Universitat de Barcelona

Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

DIDÀCTICA DE SUPERFÍCIES PLANES EN TAXIGEOMETRIA

Autor: Miquel Company Ferrer

Director: Dr. Jordi Font Gonzàlez

Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 17 de gener de 2024

Abstract

In this work, we study some 2D surfaces in a non-Euclidean geometry: taxicab geometry, whose metric is defined by the norm l_1. To be more specifically, we discuss how some of the definitions used in Euclidean geometry apply when converted into taxicab geometry. In this way, we consider triangles with its centroid, circumcenter and incenter and its area. We also discuss the circumference, the ellipse, the hyperbola and the parabola and we introduce some results related to regular polygons. Finally, all this knowledge is used to design a didactic plan in order to bring it closer to high school students, with the aim to let them discover some mathematics different from what is usually taught at class and to work on their investigation skills and mathematimal thinking by learning about this geometry.

Resum

En aquest treball, s'estudien algunes superfícies planes en una geometria no euclidiana: la geometria del taxi, amb la seva mètrica definida amb la norma l_1. Més concretament, s'estudia el comportament de passar definicions que es fan servir en geometria euclidiana a aquesta geometria, de forma que es discuteixen el comportament dels triangles amb els seus baricentre, circumcentre i incentre i la seva àrea, de la circumferència, l'el·lipse, la hipèrbola, la paràbola i s'introdueixen alguns resultats relatius als polígons regulars. Finalment, s'aprofiten aquests coneixements per a dissenyar una proposta didàctica que els apropi a alumnes de batxillerat, amb l'objectiu que descobreixin que hi ha matemàtiques més enllà del que es fa normalment a l'aula i que treballin la recerca i el pensament matemàtic amb aquesta geometria.

2020 Mathematics Subject Classification. 51-01, 51F99, 51K05, 97G99

Agraïments

Vull agrair a al tutor d'aquest treball, el Dr. Jordi Font Gonzàlez, per la seva ajuda durant tot el semestre per tal que aquest treball surti endavant; i pels ànims i consells que m'han servit moltíssim per a fer-lo.

També vull donar les gràcies a en Guillem Àngel Llabrés, professor de matemàtiques de 1r de batxillerat de l'IES Alcúdia, per a cedir-me unes hores de les seves classes per tal que hagi pogut implementar la proposta dissenyada. A més, vull aprofitar per agrair-li l'entusiasme amb que ensenya matemàtiques que em va ajudar a decidir-me a intentar estudiar-ne el grau.

Per acabar, vull donar també les gràcies a la meva família i a tots els companys i amics que m'han donat suport durant tot aquest llarg trajecte.

Índex

Introducció

La geometria és una de les principals branques de les matemàtiques, ja sigui per a estudiar-la per ella mateixa o pel seu gran nombre d'aplicacions. Per a veure l'interès que aquesta provoca, és suficient anar enrere en els anys per a veure com des dels inicis de l'estudi científic la geometria sempre n'ha estat una part fonamental. Per aquest motiu, la geometria també és un pilar fonamental en l'ensenyament de les matemàtiques en tota l'etapa educativa, arribant a comprendre dos blocs curriculars (el de mesura i el d'espai i forma) en l'etapa de l'institut. Tot i així, és d'estranyar que durant el període educatiu preuniversitari només s'ensenyi geometria euclidiana quan des de fa segles s'ha plantejat i establert la possibilitat de construir geometries no euclidianes.

Així doncs, en aquest treball es pretén introduir una geometria no euclidiana, la geometria del taxi a una aula d'institut per tal d'obrir les portes a la possibilitat d'estudiar la geometria més enllà de la geometria euclidiana. A més, la creació d'una proposta didàctica en que s'investigui sobre una geometria no euclidiana pot ajudar a oferir a l'alumnat una visió més oberta de les matemàtiques, que potser la podríem considerar menys axiomàtica que la que es sol trobar dins una aula d'institut. Això darrer ho diem perquè l'objectiu de la proposta es fer descobrir a l'alumnat l'alternativa que les matemàtiques ofereixen de generar coneixement, contraposant-ho a la situació més típica en que reben unes definicions i propietats que consideren certes per a qualsevol situació, destruint qualsevol opció de refutar-les o canviar-les.

Per tal que la taxigeometria pugui ser introduïda a l'alumnat, cal fer abans un estudi sobre ella i sobre quins aspectes d'aquesta volen ser tractats posteriorment a l'aula. D'aquesta manera, en aquest treball es defineix aquesta geometria no euclidiana i es fa un anàlisi d'algunes superfícies planes, centrant-nos en allò que a posteriori podrà ser d'utilitat en la proposta. Així, es veuen les representacions gràfiques d'aquestes superfícies planes i se'n presenten alguns resultats relacionats amb elles.

En definitiva, aquest treball és una discussió sobre una geometria no euclidiana de naixement molt recent, la taxigeometria, per a, posteriorment, crear interès en les matemàtiques en alumnes d'institut a través d'una proposta didàctica centrada en el dubte i la investigació autònoma per tal de reforçar el pensament matemàtic i mostrar la versatilitat i bellesa de les matemàtiques.

El projecte: motivació i objectius

La geometria sempre ha estat una de les branques que més interès m'ha provocat, fins i tot quan encara era a l'etapa educativa obligatòria. Per aquest motiu, vaig decidir fer el treball sobre algun aspecte de geometria que no hagi treballat dins una aula, ja sigui en l'institut o en l'etapa universitària. D'aquesta manera, investigant sobre la taxigeometria i generant una proposta didàctica per a alumnes de batxillerat, es poden ajuntar el meu interès per la geometria amb la voluntat d'ensenyar i divulgar matemàtiques d'una forma amena i en que no sols s'impliqui el coneixement sobre una matèria matemàtica, sinó que s'inclogui un entrenament de les habilitats per investigar i descobrir coneixement mitjançant el raonament matemàtic.

Així les coses, es persegueixen uns objectius a assolir en aquest treball:

- Estudiar i analitzar el comportament d'algunes definicions de superfícies en ser traslladades al pla del taxi.

- Representar gràficament en la taxigeometria alguns dels principals llocs geomètrics que s'estudien en un aula d'institut.
- Crear activitats didàctiques en que es mostri la possibilitat que tenen les matemàtiques de generar coneixement amb un petit canvi com és la norma.
- Crear interés per les matemàtiques en l'alumnat mostrant les seves possibilitats d'estudi.

Estructura de la Memòria

Aquesta memòria està estructurada principalment en dues parts completament diferenciades: la primera en què s'introdueix la geometria del taxi i se n'estudien algunes superfícies, i la segona en que generem una proposta didàctica i analitzem el seu funcionament en ser implementada en una aula de 1r de batxillerat de l'IES Alcúdia (Mallorca).

En la primera part (capítols 1-7), es comença introduint el concepte de geometria euclidiana i definint la geometria del taxi després de repassar alguns conceptes necessaris per a fer-ho. Després, es fa un estudi sobre algunes superfícies en aquesta geometria, que es pot dividir a l'hora en tres: un estudi sobre els triangles i els seus centres, un estudi sobre les còniques i les seves representacions gràfiques i un darrer estudi sobre alguns resultats sobre els polígons regulars. Al final d'aquesta part també comentem alguns temes de la taxigeometria que ens han semblat interessants, però que s'ha decidit no discutir en aquest treball per manca d'espai i per a una major coherència en el nostre estudi.

En la segona part (capítol 8), es raona primer per què treballar geometria, i en concret la taxigeometria, en una aula d'institut i els seus beneficis. Després, es presenta la proposta didàctica en què l'alumnat podrà treballar allò que hem estudiat en la primera part d'aquest treball. Finalment, es discuteix el funcionament de la proposta en ser implementada.

1 Breu història de la geometria no euclidiana

Abans d'enfocar-nos completament en la geometria que volem estudiar, convé entendre l'origen d'una geometria com la del taxi, o com puguin ser la geometria el·líptica o la hiperbòlica; és a dir, convé entendre l'origen de les geometries no euclidianes. Per a fer-ho, farem un breu repàs històric a la geometria, remarcant la gran importància que va tenir Euclides amb els seus postulats. La rellevància del seu treball en el desenvolupament d'aquesta branca de les matemàtiques és fa evident en veure com parlem de geometria euclidiana i geometries no euclidianes, contraposant-les a la postulada pel matemàtic grec. A més, si ens aturem a pensar com s'ensenya la geometria a les aules de les escoles o instituts un se n'adona que sempre es fa fent servir la geometria euclidiana.

Així, centrant-nos primer en l'obra d'Euclides en *Els Elements*, que teoritzen la geometria de forma axiomàtica, hem d'introduir certs conceptes abans dels postulats amb què es construeix la resta de la geometria per tal de poder entendre'ls.

Definició 1.1. *Un punt és allò que no té parts.*

Definició 1.2. *Una línia és una longitud sense amplada.*

Definició 1.3. *Una recta és una línia que és igual per tots els seus punts.*

Definició 1.4. *Un angle pla és la relació de la inclinació de dues línies que intersequen en un pla i no estan en una mateixa recta.*

Definició 1.5. *Una recta perpendicular a una recta donada és aquella que forma angles adjacents iguals entre si, que anomenam angles rectes.*

Definició 1.6. *Una circumferència és una figura plana tancada formada per una línia tal que totes les rectes que cauen sobre ella des d'un punt dels interiors a aquesta són iguals entre elles.*

Amb aquestes definicions, podem ja escriure els postulats i entendre'ls. Els postulats així com estan redactats a sota segueixen la redacció que un pot trobar a [6]. Els escriurem fent servir els cinc postulats que es consideren suficients per a poder formular tota la geometria euclidiana. Com bé diu el seu nom, són afirmacions assumides certes sense necessitat de demostrar-les i, a més, es suposa que cada un dels cinc postulats es pot obtenir amb els altres quatre. Així, tenim:

Postulat 1. *Es pot traçar una línia recta des d'un punt qualsevol fins un altre punt qualsevol.*

Postulat 2. *Una línia recta finita es pot prolongar fins qualsevol distància en una línia recta.*

Postulat 3. *Un cercle pot ser descrit amb qualsevol centre a qualsevol distància d'aquell centre.*

Postulat 4. *Tots els angles rectes són iguals.*

Postulat 5. *Si una línia recta talla dues altres línies rectes de forma que els dos angles interiors d'un mateix costat són menors que dos angles rectes, llavors les altres línies rectes es tallaran en el costat on s'hi troben els dos angles menors que dos angles rectes.*

Com hem dit, hauríem de poder demostrar el cinquè postulat fent servir sols els quatre primers. Intentar fer aquesta demostració ha estat un dels grans interessos de la geometria fins els darrers segles, passant fins i tot per reformulacions dels cinc postulats i, sobretot, del cinquè, per a finalment trobar que tots aquests intents han servit per a entendre i fer evolucionar la geometria, però mai per a demostrar-ho. Entre els intents de demostrar el cinquè postulat, convé destacar els intents de Saccheri i Lambert al segle XVIII, que tot i no aconseguir-ho, foren clau pels treballs fets posteriorment en el camp de la geometria.

Aquesta cruïlla va portar als matemàtics del segle XIX a desenvolupar la geometria suposant que el cinquè postulat no pot ser deduït dels altres quatre. Entre els diversos matemàtics que van estudiar la geometria renegant d'aquest cinquè postulat cal esmentar Gauss, Lobatschewsky i Bolyai, ja que van contribuir en el naixement de la geometria hiperbòlica i de la geometria absoluta. No tan sols són rellevants per l'origen de noves geometries, sinó també per construir-les sense la necessitat del cinquè postulat, obrint pas a tot allò que avui en dia coneixem com la geometria no euclidiana. Posteriorment, Riemann i Klein amb els seus treballs van acabar d'introduir la geometria no euclidiana amb la geometria el·líptica i la geometria projectiva. A més, Riemann va treballar la geometria des d'un punt de vista local i va desenvolupar la geometria diferencial amb què avui en dia podem estudiar tant la geometria hiperbòlica com l'esfèrica.

2 Definicions prèvies

Abans d'entrar en detall en l'estudi de la geometria del taxi, així com cal saber d'on surten les geometries euclidianes, també convé introduir alguns conceptes geomètrics que farem servir durant tot el treball. Per tal de redactar aquestes definicions prèvies ens hem basat en la notació feta servir a [5, 16, 17].

Definició 2.1. *Sigui X un conjunt qualsevol. Una aplicació $d : X \times X \to \mathbb{R}^n$ és una distància a X quan*

i) $d(x, y) \geq 0 \ \forall x, y \in X$.

ii) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

iii) $d(x, y) = d(y, x) \ \forall x, y \in X$.

iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \ \forall x, y, z \in X$.

Definició 2.2. *Un espai mètric és un parell (X, d) on X és un conjunt i d és una distància a X.*

Definició 2.3. *Sigui X un espai vectorial. Una aplicació $|| \cdot || : X \times X \to \mathbb{R}^n$ és una norma a X quan*

i) $||x|| \geq 0 \ \forall x \in X$.

ii) $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

iii) $||ax|| = |a|||x|| \ \forall x \in X$ *i* $\forall a \in \mathbb{R}^n$.

iv) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y|| \ \forall x, y \in X$.

Definició 2.4. *Sigui $p > 1$. La norma l_p es defineix com*

$$||x||_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

Un pot comprovar fàcilment que la norma l_p és, efectivament una norma. Per a les tres primeres propietats és evident, i per tal de demostrar la quarta hem de fer servir la desigualtat de Hölder.

Definició 2.5. *Siguin $(X, d_X), (Y, d_Y)$ espais mètrics i sigui $\phi : X \to Y$ una aplicació lineal. Diem que ϕ és una isometria si preserva la distància, és a dir, si $\forall x, y \in X$ tenim que $d_Y(\phi(x), \phi(y)) = d_X(x, y)$.*

Definició 2.6. *Dos conjunts de punts d'un espai mètric són congruents si, i només si, un és imatge de l'altra mitjançant una isometria de l'espai mètric.*

3 La geometria del taxi

El nostre interés es centra d'ara endavant en la geometria del taxi. Comencem doncs introduint i definint aquesta geometria no euclidiana, també coneguda com taxigeometria o geometria de Manhattan. L'origen d'aquest darrer nom prové de que aquesta geometria és molt útil per a descriure el moviment d'un taxi en una ciutat distribuïda en quadrícula, com Manhattan a Nova York (o com l'Eixample de Barcelona, un exemple més proper a nosaltres).

Aquesta geometria fou introduïda per Menger i desenvolupada per Krause a finals del segle passat, però el seu origen realment prové de Minkowski i el seu estudi sobre les geometries, que, entre d'altres, el portà a la descripció de l'espai quatridimensional que es fa servir per a descriure la relativitat. Per aquest motiu, començam definint la distància de Minkowski d_p. Així, prenent la norma l_p definida abans obtenim la distància de Minkowski d'ordre p.

Definició 3.1. *Sigui $p > 1$. Definim la distància de Minkowski d'ordre p com*

$$d_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

Observació 3.2. La distància euclidea correspon a la distància de Minkowski d'ordre 2, ja que

$$d_E(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2 \right)^{1/2}$$

A partir d'aquest moment, la bibliografia feta servir tindrà com a punt de partida [13, 14, 20] i així com facem servir articles i llibres s'aniran esmentant.

Definició 3.3. *Definim la distància del taxi com*

$$d_T(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

Observació 3.4. A partir d'ara, la denotarem simplement per d, sense el subíndex, per tal de simplificar la notació. En cas que necessitem qualcuna altra distància, s'especificarà amb el seu respectiu subíndex.

És a dir, la distància del taxi correspon a la distància de Minkowski d'ordre 1 a $\mathbb{R}^2$. Com es pot suposar, aquesta distància es pot estendre a qualsevol dimensió, ja sigui en l'espai $\mathbb{R}^3$ o en un espai de dimensió arbitrària, com $\mathbb{R}^n$. En aquest treball ens restringirem al cas del pla perquè ens centrarem en l'estudi de superfícies, de forma que que treballarem sobre l'espai mètric $(\mathbb{R}^2, d)$.

3.1 Conceptes bàsics

Abans d'enfocar-nos completament en el nostre estudi sobre superfícies, anem primer a introduir conceptes bàsics i simples en la geometria euclidiana, com són la mediatriu o la bisectriu, per a veure que no ho són tant en la geometria del taxi. Per a fer-ho, cal tenir en compte que els punts que fem servir en la geometria del taxi són els mateixos que trobem al pla euclidià. De la mateixa manera, els angles són iguals que els que fem servir en la geometria euclidiana.

Anem doncs a definir conceptes que feim servir en el pla euclidià i a estudiar-ne el seu comportament o existència en el pla del taxi.

Definició 3.5. *Definim la mediatriu d'un segment amb extrems A i B com el conjunt de punts que es troben a la mateixa distància d'aquests dos punts donats, és a dir, pels punts A i B tenim que*

$$M(A, B) = \{P \in \mathbb{R}^2 : d(P, A) = d(P, B)\}$$

És ben conegut que fent servir la distància euclídia la mediatriu és una línia recta, però ens interessa veure com s'aplica aquest concepte una vegada passam a fer servir la distància del taxi.

Introduïm també un concepte que no feim servir en la geometria euclidiana com a tal, però que ens serà de gran utilitat en els següents apartats i del qual en podem fer una analogia amb el punt mitjà de dos punts donats.

Definició 3.6. *Definim el conjunt de punts equidistants a distància mínima de dos punts donats com el conjunt de punts que es troben a la mateixa distància de dos punts donats tals que aquesta distància és mínima, és a dir, pels punts A i B i la seva mediatriu M tenim que*

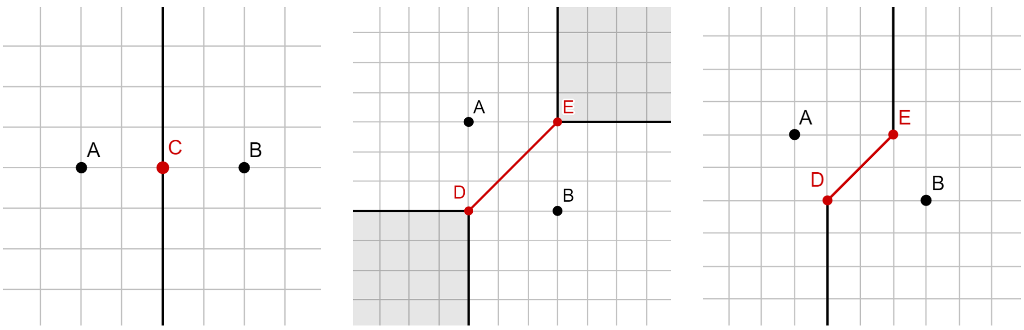
$$I(A, B) = \{P \in M(A, B) : d(A, B) = \min_{Q \in M(A,B)} d(A, Q)\}$$

Els dos conjunts de punts que acabem de descriure varien depenent de la posició relativa dels punts $A = (x_1, y_1)$ i $B = (x_2, y_2)$, de forma que [2]:

i) Si $x_1 = x_2$ o $y_1 = y_2$, s'obté el mateix cas per a la geometria euclidiana, on $M(A, B)$ és una recta i $I(A, B)$ (en vermell) és un sol punt, com podem veure a la Fig. 1a.

ii) Si $x_1 - x_2 = y_1 - y_2$, s'obté que la mediatriu és el conjunt de punts que podem observar a la Fig. 1b i $I(A, B)$ (en vermell) és el segment DE.

iii) Si la posició relativa d'A i B no es cap de les dues anteriors, s'obté que la mediatriu és el conjunt de punts que podem veure a la Fig. 1c i $I(A, B)$ (en vermell) és el segment DE.



(a) $x_1 = x_2$ (b) $x_1 - x_2 = y_1 - y_2$ (c) Cap de les anteriors

Figura 1: La mediatriu, en negre, i el conjunt de punts equidistants a distància mínima, en vermell, per a diferents posicions relatives de punts.

[2]Com en les activitats de la nostra proposta didàctica treballem en discret, aprofitem per a comentar que en el discret si $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ és senar, llavors la mediatriu no existeix.

Com podem veure, la mediatriu en el pla del taxi no és una recta com la coneixem en el pla euclidià, sinó un conjunt de punts que no tenen per què ser una línia recta. Aquest és el motiu pel que introduïm el concepte com a conjunt de punts que compleixen una certa propietat en lloc de parlar de línia recta com podríem fer en el cas euclidià. Aquesta idea per a definir ens serà útil durant tot el treball, no només per a definir la mediatriu.

A més, això ens pot portar a fer servir la definició de mediatriu com a definició de recta en la taxigeometria, tot i que també es pot seguir usant la definició euclidiana de recta. Evidentment, la definició que es faci servir pot afectar algunes de les definicions que es discuteixen més endavant, tot i així, s'especificarà la definició de recta que es farà servir quan calgui. Cal esmentar també que aquesta discussió no afecta a la definició d'un segment.

Una vegada hem entès i assimilat el nou concepte de recta, anem a veure com calcular la distància d'un punt a una recta, ja que també ens serà de gran utilitat.

Definició 3.7. *Sigui (X, d) un espai mètric i siguin $x \in X$ un punt i $r \in X$ una recta. Definim la distància entre el punt x i la recta r com*

$$d(x, r) = \min_{P \in r} d(x, P)$$

Aquesta definició és la genèrica que es fa servir per tal de calcular la distància entre un punt i una recta a qualsevol espai mètric, de forma que també és la que es farà servir en la geometria del taxi. Llavors, només podem calcular aquesta distància una vegada hem trobat el camí més curt que ens porta del punt a la recta (sigui quina sigui la definició de recta que emprem), tenint en compte que només podem fer servir camins que siguin combinació de segments paral·lels als eixos de coordenades.

Com podem veure, amb una mica d'imaginació, a les representacions de la Fig. 1 si prenem un punt arbitrari qualsevol, la distància entre un punt i una recta sempre serà igual a la distància més curta que hi ha seguint un segment paral·lel a un dels eixos fins intersectar amb la recta. Un pot veure amb un dibuix de manera molt senzilla que el cas de fer servir la definició euclidiana de recta és anàleg.

Per acabar de parlar de rectes i segments, trobarem la relació que hi ha entre la longitud d'un segment en el pla euclidià i en el pla del taxi. És a dir, cercarem una funció ρ tal que $d_E(P, Q) = \rho \cdot d(P, Q)$ on $P, Q \in \mathbb{R}^2$. Ja sabem que si el segment és paral·lel a qualsevol dels eixos, el valor de la seva longitud en ambdues geometries és el mateix. Ens interessa saber com relacionar-les en el cas que el segment no sigui paral·lel a cap dels eixos. Tenint en compte que els angles que fem servir són els mateixos, el valor del cos i del sin d'un angle serà el mateix. Així, fent ús de les projeccions del segment en els eixos arribem a

$$d = d_E \cos \alpha + d_E \sin \alpha$$

on α és l'angle que forma el segment amb la seva projecció paral·lela a l'eix x. També ho podem escriure en funció del pendent del segment, que ens serà més útil a properes discussions. Així, tenim que el pendent d'un segment amb extrems $P = (p_1, p_2), Q = (q_1, q_2)$ és

$$m = \frac{p_2 - q_2}{p_1 - q_1},$$

llavors obtenim, amb una mica de càlcul, que

$$d_E(P, Q) = \frac{\sqrt{1 + m^2}}{1 + |m|} d(P, Q)$$

Introduïm ara el concepte de bisectriu.

Definició 3.8. *Definim la bisectriu d'un angle com el conjunt de punts que es troben a la mateixa distància de cada un dels costats de l'angle.*

Aquesta definició no és la que més feim servir en el pla euclidià, sinó que entenem bisectriu com la recta que divideix un angle en dos d'iguals. Aquestes dues definicions són equivalents, però farem servir la primera perquè ens serà més útil en la discussió sobre els triangles que farem a continuació.

Una qüestió interessant és com pot un trobar aquesta bisectriu. Per a fer-ho, podem procedir com a la Fig. 2: dibuixam un segment de línia recta paral·lel a un dels costats de l'angle separat una certa distància, procedim anàlogament amb l'altre costat fent servir la mateixa distància i trobem la intersecció d'aquests dos segments. Aleshores, la bisectriu és la línia recta que passa pel vèrtex de l'angle i per aquesta intersecció.

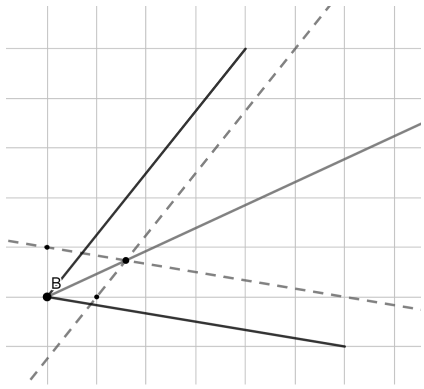


Figura 2: Mètode per a trobar la bisectriu.

Finalment, acabem aquesta secció discutint sobre la unicitat del camí més curt entre dos punts donats. Sabem que en la geometria euclidiana el camí més curt entre dos punts és la línia recta i és únic. En el cas de fer un estudi de la geometria des d'un punt de vista diferencial, sabem que aquest problema consisteix en trobar les geodèsiques.

En la taxigeometria, ja hem vist que la distància més curta entre un punt i una recta és troba traçant el segment paral·lel a un dels eixos que els uneixi i sigui més curt. En voler trobar el camí més curt entre dos punts donats $A = (x_1, y_1)$ i $B = (x_2, y_2)$, un se n'adona que aquest camí no és únic a no ser que $x_1 = x_2$ o $y_1 = y_2$.

En el cas discret, aquest resultat es fa més evident i un pot comprovar-ho a la Fig. 3. Una qüestió interessant al respecte és quants de camins hi ha unint els dos punts tals que recorren la distància més petita possible.

Proposició 3.9. *Siguin els punts $A = (x_1, y_1)$ i $B = (x_2, y_2)$ amb $x_1 \neq x_2$ i $y_1 \neq y_2$ (en cas contrari el camí més curt si és únic). Podem suposar sense perdre generalitat que $A = (0, 0)$,*

El nombre de camins que unixen A i B recorrent la mínima distància possible són:

i) Si $x_1 = x_2$ o $y_1 = y_2$, el camí és únic.

ii) Si $x_1 \neq x_2$ i $y_1 \neq y_2$, el nombre de camins és $\binom{x_2 + y_2}{x_2} = \binom{x_2 + y_2}{y_2}$.

Demostració. Pel que ja hem comentat, *i)* és trivial perquè és un cas anàleg a l'euclidià.

Anem a demostrar *ii)*. Podem suposar sense perdre generalitat que $A = (0, 0)$, llavors qualsevol camí que uneixi A i B ha de recórrer x_2 segments de longitud 1 paral·lels a l'eix x i y_2 segments de longitud 1 paral·lels a l'eix y. Així, hem de fer $x_2 + y_2$ passes, sense importar l'ordre en què es facin, que correspon a $\binom{x_2+y_2}{x_2} = \binom{x_2+y_2}{y_2}$. □

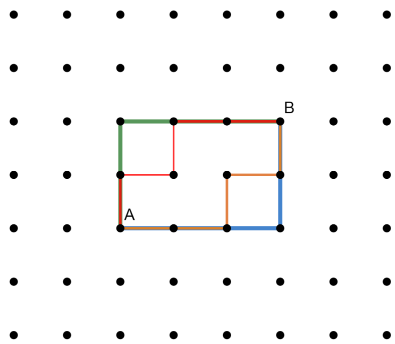


Figura 3: El camí més curt entre dos punts no és únic (cas discret).

4 Triangles

En aquest apartat, el primer sobre superfícies, ens centrarem en l'estudi dels triangles dins el pla del taxi i d'algunes de les seves propietats àmpliament conegudes al pla euclidià per a veure com aquestes canvien quan passem a fer servir la distància del taxi. Hem fet servir [23, 12, 7] per a treballar aquesta secció.

Abans de començar amb la definició de triangle, recordem que els angles euclidians i els del pla del taxi són iguals.

Definició 4.1. *Siguin A, B i C tres punts que són intersecció de tres rectes euclidianes diferents del pla. Definim un triangle com el conjunt dels vèrtexs A, B, C i els segments que uneixen els vèrtexs. El denotarem per $\triangle ABC$.*

Observació 4.2. La definició de triangle és la mateixa i gràficament un triangle en la geometria del taxi és igual que un en la geometria euclidiana. Això és tenint en compte que hem fet servir la definició euclidiana de recta i no definint una recta com la mediatriu de dos punts.

La primera part del nostre estudi sobre el triangle es centrarà en el baricentre, el circumcentre i l'incentre, enfocant-nos en com es comporten aquests punts i com poden resultar les interseccions dels cercles circumscrits i inscrits en el triangle quan apliquem les definicions al pla del taxi. Per a fer-ho primer definirem aquests conceptes pel cas d'un triangle euclidià i després veurem com es poden construir a la geometria del taxi.

4.1 Baricentre

Definició 4.3. *Definim el baricentre d'un triangle euclidià com el punt d'intersecció de les tres mitjanes del triangle, on les mitjanes són els segments que uneixen cada vèrtex amb el punt mitjà del costat oposat.*

Per tal de trobar el baricentre d'un triangle en el pla del taxi, cal dibuixar cada una de les mitjanes per tal de trobar on es tallen. Per tant, primer hem de trobar el punt mitjà de cada un dels costats del triangle. Amb l'estudi fet a 3.1 sobre el lloc geomètric dels punts a mínima distància de dos punts donats i la seva analogia amb el punt mitjà d'un segment, ja es pot veure que això ens portarà complicacions que en el cas euclidià no teníem. Com ja hem comentat en aquell apartat, el conjunt de punts a mínima distància de dos punts donats pot ser un punt o un segment de recta. Així, com podem veure a la Fig. 4, les mitjanes en la geometria del taxi no són sempre segments de recta, sinó que poden ser regions del pla.

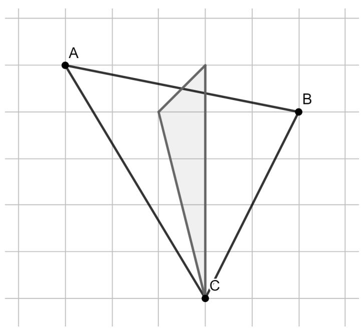
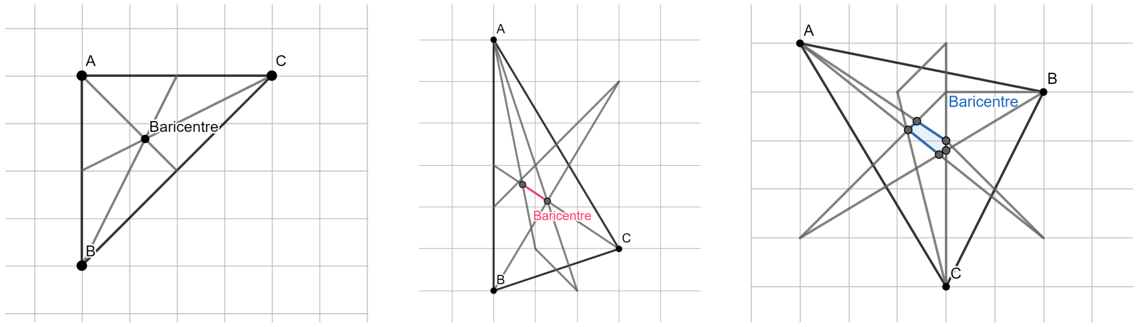


Figura 4: Una mitjana pot ser una regió del pla en lloc d'un segment.

D'aquesta forma, en el pla del taxi el baricentre no es pot definir com el punt d'intersecció de les mitjanes d'un triangle, sinó que cal definir-lo com la intersecció, que no té perquè ser tan sols un punt, de les mitjanes d'un triangle. Així, com podem veure a la Fig. 5, tenim que:

- Si dos dels costats del triangle són paral·lels als eixos de coordenades el baricentre és un punt.
- Si un dels costats del triangle és paral·lel als eixos de coordenades el baricentre és un segment.
- Si cap dels costats del triangle és paral·lel als eixos de coordenades el baricentre és una regió poligonal.



(a) El baricentre és un punt. (b) El baricentre és un segment. (c) El baricentre és un pla.

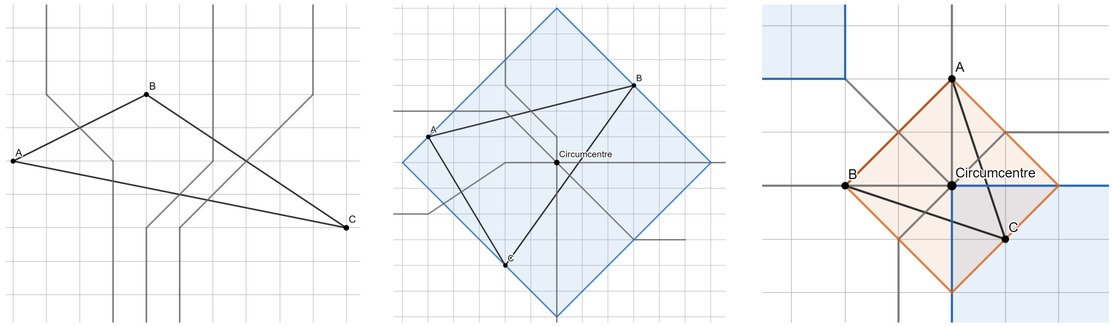
Figura 5: El baricentre pot ser un punt, un segment o una regió poligonal.

4.2 Circumcentre

Definició 4.4. *Definim el circumcentre d'un triangle euclidià com el punt d'intersecció de les tres mediatrius del triangle.*

Com sabem, el circumcentre d'un triangle euclidià és el centre de la circumferència que el circumscriu, ja que és un punt equidistant als tres vèrtexs. Ara, per a trobar-ne la definició equivalent en la geometria del taxi, només necessitem adaptar el concepte de mediatriu així com ja hem fet abans. Com el nom indica, es pot circumscriure el triangle amb una circumferència centrada en el circumcentre, ja que el circumcentre és un punt equidistant als vèrtexs.

Tot i així, no és tan senzill com en el cas euclidià, on la intersecció d'aquesta circumferència amb el triangle és com a la Fig. 6b, és a dir, on la intersecció de la circumferència amb el triangle són els vèrtexs d'aquest. Ara, també podem trobar el cas com el de la Fig. 6c, on les mediatrius de dos costats del triangle coincideixen, donant peu a que la intersecció del triangle i la circumferència que el circumscriu no sigui només els tres vèrtexs (com sempre ocorre en el cas euclidià), sinó que sigui els tres vèrtexs i un dels costats complet. A més, també pot passar que les mediatrius dels tres costats no es tallin, de forma que el circumcentre no existeix, com és el cas de la Fig. 6a.



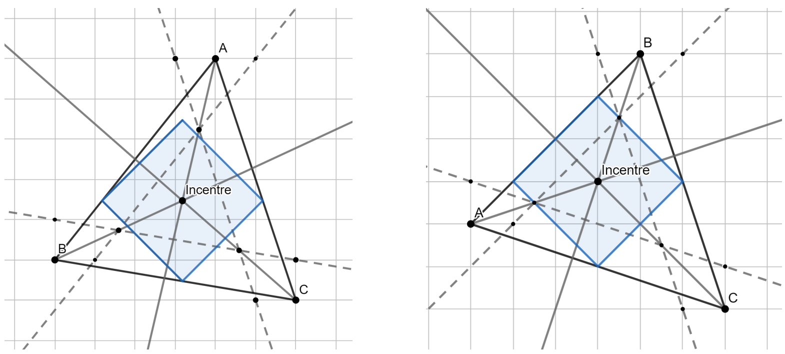
(a) El circumcentre pot no existir.
(b) La intersecció pot ser els tres vèrtexs.
(c) La intersecció pot ser els tres vèrtexs i un costat.

Figura 6: El circumcentre en la taxigeometria.

4.3 Incentre

Definició 4.5. *Definim l'incentre d'un triangle euclidià com el punt d'intersecció de les tres bisectrius d'un triangle.*

Com ja coneixem, l'incentre d'un triangle euclidià és el centre de la seva circumferència inscrita, ja que és un punt equidistant als tres costats del triangle. Per a adaptar-ne la definició al pla del taxi, feim servir la definició de la bisectriu (Def. 3.8) donada a l'apartat anterior. En el nostre cas, fent servir el mètode que s'explica també allà per tal de trobar les tres bisectrius, trobem l'incentre. Així com en el cas del circumcentre, tenim el cas on la intersecció entre el triangle i la circumferència inscrita és tres punts com en el cas euclidià, com podem veure a la Fig. 7a. A més, trobem que, com en la Fig. 7b, la intersecció del triangle i la circumferència està formada per més de tres punts quan una de les bisectrius coincideix amb la mediatriu del costat oposat.



(a) La intersecció pot ser un punt de cada costat.
(b) La intersecció pot ser més de tres punts.

Figura 7: L'incentre en geometria del taxi.

4.4 L'àrea d'un triangle

Per tancar aquest estudi sobre el triangle en el pla del taxi, en calcularem l'àrea. Sabem que l'àrea d'un triangle en el pla euclidià és $A = \frac{1}{2} b_E \cdot h_E$ on b_E és la longitud de la seva base i h_E, la seva altura. És evident que l'àrea del triangle en la geometria del taxi ha de ser la mateixa, però necessitem una fórmula adaptada a la distància de Manhattan, ja que mesurem la longitud dels segments de forma diferent.

Proposició 4.6. *Siguin b i h la longitud de la base i de l'altura d'un triangle qualsevol en el pla del taxi. Si el pendent de la base és m, l'àrea del triangle és*

$$A = \frac{1+m^2}{2(1+|m|)^2} b \cdot h$$

Demostració. Per tal de demostrar aquest resultat, ens serà molt útil la discussió sobre la relació entre la longitud d'un segment en ambdues geometries a 3.1. Així, sabem que on P i Q els extrems d'un segment

$$d_E(P,Q) = \frac{\sqrt{1+m^2}}{1+|m|} d(P,Q)$$

on $P = (p_1, p_2)$ i $Q = (q_1, q_2)$ són els extrems d'un segment. En aquest cas, suposam que P i Q són els extrems de la base del triangle. Si $p_1 = q_1$, tenim que $m = 0$, llavors $A = \frac{1}{2} b \cdot h$. Si $p_2 = q_2$, tenim que $m \to \infty$, aleshores $A = \frac{1}{2} b \cdot h$. Pel cas general, tenim que

$$b_E = \frac{\sqrt{1+m^2}}{1+|m|} b$$

$$h_E = \frac{\sqrt{1+\left(-\frac{1}{m}\right)^2}}{1+\left|-\frac{1}{m}\right|} h = \frac{\sqrt{1+m^2}}{1+|m|} h$$

on hem fet servir que el pendent de l'altura és $\left(-\frac{1}{m}\right)$ perquè és perpendicular a la base de pendent m. Substituïnt a la fòrmula de l'àrea en el pla euclidià, trobem que

$$A = \frac{1}{2} b_E \cdot h_E = \frac{1+m^2}{2(1+|m|)^2} b \cdot h$$

□

5 Còniques

En aquest apartat, ens centrarem en definir cada una de les còniques del pla euclidià i a estudiar què ocorre quan aquestes definicions s'apliquen al pla del taxi. Per a fer-ho, primer n'estudiarem les definicions del llocs geomètrics que representen amb les seves representacions gràfiques des de dos punts de vista i acabarem introduint com podem entendre aquestes figures com a seccions còniques d'un con a la geometria del taxi. D'aquesta forma, podrem comparar els resultats a què arribem aplicant les tres definicions. Hem fet servir [18, 19, 11, 4, 10, 15] per a desenvolupar tota aquesta secció.

5.1 Circumferència

Definició 5.1. *Definim la circumferència com el conjunt de punts que es troben a una distància constant d'un punt fixat, és a dir, per a un radi r i un centre O tenim que la circumferència és*

$$C = \{P \in \mathbb{R}^2 : d(P, O) = r\}$$

Així, una circumferència en el pla del taxi queda com a la Fig. 8. És evident que ara la circumferència, gràficament parlant, no té res a veure amb la circumferència euclidiana, ja que és un quadrat tal que els seus costats formen un angle de $\frac{\pi}{2}$ radians respecte els eixos de coordenades. Cal remarcar aquí que per tal que un quadrat sigui també una circumferència els seus costats han de complir aquesta condició respecte els eixos, ja que les rotacions no conserven la definició, com podríem veure si estudiéssim el grup d'isometries de la geometria del taxi com es fa a [21] o si calculem la distància de diferents punts del quadrat respecte el seu centre per a veure que la definició que hem donada no es compleix.

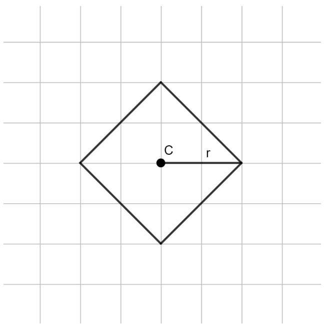
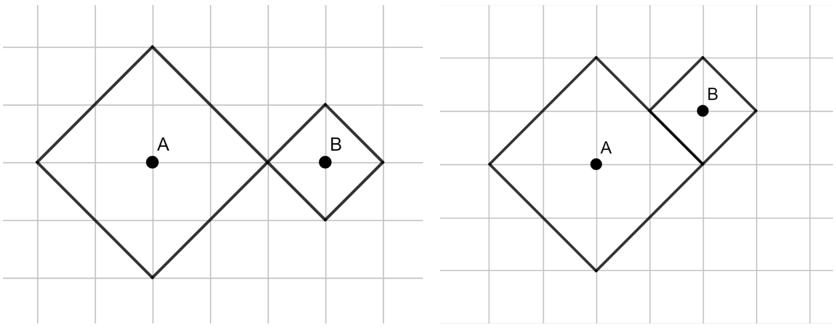


Figura 8: La circumferència en la geometria del taxi és un quadrat els costats del qual formen un angle de $\frac{\pi}{2}$ radians respecte els eixos de coordenades.

Ens centrarem ara en comparar com són les interseccions de dues circumferències en geometria euclidiana i en la del taxi. Com sabem, en el pla euclidià dues circumferències es poden no tallar, poden ser tangents en un punt o es poden tallar en dos punts. En canvi, en el pla del taxi, per als centres C_1 i C_2 de dues circumferències diferents de radi r_1 i r_2, respectivament, tals que $D = d(C_1, C_2)$ tenim els següents casos:

i) Si $r_1 + r_2 < D$ les dues circumferències no es tallen en cap punt, exactament com passa en el cas euclidià.

ii) Si $r_1 + r_2 = D$ diem, fent analogia amb el cas euclidià, que les dues circumferències són tangents. En el pla euclidià, sabem que això correspon a que les dues circumferències es tallen en un sol punt. Com podem veure a la Fig. 9a, en el pla del taxi trobam aquesta situació si, i només si, $C_1 = (x_1, y_1)$ i $C_2 = (x_2, y_2)$ són tals que $x_1 = x_2$ o $y_1 = y_2$. Si no tenim aquesta situació concreta, com es veu a la Fig. 9b, la intersecció resulta en un segment de recta.



(a) $x_1 = x_2$ o $y_1 = y_2$

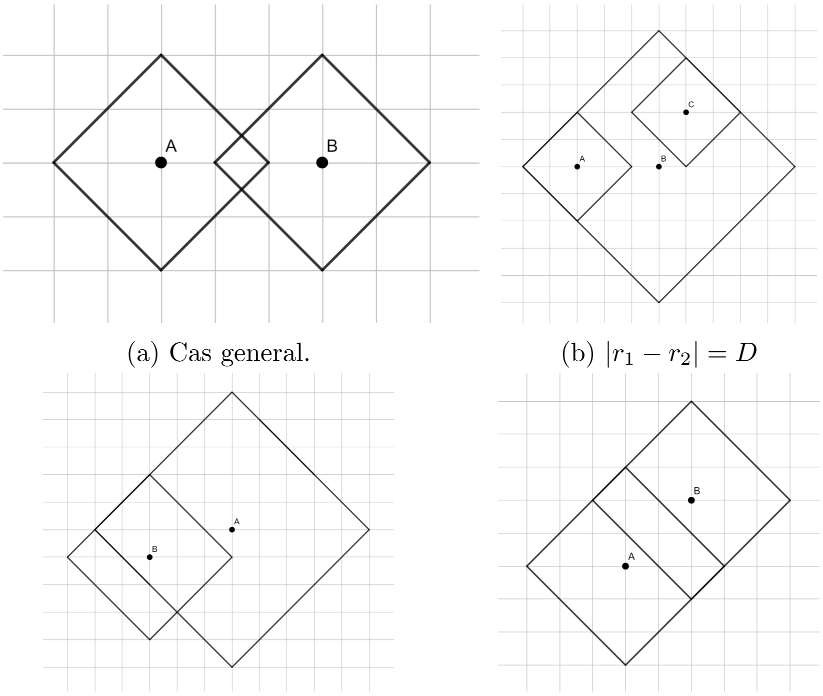
(b) $x_1 \neq x_2$ i $y_1 \neq y_2$

Figura 9: Circumferències tangents: $r_1 + r_2 = D$.

iii) Si $r_1 + r_2 > D$ les dues circumferències es tallen de diverses maneres. En el pla euclidià, sabem que es tallen en dos punts i en el pla del taxi, com podem veure a la Fig. 10a, també ocorre de forma general. Tot i així, hi ha altres possibilitats en situacions concretes, com es veu a les Fig. 10b, 10c i 10d, respectivament:

- Si $|r_1 - r_2| = D$ la intersecció de les dues circumferències és un segment o, en cas que $C_1 = (x_1, y_1)$ i $C_2 = (x_2, y_2)$ siguin tals que $x_1 = x_2$ o $y_1 = y_2$, dos segments.
- Si $|r_1 - r_2| = t - s$, on t i s són les longituds dels costats del rectangle tal que el segment C_1C_2 n'és la seva diagonal, la intersecció és un segment i un punt.
- Si $s = t$, amb s i t definides com al cas anterior, i $r_1 = r_2$, la intersecció de les dues circumferències són dos segments.

Per acabar de parlar sobre la circumferència, en calcularem l'àrea i la longitud. Així, tenim que per a una circumferència de radi r en el pla del taxi, cada segment que la forma té una longitud $2r$ en lloc de la longitud $\sqrt{2}r$ que trobaríem en el pla euclidià per a aquest mateix conjunt de punts. Llavors, la longitud de la circumferència serà $4 \cdot 2r$ i la seva àrea serà $(2r)^2 = 4r^2$. Si comparem aquests valors, obtinguts per a una circumferència qualsevol, amb els obtinguts a la geometria euclidiana $2\pi r$ i πr^2 per a la longitud i l'àrea d'una circumferència, respectivament, un pot intuir que π és la constant que relaciona el radi d'una circumferència amb la seva longitud i la seva àrea. Aleshores, fent aquesta analogia amb els resultats trobats per a la geometria del taxi, arribem a la conclusió que en el pla del taxi podem definir una constant π_T anàloga a π tal que $\pi_T = 4$. Aquest raonament no és únic de la geometria del taxi, ja que si considerem qualsevol espai mètric sobre $\mathbb{R}^n$ amb la distància de Minkowski d_p, es pot trobar una π_p per a cada p.



(a) Cas general.

(b) $|r_1 - r_2| = D$

(c) $|r_1 - r_2| = t - s$

(d) $s = t$ i $r_1 = r_2$

Figura 10: La intersecció de dues circumferències si $r_1 + r_2 > D$.

5.2 El·lipse

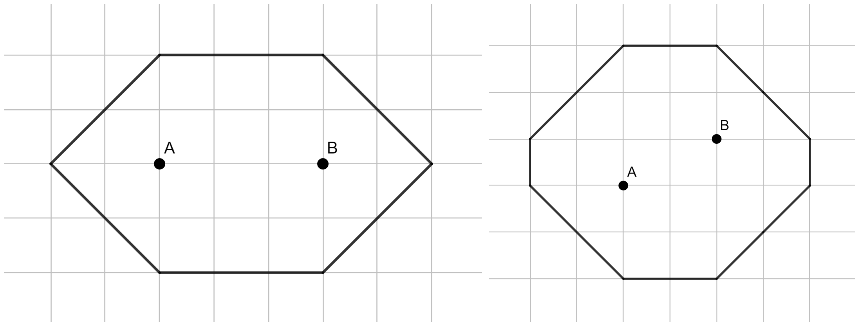
Definició 5.2. *Definim l'el·lipse com el conjunt de punts tals que la suma de les seves distàncies a dos punts fixats, anomenats focus, és constant; és a dir, per als puns fixats F_1 i F_2 i una constant c tenim que l'el·lipse és*

$$E = \{P \in \mathbb{R}^2 : d(P, F_1) + d(P, F_2) = c\}$$

Veient aquesta definició, un ja pot plantejar-se que portarà a situacions més complexes que les que es troben en el pla euclidià, ja que la posició relativa dels dos focus ens portarà a canvis en la representació gràfica de l'el·lipse. Així, tenim que pels focus $F_1 = (x_1, y_1)$ i $F_2 = (x_1, y_2)$:

i) Si $x_1 = x_2$ o $y_1 = y_2$, llavors l'el·lipse té forma d'un hexàgon euclidià (no regular en general), com es pot veure a la Fig. 11a.

ii) Si no es compleix cap de les relacions anteriors, s'obté que l'el·lipse té forma d'un octàgon euclidià (no regular en general), com es pot veure a la Fig. 11b.



(a) $x_1 = x_2$ o $y_1 = y_2$ (b) $x_1 \neq x_2$ i $y_1 \neq y_2$

Figura 11: L'el·lipse pot ser un hexàgon o un octàgon.

Com també podem veure a simple vista en observar la definició i les representacions, fent tendir la constant c que fem servir en definir l'el·lipse a 0 aquesta s'assembla més a una circumferència fins que amb $c = 0$ és, efectivament, una circumferència talment com també ocorre en el cas euclidià.

5.3 Hipèrbola

Definició 5.3. *Definim hipèrbola com el conjunt de punts tals que la diferència de les distàncies a dos punts fixats, anomenats focus, és constant i menor que la distància entre els focus; és a dir, per als focus F_1 i F_2 separats una distància d i una constant $c \leq d$ tenim que la hipèrbola és*

$$H = \{P \in \mathbb{R}^2 : |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = c\}$$

Una altra vegada, vegem que aquesta definició es pot aplicar sense cap tipus d'inconvenient al pla del taxi, ja que només hi intervenen les distàncies entre punts. Així com en el cas de l'el·lipse, la posició relativa dels focus determinarà les possibles representacions gràfiques a què ens durà aquesta definició. A més, en aquest cas les hiperbòles no tenen per què ser dues línies, sinó que de la mateixa manera que en la discussió sobre la mediatriu (entesa com a conjunt de punts equidistants a dos punts, com hem vist a 3.1) trobem que la hipèrbola també pot ser un conjunt de punts que no són una línia. Així, tenim que pels focus $F_1 = (x_1, y_1)$ i $F_2 = (x_2, y_2)$ tals que $d(F_1, F_2) = d$, una constant $c \leq d$ i un valor $k = \big||x_1 - x_2| - |y_1 - y_2|\big|$:

i) Si $x_1 = x_2$ o $y_1 = y_2$, s'obté que les hipèrboles són dues rectes euclidianes paral·leles a l'eix y o a l'eix x, respectivament, com podem veure a la Fig. 12.

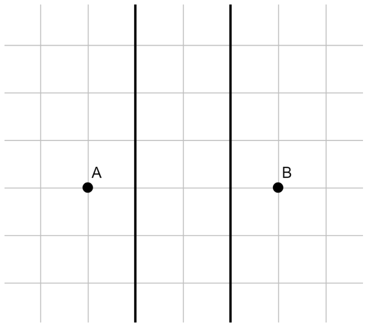
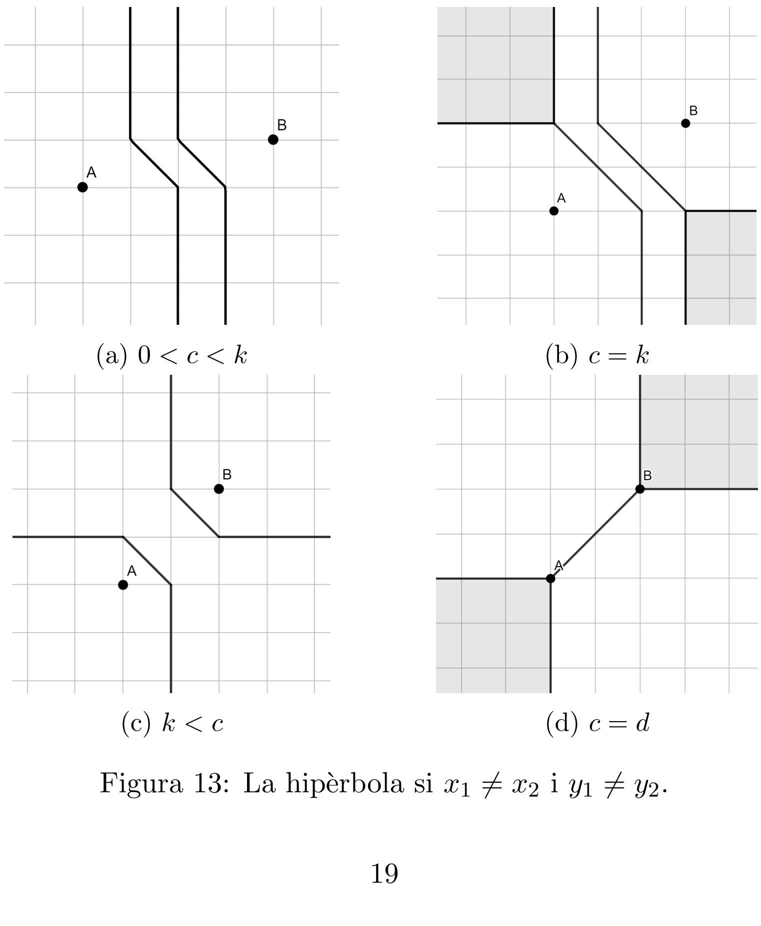


Figura 12: La hipèrbola si $x_1 = x_2$ o $y_1 = y_2$.

ii) Si els focus no compleixen cap de les relacions anteriors, la forma que pren la hipèrbola depèn del valor de c, k i d. Així, s'obté que:

- Si $c = 0$, llavors la hiperbòla esdevé la mediatriu, discutida a 3.1.
- Si $0 < c < k$, s'obté la hipèrbola amb una forma com la que podem veure a la Fig. 13a, formada per dues línies paral·leles (cada una és tres segments de recta).
- Si $c = k$, s'obté que la hipèrbola és un conjunt de punts com el que podem veure a la Fig. 13b.
- Si $k < c$, s'obté el cas que més s'assembla al cas euclidià, com podem veure a la Fig. 13c.
- Si $c = d$, s'obté que la hipèrbola són dues regions del pla unides per un segment, com podem veure a la Fig. 13d.



(a) $0 < c < k$

(b) $c = k$

(c) $k < c$

(d) $c = d$

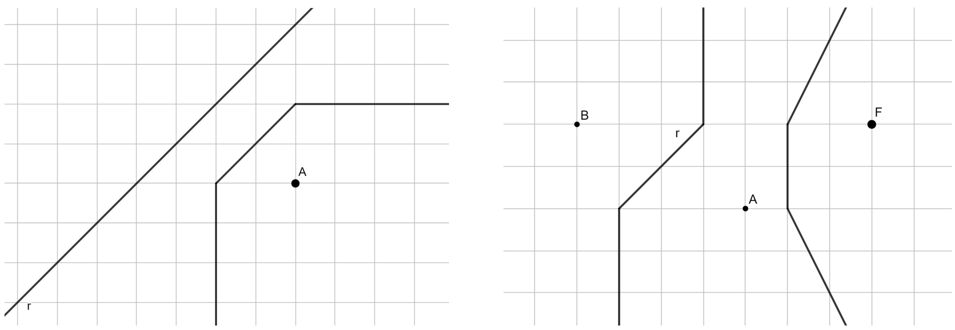
Figura 13: La hipèrbola si $x_1 \neq x_2$ i $y_1 \neq y_2$.

5.4 Paràbola

Definició 5.4. *Definim una paràbola com el conjunt de punts que es troben a la mateixa distància d'un punt, anomenat focus, i d'una recta, anomenada directriu; és a dir, per al focus F i la recta r tenim que la paràbola és*

$$L = \{P \in \mathbb{R}^2 : d(P, F) = d(P, r)\}$$

Per tal de poder representar gràficament aquest conjunt de punts hem de fer servir la discussió sobre la distància entre un punt i una recta feta a 3.1. Així, tenint en compte que feim servir el concepte euclidià de recta per a fer la major analogia possible amb el cas euclidià, s'obté que una paràbola és el conjunt de punts que podem observar a 14a. S'ha decidit usar aquesta definició perquè ens serà més útil a l'aula, però un pot estudiar com seria una paràbola en fer servir que una recta és la mediatriu de dos punts, obtenint que una paràbola és com a 14b. Com podem observar, l'aspecte de la paràbola canvia en canviar el tipus de recta segons els casos estudiats a 3.1, i en el cas en què les dues definicions de recta coincideixen, llavors les paràboles també.



(a) Amb la recta euclidiana. (b) Amb la mediatriu com a recta.

Figura 14: La paràbola

5.5 Diferents definicions per a les còniques

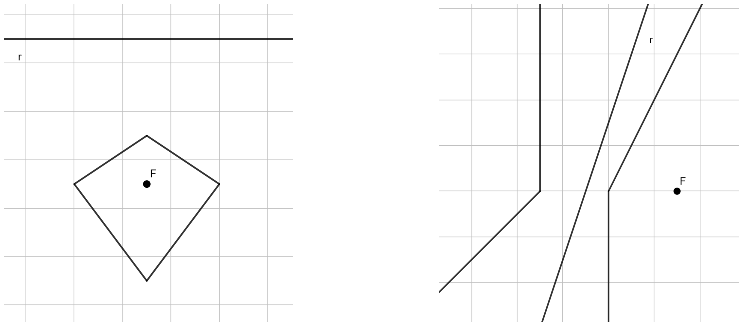
A més de les definicions que hem fet servir per a l'el·lipse, la hipèrbola i la paràbola, també tenim en geometria euclidiana la següent definició.

Definició 5.5. *Sigui F un punt, anomenat focus, r una recta, anomenada directriu, i e una constant positiva, anomenada excentricitat, definim el conjunt de punts*

$$\{P \in \mathbb{R}^2 : \frac{d(P, F)}{d(P, r)} = e\}$$

com una el·lipse per a $0 < e < 1$, com una paràbola per a $e = 1$ i com una hipèrbola per a $1 < e$.

Com ens ha passat ja en el cas de la paràbola, caldrà anar alerta amb quina definició de recta feim servir a l'hora de pensar aquests llocs geomètrics. En aquest cas, aquí farem servir la definició euclidiana de recta perquè ens servirà per a les sessions didàctiques i per a relacionar les figures planes amb les seccions d'un con.



(a) El·lipse amb directriu r i $e = 0.5$. (b) Hipèrbola amb directriu r i $e = 3$.

Figura 15: Exemple de còniques definides com a la definició 5.5.

Observant la Fig. 15 i comparant-la amb les representacions que ja hem donat de cada un dels llocs geomètrics, veim que les representacions que acabem de donar no coincideixen amb les que ja havíem donades. No representem la paràbola perquè és evident que les dues definicions són equivalents (recordem que obtenim una paràbola quan $e = 1$). Per aquest motiu, podem intuir que dues definicions equivalents en geometria euclidiana no tenen per què ser-ho en geometria del taxi. Cal recordar que aquesta manca d'equivalència no és deguda al concepte de recta que fem servir, com si ens pot passar en el cas de la paràbola com hem comentat abans.

Per a acabar aquesta secció, el nostre interès és ara veure com canvia la representació d'un con en passar a la geometria del taxi i relacionar-lo amb les figures planes que acabem de descriure a la definició 5.5 de manera molt simple.

Definició 5.6. *Definim un con com la unió de totes les rectes que tenen per extrems un punt d'una circumferència, anomenada base, i un punt exterior a la circumferència alineat amb el centre d'aquesta, anomenat vèrtex.*

Aplicant aquesta definició a la geometria del taxi, obtenim que un con és com a 16, és a dir, com una piràmide amb base quadrada en geometria euclidiana.

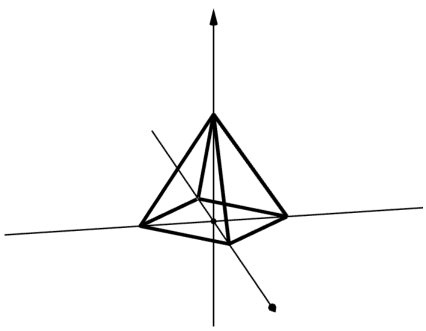


Figura 16: El con.

Finalment, com podem veure a la Fig. 15, les figures descrites a la Def. 5.5 es corresponen a projeccions de seccions d'un con, així com també passa a la geometria euclidiana; per exemple, trobem que les dues branques de la hipèrbola corresponen precisament amb la intersecció del con i un pla. Així, veim com en geometria euclidiana descrivim les còniques com a projeccions de seccions d'un con i a la geometria del taxi també ho podem fer. Per a fer-ho, ens cal fer servir unes definicions específiques, ja que no totes les que podem fer servir en el cas euclidià són equivalents en el cas del taxi, com ja hem vist.

6 Polígons regulars

Per a acabar aquesta part del treball on s'ha aprofundit sobre la geometria del taxi i algunes figures planes que hi podem trobar, anem a veure com podem aplicar la definició de polígon regular al pla del taxi, tot estudiant-ne els casos en què es poden trobar polígons regulars que ho són tant en el pla euclidià com en el del taxi. Aquest apartat el podem dividir en tres parts. Primer, definim els conceptes de polígon, polígon regular i introduïm dos resultats que necessitem en la segona part, on ens enfocarem en veure si els polígons regulars en el pla euclidià també ho són en el pla del taxi. Finalment, donarem un resultat general sobre l'existència de polígons regulars en el pla del taxi. A més, el mètode que farem servir per a demostrar aquesta darrera proposició ens servirà també per a entendre com es poden construir els polígons regulars en el pla del taxi en cas que existeixin. Per tal de desenvolupar la discussió s'ha fet servir [9, 24].

6.1 Definicions i resultats previs

Definició 6.1. *Definim polígon de n costats com n, on $n \geq 3$ i $n \in \mathbb{N}$, segments coplanars, anomenats costats, que es tallen de tal forma que els punts d'intersecció, anomenats vèrtexs, pertanyen només a dos dels segments i que si dos dels segments es tallen no estan alineats. En general, l'anomenam n-gon.*

Observació 6.2. La definició de polígon en la geometria del taxi és la mateixa que en l'euclidiana.

Definició 6.3. *Definim polígon equilàter com un polígon tal que les longituds de tots els seus costats és igual, on la longitud d'un costat és la distància entre els dos vèrtexs del costat.*

Definició 6.4. *Definim polígon equiangular com un polígon tal que tots els seus angles interiors són iguals.*

Observació 6.5. Com feim servir els mateixos angles en el pla del taxi que en l'euclidià, aquesta definició i la respectiva euclidiana són idèntiques.

Definició 6.6. *Definim polígon regular com un polígon equilàter i equiangular alhora.*

Observació 6.7. L'única diferència entre la definició de polígon regular en el pla del taxi i en l'euclidià és pel canvi de distància feta servir per a mesurar la longitud dels segments, llavors l'equilateralitat és l'únic concepte rellevant en comparar polígons regulars euclidians en passar-los al pla del taxi.

Una vegada definits els polígons regulars en la geometria del taxi, introduïm ara uns resultats que ens seran molt útils per a estudiar-ne la seva existència. Recordam que d és sempre la distància de Manhattan, i d_E és la distància euclidiana.

Proposició 6.8. *Siguin P, Q, X i Y quatre punts del pla euclidià tals que $P \neq Q$ i $d_E(P,Q) = d_E(X,Y)$ i m_1 i m_2 els pendents de les rectes PQ i XY, respectivament. Aleshores, tenim que:*

i) Si $m_1, m_2 \neq 0$ tenim que $d(P,Q) = d(X,Y)$ si, i només si, $|m_1 = m_2|$ o $|m_1 m_2| = 1$.

ii) Si $m_i = 0$ o $m_i \to \infty$ tenim que $d(P,Q) = d(X,Y)$ si, i només si, $m_j = 0$ o $m_j \to \infty$, on $i, j \in \{1,2\}$ amb $i \neq j$.

Demostració. Siguin $P = (p_1, p_2)$ i $Q = (q_1, q_2)$ dos punts de $\mathbb{R}^2$ i sigui m el pendent del segment que els uneix. Farem servir que

$$d_E(P,Q) = \frac{\sqrt{1+m^2}}{1+|m|} d(P,Q) \tag{6.1}$$

si $p_2 \neq q_2$ i que $d_E(P,Q) = d(P,Q)$ si $p_2 = q_2$ (així, $m \to \infty$), com hem vist a la discussió feta a 3.1. Demostrarem els dos casos per separat.

i) Suposem que $m_1, m_2 \neq 0$ i que $d_E(P,Q) = d_E(X,Y)$. Aleshores, tenim que

$$d_E(P,Q) = \frac{\sqrt{1+m_1^2}}{1+|m_1|} d(P,Q) = d_E(X,Y) = \frac{\sqrt{1+m_2^2}}{1+|m_2|} d(X,Y)$$

Llavors, si $d(P,Q) = d(X,Y)$ tenim que

$$\frac{\sqrt{1+m_1^2}}{1+|m_1|} = \frac{\sqrt{1+m_2^2}}{1+|m_2|} \Rightarrow \frac{|m_1 - m_2|}{|m_1 m_2| - 1} = 0 \Rightarrow m_1 = m_2 \text{ ó } |m_1 m_2| = 1$$

Per tant, obtenim que $|m_1 = m_2|$ o $|m_1 m_2| = 1$.

Per a l'altra implicació, suposem que $m_1, m_2 \neq 0$ i que $|m_1 = m_2|$ o $|m_1 m_2| = 1$. Aleshores, tenim que $m_1 = m_2, m_1 = -m_2$ o $m_1 = 1/m_2$. Fent servir això arribem en els tres casos a

$$\frac{\sqrt{1+m_1^2}}{1+|m_1|} = \frac{\sqrt{1+m_2^2}}{1+|m_2|},$$

llavors $d(P,Q) = d(X,Y)$ per l'equació 6.1.

ii) Suposem que $m_i = 0$ o $m_i \to \infty$. Així, tenim que $\dfrac{\sqrt{1+m_i^2}}{1+|m_i|} = 1$.

Si $d(P,Q) = d(X,Y)$, hem de tenir també que $\dfrac{\sqrt{1+m_j^2}}{1+|m_j|} = 1$. Per tant, $m_j = 0$ o $m_j \to \infty$.

Per l'altra banda, si suposem $m_j = 0$ o $m_j \to \infty$, obtenim que $\dfrac{\sqrt{1+m_j^2}}{1+|m_j|} = 1$. Com també tenim que $\dfrac{\sqrt{1+m_i^2}}{1+|m_i|} = 1$, arribem a $d(P,Q) = d(X,Y)$.

□

Corol·lari 6.9. *Siguin P, Q, X tres punts no alineats en el pla cartesià tals que $d_E(P,Q) = d_E(Q,X)$. Llavors, $d(P,Q) = d(Q,X)$ si, i només si, l'angle PQX és $\pi/2$, és a dir, si l'angle és recte, o P i X són simètrics respecte la línia que passa per Q paral·lela a $x = 0, y = 0, x = y$ o $x = -y$.*

Aquests dos resultats ens són molt útils, ja que mostren quines isometries del pla euclidià conserven la distància entre dos punts en el pla del taxi. Aquí presentem només aquests resultats perquè són els que ens seran útils per a l'estudi que feim en aquest treball, però. com ja hem comentat, estudiar el grup d'isometries d'aquesta geometria és una feina interessant.

A més, haurem de tenir en compte que en el pla euclidià podem inscriure una circumferència dins del polígon i alhora una circumferència pot circumscriure un polígon.

Definició 6.10. *Definim el centre del polígon com el centre de la seva circumferència circumscrita.*

Definició 6.11. *Sigui r una recta. Diem que r és un eix de simetria del polígon si el polígon és simètric respecte r. Si a més r passa per dos dels vèrtexs del polígon, l'anomenam eix diagonal de simetria.*

Observació 6.12. Qualsevol eix de simetria d'un polígon passa pel centre del polígon.

6.2 Polígons regulars euclidians en el pla del taxi

Presentarem ara diferents resultats per tal de trobar quins polígons regulars ho són en ambdues geometries. Com ja hem comentat, només ens centrarem en estudiar si els polígons són equilàters en el pla del taxi, ja que feim servir els mateixos angles en les dues mètriques.

Proposició 6.13. *No existeix cap triangle regular en el pla euclidià que sigui regular en el pla del taxi.*

Demostració. Pel corol·lari 6.9, tenim que dos costats consecutius qualsevols han de ser simètrics respecte una línia paral·lela a $x = 0, y = 0, x = y$ o $x = -y$ per tal que les seves longituds siguin iguals, ja que les longituds euclidianes de dos costats consecutius d'un triangle euclidi regular són iguals i l'angle que formen no és un angle recte. Podem, doncs, suposar que dos dels costats del triangle seran simètrics respecte una d'aquestes línies. Llavors, tenim que cap dels altres dos eixos de simetria és paral·lel a $x = 0, y = 0, x = y$ o $x = -y$, de forma que el triangle no pot ser regular en el pla del taxi, ja que només tindrem dos costats amb la mateixa longitud. □

Observació 6.14. Tenint en compte que qualsevol triangle regular en el pla del taxi ha de ser equiangular, es pot demostrar fent servir aquesta proposició que no existeix cap triangle regular en el pla del taxi, ja que seria regular en el pla euclidià.

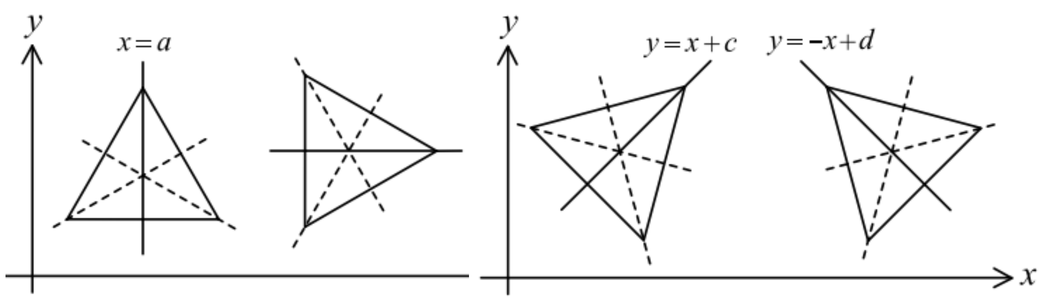


Figura 17: Els triangles regulars euclidians no ho són en taxigeometria.

Proposició 6.15. *No existeix cap hexàgon regular en el pla euclidià que sigui regular en el pla del taxi.*

Demostració. Sabem que un hexàgon regular en el pla euclidià és la unió de sis triangles regulars com podem veure a la Fig. 18 i, per la proposició 6.8, tenim que les longituds en el pla del taxi dels costats d'un triangle euclidià regular són iguals que les longituds en la geometria del taxi dels respectius costats paral·lels de l'hexàgon euclidià regular. Per tant, per la proposició 6.13, cap triangle euclidià regular és regular en la geometria del taxi, llavors cap hexàgon euclidià regular ho és en la geometria del taxi. □

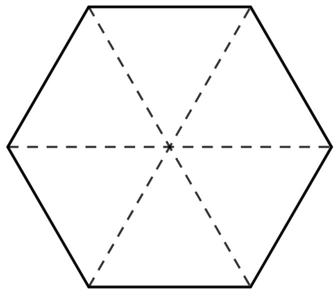


Figura 18: Un hexàgon és la unió de sis triangles equilàters en geometria euclidiana, llavors no és regular en la geometria del taxi.

Proposició 6.16. *Tot quadrilàter regular, és a dir, un quadrat, en el pla euclidià és també regular en el pla del taxi.*

Demostració. Fent servir el corol·lari 6.9, tots els costats d'un quadrilàter regular en el pla euclidià tenen la mateixa longitud en el pla del taxi, ja que tots ells tenen la mateixa longitud en el pla euclidià i formen angles rectes entre ells. □

Proposició 6.17. *Tot octàgon regular tal que un dels seus eixos diagonals de simetria és paral·lel a $y = 0, x = 0, y = x$ o $y = -x$ en el pla euclidià és també regular en el pla del taxi.*

Demostració. Demostrarem només el cas en que un dels eixos diagonals de simetria és paral·lel a $x = 0$. Sabem que qualsevol octagon euclidià regular té quatre eixos diagonals de simetria, i que si un d'ells és paral·lel a $x = 0$, llavors els altres són paral·lels a $y = 0, x = y$ i $x = -y$. Pel corol·lari 6.9, tenim que les longituds en la geometria del taxi de dos costats consecutius de l'octàgon euclidià regular són iguals, ja que aquests costats són simètrics respecte $x = 0, y = 0, x = y$ o $x = -y$ i tenen la mateixa longitud en la geometria euclidiana. Com això passa per dos costats consecutius qualsevol de l'octàgon amb un eix diagonal de simetria paral·lel a $x = 0$, obtenim que l'octàgon també és regular en el pla del taxi. □

Teorema 6.18. *No existeix cap polígon regular en el pla euclidià que també ho sigui en el pla del taxi, a part dels descrits en les proposicions 6.16 i 6.17.*

Demostració. Per a fer aquesta demostració separarem els polígons euclidians regulars en $(2n-1)$-gons i $2n$-gons on $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$:

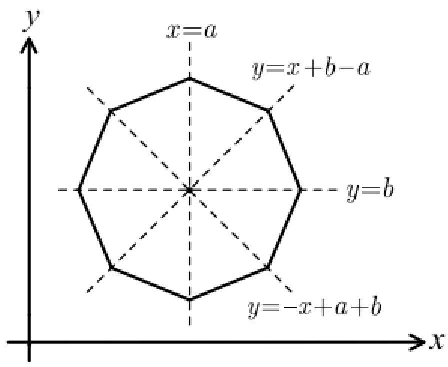


Figura 19: Exemple d'un octàgon regular euclidià que també ho és en el pla del taxi.

i) $(2n-1)$-gons regulars en el pla euclidià. En la proposició 6.13 hem demostrat el cas $n = 2$. Sigui $n > 2$. En aquest cas, qualsevol dels $(2n-1)$-gons té $2n-1$ eixos de simetria, que passen cada un pel centre del polígon i per un dels vèrtexs. Aleshores, existeix almenys un eix de simetria que no és paral·lel a $x = 0, y = 0, x = y$ o $x = -y$, de forma que almenys dos costats consecutius són simètrics respecte una línia no paral·lela a $x = 0, y = 0, x = y$ o $x = -y$. Llavors, fent servir el corol·lari 6.9 tenint també en compte que l'angle que formen aquests dos costats no pot ser un angle recte, aquests dos costats no tenen la mateixa longitud en la geometria del taxi. Per tant, cap $(2n-1)$-gon regular en el pla euclidià no ho és en el pla del taxi.

ii) $2n$-gons regulars en el pla euclidià. Ja hem demostrat els casos $n = 2$ i $n = 3$ en les proposicions 6.16 i 6.15, respectivament. A la proposició 6.17 hem demostrat uns casos concrets per a $n = 4$. Per tal de demostrar els altres, ens basta suposar que tenim un octagon tal que cap dels seus eixos diagonals de simetria és paral·lel a $x = 0, y = 0, x = y$ o $x = -y$, ja que llavors pel corol·lari 6.9 dos costats consecutius no tenen la mateixa longitud en la geometria del taxi.

   Ens falta demostrar el resultat per a $n > 4$. Ara, en un $2n$-gon regular tenim n eixos diagonals de simetria, llavors almenys un d'ells no és paral·lel a $x = 0, y = 0, x = y$ o $x = -y$. Fent servir un altre cop el corol·lari 6.9 i que l'angle que formen dos costats consecutius no és un angle recte, podem afirmar que dos costats consecutius no tenen la mateixa longitud en la geometria del taxi.

Per tant, hem demostrat el teorema per a tots els casos possibles. □

Aquesta mateixa comparació la podríem fer prenent els polígons que hem vist que són regulars en el pla del taxi i estudiar-ne la seva regularitat en el pla euclidià. Per tal de fer-ho, faríem servir una proposició similar a la 6.8 i un corol·lari similar a 6.9. Així, podríem veure els resultats següents:

Proposició 6.19. *Tot quadrilàter regular en el pla del taxi és també regular en el pla euclidià.*

Proposició 6.20. *Tot octàgon regular tal que un dels seus eixos és paral·lel a $y = 0, x = 0, y = x$ o $y = -x$ en el pla del taxi és també regular en el pla euclidià..*

Teorema 6.21. *No existeix cap polígon regular en el pla del taxi que també ho sigui en el pla euclidià, apart dels descrits en les dues proposicions anteriors.*

6.3 Existència de polígons regulars en el pla del taxi

Per a finalitzar aquest apartat, demostrarem l'existència de $2n$-gons regulars en el pla del taxi fent servir circumferències. Fins ara, hem estudiat si un polígon regular en el pla euclidià ho és en el pla del taxi, trobant alguns polígons regulars en el segon. En aquesta part final, estudiarem directament l'existència de polígons regulars en la geometria del taxi, centrant-nos principalment en els $2n$-gons.

Teorema 6.22. *Existeixen dos $2n$-gons regulars en el pla del taxi congruents entre si amb un segment donat com a costat.*

Demostració. Per a un $2n$-gon equiangular, tots els angles interiors mesuren $\pi(n-1)/(n)$ radians. Sigui ara un segment P_1P_2 en el pla del taxi de longitud d. És senzill veure que $n-1$ segments A_iA_{i+1}, on $2 \leq i \leq n$, de longitud d es poden col·locar consecutivament de forma que els angles interiors de dos costats consecutius sigui $\pi(n-1)/(n)$ radians fent servir circumferències de radi d i centre A_i. Si seguim construint segments $A'_iA'_{i+1}$, on $1 \leq i \leq n$, que siguin simètrics a A_iA_{i+1} respecte del punt mig d'A_1A_{n+1}, respectivament, acabem formant un $2n$-gon. Fent servir que la distància i l'angle en el pla del taxi es conserven mitjançant una simetria respecte un punt , trobem que tots els angles mesuren $\pi(n-1)/(n)$ radians i que $d = d(A_1, A_2) = d(A_i, A_{i+1}) = d(A'_i, A'_{i+1})$ $\forall 1 \leq i \leq n$. És a dir, hem usat que les reflexions i les translacions són simetries que pertanyen al grup d'isometries de la geometria del taxi. Així, hem construït un $2n$-gon regular en la geometria del taxi.

A més, procedint anàlogament amb el segment A_1A_2 fent servir la part que ha quedat a l'exterior del $2n$-gon que acabem de construir, podem construir un altre $2n$-gon regular. Aquests dos polígons regulars que hem construït són simètrics respecte el punt mig del segment A_1A_2, llavors són congruents. □

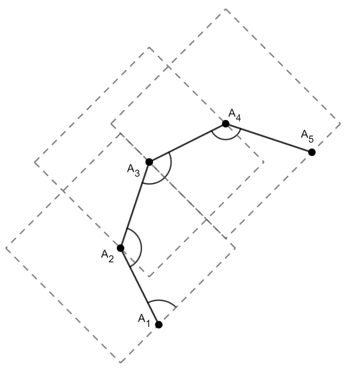


Figura 20: Part del mètode usat en la demostració del teorema 6.22 per a construir un octàgon.

Observació 6.23. Com ja hem comentat a l'inici de la secció i com es pot veure a la Fig. 20, fent servir el mètode seguit en aquesta demostració podem construir de forma senzilla $2n$-gons regulars en el pla del taxi a partir d'un segment donat. A més, aquest mètode és anàleg al que es pot fer servir per a construir $2n$-gons regulars en el pla euclidià.

7 La taxigeometria més enllà d'aquest treball

Com ja hem comentat en més d'una secció, podríem haver estudiat el grup d'isometries de la taxigeometria, però hem decidit no fer-ho per tal de centrar-nos en estudiar superfícies i algunes de les seves propietats i per tal que l'extensió del treball fos l'adequada. Aquesta no és la única cosa que hem deixat de banda sobre aquesta geometria. Per això, afegim ara aquesta secció en què comentarem diferents aspectes de la geometria del taxi que hem obviat durant el treball, però que són força interessants com per a tractar-los en futurs treballs o estudiar-los pel simple fet de conéixer i seguir descobrint.

El primer que un pot trobar a faltar en la discussió que hem fet és la demostració de que realment la geometria del taxi no és euclidiana; és a dir, que no satisfà el cinquè postulat. Aquesta es pot trobar a bibliografia molt diversa com [14, 17] i consisteix en provar que tota geometria euclidiana compleix el teorema SAS (side-angle-side, costat-angle-costat) i la geometria del taxi no.

Un punt interessant que no hem tocat consisteix en treballar en una trigonometria específica per a la taxigeometria. És a dir, en la geometria del taxi es poden crear uns angles específics per a aquesta i estudiar com es comporten les propietats trigonomètriques si es fan servir. A més, això afectaria a la equiangularitat dels polígons i a conceptes com el de la bisectriu, que hauríem de reestudiar.

També podríem haver-nos estés en una discussió sobre si les propietats dels centres dels triangles, relacionades amb distàncies als costats i vèrtexs, en geometria euclidiana es mantenen en el pla del taxi, així com també ens manquen l'ortocentre i l'excentre en la secció que hi hem dedicat.

A més, en aquest apartat hem calculat l'àrea d'un triangle relacionant les longituds de la base i de l'altura en la geometria euclidiana i la del taxi, però això mateix es podria haver fet amb el teorema d'Heron adaptat a la geometria del taxi tal com es fa a [25, 26]. S'ha descartat fer-lo servir en aquest treball perquè hem considerat que si un adapta el teorema d'Heron, seria interessant adaptar altres teoremes, com pugui ser el de Pitàgores fent servir els angles específics del pla del taxi, i continuar discutint només sobre les adaptacions de teoremes per a les dues geometries i l'equivalència de definicions.

En parlar de la paràbola, hem comentat la possibilitat de definir-la fent servir que una recta és la mediatriu de dos punts. Aquesta mateixa possibilitat es podria haver tengut en compte a l'hora de definir les còniques com a la definició 5.5 i veure'n com les representacions gràfiques varien. A més, podríem haver donat les equacions de les còniques i estudiar-ne les propietats en lloc de simplement centrar-nos en la disposició dels punts que les defineixen. D'aquesta manera, també podríem haver fet servir les equacions de les còniques i del con per a fer un estudi completament rigorós de les projeccions de les seccions del con i així poder observar-ne l'equivalència entre aquestes i les còniques.

Així mateix com l'estudi de les còniques es pot fer amb les equacions, a l'inici del treball podríem haver inclós la recerca de les equacions amb què es pot calcular la distància d'un punt a una recta o entre dues rectes en $\mathbb{R}^2$ i en $\mathbb{R}^3$, entre d'altres.

En la secció dels polígons, ens hem centrat en la comparació entre les geometries i hem presentat i demostrat un resultat general pels $2n$-gons, però, per exemple, podríem haver inclòs en la discussió l'existència de n-gons regulars amb n senar. A més, en lloc de treballar només els polígons regulars, l'estudi el podríem haver fet sobre polígons equilàters en la geometria del taxi i les seves propietats, sense exigir la equiangularitat.

Finalment, apart de treballar principalment en $\mathbb{R}^2$ i centrant-nos en superfícies, es pot discutir sobre la geometria del taxi en dimensions majors. Altrament, tot i que no és la mateixa geometria, és prou interessant esmentar la possibilitat d'analitzar la geometria isotaxi, introduïda a [22]. Aquesta, en lloc de situar-nos en el pla amb dos eixos perpendiculars, se n'introdueix un tercer formant un angle de $\pi/3$ radians.

8 Didàctica de la taxigeometria

8.1 Justificació de l'aplicació didàctica de la geometria

En aquesta secció, introduirem la nostra proposta didàctica sobre la geometria del taxi i com va funcionar la seva implementació en una aula d'institut. Abans però, parlarem d'aquells aspectes que s'han tingut en compte i com s'ha pensat la didàctica de la nostra proposta. Una gran font d'informació per a profunditzar sobre la didàctica de les matemàtiques i sobre com afrontar una classe de matemàtiques com a professor han estat [1, 2].

Com és ben sabut, la geometria és una part fonamental del currículum de l'assignatura de Matemàtiques durant tota l'etapa educativa amb els blocs curriculars de mesura i d'espai i forma. Aleshores, treballar geometria d'una forma atractiva per a l'alumnat és indispensable a l'hora de transmetre i mostrar la bellesa de les matemàtiques. En el nostre cas, no només ens centrem en treballar la geometria, sinó també en mostrar aquesta bellesa matemàtica creant una situació d'aprenentatge en què les alumnes es troben amb una geometria completament nova sobre la que elles mateixes podran trobar i construir el coneixement. A més, se'ls mostra així la possibilitat que tenen les matemàtiques de crear coneixement a partir d'uns axiomes o unes definicions segons es decideixin, que es contraposa a la generalitzada visió que les matemàtiques són només allò conegut i treballat a l'aula. És precisament aquest un dels motius pels que hem decidit basar aquesta proposta en la geometria del taxi: atreure l'alumnat a conèixer la geometria i les matemàtiques més enllà de la monotonia amb què sol ser tractada a l'aula d'un institut. Això ens permet treballar conceptes com la visualització i percepció espacial, juntament amb la creativitat per a adaptat allò conegut a un nou context i la possibilitat de crear enllaços ja no amb diferents disciplines de la vida quotidiana o acadèmica, sinó dins les pròpies matemàtiques i la pròpia geometria.

Enfocant-nos ja en la nostra proposta didàctica, considerem que la taxigeometria és un aspecte de les matemàtiques que es pot adaptar perfectament al nivell educatiu de batxillerat i que, a més, té una gran proximitat amb la vida quotidiana, tot i que pugui no semblar-ho. El principal motiu per què ho podem adaptar és perquè pot suposar una introducció a aspectes matemàtics, a vegades oblidats als currículums de les assignatures, com són la metodologia i el pensament matemàtic. Per a fer-ho, es proposa que les alumnes treballin de forma autònoma, de forma que la gestió de l'error i de les companyes està molt present, tant per part de l'alumnat com del professor. Llavors, es fa servir la possibilitat d'arribar a errors en la resolució de les activitats per tal de provocar dubtes i debats amb què poder arribar a resoldre les activitats amb èxit posteriorment. D'aquesta manera, fent servir la metodologia present a [3], hem basat la nostra proposta en un procés on les alumnes passaran per quatre etapes per a treballar el coneixement geomètric que ens ocupa: experimentació, descoberta, conceptuació i demostració o formalització. Com els noms de les etapes indiquen, l'alumnat primer explorarà conceptes ja coneguts en fer el canvi de geometria; a continuació, trobarà resultats dels que se'n podran treure unes conclusions per a després conceptualitzar-la a través de la comunicació i la compartició d'aquests resultats; acabant, en el casos que sigui possible, amb la conversió d'aquests resultats en una característica demostrada mitjançant un raonament lògic.

Per tal d'agilitzar la feina dins l'aula, hem pres la decisió que la gran majoria de les activitats que hem plantejat ho hem fet treballant la geometria del taxi en discret en lloc de fer servir el continu com hem fet durant la resta del treball. Aquesta decisió s'ha presa perquè els punts que conformen alguns dels llocs geomètrics que hem discutit durant el treball seran més senzills de visualitzar en el cas discret.

Finalment, un altre aspecte que considerem clau a l'hora de treballar les matemàtiques és no donar-ho tot per tancat, deixant així sempre alguna porta oberta per a que les estudiants puguin seguir aquest treball d'investigació i obtenció de coneixement, ja sigui aprofundint sobre allò treballat o fent servir els processos apresos en altres situacions d'aprenentatge. És per això que en aquesta proposta donarem peu a que l'alumnat rebi preguntes de les que possiblement no n'obtindrà cap resposta en haver acabat les sessions, però fent-lo veure que trobar-la implica continuar amb el procés que han encetat.

8.2 Proposta didàctica

En aquest apartat, explicarem en què consisteix la proposta didàctica per a treballar la taxigeometria en una aula d'institut. Ha estat pensada per a ser treballada en una aula de primer de batxillerat seguint el currículum de l'assignatura de matemàtiques de les Illes Balears [8]. Abans d'explicar la proposta i els seus objectius, cal que comentem que el nombre adequat d'alumnes per a portar-la a terme està entre els setze, el nombre ideal, i els vint.

La nostra proposta didàctica està dividida en tres sessions de cinquanta-cinc minuts, de manera que es comença amb una sessió introductòria sobre la geometria del taxi i alguns conceptes bàsics. Es continua amb una sessió de treball autònom guiat per part de l'alumnat per tal de descobrir per ell mateix conceptes de la geometria del taxi. S'acaba amb una sessió en què l'alumnat ha de mostrar i explicar els resultats trobats a la resta de companys. Als Annexos, un pot trobar les fitxes amb les activitats per a l'alumnat juntament amb una pàgina que poden fer servir per a fer dibuixos i proves.

8.2.1 Objectius

El principal objectiu d'aquesta proposta és treballar la geometria del taxi amb l'alumnat per tal que els serveixi per a descobrir la possibilitat de construir geometries no euclidianes, de forma que comprenguin que hi ha matemàtiques més enllà d'allò que es sol treballar a l'aula. Això es fa principalment mitjançant treball autònom guiat en què el propi alumnat construeix el coneixement geomètric per tal que la repercussió que la proposta pot tenir a l'hora de treballar altres branques de les matemàtiques i altres matèries sigui important. Per tant, un objectiu és desenvolupar el raonament matemàtic per tal de repercutir en situacions d'aprenentatge posteriors. A més, les activitats estan proposades de tal manera que, després de que l'alumnat descobreixi per ell mateix, treballi la formalització dels resultats trobats, així com la comprensió de com definir-los i generalitzar-los. També es pretén introduir aspectes del pensament matemàtic com són la formulació de definicions i l'estudi de l'equivalència entre diferents definicions quan el context en què es treballen canvia. Finalment, un darrer objectiu de la nostra proposta és enfortir la idea que el coneixement s'adquireix treballant de forma conjunta, on cada un comparteix la seva forma d'afrontar el problema per tal d'arribar a una solució.

8.2.2 Primera sessió

La primera sessió està enfocada en la introducció i comprensió de la nova geometria. Així, abans de definir la distància del taxi i la seva respectiva geometria, s'introdueix la definició de geometria euclidiana per tal de contraposar-les. Per tal de fer-ho més comprensible, es donen exemples de com fer servir d_T per a calcular la distància entre dos punts. Després d'aquesta petita introducció d'uns deu minuts de durada, es divideix l'alumnat per parelles i comencen a treballar amb la fitxa d'aquesta primera sessió. Les activitats a fer són quatre amb una activitat extra que es pot treballar una vegada la combinatòria ja ha estat donada a classe. Cada una d'elles està pensada per a durar uns deu minuts, començant amb una petita discussió amb l'alumnat per a arribar de forma conjunta a la definició de cada un dels llocs geomètrics que es treballen i, després, se'ls deixa fer la corresponent activitat.

La primera activitat consisteix en trobar que el camí de mínima distància que uneix dos punts donats no és únic en la taxigeometria i comparar-ho amb el cas de la geometria euclidiana.

En la segona activitat es treballa la definició de mediatriu, on han de trobar-la pels casos que se'ls donen i dir quin d'ells coincideix amb el cas euclidià. A més, se'ls demana que trobin el conjunt de punts a mínima distància d'aquests casos i fer-ne el símil amb el punt mitjà euclidià.

En la tercera activitat, s'introdueix la circumferència.

Finalment, en la quarta activitat es demana que trobin la forma que pot tenir una el·lipse i de què depèn aquesta, sent la primera activitat en que la formulació matemàtica entra en joc.

A més, s'inclou una actvitat extra on els alumnes poden, una vegada han donat el temari de combinatòria, respondre una de les qüestions obertes que queden en fer la primera activitat: quants de camins de mínima distància hi ha entre dos punts donats?

8.2.3 Segona sessió

La segona sessió consisteix en treball autònom per grups on cada un d'ells investigarà sobre un tema diferent dins la taxigeometria. Tota la feina a fer durant aquesta sessió és per part de l'alumnat de forma completament autònoma, deixant la tasca del professor com a una ajuda per a resoldre dubtes i engrescar els estudiants a continuar amb la seva corresponent investigació. La sessió està pensada per a durar uns cinquanta-cinc minuts amb quatre grups de treball de quatre o cinc persones cada un. Les activitats a fer per a cada grup no estan pensades per a ser totes resoltes en una sola sessió, sinó que l'objectiu és que cada grup pugui treballar uns certs conceptes dins la geometria del taxi durant una sessió i que la resta de la feina quedi oberta per a qui en tengui interès o per a aquells que acabin la feina objectiu ràpidament. A més, és una manera de no deixar cap grup sense feina si són capaços de resoldre les activitats que si estan programades per a ser resoltes en una sessió. Explicarem per sobre què investiga cada grup i allò que està pensat per a ser trobat en la sessió.

El primer grup discuteix sobre la intersecció de circumferències en el pla del taxi. Aquí, l'objectiu és que descobreixin per ells mateixos que el nombre de punts de tall de dues circumferències pot ser > 2 i els casos en què aquest fet ocorre. A més, s'obri la porta a que formalitzin aquest resultat i a que discuteixin sobre el concepte de circumferències tangents en taxigeometria.

El segon grup es centra en les còniques, on la finalitat es que trobin les formes que pren la hipèrbola i de que depenen aquestes. També se'ls ofereix treballar el concepte de paràbola, comparar les dues definicions per a les còniques que hem donat a la definició 5.5 per a veure'n la no equivalència i trobar la forma que pren un con en taxigeometria.

El tercer grup explora el circumcentre, l'incentre i el baricentre d'un triangle amb la intersecció de les circumferències circumscrites i inscrites en ell. Depenent del grup, en una sessió es podrà treballar només un dels centres o dos d'ells, per aquest motiu estan ordenats de tal manera que el grup pugui discutir sobre els punts de tall d'una de les circumferències amb el triangle encara que només treballin un d'ells.

Finalment, el darrer grup relaciona la distància euclidiana amb la del taxi fent servir trigonometria després de trobar com un pot calcular la distància més curta entre dos punts. Amb aquesta informació, el grup descobreix el valor d'una constant π_T definida així com han definit π. Si encara els sobra temps, fent servir la relació que han trobada al principi, poden trobar l'àrea de diferents triangles per a generalitzar-ne una fórmula i discutir sobre la regularitat d'alguns polígons regulars euclidians que se'ls donen.

8.2.4 Tercera sessió

Per acabar amb la proposta didàctica tenim una sessió de també uns 55 minuts de durada on els alumnes comparteixen amb els seus companys allò descobert a la sessió anterior. Per tal de fer-ho, es fan quatre grups, cada un d'ells format per, com a mínim, una persona dels quatre grups de la sessió anterior. Una vegada dividits de nou, cada un dels integrants del nou grups ha d'explicar els resultats a què van arribar a la segona sessió i el procés seguit per tal de poder arribar-hi. Cal tenir en compte que l'explicació que doni cada un dels alumnes no convé que excedeixi els deu minuts per tal de que tots els integrants del grup pugin ser partícips de l'activitat.

8.2.5 Continguts i competències

Com bé es sap, els continguts que l'alumnat treballa en la nostra proposta no estan directament inclosos en el currículum de l'assignatura de Matemàtiques I de Batxillerat de les Illes Balears, però d'una manera o d'una altra si que es treballen les diferents competències específiques que s'hi poden trobar a aquest currículum.

Encara que els continguts no estiguin dins el currículum, hi ha activitats a la proposta que serveixen per a treballar-ne algun dels que hi són. Per exemple, l'activitat extra serveix per a fer feina sobre la combinatòria. A més, el treball sobre superfícies en taxigeometria implica l'estudi de formes geomètriques en dues dimensions, juntament amb la utilització de la modelització geomètrica.

Respecte el treball de les competències específiques, aquesta proposta destaca pel seu treball en formular i/o investigar per tal de generar nou coneixement matemàtic, sempre verificant-ne la validesa dels resultat obtinguts. També és destacable el paper del treball en grups, implicant així l'ús de destreses personals i socials, i l'enfrontament amb l'error durant el procés d'aprenentatge. A més, s'inclou la tercera sessió en què la comunicació de les idees matemàtiques de forma clara i rigorosa juguen un paper fonamental.

8.3 Anàlisi de la implantació de la proposta

Ens centrarem ara en fer un anàlisi del funcionament de la proposta didàctica quan aquesta es va a dur a terme amb alumnes de 1r de batxillerat científic biològic de l'IES Alcúdia, a Mallorca. Aquesta classe està formada per denou alumnes, devuit dels quals van participar a la proposta, entre els que hi ha quatre nois i 14 noies, dels quals cap d'ells cursa l'assignatura de dibuix tècnic. Farem primer un petit resum de com va funcionar la proposta amb l'alumnat i, posteriorment, en comentarem algunes respostes i discussions que considerem destacables. Abans, comentem que no vam treballar l'activitat extra per falta de temps i perquè les alumnes encara no han treballat combinatòria, tot i que el seu professor potser empra l'exercici per a introduir aquest tema a l'aula.

8.3.1 Diari de les sessions

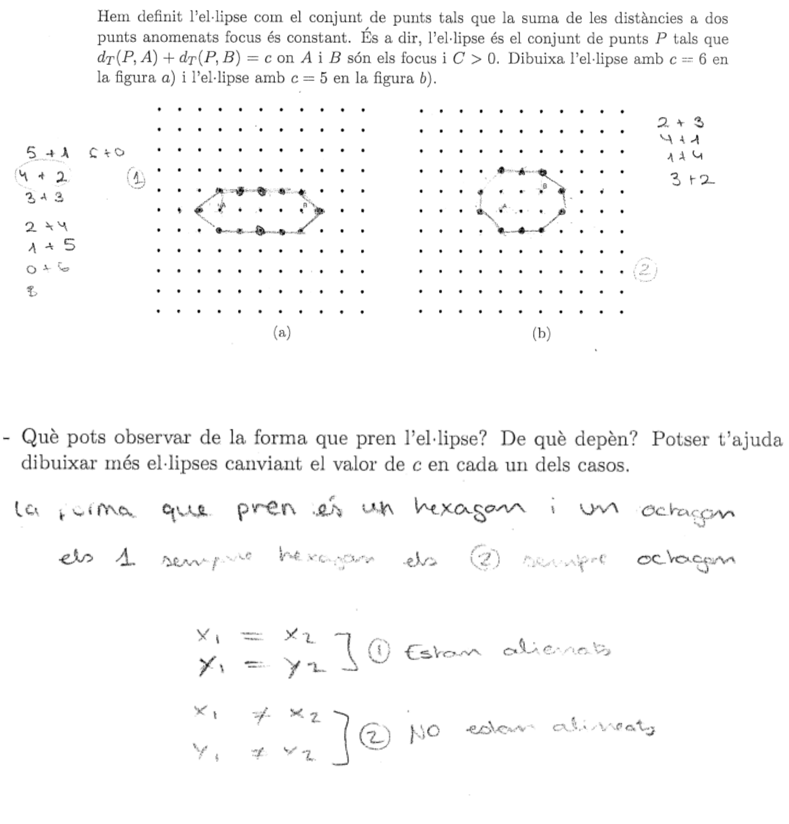
La primera sessió, la introductòria, es va acabar realitzant en dues sessions separades, ja que l'alumnat va mostrar certes dificultats en la realització de les activitats dos, tres i quatre d'aquesta sessió. Principalment, se'ls va fer complicat adaptar-se a la nova situació en què havien de comptar la distància entre punts d'una manera que no havien fet servir mai. Tot i així, una vegada acabades les dues classes que es van fer servir per a fer la sessió introductòria, la sensació entre les estudiants ja no era de desconeixença absoluta, sinó que es van familiaritzar amb la taxigeometria.

Passant a la segona sessió, es va notar una gran diferència entre l'habilitat que va tenir cada grup per a fer front a les activitats plantejades. Recordem que hem comentat en la secció anterior que les activitats grupals tenien uns exercicis objectiu i després hi vam afegir exercicis per a poder continuar treballant en cas que l'alumnat els resolgués ràpidament. Així, d'aquesta segona sessió cal comentar que els grups un i quatre van treballar les qüestions esperades i van arribar a respostes i conclusions adequades, excepte per qualcuna pregunta en concret. El grup dos va trobar l'activitat de la hipèrbola complicada, però amb l'ajuda d'un geogebra que se'ls va aportar (el podeu trobar a Llista de geogebres) van poder visualitzar els resultats que els costava trobar havent de dibuixar-ho per elles mateixes, fins poder acabar aquest exercici. En el cas del grup tres, aquest va mostrar més dificultats, no havent pogut acabar l'activitat del circumcentre tot i l'ajuda que sempre vam intentar donar tant com el professor com jo mateix. Per acabar amb aquesta sessió, trobem interessant comentar que es va veure les alumnes amb ganes de continuar treballant les activitats una altra classe, també convertint aquesta sessió en dues classes de cinquanta-cinc minuts en lloc de deixar-ho en una. Es va decidir no fer per manca de temps disponible a l'aula, juntament amb la consideració que dur a terme la tercera sessió ens va semblar més interessant que continuar amb aquesta segona i deixar de banda la tercera.

Finalment, la tercera sessió es va decidir canviar per complet. El motiu va ser que el grup tres no tenia pràcticament resultats a mostrar a les seves companyes en mesclar els grups per a procedir amb la sessió així com estava plantejada. Per aquest motiu, en lloc de mesclar els grups així com expliquem a la secció anterior vam optar per a fer als grups fer una presentació grupal improvitzada d'uns deu minuts sobre la feina feta en què també vam discutir amb cada un dels grups sobre aquelles activitats que no van realitzar. Així, van poder mostrar-se els uns els altres allò que van treballar i, a més, raonar sobre els exercicis que els faltaven per a resoldre. Per tal de fer aquesta discussió final vam fer servir les eines que comentarem tot seguit. Durant aquesta darrera sessió, l'alumnat no va poder mostrar de forma tan evident l'assoliment dels coneixements adquirits, però les discussions que vam tenir mostraren la seva comprensió sobre allò treballat tant per elles mateixes com per les companyes.

8.3.2 Discussions destacables

Passem ara a discutir dues de les respostes i/o raonaments interessants que van sorgir durant les quatre sessions. Comencem parlant sobre la resposta que una parella va donar a l'activitat quatre de la primera sessió, la de l'el·lipse. Com podem veure a la Fig. 21, aquesta parella va fer servir un mètode interessant per tal de trobar les el·lipse, que consisteix en des d'un dels focus trobar tots els punts a una distància fixada d menor que la constant c per a trobar els punts a distància $c-d$ de l'altre focus. Aquest algorisme, tot i ser més farragós que fer servir la intuició, va facilitar la feina a aquesta parella i a alguna altra per tal de trobar les el·lipses; per aquest motiu ens sembla interessant que el facin servir i poder tenir-ne constància. A més, aquest mateix grup va provocar una discussió a l'aula sobre com contestar la pregunta sobre la forma que pren l'el·lipse. Les alumnes van saber veure que en un cas l'el·lipse prenia la forma d'un hexàgon euclidià i en l'altre, d'un octàgon euclidià i que aquesta forma depèn de com estan col·locats els punts, però no sabien com explicar-ho de forma que ho poguessin mostrar amb la seva resposta. Així, a partir dels dubtes d'aquesta parella, va sorgir un debat en què les alumnes van poder escriure de forma formal al que a vegades es diu que dos punts estiguin "alineats"(a falta d'un o en el cas d'estar alineats en la seva resposta) i entendre així de què depèn realment la forma de l'el·lipse fins poder escriure la resposta com es veu a la Fig. 21.


Hem definit l'el·lipse com el conjunt de punts tals que la suma de les distàncies a dos punts anomenats focus és constant. És a dir, l'el·lipse és el conjunt de punts P tals que $d_T(P,A) + d_T(P,B) = c$ on A i B són els focus i $C > 0$. Dibuixa l'el·lipse amb $c = 6$ en la figura a) i l'el·lipse amb $c = 5$ en la figura b).

- Què pots observar de la forma que pren l'el·lipse? De què depèn? Potser t'ajuda dibuixar més el·lipses canviant el valor de c en cada un dels casos.

la forma que pren és un hexagon i un octagon
els 1 sempre hexagon els 2 sempre octagon

$x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$] 1 Estan alineats

$x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$] 2 NO estan alineats

Figura 21: Part de les respostes d'una parella a l'activitat quatre de la primera sessió.

Un altre aspecte que considerem destacable està relacionat amb l'activitat del primer grup, els que treballen sobre la intersecció de dues circumferències. Mentre les integrants del grup cercaven les respostes a les preguntes que se'ls presentaren, es van dedicar a investigar sobre la intersecció de quadrats euclidians, portant-les a dibuixar situacions com les que es poden veure a la Fig. 22. Aquesta resposta va portar a una discussió molt interessant en què elles mateixes foren capaces d'arribar a la conclusió que aquesta representació no era vàlida, ja que tot i que els dibuixos tenien forma de circumferència en taxigeometria no es podien considerar tals perquè l'havient rotat. Així, van veure com en la geometria del taxi no es pot rotar una circumferència, ja que aquesta deixa de ser-ho, tot i que no era una de les idees que s'havien plantejat per a la proposta didàctica.

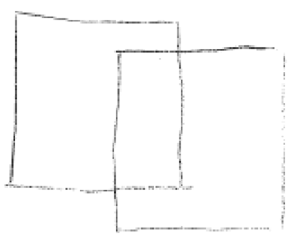


Figura 22: Una de les respostes del primer grup sobre com pot ser la intersecció de dues circumferències va donar peu a una discussió sobre les rotacions en la geometria del taxi.

8.3.3 Alternatives per a la proposta

Per tot el que hem comentat, dedicarem aquest darrer apartat a proposar eines per tal de fer que la proposta sigui adaptable a altres nivells i evitar situacions com la del grup tres en que no foren capaces de completar els exercicis esperats. Apart d'això, també considerem la possibilitat d'adaptar la proposta a quatre sessions tal com vam fer en implementar-la, o fins i tot passar-la a cinc per a que la segona sessió també es treballi en dues classes. Tot i així, aquests canvis en la durada de la proposta dependran molt de les alumnes, de la quantitat d'activitats de l'activitat grupal que es volen realitzar i de les eines que es facin servir. Pel que fa a les eines, aquestes poden ser útils per a treballar la geometria del taxi en diversos cursos seguint la mateixa proposta que hem fet en aquest treball i per a agilitzar la resolució de les activitats per part de l'alumnat durant el treball autònom. Principalment, es tracta de fer servir el geogebra en aquest cas, però qualsevol eina de representació gràfica ens pot ser útil, per a agilitzar les discussions de la segona sessió, encara que també poden servir per a les tres darreres activitats de la sessió introductòria.

Per a acabar, comentarem per sobre les eines que poden complementar el treball de les alumnes. Les podem dividir en dos tipus: geogebres de construcció dinàmica amb què l'alumnat pot estudiar el comportament d'algunes figures en canviar uns paràmetres i geogebres que representen certes figures on les estudiants poden fer aparèixer alguns dels resultats que se'ls demanen per a fer-ne posteriorment la discussió. Així, a Llista de geogebres un pot trobar aquestes eines. La primera llista són els geogebres dinàmics, que poden servir per a treballar la mediatriu, la circumferència, l'el·lipse, la intersecció de circumferències i la hipèrbola en les respectives activitats. En la segona llista, trobem representacions que poden servir per a treballar les activitats del grup 3, que són aquelles que calen d'una major agilitat en la comprensió espacial per tal de trobar els conjunts de punts que es demanen. Per aquest motiu, es poden presentar al grup els geogebres amb els triangles i donar-les l'opció de fer veure les mediatrius, medianes i bisectrius on correspongui, deixant així la feina en dibuixar les circumferències on calgui i discutir les qüestions que se'ls demanen. Cal recordar que la idea dels dos tipus de geogebres és que s'usin per a facilitar el treball a l'alumnat si se'l veu amb complicacions, però el propi procés de cercar les solucions per elles mateixes és part de la nostra proposta.

8.3.4 Conclusions de la implementació de la proposta

En conclusió, podem dir que, en general, les sessions van provocar interès en l'alumnat per la novetat que suposava treballar en una nova geometria i fent servir una definició de distància que els es propera tot i no ser-ne conscients. No podem deixar de dir que el fet de necessitar dues sessions de cinquanta minuts per tal d'acabar la sessió introductòria, pensada per a ser treballada en cinquanta-cinc minuts, evidencia la complexitat que va suposar per les alumnes la introducció de la taxigeometria. A més, pel mal funcionament de l'activitat del grup tres, es va haver de reestructurar la tercera sessió.

També hem determinat que, tot i que les estudiants arribassin, en general, a les respostes que es cercava, potser el plantejament de la nostra proposta didàctica està massa enfocat en la representació de superfícies. Això dificulta el treball a les alumnes que no cursen l'assignatura de dibuix tècnic o que no tenen tan desenvolupada la capacitat espacial. Aquest fet pot haver portat l'alumnat a més dificultats de les esperades, però en cap moment impossibilita ni dificulta en excès la realització de les activitats proposades.

Per tant, les estudiants es van mostrar molt interessats per la geometria del taxi i els conceptes treballats, assolint els objectius marcats, tot i necessitar una sessió de treball més de les originalment plantejades i la dificultat que el grup tres va mostrar.

Conclusions

Aquest treball ha abordat principalment dos temes, sent aquests una discussió matemàtica sobre algunes superfícies planes en la geometria del taxi i, posteriorment, la presentació d'una proposta didàctica orientada a alumnat de primer de batxillerat basada en aquesta mateixa discussió.

Pel que fa a la part matemàtica del treball, hem explicat de forma resumida d'on provenen les geometries euclidianes i hem introduït els conceptes necessaris per a poder definir la geometria del taxi. Una vegada ja definida la geometria que ens ocupa, hem necessitat d'una secció on es discuteixen conceptes com la mediatriu per tal de posteriorment poder fer l'estudi sobre superfícies planes en què el treball es centra. En aquesta secció introductòria ja hem obtingut resultats força interessants quan són contraposats als casos euclidians, com pugui ser el fet que la mediatriu no té per què ser una recta en la taxigeometria.

En la discussió central, hem decidit parlar de tres superfícies planes: els triangles, les còniques i els polígons regulars. En parlar dels triangles, ens hem enfocat en estudiar el comportament del baricentre, el circumcentre i la seva àrea. Aquí, hem arribat a diferents resultats, entre els que en destacarem alguns. Per exemple, en la geometria del taxi no sempre existeix el circumcentre d'un triangle, la intersecció del triangle amb la seva circumferència inscrita o circumscrita pot està formada per més de tres punts i el baricentre pot ser un punt, un segment o un pla. A més, hem trobat una relació entre l'àrea d'un triangle en la geometria euclidiana i l'àrea d'aquest mateix triangle en la geometria del taxi.

Respecte l'estudi de les còniques que hem fet, aquest s'ha basat principalment en trobar les representacions gràfiques d'elles fent servir dues definicions. La primera d'elles implica només la distància entre punts i la segona, implica també la distància entre un punt i una recta. Aquesta diferència ha provocat que, tot i que aquestes definicions siguin equivalents en el cas euclidià, la situació canviï completament en la geometria del taxi. En el cas de la paràbola aquesta diferència no existeix perquè qualsevol definició d'ella implica la distància entre un punt i una recta, però l'hem aprofitada per a parlar de la possibilitat de tractar qualsevol recta en la taxigeometria com a la mediatriu de dos punts donats. A més, en treballar la circumferència hem trobat que la intersecció de dues d'elles pot tenir qualsevol nombre de punts, en lloc del conjunt $\{0, 1, 2\}$ de la geometria euclidiana. També hem aprofitat per a discutir la representació d'un con i la possibilitat d'estudiar les còniques com a projeccions de seccions d'aquest.

Per a acabar amb la part matemàtica, hem treballat els polígons regulars des de dues perspectives diferents després d'introduir uns resultats necessaris per a aquestes dues discussions. Primer, hem estudiat quins dels polígons regulars euclidians ho són també en la taxigeometria, trobant que només el quadrat euclidià i alguns octàgons regulars euclidians també ho són en la geometria del taxi. Després, hem mostrat l'existència de $2n$-gons regulars en el pla del taxi. Per a acabar, volem dir que en aquesta secció, la única com a tal en el treball en què s'ha fet, es treballa cercant demostracions formals dels resultats presentats en lloc de fer un estudi de les representacions gràfiques de les figures. A més, aquesta mateixa forma d'estudiar els polígons regulars ens ha acabat aportant un mètode per tal de dibuixar $2n$-gons regulars en la geometria del taxi, en analogia al conegut en la geometria euclidiana.

Abans d'entrar en les conclusions que hem extretes de la part relacionada amb la nostra proposta didàctica, trobem necessari comentar que hi ha moltes formes d'estudiar la geometria del taxi i molts temes diversos que en aquest treball no s'ha abordat, però els objectius que plantejàvem a l'inici del treball ens han prendre la decisió de triar els temes que tractem i aquesta forma de tractar-los.

Respecte les conclusions a què hem arribades després de crear i implementar la proposta didàctica, podem destacar la dificultat que ens ha suposat crear una proposta didàctica tractant un tema que es troba totalment fora del currículum de l'assignatura de matemàtiques de batxillerat cercant no deixar de banda les competències que si es troben dins aquest. Tot i així, en implementar la proposta en el primer de batxillerat científic biològic de l'IES Alcúdia (Mallorca) hem quedat molt satisfets, ja que s'ha pogut notar que la proposta va crear un gran interès en les alumnes. A més, com hem vist en destacar algunes de les situacions que es van viure, han sorgit discussions que van més enllà del que pròpiament hem discutit en el treball, però amb un gran atractiu matemàtic com és la invariabilitat sota rotacions que caracteritza la geometria euclidiana i no es manté en la taxigeometria. Apart d'això, l'alumnat es va mostrar sorprès per alguns dels resultats trobats durant les sessions i també es van interessar per aspectes matemàtics de què no havien pensat abans.

En conclusió, podem dir que els objectius que ens vam plantejar a l'hora de començar aquest treball s'han complert de forma satisfactòria, donant-nos la possibilitat d'investigar sobre les superfícies planes en la geometria del taxi i crear una proposta didàctica per tal que alumnes de batxillerat puguin treballar-les. A més, la implementació d'aquesta proposta ens ha proporcionat també aquelles conclusions que desitjàvem.

Referències

[1] Alsina, C., Aubanell, A., and Burgués Flamarich, C. (2019). *Tres professors de matemàtiques: com fer estimar i aprendre bé les matemàtiques*. Rosa Sensat.

[2] Aubanell, A. (2013). Carta a un professor novell. `https://feemcat.org/anton-aubanell/`.

[3] Aubanell, A. (2015). Orientacions pràctiques per a la millora de la geometria. `https://xtec.gencat.cat/web/.content/alfresco/d/d/workspace/SpacesStore/0035/14114b3a-7752-46c4-9ccb-46542a9b680c/quaderns31orientacions.pdf`.

[4] Berger, R. I. (2015). From circle to hyperbola in taxicab geometry. *The Mathematics Teacher*, 109.

[5] Burago, D. (2001). *A Course in metric geometry*. American Mathematical Society.

[6] Coxeter, H. S. M. H. S. M. (1998). *Non-euclidean geometry*. Mathematical Association of America, 6th ed. edition.

[7] Dreiling, K. M. (2012). Delving deeper: Triangle construction in taxicab geometry. *The Mathematics Teacher*, 105.

[8] GOIB (2022). Currículum de matemàtiques de batxillerat a les illes balears. *Decret 33/2022* `https://intranet.caib.es/sites/lomloe/ca/batxillerat/archivopub.do?ctrl=MCRST12866ZI387376&id=387376`.

[9] Hanson, J. R. (2014). Regular polygons in taxicab geometry. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 45.

[10] Ho, Y. P. and Liu, Y. (2019). Parabolas in taxicab geometry. *Missouri Journal of Mathematical Sciences*, 8.

[11] Iny, D. (1984). Taxicab geometry: Another look at conic sections. *Pi Mu Epsilon Journal*, 7(10):645–647.

[12] KAYA, R. (2006). Area formula for taxicab triangles. *Pi Mu Epsilon Journal*, 12(4):219–220.

[13] Krause, E. F. (1988). Taxicab geometry : an adventure in non-euclidean geometry. *The Mathematical Gazette*.

[14] Krause, E. F. (2020). Taxicab geometry. *The Mathematics Teacher*, 66.

[15] Laatsch, R. (1982). Pyramidal sections in taxicab geometry. *Mathematics Magazine*, 55.

[16] Lee, N.-H. (2020). *Geometry: from Isometries to Special Relativity*. Springer International Publishing, 1st ed. 2020. edition.

[17] Millman, R. and Parker, G. (1981). Geometry: a metric approach with models. *Journal of Chemical Information and Modeling*.

[18] Milner, W. (2007). In manhattan π is 4: Taxicab geometry. *Mathematics in School*, 36:33–34.

[19] Moser, J. M. and Kramer, F. (1982). Lines and parabolas in taxicab geometry. *Pi Mu Epsilon Journal*, 7(7):441–448.

[20] Reynolds, B. E. (1980). Taxicab geometry. *Pi Mu Epsilon Journal*, 7(2):77–88.

[21] Schattschneider, D. J. (1984). The taxicab group. *The American Mathematical Monthly*, 91.

[22] Sowell, K. O. (1989). Taxicab geometry-a new slant. *Mathematics Magazine*, 62.

[23] Thompson, K. (2011). The nature of length, area, and volume in taxicab geometry. https://arxiv.org/abs/1101.2922.

[24] Çolakoğlu, H. and Kaya, R. (2008). Regular polygons in the taxicab plane. *KoG*.

[25] Özcan, M. and Kaya, R. (2003a). Area of a triangle in terms of the taxicab distance. *Missouri Journal of Mathematical Sciences*, 15.

[26] Özcan, M. and Kaya, R. (2003b). Area of a triangle in terms of the taxicab distance. *Missouri Journal of Mathematical Sciences*, 15.

Annexos

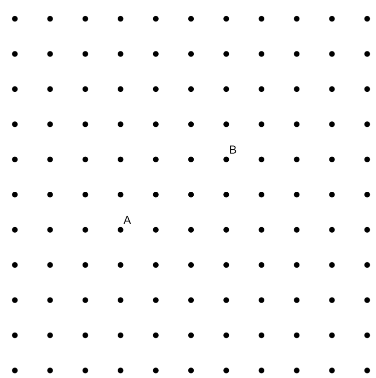
Primera sessió

Activitat 1: camins entre punts

Respon a les següents preguntes:

- Si tenim dos punts, treballant en geometria euclidiana (la que sempre hem fet servir), quin és el camí més curt entre ells? És únic? En cas que no sigui únic, fes un dibuix on es vegi que el camí més curt entre dos punts no és únic.

- Si ara passem a la taxigeometria, quin és el camí més curt entre els punts A i B de la següent imatge? Dibuixa'l.

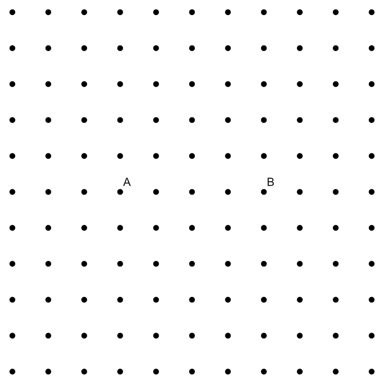


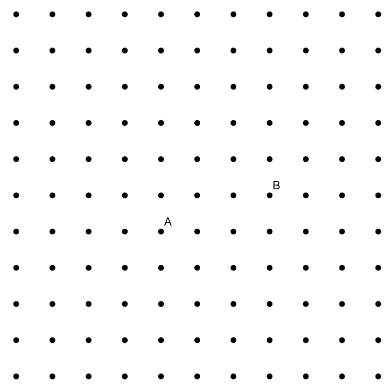
És únic aquest camí? En cas que no ho sigui, dibuixa a la imatge un altre camí que uneixi A i B recorrent la mínima distància possible.

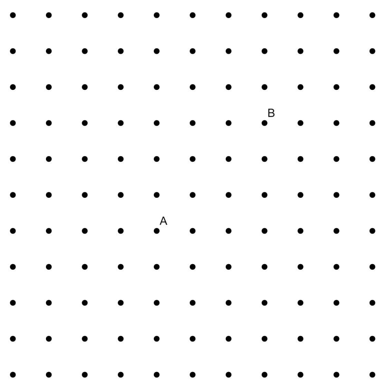
Activitat 2: la mediatriu

Hem definit la mediatriu d'A i B com els punts que estan a la mateixa distància d'A i de B; és a dir, els punts P tals que $d_T(A,P) = d_T(B,P)$.

- Assenyala els punts que formen la mediatriu en cada un dels casos següents:





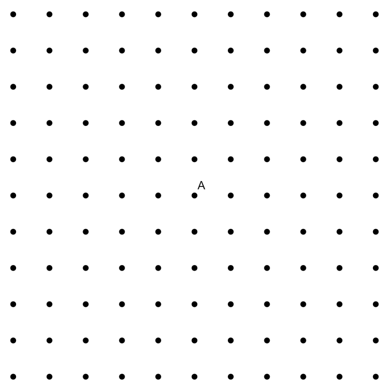


En quins casos la mediatriu en geometria euclidiana i en la geometria del taxi coincideixen?

- Ara, assenyala amb un color diferent els punts que es troben a la mínima distància d'A i de B en els casos anteriors. Podries relacionar aquest concepte amb el de punt mig de geometria euclidiana? Fixa't primer en els casos en què la mediatriu en les dues geometries coincideix.

Activitat 3: la circumferència

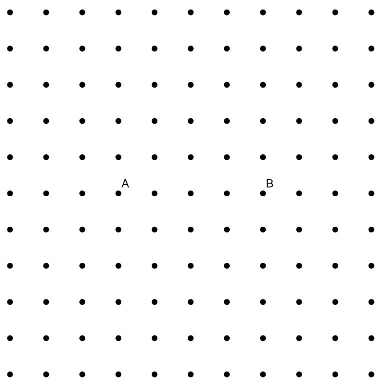
Hem definit la circumferència com el conjunt de punts que es troben a una mateixa distància, anomenada radi, d'un punt, anomenat centre. És a dir, una circumferència és el conjunt de punts P tals que $d_T(P, C) = r$ on C és el centre i r, el radi. Dibuixa les circumferències de centre A i radi 1 i 3 sobre la següent figura:



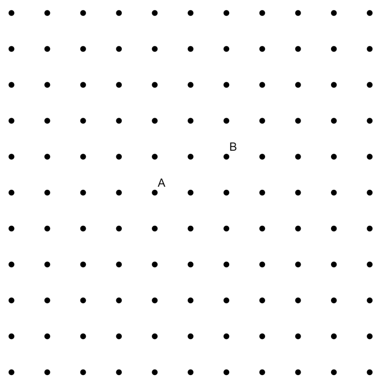
Afecta el valor del radi a la forma que té la circumferència en geometria del taxi? Ocorre el mateix en geometria euclidiana?

Activitat 4: L'el·lipse

Hem definit l'el·lipse com el conjunt de punts tals que la suma de les distàncies a dos punts anomenats focus és constant. És a dir, l'el·lipse és el conjunt de punts P tals que $d_T(P, A) + d_T(P, B) = c$ on A i B són els focus i $C > 0$. Dibuixa l'el·lipse amb $c = 6$ en la figura a) i l'el·lipse amb $c = 5$ en la figura b).



(a)



(b)

- Què pots observar de la forma que pren l'el·lipse? De què depèn? Potser t'ajuda dibuixar més el·lipses canviant el valor de c en cada un dels casos.

- Què passaria si anam ajuntant molt els focus entre ells? Ocorre el mateix en la geometria euclidiana? El valor de c afecta el que passa?

Activitat extra: Nombre de camins de mínima distància

Ja hem vist que els camins de distància mínima entre dos punts no són únics, però això ens duu a diverses qüestions: quants de camins com aquests hi ha entre dos punts? De què depèn el nombre de camins? Podem saber el nombre de camins de mínima distància que hi ha entre dos punts només coneixent els dos punts? Segueix les següents indicacions per a intentar respondre aquestes preguntes. Fer dibuixos et pot servir per a visualitzar-ho.

- Quants de possibles camins de mínima distància hi ha entre dos punts separats per una unitat?

- I si els punts estan separats dues unitats? El nombre de camins de mínima distància depèn de com col·loquem els dos punts? Si depèn de com els col·loquem, explica els diferents casos.

- Si ara els separem 3 unitats, com varia el nombre de camins de mínima distància? Tingues en compte només el cas en que el nombre de camins sigui el màxim possible.

- Relaciona les respostes de les tres preguntes anteriors, hi veus qualcun patró? Et pot ajudar trobar la diferència de nombre de camins que trobem cada vegada que augmentem en una unitat la distància entre els punts.

- Quants de camins de mínima distància entre dos punts a distància n hi ha? De què depèn aquest nombre?

Grup 1: Intersecció de circumferències

A la classe anterior vam veure com és una circumferència en la geometria del taxi. En aquesta, ens centrarem en veure com es tallen dues circumferències. Primer de tot, recordem que vam definir una circumferència de centre C i radi r com els punts P tals que $d_T(P, C) = r$. Responeu les següents preguntes de la forma més precisa i formal que pogueu, fent servir dibuixos per a justificar i explicar les respostes si cal:

- Explicau com és la intersecció de dues circumferències de centres C_1 i C_2 i radis r_1 i r_2 en geometria euclidiana: quants de punts de tall poden tenir dues circumferències? De què depèn el nombre de punts de tall? Doneu un exemple de cada cas que descrigueu.

- Per a cada un dels casos que heu descrit, dibuixau-lo en la geometria del taxi. De què depenen ara el nombre de punts de tall?

- Els casos que acabeu de dibuixar són les úniques maneres en què es poden tallar dues circumferències en la taxigeometria? Justificau la vostra resposta.

- Redactau com és la intersecció de circumferències en la taxigeometria: quants de punts de talls poden tenir dues circumferències i de què depèn el seu nombre?

- Quan diem en geometria euclidiana que dues circumferències són tangents, és a dir, quants de punts de tall tenen dues circumferències tangents? Quina relació han de complir aquestes circumferències per a ser tangents?

- En quins casos dels que heu trobat en geometria del taxi les circumferències són tangents? Quants de punts de tall trobem? Feu servir la relació que acabeu de trobar per a definir circumferències tangents.

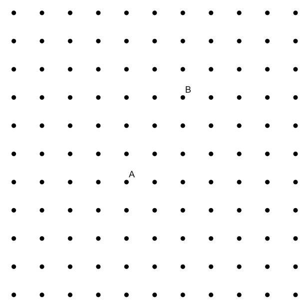
- Com a conclusió, quina és la principal diferència que heu trobat en el nombre de punts de tall en taxigeometria i en geometria euclidiana?

Grup 2: Més còniques en taxigeometria

A la classe anterior vam veure la circumferència i l'el·lipse en la geometria del taxi. Anem a estudiar ara les altres dues còniques: la hipèrbola i l'el·lipse. Recordeu que fer dibuixos us pot servir de gran ajuda i, fins i tot, servirà per a justificar algunes de les respostes.

i) Definim una hipèrbola com el conjunt de punts P tals que la diferència de la seva distància a dos punts donats, anomenats focus, és constant. És a dir, una hipèrbola són els punts P tals que $d_T(P, F_1) - d_T(P, F_2) = c$ on F_1 i F_2 són els focus.

- Dibuixeu la hipèrbola amb focus A i B i $c = 3$.



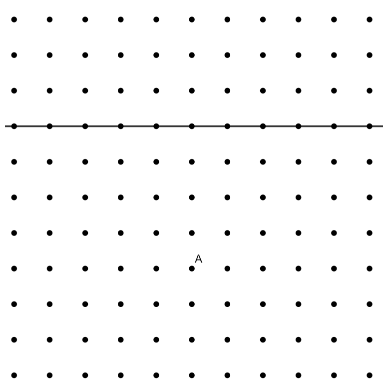
- Com creieu que afectarà que canviem el valor de c? I si canviem els focus de posició?

- Què necessitem per a poder classificar la forma que tendrà una hipèrbola: el valor de c, la posició dels focus o les dues coses?

- Classifiqueu la forma d'una hipèrbola en funció de la vostra resposta anterior, és a dir, digueu com ha de ser el valor de c, la posició dels focus o ambdues coses per a que la hipèrbola tingui una forma concreta.

ii) Definim una paràbola com el conjunt de punts P que es troben a la mateixa distància d'un punt, anomenat focus, i d'una recta, anomenada directriu. És a dir, una paràbola són els punts P tals que $d_T(P, F) = d_T(P, r)$ on F és el focus i r, la directriu.

- Dibuixeu la paràbola amb focus A i directriu r.



- Què passa si movem el focus? I si movem la directriu deixant-la sempre paral·lela a l'eix x? Podríem comparar aquesta situació amb el que ocorre a la geometria euclidiana?

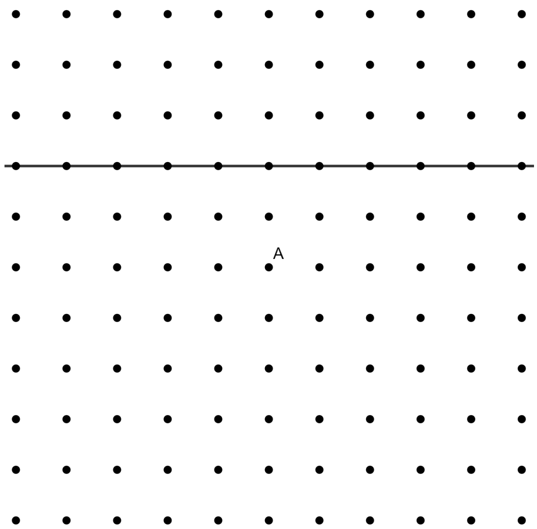
- Què ocorre si mantenim el focus fixat i la directriu no és paral·lela a cap dels eixos? Doneu-ne dos exemples en que la forma que prengui la paràbola sigui diferent (pista: proveu amb la recta $y = x$ i una recta diferent). És comparable aquesta situació amb el que ocorre a la geometria euclidiana?

iii) Ara farem servir una altra definició per a les còniques que inclou el concepte d'excentricitat. Així, tenim que per un punt F, anomenat focus, una recta r, anomenada directriu, i una constant positiva e, anomenada excentricitat, el conjunt de punts P tals que $\frac{d(P,F)}{d(P,r)} = e$ es defineixen com una el·lipse per a $0 < e < 1$, com una paràbola per a $e = 1$ i com una hipèrbola per a $1 < e$.

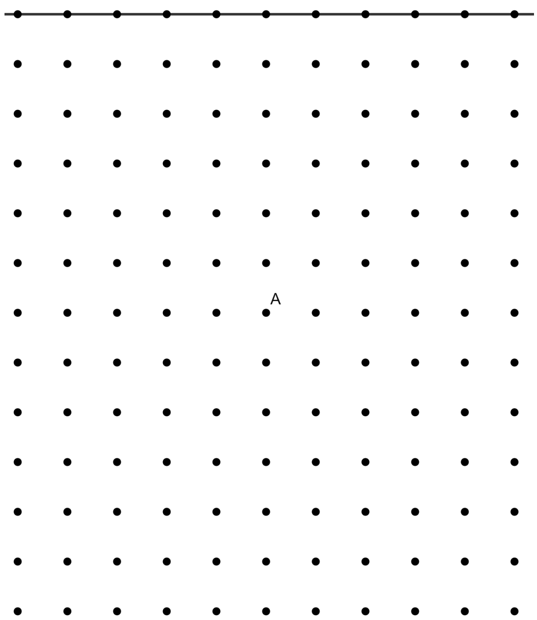
Aquesta definició i la que vam fer servir per a descriure l'el·lipse en la classe anterior i la hipèrbola i la paràbola en aquesta són completament equivalents en geometria euclidiana. Ho podeu comprovar dibuixant cada una de les còniques amb ambdues definicions, però amb què confieu que és cert ens servirà pel que farem.

Responeu a les següents qüestions:

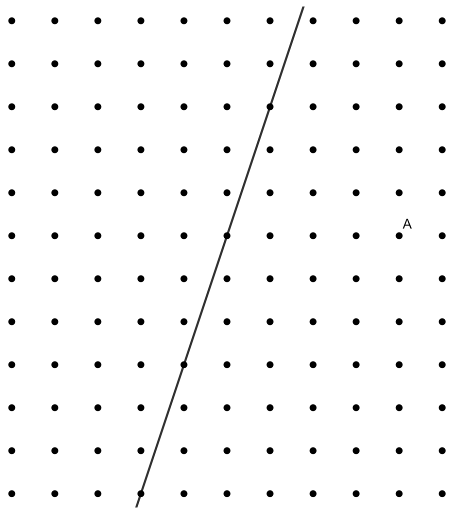
- Dibuixeu la paràbola amb focus A i B i directriu r.



- Dibuixeu l'el·lipse amb focus A, directriu r i excentricitat 0.5.



- Dibuixeu la hipèrbola amb focus A, directriu r i excentricitat 3.



- Comparant aquestes representacions amb les obtingudes amb l'altra definició, hi vegeu qualcuna diferència? Consideraríeu que les dues definicions són equivalents en la taxigeometria? Raonau la vostra resposta.

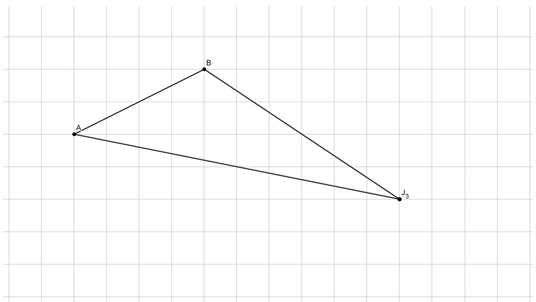
iv) Sabem que les còniques en geometria euclidiana reben aquest nom perquè són les seccions d'un con, creieu que alguna de les dues definicions correspon a les seccions d'un con en passar a taxigeometria? Abans d'intentar respondre aquesta pregunta convé contestar-ne una altra: com és un con en la geometria del taxi? Recordeu que definim un con com la unió de tots els segments que tenen per extrems un punt d'una circumferència, anomenada base, i un punt exterior a la circumferència alineat amb el centre d'aquesta, anomenat vèrtex. És a dir, com l'objecte que s'obté en unir tots els punts d'una circumferència amb un punt exterior, anomenat vèrtex, amb segments.

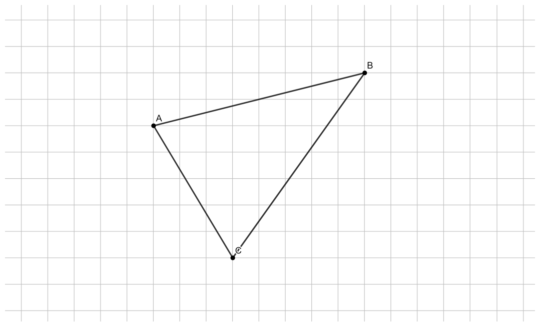
Grup 3: Triangles i els seus centres

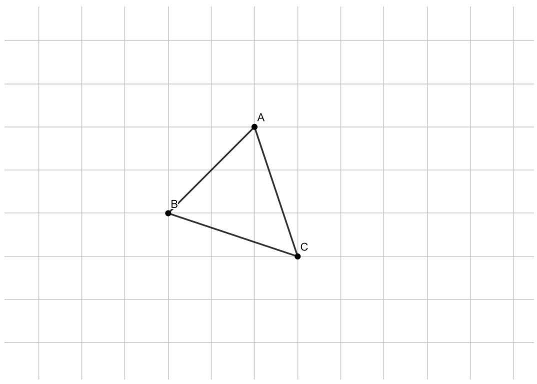
Ens centrarem en trobar tres centres del triangle en taxigeometria: el circumcentre, l'incentre i el baricentre. Els anirem definint i treballant un per un. Recordau el que vam fer la classe anterior respecte la mediatriu i dels punts que es troben a mínima distància.

i) Definim el circumcentre d'un triangle com el punt d'intersecció de les tres mediatrius del triangle.

  - Trobeu el circumcentre en cada un dels casos següents:







  - Hi trobeu qualcun cas especial que no trobem en geometria euclidiana?

- El circumcentre rep aquest nom perquè és el centre de la circumferència que circumscriu (que envolta) el triangle.

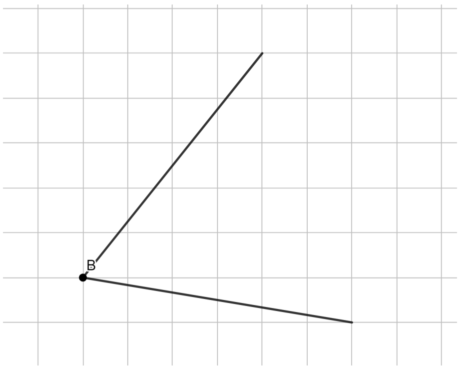
  Quants de punts de tall té aquesta circumferència amb el triangle en geometria euclidiana? Quins punts són aquests? Creieu que ocorre el mateix en geometria del taxi?

- Dibuixeu aquesta circumferència en els casos anteriors en què sigui possible per a comprovar si la vostra resposta era correcta. Quins són els punts de tall en cada cas i quants són?

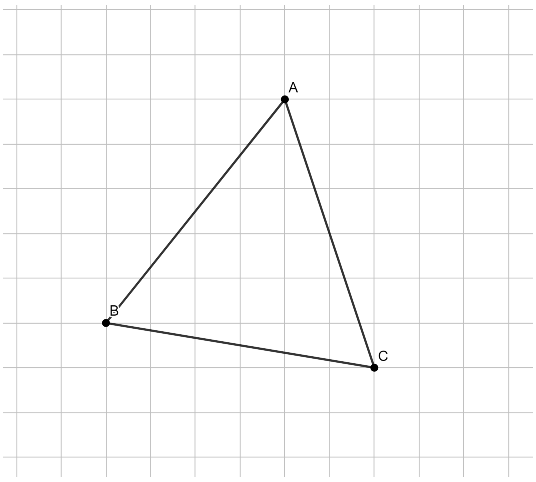
ii) Definim l'incentre d'un triangle euclidià com el punt d'intersecció de les tres bisectrius d'un triangle. Recordeu que els angles que fem servir en taxigeometria i en geometria euclidiana són els mateixos.

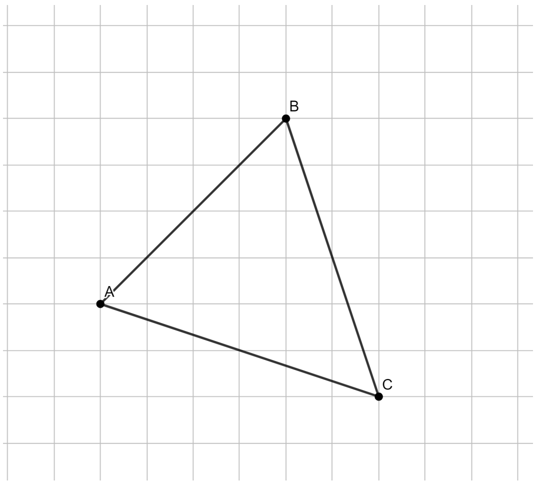
Una bisectriu és una recta que divideixa un angle en dos d'iguals, és a dir, és la recta formada pels punts que es troben a la mateixa distància dels dos costats de l'angle.

- Fent servir aquesta darrera definició de bisectriu, i recordant que estem treballant en taxigeometria, trobeu-la pel següent angle (pista: penseu en fer servir dues paral·leles):



- Ara que ja sabeu com trobar la bisectriu d'un angle, trobeu els incentres dels següents triangles:





- L'incentre rep aquest nom perquè és el centre de la circumferència inscrita al triangle.

  Quants de punts de tall té aquesta circumferència amb el triangle en geometria euclidiana? Quins punts són aquests? Creieu que ocorre el mateix en geometria del taxi?

- Dibuixeu la circumferència inscrita en els casos anteriors en què sigui possible per a comprovar si la vostra resposta era correcta. Quins són els punts de tall en cada cas i quants són?

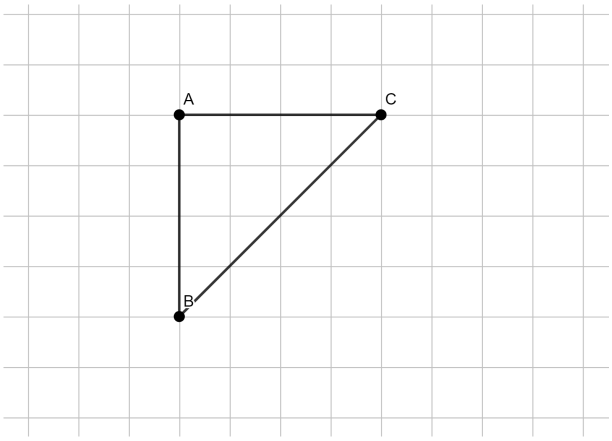
- Podríeu fer servir això que heu trobat estudiant l'incentre i el circumcentre per a afirmar quants de punts de tall tenen com a màxim un triangle i una circumferència en la geometria del taxi? Raonau la vostra resposta

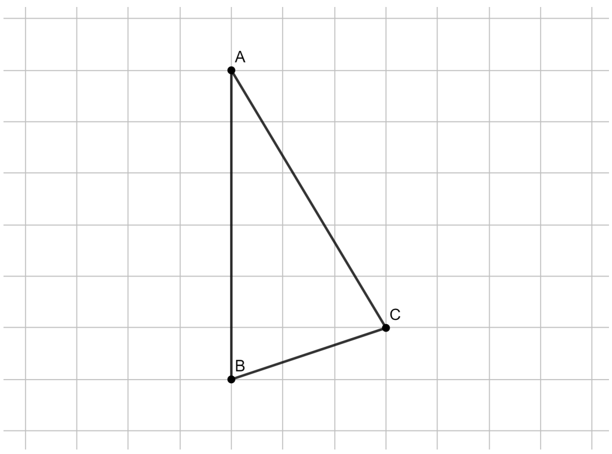
iii) Definim el baricentre d'un triangle com el punt d'intersecció de les tres mitjanes del triangle, on les mitjanes són els segment que uneixen cada vèrtex amb el punt mitjà del costat oposat.

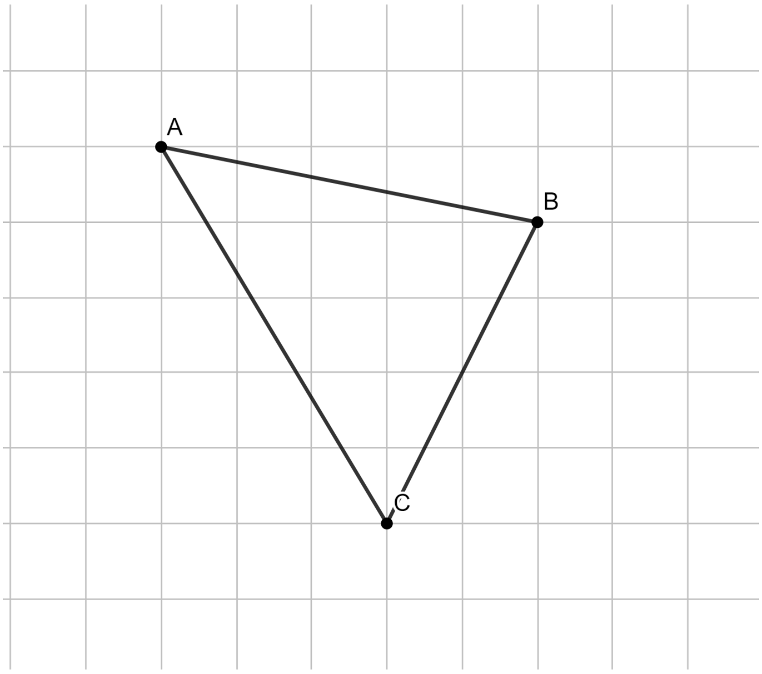
Haureu de tenir en compte el que vam fer a la classe anterior respecte la mediatriu, el conjunt de punts a distància mínima i la discussió sobre el concepte de punt mitjà en geometria del taxi.

- Quin resultat sobre el baricentre podem afirmar només tenint en compte el que vam concloure sobre el punt mitjà d'un segment en taxigeometria?

- Trobeu el baricentre dels següents triangles:







- Com és el baricentre depenent de l'orientació del triangle? Pista: classifiqueu-lo en funció de la posició dels costats del triangle.

Grup 4: π i la longitud dels segments

Aquest grup us centrareu en diverses qüestions, totes elles relacionades amb la mesura de la distància en geometria del taxi i alguns resultats que ens pot aportar això comparant amb la geometria euclidiana. Primer, treballareu en com trobar la distància mínima entre dos punts de la forma més senzilla i com relacionar la distància euclidiana amb la distància de Manhattan. Responeu les següents preguntes:

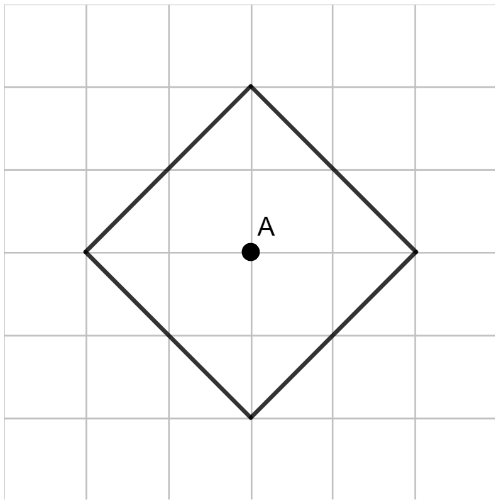
- A la classe anterior vàrem veure que el camí més curt entre dos punts no és únic. Quants de canvis de direcció són suficients per a trobar-ne un d'ells? Mireu els dibuixos que vàreu fer per a ajudar-vos.

- Fent servir aquest resultat que acabeu de trobar i que els angles es mesuren de la mateixa manera a les dues geometries, podeu relacionar la distància entre dos punts en geometria euclidiana i en taxigeometria només fent servir els angles?

Ara, estudiareu el valor de π. Haureu de fer servir part del que acabeu de fer per a respondre les següents qüestions:

- Tots sabem que $\pi = 3.1415926$ és constant, però com definiríeu π? Com podeu obtenir-ne el seu valor? Necessiteu res més apart d'una circumferència i el seu radi en geometria euclidiana?

- Què passaria si ara definim una constant π_T que es defineixi així com heu definit π i s'obtengui de la mateixa forma, però treballant en geometria del taxi? Calculeu-ne el seu valor per a una circumferència de radi 2 com la de la figura.

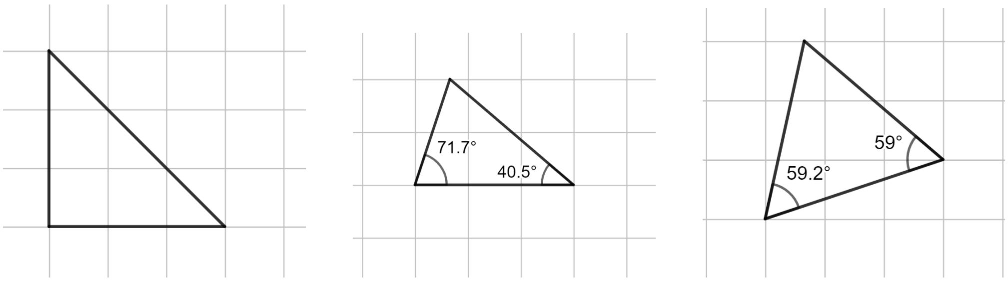


- Si en lloc de tenir una circumferència de radi 2 en teniu una de radi r, quant val π_T? Quant val, doncs, π_T, és a dir, la constant que hem definit així com definim π?

Nota: el valor de π no l'hem canviat, només hem definit una constant a la taxigeometria així com es defineix π a la geometria euclidiana. Per tant, canviant la forma en què mesurem la distància podem obtenir nous valors per a aquesta constant.

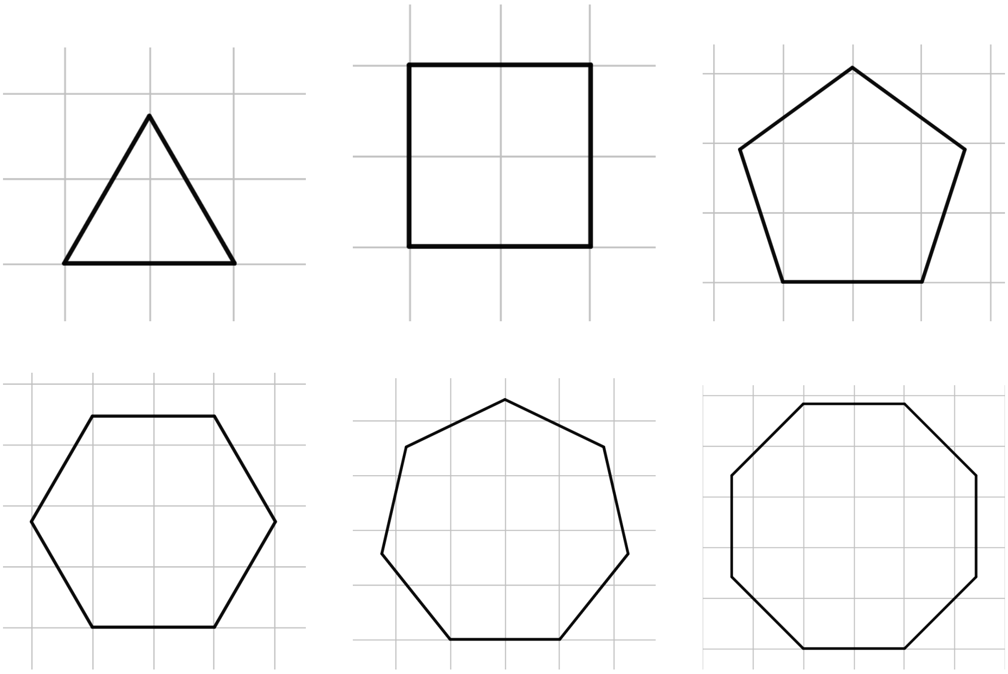
Si encara teniu temps, feu servir el que heu fet a la primera part per a respondre les següents preguntes:

- Podríeu donar una fórmula per a calcular l'àrea d'un triangle en taxigeometria que només depengui de les distàncies entre els vèrtexs i dels angles del triangle? Calculeu l'àrea dels següents triangles per a ajudar-vos respondre.



(a) (b) (c)

- Definim polígon regular com un polígon tal que els seus costats tenen tots la mateixa longitud i els angles que formen són iguals. Decidiu quin dels següents polígons regulars en geometria euclidiana també ho són en geometria del taxi:



Llista de geogebres

Llista de geogebres dinàmics:

- Mediatriu: https://www.geogebra.org/m/k3DM4SYf.
- El·lipse: https://www.geogebra.org/m/NUg8HdK2.
- Intersecció de circumferències: https://www.geogebra.org/m/utAY4zdG.
- Hipèrbola: https://www.geogebra.org/m/veVCGg64.

Llista de geogebres que representen figures:

- Circumcentres, per ordre: https://www.geogebra.org/m/udpu8age, https://www.geogebra.org/m/qwfrns6n, https://www.geogebra.org/m/wu4cprkx.
- Incentres, per ordre: https://www.geogebra.org/m/kpj9dxyc, https://www.geogebra.org/m/fcb3udpc.
- Baricentres, per ordre: https://www.geogebra.org/m/awvqevth, https://www.geogebra.org/m/qtcb7a5e, https://www.geogebra.org/m/nqm2hrza.