Formación Científico Didáctica del Profesor de Matemáticas de Secundaria.* Granada: ICE.

ALSINA, C. y otros, 1995. *Projecte Curricular de l'àrea de Matemàtiques i Bon dia, Mates.* Barcelona: Generalitat de Catalunya.

ARCA, M. y GUIDONI, P. 1989. Modelos infantiles y modelos científicos sobre la morfología de los seres vivos. *Enseñanza de las Ciencias*, 7(2), pp. 162-167.

ARTIGUE, M. 1989. Epistémologie et Didactique. *Cahier de Didirem.* París: Université Paris VII.

AZCÁRATE, C. y DEULOFEU, J. 1990. *Funciones y Gráficas.* Madrid: Síntesis.

BACHELARD, G. 1980. *La formation de l'esprit Scientifique.* París: De Vrin. Traducción al castellano: *La formación del espíritu científico.* México: Siglo XXI.

BAENA, J., CORIAT, M., MARÍN, A. y MARTÍNEZ, P.S. 1996. *La esfera.* Madrid: Síntesis.

BALL, G. 1994. Doing, Talking and Explaining. *Mathematics in School*, 23(1), pp. 2-6.

BARUK, S. 1985. *L'âge du capitaine.* París: Editions du Seuil.

BAUMGART, J.K. (edt.) 1989. *Historical Topics for the Mathematics Classroom.* Reston, VA: N.C.T.M.

BELL, A., BURKHARDT, H. y SWAN, M. 1992. Assessment of extended tasks. En R. Lesh y S. Lamon (edts.), *Assessment of Authentic Performance in School Mathematics.* Washington: American Association for the Advancement of Science.

BEN-CHAIM, D., LAPPAN, G. y HOUANG, R. 1989. The Role of visualization in the Middle School Mathematics Curriculum. *Focus on Learning Problems in Mathematics,* 11 (1), pp. 49-60.

BENNETT, A. Y MAIER, E. 1996. A Visual Approach to Solving Mixture Problems. *The Mathematics Teacher,* 89 (5), pp. 108-111.

BENOT, E. 1895. *Sistema métrico. Complemento a la Aritmética General.* Madrid: Mariano Núñez Samper.

Bergasa, J., ERASO, M.D., GARCÍA, M.V. y SARA, S. 1996. *Matemáticas. Materiales Didácticos.* Pamplona: Gobierno de Navarra.

BOURBAKI, N. 1972. *Notas de Historia de la Matemática.* Madrid: Alianza Editorial.

BOYER, C. 1986. *Historia de la Matemática.* Madrid: Alianza Universidad.

BRANFORD, B. 1899. La génesis de la Geometría en la raza y la educación individual. *Boletín de la Institución Libre de Enseñanza,* t. XXIII, pp. 46-49.

BROUSSEAU, G. 1983. Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 4 (2), pp.165-198.

BUXTON, L. 1981. *Do you panic about maths?* London: Heinemann.

CARMAN, R. 1971. Mathematical mistakes. *Mathematics Teacher,* 64(2), pp. 109-115.

CARRETERO, R., CORIAT, M. Y NIETO, P. 1995. Secuenciación, Organización de Contenidos y Actividades de Aula. En Junta de Andalucía, *Materiales Curriculares. Educación Secundaria Obligatoria, Vol. 17.* Sevilla: Consejería de Educación y Ciencia.

CASTRO, E. 1995. *Exploración de Patrones Numéricos mediante Configuraciones Puntuales.* Granada: Comares.

CASTRO, E., RICO, L. Y CASTRO, E. 1988. *Números y Operaciones.* Madrid: Síntesis.

COCKCROFT, W. 1982. *Mathematics Counts.* Londres: H.M.S.O.

COLL, C. 1987. *Psicología y Curriculum.* Madrid: Laia.

COLLIS, K.F. 1974. *Cognitive Development and Mathematics Learning.* Paper presented at the Psychology of Mathematics Workshop. Centre for Science Education. London: Chelsea College.

CORIAT, M., GARCÍA, C., LARA, A., PÉREZ, A., PÉREZ, R., SANDOVAL, P. Y VELA, M. 1989. *Seis para cuadrar.* Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

CORIAT, M., MARTÍNEZ, P. Y BAENA, J. 1993. Numbers and colours. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology,* 24 (4), pp. 501-510.

CORIAT, M. Y MARTÍNEZ, P. 1997. *Matemáticas I y II. Orientaciones curriculares.* Granada: Autores.

COXETER, H.S.M. 1974. *Regular Complex Polytopes.* London: Cambridge University Press.

CHALOUH, L. Y HERSCOVICS, N. 1988. Teaching Algebraic Expressions in a Meaningful Way. En A. Coxford (edt.), *The ideas of algebra. K-12.* Reston, VA: N.C.T.M.

DAVIS, R.B. 1975. Cognitive processes involved in solving simple algebraic equations, *Journal of Children's Mathematical Behavior,* 1 (3), pp. 7-35.

DHOMBRES, J. (edt.) 1987. *Mathématiques au fil des âges.* París: Gauthier-Villars.

DUBNOV, Y.S. 1993. *Errores en las demostraciones geométricas.* Madrid: Rubiños.

DUNHAM, W. 1995. *El universo de las matemáticas.* Madrid: Pirámide.

DUVAL, R. 1993. *Sémiosis et Noésis.* Conférence A.P.M.E.P. I.R.E.M.

FAUVEL, J. 1991. Using history in mathematics education. *For the learning of mathematics,* 11 (2), pp. 3- 6.

FAUVEL, J. (edt.) 1991. Special Issue on History in Mathematics Education. *For the learning of mathematics,* 11 (2).

FERNÁNDEZ, A. Y RICO, L. 1992. *Prensa y Educación Matemática.* Madrid: Síntesis.

FERNÁNDEZ, M. 1996. *Guía de recursos. Matemáticas.* La Laguna: Gobierno de Canarias, Consejería de Educación, Cultura y Deportes.

FERRATER, J. 1981. *Diccionario de Filosofía.* Madrid: Alianza.

FILLOY, E. 1988. *Theoretical Aspects of PME Algebra Research.* Manuscript. Londres: Institute of Education, University of London.

FIOL, M.L. Y FORTUNY, J.M. 1990. *Proporcionalidad directa.* Madrid: Síntesis.

FISCHBEIN, E. 1977. Image and Concept in Learning Mathematics. *Educational Studies in Mathematics,* 8, pp. 153-165.

FISCHBEIN, E. 1987. *Intuition in Science and Mathematics.* Dordrecht: Reidel Publishing Company.

FREUDENTHAL, H. 1973. *Mathematics as an Educational Task.* Dordrecht: Reidel Publishing Company.

FREUDENTHAL, H. 1983. *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Dordrecht: Reidel Publishing Company.

GAGATSIS, A. Y PATRONIS, T. 1990. Using Geometrical models in a proces of reflective thinking in learning and teaching mathematics. *Educational Studies in Mathematics,* 21, pp. 29-54.

GARCÍA, A., MARTÍNEZ, A. Y MIÑANO, R. 1995. *Nuevas tecnologías y enseñanza de las matemáticas.* Madrid: Síntesis.

GEERTZ, C. 1987. *La interpretación de las culturas.* Barcelona: Gedisa.

GOLDIN, G. Y KAPUT, J. 1996. A Joint Perspective on the idea of Representation in Learning and Doing Mathematics. En L. Steffe y otros, *Theories of Mathematical Learning.* Mahwak, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

GOLOVINÁ, L. I. Y YAGLOM, I.M. 1981. *Inducción en geometría.* Moscú: Mir.

GONZÁLEZ, E. 1989a. Fotografía y matemáticas. *Suma,* 2, pp. 44-46.

GONZÁLEZ, E. 1989b. La fotografía como recurso en la clase de matemáticas. En *Actas IV JAEM (Thales).* Málaga: SAEM Thales.

GONZÁLEZ, E. 1997. Matemáticas, de la calle a la clase. Fotografía y Matemáticas. *Aula de Innovación Educativa,* 58, pp. 15-19.

GUZMÁN, M. de, 1996. *El rincón de la pizarra. Ensayos de visualización en Análisis Matemático.* Madrid: Pirámide.

HADAMARD, J. 1947. *Psicología de la Invención en el campo Matemático.* Buenos Aires: Espasa Calpe.

HAREL, G. Y DUBINSKY, E. (edts.) 1992. *The concept of function. Aspects of Epistemology and Pedagogy.* Washington: Mathematical Association of America.

HART, K. 1980. *Secondary school children's understanding of Mathematics.* Londres: Research Monograph. Chelsea College.

HERNÁN, F. Y CARRILLO, E. 1988. *Recursos en el Aula de Matemáticas.* Madrid: Síntesis.

HERSCOVICS, N. 1989. Cognitive Obstacles Encounters in the Learning of Algebra. Research Agenda for Mathematics Education. En S. Wagner y C. Kieran (edts), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra,* Reston, VA: N.C.T.M.

HIEBERT, J. 1988. A Theory of Developing Competence with Written Mathematical Symbols. *Educational Studies in Mathematics*, 19, pp. 333-355.

HIEBERT, J. Y LEFEVRE, P. 1986. *Conceptual and Procedural Knowledge: the case of Mathematics.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

HIEBERT, J. Y CARPENTER, T. 1992. Learning and Teaching with Understanding. En D. Grouws (edt.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Nueva York: Macmillan Publishing Company.

HIRSSCHY, H.D. 1989. The Pythagoream theorem. En J.K. Baumgart (edt.), *Historical Topics for the Mathematics Classroom*. Reston, VA: N.C.T.M.

HOWSON, G. Y KAHANE, J. 1986. *School Mathematics in the 1990s.* Cambridge: Cambridge University Press. Traducción al castellano: *Las Matemáticas en Educación Primaria y Secundaria en la década de los 90.* 1987. Valencia: Mestral.

INHELDER, B. Y PIAGET, J. 1955. *De la logique de l'enfant a la logique de l'adolescent.* Paris: P.U.F.

JANVIER, C. 1987. Traslation Processes in Mathematics Education. En C. Janvier (edt.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

JANVIER, C., GIRARDON, C. Y MORAND, J. 1993. Mathematical Symbols and Representations. En P. Wilson (edt.), *Research ideas for the classroom.* Reston, VA: N.C.T.M.

JOHNSON, D., BERGER, E. Y RISING, G. 1973. Using models as instrucctional aids. En N.C.T.M. (edt.), *Instructional aids in mathematics. Thirty-fourth Yearbook*. Reston, VA: N.C.T.M.

JUNTA DE ANDALUCÍA, 1990. Decreto de 20/6/92. *Boletín Oficial de la Junta de Andalucía* 56. Sevilla: B.O.J.A.

KAPUT, J. 1987. Representation Systems and Mathematics. En C. Janvier (edt.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics.* Hillsdale NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

KARPLUS, S. y otros, 1977. A Survey of proportional reasoning and control of variables in seven countries. *Journal of Research in Science Teaching*, 14, pp. 411-417.

KILPATRICK, J., RICO, L. Y SIERRA, M. 1994. *Educación Matemática e Investigación.* Madrid: Síntesis.

KILPATRICK, J., GÓMEZ, P. Y RICO, L. 1995. *Educación Matemática.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

KITCHER, P. 1984. *The Nature of Mathematical Knowledge.* Nueva York: Oxford University Press.

LABORDE, C. 1996. Cabri-geómetra o una nueva relación con la geometría. En L. Puig y J. Calderón (edts.), *Investigación y Didáctica de las Matemáticas.* Madrid: C.I.D.E.

LAKATOS, I. 1976. *Proofs and Refutations.* Cambridge: Cambridge University Press. Traducción castellana: *Pruebas y refutaciones.* Madrid: Alianza.

LAKATOS, I. 1981. *Matemáticas, Ciencia y Epistemología.* Madrid: Alianza Universidad.

LANGE, J. DE 1987. *Mathematics, Meaning and Insight. Teaching, Learnig and Testing of Mathematics for the Social Sciences.* Utrech: O.W.O.C.

LEAN, G. Y CLEMENTS, M. 1981. Spatial Ability, Visual Imagery, and Mathematical Performance. *Educational Studies in Mathematics*, 12, pp. 267-299.

LESH, R., LANDAU, M. Y HAMILTON, E. 1983. Conceptual Models and Applied Mathematical Problem-Solving Research. En R. Lesh y M. Landau (edts.), *Acquisition of Mathematical Concepts and Processes.* Orlando, FL: Academic Press.

LESH, R., POST, T. Y BEHR, M. 1987. Representations and Translation among Representations in Mathematics Learning and Problem Solving. En C. Janvier (edt.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

LUENGO, R. y otros, 1990. *Proporcionalidad geométrica y semejanza.* Madrid: Síntesis.

LUFKIN, D. 1996. The Incredible Three-by-Five Card! *The Mathematics Teacher*, 89 (2), pp. 97-98.

MATZ, M. 1980. Towards a computational theory of algebraic competence. *Journal of Children's Mathematical Behavior,* 3 (1), pp. 93-166.

MCLEOD, D.B. Y ADAMS, V.M. (edts.) 1989. *Affect and Mathematical Problem Solving: A new perspective.* Nueva York: Springer-Verlag.

MEAD, M. 1985. *Educación y Cultura en Nueva Guinea.* Barcelona: Paidós.

MICHELET, A. 1988. *Los útiles de la Infancia.* Barcelona: Herder.

MILLER, L. Y LIEBERMAN, A. 1988. School improvement in the United States: nuance and numbers. *Qualitative Studies in Education,* 1 (1), pp. 3-19.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA, 1989. *Diseño Curricular Base. Educación Secundaria Obligatoria I y II.* Madrid: M.E.C.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA, 1991. Real Decreto 1007/91. *Boletín Oficial del Estado* nº 92. Madrid: B.O.E.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA, 1991. Real Decreto 1345/1991 de 6 de Septiembre sobre Currículo de la Educación Secundaria Obligatoria. *Boletín Oficial del Estado* nº 220. Madrid: B.O.E.

Ministerio de Instrucción y Bellas Artes (s.a). *Los estudios del Magisterio. Organización y Legislación.* Madrid: Publicaciones de la Inspección Central de Primera Enseñanza.

Newel, A. 1990. *Unified Theories of Cognition.* Harvard MA: Harvard University Press.

Niss, M. 1994. Why do we teach Mathematics in school? En L. Puig y J. Calderón (edts.), *Investigación y Didáctica de las Matemáticas.* Madrid: C.I.D.E.

Paivio, A. 1975. Perceptual Comparisons Through the mind's eye. *Memory and Cognitions,* 3 (6), pp. 635-647.

Palarea, M.M. y Socas, M.M.1994. Algunos obstáculos cognitivos en el aprendizaje del lenguaje algebraico. *Suma,* 16, pp. 91-98.

Perner, J. 1994. *Comprender la mente representacional.* Barcelona: Paidós.

Piaget, J. 1977. *Seis estudios de Psicología.* Barcelona: Seix Barral.

Popper, K. 1979. *El desarrollo del conocimiento científico. Conjeturas y refutaciones.* Buenos Aires: Paidós.

Recio, T. 1997. *Razonamiento matemático: conjeturas, ensayos y demostraciones.* Madrid: Síntesis.

Resnick, L. y Ford, W. 1981. *The Psychology of Mathematics for Instruction.* Hillsdale NJ: Lawrence Erlbaum Associates. Traducción al castellano: La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos, 1990. Barcelona: Paidós.

Restivo, S. 1992. *Mathematics in Society and History.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Rey Pastor, J. y Babini, J. 1985. *Historia de la Matemática.* Barcelona: Gedisa.

Rico, L. 1995. *Conocimiento Numérico y Formación del Profesorado.* Granada: Universidad de Granada.

Rico, L. (edt.) 1997. *Bases Teóricas del Currículo de Matemáticas en Secundaria.* Madrid: Síntesis.

Rico, L., Castro, E., Fernández, A., Fortuny, J., Valenzuela, J y Valldaura, J. 1990. *Guía Didáctica de Matemáticas 5º de E.G.B.* Sevilla: Editorial Algaida.

Rico, L. y Sierra, M. 1991. Comunidad de Educadores Matemáticos. En A. Gutiérrez (edt.), *Área de Conocimiento Didáctica de la Matemática.* Madrid: Síntesis.

Rico, L., Coriat, M., Marín, A. y Palomino, G. 1994. *Matemáticas 3º Educación Secundaria Obligatoria. Proyecto 2000.* Sevilla: Algaida.

Rico, L., Coriat, M., Marín, A. y Palomino, G. 1994. *Matemáticas 4º Educación Secundaria Obligatoria. Proyecto 2000.* Sevilla: Algaida.

Rivière, A. 1980. *Razonamiento y representación.* Madrid: Siglo XXI.

Romberg, T. y otros, 1990. A New World View of Assessment in Mathematics, en R. Kulm (edt.), *Assessing Higher Order Thinking in Mathematics,* Washington: American Association for the Advancement of Science. Traducción al castellano en *Sigma,* 17, pp. 2-30. Bilbao: Servicio de Publicaciones del Gobierno Vasco.

Romberg, T. 1991. Características problemáticas del Currículo Escolar de Matemáticas. *Revista de Educación,* 294, pp. 323-406.

SAVATER, F. 1997. *El valor de educar.* Barcelona: Ariel.

SCHULTZ, J. 1991. Area Models. *Arithmetic Teacher*, 39(2), pp. 42-46.

SHAPIRO, H. 1980. *Hombre, Cultura y Sociedad.* México: Fondo de Cultura Económica.

SHEALY B. 1996. Becoming Flexible with Functions: Investigating United States Population Growth. *The Mathematics Teacher,* 89 (5), pp. 414-418.

SHELL CENTRE FOR MATHEMATICAL EDUCATION, 1993. *Problemas con Pautas y Números.* Bilbao: Universidad del País Vasco.

SIERPINSKA, A. 1985. La notion d'obstacle épistémologique dans l'enseignement des mathématiques. *Comptes-rendus de la 37e rencontre organisée par la C.I.E.A.E.M.* (Mathématiques pour tous à l'âge de l'ordinateur), Leiden: C.I.E.A.E.M.

SIERRA, M. y otros, 1989. *Divisibilidad.* Madrid: Síntesis.

SKEMP, R. 1980. *Psicología del aprendizaje de las Matemáticas.* Madrid: Morata.

SKOVMOSE, O. 1994. *Towards a Philosophy of Critical Mathematics Education.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

SMITH, D.E. 1951. *History of Mathematics. Volume I: General survey of the history of elementary Mathematics.* Nueva York: Dover.

SMITH, D.E. 1953. *History of Mathematics. Volume II: Special topics of elementary Mathematics.* Nueva York: Dover.

SOCAS, M.M. y otros, 1989. *Iniciación al Álgebra.* Madrid: Síntesis.

SOCAS, M.M. y otros, 1989. Una clasificación de errores en Álgebra. *Actas XIV Jornadas Hispano-Lusas*, 3, pp. 1541-1546. Tenerife: Universidad de La Laguna.

SOWDER, L. 1976. Criteria for concrete models. *The Arithmetic Teacher*, 23, pp. 468-470.

SOWELL. E. 1989. Efects of Manipulative Materials in Mathematics instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20, pp. 498-505.

STENHOUSE, L. 1984. *Investigación y Desarrollo del Currículo.* Madrid: Morata.

SWETZ, F. 1989. When and how can we use modeling? *Mathematics Teacher*, 82(9), pp. 723-726.

SWETZ, F. 1991. Incorporating Mathematical Modeling into the curriculum. *Mathematics Teacher*, 84(5), pp. 359-365.

TALL, D. 1989. Different Cognitive Obstacles in a Technological Paradigm. En S. Wagner y C. Kieran (edts.), *Research Agenda for Mathematics Education. Research Issues in the Learning and Teaching for Algebra.* Reston VA: N.C.T.M.

TALL, D. 1991. Intuition and Rigour: The Role of Visualization in the Calculus. En W. Zimmermann y S. Cunningham (edts.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics.* Washington: Mathematical Association of America.

TORTOSA, A. y otros, 1995. *La evaluación en el aula de Matemáticas.* Granada: Universidad de Granada.

VERGNAUD, G. 1987. Conclusion. En C. Janvier (edt.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics.* Hillsdale. NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

VEST, F. 1969. A catalog of models for the operations of addition and subtraction of whole numbers. *Educational Studies in Mathematics,* 2, pp. 59-68.

WEBB, N. 1992. Assessment of Student's knowledge of Mathematics: step towards a theory. En D. Grouws (edt.), *Handbook of Research on Teaching and Learning Mathematics.* Nueva York: Macmillan.

WHITE, M. 1981. Two wrongs add up to right. *Mathematics Teacher,* 74 (3).

WIGLEY, A. 1992. Models for Teaching Mathematics. *MT,* 141, pp. 4-7.

YOUSCHEVITZ, A.P. 1976. The concept of function up to the middle of the 19th century. *Archive for the history of exact sciences,* 16, pp. 36-85.

ZIMMERMANN, W. Y CUNNINGHAM, S. 1991. Visualization and the Nature of Mathematics. En W. Zimmermann y S. Cunningham (edts.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics.* Washington: Mathematical Association of America.

Índice temático

COLECCIÓN CUADERNOS DE EDUCACIÓN

Títulos publicados:

1. Enseñar y aprender inglés. *Laura Pla.*
2. Los profesores y el curriculum. *Juana Mª Sancho.*
3. Educación de adultos: situación actual y perspectivas. *Ángel Marzo, Josep Mª Figueras.*
4. El curriculum en el centro educativo. *Luis del Carmen, Teresa Mauri, Isabel Solé, Antoni Zabala.*
5. La enseñanza de las ciencias en la educación secundaria. *Daniel Gil, Jaime Carrascosa, Carles Furió, Joaquín M. Torregrosa.*
6. Coherencia textual y lectura. *Eduardo Aznar, Anna Cros, Lluís Quintana.*
7. La educación bilingüe. *Ignasi Vila, Joaquim Arnau, J.M. Serra, Cinta Comet.*
8. Aprendiendo a escribir. *Ana Teberosky.*
9. Cómo se aprende y cómo se enseña. *José Escaño, María Gil.*
10. Aprender con ordenadores en la escuela. *Eduardo Martí.*
11. Los procedimientos: aprendizaje, enseñanza y evaluación. *Enric Valls.*
12. Psicopedagogía de la lengua oral: un enfoque comunicativo. *Mª José del Río.*
13. Claves para la organización de centros escolares. *Serafín Antúnez.*
14. La formación profesional en la LOGSE. *Xavier Farriols, Josep Francí, Miquel Inglés.*
15. El desarrollo de la expresión gráfica. *Juan José Jové.*
16. Grupo clase y proyecto educativo de centro. *Pere Darder, Joaquim Franch, César Coll, Joaquim Pèlach.*
17. La educación moral en la enseñanza obligatoria. *Josep Mª Puig.*
18. La educación ambiental como proyecto. *Alberto Pardo.*
19. Educación y consumo. *Rosa Mª Pujol.*
20. Conocimiento y poder. Hacia un análisis sociológico de la escuela. *Anna Escofet.*
21. El análisis y secuenciación de los contenidos educativos. *Luis del Carmen.*
22. Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje. *Yves Chevallard, Marianna Bosch, Josep Gascón.*
23. El hecho religioso en la Educación Secundaria. *Alfredo Fierro.*
24. La Disciplina Escolar. *Concepció Gotzens.*
25. Diferencias sociales y desigualdades educativas. *J. Luis Rodríguez, Anna Escofet, Pilar Heras, Josep Mª Navarro.*

26. Familia, Escuela y Comunidad. *Ignasi Vila.*
27. Mundialización y perfiles profesionales. *Rafael López-Feal.*
28. Orientación educativa e intervención psicopedagógica. *Isabel Solé.*
29. De la estética romántica a la era del impudor. Diez lecciones de estética. *Julia Manzano.*
30. La acción directiva en las Instituciones Escolares. Análisis y propuestas. *Serafín Antúnez.*
31. Estrategias para el desarrollo de los temas transversales del curriculum. *José Palos (Coord.)*
32. Habilidades Sociales: Educar hacia la autorregulación. Conceptualización, evaluación e intervención. *Isabel Paula Pérez.*
33. La evaluación educativa, su práctica y otras metáforas. *Joan Mateo.*

COLECCIÓN CUADERNOS PARA EL ANÁLISIS

1. De Gramsci a Althusser. *J. M. Bermudo.*
2. Áreas de intervención de la psicología. Tomo I. *César Coll, M. Forns.*
3. Los paradigmas en psicología. *Antonio Caparrós.*
4. Áreas de intervención de la psicología. Tomo II. *César Coll, M. Forns.*
5. Helvétius y D'Holbach. *J.M. Bermudo.*
6. Eficacia y justicia. *J.M. Bermudo.*
7. Para una tecnología educativa. *Juana Mª Sancho.*
8. El català i el castellà en el sistema educatiu de Catalunya. *Ignasi Vila.*
9. Immersió lingüística, rendiment escolar i classe social. *Josep Mª Serra.*
10. La enseñanza y el aprendizaje de estrategias desde el curriculum. *Mª L. Pérez Cabani (Coord.), E. Barberà, P. Busquets, M. Castelló, L. Del Carmen, A.M. Geli, J. Juando, M. Milian, C. Monereo, M. Palma, Y. Postigo, J.I. Pozo, I. Solé, M.R. Terradellas, M. Trabal, E. Valls, I. Vila.*
11. Llengües en contacte i actituds lingüístiques. El cas de la frontera catalano-aragonesa. *Ángel Huguet, Jordi Suïls.*
12. Incorporació tardana de l'alumnat estranger. Segon Simposi: Llengua, Educació i Immigració. *Silvia Aznar y M. Rosa Terradellas (Coord.).*
13. Piaget y Vigotski ante el siglo XXI: referentes de actualidad. *Jean Paul Bronckart, César Coll, Juan Delval, Eduard Martí, Mariana Miras, Isabel Solé, Mª Rosa Terradellas, Silvia Aznar y Elisabet Serrat (Coord.).*

COL·LECCIÓ QUADERNS DE FORMACIÓ PROFESSIONAL

1. De l'escola a la feina. *Xavier Farriols, Miquel Inglés.*
2. La nova formació professional: dels mòduls als cicles formatius. *Josep Mª Guillen (Coord.).*
3. Suport educatiu a la inserció professional. *Antoni Cañete, Josep Francí.*
4. L'orientació professional inicial a Catalunya. *Xavier Farriols, Miquel Inglés.*
5. Programes de garantia social. L'última oportunitat? *Rafael Bàscones.*
6. Formació, qualificació i mercat. *Fernando López Palma.*
7. La FP contínua i els agents de formació. *Mª José Rubio.*
8. Les aules taller i els adolescents exclosos. *Jaume Funes.*
9. La FP ajuda a trobar feina. *Josep Francí, Carles Sánchez.*
10. Els tutors d'empresa. El model de formació de les Cambres de Comerç Catalanas. *Anna Cuatrecasas (Coord.).*

10. Los tutores de empresa. El modelo de formación de las Cámaras de Comercio Catalanas. *Anna Cuatrecasas (Coord.).*

COLECCIÓN CUADERNOS DE FORMACIÓN DEL PROFESORADO. EDUCACIÓN SECUNDARIA

Títulos publicados:

1. La educación lingüística y literaria en la Educación Secundaria. *Carlos Lomas.*
2. Política, legislación e instituciones en la Educación Secundaria. *Manuel de Puelles.*
3. La atención a la diversidad en la Educación Secundaria. *Elena Martín y Teresa Mauri.*
4. Enseñar y aprender Filosofía en la Educación Secundaria. *Luis Cifuentes y J.Mª Gutiérrez.*
5. La orientación educativa y profesional en la Educación Secundaria. *Elena Martín y Vicent Tirado.*
6. Enseñar y aprender Ciencias Sociales, Geografía e Historia en la Educación Secundaria. *Pilar Benejam y Joan Pagès.*
7. Diseño y desarrollo del curriculum en la Educación Secundaria. *Juan Manuel Escudero.*
8. Psicología del desarrollo: El mundo del adolescente. *Eduardo Martí y Javier Onrubia.*

9. La enseñanza y el aprendizaje de las Ciencias de la Naturaleza en la Educación Secundaria. *Luis del Carmen.*
10. Enseñar y aprender Tecnología en la Educación Secundaria. *Javier Baigorri.*
11. Sociología de las instituciones de Educación Secundaria. *Mariano Fernández Enguita.*
12. La Educación matemática en la Enseñanza Secundaria. *Luis Rico.*
13. Enseñar y aprender Inglés en la Educación Secundaria. *Laura Pla e Ignasi Vila.*
14. L'ensenyament i l'aprenentatge de la Llengua i la Literatura en l'Educació Secundària. *Anna Camps i Teresa Colomer.*
15. Psicología de la instrucción: la enseñanza y el aprendizaje en la Educación Secundaria. *César Coll.*

Títulos en preparación:

16. Estudios de ciencia, Tecnología y Sociedad. *Miguel A. Quintanilla y Eduard Aibar (Coord.)*
17. Los Institutos de Educación Secundaria: organización y funcionamiento. *Serafín Antúnez.*

TÍTULOS PUBLICADOS (Cont.)

9 **La enseñanza y el aprendizaje de las Ciencias de la Naturaleza en la Educación Secundaria.**
Luis del Carmen (Coord.)

10 **Enseñar y aprender Tecnología en la Educación Secundaria.**
Javier Baigorri (Coord.)

11 **Sociología de las instituciones de Educación Secundaria.**
Mariano Fernández Enguita (Coord.)

12 **La Educación matemática en la Enseñanza Secundaria.**
Luis Rico (Coord.)

13 **Enseñar y aprender Inglés en la Educación Secundaria.**
Laura Pla e Ignasi Vila (Coord.)

14 **L'ensenyament i l'aprenentatge de la Llengua i la Literatura en l'Educació Secundària.**
Anna Camps i Teresa Colomer (Coord.)

15 **Psicología de la instrucción: la enseñanza y el aprendizaje en la Educación Secundaria.**
César Coll (Coord.)

TÍTULOS EN PREPARACIÓN

16 **Estudios de Ciencia, Tecnología y Sociedad.**
Miguel A. Quintanilla y Eduard Aibar (Coord.)

17 **Los Institutos de Educación Secundaria: organización y funcionamiento.**
Serafín Antúnez (Coord.)

Este libro ha sido pensado y está escrito con la intención de contribuir a la conceptualización teórica y a la organización de la práctica en el trabajo de los profesores de matemáticas de secundaria. Usualmente, el profesor de matemáticas de secundaria se encuentra con una formación descompensada, que oscila entre un dominio y conocimiento formal de las matemáticas extenso y bien fundado y un escaso conocimiento sistemático sobre educación y didáctica de la matemática. El profesional responsable encuentra escasas teorizaciones y pocas ideas fértiles y orientadoras para emprender la renovación de su práctica y participar de las innovaciones curriculares.

El texto que se presenta quiere proporcionar al profesor de matemáticas de secundaria una serie de herramientas conceptuales que le ayuden en el diseño, organización y gestión de unidades didácticas para las matemáticas escolares, centrando la reflexión didáctica sobre una serie de organizadores que analizan y estructuran los contenidos de las matemáticas desde nuevas perspectivas. El análisis fenomenológico de los contenidos, la consideración de los sistemas de representación con que se expresan los conceptos y estructuras matemáticas así como los modelos que los ejemplifican, la consideración de los errores y dificultades en el aprendizaje, la evolución histórica de los diferentes conceptos, son, entre otras, algunas de las herramientas con las cuales organizar la reflexión didáctica y que aquí se representan.

El profesor de matemáticas necesita de autonomía intelectual y capacidad crítica en el ejercicio de su profesión. Con las ideas desarrolladas en el libro esperamos haber contribuido al progreso en esta dirección.

ISBN 84-85840-65-8

9 788485 840656

La colección CUADERNOS DE FORMACIÓN DEL PROFESORADO, EDUCACIÓN SECUNDARIA aspira a ser un instrumento útil para la formación inicial y al servicio del profesorado de Educación Secundaria en el marco del proceso de implantación de la L.O.G.S.E. Tres rasgos caracterizan todas las obras incluidas en la colección. En primer lugar, el esfuerzo realizado por sus autores para reflejar una visión articulada y coherente de la Educación Secundaria, tanto en lo que concierne a las finalidades de las etapas y enseñanzas que la conforman, como a los planteamientos curriculares, didácticos y psicopedagógicos subyacentes. En segundo lugar, la apertura hacia nuevos enfoques y planteamientos en la formación del profesorado de Educación Secundaria. Y, finalmente, la voluntad de compaginar el rigor científico y didáctico de los contenidos con una presentación práctica y concreta de los mismos orientada a la identificación, formulación, análisis y resolución de problemas relacionados con el ejercicio profesional de la docencia.