UNIVERSITAT DE BARCELONA

Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

LA CONJECTURA DE HORN

Autora: Montse Digon Quintillà

Directora: Dra. Maria Eulàlia Montoro Lopez

Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 17 de gener de 2024

Abstract

This project studies the following problem: If the eigenvalues of two Hermitian matrices are known, we want to find the eigenvalues of the sum of these two matrices. The necessary conditions that we will find are inequalities between the different eigenvalues. Horn's conjecture says that these necessary conditions are, in fact, sufficient.

Resum

Aquest treball estudia el problema següent: Coneguts els valors propis de dues matrius Hermítiques, volem trobar els possibles valors propis de la suma d'aquestes dues matrius. Les condicions necessàries que trobarem són desigualtats entre els diferents valors propis. La conjectura de Horn ens diu que aquestes condicions necessàries són, de fet, suficients.

2020 Mathematics Subject Classification. 15A18, 15A99

Agraïments

El treball de fi de grau és el tancament d'una etapa i vull agrair el suport a tota la gent que m'ha acompanyat durant aquesta.

Vull agrair a la Dra. Eulàlia Montoro, tutora d'aquest treball, per la dedicació i l'ajuda que m'ha proporcionat durant el desenvolupament del treball.

Als meus pares, Albert i Pepita, pel suport incondicional durant aquests anys, sense vosaltres no hagués estat possible.

Als meus germans, Júlia i Albert, per animar-me sempre a seguir endavant.

Al Xavi, per sempre ser-hi i celebrar els meus èxits com si fossin seus.

I als meus amics i amigues, que sense ells i elles no hagués estat el mateix.

Índex

Introducció

En l'extens camp de les matemàtiques, certs problemes i conjectures han perdurat en el llarg del temps, entre elles, es troba la conjectura de Horn.

El nom de la conjectura ve donat pel matemàtic americà Alfred Horn (17 de Febrer de 1918 - 16 d'Abril de 2001). Va enunciar la conjectura l'any 1962, i no va ser demostrada fins a prop de l'any 2000 per A. A. Klyachko, A. Knutson i T. Tao ([7], [8]), i els seus resultats van ser resumits per W. Fulton ([3]).

L'objectiu d'aquesta memòria és enunciar i demostrar la conjectura de Horn per matrius de tamany més petit o igual a 4.

La conjectura de Horn neix de la següent pregunta:

Què es pot dir dels valors propis de la suma de dues matrius Hermítiques (o reals simètriques), en termes dels valors propis dels sumands?

És a dir, si tenim matrius $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ Hermítiques, amb valors propis $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $\beta_1, \ldots, \beta_n$ respectivament, i denotem per $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ els valors propis de $A+B$, la pregunta seria:

Què podem dir de γ en termes de α i β?

Aquesta pregunta va ser originalment un problema d'àlgebra lineal, però es va resoldre utilitzant altres camps de les matemàtiques com la geometria algebraica, geometria simplèctica i combinatòria. El problema també està relacionat amb la intersecció de varietats Schubert, entre d'altres temes. Però, els matemàtics que treballaven en la conjectura de Horn en aquell temps, no estaven familiaritzats amb el càlcul de Schubert i van demostrar casos especials de les desigualtats utilitzant només l'àlgebra lineal.

En aquest projecte ens centrarem principalment en estudiar l'article de Horn ([4]), en el qual, va plantejar una conjectura general, on diu que: una condició necessària i suficient per tres seqüències de nombres reals, ordenades de manera decreixent, tals que aquestes són valors propis de tres matrius Hermítiques, on una és la suma de les altres dues, és que aquestes seqüències han de satisfer un conjunt de desigualtats.

El primer resultat el va donar H. Weyl al 1912, va trobar un conjunt de desigualtats anomenades desigualtats de Weyl (*Capítol 1*). Amb aquest primer resultat, podrem escriure un petit exemple per un cas particular amb matrius d'ordre 2. Tot i això, amb el que haurem vist en aquest punt del treball encara no tindrem la certesa d'haver trobat

tots els possibles valors propis de la matriu que resulta de fer la suma de les dues matrius Hermítiques, més endavant veurem que sí que són tots (*Capítol 3*).
A continuació, K. Fan, va trobar les anomenades desigualtats de Fan i V. B. Lidskii i H. Wielandt, les desigualtats de Lidskii-Wielandt (*Capítol 2*). Aquests resultats ens permetran veure un exemple d'un cas particular per matrius d'ordre 3, però, igual que en el cas $n = 2$, no sabrem fins més endavant si hem trobat totes les possibilitats o només unes quantes.
Les desigualtats de Weyl, Fan i Lidskii-Wielandt són totes de la mateixa forma:

$$\sum_{k \in K} \gamma_k \leq \sum_{i \in I} \alpha_i + \sum_{j \in J} \beta_j, \tag{0.1}$$

on I, J i K son subconjunts de $\{1, 2, \ldots, n\}$ amb el mateix cardinal.
Davant d'aquest fet, ens preguntem si totes les desigualtats que relacionen les tres seqüències de valors propis són d'aquesta forma i comencem a investigar-ho (*Capítol 3*). Per fer-ho, definirem el següent:

Siguin $I = \{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n\}$, $J = \{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leq n\}$ i $K = \{1 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_r \leq n\}$.

- Anomenem S_r^n al conjunt de seqüències d'enters (I, J, K), que representen els subíndexs dels valors propis α, β i γ tals que es satisfà (0.1).
- Anomenem T_r^n al conjunt de seqüències d'enters (I, J, K), tal que:
  (1) $(i_1; j_1; k_1) \in T_1^n$ si $1 \leq i_1 \leq n$, $1 \leq j_1 \leq n$, $1 \leq k_1 \leq n$ i $i_1 + j_1 = k_1 + 1$.
  (2) $(i_1, \ldots, i_r; j_1, \ldots, j_r; k_1, \ldots, k_r) \in T_r^n$ si $1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n$, $1 \leq j_1 < \cdots < j_r \leq n$, $1 \leq k_1 < \cdots < k_r \leq n$ i $i_1 + \cdots + i_r + j_1 + \cdots + \cdots + j_r = k_1 + \cdots + k_r + \frac{r(r+1)}{2}$.
  (3) Tenim $i_{u_1} + \cdots + i_{u_s} + j_{v_1} + \cdots + j_{v_s} \leq k_{w_1} + \cdots + k_{w_s} + \frac{s(s+1)}{2}$, quan $(u; v; w) \in T_s^r$, per tot $1 \leq s \leq r - 1$.

Veurem que $T_r^n \subset S_r^n$ per $r = 1, 2, 3$. Tot i que, el recíproc no és cert, és a dir, no totes les desigualtats que compleixen els valors propis estan a T_r^n.
Ara, definim E i F:

- Definim E com el conjunt de $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ tals que $\gamma_1 \geq \cdots \geq \gamma_n$, i γ és la seqüència de valors propis de

  $$diag(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) + U^* diag(\beta_1, \ldots, \beta_n) U,$$

  on $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ és una matriu unitària qualsevol.
- F és el conjunt de $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ amb $\gamma_1 \geq \cdots \geq \gamma_n$, tals que

  $$\gamma_1 + \cdots + \gamma_n = \alpha_1 + \cdots + \gamma_n + \beta_1 + \cdots + \beta_n, \quad \text{i}$$

  $$\gamma_{k_1} + \cdots + \gamma_{k_r} \leq \alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_r} + \beta_{j_1} + \cdots + \beta_{j_r},$$

  on $(I, J, K) \in T_r^n$, $1 \leq r \leq n - 1$.

Amb aquestes definicions, Horn diu que $T_r^n \subset S_r^n$ és equivalent a $E \subset F$. Finalment, veurem que $F \subset E$ i per tant, que $E = F$.

Notació i preliminars

Primerament, recordem algunes definicions de conceptes i fixem la notació que utilitzarem.

Denotem per $\mathbb{C}^{n\times n}$ el conjunt de matrius $n \times n$ de nombres complexos.

Definició 0.1. *Diem que $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ és una matriu Hermítica si compleix que $A = A^*$, on A^* és la matriu transposada conjugada.*[2]
Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, és a dir, la part imaginària de A és 0, aleshores $A = A^t$.

Definició 0.2. *Diem que $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ és unitària si*

$$U^*U = UU^* = Id_n,$$

on $Id_n \in \mathbb{C}^{n\times n}$ és la matriu identitat i U^* la transposada conjugada de U.
La matriu $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és ortogonal si la seva inversa coincideix amb la seva transposada, és a dir, $U^{-1} = U^t$.

Recordem algunes propietats espectrals de les matrius Hermítiques:

1. **Valors propis reals**: Totes les matrius Hermítiques tenen valors propis reals. Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ és Hermítica, llavors té n valors propis reals.

2. **Vectors propis ortonormals**: Les matrius Hermítiques tenen una base de vectors propis ortonormals.

3. **Teorema Espectral**: Tota matriu Hermítica $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ és diagonalitzable mitjançant una matriu unitària. És a dir, existeix una matriu U unitària tal que $UAU^* = D$, on D és la matriu diagonal que conté els valors propis reals de A.

En quant a notació, fixem el següent:

- Denotem per $\langle x, y\rangle = x^*y$ el producte escalar usual de dos vectors, on x^* denota el transposat conjugat del vector x.
- Denotem per $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ la norma vectorial de x.

[2] La matriu transposada conjugada d'una matriu A és una matriu A^*, obtinguda prenent la transposada de A i després prenent el conjugat complex de cada entrada de la matriu, és a dir, canviant de signe les parts imaginàries però no les parts reals.

Capítol 1

Primeres desigualtats associades al problema de Horn

Siguin A, B i $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ Hermítiques, on $C = A + B$. Denotem els valors propis de A, B i C com:

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \text{ amb } \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_n,$$
$$\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \text{ amb } \beta_1 \geq \beta_2 \geq \cdots \geq \beta_n \text{ i}$$
$$\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \text{ amb } \gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \cdots \geq \gamma_n,$$

respectivament.

Coneguts els valors propis de A i B, volem saber quins són els possibles valors propis de C.
La primera relació entre els valors propis α, β i γ ve donada per la propietat

$$tr(A+B) = tr(A) + tr(B),$$

on $tr()$ denota la traça d'una matriu. Sabem que la traça d'una matriu coincideix amb la suma dels seus valors propis, per tant:

$$\left.\begin{array}{r} tr(A) = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \\ tr(B) = \beta_1 + \cdots + \beta_n \end{array}\right\} \Rightarrow tr(C) = tr(A+B) = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n + \beta_1 + \cdots + \beta_n.$$

Hem trobat doncs una primera relació entre els valors propis de A, B i C:

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i. \tag{1.1}$$

1.1 Desigualtats de Weyl

En aquesta secció veurem la definició de rang numèric d'una matriu i propietats que aquest satisfà. La qual cosa ens permetrà trobar desigualtats entre els valors propis, que juntament amb el Principi min-max i el Principi de monotonia de Weyl, ens permetran obtenir les desigualtats de Weyl.

Definició 1.1. *Sigui $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Definim el seu rang numèric, W(A), com el conjunt:*

$$W(A) = \{x^*Ax \mid x \in \mathbb{C}^{n\times 1} \ \ i \ \|x\|^2 = 1\}.$$

Teorema 1.2. *([6]) Donada $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $W(A)$ és invariant per transformacions unitàries.*

Demostració. Si $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitària ($U^* = U^{-1}$), tenim que:

$$a \in W(A) \iff a = x^*Ax = x^*U(U^*AU)U^*x.$$

Definim $y = U^*x$, aleshores com que $\|x\| = 1$ i U unitària, tenim que $\|y\| = 1$ i podem escriure $a = y^*(U^*AU)y$ i així doncs tenim que

$$a \in W(A) \iff a \in W(U^*AU).$$

□

Teorema 1.3. *([6]) Sigui $H \in \mathbb{C}^{n\times n}$ Hermítica amb valors propis $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_n$. Llavors es satisfà que $W(H) = [\alpha_n, \alpha_1]$.*

Demostració. Pel Teorema 1.2 podem suposar que

$$H = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}.$$

Per tant, si $x \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ tenim $x^*Hx = \sum_{j=1}^n \overline{x_j}\alpha_j x_j = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j \overline{x_j} = \sum_{j=1}^n \alpha_j |x_j|^2$.

Posant $\xi_j = |x_j|$ podem veure que com que $\|x\|^2 = 1 \Rightarrow \|x\|^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2 = \xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 = 1$, aleshores

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \xi_j^2 \leq \alpha_1(\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2) = \alpha_1,$$

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \xi_j^2 \geq \alpha_n(\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2) = \alpha_n.$$

Hem vist que $W(H) = (\alpha_n, \alpha_1)$, però volem veure que l'interval és tancat. En efecte, $\alpha_1 \in W(H)$, per $x = (1, 0, \dots, 0)^t$ aleshores $\alpha_1 = xHx^*$ i $\|x\| = 1$. Anàlogament, $\alpha_n \in W(H)$ agafant $x = (0, \dots, 0, 1)^t$, es satisfà $\alpha_n = xHx^*$ i $\|x\| = 1$. Per tant, en particular tenim

$$\alpha_1 = max_{\|x\|=1}\langle x, Ax\rangle \tag{1.2}$$

$$\alpha_n = min_{\|x\|=1}\langle x, Ax\rangle. \tag{1.3}$$

□

Utilitzant el Teorema 1.2 i les equacions (1.2) i (1.3), tenim que:

$$\begin{aligned}\gamma_1 = max_{\|x\|=1}\langle x, Cx\rangle = max_{\|x\|=1}\langle x, (A+B)x\rangle \leq \\ \leq max_{\|x\|=1}\langle x, Ax\rangle + max_{\|x\|=1}\langle x, Bx\rangle = \\ = \alpha_1 + \beta_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \gamma_1 \leq \alpha_1 + \beta_1.\end{aligned} \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned}\gamma_n = min_{\|x\|=1}\langle x, Cx\rangle = min_{\|x\|=1}\langle x, (A+B)x\rangle \geq \\ \geq min_{\|x\|=1}\langle x, Ax\rangle + min_{\|x\|=1}\langle x, Bx\rangle = \\ = \alpha_n + \beta_n \Rightarrow \\ \Rightarrow \gamma_n \geq \alpha_n + \beta_n.\end{aligned} \tag{1.5}$$

Observació 1.4. *A vegades utilitzarem $\lambda_j^{\downarrow}(A)$ per denotar el valor propi j de A, quan els valors propis de A estan ordenats de manera decreixent. En el nostre cas, $\alpha_j = \lambda_j^{\downarrow}(A)$.*

Observació 1.5. *Les desigualtats anteriors (1.4) i (1.5) no són independents. Notem que si α_i és un valor propi de A, llavors $-\alpha_i$ és un valor propi de $-A$ i per tant, per $1 \leq j \leq n$,*

$$\lambda_j^{\downarrow}(-A) = -\lambda_{n-j+1}^{\downarrow}(A) = -\lambda_j^{\uparrow}(A) \tag{1.6}$$

on $\lambda_j^{\uparrow}(A)$ indica que l'enumeració dels valors propis de A és en ordre creixent. Usant això, es pot veure que les equacions (1.2) i (1.3) són equivalents i (1.4) i (1.5) també són equivalents.

El teorema que veurem a continuació generalitza el resultat anterior.

Teorema 1.6. *([2]) (Principi min-max). Sigui $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ Hermítica amb valors propis $\alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_n$. Donat un subespai vectorial $V \subset \mathbb{C}^n$, tenim que $\forall\ 1 \leq j \leq n$,*

$$\alpha_j = \max_{\substack{V\subset\mathbb{C}^n \\ dimV=j}} \min_{\substack{x\in V \\ \|x\|=1}} \langle x, Ax\rangle = \min_{\substack{V\subset\mathbb{C}^n \\ dimV=n-j+1}} \max_{\substack{x\in V \\ \|x\|=1}} \langle x, Ax\rangle. \tag{1.7}$$

Demostració. Escrivim $A = \sum \alpha_j u_j u_j^* \in \mathbb{C}^{n\times n}$ i $W = \langle u_j, \ldots, u_n\rangle$ el subespai generat pels vectors $u_j, \ldots, u_n$ amb $dim(W) = n - j + 1$. Si $V \subset \mathbb{C}^n$ és un subespai qualsevol amb $dim(V) = j$,

$$dim(V + W) \leq n,$$

i per Grassman,

$$dim(V+W) = dim(V)+dim(W)-dim(V\cap W) = n+1-dim(V\cap W) \Rightarrow dim(V\cap W) \geq 1.$$

Sigui $x \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ un vector unitari, pel Teorema 1.3 tenim que $\langle x, Ax\rangle \in [\alpha_n, \alpha_j]$. Per tant,

$$\min_{\substack{x\in V \\ \|x\|=1}} \langle x, Ax\rangle \leq \alpha_j.$$

Si $V = \langle u_1, \ldots, u_j\rangle$ tenim la igualtat. Així doncs, queda provada la primera igualtat. La segona igualtat es demostra de manera similar.

□

Observació 1.7. *Una conseqüència del teorema anterior és que podem ordenar les matrius Hermítiques de manera natural.*
Concretament, si A i $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ Hermítiques,

$$A \leq B \ \text{si} \ \langle x, Ax\rangle \leq \langle x, Bx\rangle, \ \ \forall x \in \mathbb{C}^{n\times 1}.$$

Corol·lari 1.8. *([2]) (Principi de monotonia de Weyl). Si $A \leq B$, aleshores $\lambda_j^{\downarrow}(A) \leq \lambda_j^{\downarrow}(B)$, per tot j.*

Exemple 1.9. Prenem les següents matrius Hermítiques

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \ \ B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}.$$

Veiem que satisfan que $A \leq B$.
Tenir $A \leq B$ és equivalent a $0 \leq B - A$. Sabem que això passa si $0 \leq \langle x, (B-A)x\rangle$, $\forall x \in \mathbb{C}^{n\times 1}$, que és equivalent a $x^*(B-A)x \geq 0$.
Si $A = B$, clarament $B - A = 0$ i $x^*(B-A)x = 0$.
Si $A < B$, hem de veure $x^*(B-A)x > 0$, que és equivalent a veure que $(B-A)$ és definida positiva. Tenim que

$$B - A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Veiem que és definida positiva:

- $2 > 0$
- $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 2 = 2 > 0.$

Un cop vist que $A \leq B$, fixem-nos en els valors propis de les matrius A i B. Els valors propis de A són

$$\alpha_1 = 3 \ \text{ i } \ \alpha_2 = 2.$$

Calculem els valors propis de B a través del polinomi i obtenim

$$\beta_1 = 6 \ \text{ i } \ \beta_2 = 3.$$

I per tant, $\lambda_j^{\downarrow}(A) \leq \lambda_j^{\downarrow}(B)$, per $j = 1, 2$.

El Principi de Monotonia de Weyl (Corol·lari 1.8) i varies relacions entre els valors propis de A, B i C van ser trobades per Hermann Weyl en un paper molt famós al 1912 ([10]). Particularment, nosaltres ens centrarem en la família de desigualtats següent:

Teorema 1.10. *([2]) (Desigualtats de Weyl) Siguin $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ Hermítiques i $\alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_n$, $\beta_1 \geq \cdots \geq \beta_n$ els seus valors propis respectivament. Si $\gamma_1 \geq \cdots \geq \gamma_n$ són els valors propis de $A + B$, tenim que*

$$\gamma_{i+j-1} \leq \alpha_i + \beta_j, \quad \text{per } i + j - 1 \leq n. \tag{1.8}$$

Demostració. Escrivim $A = \sum \alpha_j u_j u_j^*$, $B = \sum \beta_j v_j v_j^*$ i $A + B = \sum \gamma_j w_j w_j^*$, on u_j, v_j i w_j són els vectors que generen els tres subespais

$$S_1 = \langle u_i, \ldots, u_n\rangle,$$

$$S_2 = \langle v_j, \ldots, v_n \rangle \text{ i}$$
$$S_3 = \langle w_1, \ldots, w_k \rangle,$$

respectivament, amb dimensions

$$dim(S_1) = n - i + 1, \;\; dim(S_2) = n - j + 1 \;\text{ i }\; dim(S_3) = k.$$

Si $k = i+j-1$ tenim que $dim(S_1)+dim(S_2)+dim(S_3) = 2n+1$ i per tant $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \neq 0$. Si $x \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ és un vector unitari, pel Teorema 1.3, tenim que

$$\langle x, Ax \rangle \in [\alpha_n, \alpha_i],$$

$$\langle x, Bx \rangle \in [\beta_n, \beta_j] \text{ i}$$
$$\langle x, (A+B)x \rangle \in [\gamma_k, \gamma_1].$$

Per tant,

$$\gamma_k \leq \langle x, (A+B)x \rangle = \langle x, Ax \rangle + \langle x, Bx \rangle \leq \alpha_i + \beta_j.$$

□

Observació 1.11. *Notem que la desigualtat obtinguda en* (1.4) $\gamma_1 \leq \alpha_1 + \beta_1$ *és una de les Desigualtats de Weyl* (1.8).

Com a conseqüència de (1.8) tenim que

$$\alpha_i + \beta_n \leq \gamma_i \leq \alpha_i + \beta_1, \text{ per } 1 \leq i \leq n.$$

La segona desigualtat

$$\gamma_i \leq \alpha_i + \beta_1, \text{ per } 1 \leq i \leq n$$

es veu fàcilment prenent $j = 1$ en

$$\gamma_{i+j-1} \leq \alpha_i + \beta_j, \quad i + j - 1 \leq n.$$

La primera desigualtat

$$\alpha_i + \beta_n \leq \gamma_i, \text{ per } 1 \leq i \leq n$$

no es troba a simple vista.
Fixem $1 \leq i \leq n$, com que $\beta_1 \geq \cdots \geq \beta_n$ aleshores

$$\alpha_i + \beta_n \leq \alpha_i + \beta_1.$$

Fixem-nos que

$$\gamma_{i+j-1} \leq \gamma_i, \quad \text{per } j \geq 1,$$

ja que $\gamma_1 \geq \cdots \geq \gamma_n$. Per tant, per $j = n$ tenim que

$$\gamma_{i+n-1} \leq \alpha_i + \beta_n \leq \gamma_i.$$

A continuació repassarem les desigualtats trobades fins ara i estudiarem si resolen un cas particular quan $n = 2$.

1.2 El cas $n = 2$

Considerem $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ amb valors propis $\alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_n$, $\beta_1 \geq \cdots \geq \beta_n$, respectivament.

Introduim el problema per $n = 2$.
Si γ_1 i γ_2 amb $\gamma_1 \geq \gamma_2$ són els valors propis de $A + B$, llavors sabem que els valors propis de A, B i $A + B$ han de complir les següents desigualtats

$$\begin{aligned} \gamma_1 &\leq \alpha_1 + \beta_1, \\ \gamma_2 &\leq \alpha_1 + \beta_2, \\ \gamma_2 &\leq \alpha_2 + \beta_1, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 &= \gamma_1 + \gamma_2, \end{aligned} \tag{1.9}$$

on $\alpha_1 \geq \alpha_2$, $\beta_1 \geq \beta_2$ i $\gamma_1 \geq \gamma_2$.

Coneixent α i β, volem trobar els possibles γ. Considerem

$$\alpha_1 = 4, \;\; \alpha_2 = 1,$$

$$\beta_1 = 3, \;\; \beta_2 = -2.$$

Usant (1.1), en primer lloc tenim que

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 6,$$

és una recta en el pla $\mathbb{R}^2$ i $\gamma_1 \geq \gamma_2$ ens restringeix part d'aquesta recta.

De (1.9) tenim

$$\begin{aligned} \gamma_1 &\leq 7, \\ \gamma_2 &\leq 2, \\ \gamma_2 &\leq 4. \end{aligned}$$

L'última desigualtat és redundant, per tant

$$\gamma_1 \leq 7 \;\text{ i }\; \gamma_2 \leq 2.$$

Ara, veiem que quan $\gamma_1 = 7$ tenim $\gamma_2 = -1$, i quan $\gamma_2 = 2$ tenim $\gamma_1 = 4$.

Per tant, el conjunt de parells de nombres $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ està format pels punts del segment que té com a extrems $(7, -1)$ i $(4, 2)$.

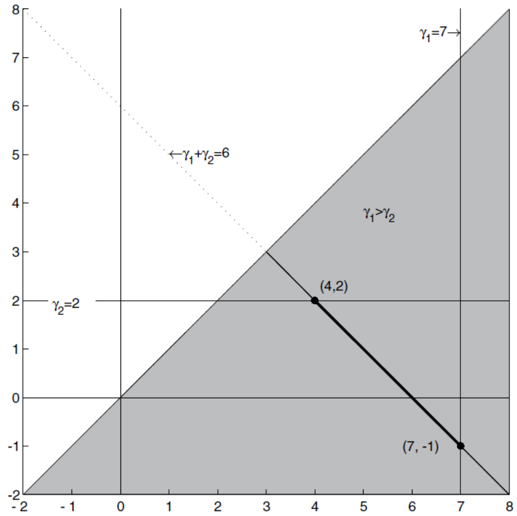

Figura 1.1: Segment donat per les desigualtats de Weyl.

Volem veure que cada punt del segment correspon als dos valors propis d'una matriu Hermítica $C = A + B$, on A té valors propis (4, 1) i B té valors propis (3, -2).

Com que els valors propis són invariants per canvi de base, podem considerar les matrius

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \, B_0 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

i $U_\theta \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ una matriu de rotació

$$U_\theta = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix}.$$

Llavors podem considerar la família de matrius ortogonals parametritzades per $\theta \in \mathbb{R}$

$$B_\theta = U_\theta B_0 U_\theta^*, \qquad C_\theta = A + B_\theta.$$

Per $\theta = 0$, tenim

$$C_0 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

i per $\theta = \frac{\pi}{2}$, tenim

$$B_{\frac{\pi}{2}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},$$

i per tant

$$C_{\frac{\pi}{2}} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Tenim doncs que els valors propis de C_0 són

$$\gamma_1 = 7 \;\text{ i }\; \gamma_2 = -1,$$

i els de $C_{\frac{\pi}{2}}$ són

$$\gamma_1 = 4 \;\text{ i }\; \gamma_2 = 2.$$

Per tant, els dos extrems del segment corresponen a $(\lambda_1^\downarrow(C_\theta), \lambda_2^\downarrow(C_\theta))$, per $\theta = 0$ i $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Observació 1.12. $\lambda_j^{\downarrow}(C_\theta)$ *és una funció continua en* θ.

Pel Teorema del Valor Mig, cada punt del segment entre $(7, -1)$ i $(4, 2)$ és un parell de valors propis de C_θ per algun $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

Per tant, amb aquest exemple per $n = 2$ hem trobat solucions de γ. De fet, en el capítol 3 veurem que hem trobat totes les solucions.

Capítol 2

Desigualtats de Fan i Lidskii

En aquest capítol introduirem els conceptes de majorització entre vectors i les matrius doblement estocàstiques. La majorització ens permet obtenir representacions del vector majoritzat en termes del vector que el majoritza, i a la vegada impliquen una família de desigualtats entre les components d'ambdós vectors. Aquests conceptes ens permetran trobar les desigualtats de Fan i Lidskii. Finalment, aplicarem aquestes desigualtats, juntament amb les obtingudes en el capítol 1, a un cas particular quan $n = 3$.

2.1 Majorització i matrius doblement estocàstiques

La comparació de dos vectors sovint ens porta a desigualtats que es poden expressar mitjançant la majorització.

Sigui $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{1\times n}$. Denotem per $x^\downarrow = (x_1^\downarrow, x_2^\downarrow, \dots, x_n^\downarrow)$ el vector obtingut reordenant les components de x de manera decreixent.

Definició 2.1. *Siguin x i $y \in \mathbb{R}^{1\times n}$ tals que*

$$\sum_{j=1}^{k} x_j^\downarrow \leq \sum_{j=1}^{k} y_j^\downarrow, \text{ per } 1 \leq k \leq n,$$

aleshores diem que y majoritza dèbilment a x, ho denotem com $x \prec_w y$.
Si $x \prec_w y$, i a més

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^\downarrow = \sum_{j=1}^{n} y_j^\downarrow$$

diem que y majoritza a x i ho denotem com $x \prec y$.

Observació 2.2. *L'ordre de les entrades dels vectors no afecta a la majorització. Per exemple,* $(1,3) \prec (0,4)$ *és equivalent a* $(3,1) \prec (4,0)$.

Exemple 2.3.

1. $(1,2,3,4) \prec (0,2,4,4) \prec (0,0,0,10))$
2. $\left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right) \prec \left(\frac{1}{n-1}, \dots, \frac{1}{n-1}, 0\right) \prec (1,0,\dots,0)$.
3. $(1,3,3) \prec_w (1,3,4)$.

4. $\left(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right) \prec_w \left(\frac{1}{n-1}, \ldots, \frac{1}{n-1}, 1\right)$.

Definició 2.4. *Definim l'envolvent convexa d'un conjunt de punts $X = (x_1, \ldots, x_k)$ on $x_i \in \mathbb{R}^{1\times n}$, com la intersecció de tots els conjunts convexos que contenen X. És a dir, l'envolvent convexa de X és*

$$C(X) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i \mid x_i \in X, \alpha_i \in \mathbb{R}, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1 \right\}.$$

Definició 2.5. *Una matriu $S = (s_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és doblement estocàstica si*

$$s_{ij} \geq 0, \ \ \textit{per } i, j = 1, \ldots, n,$$

$$\sum_j s_{ij} = 1 \ \ \forall i,$$

$$\sum_i s_{ij} = 1 \ \ \forall j.$$

Exemple 2.6. L'exemple més senzill d'una matriu doblement estocàstica és la matriu identitat

$$Id_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

Un altre exemple és la matriu

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \ldots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \ldots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \ldots & \frac{1}{n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

Hi ha una estreta relació entre la majorització i les matrius doblement estocàstiques. Ho mostrem en els següents teoremes.

Teorema 2.7. *([1]) Una matriu $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és doblement estocàstica si, i només si, $Sx \prec x$, per tot vector $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$.*

Demostració. Suposem primer que $Sx \prec x$, per tot vector $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$. Denotem per e el vector $(1, 1, \ldots, 1)$ i per e_i els vectors que tenen totes les components 0 menys la component i que és 1. Sigui $S = (s_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Comencem veient que si $Se_1 \prec e_1$, tenim

$$(s_{11}, s_{21}, s_{31}, \ldots, s_{n1}) \prec (1, 0, 0, \ldots, 0).$$

Podem suposar que $s_{11} \geq s_{21} \geq \cdots \geq s_{n1}$. Aleshores per la definició de majorització tenim que

$$s_{11} \leq 1,$$

$$s_{11} + s_{21} \leq 1,$$

$$s_{11} + s_{21} + s_{31} \leq 1,$$
$$\vdots$$
$$\sum_i^n s_{i1} = 1.$$

Tenim doncs que $s_{11} \geq 0$, ja que si $s_{11} < 0$ aleshores $s_{21} < 0, \dots, s_{n1} < 0$, i no pot ser ja que sinó no es satisfan les desigualtats anteriors. Anàlogament, si $s_{21} < 0$ aleshores $s_{31} \geq 0$, però no pot ser perquè hem suposat $s_{11} \geq s_{21} \geq s_{31} \geq \cdots \geq s_{n1}$. Per tant, $s_{21} \geq 0$. De la mateixa manera veiem que la resta de components son ≥ 0. Fent el mateix per la resta de e_i, $i = 2, \dots n$ obtenim que tots els coeficients de la matriu són ≥ 0 i $\sum_i s_{ij} = 1 \;\; \forall j$. Ara, si $Se \prec e$ aleshores tenim

$$\left(\sum_j^n s_{1j}, \sum_j^n s_{2j}, \dots, \sum_j^n s_{nj} \right) \prec (1, 1, \dots, 1),$$

i necessàriament $\sum_j s_{ij} = 1 \;\; \forall i$.
Suposem ara que $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és doblement estocàstica. Sigui $y = Sx$. Per veure que $y \prec x$, podem suposar que $y^\downarrow = (y_1^\downarrow, y_2^\downarrow, \dots, y_n^\downarrow)$ i $x^\downarrow = (x_1^\downarrow, x_2^\downarrow, \dots, x_n^\downarrow)$. Com que $y = Ax$ tenim que

$$\sum_{j=1}^k y_j = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n s_{ij} x_i.$$

Si posem

$$t_i = \sum_{j=1}^k s_{ij}, \;\; \text{aleshores } 0 \leq t_i \leq 1 \text{ i } \sum_{i=1}^n t_i = k.$$

Tenim doncs que

$$\sum_{j=1}^k y_j - \sum_{j=1}^k x_j = \sum_{i=1}^n t_i x_i - \sum_{i=1}^k x_i =$$
$$= \sum_{i=1}^n t_i x_i - \sum_{i=1}^k x_i + (k - \sum_{i=1}^n t_i) x_k =$$
$$= \sum_{i=1}^k (t_i - 1)(x_i - x_k) + \sum_{i=k+1}^n t_i (x_i - x_k) \leq 0.$$

Finalment, si $k = n$, tenim la igualtat ja que S és doblement estocàstica. I per tant, $y \prec x$.

□

Escrivim $x^\uparrow = (x_1^\uparrow, \dots, x_n^\uparrow)$ pels vectors dels quals reordenem les components x_j en ordre creixent, és a dir, $x_1^\uparrow \leq \cdots \leq x_n^\uparrow$. Notem que $x_j^\uparrow = x_{n-j+1}^\downarrow$. Aleshores, y majoritza x si i només si,

$$\sum_{j=1}^k x_j^\uparrow \geq \sum_{j=1}^k y_j^\uparrow \quad 1 \leq k \leq n. \tag{2.1}$$

Teorema 2.8. *([2]) (Teorema de Schur-1923). Sigui $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ Hermítica amb valors propis $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ i sigui $d = (a_{11}, \ldots, a_{nn})$ el vector que conté els elements de la diagonal de A. Llavors*

$$d \prec \alpha.$$

Demostració. Pel Teorema Espectral, existeix una matriu unitària $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $A = UDU^*$, on $D = diag(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Per tant, si $U = (u_{ij})$ tenim que

$$a_{ii} = \sum_{j=1}^{n} |u_{ij}|^2 \alpha_j \quad 1 \leq i \leq n.$$

És a dir, $(a_{11}, \ldots, a_{nn})^T = S\alpha^T$, on S és una matriu amb coeficients $s_{ij} = |u_{ij}|^2$. Com que U és unitària aleshores S és doble estocàstica, i per tant, pel Teorema 2.7 tenim que $d \prec \alpha$.

□

2.2 Desigualtats de Fan

L'objectiu en aquesta secció és obtenir les Desigualtats de Fan. Per fer-ho, prèviament enunciarem i demostrarem el Principi del màxim de Fan.

Teorema 2.9. *([2]) (Principi del màxim de Fan). Sigui $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ Hermítica amb valors propis $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, aleshores*

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j = \max_{ortonormal\{x_j\}} \sum_{j=1}^{k} \langle x_j, Ax_j \rangle, \quad 1 \leq k \leq n. \tag{2.2}$$

Demostració. Pel Teorema 2.8 tenim que

$$\sum_{j=1}^{k} \langle x_j, Ax_j \rangle \leq \sum_{j=1}^{k} \alpha_j.$$

La igualtat es dona quan els x_j són els vectors propis de A amb $Ax_j = \alpha_j x_j$.

□

Corol·lari 2.10. *([2]) (Desigualtats de Ky Fan - 1949). Quan $k = 1$ en la desigualtat anterior* (2.2) *obtenim*

$$\alpha_1 = max_{\|x\|=1} \langle x, Ax \rangle$$

i quan $k = n$ els dos costats de la igualtat són iguals a $tr(A)$.
Per tant, obtenim les desigualtats

$$\sum_{j=1}^{k} \gamma_j \leq \sum_{j=1}^{k} \alpha_j + \sum_{j=1}^{k} \beta_j, \quad 1 \leq k < n, \tag{2.3}$$

Notem que quan $k = 1$, la desigualtat anterior es redueix a

$$\gamma_1 \leq \alpha_1 + \beta_1,$$

i quan $k = n$ obtenim la igualtat

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i.$$

Observació 2.11. *En termes de majorització, podem expressar* (2.3) *com*

$$\lambda(A + B) \prec \lambda^{\downarrow}(A) + \lambda^{\downarrow}(B). \tag{2.4}$$

2.3 Desigualtats de Lidskii

En aquesta secció veurem les Desigualtats de Lidskii-Wielandt i la relació d'aquestes amb les Desigualtats de Fan obtingudes en la secció anterior.

Teorema 2.12. *([2]) (Desigualtats de Lidski-Wielandt). Considerem A i $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ Hermítiques i $C = A+B$, amb valors propis $\alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_n$, $\beta_1 \geq \cdots \geq \beta_n$ i $\gamma_1 \geq \cdots \geq \gamma_n$, respectivament. Sigui $1 \leq k \leq n$ i $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$. Aleshores,*

$$\sum_{j=1}^{k} \gamma_{i_j} \leq \sum_{j=1}^{k} \alpha_{i_j} + \sum_{j=1}^{k} \beta_j. \tag{2.5}$$

Demostració. Fixem els indexs $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$.
Considerem les funcions $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ definides per

$$f(x) = x^+ = max\{0, x\},$$

$$g(x) = x^- = max\{0, -x\}, \quad \text{per } x \in \mathbb{R}.$$

Aleshores, definim

$$B_+ = f(B) \in {\mathbb{C}_+}^{n\times n},$$
$$B_- = g(B) \in {\mathbb{C}_+}^{n\times n},$$

que són la part positiva i la part negativa de B respectivament. Sigui $\{v_i\}, i = 1, \ldots, n$ una base ortonormal de $\mathbb{C}^n$ tal que

$$B = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(B) v_i v_i^* \Rightarrow \begin{cases} B_+ = \sum_{i=1, \lambda_i(B)\geq 0}^{n} \lambda_i(B) v_i v_i^* \\ \\ B_- = \sum_{i=1, \lambda_i(B)<0}^{n} -\lambda_i(B) v_i v_i^* \end{cases}$$

Ara, volem demostrar que

$$\sum_{j=1}^{k} [\lambda_{i_j}^{\downarrow}(A + B) - \lambda_{i_j}^{\downarrow}(A)] \leq \sum_{j=1}^{k} \lambda_j^{\downarrow}(B). \tag{2.6}$$

Podem substituir B per $B - \lambda_k^{\downarrow}(B)I$ i per tant podem assumir que $\lambda_k^{\downarrow}(B) = 0$. Sigui $B = B_+ - B_-$ la descomposició de B en les seves parts positives i negatives. Com que $B \leq B_+$, pel Corol·lari 1.8 sabem que $\lambda_{i_j}^{\downarrow}(A+B) \leq \lambda_{i_j}^{\downarrow}(A+B_+)$. Per tant,

$$\sum_{j=1}^{k}[\lambda_{i_j}^{\downarrow}(A+B)-\lambda_{i_j}^{\downarrow}(A)] \leq \sum_{j=1}^{k}[\lambda_{i_j}^{\downarrow}(A+B_+)-\lambda_{i_j}^{\downarrow}(A)] \leq \sum_{j=1}^{k}[\lambda_{j}^{\downarrow}(A+B_+)-\lambda_{j}^{\downarrow}(A)] = tr(B_+).$$

Tots els sumands són més grans o iguals que 0. Com que hem suposat que $\lambda_k^{\downarrow}(B) = 0$, tenim que

$$tr(B_+) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j^{\downarrow}(B).$$

I per tant, queda provada la desigualtat (2.6).

□

Observació 2.13. *Prenent $i_j = j$ en les desigualtats de Lidskii-Wielandt veiem que les desigualtats de Fan*

$$\sum_{j=1}^{k} \gamma_j \leq \sum_{j=1}^{k} \alpha_j + \sum_{j=1}^{k} \beta_j, \qquad 1 \leq k < n$$

són un cas particular de les desigualtats de Lidskii-Wielandt.

Observació 2.14. *Utilitzant*

$$\lambda_j^{\downarrow}(-A) = -\lambda_{n-j+1}^{\downarrow}(A) = -\lambda_j^{\uparrow}(A)$$

i les desigualtats de Lidskii-Wielandt, tenim que

$$\sum_{j=1}^{k} \gamma_{n-i_j+1} \geq \sum_{j=1}^{k} \alpha_{n-i_j+1} + \sum_{j=1}^{k} \beta_{n-j+1},$$

llavors obtenim la relació següent

$$\lambda^{\downarrow}(A) + \lambda^{\uparrow}(B) \prec \lambda(A+B). \tag{2.7}$$

A continuació estudiarem si les desigualtats trobades fins ara resolen un cas particular quan $n = 3$.

2.4 El cas $n = 3$

Siguin A, $B \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ Hermítiques i $C = A + B$, amb valors propis $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3$, $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \beta_3$ i $\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \gamma_3$, respectivament.

Quan $n = 3$ tenim les següents desigualtats:

- 6 desigualtats de Weyl:

$$\gamma_1 \leq \alpha_1 + \beta_1,$$

$$\gamma_2 \leq \alpha_1 + \beta_2,$$

$$
\begin{aligned}
\gamma_2 &\leq \alpha_2 + \beta_1, \\
\gamma_3 &\leq \alpha_2 + \beta_2, \\
\gamma_3 &\leq \alpha_3 + \beta_1, \\
\gamma_3 &\leq \alpha_1 + \beta_3.
\end{aligned} \tag{2.8}
$$

- 1 desigualtat de Fan:
$$\gamma_1 + \gamma_2 \leq \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2. \tag{2.9}$$
- 4 desigualtats de Lidskii-Wielandt:
$$
\begin{aligned}
\gamma_1 + \gamma_3 &\leq \alpha_1 + \alpha_3 + \beta_1 + \beta_2, \\
\gamma_2 + \gamma_3 &\leq \alpha_2 + \alpha_3 + \beta_1 + \beta_2, \\
\gamma_1 + \gamma_3 &\leq \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_3, \\
\gamma_2 + \gamma_3 &\leq \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_2 + \beta_3.
\end{aligned} \tag{2.10}
$$

Observació 2.15. *Les dues últimes desigualtats les obtenim utilitzant la simetria entre A i B, és a dir, utilitzant que*

$$\sum_{j=1}^{k} \gamma_{i_j} \leq \sum_{j=1}^{k} \beta_{i_j} + \sum_{j=1}^{k} \alpha_j.$$

Horn va demostrar (veure [4]) que hi ha una altra desigualtat vàlida,

$$\gamma_2 + \gamma_3 \leq \alpha_1 + \alpha_3 + \beta_1 + \beta_3. \tag{2.11}$$

Les 12 desigualtats que hem trobat, juntament amb

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3,$$

són suficient per trobar tots els possibles triplets de nombres reals $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, donats $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ i $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$.

Considerem doncs

$$\alpha = (4, 3, -2), \quad \beta = (2, -1, -6).$$

La relació entre traces ens dóna el següent pla de $\mathbb{R}^3$:

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0.$$

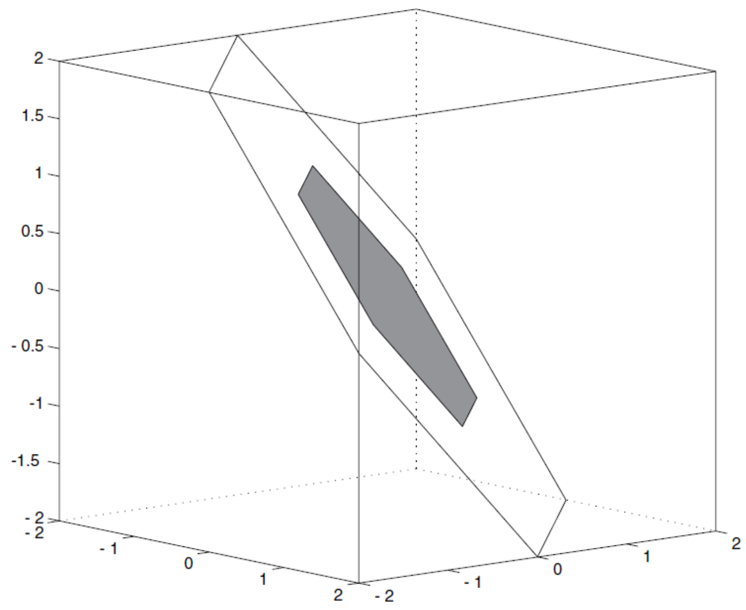

Figura 2.1: Part del pla $\{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0\}$, hexàgon petit $= \{|\gamma_k| \leq 1\}$.

Per comoditat rotem el pla de la Figura 2.1 a un pla $X - Y$.

La condició $\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \gamma_3$ ens dóna part del pla de la Figura 2.2 (següent pàgina).

De les 6 desigualtats de Weyl (2.8), tenim que

$$\gamma_1 \leq 6, \ \ \gamma_2 \leq 3, \ \ \gamma_2 \leq 5, \ \ \gamma_3 \leq -2, \ \ \gamma_3 \leq 0 \ \text{ i } \ \gamma_3 \leq 2,$$

que es redueixen a

$$\gamma_1 \leq 6, \ \ \gamma_2 \leq 3 \ \ i \ \ \gamma_3 \leq -2.$$

Això restringeix γ al pentàgon de la Figura 2.3.

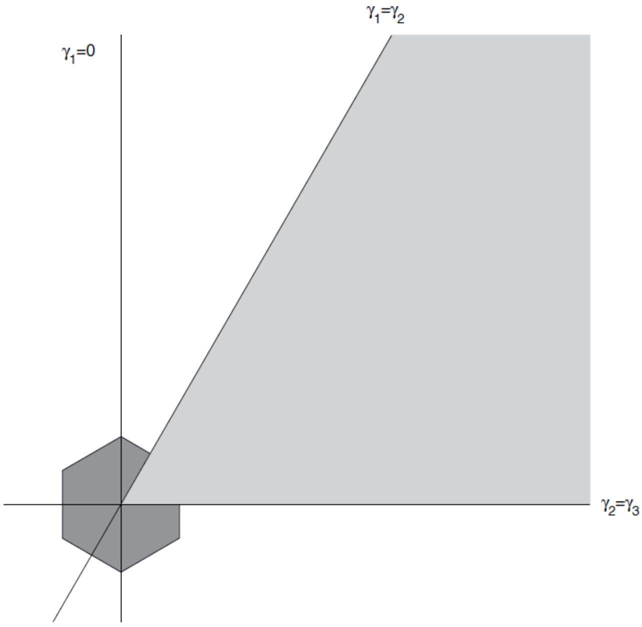

Figura 2.2: $\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \gamma_3$, hexàgon petit $= \{|\gamma_k| \leq 1\}$.

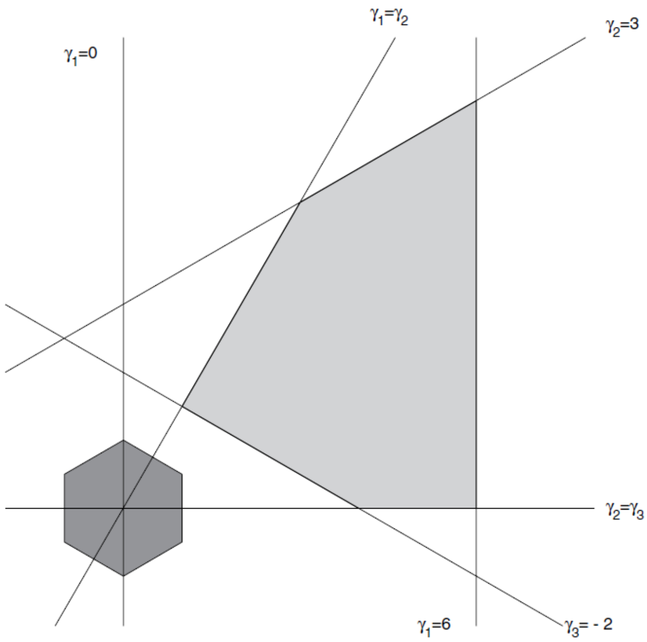

Figura 2.3: El pentàgon de Weyl en el pla $\{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0\}$.

Tenim una altra restricció de la desigualtat de Fan (2.9),

$$\gamma_1 + \gamma_2 \leq 8,$$

que restringeix γ a estar dins de l'hexàgon de la Figura 2.4.

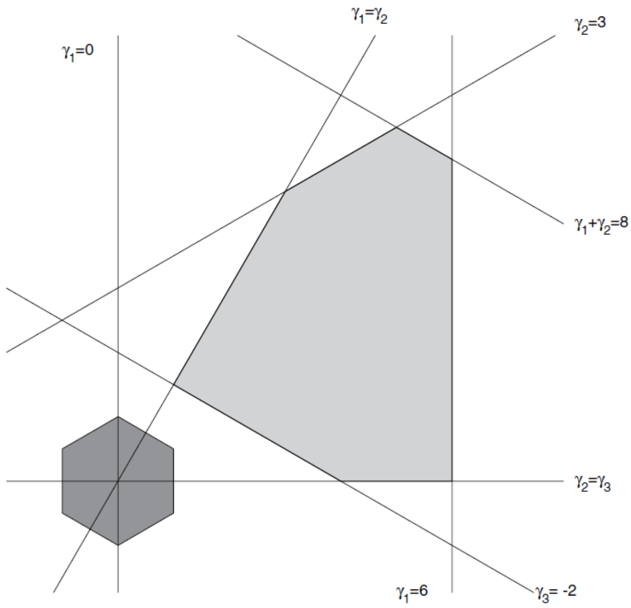

Figura 2.4: L'hexàgon de Ky Fan en el pla $\{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0\}$.

Les 4 desigualtats de Lidskii-Wielandt (2.9),

$$\gamma_1 + \gamma_3 \leq 3, \quad \gamma_2 + \gamma_3 \leq 2,$$

$$\gamma_1 + \gamma_3 \leq 8 \ \text{ i } \ \gamma_2 + \gamma_3 \leq 0,$$

es redueixen a

$$\gamma_1 + \gamma_3 \leq 3 \ \text{ i } \ \gamma_2 + \gamma_3 \leq 0.$$

Aquestes desigualtats no imposen cap restricció nova, per tant la Figura 2.4 es manté igual.
La desigualtat addicional (2.11) de Horn,

$$\gamma_2 + \gamma_3 \leq -2,$$

talla verticalment l'hexàgon, de manera que ens queda un heptàgon en la Figura 2.5.

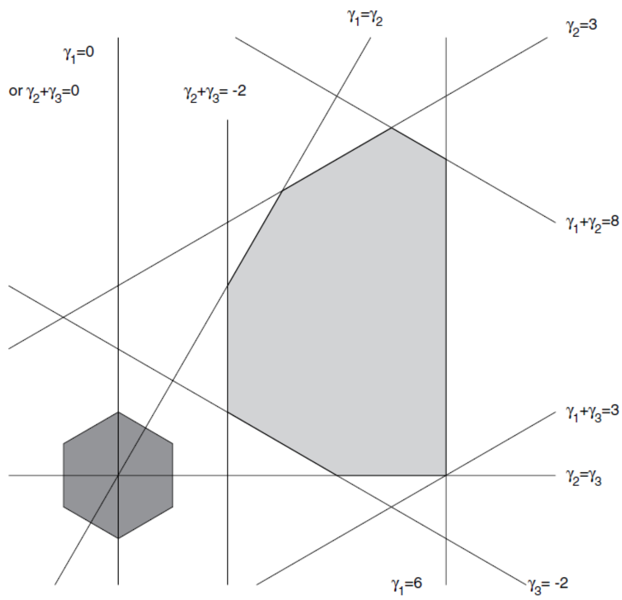

Figura 2.5: L'heptàgon de Horn.

Les condicions de majorització (2.4) i (2.7) per aquest cas ens donen la relació

$$(-2, 2, 0) \prec \gamma \prec (6, 2, -8).$$

En el pla $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0$, el conjunt de $\gamma \prec (6, 2, -8)$ es mostra en la Figura 2.6 i el conjunt $(-2, 2, 0) \prec \gamma$ en la Figura 2.7.
La intersecció d'aquests dos conjunts ens dona un hexàgon.
La desigualtat de Weyl

$$\gamma_2 \leq 3$$

imposa una condició que no estava inclosa en les majoritzacions anteriors, per tant amb aquesta condicó addicional obtenim la Figura 2.5.

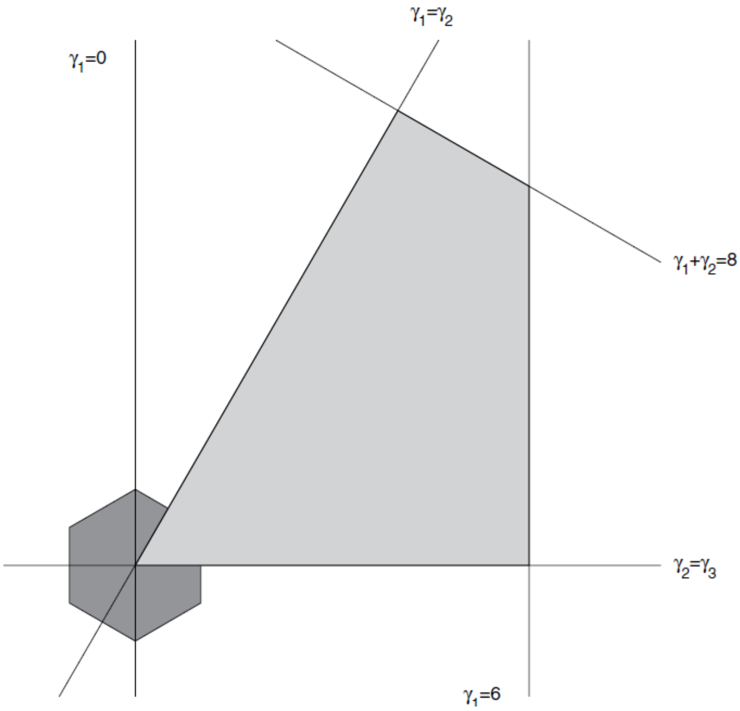

Figura 2.6: El conjunt que conté totes les γ tal que $\gamma \prec (6, 2, -8)$.

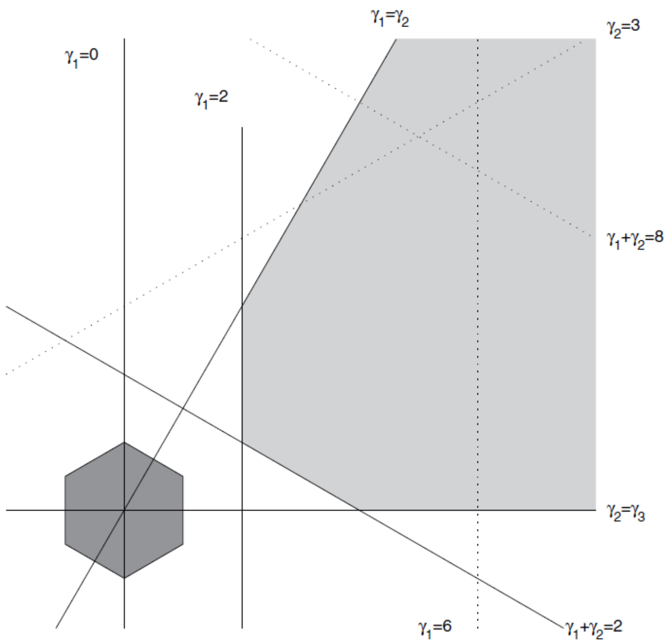

Figura 2.7: Part de la regió que conté els γ que majoritzen (2, 0, -2).

Un cop trobades aquestes solucions ens preguntem si hem obtingut totes les possibles solucions en aquest exemple per $n = 3$. En el capítol 3 veurem que la resposta és que sí.

Capítol 3

La conjectura de Horn

Comencem aquest capítol fent un petit resum del que hem vist fins ara.

Desigualtats de Weyl

$$\gamma_{i+j-1} \leq \alpha_i + \beta_j, \quad \text{per } i+j-1 \leq n.$$

Desigualtats de Fan

$$\sum_{j=1}^{k} \gamma_j \leq \sum_{j=1}^{k} \alpha_j + \sum_{j=1}^{k} \beta_j, \quad 1 \leq k < n$$

i les **Desigualats de Lidskii-Wielandt**, per $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$

$$\sum_{j=1}^{k} \gamma_{i_j} \leq \sum_{j=1}^{k} \alpha_{i_j} + \sum_{j=1}^{k} \beta_j, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Observem que les desigualtats de Weyl, Fan i Lidskii-Wielandt són totes de la forma:

$$\sum_{k \in K} \gamma_k \leq \sum_{i \in I} \alpha_i + \sum_{j \in J} \beta_j, \tag{3.1}$$

on I, J i K son subconjunts de $\{1, 2, \ldots, n\}$ amb el mateix cardinal.
Això ens fa preguntar-nos si totes les desigualtats que compleixen α, β i γ seran de la forma (3.1).

3.1 Més desigualtats associades al problema de Horn

En aquesta secció definirem els conjunts S_r^n i $\tilde{S}_r^n$, que ens permetran trobar més desigualtats entre α, β i γ. Veurem també que les desigualtats de Lidskii-Wielandt es poden escriure a partir de S_r^n.

Definició 3.1. *Siguin*

$$I = \{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n\},$$
$$J = \{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leq n\},$$

$$K = \{1 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_r \leq n\}.$$

Si es satisfà

$$\gamma_{k_1} + \cdots + \gamma_{k_r} \leq \alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_r} + \beta_{j_1} + \cdots + \beta_{j_r} \tag{3.2}$$

pels valors propis de $A+B$*, amb* A *i* $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *Hermítiques amb valors propis* $\alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_n$ *i* $\beta_1 \geq \cdots \geq \alpha_n$*, aleshores diem que* $(I, J, K) \in S_r^n$*.*

Definició 3.2. *Si en comptes de tenir* (3.2)*, tenim*

$$\gamma_{k_1} + \cdots + \gamma_{k_r} \geq \alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_r} + \beta_{j_1} + \cdots + \beta_{j_r}$$

aleshores diem que $(I, J, K) \in \tilde{S}_r^n$*.*

Exemple 3.3. Si $n = 2$ i

$$\alpha = (4, 1), \;\; \beta = (3, -2), \;\; \gamma = (7, -1).$$

Si $r = 1$, en aquest cas tenim que

$$\begin{aligned}
(1, 1, 1) &\in S_1^2, \;\; \text{ja que, } 7 \leq 4 + 3,\\
(2, 2, 1) &\notin S_1^2, \;\; \text{ja que, } 7 \nleq 1 - 2,\\
(1, 2, 1) &\notin S_1^2, \;\; \text{ja que, } 7 \nleq 4 - 2,\\
(2, 1, 1) &\notin S_1^2, \;\; \text{ja que, } 7 \nleq 1 + 3,\\
(1, 1, 2) &\in S_1^2, \;\; \text{ja que, } -1 \leq 4 + 3,\\
(1, 2, 2) &\in S_1^2, \;\; \text{ja que, } -1 \leq 4 - 2,\\
(2, 1, 2) &\in S_1^2, \;\; \text{ja que, } -1 \leq 1 + 3,\\
(2, 2, 2) &\in S_1^2, \;\; \text{ja que, } -1 \leq 1 - 2.
\end{aligned}$$

Teorema 3.4. *([4]) Les condicions següents són equivalents:*

(i) $(I, J, K) \in S_r^n$

(ii) $(n - i_r + 1, \ldots, n - i_1 + 1; \;\; n - j_r + 1, \ldots, n - j_1 + 1; \;\; n - k_r + 1, \ldots, n - k_1 + 1) \in \tilde{S}_r^n$

(iii) $(k_1, \ldots, k_r; \;\; n - j_r + 1, \ldots, n - j_1 + 1; \;\; i_1, \ldots, i_r) \in \tilde{S}_r^n$

(iv) $(I', J', K') \in \tilde{S}_r^n$*, on* I'*,* J' *i* K' *són els complementaris de* I*,* J *i* K *respecte* n*.*

Demostració. Observem que $A + B = C$, és equivalent a $-A - B = -C$.
En primer lloc volem veure que

$$\gamma_{k_1} + \cdots + \gamma_{k_r} \leq \alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_r} + \beta_{j_1} + \cdots + \beta_{j_r} \iff$$

$$\iff \gamma_{n-k_r+1} + \cdots + \gamma_{n-k_1+1} \geq \alpha_{n-i_r+1} + \cdots + \alpha_{n-i_1+1} + \beta_{n-j_r+1} + \cdots + \beta_{n-j_1+1}.$$

Com que $\lambda_j^{\downarrow}(-A) = -\lambda_{n-j+1}(A)$ aleshores

$$\gamma_{k_1} + \cdots + \gamma_{k_r} \leq \alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_r} + \beta_{j_1} + \cdots + \beta_{j_r} \iff$$

$$\iff -\gamma_{n-k_r+1} - \cdots - \gamma_{n-k_1+1} \leq -\alpha_{n-i_r+1} - \cdots - \alpha_{n-i_1+1} - \beta_{n-j_r+1} - \cdots - \beta_{n-j_1+1}$$

$$\iff \gamma_{n-k_r+1} + \cdots + \gamma_{n-k_1+1} \geq \alpha_{n-i_r+1} + \cdots + \alpha_{n-i_1+1} + \beta_{n-j_r+1} + \cdots + \beta_{n-j_1+1}.$$

Això prova l'equivalència de (i) amb (ii).
De manera semblant, com que l'equació $A+B=C$ es pot escriure també com $A=C-B$, això prova l'equivalència (i) amb (iii). L'equivalència de (i) amb (iv) és immediata per la condició de la traça (1.1).

$\square$

Observació 3.5. *Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ és Hermítica amb valors propis $\alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_n$ i M és un subespai vectorial de dimensió $n-1$, definim $A_M = PA$, on P és la projecció ortogonal a M.*
A_M és Hermítica i $(A+B)_M = A_M + B_M$.
Els valors propis α'_p de A_M separen els valors propis de A, és a dir,

$$\alpha_{p+1} \leq \alpha'_p \leq \alpha_p, \;\; \textit{per } 1 \leq p \leq n-1.$$

Una conseqüència immediata del Principi min-max (Teorema 1.6) és que si $\{x_1,\ldots,x_p\}$ és una seqüència ortonormal de vectors propis corresponents a (α_p) i $\{x_1,\ldots,x_m\} \subset M$, aleshores $\alpha'_p = \alpha_p$ per $1 \leq p \leq m$, ja que $\langle A_M x, x\rangle = \langle Ax, x\rangle$ per $x \in M$. Si $\{x_{m+1},\ldots,x_n\} \subset M$ aleshores $\alpha'_p = \alpha_{p+1}$ per $m \leq p \leq n-1$.

En el següent teorema veurem que S_r^n és independent de n.

Teorema 3.6. *([4]) Si $(I,J,K) \in S_r^n$ per algun n aleshores $i_p \leq k_p$ i $j_p \leq k_p$ per tot p, i $(I,J,K) \in S_r^n$ per tot $n \geq k_r$.*

Demostració. Suposem que $(I,J,K) \in S_r^n$ per un cert n, aleshores

$$\gamma_{k_1} + \cdots + \gamma_{k_r} \leq \alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_r} + \beta_{j_1} + \cdots + \beta_{j_r}.$$

Si $\beta = 0$, aleshores

$$\gamma_{k_1} + \cdots + \gamma_{k_r} \leq \alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_r}.$$

Com que $\alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_n$ i $\gamma_1 \geq \cdots \geq \gamma_n$, per a que es compleixi la desigualtat anterior necessàriament $\alpha_{i_1} \geq \gamma_{k_1}$, i això implica que

$$i_p \leq k_p \;\text{ i }\; j_p \leq k_p, \;\; \forall p.$$

Si A, $B \in \mathbb{C}^{k_r\times k_r}$, aleshores podem considerar

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -\lambda Id \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & -\lambda Id \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+B & 0 \\ 0 & -2\lambda Id \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n},$$

i per tant, $(I,J,K) \in S_r^{k_r}$.

Finalment hem de veure que $(I,J,K) \in S_r^{n+1}$.
Siguin ara A, $B \in \mathbb{C}^{(n+1)\times(n+1)}$ amb valors propis (α_p) i (β_p) respectivament. I sigui $M = \langle z_1,\ldots,z_n\rangle$ una base ortonormal de vectors propis de $A+B$ corresponent als valors propis (γ_p). Si (α'_p), (β'_p) i (γ'_p) són els valors propis de A_M, B_M i $(A+B)_M$ (veure Observació 3.5), per hipòtesi tenim que

$$\gamma'_{k_1} + \cdots + \gamma'_{k_r} \leq \alpha'_{i_1} + \cdots + \alpha'_{i_r} + \beta'_{j_1} + \cdots + \beta'_{j_r}.$$

I com que $\gamma'_{k_p} = \gamma_{k_p}$, $\alpha'_{i_p} \leq \alpha_{i_p}$ i $\beta'_{j_p} \leq \beta_{j_p}$ per $1 \leq p \leq r$, tenim que $(I,J,K) \in S_r^{n+1}$.

$\square$

En el següent teorema veiem com a partir d'una desigualtat en podem generar d'altres.

Teorema 3.7. *([4]) Si*

1. $(I, J, K) \in S_r^n$
2. u, v, w *són enters tals que*
$$1 \leq u \leq r+1,$$
$$1 \leq v \leq r+1,$$
$$1 \leq w \leq r$$
3. $i_u + j_v \geq k_{w-1} + k_r + 2$

aleshores

$$(i_1, \dots, i_{u-1}, i_u{+}1, \dots, i_r{+}1;\ j_1, \dots, j_{v-1}, j_v{+}1, \dots, j_r{+}1;\ k_1, \dots, k_{w-1}, k_w{+}1, \dots, k_r{+}1) \in S_r^{n+1}.$$

Definim $k_0 = 0$ *i* $i_{r+1} = j_{r+1} = k_r + 1$. *En particular,*

$$(i_1 + 1, \dots, i_r + 1; j_1, \dots, j_r; k_1 + 1, \dots, k_r + 1) \in S_r^{n+1}.$$

Demostració. Pel Teorema 3.6 podem suposar que $n = k_r$. Siguin $(x_p), (y_p), (z_p)$, amb $1 \leq p \leq n+1$, seqüències de vectors propis ortonormals corresponents als valors propis $(\alpha_p), (\beta_p)$ i (γ_p) de A, B i $A + B$.
Com que $i_u + j_v \geq k_{w-1} + n + 2$, existeix un subespai M de dimensió n que conté els vectors

$$x_p, \ \ i_u + 1 \leq p \leq n+1,$$
$$y_p, \ \ j_v + 1 \leq p \leq n+1,$$
$$z_p, \ \ 1 \leq p \leq k_{w-1}.$$

Siguin $(\alpha'_p), (\beta'_p)$ i (γ'_p) els valors propis de A_M, B_M i $(A + B)_M$ (veure Observació 3.5). Per hipòtesis tenim

$$\gamma'_{k_1} + \cdots + \gamma'_{k_r} \leq \alpha'_{i_1} + \cdots + \alpha'_{i_r} + \beta'_{j_1} + \cdots + \beta'_{j_r}.$$

I com que

$$\gamma'_p = \gamma_p, \ \text{per} \ 1 \leq p \leq k_{w-1}, \qquad \gamma_{p+1} \leq \gamma'_p, \ \text{per} \ k_w \leq p \leq n,$$
$$\alpha'_p \leq \alpha_p, \ \text{per} \ 1 \leq p \leq i_{u-1}, \qquad \alpha'_p = \alpha_{p+1}, \ \text{per} \ i_u \leq p \leq n,$$
$$\beta'_p \leq \beta_p, \ \text{per} \ 1 \leq p \leq j_{v-1}, \qquad \beta'_p = \beta_{p+1}, \ \text{per} \ j_v \leq p \leq n.$$

Queda demostrat el teorema.

□

En el següent Teorema retrobem les desigualtats de Lidskii (Capítol 2). Ara, ho demostrem d'una manera diferent, a partir del conjunt S_r^n.

Teorema 3.8. *([4]) (Lidskii-Wielandt). Si* $1 \leq p_1 < \cdots < p_r \leq n$, *llavors*

$$(p_1, \dots, p_r;\ 1, \dots, r;\ p_1, \dots, p_r) \in S_r^n.$$

Demostració. És evident que $(1,\ldots,r;\ \ 1,\ldots,r;\ \ 1,\ldots,r) \in S_r^n$.
Com que $i_1 + j_{r+1} = i_1 + k_r + 1 \geq k_r + 2 = k_0 + k_r + 2$, podem aplicar el Teorema 3.7.
Aplicant-lo $p_1 - 1$ vegades amb $u = w = 1$, $v = r+1$ tenim que

$$(p_1, p_1+1, \ldots, p_1+r-1;\ \ 1,\ldots,r;\ \ p_1, p_1+1,\ldots,p_1+r-1) \in S_r^{p_1+r-1}.$$

Com que $i_2 + j_{r+1} = i_2 + k_r + 1 \geq i_1 + k_r + 2 = k_1 + k_r + 2$ podem tornar a aplicar el Teorema 3.7. Aplicant-lo $p_2 - (p_1+1)$ vegades amb $u = w = 2$, $v = r+1$ i obtenim

$$(p_1, p_2, p_2+1, \ldots, p_2+r-2;\ \ 1,\ldots,r;\ \ p_1, p_2, p_2+1,\ldots,p_2+r-2).$$

Seguint així continuadament, arribem a

$$(p_1,\ldots,p_r;\ \ 1,\ldots,r;\ \ p_1,\ldots,p_r) \in S_r^{p_r}.$$

I finalment, pel Teorema 3.6 tenim que $(p_1,\ldots,p_r;\ \ 1,\ldots,r;\ \ p_1,\ldots,p_r) \in S_r^n$.

□

3.2 La Conjectura de Horn per matrius amb $n = 1, 2, 3$

En aquesta secció definirem els conjunts T_r^n i $\tilde{T}_r^n$, i enunciarem la Conjectura de Horn. A més, veurem que $T_1^n = S_1^n$ i $T_r^n \subset S_r^n$, per $r = 2, 3$.

Definició 3.9. *Definim el conjunt T_r^n inductivament:*

- *Diem $(i_1; j_1; k_1) \in T_1^n$ si $1 \leq i_1 \leq n$, $1 \leq j_1 \leq n$, $1 \leq k_1 \leq n$ i $i_1 + j_1 = k_1 + 1$.*
- *Diem $(i_1,\ldots,i_r; j_1,\ldots,j_r; k_1,\ldots,k_r) \in T_r^n$ si $1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n$, $1 \leq j_1 < \cdots < j_r \leq n$, $1 \leq k_1 < \cdots < k_r \leq n$ i $i_1 + \cdots + i_r + j_1 + \cdots + \cdots + j_r = k_1 + \cdots + k_r + \frac{r(r+1)}{2}$.*
- *Tenim $i_{u_1} + \cdots + i_{u_s} + j_{v_1} + \cdots + j_{v_s} \leq k_{w_1} + \cdots + k_{w_s} + \frac{s(s+1)}{2}$, quan $(u; v; w) \in T_s^r$, per tot $1 \leq s \leq r-1$.*

Exemple 3.10. Sigui $n \geq 4$ i $r = 2$. Veiem un exemple d'un conjunt $(I, J, K) \in T_2^n$.
Prenem

$$i_1 = 1,\ \ i_2 = 3,$$

$$j_1 = 2,\ \ j_2 = 3,$$

$$k_1 = 2,\ \ k_2 = 4.$$

Es satisfan les condicions $1 \leq i_1 < i_2 \leq n$, $1 \leq j_1 < j_2 \leq n$ i $1 \leq k_1 < k_2 \leq n$, per tant de moment podem seguir.
Veiem també que satisfan $i_1 + i_2 + j_1 + j_2 = k_1 + k_2 + 3$, ja que

$$9 = 1 + 3 + 2 + 3 = 2 + 4 + 3 = 9.$$

Finalment, hem de veure que per tots els u_1, v_1, w_1 tals que

(1) $1 \leq u_1 \leq 2$, $1 \leq v_1 \leq 2$ i $1 \leq w_1 \leq 2$

(2) $u_1 + v_1 = w_1 + 1$

es satisfà que

$$i_{u_1} + j_{v_1} \leq k_{w_1} + 1.$$

Veiem si en els cassos que es satisfan les condicions de u_1, v_1 i w_1 es satisfà l'última condició dels i, j, k:

- Si $u_1 = v_1 = w_1 = 1$, volem veure si $i_1 + j_1 \leq k_1 + 1$,

$$1 + 2 \leq 2 + 1 \ \checkmark$$

- Si $u_1 = w_1 = 2$ i $v_1 = 1$, volem veure si $i_2 + j_1 \leq k_2 + 1$,

$$3 + 2 \leq 4 + 1 \ \checkmark$$

- Si $u_1 = 1$ i $v_1 = w_1 = 2$, volem veure si $i_1 + j_2 \leq k_2 + 1$,

$$1 + 3 \leq 4 + 1 \ \checkmark$$

I per tant, hem vist que

$$(1, 3;\ 2, 3;\ 2, 4) \in T_2^n.$$

Utilitzant el Teorema 3.4 (ii), podem definir el conjunt següent.

Definició 3.11. *Definim inductivament $\tilde{T}_r^n$:*

- *Diem que $(i_1; j_1; k_1) \in \tilde{T}_1^n$ si $i_1 + j_1 = k_1 + n$*
- *Diem que $(I, J, K) \in \tilde{T}_r^n$ si $i_1 + \cdots + i_r + j_1 + \cdots + j_r = k_1 + \cdots + k_r + nr - \frac{r(r-1)}{2}$*
- *Tenim $i_{u_1} + \cdots + i_{u_s} + j_{v_1} + \cdots + j_{v_s} \geq k_{w_1} + \cdots + k_{w_s} + ns - \frac{s(s-1)}{2}$ quan $(u; v; w) \in \tilde{T}_s^n$.*

Observació 3.12. $(I, J, K) \in T_r^n$*, si i només si,*

$$(n - i_r + 1, \dots, n - i_1 + 1;\ \ n - j_r + 1, \dots, n - j_1 + 1;\ \ n - k_r + 1, \dots, n - k_1 + 1) \in \tilde{T}_r^n.$$

I per tant, pel Teorema 3.4 tenim que $T_r^n \subset S_r^n$ és equivalent a $\tilde{T}_r^n \subset \tilde{S}_r^n$.

La conjectura de Horn. Alfred Horn va conjecturar que si α, β són valors propis de les matrius Hermítiques $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$, llavors $C = A + B$ té valors propis γ, si i només si, es satisfan les desigualtats

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \ \text{ i}$$

$$\sum_{k \in K} \gamma_k \leq \sum_{i \in I} \alpha_i + \sum_{j \in J} \beta_j,$$

per qualsevol $(I, J, K) \in T_r^n$, per tot $r < n$.

Horn va demostrar la conjectura per $n = 3$ i $n = 4$. Quan $n = 2$, les condicions es redueixen a les tres desigualtats de Weyl (1.9). Quan $n = 3$, es redueixen a les dotze desigualtats (2.8), (2.9), (2.10) i (2.11). Quan $n = 7$, hi ha 2062 desigualtats donades per aquestes condicions (poden no ser totes independents).

En primer lloc veiem que $T_1^n = S_1^n$.

Teorema 3.13. *([4])* $(i_1; j_1; k_1) \in S_1^n$ *per* $n \geq k_1$*, si i només si,*

$$1 \leq i_1 \leq k_1,$$

$$1 \leq j_1 \leq k_1 \quad i$$

$$i_1 + j_1 = k_1 + 1.$$

Demostració. La suficiència és per Weyl (Teorema 1.10).
Necessariament $i_1 \leq k_1$ i $j_1 \leq k_1$ pel Teorema 3.6.
Si $i_1 + j_1 \geq k_1 + 2$ i definim

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{k_1 \times k_1},$$

tal que la A té $i_1 - 1$ uns i la B en té $j_1 - 1$.
Com que hem suposat que $i_1 + j_1 \geq k_1 + 2$, aleshores $k_1 - (j_1 - 1) = k_1 - j_1 + 1 \leq i_1 - 1$, i per tant tots els valors propis de $A + B$ són ≥ 1. Per tant, $\gamma_{k_1} \geq 1$, mentres que $\alpha_{i_1} = \beta_{j_1} = 0$, que és una contradicció del fet que $(i_1; j_1; k_1) \in S_1^k$.

□

Veiem a continuació que $T_2^n \subset S_2^n$.

Teorema 3.14. *([4]) Siguin* $I = \{1 \leq i_1 < i_2 \leq n\}$*,* $J = \{1 \leq j_1 < j_2 \leq n\}$ *i* $K = \{1 \leq k_1 < k_2 \leq n\}$*, tals que*

$$i_1 + j_1 \leq k_1 + 1,$$

$$i_1 + j_2 \leq k_2 + 1,$$

$$i_2 + j_1 \leq k_2 + 1 \quad i$$

$$i_1 + i_2 + j_1 + j_2 = k_1 + k_2 + 3,$$

aleshores $(I, J, K) \in S_2^n$.

Demostració. Pel Teorema 3.6 podem suposar que $n = k_2$.
Farem la demostració per inducció sobre n.
Si $n = 2$, surt de la igualtat de la traça.
Ara suposem que es satisfà l'enunciat per tota $n < N$, on $N > 2$, i ho demostrem per

$n = N$.
Per hipòtesi

$$1 \le i_1 < i_2 \le n, \quad 1 \le j_1 < j_2 \le n, \quad 1 \le k_1 < k_2 \le n,$$

$$i_1 + j_1 \le k_1 + 1, \quad i_1 + j_2 \le k_2 + 1, \quad i_2 + j_1 \le k_2 + 1,$$

tenim $i_1 \le k_1$, $i_2 \le k_2$, $j_1 \le k_1$ i $j_2 \le k_2$.
Suposem $i_1 > 1$, aleshores els parells $(i_1 - 1, i_2 - 1)$, (j_1, j_2) i $(k_1 - 1, k_2 - 1)$ satisfan totes les desigualtats de l'enunicat del teorema, i per la hipòtesi d'inducció tenim que

$$(i_1 - 1, i_2 - 1;\ j_1, j_2;\ k_1 - 1, k_2 - 1) \in S_2^{N-1}.$$

Si apliquem el Teorema 3.7 amb $u = w = 1$, $v = 3$, obtenim que $(I; J; K) \in S_2^N$.
Anàlogament pel cas $j_1 > 1$.
Finalment si $i_1 = j_1 = 1$ i

$$(i_1, i_2 - 1;\ \ j_1, j_2 - 1;\ \ k_1 - 1, k_2 - 1) \in S_2^{N-1}, \tag{3.3}$$

$$i_2 + j_2 \le 3 + k_2, \tag{3.4}$$

aleshores pel Teorema 3.7 amb $u = v = 2$, $w = 1$ tenim que $(I, J, K) \in S_2^N$.
La condició (3.4), que és necessària per poder aplicar el Teorema 3.7, també garanteix la condició (3.3), ja que $(i_1, i_2 - 1;\ \ j_1, j_2 - 1;\ \ k_1 - 1, k_2 - 1) \notin S_2^{N-1}$ quan es satisfà alguna de les següents condicions:

i) $i_2 = i_1 + 1 = 2$

ii) $j_2 = j_1 + 1 = 2$

iii) $k_1 = 1$

iv) $i_1 + j_1 = k_1 + 1$

En efecte, si tenim (i) aleshores $i_2 + j_2 = 2 + j_2 \le 2 + k_2$, contradient així $i_2 + j_2 \le 3 + k_2$.
Si (ii) aleshores $i_2 + j_2 = i_2 + 2 \le 2 + k_2$.
Si es satisfà (iii), com que hem suposat que $i_1 = i_2 = 1$ aleshores $i_1 + i_2 + j_1 + j_2 = 2 + i_2 + j_2 = k_1 + k_2 + 3 = k_2 + 4$ o $i_2 + j_2 = k_2 + 2$, contradient així $i_2 + j_2 \le 3 + k_2$.
I finalment, la condició (iv) implica la condició (iii), ja que hem suposat que $i_1 = i_2 = 1$.
Per tant, podem suposar que

$$i_2 + j_2 \le 2 + k_2. \tag{3.5}$$

Si $i_2 \ge k_1 + 2$, per hipòtesis d'inducció tenim que

$$(i_1, i_2 - 1;\ \ j_1, j_2;\ \ k_1, k_2 - 1) \in S_2^{N-1}$$

i aplicant el Teorema 3.7 amb $u = w = 2$, $v = 3$ tenim que $(I, J, K) \in S_2^N$.
Per tant, suposem que

$$i_2 \le k_1 + 1 \quad \text{i} \quad j_2 \le k_1 + 1.$$

Ara, les igualtats

$$i_1 + i_2 + j_1 + j_2 = k_1 + k_2 + 3 \quad \text{i}$$

$$i_1 = i_2 = 1$$

impliquen

$$i_2 + j_2 = k_1 + k_2 + 1.$$

I aquesta última desigualtat, juntament amb $i_2 + j_2 \leq 2 + k_2$ impliquen que $k_1 = 1$.
Per tant, per definició dels I, J, K i com que $i_2 \leq k_1 + 1$ i $j_2 \leq k_1 + 1$, tenim que $i_2 = j_2 = 2$, i per tant, $i_1 = j_1 = 1$.
Usant $i_1 + i_2 + j_1 + j_2 = k_1 + k_2 + 3$, obtenim que $k_2 = 2$, que és contradicció amb $N > 2$.

□

Finalment, veiem que $T_3^n \subset S_3^n$.

Teorema 3.15. *([4]) Siguin* $I = \{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n\}$, $J = \{1 \leq j_1 < j_2 < j_3 \leq n\}$ *i* $K = \{1 \leq k_1 < k_2 < k_3 \leq n\}$, *tals que*

$$i_1 + j_1 \leq k_1 + 1,$$

$$i_1 + j_2 \leq k_2 + 1,$$

$$i_2 + j_1 \leq k_2 + 1,$$

$$i_1 + j_3 \leq k_3 + 1,$$

$$i_2 + j_2 \leq k_3 + 1,$$

$$i_3 + j_1 \leq k_3 + 1,$$

$$i_1 + i_2 + j_1 + j_2 \leq k_1 + k_2 + 3,$$

$$i_1 + i_2 + j_1 + j_3 \leq k_1 + k_3 + 3,$$

$$i_1 + i_3 + j_1 + j_2 \leq k_1 + k_3 + 3,$$

$$i_1 + i_2 + j_2 + j_3 \leq k_2 + k_3 + 3,$$

$$i_2 + i_3 + j_1 + j_2 \leq k_2 + k_3 + 3,$$

$$i_1 + i_3 + j_1 + j_3 \leq k_2 + k_3 + 3 \ \ i$$

$$i_1 + i_2 + i_3 + j_1 + j_2 + j_3 = k_1 + k_2 + k_3 + 6,$$

aleshores $(I, J, K) \in S_3^n$.

Demostració. Podem suposar que $n = k_3$, i ho demostrem per inducció sobre n.
Quan $n = 3$, tenim $i_1 = j_1 = k_1$, $i_2 = j_2 = k_2 = 2$, $i_3 = j_3 = k_3 = 3$ i el resultat surt de la igualtat de la traça.
Ara suposem que es satisfà l'enunciat per $n < N$, on $N > 3$.
Com al Teorema 3.14, suposem que $i_1 = j_1 = 1$. Si

$$(i_1, i_2 - 1, i_3 - 1), \quad (j_1, j_2, j_3 - 1), \quad (k_1 - 1, k_2 - 1, k_3 - 1) \tag{3.6}$$

satisfan les desigualtats de l'enunciat i si

$$i_2 + j_3 \geq k_3 + 3, \tag{3.7}$$

aleshores per la hipòtesis d'inducció i el Teorema 3.7 amb $u = 2$, $v = 3$, $w = 1$ obtenim el resultat.

Tornem a veure que la condició (3.7), que és necessària per poder aplicar el Teorema 3.7, garanteix que es compleixi (3.6). Per exemple $k_1 - 1 \geq 1$, ja que si $k_1 = 1$, aleshores per

$$i_1 + i_2 + j_1 + j_3 \leq k_1 + k_3 + 3,$$

$$i_1 + i_3 + j_1 + j_2 \leq k_1 + k_3 + 3 \quad \text{i}$$

$$i_1 = j_1 = 1,$$

tenim que

$$i_2 + j_3 \leq k_3 + 2,$$

contradient així (3.7).
Les desigualtats

$$i_2 + j_2 \leq k_3 + 1,$$

$$i_2 + j_3 \geq k_3 + 3 \quad \text{i}$$

$$j_3 \leq k_3,$$

garanteixen que $j_3 - 1 > j_2$. Per tant, podem suposar que

$$i_2 + j_3 \leq k_3 + 2 \quad \text{i} \quad i_3 + j_2 \leq k_3 + 2. \tag{3.8}$$

També podem suposar que

$$i_2 \leq k_1 + 1 \quad \text{i} \quad j_2 \leq k_1 + 1,$$

ja que si $i_2 \geq k_1 + 2$, aleshores $(i_1, i_2 - 1, i_3 - 1;\ \ j_1, j_2, j_3;\ \ k_1, k_2 - 1, k_3 - 1) \in S_3^{N-1}$ i el Teorema 3.7 amb $u = 2$, $v = 3$, $w = 2$ ens dona que $(I, J, K) \in S_3^N$.
De manera semblant, també podem suposar que

$$i_3 + j_3 \leq k_1 + k_3 + 2, \quad i_3 \leq k_2 + 1 \quad \text{i} \quad j_3 \leq k_2 + 1. \tag{3.9}$$

Ara, agrupant totes les desigualtats de l'enunciat, més $i_1 = j_1 = 1$ i les desigualtats

$$i_2 + j_3 \leq k_3 + 2, \quad i_3 + j_2 \leq k_3 + 2,$$

$$i_2 \leq k_1 + 1, \quad j_2 \leq k_1 + 1,$$

$$i_3 + j_3 \leq k_1 + k_3 + 2, \quad i_3 \leq k_2 + 1 \quad \text{i} \quad j_3 \leq k_2 + 1,$$

impliquen que

$$k_1 + k_2 = k_3,$$

$$i_2 = j_2 = k_3 + 1,$$

$$i_3 = j_3 = k_2 + 1,$$

$$k_1 + 1 \leq k_2 \leq 2k_1.$$

Per tant, només hem de veure que es sarisfà

$$(1, p + 1, p + q + 1;\ \ 1, p + 1, p + q + 1;\ \ p, p + q, 2p + q) \in S_3^n$$

per $1 \leq q \leq p$ i $2p + q = n$.

Siguin A, B i $A + B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ amb valors propis $(\alpha_p), (\beta_p)$ i (γ_p), respectivament. Tenim que

$$q\gamma_p \leq \gamma_p + \gamma_{p-1} + \cdots + \gamma_{p-r+1},$$

$$q\gamma_{p+q} \leq \gamma_{p+q} + \cdots + \gamma_{p+1} \text{ i}$$
$$q\gamma_{2p+q} \leq \gamma_{2p+q} + \cdots + \gamma_{2p+1}.$$

Per tant,

$$q(\gamma_p + \gamma_{p+q} + \gamma_{2p+1}) \leq tr(A+B) - (\gamma_1 + \cdots + \gamma_{p-q} + \gamma_{p+q+1} + \cdots + \gamma_{2p}).$$

De manera semblant també es té

$$q(\alpha_1 + \alpha_{p+1} + \alpha_{p+q+1}) \geq tr(A) - (\alpha_{q+1} + \cdots + \alpha_p + \alpha_{p+2q+1} + \cdots + \alpha_{2p+q}),$$

i per les β's tenim que

$$q(\beta_1 + \beta_{p+1} + \beta_{p+q+1}) \geq tr(B) - (\beta_{q+1} + \cdots + \beta_p + \beta_{p+2q+1} + \cdots + \beta_{2p+q}).$$

Conseqüentment, només hem de demostrar que

$$(q{+}1, \ldots, p, p{+}2q{+}1, \ldots, 2p{+}q;\ \ q{+}1, \ldots, p, p{+}2q{+}1, \ldots, 2p{+}q;\ \ 1, \ldots, p{-}q, p{+}q{+}1, \ldots, 2p) \in \tilde{S}^n_{2p-2q}.$$

Això quedarà demostrat pel Teorema 3.4, si veiem que

$$(1, \ldots, p{-}q, p{+}q{+}1, \ldots, 2p;\ \ 1, \ldots, p{-}q, p{+}q{+}1, \ldots, 2p;\ \ q{+}1, \ldots, p, p{+}2q{+}1, \ldots, 2p{+}q) \in S^n_{2p-2q}.$$

Pel Teorema 3.8 tenim que

$$(1, \ldots, 2p-2q;\ \ 1, \ldots, p-q, p+1, \ldots, 2p-q;\ \ 1, \ldots, p-q, p+1, \ldots, 2p-q) \in S^{2p-q}_{2p-2q}.$$

Ara, podem aplicar el Teorema 3.7 q vegades amb $u = w = p - q + 1$, $v = 2p - 2q + 1$ i obtenim

$$(1, \ldots, p{-}q, p{+}1, \ldots, 2p{-}q;\ \ 1, \ldots, p{-}q, p{+}1, \ldots, 2p{-}q;\ \ 1, \ldots, p{-}q, p{+}q{+}1, \ldots, 2p) \in S^{2p}_{2p-2q}.$$

Finalment, aplicant el Teorema 3.7 q vegades més, amb $u = v = p - q + 1$, $w = 1$ obtenim

$$(1, \ldots, p{-}q, p{+}q{+}1, \ldots, 2p;\ \ 1, \ldots, p{-}q, p{+}q{+}1, \ldots, 2p;\ \ q{+}1, \ldots, p, p{+}2q{+}1, \ldots, 2p{+}q) \in S^n_{2p-2q},$$

que és el que necessitavem veure per acabar la demostració.

□

Hem vist doncs que $T^n_r \subset S^n_r$ per $r = 1, 2, 3$.

El cas $r = 4$ es pot demostrar de manera similar, però veient la dificultat per $r = 3$, ja es veu que queda una demostració molt complicada.

3.3 Conjunts admissibles

En aquesta secció definirem els conjunts E i F de $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, que ens permetran demostrar la Conjectura de Horn per $n = 1, 2, 3, 4$.

Definició 3.16. *Siguin α, β amb $\alpha_1 > \cdots > \alpha_n$ i $\beta_1 > \cdots > \beta_n$.*
Definim E com el conjunt de $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ tals que $\gamma_1 \geq \cdots \geq \gamma_n$, i γ és la seqüència de valors propis de

$$diag(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) + U^* diag(\beta_1, \ldots, \beta_n) U,$$

on $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ és una matriu unitària qualsevol.

Definim E' com el subconjunt de E tal que les matrius U són ortogonals.

Definició 3.17. *F és el conjunt de $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ amb $\gamma_1 \geq \cdots \geq \gamma_n$, tals que*

$$\gamma_1 + \cdots + \gamma_n = \alpha_1 + \cdots + \gamma_n + \beta_1 + \cdots + \beta_n, \quad i$$

$$\gamma_{k_1} + \cdots + \gamma_{k_r} \leq \alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_r} + \beta_{j_1} + \cdots + \beta_{j_r},$$

on $(I, J, K) \in T_r^n$, $1 \leq r \leq n-1$.

A la secció anterior hem demostrat que $E \subset F$ per $n \leq 4$, ara volem demostrar que $E = F$ per $n \leq 4$ i haurem demostrat la Conjectura de Horn per $n = 1, 2, 3, 4$.

El conjunt E' és un subconjunt tancat de E. Com que F és tancat i convex aleshores si la frontera de E' està continguda a la frontera de F, tindrem que $E' = F$ i que per tant $E = F$.

Teorema 3.18. *([4]) Si γ és un punt de la frontera de E' amb coordenades diferents aleshores, existeixen un enter positiu $r < n$ i seqüències $I = \{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n\}$, $J = \{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leq n\}$ i $K = \{1 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_r \leq n\}$ tals que*

$$(\gamma_{k_1}, \ldots, \gamma_{k_r}) \in E'(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_r};\ \beta_{j_1}, \ldots, \beta_{j_r}),$$

$$(\gamma_{k'_1}, \ldots, \gamma_{k'_{n-r}}) \in E'(\alpha_{i'_1}, \ldots, \alpha_{i'_{n-r}};\ \beta_{j_1}, \ldots, \beta_{j'_{n-r}}),$$

on I', J' i K' són els complementaris de I, J, K respecte n.

Teorema 3.19. *([4]) Sigui γ un punt de la frontera de E' amb coordenades diferents. Llavors existeixen seqüències I, J, K que satisfan el Teorema 3.18 i a més,*

$$i_1 + \cdots + i_r + j_1 + j_r = k_1 + \cdots + k_r + \frac{r(r+1)}{2}.$$

Un punt de la frontera de E' amb almenys dos coordenades iguals és un punt de la frontera de F.
Si γ és un punt de la frontera de E' amb coordenades diferents, aleshores γ té associat un (I, J, K) satisfent les condicions del Teorema 3.19.

Teorema 3.20. *([4]) Si γ és un punt de la frontera de E' amb seqüències (I, J, K) d'ordre r associades, aleshores per qualsevol $(x; y; z) \in \tilde{S}_m^r$, no pot existir $(u; v; w) \in S_m^{n-r}$ tal que*

$$i_{x_p} \leq x_p + u_p - 1, \quad j_{y_p} \leq y_p + v_p - 1 \quad i \quad k_{z_p} \leq z_p + w_p$$

per $1 \leq p \leq m$.

Demostració. Per comoditat escriurem $\alpha(p)$ en comptes de α_p. Per hipòtesis existeixen matrius Hermítiques A_1, B_1 i $A_1 + B_1$ amb valors propis $(\alpha(i_p)), (\beta(j_p))$ i $(\gamma(k_p))$, $p = 1, \ldots, r$ i matrius Hermítiques A_2, B_2 i $A_2 + B_2$ amb valors propis $(\alpha(i'_p)), (\beta(j'_p))$ i $(\gamma(k'_p))$, $p = 1, \ldots, n-r$, on i', j' i k' són els complementaris de i, j, k respecte n.
Si existeix $(u; v; w) \in S_m^{n-r}$ tal que $i_{x_p} < i'_{u_p}$, $j_{y_p} < j'_{v_p}$ i $k_{z_p} < k'_{w_p}$, $1 \leq p \leq m$, aleshores tenim que

$$\sum_{p=1}^{m} \alpha(i_{x_p}) + \sum_{p=1}^{m} \beta(j_{y_p}) \leq \sum_{p=1}^{m} \gamma(k_{z_p}) < \sum_{p=1}^{m} \gamma(k'_{w_p}) \leq \sum_{p=1}^{m} \alpha(i'_u) + \sum_{p=1}^{m} \beta(j'_v).$$

La qual cosa és impossible ja que $\alpha(i_{x_p}) > \alpha(i'_{u_p})$ i $\beta(j_{y_p}) < \beta(j'_{v_p})$. Per tant, només falta demostrar que

$$i_p \leq p + q - 1 \Rightarrow i_p < i'_q.$$

Si $i_p \leq p + q - 1$, aleshores almenys p termes de la seqüència i són $\leq p + q - 1$, per tant, com a molt $q - 1$ enters positius $\leq p + q - 1$ no estan en la seqüència i. Així doncs, $i'_q > p + q - 1 \geq i_p$.

□

Teorema 3.21. *([4]) Si γ és un punt de la frontera de E' amb seqüències d'ordre r (I, J, K) associades, aleshores*

$$i_x + j_y \geq k_z + r, \quad \textit{per qualsevol } (x, y, z) \in \tilde{T}_1^r.$$

Generalitzant, si $x + y \geq z + r$, aleshores $i_x - x + j_y - y \geq k_z - z$.

Demostració. Tenim que $n \geq r + 1 \geq 2$. Com que $(x; y; x + y - r) \in \tilde{T}_1^r \subset \tilde{S}_1^r$, aleshores $(x; y; z) \in \tilde{S}_1^r$.
Sigui $u = i_x - x + 1$, $v = j_v - y + 1$ i $w = k_z - z$, aleshores $u \geq 1, v \geq 1$ i $w \leq n - r$, ja que $k_1 - 1 \leq k_2 - 2 \leq \cdots \leq k_r - r \leq n - r$.
Falta veure que $u + v \geq w + 2$: si $u + v \leq w + 1$, aleshores $w \geq 1$, $u \leq w$ i $v \leq w$, per tant, $(u; v; w) \in T_1^{n-r}$, contradient el Teorema 3.20.

□

Teorema 3.22. *([4]) Si γ és un punt de la frontera de E' amb seqüències d'ordre r (I, J, K) associades i per qualsevol $(x, y, z) \in \tilde{T}_1^r$ tenim que $i_x + j_y \geq k_z + r$.*
Si $n \geq r + 2$, aleshores

$$i_{x_1} + i_{x_2} + j_{y_1} + j_{y_2} \geq k_{z_1} + k_{z_2} + 2r - 1, \quad \textit{per qualsevol } (x, y, z) \in \tilde{T}_2^r.$$

Demostració. Tenim que

$$x_1 + y_2 \geq z_1 + r, \;\; x_2 + y_1 \geq z_1 + r, \quad x_2 + y_2 \geq z_2 + r,$$

$$x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = z_1 + z_2 + 2r - 1.$$

Siguin $a_p = i_{x_p} - x_p + 1$, $b_p = j_{y_p} - y_p + 1$, $c_p = w_{z_p} - z_p$, per $p = 1, 2$. Pel Teorema 3.21,

$$a_1 + b_2 \geq c_1 + 2, \quad a_2 + b_1 \geq c_1 + 2 \;\text{ i }\; a_2 + b_2 \geq c_2 + 2.$$

Suposem $a_1 + a_2 + b_1 + b_2 \leq c_1 + c_2 + 3$, llavors,

$$a_1 + b_1 \leq c_1 + 1 \tag{3.10}$$

$$a_1 + b_2 \leq c_2 + 1 \tag{3.11}$$
$$a_2 + b_1 \leq c_2 + 1, \tag{3.12}$$

i

$$1 \leq a_1 \leq a_2, \quad 1 \leq b_1 \leq b_2 \quad \text{i} \quad c_2 \leq n - r.$$

Per (3.10) sabem que $c_1 \geq 1$, a més, $c_1 + 2 \leq a_1 + b_2 \leq c_2 + 1$, per tant $c_1 + 1 \leq c_2$. Siguin ara

$$u_1 = a_1, \quad u_2 = max(a_2, a_1 + 1),$$
$$v_1 = b_1, \quad v_2 = max(b_2, b_1 + 1),$$
$$w_1 = c_1 \quad \text{i} \quad w_2 = c_2.$$

Es pot veure que

$$u_1 + v_1 \leq w_1 + 1, \quad u_1 + v_2 \leq w_2 + 1, \quad u_2 + v_1 \leq w_2 + 1 \quad \text{i}$$
$$u_1 + u_2 + v_1 + v_2 \leq w_1 + w_2 + 3.$$

Existeix doncs un parell (w_1', w_2') tal que $w_1' \leq w_1$, $w_2' \leq w_2$ i $(u; v; w) \in T_s^{n-r}$, i això contradiu el Teorema 3.20.

□

Usant la versió generalitzada del Teorema 3.21, és pot veure que

$$i_{x_1} + i_{x_2} + i_{x_3} + j_{y_1} + j_{y_2} + j_{y_3} \geq k_{z_1} + k_{z_2} + k_{z_3} + r + r - 1 + r - 2,$$

per qualsevol $(x; y; z) \in \tilde{T}_s^r$, $n \geq r + 2$.

Teorema 3.23. *([4]) Si γ és un punt de la frontera de E' amb seqüències (I, J, K) d'ordre $r = 1, 2, 3$ o $n - 1$ associades, aleshores $(I, J, K) \in T_r^n$.*

Demostració. Per $r = 1$ és evident.
Per $r = n - 1$, les seqüències complementaries respecte n són d'ordre 1 i satisfan

$$i_1' + j_1' = k_1' + n.$$

Per tant, $(i'; j'; k') \in \tilde{T}_1^n$. Com que si $(i; j; k) \in \tilde{T}_1^n$, aleshores $(i'; j'; k') \in T_{n-1}^n$, tenim $(i; j; k) \in \tilde{T}_1^n$. Pels casos $n = 3, 4$ és fàcil veure-ho. Suposem ara que $r = 2$, hem de provar que es satisfan les desigualtats

$$i_1 + j_1 \leq k_1 + 1,$$
$$i_1 + j_2 \leq k_2 + 1,$$
$$i_2 + j_1 \leq k_2 + 1.$$

Això vol dir que hem de provar que $i_x + j_y \geq k_z + 2$, per qualsevol $(x; y; z) \in \tilde{T}_1^2$, però això surt del Teorema 3.21. Suposem ara que $r = 3$ i $n \geq 5$. Per

$$i_1 + i_2 + i_3 + j_1 + j_2 + j_3 = k_1 + k_2 + k_3 + 6$$

i utilitzant els Teoremes 3.21 i 3.22, tenim que

$$i_1 + j_1 \leq k_1 + 1,$$

$$
\begin{aligned}
i_1 + j_2 &\leq k_2 + 1, \\
i_2 + j_1 &\leq k_2 + 1, \\
i_1 + j_3 &\leq k_3 + 1, \\
i_2 + j_2 &\leq k_3 + 1, \\
i_3 + j_1 &\leq k_3 + 1, \\
i_1 + i_2 + j_1 + j_2 &\leq k_1 + k_2 + 3, \\
i_1 + i_2 + j_1 + j_3 &\leq k_1 + k_3 + 3, \\
i_1 + i_3 + j_1 + j_2 &\leq k_1 + k_3 + 3, \\
i_1 + i_2 + j_2 + j_3 &\leq k_2 + k_3 + 3, \\
i_2 + i_3 + j_1 + j_2 &\leq k_2 + k_3 + 3, \quad \text{i} \\
i_1 + i_3 + j_1 + j_3 &\leq k_2 + k_3 + 3,
\end{aligned}
$$

ja que si $(x; y; z) \in \tilde{T}^3_p$ aleshores $(x'; y'; z') \in T^3_{3-q}$, $p = 1, 2$.

$\square$

El Teorema 3.23 completa la demostració de la igualtat $E = F$ per $n \leq 4$.

Conclusions

L'objectiu principal d'aquest projecte era estudiar el treball de Horn i les tècniques que va utilitzar per demostrar la conjectura de Horn per matrius de tamany més petit o igual que 4. Podem afirmar que aquest objectiu ha estat assolit.

No hem inclós la demostració de la conjectura de Horn per matrius de tamany més gran que 4, degut a l'extensió d'aquesta part. Per aquest motiu, recomano continuar la lectura de [2].

Comentar també, que hi ha un problema relacionat amb la conjectura de Horn que segueix obert: El problema invers de Horn (veure [9]).

En quant a l'àmbit més personal, el fet d'haver dedicat tantes hores a llegir articles matemàtics m'ha fet adonar-me que soc capaç d'entendre més del que em pensava en un inici. A més, haver de reescriure part dels articles [2] i [4] m'ha obligat a aprendre a escriure de manera formal i organitzada i a fer que la lectura d'aquest projecte sigui lo més comprensible possible.

Bibliografia

[1] Bhatia, R.: *Matrix Analysis*, Springer, New York, 1997.

[2] Bhatia, R.: Linear Algebra to Quantum Cohomology: The Story of Alfred Horn's Inequalities. *The American Mathematical Monthly,* 108(4):289-318, 2001.

[3] Fulton, W.: Eigenvalues, invariant factors, highest weights, and Schubert calculus. *Bulletin of the American Mathematical Society,* 37(3):209-249, 2000.

[4] Horn, A.: Eigenvalues of sums of Hermitan matrices. *Pacific Journal of Mathematics,* 12(1):225-241, 1962.

[5] Horn, A.: Doubly stochastic matrices and the diagonal of a rotation matrix. *American Journal of Mathematics,* 76(3):620-630, 1954.

[6] Kippenhahn, R.: On the Numerical Range of a Matrix, translated from the German by Zachlin and Hochstenbach. Bamburg, 1951.

[7] Klyachko, A.: A. Stable bundles, representation theory and Hermitan operators. *Selecta Mathematica, New Series*, 4:419-445, 1998.

[8] Knutson, A.: The symplectic and algebraic geometry of Horn's problem. *Linear Algebra and its Applications*, 319:61-81, 2000.

[9] Queiró, J. F.; Santana, A. P.: The inverse Horn problem. *Electronic Journal of Linear Algebra*, 39:90-93, 2023.

[10] Weyl, H.: Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen. *Math. Ann.*, 71:441-479.