Universitat de Barcelona
Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

INTRODUCCIÓ A LA MECÀNICA CELESTE

Autor: Bruno Gracia Lapuyade

Director: Dr. Àngel Jorba
Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 17 de gener de 2024

Abstract

This Bachelor's Thesis provides a rigorous introduction to the fundamental concepts of celestial mechanics from a mathematical standpoint. The text explores the foundational principles governing the motion of particles due to their gravitational interactions in space. Key concepts such as Kepler's laws, conservation of energy, and the n-body problem are addressed. Special emphasis is placed on the latter, as well as its particular cases of two and three bodies, with an analysis of the inherent challenges in accurately predicting the trajectories of these systems.

Resum

Aquest Treball de Final de Grau ofereix una introducció rigorosa als conceptes elementals de la mecànica celeste des d'un punt de vista matemàtic. El text explora els principis fonamentals que regeixen el moviment de les partícules a causa de les seves interaccions gravitatòries a l'espai. S'aborden conceptes clau com les lleis de Kepler, la conservació de l'energia o el problema de n cossos. Es dedica un èmfasi especial en aquest últim, així com als seus casos particulars de dos i tres cossos, i s'analitzen les dificultats inherents de la predicció precisa de les trajectòries d'aquests sistemes.

2020 Mathematics Subject Classification. 00A79, 70F05, 70F07, 70F10, 70F15

Agraïments

Primer de tot, m'agradaria donar les gràcies al meu tutor, el doctor Àngel Jorba, per la seva guia, la seva disponibilitat i els seus consells tranquilitzadors durant els mesos que he passat fent el treball. També vull agraïr al doctor Joan Carles Naranjo pels seus valuosos comentaris sobre còniques.

Vull donar les gràcies a la meva familia per la seva paciència, confiança i suport en aquesta etapa que ara es tanca amb aquest treball.

Per últim, vull donar les gràcies a Cixin Liu per inspirar-me amb la seva literatura.

Contingut

El següent treball de final de grau és un estudi elemental i introductori del problema de tres cossos.

El treball està dividit en tres grans capítols: al primer capítol, el problema de la força central, estudiarem amb detall el moviment d'una partícula relatiu al camp de forces al que es troba sotmesa. A partir de les lleis de Newton, aconseguirem alguns resultats bàsics com la conservació del moment angular o la conservació de l'energia. També, demostrarem les tres lleis de Kepler. Al final del capítol, farem un estudi exhaustiu de la posició de la partícula a la seva trajectòria segons el valor de l'energia.

Al segon capítol, el problema de dos cossos, afegim una segona partícula a l'estudi del moviment i, mitjançant un canvi de coordenades, podem tractar aquest problema com el problema de la força central.

Al tercer capítol, el problema de tres cossos, introduirem el problema general de n cossos, tot fent els càlculs anàlegs realitzats per una partícula, ara per n. Després, passarem a estudiar el problema general de tres cossos i algunes de les seves solucions particulars obtingudes per Lagrange i Euler. Finalment, estudiarem el problema restringit de tres cossos, un cas particular del problema de tres cossos, que facilita una mica més l'estudi del moviment i també veurem algunes solucions particulars d'aquest.

Objectius i metodologia

Em vaig interessar pel problema dels tres cossos llegint una novel·la de ciència-ficció que parla del tema. El meu objectiu principal era fer un treball formatiu que em permetés estudiar de manera elemental el plantejament del problema i alguns dels resultats més destacables. Consultant algunes referències inicials, es fa evident que el problema de tres cossos avui en dia s'aborda amb eines matemàtiques més avançades que les que poden aparèixer en aquest text. A causa de la meva falta de coneixements previs en la matèria, el tutor d'aquest TFG, el doctor Àngel Jorba, va recomanar la lectura del llibre de Harry Pollard, *Celestial Mechanics*[2], que ha resultat ser un bon text per a no iniciats en la mecànica celeste, ja que no utilitza eines matemàtiques de molta complexitat però sí una gran astúcia. És per això que, tot i haver consultat altres fonts per la realització d'aquest treball, el llibre de Pollard ha estat la principal guia pel que fa al contingut i l'estructura d'aquest. Tot i això, he procurat aportar més rigorositat en molts dels resultats que al llibre es donen per certs i, en general, l'estil d'escriptura vol ser una mica més metòdic.

[2] Pollard, H.: *Celestial Mechanics*, The Carus Mathematical Monographs No. 18, The Mathematical Association of America, 1976, ISBN 0883850192

Índex

Capítol 1

El problema de la força central

Volem descriure el moviment d'una partícula Q de massa m. Aquesta es veu atreta cap a un centre fixat O amb una força $mf(r)$ proporcional a m i depenent de la distància r entre Q i O. Per fer-ho, ens situem a $\mathbb{R}^3$. Asumirem que tant O com Q són punts de $\mathbb{R}^3$.

Notació 1. *Per no recarregar el text, generalment utilitzarem la notació $\vec{r}$ per referir-nos a $\vec{r}(t)$, sobreentenent que el vector depèn del temps. Pel que fa al seu mòdul $\|\vec{r}\|$, el representarem amb la lletra r. El mateix valdrà per altres vectors depenents del temps.*

1.1 Formulació del problema

Definició 1.1.1. *Sigui $t \in I \subseteq \mathbb{R}$ el valor d'un instant de temps. El vector $\vec{r}(t) \in \mathbb{R}^3/\{0\}$ de classe C^2 amb origen a O determina la posició de la partícula Q. S'anomena **vector posició** o **moviment**.*

$$r : I \to \mathbb{R}^3, \quad r(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

Definició 1.1.2. *Un **camp de forces central** és un camp vectorial F: $\mathbb{R}^3/\{0\} \to \mathbb{R}^3$ de la forma*

$$F(\vec{r}) = -f(r)r^{-1}\vec{r}$$

*on $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$. Quan $f < 0$, l'origen és **repulsor** i quan $f > 0$, l'origen és **atractor**.*

Ens interessa el cas d'origen *atractor* d'acord amb com estem plantejant el problema. En altres camps de la física, com l'electromagnetisme, trobem casos en que les forces que actuen al camp central poden ser repulsores, com per exemple al trobar càrregues elèctriques de mateix signe.

A partir d'ara, ens situem en el supòsit que la nostra partícula Q es mou dins un camp de forces central amb $f > 0$:

$$F(\vec{r}) = -f(r)r^{-1}\vec{r}$$

Definició 1.1.3. *La funció f s'anomena **llei d'atracció**.*

Asumirem que f és continua per $r \in \mathbb{R}^+$. D'acord amb la segona llei de Newton, tenim la següent equació:

$$m\ddot{\vec{r}} = -mf(r)r^{-1}\vec{r} \tag{1.1.1}$$

on $r^{-1}\vec{r}$ és el vector unitari que va des del punt O fins al punt Q.

Definició 1.1.4. *Definim el vector $\vec{v}(t)$ com*

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

*el denotarem com $\vec{v}$ i l'anomenarem **vector velocitat**.*

Així doncs, podem reescriure l'equació anterior com:

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v}, \quad \dot{\vec{v}} = -f(r)r^{-1}\vec{r} \tag{1.1.2}$$

Com podem observar, el valor de m no és rellevant pel sistema. També veiem que efectivament la segona equació correspon a la d'un camp de forces central.

Ara volem estudiar les funcions $\vec{r}(t)$ i $\vec{v}(t)$ que compleixen (1.1.2) en un interval de temps. El cas més important d'estudi és el cas en que la llei d'atracció és la llei de gravitació de Newton.

Definició 1.1.5. *Quan la funció f és de la forma $f(r) = \mu r^{-2}$, on $\mu > 0$ constant, f s'anomena **llei de gravitació**.*

La constant μ només depèn de les unitats escollides i en la font d'atracció particular de cada cas.

Amb aquesta f, (1.1.2) es converteix en:

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v}, \quad \dot{\vec{v}} = -\mu r^{-3}\vec{r} \tag{1.1.3}$$

Notació 2. *En general, utilitzarem l'expressió **problema de la força central** quan ens trobem en les condicions d'una partícula Q a un camp de forces central i el seu moviment estigui regit per les equacions de* (1.1.2).
*També, usarem l'expressió **cas newtonià** quan la llei f sigui la llei de gravitació de Newton i, per tant, el seu moviment estigui regit per les equacions de* (1.1.3).

1.2 Moment angular

En aquesta secció, continuem suposant que $\vec{r}(t)$ és solució de l'equació (1.1.2).

Definició 1.2.1. *El producte vectorial $\vec{c} = \vec{r} \times \vec{v}$ s'anomena **moment angular**.*

Lema 1.2.2. *Sigui $\vec{r}, \vec{v}$ un dues funcions vectorials que compleixen* (1.1.2)*. Llavors,*

$$\vec{r} \times \dot{\vec{v}} = 0$$

Demostració. Suposem que (1.1.2) es compleix per $\vec{r}, \vec{v}$. Ara agafem la segona equació de (1.1.2) i multipliquem vectorialment per $\vec{r}$:

$$\vec{r} \times \dot{\vec{v}} = -f(r)r^{-1}\vec{r} \times \vec{r}$$

i per tant $\vec{r} \times \dot{\vec{v}} = 0$ ja que el producte vectorial d'un vector per si mateix és 0. □

Proposició 1.2.3. ***(Conservació del moment angular)**: Sigui $\vec{r}, \vec{v}$ un parell de vectors que compleixen* (1.1.2). *Llavors, el moment angular*

$$\vec{c} = \vec{r} \times \vec{v} \tag{1.2.1}$$

és constant.

Demostració. Considerem la derivada del producte vectorial $\vec{r} \times \vec{v}$.

$$\frac{d(\vec{r} \times \vec{v})}{dt} = \vec{r} \times \dot{\vec{v}} + \dot{\vec{r}} \times \vec{v}$$

Tenim que $\dot{\vec{r}} \times \vec{v} = \vec{v} \times \vec{v} = 0$. D'altra banda, pel **Lema 1.2.2**, sabem que $\vec{r} \times \dot{\vec{v}} = 0$. Així doncs, la derivada del producte vectorial és 0 i això vol dir que el producte vectorial ha de ser un vector constant. □

Proposició 1.2.4. *Si $\vec{c} \neq 0$, la partícula Q es mou en un pla π_r que passa per l'origen O.*

Demostració. Denotem $\vec{r}(0) = \vec{r_0}, \vec{v}(0) = \vec{v_0}$ i $\vec{c_0} = \vec{r_0} \times \vec{v_0}$. Llavors,

$$\vec{r} \cdot \vec{c_0} = \vec{r} \cdot \vec{c} = 0.$$

La primera igualtat és certa per la conservació del moment angular: $\vec{c} = \vec{c_0}$ per tot $t \in I$. La segona, perquè sabem que $\vec{r}$ i $\vec{c}$ són perpendiculars. Així doncs, es mantenen perpendiculars durant tot el moviment. Podem concloure que $\vec{r}$ es troba en un pla π_r amb equació

$$\vec{r} \cdot \vec{c_0} = 0 \tag{1.2.2}$$

□

Proposició 1.2.5. *Si $\vec{c} = 0$, la partícula Q es mou sobre una recta que passa per l'origen O.*

Demostració. Suposem que $\vec{c} = 0$. Sigui $\vec{u} = \vec{u}(t)$ una funció diferenciable amb mòdul u. Com que $u^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$, si derivem l'expressió respecte el temps obtenim $2u\dot{u} = \dot{\vec{u}} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \dot{\vec{u}} = 2\vec{u}\dot{\vec{u}}$, és a dir, $u \cdot \dot{u} = \vec{u} \cdot \dot{\vec{u}}$. Si $u \neq 0$

$$\frac{d}{dt}\frac{\vec{u}}{u} = \frac{\dot{\vec{u}}u - \vec{u}\dot{u}}{u^2},$$

Multipliquem numerador i denominador per u.

$$\frac{\dot{\vec{u}}u^2 - \vec{u}\dot{u}u}{u^3} = \frac{(\vec{u} \cdot \vec{u})\dot{\vec{u}} - (\vec{u}\dot{\vec{u}})\vec{u}}{u^3}$$

Per últim, per la propietat següent del producte escalar: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$, prenent $\dot{\vec{u}} = \vec{b}$ i $\vec{u} = \vec{a} = \vec{c}$ tenim el següent:

$$\frac{d}{dt}\frac{\vec{u}}{u} = \frac{(\vec{u} \times \dot{\vec{u}}) \times \vec{u}}{u^3} \tag{1.2.3}$$

Prenem ara $\vec{r} = \vec{u}$,

$$\frac{d}{dt}\frac{\vec{r}}{r} = \frac{(\vec{r} \times \vec{v}) \times \vec{r}}{r^3}$$

Utilitzant l'equació (1.2.1) queda

$$\frac{d}{dt}\frac{\vec{r}}{r} = \frac{\vec{c} \times \vec{r}}{r^3} \tag{1.2.4}$$

Per tant, com $\vec{c} = 0$, $\frac{d}{dt}\frac{\vec{r}}{r} = 0$. Conseqüentment, $\vec{r}r^{-1}$ és constant i per tant el moviment de Q està contingut dins una recta. □

1.2.1 La segona llei de Kepler

Sigui $\vec{r}(t)$ el moviment d'un cos a un camp de forces central.

Sigui $\alpha(t) = r(t)(\cos\theta(t), \sin\theta(t))$ la seva parametrització en coordenades polars, $t \in [t_0, t_1]$, $r, \theta : I \to \mathbb{R}$ mòdul i argument respectivament, tal que

$$\dot{\theta}(t) > 0, \quad t \in [t_0, t_1], \quad \theta(t_1) - \theta(t_0) < 2\pi$$

L'àrea total escombrada per el vector $\vec{r}(t)$ en un cert temps s'obté mitjançant la següent expressió:

$$A(t) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} r^2(s)\theta'(s)\, ds$$

Definició 1.2.6. *Definim la* ***velocitat areolar*** *com l'àrea escombrada pel vector $\vec{r}(t)$ per unitat de temps. O el que és el mateix*

$$\frac{d}{dt}A(t) = \dot{A}(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} r^2(s)\theta'(s)\, ds\right) \tag{1.2.5}$$

Teorema 1.2.7. ***(Segona llei de Kepler):*** *La partícula Q es mou amb velocitat areolar constant.*

Demostració. Suposem que $\vec{c} \neq 0$. Per la **Proposició 1.2.4**, Q es mou en un pla π que passa per l'origen. Considero $\vec{r}$ i $\vec{c}$ en coordenades polars centrades en O.

$$\vec{r} = (r\cos\theta, r\sin\theta, 0), \quad \vec{c} = (0, 0, c)$$

Derivo el vector $\vec{r}$:

$$\dot{\vec{r}} = (-r\dot{\theta}\sin\theta, r\dot{\theta}\cos\theta, 0)$$

Per l'equació (1.2.1) tinc que $\vec{r} \times \vec{v} = \vec{c}$. Per tant,

$$\vec{r} \times \vec{v} = (0, 0, r^2\dot{\theta}\cos^2\theta + r^2\dot{\theta}\sin^2\theta) = (0, 0, r^2\dot{\theta})$$

del que es desprèn que

$$r^2\dot{\theta} = c \tag{1.2.6}$$

Si partim de l'eix X (i.e. $\vec{r}(t_0) = \vec{r}(0)$), llavors $\theta(t_0) = \theta(0), \theta(t_1) = \theta(t)$.

Ara, apliquem la definició de velocitat areolar, la regla de la cadena, el teorema fonamental del càlcul i l'igualtat anterior (1.2.6):

$$\dot{A}(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int_{\theta(0)}^{\theta(t)} r^2(s)\, ds\right)\dot{\theta(t)} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{c}{2}.$$

Per la conservació del moment angular (**Proposició 1.2.3**), sabem que c és constant i per tant $\frac{c}{2}$ és constant. □

1.3 La conservació de l'energia

En aquesta secció estudiarem una altra constant del problema de vital importancia: l'energia.

Per començar, suposem que $\vec{r}(t)$ és solució de (1.1.2), agafem (1.1.2) i la multipliquem escalarment pel vector $\vec{v}$. Obtenim el següent:

$$\dot{\vec{v}} \cdot \vec{v} = -f(r)r^{-1}(\vec{r} \cdot \vec{v})$$
$$\dot{v}v = -f(r)r^{-1}r\dot{r}$$
$$\int v\frac{dv}{dt} = \int -f(r)\frac{dr}{dt}$$

Per tant, tenim el següent:

$$\frac{1}{2}v^2 = f_1(r) + h \tag{1.3.1}$$

on $f_1(r)$ és una primitiva de $-f(r)$ i h és una constant d'integració.

Si f és la llei de gravitació, tenim el següent:

$$f(r) = \mu r^{-2}, \quad f_1(r) = \mu r^{-1}$$

Definició 1.3.1. *La quantitat*

$$E = \frac{mv^2}{2} - mf_1(r) \tag{1.3.2}$$

*és l'**energia total** de la partícula.*

Definició 1.3.2.

- $T = \frac{mv^2}{2}$ *s'anomena **energia cinètica** de la partícula.*
- $-U = -mf_1(r)$ *s'anomena **energia potencial** de la partícula.*

Teorema 1.3.3. ***(Principi de conservació de l'energia):*** *En condicions del problema de la força central, en el cas newtonià, l'energia total de la partícula es manté constant.*

Demostració. Agafem l'equació (1.3.1) i multipliquem a cada costat per m:

$$\frac{mv^2}{2} = mf_1(r) + mh$$

Com que h i m son constants, $E = mh$ també ho és. □

Observació 1.3.4. Notem que $E = mh$ i que $T = E + U$.

Lema 1.3.5. *El principi de conservació de l'energia pot reescriure's com:*

$$r^2\dot{r}^2 + c^2 = 2r^2(f_1(r) + h) \tag{1.3.3}$$

Demostració. Si considerem la següent igualtat vectorial:

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 + (\vec{a} \times \vec{b}) = a^2b^2$$

i substituïm $\vec{a} = \vec{r}$ i $\vec{b} = \vec{v}$ ens queda:

$$(\vec{r} \cdot \vec{v})^2 + (\vec{r} \times \vec{v}) = r^2 v^2$$

Sabem que $\vec{r} \cdot \vec{v} = r \cdot \dot{r}$ i hem vist a la **Proposició 1.2.3** que $\vec{r} \times \vec{v} = \vec{c}$ amb $\vec{c}$ constant. Per tant:

$$\begin{aligned}(r \cdot \dot{r})^2 + (\vec{c})^2 &= r^2 v^2 \\ r^2 \cdot \dot{r}^2 + c^2 &= r^2 v^2\end{aligned}$$

Aïllem la v^2:

$$v^2 = \dot{r}^2 + c^2 r^{-2} \tag{1.3.4}$$

Ara, substituïm v^2 al principi de conservació de l'energia:

$$\begin{aligned}T &= U + E \\ \frac{mv^2}{2} &= mf_1(r) + mh \\ \frac{\dot{r}^2 + c^2 r^{-2}}{2} &= f_1(r) + h \\ r^2\dot{r}^2 + c^2 &= 2r^2(f_1(r) + h)\end{aligned}$$

□

Les equacions (1.3.3) i (1.3.4) ens seran útils més endavant.

1.4 La primera llei de Kepler

Seguim amb la suposició de que la partícula Q es mou a un camp de forces central i que f és la llei de gravitació de Newton. Per tant, suposem que $\vec{r}(t)$ és solució de l'equació (1.1.3). Tornem a escriure-la per conveniència:

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v}, \quad \dot{\vec{v}} = -\mu r^{-3}\vec{r} \tag{1.4.1}$$

Proposició 1.4.1. *Existeix un vector $\vec{e}$ que roman constant durant el moviment de la partícula.*

Demostració. Agafem l'equació (1.2.4) i la multipliquem per μ:

$$-\mu \frac{d}{dt}\frac{\vec{r}}{r} = \vec{c} \times (-\mu r^{-3}\vec{r})$$

Per (1.4.1), aquesta és equivalent a:

$$\begin{aligned}-\mu \frac{d}{dt}\frac{\vec{r}}{r} &= (\vec{c} \times \dot{\vec{v}}) \\ \mu \frac{d}{dt}\frac{\vec{r}}{r} &= \dot{\vec{v}} \times \vec{c}\end{aligned}$$

Integrem a cada membre:

$$\mu \int \frac{d}{dt}\frac{\vec{r}}{r} = \int \dot{\vec{v}} \times \vec{c}$$

$$\mu \left(\frac{\vec{r}}{r} + \vec{e}\right) = \vec{v} \times \vec{c} \tag{1.4.2}$$

on $\vec{e}$ és una constant d'integració. □

Definició 1.4.2. *El vector $\vec{e}$ s'anomena **excentricitat**.*

Proposició 1.4.3. *Si $\vec{c} \neq 0$, llavors $\vec{e}$ està contingut al pla π_r. Si $\vec{c} = 0$, llavors $\vec{e}$ es troba a la mateixa recta que $\vec{r}$.*

Demostració. Agafem l'equació (1.4.2) i la multipliquem escalarment pel vector $\vec{c}$:

$$\mu\left(\frac{\vec{r}}{r}\cdot\vec{c}+\vec{e}\cdot\vec{c}\right)=\vec{c}\cdot(\vec{v}\times\vec{c})$$

Com que $\vec{c}$ i $(\vec{v}\times\vec{c})$ són vectors perpendiculars, $\vec{c}\cdot(\vec{v}\times\vec{c})=0$.

$$\frac{\vec{r}}{r}\cdot\vec{c}+\vec{e}\cdot\vec{c}=0$$

Com $\vec{r}\cdot\vec{c}=0$, tenim que $\vec{e}\cdot\vec{c}=0$.

Així doncs, si $\vec{c}\neq 0$, $\vec{e}$ i $\vec{c}$ són perpendiculars. Com que $\vec{r}$ és perpendicular a $\vec{c}$, $\vec{e}$ es troba al mateix pla que $\vec{r}$, és a dir, a π_r. Si $\vec{c}=0$, per (1.4.2) tenim que $\frac{\vec{r}}{r}=-\vec{e}$. Per tant, $\vec{e}$ es troba a la mateixa recta que $\vec{r}$. □

Lema 1.4.4. *Sigui Q una partícula movent-se segons* (1.4.1)*. Aleshores*

$$\vec{e}\cdot\vec{r}+r=\frac{c^2}{\mu} \tag{1.4.3}$$

Demostració. Partim de (1.4.2) i la multipliquem per $\vec{r}$:

$$\mu\left(\vec{r}\cdot\frac{\vec{r}}{r}+\vec{e}\cdot\vec{r}\right)=\vec{r}\cdot\vec{v}\times\vec{c}$$

$$\mu(r+\vec{e}\cdot\vec{r})=\vec{r}\times\vec{v}\cdot\vec{c}$$

$$\mu(r+\vec{e}\cdot\vec{r})=\vec{c}\cdot\vec{c}$$

$$\vec{e}\cdot\vec{r}+r=\frac{c^2}{\mu}$$

□

Observació 1.4.5. Si $c=0$, llavors $e=1$.

Definició 1.4.6. *S'anomena **òrbita** al conjunt de punts de l'espai on podem trobar la partícula Q per algun instant de temps. És a dir, l'òrbita de Q és el conjunt*

$$O_Q=\{\vec{r}(t)|\forall t\in I\}$$

Hem vist que si $c=0$, l'òrbita de Q és una recta. En cas que $c\neq 0$, podem veure com afecta el valor de e a l'òrbita.

Observació 1.4.7. Si r és constant, l'òrbita de Q és una circumferència.

Proposició 1.4.8. *Si $e=0$, llavors l'òrbita de Q és una circumferència i, a més a més, Q es mou a velocitat constant.*

Demostració. Si $e = 0$, llavors $r = \frac{c^2}{\mu}$, constant. Per tant, el moviment és circular. A més a més, per l'equació (1.3.4) i el fet que r és constant tenim que

$$v = \frac{c}{r} = \frac{c\mu}{c^2} = \frac{\mu}{c}.$$

Per tant, la velocitat de la partícula és constant. □

Observació 1.4.9. Amb aquest resultat podem deduïr que $h < 0$. També observem que $2T = U$.

Demostració. Pel principi de conservació de l'energia:

$$\frac{v^2}{2} = \frac{\mu}{r} + h$$

I per tant:

$$h = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \frac{\mu^2}{2c^2} - \frac{\mu^2}{c^2} = -\frac{\mu}{2c^2}$$

Efectivament, $h < 0$.

$$2T = 2\frac{mv^2}{2} = m\frac{\mu^2}{c^2} = m\frac{\mu}{r} = U$$

□

Proposició 1.4.10. *Sigui Q una partícula movent-se en el pla π_r. Sigui θ l'angle que forma el vector $\vec{r}$ amb l'eix X del pla. Sigui ω l'angle que forma el vector $\vec{e}$ amb l'eix X del pla. Si $e \neq 0$, llavors l'òrbita de Q queda determinada per l'equació*

$$r = \frac{c^2/\mu}{1 + e\cos f} \tag{1.4.4}$$

on $f = \theta - \omega$.

Demostració. Per la definició de producte escalar, sabem que $\vec{e} \cdot \vec{r} = er\cos f$. Agafant l'equació (1.4.3):

$$\vec{e} \cdot \vec{r} + r = \frac{c^2}{\mu}$$

$$er\cos f + r = \frac{c^2}{\mu}$$

$$r(1 + e\cos f) = \frac{c^2}{\mu}$$

$$r = \frac{c^2/\mu}{1 + e\cos f}$$

□

Definició 1.4.11. *Una **cònica no circular** és el lloc geomètric dels punts P tals que la distància $\|\vec{PF}\|$ a un punt fix F és ε vegades la distància $\|\vec{PL}\|$ a una recta fixa L. És a dir, una cònica es pot definir com el conjunt següent:*

$$C = \{P \in \mathbb{R}^2 : d(P, F) = \varepsilon \cdot d(P, L), \quad \varepsilon > 0\}$$

*F s'anomena **focus**, ε **excentricitat de la cònica** i L **directriu de la cònica**.*

Definició 1.4.12.

- *Si* $0 < \varepsilon < 1$, *C és una* ***el·lipse****.*
- *Si* $\varepsilon = 1$, *C és una* ***paràbola****.*
- *Si* $\varepsilon > 1$, *C és una* ***hipèrbola****.*

Res ens impedeix agafar com a excentricitat de la cònica el mòdul del nostre vector excentricitat definit abans. És a dir, $\varepsilon = e = \|\vec{e}\|$.

Pels propòsits d'aquest capítol, una **cònica** pot ser tant una *circumferència* com una *cònica no circular.*

Teorema 1.4.13. ***(Primera llei de Kepler):*** *En condicions d'atracció newtoniana en el problema de la força central, l'òrbita de la partícula Q és una cònica.*

Demostració. Si $e = 0$, ja hem vist que l'òrbita de Q és circular. Per tant, l'òrbita és una cònica.

Si $e \neq 0$, considerem la recta L a distància $c^2/\mu e$ de O, perpendicular a $\vec{e}$ i situada al costat que apunta el vector $\vec{e}$. Podem reescriure (1.4.4) de la següent manera:

$$r = \frac{c^2/\mu}{1 + e\cos f}$$

$$r(1 + e\cos f) = \frac{c^2}{\mu}$$

$$er\cos f + r = \frac{c^2}{\mu}$$

$$r = \frac{c^2}{\mu} - re\cos f$$

$$r = \frac{ec^2}{\mu e} - re\cos f$$

$$r = e\left(\frac{c^2}{\mu e} - r\cos f\right)$$

Aquesta darrera equació es pot interpretar com $\|\vec{OQ}\| = e\|\vec{QL}\|$. Si entenem que $\vec{r} = \|\vec{OQ}\|$, llavors l'equació compleix la definicó de cònica no circular, entenent que la nostra partícula Q és el punt P. $\square$

Observació 1.4.14. El valor mínim de r s'obté quan $f = 0$ i el màxim quan $f = \pi$ (ja que $e > 0$).

Definició 1.4.15. *El vector $\vec{e}$ apunta a un punt P de la cònica que anomenem* ***pericentre****.*

Observació 1.4.16. És fàcil veure que el pericentre és el punt de la cònica que es troba més a prop del focus.

Definició 1.4.17. *f reb el nom d'****anomalía verdadera****.*

1.5 Relacions entre constants

En les seccions anteriors hem vist que $\vec{c}$, $\vec{e}$ i h es mantenen constants durant el moviment i, per tant, queden determinades pel seu valor a $t = 0$. Denotem $\vec{r}(0) = \vec{r_0}$ i $\vec{v}(0) = \vec{v_0}$.

$$\begin{aligned} \vec{c} &= \vec{r_0} \times \vec{v_0} \\ \vec{e} &= \mu^{-1}(\vec{v_0} \times \vec{c}) - r_0^{-1}\vec{r_0} \\ h &= \frac{v_0^2}{2} - \mu r_0^{-1} \end{aligned}$$

Lema 1.5.1. *Amb condicions newtonianes al problema de força central tenim la següent igualtat:*

$$\mu^2(e^2 - 1) = 2hc^2 \tag{1.5.1}$$

Demostració. Agafem l'equació (1.4.2) i elevem al quadrat els dos costats.

$$\mu^2 \left(\frac{\vec{r}}{r} + \vec{e}\right)^2 = (\vec{v} \times \vec{c})^2$$

Com $\vec{v}$ i $\vec{c}$ són perpendiculars, $\vec{v} \times \vec{c} = vc$.

$$\mu^2(e^2 + \frac{2}{r}\vec{e} \cdot \vec{r} + 1) = v^2c^2$$

Ara utilitzem que $v^2 = 2h + 2\frac{\mu}{r}$ (l'equació del principi de conservació de l'energia multiplicada per 2 a cada costat) i l'equació (1.4.3) reescrita com $\vec{e} \cdot \vec{r} = \frac{c^2}{\mu} - r$:

$$\begin{aligned} \mu^2 \left(e^2 + \frac{2}{r}\left(\frac{c^2}{\mu} - r\right) + 1\right) &= \left(2h + 2\frac{\mu}{r}\right)^2 c^2 \\ \mu^2 \left(e^2 + \frac{2c^2}{r\mu} - 1\right) &= \left(2h + 2\frac{\mu}{r}\right)^2 c^2 \\ \mu^2(e^2 - 1) + \frac{2\mu c^2}{r} &= 2hc^2 + \frac{2\mu c^2}{r} \\ \mu^2(e^2 - 1) &= 2hc^2 \end{aligned}$$

□

Observació 1.5.2.

- Si $e = 1$, llavors $c = 0$.
- Si $e = 0$, llavors $h = -\mu^2/2c$

A més a més, si $c \neq 0$, llavors:

- $e < 1$ i $h < 0$
- $e = 1$ i $h = 0$
- $e > 1$ i $h > 0$

Lema 1.5.3. *Sigui a el semieix major de la cònica. Si $h \neq 0$, $c \neq 0$, llavors:*

$$a = \frac{1}{2}\mu\,|h|^{-1} \tag{1.5.2}$$

Demostració. Si $h \neq 0$, llavors $e \neq 0$. Per tant, tenim dos casos:

$0 < e < 1$: El·lipse. En aquest cas el semieix major és:

$$a = \frac{r_{max} + r_{min}}{2}.$$

Gràcies a l'**Observació (1.4.14)**, sabem que

$$r_{min} = \frac{c^2}{\mu(1+e)}, \quad r_{max} = \frac{c^2}{\mu(1-e)}$$

Així doncs,

$$a = \frac{c^2}{\mu(1-e^2)}$$

Apliquem el **Lema (1.5.1)** a aquesta última equació:

$$a = \frac{c^2}{\mu(1-e^2)} = \frac{\mu^2(e^2-1)}{2h\mu(1-e^2)} = -\frac{\mu}{2h}$$

I aquesta expressió es pot reescriure com:

$$a = \frac{1}{2}\mu\,|h|^{-1}$$

$e > 1$: Hipèrbola. El semieix major en aquest cas és

$$a = \frac{c^2}{\mu(e^2-1)}$$

Apliquem el **Lema (1.5.1)** novament:

$$a = \frac{c^2}{\mu(e^2-1)} = \frac{\mu^2(e^2-1)}{2h\mu(e^2-1)} = \frac{\mu}{2h}$$

I aquesta expressió es pot reescriure com:

$$a = \frac{1}{2}\mu\,|h|^{-1}$$

□

Observació 1.5.4. Podem utilitzar aquest últim resultat juntament amb el principi de conservació de l'energia i obtenim:

$$\begin{cases} v^2 = \mu\left(\frac{2}{r} + \frac{1}{a}\right) & \text{si } h > 0 \\ v^2 = \frac{2\mu}{r} & \text{si } h = 0 \\ v^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) & \text{si } h < 0 \end{cases} \tag{1.5.3}$$

1.5.1 La tercera llei de Kepler

Definició 1.5.5. *Anomenem* ***període*** *al temps que triga la partícula Q en recórrer tota la seva órbita una vegada, o el que és el mateix, el temps que triga $\vec{r}(t)$ en escombrar l'àrea de la cònica una vegada. Denotem el període amb la lletra p.*

Teorema 1.5.6. ***(Tercera llei de Kepler):*** *Sota condicions d'atracció newtoniana en el problema de la força central, si $0 < e < 1$, llavors el període p de la partícula Q ve donar per:*

$$p^2 = \frac{4\pi^2}{\mu} a^3 \tag{1.5.4}$$

Demostració. Suposem que $0 < e < 1$. L'àrea de l'elipse és $A = \pi a^2 \sqrt{(1-e^2)}$. Per la segona llei de Kepler sabem que $\dot{A} = \frac{c}{2}$. Al **Lema (1.5.3)** hem vist que

$$a = \frac{c^2}{\mu(1-e^2)}$$

$$c = \sqrt{a\mu(1-e^2)}$$

Llavors, el període és

$$p = \frac{A}{\dot{A}} = \frac{\pi a^2 \sqrt{1-e^2}}{\frac{c}{2}} = \frac{2\pi a^2 \sqrt{1-e^2}}{c} = \frac{2\pi a^2 \sqrt{1-e^2}}{\sqrt{a\mu(1-e^2)}} = \frac{2\pi \sqrt{a^3}}{\sqrt{\mu}}$$

Finalment, ens queda

$$p^2 = \frac{4\pi^2}{\mu} a^3$$

□

1.6 Posició a l'òrbita

Continuem amb el problema de la força central amb llei d'atracció newtoniana. A la secció anterior hem vist que $\vec{r_0}, \vec{v_0}$ determinen el moviment completament. En particular, aquests valors ens donen $\vec{e}$ i $\vec{c}$, els quals determinen l'òrbita. Ens falta veure com podem trobar la partícula a l'espai per un determinat valor t_1 de temps.

Seria ideal expressar la posició $\vec{r}(t)$ amb una equació explícita en funció del temps t. Això pot resultar complicat. Per tant, utilitzarem el canvi de variable $t = t(u)$, on u és un valor de temps fictici.

Per poder localitzar la partícula Q haurem de resoldre

$$t_1 = t(u_1)$$

pel valor corresponent u_1. En el que segueix escollirem $t = t(u)$ de manera adequada i anomenarem u **anomalía excèntrica**.

Comencem per recordar l'equació (1.3.3), una altra manera d'escriure la conservació de l'energia. Com que ens trobem en el cas newtonià, $f(r) = \mu/r$, de manera que la podem reescriure com:

$$r^2\dot{r}^2 + c^2 = 2(\mu r + hr^2) \tag{1.6.1}$$

Escollim la nostra nova variable u de manera que

$$r\dot{u} = k$$

on k és constant. Per tant,

$$u = k\int_T^t \frac{d\tau}{r(\tau)} \tag{1.6.2}$$

on T, k són valors a determinar més endavant.

Si derivem r i fem servir la regla de la cadena,

$$\dot{r} = \frac{dr}{du}\dot{u} = \frac{dr}{du}kr^{-1}$$

l'equació (1.6.1) es reescriu com

$$k^2(r')^2 + c^2 = 2(\mu r + hr^2) \tag{1.6.3}$$

on (r') representa la derivada de r respecte u.

Cal fer una distinció de casos segons el valor de h per aquesta darrera equació, o el que és el mateix, segons el valor de l'energia de la partícula.

1.6.1 Cas $h = 0$

En aquest apartat suposem que $h = 0$. Escollim la constant k com $k^2 = \mu$. L'equació (1.6.3) queda així:

$$\mu(r')^2 + c^2 = 2\mu r + 2hr^2$$

però com $h = 0$,

$$(r')^2 + \frac{c^2}{\mu} = 2r \tag{1.6.4}$$

Ara, si derivem aquesta expressió, ens queda:

$$2r'r'' = 2r'$$
$$r'r'' = r'$$

Si $r' = 0$, llavors r sería constant i això només passa quan $h < 0$. Per tant, $r' \neq 0$. Llavors, tenim que

$$r'' = 1$$

D'aquesta manera, r és quadràtica sobre u:

$$r = \frac{1}{2}(u - u_0)^2 + A$$

on A és constant. Substituïm r a (1.6.4):

$$\left(\left(\frac{1}{2}(u-u_0)^2 + A\right)'\right)^2 + \frac{c^2}{\mu} = \frac{2}{2}(u-u_0)^2 + 2A$$
$$\left(\frac{2}{2}(u-u_0)\right)^2 + \frac{c^2}{\mu} = \frac{2}{2}(u-u_0)^2 + 2A$$
$$(u-u_0)^2 + \frac{c^2}{\mu} = (u-u_0)^2 + 2A$$

d'on traiem que

$$A = \frac{c^2}{2\mu}$$

A més a més, com que u està determinada només per una constant arbitrària, podem suposar que $u_0 = 0$. Així doncs,

$$r = \frac{1}{2}\left(u^2 + \frac{c^2}{\mu}\right)$$

Segons (1.6.2), $\frac{du}{dt} = \frac{k}{r} \iff rdu = kdt$, i també que $u = 0$ quan $t = T$. Per tant:

$$k\int_T^t dt = \int_0^u rdu$$
$$k\int_T^t dt = \frac{1}{2}\int\left(u^2 + \frac{c^2}{\mu}\right)du$$

Com que $k^2 = \mu$:

$$\sqrt{u}(t-T) = \frac{1}{2}\left(\frac{u^3}{3} + \frac{c^2}{\mu}u\right)$$
$$\sqrt{u}(t-T) = \frac{1}{6}u^3 + \frac{c^2}{2\mu}u$$

Tenim doncs el parell d'equacions següent:

$$\begin{cases} \sqrt{u}(t-T) = \frac{1}{6}u^3 + \frac{c^2}{2\mu}u \\ r = \frac{1}{2}\left(u^2 + \frac{c^2}{\mu}\right) \end{cases} \tag{1.6.5}$$

Gràcies a la primera equació, observem que t és una funció estrictament creixent respecte u. Per tant, aquesta primera equació té una única solució per u en termes de t. Aquesta solució és pot escriure com $u(t)$. Llavors,

$$r = \frac{1}{2}\left(u(t)^2 + \frac{c^2}{\mu}\right)$$

Proposició 1.6.1. *El sistema d'equacions de* (1.6.5) *satisfà l'equació diferencial* (1.6.1) *quan l'energia de la partícula és nul·la.*

Demostració. Suposem que $h = 0$. Sabem que $\frac{du}{dt} = \frac{k}{r}$ per (1.6.2). Derivem la segona equació de (1.6.5):

$$\dot{r} = u\dot{u} = u\frac{du}{dt} = ukr^{-1}$$
$$r\dot{r} = uk$$
$$r\dot{r} = \sqrt{\mu}u$$

Substituïm $r\dot{r}$ a l'equació 1.6.1 i utilitzem que $h = 0$:

$$(\sqrt{\mu}u)^2 + c^2 = 2\mu\left(\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}\frac{c^2}{\mu}\right)$$
$$\mu u^2 + c^2 = \mu u^2 + c^2$$

□

Ara, falta interpretar el valor de T.

- En cas que $c \neq 0$; Si $h = 0$, llavors $e = 1$ i obtenim com a òrbita, per l'equació (1.4.4), la paràbola
$$r = \frac{c^2/\mu}{1 + \cos f}$$
Quan $f = 0$, $r = \frac{c^2}{2\mu}$ és el valor mínim de $r(t)$ (el vèrtex de la paràbola). Podem veure per (1.6.5) que aquest és el valor de $r(t)$ quan $u = 0$, o el que és el mateix, quan $t = T$. En aquest cas, T és el temps en el qual la partícula es troba més a prop de l'origen.

  Definició 1.6.2. *L'instant de temps $t = T$ s'anomena **temps de pas pel pericentre**.*

- En cas que $c = 0$, tenim que l'òrbita és una recta (ho hem vist a la **Proposició 1.4.3**). El sistema de (1.6.5) queda de la següent manera:
$$\begin{cases} 6\sqrt{\mu}(t - T) = u^3 \\ r = \frac{1}{2}u^2 \end{cases}$$
on $t = T$ correspon amb la **col·lisió** de la partícula amb l'origen o la seva **emisió** des de l'origen.

  Si $T > 0$, el pas de la partícula per l'origen succeeix després de l'instant inicial $t = 0$ i només podem considerar el moviment per l'interval de temps $-\infty < t < T$, perquè per $t > T$ el moviment ja no es regeix per les equacions anteriors. En aquest cas, $t = T$ és **l'instant de col·lisió de la partícula amb l'origen** i l'òrbita és una semirecta amb vèrtex a l'origen.

  Si $T < 0$, vol dir la partícula inicia el moviment a $t = T$ i, per tant, només podem considerar el moviment per l'interval de temps $T < t < +\infty$, perquè per $t < T$ el moviment no es regeix per les equacions anteriors. En aquest cas, $t = T$ és **l'instant d'emisió de la partícula des de l'origen** i l'òrbita és una semirecta amb vèrtex a l'origen.

En resum: si $c = 0$, r determina completament la posició de la partícula, ja que la recta de vector director $\vec{e}$ que conté el moviment és coneguda. Si $c \neq 0$, hi ha dos possibles valors de f. Si $t > T$, prenem $f > 0$. Si $t < T$, prenem $f < 0$. En qualsevol cas, les coordenades (r, f) localitzen la partícula Q.

1.6.2 Cas $h \neq 0$

Ara suposem que $h \neq 0$. Ja hem vist que si $h \neq 0$, tenim les següents possibles òrbites:

- Lineal, si $\vec{c} = 0$.
- Hipèrbola, si $\vec{c} \neq 0$ i $h > 0$.
- El·lipse, si $\vec{c} \neq 0$ i $h < 0$.

Primer ens centrem en localitzar Q en un cert temps t.

Lema 1.6.3. *L'equació diferencial* (1.6.3) *es pot reesciure com*

$$(\rho')^2 - \sigma(h)\rho^2 = -\sigma(h) \tag{1.6.6}$$

on $\rho = \rho(u)$ *és una funció depenent de l'anomalia excèntrica definida com*

$$ea\rho(u) = a + \sigma(h)r(u)$$

ρ' *és la derivada de* ρ *respecte* u *i*

$$\sigma(h) = \begin{cases} +1, & si\ h > 0 \\ -1, & si\ h < 0 \end{cases}$$

Demostració. Primer triem la constant $k^2 = 2|h|$, que és el mateix que $k^2 = \mu/a$, per l'equació (1.5.2). Agafem l'equació (1.6.3)

$$k^2(r')^2 + c^2 = 2(\mu r + hr^2)$$

i la dividim per k^2:

$$(r')^2 + \frac{c^2a}{\mu} = 2ar + \frac{2a}{\mu}hr^2$$
$$(r')^2 + \frac{c^2a}{\mu} = 2ar + \frac{h}{|h|}r^2$$

Com que $\frac{h}{|h|} = \sigma(h)$,

$$(r')^2 + \frac{c^2a}{\mu} = 2ar + \sigma(h)r^2 \tag{1.6.7}$$

Si agafem ara l'equació (1.5.1):

$$\mu^2(e^2 - 1) = 2hc^2$$

i substituïm l'equació (1.5.2) a (1.5.1), tenim

$$2a|h|(e^2 - 1)\mu = 2hc^2$$

$$a(e^2 - 1)\sigma(h) = \frac{c^2}{\mu} \tag{1.6.8}$$

Ara sumem $a^2\sigma(h)$ a tots dos costats de (1.6.7) i substituïm c^2/μ pel seu valor de (1.6.8):

$$a^2\sigma(h) + (r')^2 + a^2(e^2 - 1)\sigma(h) = 2ar + \sigma(h)r^2 + a^2\sigma(h)$$

Notem que $\sigma(h)^2 = 1$.

$$(r')^2 + a^2\sigma(h)(e^2 - 1 + 1) = \sigma(h)(a^2 + r^2 + 2ar\sigma(h))$$

$$(r')^2 + a^2e^2\sigma(h) = \sigma(h)(a + r\sigma(h))^2 \tag{1.6.9}$$

Introduïm la funció $\rho(u)$:

$$ea\rho(u) = a + \sigma(h)r(u)$$

i derivem respecte u:

$$ea\rho' = \sigma(h)r'$$

Substituïm r i r' a (1.6.9) per ρ i ρ':

$$\begin{aligned}\left(\frac{ea\rho'}{\sigma(h)}\right)^2 + a^2\sigma(h)e^2 &= \sigma(h)(a + ea\rho - a)^2\\ e^2a^2(\rho')^2 + a^2\sigma(h)e^2 &= \sigma(h)e^2a^2\rho^2\\ (\rho')^2 + \sigma(h) &= \sigma(h)\rho^2\\ (\rho')^2 - \sigma(h)\rho^2 &= -\sigma(h)\end{aligned}$$

□

Si resolem l'equació 1.6.6 per $h > 0$:

$$\begin{aligned}(\rho')^2 - \rho^2 &= -1\\ (\rho')^2 &= \rho^2 - 1\\ \rho' &= \sqrt{\rho^2 - 1}\\ \frac{dp}{du} &= \sqrt{\rho^2 - 1}\\ \int \frac{dp}{\sqrt{\rho^2 - 1}} &= \int du\\ \operatorname{arc\,cosh}\rho &= u + k_1\\ \rho &= \cosh(u + k_1)\end{aligned}$$

I ara la resolem per $h < 0$:

$$\begin{aligned}(\rho')^2 + \rho^2 &= 1\\ (\rho')^2 &= 1 - \rho^2\\ \rho' &= \sqrt{1 - \rho^2}\\ \frac{dp}{du} &= \sqrt{1 - \rho^2}\\ \int \frac{dp}{\sqrt{1 - \rho^2}} &= \int du\\ \operatorname{arc\,cos}(\rho) &= u + k_2\\ \rho &= \cos(u + k_2)\end{aligned}$$

A més a més de les dues solucions trivials $\rho = 1, \rho = -1$,

$$\rho = \begin{cases}\cosh(u + k_1) & \text{si } h > 0\\ \cos(u + k_2) & \text{si } h < 0\end{cases}$$

Podem escollir $k_1 = k_2 = 0$ perquè són constant d'integració lliures, ja que no hem escollit T encara:

$$\rho = \begin{cases}\cosh(u) & \text{si } h > 0\\ \cos(u) & \text{si } h < 0\end{cases}$$

Definició 1.6.4. *Definim una nova constant n com el quocient $n = \frac{k}{a}$, al qual anomenarem* ***moviment mitjà****.*

Abans hem vist que $k^2 = \frac{\mu}{a}$; per tant, podem reescriure $n = \mu^{1/2}a^{-3/2}$.

Teorema 1.6.5. *En el problema de la força central, quan $h \neq 0$ i $\vec{c} \neq 0$, la posició de la partícula Q a cada instant de temps t queda determinada per les equacions següents:*

$$r = a(e\cosh(u) - 1), \quad n(t-T) = e\sinh(u) - u, \quad si\ h > 0 \tag{1.6.10}$$

$$r = a(1 - e\cos(u)), \quad n(t-T) = u - e\sin(u), \quad si\ h < 0 \tag{1.6.11}$$

Demostració. Si $h > 0$:

$$\rho = \cosh(u)$$

Com que

$$\rho = \frac{a+r}{ea}$$

tenim que

$$\begin{aligned} \frac{a+r}{ea} &= \cosh(u) \\ a + r &= ea\cosh(u) \\ r &= a(e\cosh(u) - 1) \end{aligned}$$

Si fem servir l'equació (1.6.2) que defineix u i sabent que $u = 0$ quan $t = T$, tenim que

$$\begin{aligned} \int_T^t k dt &= \int_0^u r du \\ k(t-T) &= a\int_0^u (e\cosh(\tau) - 1)d\tau \\ \frac{k}{a}(t-T) &= e\sinh(u) - u \\ n(t-T) &= e\sinh(u) - u \end{aligned}$$

Si $h < 0$:

$$\rho = \cos(u)$$

Ara, tenim que

$$\begin{aligned} \frac{a-r}{ea} &= \cos(u) \\ r - a &= -ea\cos(u) \\ r &= a(1 - e\cos(u)) \end{aligned}$$

Fent servir de nou l'equació (1.6.2) i sabent que $u = 0$ quan $t = T$, ens queda

$$\begin{aligned} \int_T^t k dt &= \int_0^u r du \\ k(t-T) &= a\int_0^u (1 - e\cos(\tau))d\tau \\ \frac{k}{a}(t-T) &= u - e\sin(u) \\ n(t-T) &= u - e\sin(u) \end{aligned}$$

□

Observació 1.6.6. En el cas de l'òrbita el·líptica, $n = \frac{2\pi}{p}$, on p és el període (per la tercera llei de Kepler).

Observació 1.6.7. Si $u = 0$, llavors $t = T$ i $r = a\,|e-1|$.

Proposició 1.6.8. *L'equació de l'òrbita* (1.4.4) *es pot reescriure com*

$$r = \frac{a\left|e^2-1\right|}{1+e\cos f} \tag{1.6.12}$$

Demostració. L'equació (1.4.4) es aquesta:

$$r = \frac{c^2/\mu}{1+e\cos f}$$

En realitat, volem veure que $c^2/\mu = a\left|e^2-1\right|$.

Per (1.5.1), tenim la següent relació:

$$\mu^2(e^2-1) = 2hc^2$$

i, per (1.5.2), tenim que

$$a = \frac{1}{2}\mu\,|h|^{-1}$$

Així doncs,

$$|h| = \begin{cases} \frac{\mu}{2a} & \text{si } h > 0 \\ -\frac{\mu}{2a} & \text{si } h < 0 \end{cases}$$

Primer, substituïm $\frac{\mu}{2a}$ a $\mu^2(e^2-1) = 2hc^2$:

$$\begin{aligned} \mu^2(e^2-1) &= \frac{\mu}{a}c^2 \\ \mu a(e^2-1) &= c^2 \\ \mu a\left|e^2-1\right| &= c^2 \end{aligned}$$

Ara fem el mateix però per $-\frac{\mu}{2a}$:

$$\begin{aligned} \mu^2(e^2-1) &= -\frac{\mu}{a}c^2 \\ \mu a(1-e^2) &= c^2 \\ \mu a\left|e^2-1\right| &= c^2 \end{aligned}$$

□

Per interpretar T, hem de distingir si $c \neq 0$ o si $c = 0$.

Per $c \neq 0$, $t = T$ és l'instant de pas pel pericentre, i en els següents apartats veurem que passa exactament quan $h > 0$ i quan $h < 0$.

Per $c = 0$, tenim $e = 1$ i $r = 0$ i $t = T$ és l'instant de col·lisió de Q amb l'origen o l'instant d'emisió de Q des de l'origen.

Observació 1.6.9. Per cada valor t, les equacions

$$\begin{aligned} n(t-T) &= e\sin(u) - u \quad & e > 1 \\ n(t-T) &= u - e\sin(u) \quad & 0 < e < 1 \end{aligned}$$

tenen una solució única. S'anomemen **equacions de Kepler**.

1.6.3 Cas $h > 0$

La partícula Q, en cas que es mogui amb energia positiva (o el que és el mateix, amb $h > 0$), pot tenir dues possibles òrbites:

Si $c = 0$, el moviment és lineal, concretament una semirecta amb vèrtex a l'origen O, com ja hem discutit prèviament. En canvi, si $c \neq 0$, l'òrbita es tracta d'una hipèrbola, ja que si $c \neq 0$ i $h > 0$, tenim que $e > 1$.

Per tant, suposem que $h > 0$. D'acord amb el **Teorema 1.6.5**, les equacions que determinen la posició de Q són:

$$r = a(e\cosh(u) - 1) \tag{1.6.13}$$

i

$$n(t - T) = e\sin(u) - u \tag{1.6.14}$$

Podem determinar T a partir de $\vec{r_0}, \vec{v_0}$ coneguts a l'instant incial $t = 0$.

$$\vec{r}\cdot\vec{v} = r\dot{r} = rr'\dot{u} = rr'kr^{-1} = kr' = \sqrt{\frac{\mu}{a}}ae\sinh(u) = \sqrt{\mu a}e\sinh(u)$$

Per $t = 0$, u_0 queda determinat:

$$\vec{r_0}\cdot\vec{v_0} = \sqrt{\mu a}e\sinh(u_0)$$

i per tant, si prenem $t = 0$ a l'equació (1.6.14), T queda determinat:

$$\begin{aligned} -nT &= e\sinh(u_0) - u_0 \\ T &= \frac{u_0 - e\sinh(u_0)}{n} \end{aligned}$$

Si $c = 0$, l'equació (1.6.14) és vàlida per $t < T$ quan T és l'instant de col·lisió de la partícula amb l'origen. D'altra banda, si T és l'instant d'emisió de la partícula des de l'origen, l'equació és vàlida per $t > T$.

Ara, per un temps t qualsevol, si volem trobar la posició de Q, caldria resoldre (1.6.14) i substituir el valor de u a (1.6.13).

Si c=0, com el moviment és lineal, ja ho tindriem (no cal escollir f). En canvi, si $c \neq 0$, hem de considerar dos possibles valors de f de

$$r = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e\cos(f)}$$

Com hem vist a la demostració de la **Proposició 1.6.8**, si $h > 0$, llavors $c^2/\mu = a(e^2 - 1)$.

Escollim $f > 0$ si $t > T$ i $f < 0$ si $t < T$.

Definició 1.6.10. *Anomenem **anomalía mitjana** a $\ell = n(t - T)$.*

Donat un valor de t, $\ell = e\sinh(u) - u$, amb el seu corresponent u. Actualment, no hi ha una solució analítica per $u = u(\ell)$ i normalment aquest problema s'adreça numèricament des d'aquest punt.

1.6.4 Cas $h < 0$

La partícula Q, en cas que es mogui amb energia negativa (o el que és el mateix, amb $h < 0$), pot tenir dues possibles òrbites:

Si $c = 0$, el moviment és lineal, concretament una semirecta amb vèrtex a l'origen O, com ja hem discutit prèviament. En canvi, si $c \neq 0$, l'òrbita es tracta d'una el·lipse, ja que si $c \neq 0$ i $h < 0$, tenim que $e < 1$.

Per tant, suposem que $h < 0$. De nou, d'acord amb el **Teorema 1.6.5**, les equacions que determinen la posició de Q són:

$$r = a(1 - e\cos(u)) \tag{1.6.15}$$

i

$$n(t - T) = u - e\sin(u) \tag{1.6.16}$$

Si $c = 0$, determinem T com ho hem fet abans, ja que tenim la mateixa recta sobre $\vec{e}$ que ja hem estudiat.

Ara, per determinar T no ho tenim tan fàcil quan $c \neq 0$. Si ens fixem en el punt P al qual apunta el vector $\vec{e}$ (el pericentre), la partícula passa per P periòdicament. Per tant, T no queda determinada per $\vec{r_0}, \vec{v_0}$.

Proposició 1.6.11. *Considerem l'el·lipse de la Figura* 1.1 *inscrita dins una circumferència de centre C, on O és el centre d'atracció (i origen) i P és el pericentre. Sigui Q una posició de la partícula quan l'anomalia verdadera és f. Sigui S la projecció de Q sobre la circumferència. SQ és perpendicular a CP. Llavors l'angle comprès entre CP i CS és u.*

Demostració. Si aïllem el $\cos(u)$ de l'equació (1.6.15):

$$\begin{aligned} r &= a(1 - e\cos(u)) \\ r - a &= -ae\cos(u) \\ a - r &= ae\cos(u) \\ \frac{a - r}{ae} &= \cos(u) \end{aligned}$$

Hem de veure que aquesta expressió és equivalent a la que obtenim de la construcció que hem fet a la Figura 1.1.

Per definició, el $\cos(u)$ és el catet contigu dividit per la hipotenusa. La hipotenusa té el valor de a perquè el semieix major és el radi de la circumferència que envolta l'el·lipse. El catet contigu és la distància del centre de l'el·lipse C a la recta SQ.

El semieix major de l'el·lipse es pot expressar amb aquesta relació:

$$a = \frac{d_{oc}}{e}$$

on d_{oc} és la distància del centre de l'el·lipse al focus O. Per tant, $d_{oc} = ae$. Això ens serveix per determinar el catet contigu: $ae + r\cos(f)$.

Per determinar el $\cos(f)$ considerem l'equació de la cònica:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos(f)}$$

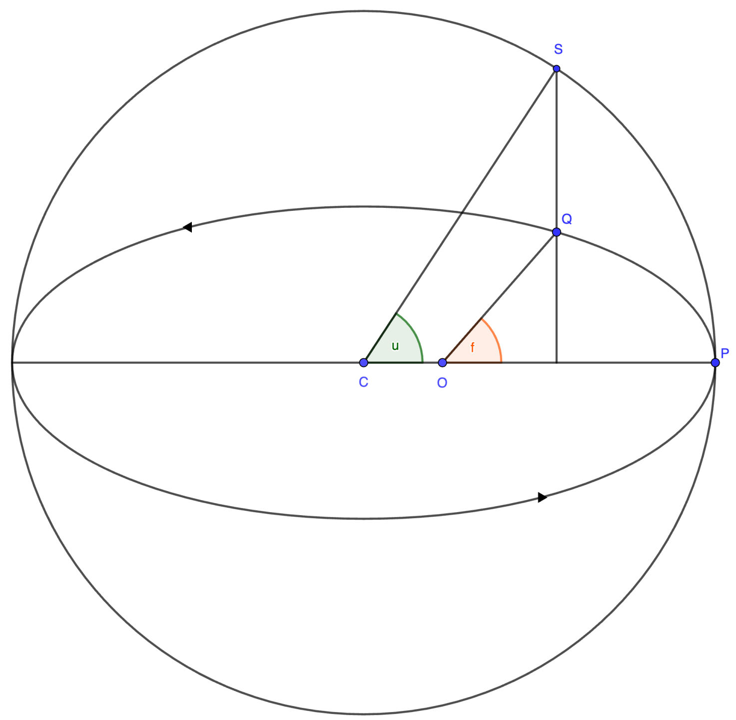

Figura 1.1:

Com hem vist a la demostració de la **Proposició 1.6.8**, si $h < 0$, llavors $c^2/\mu = a(1-e^2)$. Si aïllem el $\cos(f)$:

$$r + re\cos(f) = a(1-e^2)$$
$$\cos(f) = \frac{a(1-e^2)-r}{re}$$

Així doncs, el $\cos(u)$ és:

$$\cos(u) = \frac{ae + r\cos(f)}{a}$$
$$\cos(u) = \frac{ae + \frac{a(1-e^2)-r}{e}}{a}$$
$$\cos(u) = \frac{ae^2 + a(1-e^2) - r}{ae}$$
$$\cos(u) = \frac{ae^2 + a - ae^2 - r}{ae}$$
$$\cos(u) = \frac{a-r}{ae}$$

Efectivament, les dues expressions del $\cos(u)$ coincideixen. $\square$

Si a $t = 0$ tenim $f > 0$, llavors T serà escollit com l'última vegada que Q ha passat per P abans de $t = 0$ (de fet $T < 0$). Si a $t = 0$ tenim $f < 0$, llavors T serà escollit com la primera vegada que Q passi per P després de $t = 0$ ($T > 0$).

Si prenem els càlculs que hem fet abans però amb el nou valor de r':

$$\vec{r} \cdot \vec{v} = r\dot{r} = rr'\dot{u} = rr'kr^{-1} = kr' = \sqrt{\frac{\mu}{a}}ae\sin(u) = \sqrt{\mu a}e\sin(u)$$

tenim que, per $t = 0$,

$$\vec{r_0} \cdot \vec{v_0} = \sqrt{\mu a}e\sin(u_0)$$

A més a més, tenim que, en general, a l'interval $-\pi < u < \pi$, tenim dues solucions de u_0 que satisfan $r_0 = a(1 - e\cos(u_0))$, una l'oposada de l'altra. Però només una satisfà $\vec{r_0} \cdot \vec{v_0} = \sqrt{\mu a}e\sin(u_0)$ simultàniament. Es tracta d'agafar aquesta solució com la nostra u_0 i la substituïm a (1.6.16):

$$-nT = u_0 - e\sin(u_0)$$
$$T = \frac{e\sinh(u_0) - u_0}{n}$$

Ara, per un temps t qualsevol, si volem trobar la posició de Q, caldria resoldre (1.6.16) i substituir el valor de u a (1.6.15).

Considerem el dos possibles valors de f en base a l'equació:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos(f)}$$

De nou trobem que una solució numèrica és possible a partir d'aquí. Però en el cas de l'el·lipse, també existeixen solucions analítiques[1].

[1]Podem consultar el desenvolupament a: Pollard, H. Expansion in Elliptic Motion. Pollard, H.: *Celestial Mechanics*, The Carus Mathematical Monographs No. 18, The Mathematical Association of America, 1976, ISBN 0883850192

Capítol 2

El problema de dos cossos

En aquest capítol volem estudiar el moviment de dues partícules tenint en compte la seva mutua atracció. Aquest problema es coneix com el problema de dos cossos (tot i que seria més acurat anomenar-lo problema de les dues partícules ja que estem fent una simplificació dels cossos a dos punts a l'espai).

Ens situem a $\mathbb{R}^3$. Sigui $O \in \mathbb{R}^3$ un punt fixat. Considerem dues partícules a l'espai Q_1 i Q_2. Siguin m_1 i m_2 les seves masses i $\vec{r_1}$ i $\vec{r_2}$ els seus vectors posició respectivament. Denotem amb $r = \|\vec{r_2} - \vec{r_1}\|$ la distància entre les dues partícules.

D'acord amb la llei de gravitació universal de Newton, $f(r) = Gm_1m_2r^{-2}$, on G és una constant depenent únicament de les unitats.

Si asumim que els valors inicials de $\vec{r_1}, \vec{r_2}, \dot{\vec{r_1}}, \dot{\vec{r_2}}$ són coneguts, les equacions que gobernen el moviment són les següents:

$$\begin{aligned} m_1\ddot{\vec{r_1}} &= \frac{Gm_1m_2}{r^2}\frac{\vec{r_2}-\vec{r_1}}{r}, \\ m_2\ddot{\vec{r_2}} &= \frac{Gm_1m_2}{r^2}\frac{\vec{r_1}-\vec{r_2}}{r} \end{aligned} \tag{2.0.1}$$

2.1 Coordenades Relatives

Anem a veure que el problema de dos cossos es pot reduïr al problema de la força central, i així podrem utilitzar tots els resultats que hem estat estudiant fins ara.

Proposició 2.1.1. *El problema de dos cossos es pot reduïr al problema de força central.*

Demostració. Dividim la primera equació de (2.0.1) per m_1 i la segona equació per m_2:

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r_1}} &= \frac{Gm_2}{r^2}\frac{\vec{r_2}-\vec{r_1}}{r} \\ \ddot{\vec{r_2}} &= \frac{Gm_1}{r^2}\frac{\vec{r_1}-\vec{r_2}}{r} \end{aligned}$$

Ara restem la primera a la segona equació:

$$\ddot{\vec{r_2}} - \ddot{\vec{r_1}} = \frac{Gm_1}{r^2}\frac{\vec{r_1}-\vec{r_2}}{r} - \frac{Gm_2}{r^2}\frac{\vec{r_2}-\vec{r_1}}{r}$$

Com que els valors inicials $\vec{r_1}, \vec{r_2}, \dot{\vec{r_1}}, \dot{\vec{r_2}}$ són coneguts, també podem conèixer $\vec{r}, \dot{\vec{r}}$. Sabent que $\vec{r} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$, llavors $-\vec{r} = \vec{r_1} - \vec{r_2}$ i $\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r_2}} - \ddot{\vec{r_1}}$. Substituïm a l'expressió anterior:

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{G}{r^3}(-m_1\vec{r} - m_2\vec{r})$$

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{G}{r^3}\vec{r}(m_1 + m_2)$$

Si ara fem la substitució $\mu = G(m_1 + m_2)$, i utilitzem la **Definició 1.1.4** de vector velocitat, ens queda

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v}, \quad \dot{\vec{v}} = -\mu r^{-3}\vec{r} \tag{2.1.1}$$

Aquest darrer parell d'equacions es correspon amb el de (1.1.3) amb $\mu = G(m_1 + m_2)$. □

Aquest mètode s'anomena **reducció a coordenades relatives**. Podem entendre aquest canvi com si la partícula Q_1 es mogués en una òrbita amb centre fix a Q_2 i viceversa. L'òrbita d'una de les partícules observada des de l'altre s'anomena **òrbita reltativa**.

Observació 2.1.2. L'equació (2.1.1) no varia si canviem $\vec{r}$ per $-\vec{r}$.

2.2 Centre de masses i coordenades baricèntriques

Ens motiva trobar una manera d'explicar el moviment de les dues partícules de forma independent. Per fer-ho, primer ens cal definir el centre de masses, un punt que més tard utilitzarem com a nou origen de coordenades per reescriure les equacions de (2.0.1).

Definició 2.2.1. *Definim el* ***centre de masses*** *de les partícules Q_1 i Q_2 com el punt O' amb vector posició*

$$\vec{r_c} = \frac{m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2}}{m_1 + m_2} \tag{2.2.1}$$

Proposició 2.2.2. ***(Conservació del moment lineal)****: El centre de masses es mou sobre una recta amb velocitat constant.*

Demostració. Partim del vector posició del centre de masses i el derivem

$$\dot{\vec{r_c}} = \frac{1}{m_1 + m_2}(m_1\dot{\vec{r_1}} + m_2\dot{\vec{r_2}})$$

Tornem a derivar

$$\ddot{\vec{r_c}} = \frac{m_1\ddot{\vec{r_1}} + m_2\ddot{\vec{r_2}}}{m_1 + m_2}$$

Per conèixer el valor d'aquesta última expressió, agafem les equacions de (2.0.1) i sumem una a l'altra.

$$m_1\ddot{\vec{r_1}} + m_2\ddot{\vec{r_2}} = 2\frac{Gm_1m_2}{r^2}\left(\frac{\vec{r_2} - \vec{r_1}}{r} + \frac{\vec{r_1} - \vec{r_2}}{r}\right)$$

Com que $\frac{\vec{r_2}-\vec{r_1}}{r} + \frac{\vec{r_1}-\vec{r_2}}{r} = 0$, ens queda

$$m_1\ddot{\vec{r_1}} + m_2\ddot{\vec{r_2}} = 0$$

Per tant,

$$\ddot{\vec{r_c}} = 0$$

Això ens permet deduïr que

$$\vec{r_c} = \vec{a}t + \vec{b} \tag{2.2.2}$$

on $\vec{a}, \vec{b}$ són vectors constants determinats per les condicions inicials. Així doncs, el centre de masses O' es mou sobre la recta $\vec{r_c}$ a velocitat constant. □

Proposició 2.2.3. *Podem reescriure les equacions de* (2.0.1) *com*

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r_1}} &= -(Gm_2^3M^{-2})r_1^{-3}\vec{r_1} \\ \ddot{\vec{r_2}} &= -(Gm_1^3M^{-2})r_2^{-3}\vec{r_2} \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

on $M = (m_1 + m_2)$.

Demostració. Per començar, farem un canvi d'origen de coordenades. Fixem l'origen de coordenades al punt O', el centre de masses. Per tant, a (2.0.1) hem de substituïr r_1 per $r_1 - r_c$ i r_2 per $r_2 - r_c$:

$$\begin{aligned} m_1(\ddot{\vec{r_1}} - \ddot{\vec{r_c}}) &= \frac{Gm_1m_2}{r^2}\frac{\vec{r_2} - \vec{r_c} - \vec{r_1} + \vec{r_c}}{r} \\ m_1(\ddot{\vec{r_2}} - \ddot{\vec{r_c}}) &= \frac{Gm_1m_2}{r^2}\frac{\vec{r_1} - \vec{r_c} - \vec{r_2} + \vec{r_c}}{r} \end{aligned}$$

Com $\ddot{\vec{r_c}} = 0$, el canvi deixa igual les equacions de (2.0.1).

A partir d'ara, suposem que l'origen de coordenades queda fixat a O'. Ara, per estudiar el moviment de les partícules Q_1 i Q_2 relatiu a aquest nou origen de coordenades, hem de tenir en compte que $\vec{r_1}$ i $\vec{r_2}$ són vectors posició relatius a O', de manera que, si $r_1 = \|\vec{r_1}\|$ i $r_2 = \|\vec{r_2}\|$, llavors

$$r = r_1 + r_2, \quad m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2} = 0, \quad m_1r_1 = m_2r_2 \tag{2.2.4}$$

Ara, ens centrem en una de les dues equacions de (2.0.1), per exemple en la primera. Utilitzant les igualtats anteriors obtenim:

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r_1}} &= \frac{Gm_2}{r^3}(\vec{r_2} - \vec{r_1}) \\ \ddot{\vec{r_1}} &= \frac{G}{(r_1 + r_2)^3}(m_2\vec{r_2} - m_2\vec{r_1}) \\ \ddot{\vec{r_1}} &= \frac{-Gm_2^3}{(m_2r_1 + m_2r_2)^3}(m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_1}) \\ \ddot{\vec{r_1}} &= -\frac{Gm_2^3}{(m_2r_1 + m_1r_1)^3}\vec{r_1}(m_1 + m_2) \\ \ddot{\vec{r_1}} &= -\frac{Gm_2^3}{r_1^3(m_2 + m_1)^3}\vec{r_1} \\ \ddot{\vec{r_1}} &= -\frac{Gm_2^3}{r_1^3(m_2 + m_1)^2}\vec{r_1} \\ \ddot{\vec{r_1}} &= -Gm_2^3M^{-2}r_1^{-3}\vec{r_1} \end{aligned}$$

on $M = (m_1 + m_2)$. Prenem $\mu = Gm_2^3M^{-2}$ (notem que és positiva) i tenim el cas newtonià del problema de la força central. Per la segona equació, el desenvolupament és anàleg, prenent $\mu = Gm_1^3M^{-2}$. □

Observació 2.2.4. Com que $\vec{r_1}$ i $\vec{r_2}$ són vectors linealment depenents ($m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2} = 0$), amb una de les dues equacions de (2.2.3) és suficient.

2.3 Energia

Seguim suposant que l'origen de coordenades és el centre de masses i per tant el moviment es regeix per (2.2.3).

Seguint el mateix procediment que hem fet servir per arribar a (1.3.1), amb les equacions de (2.2.3) obtenim l'energia del sistema. Comencem per la primera:

$$\begin{aligned}
\ddot{\vec{r_1}} &= -(Gm_2^3M^{-2})r_1^{-3}\vec{r_1} \\
\ddot{\vec{r_1}} \cdot \dot{\vec{r_1}} &= -(Gm_2^3M^{-2})r_1^{-3}(\vec{r_1}\dot{\vec{r_1}}) \\
\ddot{r}_1\dot{r}_1 &= -(Gm_2^3M^{-2})r_1^{-3}(r_1\dot{r}_1) \\
\int v_1\frac{dv_1}{dt} &= \int -(Gm_2^3M^{-2})r_1^{-2}\frac{dr_1}{dt} \\
\frac{v_1^2}{2} &= (Gm_2^3M^{-2})r_1^{-1} + h_1
\end{aligned}$$

Si multipliquem aquesta última expressió per m_1, obtenim:

$$m_1h_1 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 - (Gm_1m_2^3M^{-2})r_1^{-1}$$

Per la segona equació el procés és anàleg i ens queda:

$$m_2h_2 = \frac{1}{2}m_2v_2^2 - (Gm_2m_1^3M^{-2})r_2^{-1}$$

Definició 2.3.1. *Definim **l'energia de la partícula** Q_1 com*

$$E_1 := m_1h_1 = T_1 - U_1$$

on $T_1 := \frac{1}{2}m_1v_1^2$ *i* $U_1 := (Gm_1m_2^3M^{-2})r_1^{-1}$

*Anàlogament, definim **l'energia de la partícula** Q_2 com*

$$E_2 := m_2h_2 = T_2 - U_2$$

on $T_2 := \frac{1}{2}m_2v_2^2$ *i* $U_2 := (Gm_2m_1^3M^{-2})r_2^{-1}$.

Definició 2.3.2. *Definim l'**energia potencial** del sistema com $-U^*$, on*

$$U^* = Gm_1m_2r^{-1} \tag{2.3.1}$$

*Definim l'**energia cinètica** del sistema com T^*, on*

$$T^* = \frac{1}{2}(m_1v_1^2 + m_2v_2^2) \tag{2.3.2}$$

on $\vec{v_1} = \dot{\vec{r_1}}$ *i* $\vec{v_2} = \dot{\vec{r_2}}$.

Proposició 2.3.3. *L'energia cinètica i potencial del sistema es poden expressar com*

$$T^* = T_1 + T_2, \quad U^* = U_1 + U_2 \tag{2.3.3}$$

Demostració. Per l'energia cinètica, és immediat:

$$T_1 + T_2 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2) = T^*$$

Per l'energia potencial, hem de treballar una mica més:

$$\begin{aligned}
U_1 + U_2 &= G m_1 m_2^3 M^{-2} r_1^{-1} + G m_2 m_1^3 M^{-2} r_2^{-1} \\
U_1 + U_2 &= \frac{G m_1 m_2^3}{(m_1 + m_2)^2 r_1} + \frac{G m_2 m_1^3}{(m_1 + m_2)^2 r_2} \\
U_1 + U_2 &= \frac{G m_1 m_2^3 r_1}{(r_1 m_1 + r_1 m_2)^2} + \frac{G m_2 m_1^3 r_2}{(r_2 m_1 + r_2 m_2)^2}
\end{aligned}$$

Amb les igualtats que hem vist a (2.2.4), tenim que $m_1 r_1 = m_2 r_2$. Així doncs,

$$\begin{aligned}
U_1 + U_2 &= \frac{G m_1 m_2^3 r_1}{(r_2 m_2 + r_1 m_2)^2} + \frac{G m_2 m_1^3 r_2}{(r_2 m_1 + r_1 m_1)^2} \\
U_1 + U_2 &= \frac{G m_1 m_2^3 r_1}{m_2^2 (r_2 + r_1)^2} + \frac{G m_2 m_1^3 r_2}{m_1^2 (r_2 + r_1)^2} \\
U_1 + U_2 &= \frac{G m_1 m_2 r_1 + G m_2 m_1 r_2}{(r_2 + r_1)^2} \\
U_1 + U_2 &= \frac{G m_1 m_2 (r_1 + r_2)}{(r_2 + r_1)^2}
\end{aligned}$$

De nou, per (2.2.4), $r = r_1 + r_2$. Per tant

$$U_1 + U_2 = G m_1 m_2 r^{-1} = U^*$$

□

Proposició 2.3.4. *La relació existent entre l'energia de les dues partícules obeeix les següents equivalències:*

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{T_1}{T_2} = \frac{U_1}{U_2} = \frac{m_1}{m_2} \tag{2.3.4}$$

Demostració. Primer, notem que si derivem les equacions de (2.2.4), tenim

$$v = v_1 + v_2, \quad m_1 \vec{v_1} + m_2 \vec{v_2} = 0, \quad m_1 v_1 = m_2 v_2$$

Si utilitzem aquestes darreres igualtats conjuntament amb les de (2.2.4), obtenim:

$$\begin{aligned}
\frac{T_1}{T_2} &= \frac{m_1 v_1^2}{m_2 v_2^2} = \frac{m_1 v_1 v_1}{m_2 v_2 v_2} = \frac{m_2 v_2 v_1}{m_1 v_1 v_2} = \frac{m_2}{m_1}. \\
\frac{U_1}{U_2} &= \frac{G m_1 m_2^3 M^{-2} r_1^{-1}}{G m_2 m_1^3 M^{-2} r_2^{-1}} = \frac{m_2^2 r_2}{m_1^2 r_1} = \frac{m_2 m_2 r_2}{m_1 m_1 r_1} = \frac{m_2 m_1 r_1}{m_1 m_1 r_1} = \frac{m_2}{m_1}. \\
\frac{E_1}{E_2} &= \frac{T_1 - U_1}{T_2 - U_2} = \frac{\frac{m_2}{m_1} T_2 - \frac{m_2}{m_1} U_2}{T_2 - U_2} = \frac{\frac{m_2}{m_1}(T_2 - U_2)}{T_2 - U_2} = \frac{m_2}{m_1}.
\end{aligned}$$

□

Capítol 3

El problema de tres cossos

3.1 Introducció al problema de n cossos

En aquesta introducció formularem el problema de n cossos, una generalització del problema de tres cossos, per després centrar-nos en el problema de tres cossos com a cas particular.

Volem estudiar el moviment de n partícules Q_i de masses m_i, $i = 1, ..., n$ respectivament, que s'atrauen mutuament. Suposem que $n \geq 2$. Sigui $O \in \mathbb{R}^3$ un punt fixat a l'espai, el qual prenem com a origen. Siguin $\vec{r_i}$, $\vec{v_i}$ els vectors posició i velocitat de la partícula Q_i respectivament:

$$r_i : I \to \mathbb{R}^3, \quad r_i(t) = (x_i(t), y_i(t), z_i(t)), \quad i = 1, ..., n$$

$$v_i : I \to \mathbb{R}^3, \quad v_i(t) = \dot{r_i}(t) = (\dot{x_i}(t), \dot{y_i}(t), \dot{z_i}(t)), \quad i = 1, ..., n$$

La llei d'atracció deriva de la que ja hem estat estudiant fins ara:

$$f(r) = Gm_j m_k r_{jk}^{-2}$$

on $r_{jk} = |\vec{r_j} - \vec{r_k}|$ és la distància entre la partícula k-èsima i la j-èsima.

Per la segona llei de Newton, la partícula k-èsima satisfà:

$$m_k \ddot{\vec{r_k}} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \frac{Gm_j m_k}{r_{jk}^3} (\vec{r_j} - \vec{r_k}), \quad k = 1, ..., n \tag{3.1.1}$$

on la part dreta de l'equació representa la força total sobre la partícula k-èsima exercida per les $(n-1)$ partícules restants.

Suposem que $\vec{r_i}, \vec{v_i}$ venen donats a l'instant inicial $t = 0$ de tal manera que r_{jk} és positiu.

Observació 3.1.1. Gràcies al teorema d'existència i unicitat local de solucions per un problema de valor inicial, tenim el següent: a l'interval màxim de temps $-t_2 < t < t_1$, sigui $r(t) = \min_{-t_2 < t < t_1} \{r_{jk}\}$. Llavors:

1. Existeixen solucions $\{\vec{r_i}(t)\}_{\{i=1,...,n\}}$ per les equacions de (3.1.1) a $-t_2 < t < t_1$.

2. $\vec{r_i}(t)$ i $\vec{v_i}(t) = \dot{\vec{r_i}}(t)$ són coherents amb les dades inicials quan $t = 0$.

A més a més, suposem que si l'interval $-t_2 < t < t_1$ no és $-\infty < t < \infty$, llavors $r(t) \to 0$ quan $t \to t_1$ si t_1 és finit i $r(t) \to 0$ quan $t \to t_2$ si t_2 és finit. També assumim que no hi ha col·lisions de partícules si $r(t) \to 0$.

3.1.1 Centre de masses amb n cossos

Definició 3.1.2. *Sigui $M = \sum_{k=1}^{n} m_k$. Definim el* ***centre de masses*** *de les partícules Q_i, $i = 1, ..., n$ com el punt O' amb vector posició*

$$\vec{r_c} = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k \vec{r_k}}{M} \tag{3.1.2}$$

Proposició 3.1.3. ***(Conservació del moment lineal)****: El centre de masses es mou sobre una recta amb velocitat constant.*

Demostració. Si derivem dues vegades $\vec{r_c}$:

$$\ddot{\vec{r_c}} = M^{-1} \sum_{k=1}^{n} m_k \ddot{\vec{r_k}}$$

Prenem el sumatori:

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \ddot{\vec{r_k}} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \frac{G m_j m_k}{r_{jk}^3} (\vec{r_j} - \vec{r_k}) = 0$$

perquè el parell $\vec{r_j} - \vec{r_k}$ es cancel·la amb el parell $\vec{r_k} - \vec{r_j}$. Gràcies a aquest resultat tenim que

$$\ddot{\vec{r_c}} = 0$$

del que deduïm que

$$\vec{r_c} = \vec{a} t + \vec{b}$$

on $\vec{a}$ i $\vec{b}$ són vectors constants determinats per les condicions inicials. □

Ara, el moviment del centre de masses està determinat. Seguint el mateix raonament que al problema de dos cossos, volem determinar el moviment relatiu al centre de masses.

Fem el mateix canvi d'origen que al problema de dos cossos, considerant el nou origen el centre de masses. Per tant, cal substituïr r_i per $r_i - r_c$. Novament, com $\ddot{\vec{r_c}} = 0$, les equacions de (3.1.1) queden inalterades.

Observació 3.1.4.

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{r_k} = 0, \quad t \in [-t_2, t_1] \tag{3.1.3}$$

i

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{v_k} = 0, \quad t \in [-t_2, t_1] \tag{3.1.4}$$

3.1.2 Conservació de l'energia amb n cossos

Continuem suposant que l'origen es troba al centre de masses.

Definició 3.1.5. *Definim l'**energia potencial** del sistema com -U, on*

$$U = \sum_{1 \leq j < k \leq n} \frac{G m_j m_k}{r_{jk}} \tag{3.1.5}$$

Definició 3.1.6. *Definim el **gradient** de U en la direcció de la partícula k-èsima com*

$$\frac{\partial U}{\partial r_k} := \nabla_k U = \left(\frac{\partial U}{\partial x_k}, \frac{\partial U}{\partial y_k}, \frac{\partial U}{\partial z_k} \right) \tag{3.1.6}$$

Proposició 3.1.7. *Les equacions* (3.1.1) *es transformen en*

$$m_k \ddot{\vec{r_k}} = \frac{\partial U}{\partial r_k} \tag{3.1.7}$$

Demostració. Si calculem la derivada parcial respecte x_k:

$$\frac{\partial U}{\partial x_k} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} -\frac{G m_j m_k}{|\vec{r_j} - \vec{r_k}|^3} \frac{1}{2} 2 x_k = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} -\frac{G m_j m_k}{|\vec{r_j} - \vec{r_k}|^3} x_k$$

D'igual manera obtenim les parcials de y_k i z_k:

$$\frac{\partial U}{\partial y_k} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} -\frac{G m_j m_k}{|\vec{r_j} - \vec{r_k}|^3} y_k$$

$$\frac{\partial U}{\partial z_k} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} -\frac{G m_j m_k}{|\vec{r_j} - \vec{r_k}|^3} z_k$$

Notem que

$$\frac{\partial U}{\partial r_k} = \left(\frac{\partial U}{\partial x_k}, \frac{\partial U}{\partial y_k}, \frac{\partial U}{\partial z_k} \right)$$

$$\frac{\partial U}{\partial r_k} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} -\frac{G m_j m_k}{|\vec{r_j} - \vec{r_k}|^3} (\vec{r_k} - \vec{r_j})$$

$$\frac{\partial U}{\partial r_k} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \frac{G m_j m_k}{r_{jk}^3} (\vec{r_j} - \vec{r_k})$$

$$\frac{\partial U}{\partial r_k} = m_k \ddot{\vec{r_k}}$$

□

Definició 3.1.8. *L'**energia cinètica** del sistema es defineix com*

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} m_k v_k^2 \tag{3.1.8}$$

Teorema 3.1.9. ***(Conservació de l'energia):*** *L'energia total del sistema al problema de n cossos es manté constant.*

Demostració. Gràcies a la **Proposició 3.1.7**, podem deduïr:

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \dot{\vec{r_k}} \cdot \ddot{\vec{r_k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial r_k} \cdot \frac{dr_k}{dt}$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{v_k} \cdot \dot{\vec{v_k}} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial U}{\partial x_k}, \frac{\partial U}{\partial y_k}, \frac{\partial U}{\partial z_k} \right) \cdot \left(\frac{dx_k}{dt}, \frac{dy_k}{dt}, \frac{dz_k}{dt} \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^{n} m_k v_k^2 \right) = \left(\frac{\partial U}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y_k} \frac{dy_k}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z_k} \frac{dz_k}{dt} \right)$$

$$\dot{T} = \dot{U}$$

Així doncs,

$$T = U + E \tag{3.1.9}$$

on E és una constant, l'energia total. $\square$

Definició 3.1.10. *Definim el* ***moment d'inercia*** *com $2I$, on*

$$I = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} m_k r_k^2 \tag{3.1.10}$$

Proposició 3.1.11. *El principi de conservació de l'energia es relaciona amb el moment d'inercia amb la següent expressió:*

$$\ddot{I} = T + E = U + 2E \tag{3.1.11}$$

Demostració. Partim de la definició del moment d'inercia:

$$I = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} m_k r_k^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} m_k (\vec{r_k} \cdot \vec{r_k})$$

Derivem l'expressió dues vegades respecte de t:

$$\ddot{I} = \sum_{k=1}^{n} m_k (\vec{v_k} \cdot \vec{v_k}) + \sum_{k=1}^{n} \vec{r_k} \cdot m_k \ddot{\vec{r_k}},$$

per les equacions de (3.1.1),

$$\ddot{I} = \sum_{k=1}^{n} m_k v_k^2 + \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \frac{G m_j m_k}{r_{jk}^3} (\vec{r_j} \cdot \vec{r_k} - r_k^2)$$

$$\ddot{I} = 2T + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \frac{G m_j m_k}{r_{jk}^3} (r_j^2 - r_k^2 - r_{jk}^2)$$

$$\ddot{I} = 2T + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \frac{G m_j m_k}{r_{jk}^3} r_j^2 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \frac{G m_j m_k}{r_{jk}^3} r_k^2 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \frac{G m_j m_k}{r_{jk}}$$

Ara, al segon terme de la dreta de la igualtat li canviem l'ordre de k i j perquè es pugui cancelar amb el tercer terme:

$$\ddot{I} = 2T + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\frac{Gm_jm_k}{r_{jk}^3}r_k^2 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n}\frac{Gm_jm_k}{r_{jk}^3}r_k^2 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n}\frac{Gm_jm_k}{r_{jk}}$$

$$\ddot{I} = 2T - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n}\frac{Gm_jm_k}{r_{jk}}$$

Per la definició d'energia potencial amb l'equació (3.1.5), l'últim membre de l'expressió és $-U$, per tant

$$\ddot{I} = 2T - U$$

Per (3.1.9),

$$\ddot{I} = 2T - U = T + E = U + 2E$$

□

3.1.3 Moment angular amb n cossos

Definició 3.1.12. *Definim el moment angular amb n cossos com*

$$\vec{c} = \sum_{k=1}^{n} m_k(\vec{r_k} \times \vec{v_k}) \tag{3.1.12}$$

Proposició 3.1.13. *El moment angular és constant.*

Demostració. Partint de l'equació (3.1.1), si multipliquem vectorialment per $\vec{r_k}$ i sumem per les k partícules:

$$\sum_{k=1}^{n} m_k(\vec{r_k} \times \ddot{\vec{r_k}}) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n}\frac{Gm_jm_k}{r_{jk}^3}(\vec{r_j} \times \vec{r_k} - \vec{r_k} \times \vec{r_k})$$

$\vec{r_k} \times \vec{r_k} = 0$ i a més a més els termes $\vec{r_j} \times \vec{r_k}$ es cancelen amb $\vec{r_k} \times \vec{r_j}$ quan apareixen al fer el sumatori. Així doncs,

$$\sum_{k=1}^{n} m_k(\vec{r_k} \times \ddot{\vec{r_k}}) = 0$$

Com que $\ddot{\vec{r_k}} = \dot{\vec{v_k}}$, si integrem, tenim que

$$\sum_{k=1}^{n} m_k(\vec{r_k} \times \vec{v_k}) = \vec{c}$$

on $\vec{c}$ és constant. □

3.2 El problema general de tres cossos

En aquesta secció tractarem el problema de tres cossos o el que és el mateix, el cas amb $n = 3$ del problema de n-cossos. Les equacions del moviment per $n = 3$ són:

$$\begin{aligned} m_1\ddot{\vec{r_1}} &= \frac{Gm_1m_2}{r_{12}^3}(\vec{r_2} - \vec{r_1}) + \frac{Gm_3m_1}{r_{13}^3}(\vec{r_3} - \vec{r_1}) \\ m_2\ddot{\vec{r_2}} &= \frac{Gm_1m_2}{r_{12}^3}(\vec{r_1} - \vec{r_2}) + \frac{Gm_3m_2}{r_{23}^3}(\vec{r_3} - \vec{r_2}) \\ m_3\ddot{\vec{r_3}} &= \frac{Gm_3m_1}{r_{13}^3}(\vec{r_1} - \vec{r_3}) + \frac{Gm_3m_2}{r_{23}^3}(\vec{r_2} - \vec{r_3}) \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

Per la conservació del moment lineal, $m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2} + m_3\vec{r_3} = 0$, així que una de les equacions és depenent de les altres dues.

3.2.1 Coordenades de Jacobi

Considerarem el moviment de les partícules amb un sistema de referència particular: Considerem el moviment de la partícula de massa m_2 relatiu a m_1 mitjançant $\vec{r} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$ i el de m_3 relatiu al centre de masses O' de m_1 i m_2. Aquest centre de masses es troba a $(m_1 + m_2)^{-1}(m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2})$.

Com que, per la conservació del moment lineal, $m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2} + m_3\vec{r_3} = 0$, tenim que

$$\frac{m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2}}{m_1 + m_2} = -\frac{m_3\vec{r_3}}{m_1 + m_2}$$

Ara, la posició $\vec{\rho}$ de la partícula de massa m_3 a aquest centre de masses és:

$$\begin{aligned} \vec{\rho} &= \vec{r_3} + \frac{m_3\vec{r_3}}{m_1 + m_2} \\ \vec{\rho} &= \left(1 + \frac{m_3}{m_1 + m_2}\right)\vec{r_3} \\ \vec{\rho} &= \left(\frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_1 + m_2}\right)\vec{r_3} \\ \vec{\rho} &= M\mu^{-1}\vec{r_3} \end{aligned}$$

on $M = m_1 + m_2 + m_3$ i $\mu = m_1 + m_2$.

Definició 3.2.1. *Els vectors $\vec{r} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$ i $\vec{\rho} = M\mu^{-1}\vec{r_3}$ s'anomenen* ***coordenades de Jacobi****.*

Lema 3.2.2. *Els vectors $\vec{r_3} - \vec{r_1}$ i $\vec{r_3} - \vec{r_2}$ es poden expressar en funció de les coordenades de Jacobi.*

Demostració. Comencem amb $\vec{r_3} - \vec{r_1}$. Multipliquem i dividim per $\mu = m_1 + m_2$:

$$\begin{aligned}
\vec{r_3} - \vec{r_1} &= (\vec{r_3} - \vec{r_1})\frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2} \\
\vec{r_3} - \vec{r_1} &= (m_1(\vec{r_3} - \vec{r_1}) + m_2(\vec{r_3} - \vec{r_1}))\mu^{-1} \\
\vec{r_3} - \vec{r_1} &= (m_1\vec{r_3} - m_1\vec{r_1} + m_3\vec{r_3} - m_3\vec{r_3} + m_2\vec{r_3} - m_2\vec{r_1})\mu^{-1} \\
\vec{r_3} - \vec{r_1} &= ((m_1 + m_2 + m_3)\vec{r_3} - m_3\vec{r_3} - m_1\vec{r_1} - m_2\vec{r_1})\mu^{-1} \\
\vec{r_3} - \vec{r_1} &= (M\vec{r_3} + m_2\vec{r_2} - m_2\vec{r_1})\mu^{-1} \\
\vec{r_3} - \vec{r_1} &= M\mu^{-1}\vec{r_3} + m_2\mu^{-1}(\vec{r_2} - \vec{r_1}) \\
\vec{r_3} - \vec{r_1} &= \vec{\rho} + m_2\mu^{-1}\vec{r}
\end{aligned}$$

Per $\vec{r_3} - \vec{r_2}$, fem el mateix:

$$\begin{aligned}
\vec{r_3} - \vec{r_2} &= (\vec{r_3} - \vec{r_1})\frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2} \\
\vec{r_3} - \vec{r_2} &= (m_1(\vec{r_3} - \vec{r_2}) + m_2(\vec{r_3} - \vec{r_2}))\mu^{-1} \\
\vec{r_3} - \vec{r_2} &= (m_1\vec{r_3} - m_1\vec{r_2} + m_3\vec{r_3} - m_3\vec{r_3} + m_2\vec{r_3} - m_2\vec{r_2})\mu^{-1} \\
\vec{r_3} - \vec{r_2} &= ((m_1 + m_2 + m_3)\vec{r_3} - m_3\vec{r_3} - m_1\vec{r_2} - m_2\vec{r_2})\mu^{-1} \\
\vec{r_3} - \vec{r_2} &= (M\vec{r_3} + m_1\vec{r_1} - m_1\vec{r_2})\mu^{-1} \\
\vec{r_3} - \vec{r_2} &= M\mu^{-1}\vec{r_3} + m_1\mu^{-1}(\vec{r_1} - \vec{r_2}) \\
\vec{r_3} - \vec{r_2} &= \vec{\rho} - m_1\mu^{-1}\vec{r}
\end{aligned}$$

$\square$

Proposició 3.2.3. *El moviment al problema de tres cossos es pot expressar en funció de les coordenades de Jacobi amb les equacions:*

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{G\mu}{r^3}\vec{r} + Gm_3\left(\frac{\vec{\rho} - m_1\mu^{-1}\vec{r}}{r_{23}^3} - \frac{\vec{\rho} + m_2\mu^{-1}\vec{r}}{r13^3}\right) \tag{3.2.2}$$

i

$$\ddot{\vec{\rho}} = -\frac{GM}{\mu}\left(\frac{m_1}{r_{13}^3}(\vec{\rho} + m_2\mu^{-1}\vec{r}) + \frac{m_2}{r_{23}^3}(\vec{\rho} - m_1\mu^{-1}\vec{r})\right) \tag{3.2.3}$$

Demostració. Agafem les equacions de (3.2.1). Substituïm els valors que hem trobat al lema anterior i dividim la primera (1) per m_1 i la segona (2) per m_2:

$$\begin{aligned}
(1): \quad \ddot{\vec{r_1}} &= \frac{Gm_2}{r_{12}^3}\vec{r} + \frac{Gm_3}{r_{13}^3}(\vec{\rho} + m_2\mu^{-1}\vec{r}) \\
(2): \quad \ddot{\vec{r_2}} &= \frac{Gm_1}{r_{12}^3}(-\vec{r}) + \frac{Gm_3}{r_{23}^3}(\vec{\rho} - m_1\mu^{-1}\vec{r})
\end{aligned}$$

Restem la primera (1) a la segona (2):

$$(2) - (1): \quad \ddot{\vec{r_2}} - \ddot{\vec{r_1}} = \frac{-Gm_1\vec{r} - Gm_2\vec{r}}{r_{12}^3} - \frac{Gm_3}{r_{13}^3}(\vec{\rho} + m_2\mu^{-1}\vec{r}) + \frac{Gm_3}{r_{23}^3}(\vec{\rho} - m_1\mu^{-1}\vec{r})$$

Si tenim en compte que $\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r_2}} - \ddot{\vec{r_1}}$,

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{G\mu}{r^3}\vec{r} + Gm_3\left(\frac{\vec{\rho} - m_1\mu^{-1}\vec{r}}{r_{23}^3} - \frac{\vec{\rho} + m_2\mu^{-1}\vec{r}}{r13^3}\right)$$

Ara, agafem la tercera equació de (3.2.1) i la multipliquem per $M\mu^{-1}m_3^{-1}$:

$$\begin{aligned}
\ddot{\vec{r_3}} &= \frac{Gm_1}{r_{13}^3}(-\vec{\rho} - m_2\mu^{-1}\vec{r}) + \frac{Gm_2}{r_{23}^3}(-\vec{\rho} + m_1\mu^{-1}\vec{r}) \\
M\mu^{-1}\ddot{\vec{r_3}} &= -\frac{GMm_1}{\mu r_{13}^3}(\vec{\rho} + m_2\mu^{-1}\vec{r}) - \frac{GMm_2}{\mu r_{23}^3}(\vec{\rho} - m_1\mu^{-1}\vec{r})
\end{aligned}$$

Si tenim en compte que $\ddot{\vec{\rho}} = M\mu^{-1}\ddot{\vec{r_3}}$,

$$\ddot{\vec{\rho}} = -\frac{GM}{\mu}\left(\frac{m_1}{r_{13}^3}(\vec{\rho} + m_2\mu^{-1}\vec{r}) + \frac{m_2}{r_{23}^3}(\vec{\rho} - m_1\mu^{-1}\vec{r})\right)$$

□

Notació 3. *Denotarem les velocitats relatives de les coordenades de Jacobi com* $\dot{\vec{r}} = \vec{v}$ *i* $\dot{\vec{\rho}} = \vec{V}$.

Proposició 3.2.4. *Amb les coordenades de Jacobi tenim les següents relacions:*

$$\begin{aligned}
\vec{c} &= g_1(\vec{r} \times \vec{v}) + g_2(\vec{\rho} \times \vec{V}) \\
2I &= g_1 r^2 + g_2\rho^2 \\
2T &= g_1 v^2 + g_2 V^2
\end{aligned} \tag{3.2.4}$$

on $g_1 = m_1m_2\mu^{-1}$ *i* $g_2 = m_3\mu M^{-1}$.

Demostració. La demostració es troba a l'Apèndix A del treball. □

Observació 3.2.5. Es pot comprobar el següent resultat: *Si* $c = 0$, *llavors el moviment dels tres cossos està contingut dins d'un mateix pla.*

Demostració. La idea de la demostració consisteix en veure que el vector perpendicular a $\vec{r}$ i $\vec{\rho}$ és constant, i per tant el moviment està contingut dins un pla. □

3.3 Solucions de Lagrange

Estudiarem un cas especial del problema de 3 cossos per trobar-ne solucions. Suposarem que les 3 partícules es mouen uniformement en cercles, al mateix pla i amb la mateixa velocitat angular.

Prenem un sistema de coordenades $\{O; x, y, z\}$, amb $z = 0$ com a pla que conté el moviment. Denotem per $(x_k, y_k, 0)$ les coordenades de la partícula de massa m_k. Suposem, sense pèrdua de generalitat, que el centre de masses es troba a l'origen O. Per tant, $r_k = (x_k, y_k, 0)$. A partir de l'equació (3.2.1), obtenim:

$$\begin{aligned}
\ddot{x_k} &= G\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{j=3} \frac{m_j}{r_{jk}^3}(x_j - x_k) \\
\ddot{y_k} &= G\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{j=3} \frac{m_j}{r_{jk}^3}(y_j - y_k)
\end{aligned} \tag{3.3.1}$$

on $k = 1, 2, 3$. Notem que cada suma conté dos termes.

Definició 3.3.1. *Definim la* ***velocitat angular*** ω *d'una partícula que es mou sobre una circumferència com l'angle recorregut* θ *per unitat de temps* t. *És a dir:*

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

Sigui ω la velocitat angular de les partícules que volem estudiar. Com que suposem que el moviment d'aquestes està contingut dins un mateix pla, podem introduïr un sistema de coordenades (ξ, η) que està rotant a velocitat angular ω. Per tant, en aquest sistema de referència, les partícules no es mouen.

Lema 3.3.2. *Podem reescriure el sistema* (3.3.1) *amb el nou sistema de referència com:*

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_k - 2\omega\dot{\eta}_k - \omega^2\xi_k &= G\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{j=3} \frac{m_j}{r_{jk}^3}(\xi_j - \xi_k) \\ \ddot{\eta}_k + 2\omega\dot{\xi}_k - \omega^2\eta_k &= G\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{j=3} \frac{m_j}{r_{jk}^3}(\eta_j - \eta_k) \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

on $k = 1, 2, 3$.

Demostració. Partim de les següents relacions:

$$\begin{cases} x_k = \xi_k \cos(\omega t) - \eta_k \sin(\omega t) \\ y_k = \xi_k \sin(\omega t) + \eta_k \cos(\omega t) \end{cases}$$

Les derivem dues vegades:

$$\begin{cases} \dot{x}_k = \dot{\xi}_k \cos(\omega t) - \xi_k\omega \sin(\omega t) - \dot{\eta}_k \sin(\omega t) - \eta_k\omega \cos(\omega t) \\ \dot{y}_k = \dot{\xi}_k \sin(\omega t) + \xi_k\omega \cos(\omega t) + \dot{\eta}_k \cos(\omega t) - \eta_k\omega \sin(\omega t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_k = \ddot{\xi}_k \cos(\omega t) - \dot{\xi}_k\omega \sin(\omega t) - \dot{\xi}_k\omega \sin(\omega t) - \xi_k\omega^2 \cos(\omega t) \\ -\ddot{\eta}_k \sin(\omega t) - \dot{\eta}_k\omega \cos(\omega t) - \dot{\eta}_k\omega \cos(\omega t) + \eta_k\omega^2 \sin(\omega t) \\ \\ \ddot{y}_k = \ddot{\xi}_k \sin(\omega t) + \dot{\xi}_k\omega \cos(\omega t) + \dot{\xi}_k\omega \cos(\omega t) - \xi_k\omega^2 \sin(\omega t) \\ +\ddot{\eta}_k \cos(\omega t) - \dot{\eta}_k\omega \sin(\omega t) - \dot{\eta}_k\omega \sin(\omega t) - \eta_k\omega^2 \cos(\omega t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_k = \ddot{\xi}_k \cos(\omega t) - 2\dot{\xi}_k\omega \sin(\omega t) - \xi_k\omega^2 \cos(\omega t) \\ -\ddot{\eta}_k \sin(\omega t) - 2\dot{\eta}_k\omega \cos(\omega t) + \eta_k\omega^2 \sin(\omega t) \\ \\ \ddot{y}_k = \ddot{\xi}_k \sin(\omega t) + 2\dot{\xi}_k\omega \cos(\omega t) - \xi_k\omega^2 \sin(\omega t) \\ +\ddot{\eta}_k \cos(\omega t) - 2\dot{\eta}_k\omega \sin(\omega t) - \eta_k\omega^2 \cos(\omega t) \end{cases}$$

Ara, substituïm els valors de $\ddot{x}_k$ i $\ddot{y}_k$ a (3.3.1):

$$\begin{aligned} (1):\ & \ddot{\xi}_k \cos(\omega t) - 2\dot{\xi}_k\omega \sin(\omega t) - \xi_k\omega^2 \cos(\omega t) - \ddot{\eta}_k \sin(\omega t) - 2\dot{\eta}_k\omega \cos(\omega t) \\ & + \eta_k\omega^2 \sin(\omega t) = G\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{j=3} \frac{m_j}{r_{jk}^3}(\xi_j \cos(\omega t) - \eta_j \sin(\omega t) - \xi_k \cos(\omega t) + \eta_k \sin(\omega t)) \end{aligned}$$

$$(2):\ \ddot{\xi}_k\sin(\omega t)+2\dot{\xi}_k\omega\cos(\omega t)-\xi_k\omega^2\sin(\omega t)+\ddot{\eta}_k\cos(\omega t)-2\dot{\eta}_k\omega\sin(\omega t)$$
$$-\eta_k\omega^2\cos(\omega t)=G\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{j=3}\frac{m_j}{r_{jk}^3}(\xi_j\sin(\omega t)+\eta_j\cos(\omega t)-\xi_k\sin(\omega t)-\eta_k\cos(\omega t))$$

Per trobar la primera equació del lema, dividim (1) per $\sin(\omega t)$ i (2) per $\cos(\omega t)$. Després sumarem les dues equacions resultants i així els termes adequats es cancel·laran:

$$(1'):\ \ddot{\xi}_k\frac{\cos(\omega t)}{\sin(\omega t)}-2\dot{\xi}_k\omega-\xi_k\omega^2\frac{\cos(\omega t)}{\sin(\omega t)}-\ddot{\eta}_k-2\dot{\eta}_k\omega\frac{\cos(\omega t)}{\sin(\omega t)}+\eta_k\omega^2=$$
$$=G\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{j=3}\frac{m_j}{r_{jk}^3}(\xi_j-\xi_k)\frac{\cos(\omega t)}{\sin(\omega t)}-G\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{j=3}\frac{m_j}{r_{jk}^3}(\eta_j-\eta_k)$$

$$(2'):\ \ddot{\xi}_k\frac{\sin(\omega t)}{\cos(\omega t)}+2\dot{\xi}_k\omega-\xi_k\omega^2\frac{\sin(\omega t)}{\cos(\omega t)}+\ddot{\eta}_k-2\dot{\eta}_k\omega\frac{\sin(\omega t)}{\cos(\omega t)}-\eta_k\omega^2=$$
$$=G\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{j=3}\frac{m_j}{r_{jk}^3}(\xi_j-\xi_k)\frac{\sin(\omega t)}{\cos(\omega t)}+G\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{j=3}\frac{m_j}{r_{jk}^3}(\eta_j-\eta_k)$$

Només ens falta sumar $(1')+(2')$:

$$\ddot{\xi}_k\left(\frac{\cos(\omega t)}{\sin(\omega t)}+\frac{\sin(\omega t)}{\cos(\omega t)}\right)-2\omega\dot{\eta}_k\left(\frac{\cos(\omega t)}{\sin(\omega t)}+\frac{\sin(\omega t)}{\cos(\omega t)}\right)-\omega^2\xi_k\left(\frac{\cos(\omega t)}{\sin(\omega t)}+\frac{\sin(\omega t)}{\cos(\omega t)}\right)=$$
$$=G\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{j=3}\frac{m_j}{r_{jk}^3}(\xi_j-\xi_k)\left(\frac{\cos(\omega t)}{\sin(\omega t)}+\frac{\sin(\omega t)}{\cos(\omega t)}\right)$$

i simplificar l'equació resultant per obtenir l'equació que busquem. Notem que

$$\left(\frac{\cos(\omega t)}{\sin(\omega t)}+\frac{\sin(\omega t)}{\cos(\omega t)}\right)=\left(\frac{1}{\sin(\omega t)\cos(\omega t)}\right)$$

Multipliquem l'equació per $\sin(\omega t)\cos(\omega t)$ i ens queda:

$$\ddot{\xi}_k-2\omega\dot{\eta}_k-\omega^2\xi_k=G\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{j=3}\frac{m_j}{r_{jk}^3}(\xi_j-\xi_k)$$

Ara, per trobar la segona equació del lema, seguim el mateix procés però ara dividim (1) per $\cos(\omega t)$ i (2) per $\sin(\omega t)$:

$$(1''):\ \ddot{\xi}_k-2\dot{\xi}_k\omega\frac{\sin(\omega t)}{\cos(\omega t)}-\xi_k\omega^2-\ddot{\eta}_k\frac{\sin(\omega t)}{\cos(\omega t)}-2\dot{\eta}_k\omega+\eta_k\omega^2\frac{\sin(\omega t)}{\cos(\omega t)}=$$
$$=G\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{j=3}\frac{m_j}{r_{jk}^3}(\xi_j-\xi_k)-G\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{j=3}\frac{m_j}{r_{jk}^3}(\eta_j-\eta_k)\frac{\sin(\omega t)}{\cos(\omega t)}$$

$$(2''):\ \ddot{\xi}_k + 2\dot{\xi}_k\omega\frac{\cos(\omega t)}{\sin(\omega t)} - \xi_k\omega^2 + \ddot{\eta}_k\frac{\cos(\omega t)}{\sin(\omega t)} - 2\dot{\eta}_k\omega - \eta_k\omega^2\frac{\cos(\omega t)}{\sin(\omega t)} =$$
$$= G\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{j=3}\frac{m_j}{r_{jk}^3}(\xi_j - \xi_k) + G\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{j=3}\frac{m_j}{r_{jk}^3}(\eta_j - \eta_k)\frac{\cos(\omega t)}{\sin(\omega t)}$$

Restem $(2'') - (1'')$:

$$2\dot{\xi}_k\omega\left(\frac{\cos(\omega t)}{\sin(\omega t)} + \frac{\sin(\omega t)}{\cos(\omega t)}\right) + \ddot{\eta}_k\left(\frac{\cos(\omega t)}{\sin(\omega t)} + \frac{\sin(\omega t)}{\cos(\omega t)}\right) - \eta_k\omega^2\left(\frac{\cos(\omega t)}{\sin(\omega t)} + \frac{\sin(\omega t)}{\cos(\omega t)}\right) =$$
$$= G\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{j=3}\frac{m_j}{r_{jk}^3}(\eta_j - \eta_k)\left(\frac{\cos(\omega t)}{\sin(\omega t)} + \frac{\sin(\omega t)}{\cos(\omega t)}\right)$$

i simplifiquem l'equació resultant per obtenir la segona equació del lema:

$$\ddot{\eta}_k + 2\omega\dot{\xi}_k - \omega^2\eta_k = G\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{j=3}\frac{m_j}{r_{jk}^3}(\eta_j - \eta_k)$$

□

Proposició 3.3.3. *Siguin $z_k = \xi_k + i\eta_k$ les solucions de Lagrange, amb $k = 1, 2, 3$. Llavors, z_1, z_2, z_3 satisfan:*

$$-z_k = \lambda\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{j=3}\frac{m_j}{r_{jk}^3}(z_j - z_k) \tag{3.3.3}$$

on $\lambda = G\omega^{-2}$ i $r_{jk} = \|z_j - z_k\|$.

Demostració. Suposem $z_k = \xi_k + i\eta_k$. A partir del nou sistema (3.3.2), si multipliquem la segona equació per i i la sumem a la primera, obtenim:

$$\ddot{\xi}_k + i\ddot{\eta}_k - 2\omega\dot{\eta}_k + 2\omega i\dot{\xi}_k - \omega^2\xi_k - \omega^2\eta_k = G\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{j=3}\frac{m_j}{r_{jk}^3}(\xi_j + i\eta_j - \xi_k - i\eta_k)$$

Notem que $2\omega i\dot{\xi}_k - 2\omega\dot{\eta}_k = 2\omega i(\dot{\xi}_k + i\dot{\eta}_k)$. Llavors, ens queda:

$$\ddot{z}_k + 2\omega i\dot{z}_k - \omega^2 z_k = G\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{j=3}\frac{m_j}{r_{jk}^3}(z_j - z_k) \tag{3.3.4}$$

on $r_{jk} = \|z_j - z_k\|$.

Com les partícules estan quietes en aquest sistema de referència, cada $\dot{z}_k = 0$. Per tant, z_1, z_2, z_3 satisfan

$$-z_k = \lambda\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{j=3}\frac{m_j}{r_{jk}^3}(z_j - z_k)$$

on $\lambda = G\omega^{-2}$. □

Per acabar la discusió només ens queda desenvolupar les equacions de (3.3.3). Si desenvolupem la primera equació, substituïnt $\rho_1 = \lambda r_{23}^{-3}$, $\rho_2 = \lambda r_{13}^{-3}$ i $\rho_3 = \lambda r_{12}^{-3}$.

$$\begin{aligned} -z_1 &= \lambda\frac{m_2}{r_{12}^3}(z_2 - z_1) + \lambda\frac{m_3}{r_{13}^3}(z_3 - z_1) \\ 0 &= z_1 + \lambda\frac{m_2}{r_{12}^3}z_2 + \lambda\frac{m_2}{r_{12}^3}z_1 + \lambda\frac{m_3}{r_{13}^3}z_3 + \lambda\frac{m_3}{r_{13}^3}z_1 \\ (1):\quad 0 &= (1 - \rho_3 m_2 - \rho_2 m_3)z_1 + \rho_3 m_2 z_2 + \rho_2 m_3 z_3 \end{aligned}$$

El mateix podem fer per la tercera equació, i ens queda:

$$(2):\quad 0 = \rho_2 m_1 z_1 + \rho_1 m_2 z_2 + (1 - \rho_2 m_1 - \rho_1 m_2)z_3$$

Com que el centre de masses està fixat a l'origen, la segona equació es pot substituïr per

$$(3):\quad m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3 = 0$$

Per tant, el nou sistema d'equacions per posicions de Lagrange queda de la forma següent:

$$\begin{aligned} (1 - \rho_3 m_2 - \rho_2 m_3)z_1 + \rho_3 m_2 z_2 + \rho_2 m_3 z_3 &= 0 \\ \rho_2 m_1 z_1 + \rho_1 m_2 z_2 + (1 - \rho_2 m_1 - \rho_1 m_2)z_3 &= 0 \\ m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3 &= 0 \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

Per el sistema (3.3.5) tenim dues possibilitats:

1. Els punts z_1, z_2, z_3 per algun instant t no es troben alineats. Pensem en el darrer sistema d'equacions en el pla. Si considerem z_k com vectors de components (ξ_k, η_k), podem pensar les equacions com combinacions lineals d'aquests vectors. Per tant, hi ha dos d'aquests vectors que són linealment independents. Sense pèrdua de generalitat, suposem que són z_1 i z_2. La combinació lineal $z_3 = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2$, on $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, és única llevat de multiplicitat. Per tant, els coeficients de z_k són proporcionals per les tres equacions. Si usem la proporcionalitat, trobem:

$$\begin{aligned} (1):&\quad \frac{\rho_2 m_1}{m_1} = \frac{\rho_1 m_2}{m_2} \\ (2):&\quad \frac{\rho_3 m_2}{m_2} = \frac{\rho_1 m_2}{m_2} \end{aligned}$$

   Per tant, $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3$. També:

$$\begin{aligned} &\rho_1 = \frac{1 - \rho_1 m_2 - \rho_1 m_3}{m_1} \\ &\rho_1 m_1 + \rho_1 m_2 + \rho_1 m_3 = 1 \\ &\rho_1 M = 1 \end{aligned}$$

   on $M = m_1 + m_2 + m_3$. Per tant, $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \frac{1}{M}$. L'única solució que correspon a aquestes característiques col·loca les masses en els vèrtex d'un triangle equilàter de costat $(GM\omega^{-2})^{1/3}$. El centre del triangle i el centre de masses no tenen per què coincidir, ja que aquest resultat és independent del valor de les masses.

2. Els punts z_1, z_2, z_3 estan alineats per un instant de temps t. Discutirem aquest cas amb més profunditat a la següent secció.

3.4 Solucions d'Euler

En aquesta secció continuem estudiant z_1, z_2, z_3 suposant que totes tres es troben sobre una recta L per un instant de temps t. Com L és una recta, L conté el centre de masses. I com que L conté el centre de masses, L passa per O. Podem suposar que L és l'eix ξ. Llavors totes les components η_k s'anul·len. Renumerem les partícules de tal manera que $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3$ i $r_{12} = \xi_2 - \xi_1$, $r_{23} = \xi_3 - \xi_2$, $r_{13} = \xi_3 - \xi_1$.

Proposició 3.4.1. *Amb aquestes condicions, el moviment de les partícules sobre la recta L queda determinat per:*

$$\begin{aligned} -\xi_1 &= \lambda\left(\frac{m_2}{(\xi_2-\xi_1)^2} + \frac{m_3}{(\xi_3-\xi_1)^2}\right) \\ \xi_3 &= \lambda\left(\frac{m_1}{(\xi_3-\xi_1)^2} + \frac{m_2}{(\xi_3-\xi_2)^2}\right) \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

on $\lambda = G\omega^{-2}$.

Demostració. Si tenim en compte que $z_k = \xi_k + i\eta_k$, però $\eta_k = 0$ per tot $k = 1, 2, 3$, llavors $z_k = \xi_k$. Si agafem les equacions de (3.3.3) i substituïm z_k per ξ_k:

$$\begin{aligned} -\xi_1 &= \lambda\frac{m_2}{r_{12}^3}(\xi_2-\xi_1) + \lambda\frac{m_3}{r_{13}^3}(\xi_3-\xi_1) \\ -\xi_3 &= \lambda\frac{m_1}{r_{13}^3}(\xi_1-\xi_3) + \lambda\frac{m_2}{r_{23}^3}(\xi_2-\xi_3) \end{aligned}$$

Ara, si substituïm els valor de r_{jk} corresponents i notem que $(\xi_1 - \xi_3) = -(\xi_3 - \xi_1)$ i $(\xi_2 - \xi_3) = (\xi_3 - \xi_2)$, ens queda:

$$\begin{aligned} -\xi_1 &= \lambda\left(\frac{m_2}{(\xi_2-\xi_1)^2} + \frac{m_3}{(\xi_3-\xi_1)^2}\right) \\ \xi_3 &= \lambda\left(\frac{m_1}{(\xi_3-\xi_1)^2} + \frac{m_2}{(\xi_3-\xi_2)^2}\right) \end{aligned}$$

La tercera equació és

$$m_1\xi_1 + m_2\xi_2 + m_3\xi_3 = 0 \tag{3.4.2}$$

ja que l'origen està fixat al centre de masses. □

Lema 3.4.2. *Si prenem els següents valors per les diferències* $\xi_2 - \xi_1 = a$, $\xi_3 - \xi_2 = a\rho$, $\xi_3 - \xi_1 = a(1+\rho)$, *llavors podem reescriure* (3.4.2) *de dues maneres diferents:*

$$\begin{aligned} m_2a + m_3a(1+\rho) &= -M\xi_1 \\ m_1a(1+\rho) + m_2a\rho &= M\xi_3 \end{aligned} \tag{3.4.3}$$

Demostració. Partint de (3.4.2), sumem $m_1\xi_3$ i $m_2\xi_3$ a tots dos costats de l'equació

$$\begin{aligned} m_1\xi_1 + m_2\xi_2 + m_3\xi_3 + m_1\xi_3 + m_2\xi_3 &= m_1\xi_3 + m_2\xi_3 \\ m_1\xi_3 + m_2\xi_3 + m_3\xi_3 &= m_1\xi_3 - m_1\xi_1 + m_2\xi_3 - m_2\xi_2 \end{aligned}$$

i substituïm els valors de les diferències adequades, obtenim:

$$M\xi_3 = m_1a(1+\rho) + m_2a\rho$$

D'altra banda, si restem $m_1\xi_1$ i $m_2\xi_1$ a tots dos costats de (3.4.2):

$$\begin{gathered}
m_1\xi_1 + m_2\xi_2 + m_3\xi_1 - m_1\xi_1 - m_2\xi_3 = -m_1\xi_1 - m_2\xi_1 \\
-m_1\xi_1 - m_2\xi_1 - m_3\xi_1 = m_2\xi_2 - m_2\xi_1 + m_3\xi_3 - m_3\xi_1 \\
-M\xi_1 = m_2 a + m_3 a(1+\rho)
\end{gathered}$$

□

Lema 3.4.3.

$$\frac{m_2 + m_3(1+\rho)^{-2}}{m_1(1+\rho)^{-2} + m_2\rho^{-2}} = \frac{m_2 + m_3(1+\rho)}{m_1(1+\rho) + m_2\rho} \tag{3.4.4}$$

Demostració. Substituïm les diferències $\xi_j - \xi_j$ a les equacions de (3.4.1). Després, dividim la primera per la segona equació de (3.4.1) i la primera per la segona de (3.4.3). Igualem $-\xi_1/\xi_3$:

$$\begin{aligned}
\frac{m_2 a^{-2} + m_3 a^{-2}(1+\rho)^{-2}}{m_1 a^{-2}(1+\rho)^{-2} + m_2 a^{-2}\rho{-2}} &= \frac{m_2 a + m_3 a(1+\rho)}{m_1 a(1+\rho) + m_2 a\rho} \\
\frac{m_2 + m_3(1+\rho)^{-2}}{m_1(1+\rho)^{-2} + m_2\rho^{-2}} &= \frac{m_2 + m_3(1+\rho)}{m_1(1+\rho) + m_2\rho}
\end{aligned}$$

□

Proposició 3.4.4. *El valor ρ és arrel de:*

$$\begin{aligned}
p(\rho) = &-(m_1+m_2)\rho^5 - (3m_1+2m_2)\rho^4 - (3m_1+m_2)\rho^3 \\
&+ (m_2+3m_3)\rho^2 + (2m_2+3m_3)\rho + (m_2+m_3)
\end{aligned} \tag{3.4.5}$$

Demostració. Desenvolupem (3.4.4):

$$\begin{aligned}
\frac{(m_2(1+\rho)^2 + m_3)(1+\rho)^2\rho^2}{(1+\rho^2)(m_1\rho^2 + m_2(1+\rho)^2)} &= \frac{m_2 + m_3 + m_3\rho}{m_1 + m_1\rho + m_2\rho} \\
\frac{m_2\rho^4 + 2m_2\rho^3 + (m_2+m_3)\rho^2}{(m_1+m_2)\rho^2 + 2m_2\rho + m_2} &= \frac{m_2 + m_3 + m_3\rho}{m_1 + (m_1+m_2)\rho}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(m_2\rho^4 + 2m_2\rho^3 + (m_2+m_3)\rho^2)(m_1 + (m_1+m_2)\rho) = \\
&\quad = ((m_2+m_3) + m_3\rho)((m_1+m_2)\rho^2 + 2m_2\rho + m_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&m_2(m_1+m_2)\rho^5 + m_1m_2\rho^4 + 2m_2(m_1+m_2)\rho^4 \\
&+ 2m_1m_2\rho^3 + (m_1+m_2)(m_2+m_3)\rho^3 + m_1(m_2+m_3)\rho^2 = \\
&= m_3(m_1+m_2)\rho^3 + (m_2+m_3)(m_1+m_2)\rho^2 + 2m_2m_3\rho^2 \\
&+ 2m_2(m_2+m_3)\rho + m_2m_3\rho + m_2(m_2+m_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&m_2(m_1+m_2)\rho^5 + (m_1m_2 + 2m_2(m_1+m_2))\rho^4 \\
&+ ((m_1+m_2)(m_2+m_3) + 2m_1m_2)\rho^3 + m_1(m_2+m_3)\rho^2 \\
&= m_3(m_1+m_2)\rho^3 + ((m_2+m_3)(m_1+m_2) + 2m_2m_3)\rho^2 \\
&+ (m_2m_3 + 2m_2(m_2+m_3))\rho + m_2(m_2+m_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = &-m_2(m_1+m_2)\rho^5 - (m_1m_2 + 2m_2(m_1+m_2))\rho^4 \\
&+ (m_3(m_1+m_2) - (m_1+m_2)(m_2+m_3) + 2m_1m_2)\rho^3 \\
&+ ((m_2+m_3)(m_1+m_2) + 2m_2m_3 - m_1(m_2+m_3))\rho^2 \\
&+ (m_2m_3 + 2m_2(m_2+m_3))\rho + m_2(m_2+m_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&0 = -m_2(m_1+m_2)\rho^5 - (m_1m_2 + 2m_2m_1 + 2m_2m_2))\rho^4 \\
&(m_3m_1 + m_2m_3 - m_1m_2 - m_3m_1 - m_2m_2 - m_2m_3 - 2m_1m_2)\rho^3 \\
&(m_2m_1 + m_2m_2 + m_3m_1 + m_3m_2 + 2m_2m_3 - m_1m_2 - m_1m_3)\rho^2 \\
&(m_2m_3 + 2m_2m_2 + 2m_2m_3)\rho + m_2(m_2+m_3)
\end{aligned}$$

Després de tots els càlculs anteriors i d'observar que hi ha multiples cancel·lacions als quocients de ρ^3 i ρ^2, dividim tota l'expressió per m_2 i agrupem termes:

$$\begin{aligned}
&-(m_1+m_2)\rho^5 - (3m_1+2m_2)\rho^4 - (3m_1+m_2)\rho^3 \\
&+ (m_2+3m_3)\rho^2 + (2m_2+3m_3)\rho + (m_2+m_3) = 0
\end{aligned}$$

□

Volem $\rho > 0$ per com hem definit les diferències al **Lema 3.4.2**. Si $\rho = 0$, llavors $p(0) > 0$. Si $\rho \to \infty$, llavors $p(\rho) \to -\infty$. Per tant, pel teorema de Bolzano, $p(\rho)$ té una arrel a l'interval $(0, \infty)$. Per la regla de signes de Descartes, $p(\rho)$ té com a màxim una arrel positiva, perquè només hi ha un canvi de signe als coeficients del polinomi. Així doncs, existeix una única arrel positiva ρ que satisfà el problema.

Proposició 3.4.5. *El valor a queda determinat per:*

$$a^3 = \lambda M \frac{(m_2 + m_3(1+\rho)^2)}{(m_2 + m_3(1+\rho))}$$

Demostració. Substituïm $-\xi_1$ a (3.4.1) pel seu valor donat per (3.4.3):

$$\begin{aligned}
(m_2a + m_3a(1+\rho))M^{-1} &= \lambda(m_2a^{-2} + m_3a^{-2}(1+\rho)^{-2}) \\
a(m_2 + m_3(1+\rho)) &= \lambda M a^{-2}(m_2 + m_3(1+\rho)^{-2}) \\
a^3(m_2 + m_3(1+\rho)) &= \lambda M(m_2 + m_3(1+\rho)^{-2}) \\
a^3 &= \lambda M \frac{(m_2 + m_3(1+\rho)^2)}{(m_2 + m_3(1+\rho))}
\end{aligned}$$

□

Com que a ha quedat determinada, les equacions de (3.4.1) determinen ξ_1 i ξ_3 (les diferències $\xi_j - \xi_k$ han estat substituïdes pels seus valors en funció de ρ i a). Després, $\xi_2 = \xi_2 - \xi_1 + \xi_1 = a + \xi_1$. Així doncs, el problema es pot resoldre explicitament.

3.5 El problema restringit de tres cossos

En aquesta secció volem estudiar un cas particular més tractable del problema de tres cossos. Suposem que la partícula de massa m_3 és tant petita que no influencia el moviment de les altres dues partícules, però aquestes si l'afecten a ella. El que farem serà imposar $m_3 = 0$. Per tant, $M = \mu$. Ara, el centre de masses del sistema és el centre de masses de m_1 i m_2, també anomenades masses primàries.

Proposició 3.5.1. *Siguin* $r_{13} = \rho_1$ *i* $r_{23} = \rho_2$. *Les equacions* (3.2.2) *i* (3.2.3) *es reescriuen de la següent forma:*

$$\ddot{\vec{r}} = -G\mu r^{-3}\vec{r} \tag{3.5.1}$$

i

$$\ddot{\vec{\rho}} = -Gm_1\rho_1^{-3}(\vec{\rho} + m_2\mu^{-1}\vec{r}) - Gm_2\rho_2^{-3}(\vec{\rho} - m_1\mu^{-1}\vec{r}) \tag{3.5.2}$$

Demostració. Només cal prendre les equacions (3.2.2) i (3.2.3), substituïr ρ_1 i ρ_2 i imposar $m_3 = 0$ i per tant també $M = \mu$. □

Observem que la primera equació es pot resoldre mitjançant la teoria del problema de la força central i del problema de dos cossos. Per tant, $\vec{r}$ és conegut. El moviment de la partícula de massa m_3 està totalment determinat per l'equació (3.5.2). Aquest plantejament s'anomena el ***problema restringit de tres cossos***.

Com que hem imposat que $m_3 = 0$, no podem utilitzar les lleis de conservació que hem vist anteriorment. Així doncs, fem una altra suposició important: tot el moviment succeeix a un pla. L'última suposició que fem per adequar el problema encara més és que les dues masses primàries roten amb un moviment circular uniforme entorn el centre de masses. Aquest plantejament es diu ***problema restringit circular de tres cossos***.

Utilitzem el mateix sistema de coordenades rotatiu (ξ, η) descrit a les seccions anteriors. Segons la tercera llei de Kepler, el període per les dues masses primàries és $p = \frac{2\pi}{\sqrt{G\mu}}r^{3/2}$. Per tant, el moviment mitjà és $n = \sqrt{G\mu r^{-3}}$, on r és la distància entre les primàries. Així doncs, $w = n$. Imposarem que les dues masses primàries estiguin situades sobre l'eix ξ i, per tant, estàtiques. Prenem l'equació (3.3.4) i escrivim $z_3 = z$, $r_{13} = \rho_1$ i $r_{23} = \rho_2$:

$$\ddot{z} + 2\omega i\dot{z} - \omega^2 z = Gm_1\rho_1^{-3}(z_1 - z) + Gm_2\rho_2^{-3}(z_2 - z) \tag{3.5.3}$$

Com que hem situat les masses primàries a l'eix ξ, $\eta_1 = \eta_2 = 0$. Llavors, $z_1 = \xi_1$, $z_2 = \xi_2$. També tenim que $z = \xi + i\eta$.

Suposem ara que hem escollit les unitats de tal manera que $m_1 + m_2 = 1$, $r = 1$ i $G = 1$. Denotem la massa més petita de les primàries amb ε. Escollim situar-la a la dreta de l'origen, a ξ_2. Com que és la més petita de les dues, $\varepsilon \leq 1/2$. Per tant, queda establert que $m_2 = \varepsilon$ i $m_1 = 1 - \varepsilon$.

Observació 3.5.2. La partícula de massa m_1 està localitzada a les coordenades $(-\varepsilon, 0)$ i la partícula de massa m_2 a $(1 - \varepsilon, 0)$.

Demostració. Tenim que $m_1\xi_1 + m_2\xi_2 = 0$ i $r = \xi_2 - \xi_1 = 1$. Resolem aquest sistema de dues equacions. $\xi_2 = 1 + \xi_1$. Si substituïm a la primera equació:

$$\begin{aligned}(1-\varepsilon)\xi_1 + \varepsilon(1 + \xi_1) &= 0\\ \xi_1 - \varepsilon\xi_1 + \varepsilon + \varepsilon\xi_1 &= 0,\end{aligned}$$

del que es desprèn que $\xi_1 = -\varepsilon$ i $\xi_2 = 1 - \varepsilon$. Com que $\eta_1 = \eta_2 = 0$, tenim el que volíem demostrar. □

Observem també que, de la manera en que hem escollit les unitats, $n = w = 1$.

Proposició 3.5.3. *Sigui*

$$U = \frac{1-\varepsilon}{\rho_1} + \frac{\varepsilon}{\rho_2}$$

on $\rho_1 = |z - z_1|$ *i* $\rho_2 = |z - z_2|$. *L'equació* (3.5.3) *es pot reescriure com*

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} - 2\dot{\eta} - \xi &= \frac{\partial U}{\partial \xi} \\ \ddot{\eta} + 2\dot{\xi} - \eta &= \frac{\partial U}{\partial \eta} \end{aligned} \tag{3.5.4}$$

Demostració. Notem que

$$\begin{aligned} \rho_1 &= |z - z_1| = |\xi + i\eta - \xi_1| = |\xi + i\eta + \varepsilon| \\ \rho_2 &= |z - z_2| = |\xi + i\eta - \xi_2| = |\xi + i\eta - 1 + \varepsilon| \end{aligned}$$

Calculem primer les derivades parcials de U:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \xi} &= -\frac{1-\varepsilon}{\rho_1^2}\frac{\xi+\varepsilon}{\rho_1} - \frac{\varepsilon}{\rho_2^2}\frac{\xi - 1 + \varepsilon}{\rho_2} \\ \frac{\partial U}{\partial \eta} &= -\frac{1-\varepsilon}{\rho_1^2}\frac{\eta}{\rho_1} i - \frac{\varepsilon}{\rho_2^2}\frac{\eta}{\rho_2} i \end{aligned}$$

Ara, si desenvolupem l'equació (3.5.3) amb els nous valors $w = 1$, $G = 1$, $z_1 = \xi_1 = -\varepsilon$, $z_2 = \xi_2 = 1 - \varepsilon$, $z = \xi + i\eta$, $m_1 = 1 - \varepsilon$ i $m_2 = \varepsilon$, tenim:

$$\begin{aligned} \ddot{z} + 2\omega i \dot{z} - \omega^2 z &= G m_1 \rho_1^{-3}(z_1 - z) + G m_2 \rho_2^{-3}(z_2 - z) \\ \ddot{z} + 2i\dot{z} - z &= (1-\varepsilon)\rho_1^{-3}(-\varepsilon - \xi - i\eta) + \varepsilon\rho_2^{-3}(1 - \varepsilon - \xi - i\eta) \\ \ddot{\xi} + i\ddot{\eta} + 2i\dot{\xi} - 2\dot{\eta} - \xi - i\eta &= -\frac{(1-\varepsilon)(\xi + \varepsilon + i\eta)}{\rho_1^3} - \frac{\varepsilon(\xi - 1 + \varepsilon + i\eta)}{\rho_2^3} \end{aligned}$$

Separem la part real de la part imaginaria de l'equació:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} - 2\dot{\eta} - \xi &= -\frac{(1-\varepsilon)(\xi+\varepsilon)}{\rho_1^3} - \frac{\varepsilon(\xi - 1 + \varepsilon)}{\rho_2} \\ i\ddot{\eta} + 2i\dot{\xi} - i\eta &= -\frac{(1-\varepsilon)\eta}{\rho_1^3} i - \frac{\varepsilon\eta}{\rho_2^3} i \end{aligned}$$

De la segona expressió podem treure factor comú i i ja tenim el que volíem demostrar. □

Definició 3.5.4. *Definim la* ***integral de Jacobi*** *com* $2\Phi - \dot{\xi}^2 - \dot{\eta}^2$, *on*

$$\Phi = \Phi(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2) + U + \frac{1}{2}\varepsilon(1 - \varepsilon)$$

Proposició 3.5.5. *El sistema* (3.5.4) *és equivalent a*

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} - 2\dot{\eta} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \\ \ddot{\eta} + 2\dot{\xi} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \end{aligned} \tag{3.5.5}$$

Demostració. Observem que $\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} = \frac{\partial U}{\partial\xi} + \xi$ i $\frac{\partial\Phi}{\partial\eta} = \frac{\partial U}{\partial\eta} + \eta$, i ja ho tenim. □

Proposició 3.5.6. *La integral de Jacobi és constant durant el moviment.*

Demostració. Multipliquem la primera equació del sistema (3.5.5) per $\dot{\xi}$ i la segona per $\dot{\eta}$. Les sumem per obtenir

$$\dot{\xi}\ddot{\xi} - 2\dot{\xi}\dot{\eta} + 2\dot{\xi}\dot{\eta} + \dot{\eta}\ddot{\eta} = \frac{d\Phi}{dt}$$

Integrem i ens queda:

$$\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 = 2\Phi - C \tag{3.5.6}$$

on C és una constant d'integració anomenada ***constant de Jacobi*** que queda determinada pels valor inicials ξ_0, η_0, $\dot{\xi}_0$, $\dot{\eta}_0$. □

Podem reduïr la dimensió del sistema (3.5.5) encara més si el reescrivim així:

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= \alpha, \quad \dot{\eta} = \beta, \\ \dot{\alpha} &= 2\beta + \Phi_\eta, \quad \dot{\beta} = -2\alpha + \Phi_\eta \end{aligned} \tag{3.5.7}$$

Si dividim les dues primeres expressions per la tercera, podem eliminar la variable temporal:

$$\frac{d\xi}{d\alpha} = \frac{\alpha}{2\beta + \Phi_\xi}, \quad \frac{d\eta}{d\alpha} = \frac{\beta}{2\beta + \Phi_\xi}$$

Amb la integral de Jacobi tenim que $\alpha^2 + \beta^2 = 2\Phi - C$. Aïllant β i substituïnt a (3.5.7), trobem aquest sistema:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{d\alpha} &= F(\xi, \eta, \alpha) \\ \frac{d\eta}{d\alpha} &= G(\xi, \eta, \alpha) \end{aligned}$$

Suposem que la solució ve donada de la següent manera: $\xi = f(\alpha), \eta = g(\alpha)$. Llavors, $\alpha = \dot{\xi} = f'(\alpha)\dot{\alpha}$ i, teòricament podríem determinar $\alpha(t)$. Després, $\xi(t) = \xi = \xi_0 + \int_0^t \alpha(\tau)d\tau$ i $\dot{\eta} = \beta = g'(\alpha)\alpha' = \alpha g'(\alpha)/f'(\alpha)$; per tant,

$$\eta = \eta_0 + \int_0^t \frac{\alpha(\tau)g'(\alpha(\tau))}{f'(\alpha(\tau))} d\tau.$$

Aquest mètode no ens serveix a la pràctica, ja que f i g no es poden determinar explícitament. Ens haurem d'acontentar a buscar algunes solucions explícites particulars a la següent secció.

3.6 Solucions d'equilibri

En aquesta secció buscarem solucions del problema restringit de tres cossos per les quals la massa més petita, m_3, es manté en repòs al sistema relatiu de coordenades amb el que hem treballat a la secció anterior. Llavors, ξ i η són constants. Aquestes solucions s'anomemen ***solucions d'equilibri***. Com que ξ i η són constants, el sistema (3.5.7) queda així:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = 0 \tag{3.6.1}$$

Lema 3.6.1.

$$\Phi = (1-\varepsilon)\left(\frac{1}{2}\rho_1^2 + \rho_1^{-1}\right) + \varepsilon\left(\frac{1}{2}\rho_2^2 + \rho_2^{-1}\right) \tag{3.6.2}$$

Demostració. Sabem que $\Phi = \frac{1}{2}(\xi^2+\eta^2) + U + \frac{1}{2}\varepsilon(1-\varepsilon)$, on $U = \frac{1-\varepsilon}{\rho_1} + \frac{\varepsilon}{\rho_2}$. Recordem que $z_1 = (-\varepsilon, 0)$, $z_2 = (1-\varepsilon, 0)$, $\rho_1 = |z - z_1|$ i $\rho_2 = |z - z_2|$. Afirmo que

$$(1-\varepsilon)\rho_1^2 + \varepsilon\rho_2^2 - \varepsilon(1-\varepsilon) = \xi^2 + \eta^2.$$

Veiem-ho. Pel teorema de Pitàgores, $\rho_1^2 = (\xi+\varepsilon)^2 + \eta^2$ i $\rho_2^2 = (\xi - 1 + \varepsilon)^2 + \eta^2$. Llavors,

$$\begin{aligned}
&(1-\varepsilon)\rho_1^2 + \varepsilon\rho_2^2 - \varepsilon(1-\varepsilon) = (1-\varepsilon)((\xi+\varepsilon)^2+\eta^2) + \varepsilon((\xi-1+\varepsilon)^2+\eta^2) - \varepsilon(1-\varepsilon)\\
&= (1-\varepsilon)\xi^2 + (1-\varepsilon)\varepsilon^2 + (1-\varepsilon)2\xi\varepsilon + \varepsilon\xi^2 + (\varepsilon-1)^2\varepsilon + 2\varepsilon\xi(\varepsilon-1) + \eta^2 - \varepsilon(1-\varepsilon) =\\
&= \xi^2 + \eta^2 + (1-\varepsilon)\varepsilon^2 + (\varepsilon-1)^2\varepsilon - \varepsilon(1-\varepsilon) =\\
&= \xi^2 + \eta^2 + \varepsilon^2 - \varepsilon^3 + \varepsilon^3 - 2\varepsilon^2 + \varepsilon - \varepsilon + \varepsilon^2 = \xi^2 + \eta^2
\end{aligned}$$

Ara, substituïm a Φ:

$$\begin{aligned}
\Phi &= \frac{1}{2}((1-\varepsilon)\rho_1^2 - \varepsilon\rho_2^2 - \varepsilon(1-\varepsilon)) + \frac{1-\varepsilon}{\rho_1} + \frac{\varepsilon}{\rho_2} + \frac{1}{2}\varepsilon(1-\varepsilon) =\\
&= (1-\varepsilon)\left(\frac{1}{2}\rho_1^2 + \rho_1^{-1}\right) + \varepsilon\left(\frac{1}{2}\rho_2^2 + \rho_2^{-1}\right)
\end{aligned}$$

□

Proposició 3.6.2. *El sistema* (3.6.1) *és equivalent a*

$$\begin{aligned}
(1-\varepsilon)\left(\rho_1 - \frac{1}{\rho_1^2}\right)\frac{\xi+\varepsilon}{\rho_1} + \varepsilon\left(\rho_2 - \frac{1}{\rho_2^2}\right)\frac{\xi-1+\varepsilon}{\rho_2} &= 0\\
(1-\varepsilon)\left(\rho_1 - \frac{1}{\rho_1^2}\right)\frac{\eta}{\rho_1} + \varepsilon\left(\rho_2 - \frac{1}{\rho_2^2}\right)\frac{\eta}{\rho_2} &= 0
\end{aligned} \tag{3.6.3}$$

Demostració. Les derivades parcials de Φ són:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} &= (1-\varepsilon)\left(\rho_1 - \frac{1}{\rho_1^2}\right)\frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} + \varepsilon\left(\rho_2 - \frac{1}{\rho_2^2}\right)\frac{\partial \rho_2}{\partial \xi} = 0\\
\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} &= (1-\varepsilon)\left(\rho_1 - \frac{1}{\rho_1^2}\right)\frac{\partial \rho_1}{\partial \eta} + \varepsilon\left(\rho_2 - \frac{1}{\rho_2^2}\right)\frac{\partial \rho_2}{\partial \eta} = 0
\end{aligned}$$

Com que $\rho_1 = \sqrt{(\xi+\varepsilon)^2+\eta^2}$ i $\rho_2 = \sqrt{(\xi-1+\varepsilon)^2+\eta^2}$, tenim que

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} = \frac{\xi+\varepsilon}{\rho_1}, \quad \frac{\partial \rho_2}{\partial \xi} = \frac{\xi-1+\varepsilon}{\rho_2}$$
$$\frac{\partial \rho_1}{\partial \eta} = \frac{\eta}{\rho_1}, \quad \frac{\partial \rho_2}{\partial \eta} = \frac{\eta}{\rho_2}$$

□

Per continuar amb la discussió hem de raonar per casos. Si $\eta \neq 0$, llavors traiem η factor comú de la segona equació:

$$(1-\varepsilon)\left(\rho_1 - \frac{1}{\rho_1^2}\right)\frac{1}{\rho_1} + \varepsilon\left(\rho_2 - \frac{1}{\rho_2^2}\right)\frac{1}{\rho_2} = 0$$

Els termes de ξ de la primera equació desapareixen.

$$\left(\rho_1 - \frac{1}{\rho_1^2}\right)\frac{(1-\varepsilon)\varepsilon}{\rho_1} + \left(\rho_2 - \frac{1}{\rho_2^2}\right)\frac{\varepsilon(-1+\varepsilon)}{\rho_2} = 0$$

Operant i traient factor comú, es transforma en:

$$\left(\rho_1 - \frac{1}{\rho_1^2}\right)\frac{1}{\rho_1} - \left(\rho_2 - \frac{1}{\rho_2^2}\right)\frac{1}{\rho_2} = 0$$

L'única solució que satisfà ambdues equacions sota aquest supòsit és $\rho_1 = \rho_2 = 1$. Per tant, si $\eta \neq 0$, tenim dues solucions d'equilibri: els vèrtex L_4 i L_5 de la Figura 3.1.

Ara, si suposem que $\eta = 0$, només ens quedem amb la primera equació de (3.6.3):

$$(1-\varepsilon)\left(\rho_1 - \frac{1}{\rho_1^2}\right)\frac{\xi+\varepsilon}{\rho_1} + \varepsilon\left(\rho_2 - \frac{1}{\rho_2^2}\right)\frac{\xi-1+\varepsilon}{\rho_2} = 0 \tag{3.6.4}$$

on $\rho_1 = |\xi+\varepsilon|$, $\rho_2 = |\xi-1+\varepsilon|$. Ara ens trobem amb tres casos:

- a) $\xi < -\varepsilon: \quad \rho_1 = -\xi-\varepsilon, \quad \rho_2 = 1-\xi-\varepsilon, \quad \rho_2 = 1+\rho_1$
- b) $\varepsilon < \xi < 1: \quad \rho_1 = \xi+\varepsilon, \quad \rho_2 = 1-\xi-\varepsilon, \quad \rho_2 = 1-\rho_1$
- c) $\xi > 1-\varepsilon: \quad \rho_1 = \xi+\varepsilon, \quad \rho_2 = \xi+\varepsilon-1, \quad \rho_2 = \rho_1 - 1$

Reescrivim l'equació (3.6.4) per cada cas:

Per a): Sigui $\rho_1 = \rho$. Llavors $\rho_2 = \rho_1 + 1$.

$$(1-\varepsilon)\left(\rho - \frac{1}{\rho^2}\right) + \varepsilon\left(\rho + 1 - \frac{1}{(\rho+1)^2}\right) = 0$$

Per b): Sigui $\rho_1 = \rho$. Llavors $\rho_2 = 1 - \rho$.

$$(1-\varepsilon)\left(\rho - \frac{1}{\rho^2}\right) - \varepsilon\left(1 - \rho - \frac{1}{(1-\rho)^2}\right) = 0$$

Per c): Sigui $\rho_2 = \rho$. Llavors $\rho_1 = 1 + \rho$.

$$(1-\varepsilon)\left(1 + \rho - \frac{1}{(1+\rho)^2}\right) + \varepsilon\left(\rho - \frac{1}{\rho^2}\right) = 0$$

En els casos a) i c) tenim una equació d'aquesta forma:

$$F_1(\rho) = \frac{\rho - \rho^{-2}}{\rho + 1 - (\rho + 1)^{-2}} = -c$$

on $c > 0$. Podem comprovar que $F_1'(\rho) > 0$, i per tant F és estrictament creixent. A més a més, $F_1(0^+) = -\infty$ i $F_1(1) = 0$. Això vol dir que el valor ρ pel qual $F_1(\rho) = -c$ està comprès entre 0 i 1. Per a) tenim la solució L_1 i per c) tenim la solució L_2 de la Figura 3.1.

Pel cas b), l'equació és d'aquesta forma:

$$F_2(\rho) = \frac{1 - \rho - (1 - \rho)^{-2}}{\rho - \rho^{-2}} = \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \geq 1,$$

perquè $\varepsilon \leq 1/2$. $F_2(\rho)$ és creixent a l'interval $1/2 \leq \rho < 1$. A més a més, $F_2(1/2) = 1$, $F_1(1^{-1}) = \infty$, així que el valor $\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$ es dona a l'interval $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$. El punt d'equilibri, doncs, es troba més prop de la massa més petita, excepte quan $\varepsilon = \frac{1}{2}$. És el punt L_3 a la Figura 3.1.

Els punts L_i s'anomenen **punts de libració**. L_4 i L_5 s'anomenen **punts de Lagrange**. L_1, L_2, L_3 s'anomenen **punts d'Euler**.

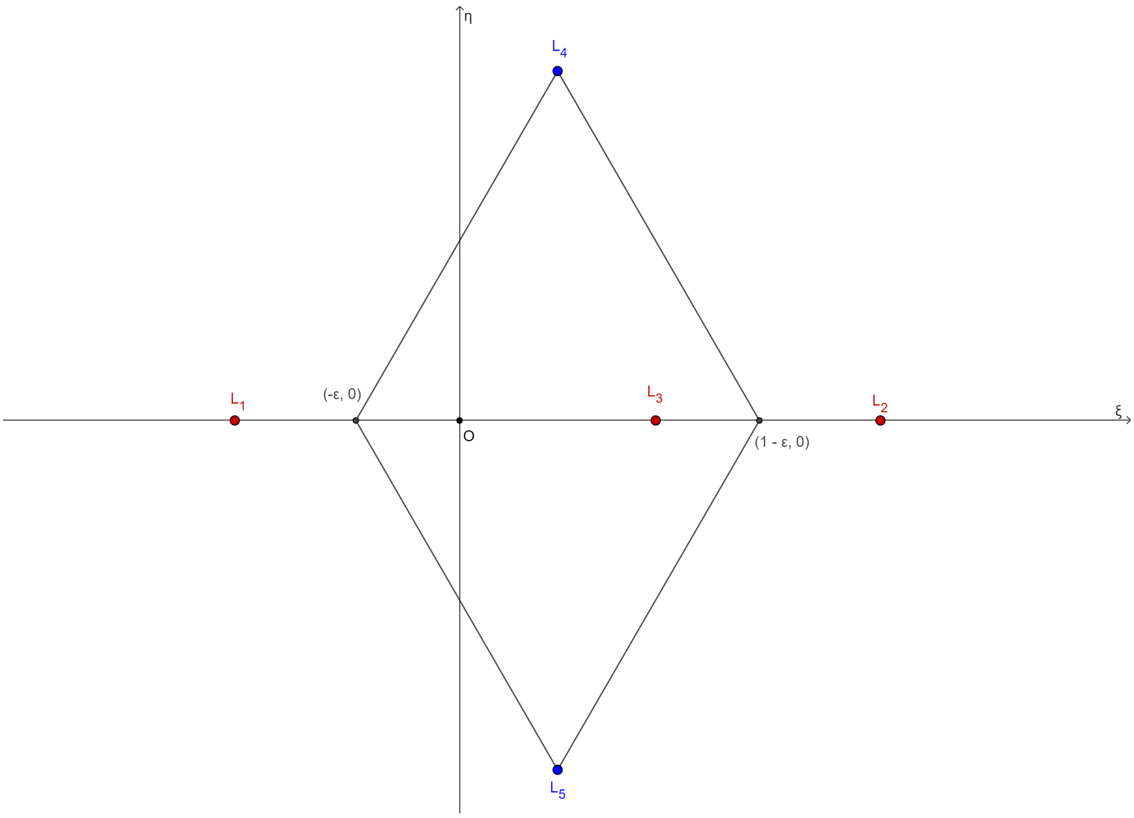

Figura 3.1: *Punts de Libració*

Capítol 4

Conclusions

Hem vist que tant per un com per dos cossos, el problema és relativament senzill de resoldre, sigui mitjançant mètodes numèrics o analítics, ja que podem extreure moltes constants que ens permeten reduir la dimensió del sistema d'equacions a resoldre. El problema de dos cossos, a més a més, ens dona molta informació per a casos particulars del problema de tres cossos, com hem vist al cas restringit. És a partir de tres cossos quan el sistema es torna caòtic i el problema no té solució en general[1]. Al tercer capítol hem vist que fem molts esforços per a reduir la dimensió del sistema d'equacions de moltes maneres. Tot i això, acaba sent insuficient. Per tant, pot ser interessant centrar-se en solucions particulars que, d'altra banda, també tenen certes aplicacions en altres camps científics com la física: per exemple, per situar satèl·lits artificials en òrbita a la Terra[2].

Com que ens hem centrat en els conceptes elementals del problema de tres cossos, no s'han tingut en compte fonts en què les eines matemàtiques excedien els propòsits del treball[3] i s'han exclòs alguns conceptes una mica més avançats però igualment importants en la història del problema. Només amb aquest treball ja podem entendre perquè el problema de n cossos és considerat el problema més important de la mecànica celeste, ja que només hem fregat la superfície d'un problema tant antic com apassionant.

[1] Existeix una solució en forma de sèrie de potències donada pel matemàtic finlandès Karl Fritiof Sundman en termes de $t^{1/3}$. Per desgràcia, no aporta més informació sobre el comportament del sistema i, a més a més, la convergència de la sèrie és increïblement lenta, motiu pel qual no té cap mena d'ús computacional. Per més detalls, consultar: Volchan, Sergio B.; *Some insights from total collapse*, arXiv:0803.2258v1 [physics.hist-ph], 2008, `https://arxiv.org/pdf/0803.2258.pdf`

[2] Dionysiou, D.D., Zois, A.K. & Iakovidis, K.G. Artificial satellites and the three-body problem: A general case. Astrophys Space Sci 186, 101–108 (1991). `https://doi.org/10.1007/BF00644623`

[3] Un bon exemple és la Teoria Hamiltoniana, de la qual podem trobar una introducció i aplicacions al tercer capítol de *Celestial Mechanics.*: Pollard, H., Introduction to Hamilton-Jacobi Theory. Pollard, H.: *Celestial Mechanics*, The Carus Mathematical Monographs No. 18, The Mathematical Association of America, 1976, ISBN 0883850192

Apèndix A

Demostració de la Proposició 3.2.4

Demostració. Sabem que $\vec{r_3} = \mu M^{-1}\vec{\rho}$. A partir del **Lema 3.2.2**, podem deduïr que

$$\vec{r_1} = \mu M^{-1}\vec{\rho} - \vec{\rho} - m_2\mu^{-1}\vec{r} = (\mu M^{-1} - 1)\vec{\rho} - m_2\mu^{-1}\vec{r}$$

i

$$\vec{r_2} = \mu M^{-1}\vec{\rho} - \vec{\rho} + m_1\mu^{-1}\vec{r} = (\mu M^{-1} - 1)\vec{\rho} + m_1\mu^{-1}\vec{r}$$

Ara, si substituïm aquests valors a la definició de $\vec{c}$:

$$\begin{aligned}
&\vec{c} = m_1(\vec{r_1} \times \dot{\vec{r_1}}) + m_2(\vec{r_2} \times \dot{\vec{r_2}}) + m_3(\vec{r_3} \times \dot{\vec{r_3}})\\
&\vec{c} = m_1((\mu M^{-1} - 1)\vec{\rho} - m_2\mu^{-1}\vec{r}) \times ((\mu M^{-1} - 1)\vec{V} - m_2\mu^{-1}\vec{v})\\
&\quad + m_2((\mu M^{-1} - 1)\vec{\rho} + m_1\mu^{-1}\vec{r}) \times ((\mu M^{-1} - 1)\vec{V} + m_1\mu^{-1}\vec{v})\\
&\quad + m_3((\mu M^{-1}\vec{\rho}) \times (\mu M^{-1}\vec{V}))\\
&\vec{c} = m_1(\mu M^{-1} - 1)^2\vec{\rho} \times \vec{V} + m_1(m_2\mu^{-1})^2\vec{r} \times \vec{v} - m_1(\mu M^{-1} - 1)m_2\mu^{-1}(\vec{\rho} \times \vec{v} + \vec{r} \times \vec{V})\\
&\quad + m_2(\mu M^{-1} - 1)^2\vec{\rho} \times \vec{V} + m_2(m_1\mu^{-1})^2\vec{r} \times \vec{v} + m_2(\mu M^{-1} - 1)m_1\mu^{-1}(\vec{\rho} \times \vec{v} + \vec{r} \times \vec{V})\\
&\quad + m_3(\mu M^{-1})^2\vec{\rho} \times \vec{V}\\
&\vec{c} = (m_1(\mu M^{-1})^2 - 2m_1\mu M^{-1} + m_1)\vec{\rho} \times \vec{V} + m_1m_2m_2\mu^{-2}\vec{r} \times \vec{v} +\\
&\ (m_2(\mu M^{-1})^2 - 2m_2\mu M^{-1} + m_2)\vec{\rho} \times \vec{V} + m_2m_1m_1\mu^{-2}\vec{r} \times \vec{v} +\\
&\ m_3(\mu M^{-1})^2\vec{\rho} \times \vec{V}\\
&\vec{c} = ((m_1 + m_2 + m_3)\mu^2M^{-2} - 2(m_1 + m_2)\mu M^{-1} + (m_1 + m_2))\vec{\rho} \times \vec{V} +\\
&\ ((m_1m_2m_2 + m_2m_1m_1)\mu^{-2})\vec{r} \times \vec{v}\\
&\vec{c} = (\mu^2M^{-1} - 2\mu^2M^{-1} + \mu)\vec{\rho} \times \vec{V} + (m_1m_2(m_1 + m_2)\mu^{-2})\vec{r} \times \vec{v}\\
&\vec{c} = \mu(\mu M^{-1} - 2\mu M^{-1} + 1)\vec{\rho} \times \vec{V} + (m_1m_2\mu\mu^{-2})\vec{r} \times \vec{v}\\
&\vec{c} = \mu(-\mu M^{-1} + MM^{-1})\vec{\rho} \times \vec{V} + (m_1m_2\mu^{-1})\vec{r} \times \vec{v}\\
&\vec{c} = \mu M^{-1}(-\mu + M)(\vec{\rho} \times \vec{V}) + g_1(\vec{r} \times \vec{v})\\
&\vec{c} = m_3\mu M^{-1}(\vec{\rho} \times \vec{V}) + g_1(\vec{r} \times \vec{v})\\
&\vec{c} = g_1(\vec{r} \times \vec{v}) + g_2(\vec{\rho} \times \vec{V})
\end{aligned}$$

Seguim amb $2I = g_1 r^2 + g_2 \rho^2$:

$$
\begin{aligned}
&2I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 \\
&2I = m_1(\mu M^{-1} - 1)^2 \rho^2 + m_1 m_2 m_2 \mu^{-2} r^2 - 2m_1 m_2 \mu^{-1}(\mu M^{-1} - 1)\vec{\rho} \cdot \vec{r} \\
&\quad + m_2(\mu M^{-1} - 1)^2 \rho^2 + m_2 m_1 m_1 \mu^{-2} r^2 + 2m_2 m_1 \mu^{-1}(\mu M^{-1} - 1)\vec{\rho} \cdot \vec{r} \\
&\quad + m_3 \mu^2 M^{-2} \rho^2 \\
&2I = (m_1(\mu M^{-1})^2 - 2m_1 \mu M^{-1} + m_1 + m_2(\mu M^{-1})^2 - 2m_2 \mu M^{-1} + m_2 + m_3 \mu^2 M^{-2})\rho^2 \\
&\quad + (m_1 + m_2) m_1 m_2 \mu^{-2} r^2 \\
&2I = ((m_1 + m_2 + m_3)\mu^{-2} M^{-2} - 2\mu M^{-1}(m_1 + m_2) + (m_1 + m_2))\rho^2 \\
&\quad + (m_1 + m_2) m_1 m_2 \mu^{-2} r^2 \\
&2I = (\mu^{-2} M^{-1} - 2\mu^2 M^{-1} + \mu)\rho^2 + m_1 m_2 \mu^{-1} r^2
\end{aligned}
$$

i ja hem vist abans que $(\mu^{-2} M^{-1} - 2\mu^2 M^{-1} + \mu) = g_2$, per tant:

$$2I = g_1 r^2 + g_2 \rho^2$$

Acabem amb $2T = g_1 v^2 + g_2 V^2$:

$$
\begin{aligned}
&2T = m_1 \dot{\vec{r_1}} \cdot \dot{\vec{r_1}} + m_2 \dot{\vec{r_2}} \cdot \dot{\vec{r_2}} + m_3 \dot{\vec{r_3}} \cdot \dot{\vec{r_3}} \\
&2T = m_1((\mu M^{-1} - 1)\vec{V} - m_2 \mu^{-1} \vec{v}) \cdot ((\mu M^{-1} - 1)\vec{V} - m_2 \mu^{-1} \vec{v}) \\
&\quad + m_2((\mu M^{-1} - 1)\vec{V} + m_1 \mu^{-1} \vec{v}) \cdot ((\mu M^{-1} - 1)\vec{V} + m_1 \mu^{-1} \vec{v}) \\
&\quad + m_3((\mu M^{-1} \vec{V}) \cdot (\mu M^{-1} \vec{V}))
\end{aligned}
$$

Des d'aquí, els càlculs són anàlegs als que hem fet per c fins a arribar a:

$$
\begin{aligned}
2T &= (\mu^{-2} M^{-1} - 2\mu^2 M^{-1} + \mu)\vec{V} \cdot \vec{V} + m_1 m_2 \mu^{-1} \vec{v} \cdot \vec{v} \\
2T &= (\mu^{-2} M^{-1} - 2\mu^2 M^{-1} + \mu) V^2 + m_1 m_2 \mu^{-1} v^2
\end{aligned}
$$

i per tant això és:

$$2T = g_1 v^2 + g_2 V^2$$

□

Bibliografia

[1] Alzahrani, F., Abouelmagd, Elbaz I., Guirao, Juan L.G. and Hobiny, A.. "On the libration collinear points in the restricted three-body problem", *Open Physics*, vol. 15, no. 1, 2017, pp. 58-67. `https://doi.org/10.1515/phys-2017-0007`

[2] Dionysiou, D.D., Zois, A.K. & Iakovidis, K.G. Artificial satellites and the three-body problem: A general case. Astrophys Space Sci 186, 101–108 (1991). `https://doi.org/10.1007/BF00644623`

[3] Goldstein, H.; Poole, C.; Safko, J.: *Classical Mechanics*. Addison-Wesley Series in Physiscs. Addison Wesley Publishing Co., Readin, Mass, third edition, 2000

[4] Pollard, H.: *Celestial Mechanics*, The Carus Mathematical Monographs No. 18, The Mathematical Association of America, 1976, ISBN 0883850192

[5] Volchan, Sergio B.; *Some insights from total collapse*, arXiv:0803.2258v1 [physics.hist-ph], 2008, `https://arxiv.org/pdf/0803.2258.pdf`

[6] Weisstein, Eric W. "Vector Triple Product."[En línia]. From MathWorld–A Wolfram Web Resource. [Consulta: 9 d'octubre de 2023]. Disponible a `https://mathworld.wolfram.com/VectorTripleProduct.html`

[7] Ingeniería Básica. *Demostración matemática de las Leyes de Kepler*. [En línia]. 13 de desembre de 2020. [Consulta: 11 d'octubre de 2023]. Disponible a `https://ingenieriabasica.es/demostracion-matematica-leyes-de-kepler/`

[8] El problema clásico de Tres Cuerpos: desde Newton, Euler, Lagrange hasta hoy. 22 de gener de 2021. Instituto de ciencias nucleares UNAM. Accés el 5 de desembre de 2023. Vídeo de Youtube: `https://www.youtube.com/watch?v=TopUK5MNzPk`