Universitat de Barcelona

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

La ecuación del calor

Autor: Ángel Iglesias Díaz

Director: Dra. María de los Ángeles García Ferrero
Co-director: Dr. Gyula Csato
Realitzat a: Departament
de Matemáticas e Informática

Barcelona, 16 de enero de 2024

Abstract

The objective of this work will be, first of all, to develop the basic theoretical content related to the heat equation and, after that, to state and demonstrate some applications using such content.

The work is divided into three sections, the first of which focuses on searching for solutions to the heat equation. First, we will look for solutions in all the space. To do this, we will begin by considering the case of the homogeneous heat equation and, from it, we will obtain solutions for the non-homogeneous heat equation. Later we will look for solutions in bounded domains, for this we will also see the method of separation of variables.

The second section deals with two important properties of solutions to the heat equation: uniqueness and regularity. To see these properties we will also have to look at the strong maximum principle and the mean value property for the heat equation.

In these first two sections we have mainly followed Evans' book ([1]) and in some cases we have used Folland ([2]) and Ireneo Peral´s books ([3]), especially for the parts referring to the Fourier transform.

Finally, we will use everything we have learned in the first sections to prove two statements related to Liouville's theorem. The first is the Liouville theorem itself for harmonic functions, that is, if we have a harmonic function that is bounded in $\mathbb{R}^n$, then it is constant. The second is an extension of the same theorem which says that if we have a harmonic function whose growth is limited by a power of the distance to the origin, then the function is a polynomial. For this part we will be guided by Yoichi Miyazaki's article ([4]).

Resumen:

El objetivo de este trabajo será, en primer lugar desarrollar el contenido teórico básico relacionado con la ecuación del calor y, posteriormente, enunciar y demostrar algunas aplicaciones usando dicho contenido.

El trabajo está dividido en tres secciones, la primera de ellas se centra en buscar soluciones para la ecuación del calor. Primero, buscaremos soluciones en todo el espacio. Para ello empezaremos considerando el caso de la ecuación del calor homogénea y, a partir de ella, obtendremos soluciones para la ecuación del calor no

homogénea. Posteriormente buscaremos soluciones en dominios acotados, para ello veremos también el método de separación de variables.

La segunda sección trata sobre dos propiedades importantes de las soluciones de la ecuación del calor: la unicidad y la regularidad. Para ver estas propiedades también tendremos que ver el principio del máximo fuerte y la propiedad del valor medio para la ecuación del calor.

En estas dos primeras secciones hemos seguido principalmente el libro de Evans ([1]) y en algún caso nos hemos ayudado de los libros de Folland ([2]) y de Ireneo Peral ([3]), especialmente para las partes referentes a la transformada de Fourier.

Finalmente, usaremos todo lo aprendido en las primeras secciones para demostrar dos enunciados relacionados con el teorema de Liouville. El primero es el propio teorema de Liouville para funciones armónicas, es decir, si tenemos una función armónica que está acotada en $\mathbb{R}^n$, entonces es constante. El segundo es una extensión del mismo teorema que dice que si tenemos una función armónica que cuyo crecimiento está acotado por una potencia de la distancia al centro, entonces la función es un polinomio. Para esta parte nos guiaremos por el artículo de Yoichi Miyazaki ([4]).

2020 Mathematics Subject Classification. 35K05, 35K08, 35B05, 35B50, 35B53, 35B65

Índice

Notación

$C^a(D)$ − Conjunto de funciones derivables a veces con derivadas continuas en D.

$C_b^a(D_1 \times D_2)$ − Conjunto de funciones derivables a veces respecto a las variables de D_1 y b veces respecto a las de D_2 con derivadas continuas.

$C_c^a(D)$ − Conjunto de funciones con soporte compacto derivables a veces con derivadas continuas en D.

$S(\mathrm{D})$ − Espacio de funciones Schwarz en D.

∇f − Se define como $\left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_1} \quad \cdots \quad \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_\mathrm{n}}\right) f(x)$.

Δf − Se define como $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial \mathrm{x}_\mathrm{i}^2} f(x)$.

$\|f\|_{L^1(D)}$ − Se define como $\int_D |f(x)|\, dx$.

$\|f\|_{L^\infty(D)}$ − Se define como $\sup_D |f(x)|$.

$\log a$ − Logaritmo en base e de a.

1. Introducción a la ecuación del calor

La teoría de la ecuación del calor empezó a desarrollarse por Joseph Fourier en 1822 con el propósito de modelar cómo un elemento como el calor se difunde a través de una región determinada. La ecuación del calor es una de las ecuaciones en derivadas parciales más estudiadas en el campo de las matemáticas y esto se debe a dos motivos: el primero es que permite modelizar fenómenos físicos importantes como pueden ser la propagación o difusión de líquidos o gases, concentración química de ciertas substancias o la concentración de poblaciones en el tiempo y el espacio; el segundo es que, junto con las ecuaciones de ondas y de Laplace, es uno de los modelos fundamentales en la teoría de ecuaciones en derivadas parciales lineales, y los recursos empleados en su análisis sirven para el estudio de ecuaciones en derivadas parciales más complejas.

En esta sección nuestro objetivo será buscar soluciones para la ecuación del calor. Primero nos centraremos en el caso homogéneo en todo el espacio ($\mathbb{R}^n$)

$$u_t - \Delta u = 0, \tag{1.1}$$

donde veremos cómo obtener soluciones a partir de una observación sobre (1.1), definiremos la solución fundamental y resolveremos el problema del valor inicial. Luego veremos otro método para obtener la solución fundamental usando la transformada de Fourier. Posteriormente ampliaremos la búsqueda de soluciones al caso no homogéneo también en todo el espacio

$$u_t - \Delta u = f. \tag{1.2}$$

Notemos que esta f representa una fuente/sumidero de calor externo por lo que con (1.1) obtendríamos la evolución de la temperatura sin considerar factores externos mientras que (1.2) nos la daría considerándolos.

Finalmente veremos el caso de los dominios acotados, en donde podremos escribir las soluciones en función de las autofunciones del laplaciano y terminaremos esta sección con un ejemplo del cálculo de la solución de un problema del valor inicial de la ecuación del calor.

1.1. Solución fundamental:

Observando la ecuación del calor nos damos cuenta de que involucra una derivada con respecto a la variable temporal t y dos derivadas con respecto a las variables espaciales $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. De esta forma podemos ver que si u resuelve (1.1), también lo hace $u(\lambda x, \lambda^2 t)$ para $\lambda \in \mathbb{R}$ (esto se puede demostrar fácilmente derivando $u(\lambda x, \lambda^2 t)$ y usando que $u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = 0$). Esta escala indica que la razón $\frac{|x|^2}{t}$ es importante para la ecuación del calor y sugiere que busquemos una solución de (1.1) de la forma $u(x,t) = v\left(\frac{|x|^2}{t}\right)$, $(t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n)$ para alguna función v aún por determinar.

Aunque este enfoque nos acabaría llevando a la solución, es más rápido buscar una solución de la ecuación del calor, u, de la forma:

$$u(x,t) = \frac{1}{t^\alpha} v\left(\frac{x}{t^\beta}\right), \qquad (t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n), \tag{1.3}$$

donde queda por determinar las constantes α, β y la función $v\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Derivando (1.3) obtenemos:

$$u_t(x,t) = -\alpha t^{-(\alpha+1)} v\left(\frac{x}{t^\beta}\right) - \beta t^{-(\alpha+1)} \left(\frac{x}{t^\beta}\right) \cdot \nabla v\left(\frac{x}{t^\beta}\right),$$

$$\Delta u(x,t) = t^{-(\alpha+2\beta)} \Delta v\left(\frac{x}{t^\beta}\right).$$

Ahora si imponemos que $u(x,t)$ cumpla la ecuación del calor (1.1) obtenemos:

$$\alpha t^{-(\alpha+1)} v\left(\frac{x}{t^\beta}\right) + \beta t^{-(\alpha+1)} \left(\frac{x}{t^\beta}\right) \cdot \nabla v\left(\frac{x}{t^\beta}\right) + t^{-(\alpha+2\beta)} \Delta v\left(\frac{x}{t^\beta}\right) = 0$$

y substituyendo $y = t^{-\beta} x$:

$$\alpha t^{-(\alpha+1)} v(y) + \beta t^{-(\alpha+1)}\, y \cdot \nabla v(y) + t^{-(\alpha+2\beta)} \Delta v(y) = 0.$$

Si ahora suponemos $\beta = \frac{1}{2}$ los términos con t son idénticos y podemos simplificar la expresión como:

$$\alpha v + \frac{1}{2} y \cdot \nabla v + \Delta v = 0.$$

Podemos simplificarlo más suponiendo que v es radial, esto tiene sentido pues es fácil ver que si $u(x,t)$ es solución de (1.1), también lo es $u(Rx,t)$, donde R es una matriz de rotación. Con esto tenemos $v(y) = w(|y|)$ para alguna $w\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ y obtenemos:

$$\alpha w + \frac{1}{2} r\, w' + w'' + \frac{n-1}{r} w' = 0,$$

con $r = |y|$, $\ ' = \frac{d}{dr}$.

Si además suponemos $\alpha = \frac{n}{2}$ esto se simplifica a:

$$\frac{1}{2}(r^n w')' + (r^{n-1} w')' = 0.$$

Es decir

$$\frac{1}{2} r^n w + r^{n-1} w' = a$$

para alguna constante a. Asumiendo que cuando $r \to \infty$, w y w' tienden a cero lo suficientemente rápido podemos concluir que $a = 0$ (en particular esto pasa si $w \in S(\mathbb{R}^n)$) y por tanto:

$$w' = -\frac{1}{2} r w$$

por lo que para alguna constante b se tiene que:

$$w = b e^{-\frac{r^2}{4}}.$$

Combinando esto último con (1.3) y nuestras elecciones para α y β podemos concluir que $\frac{b}{t^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ resuelve la ecuación del calor para $t > 0$. Finalmente para elegir la constante b imponemos que para todo $t > 0$, se tiene que cumplir que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{b}{t^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dx = 1.$$

Operando tenemos que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{b}{t^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dx = \frac{b}{t^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dx = b 4^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|z|^2} dz =$$

$$= b 4^{n/2} \prod_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z_i^2} dz_i.$$

Ahora, sea I :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} ds = I.$$

Resolvemos en $\mathbb{R}^2$ usando coordenadas polares:

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-|x|^2} dx = 2\pi \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr = 2\pi \frac{e^{-r^2}}{2} \Bigg]_0^{\infty} = \pi.$$

Como la anterior integral también se puede expresar como

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x_1^2+x_2^2)}\, dx_1x_2 \;=\; I^2,$$

tenemos que $I = \sqrt{\pi}$ y por tanto

$$b4^{n/2}\prod_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z_i^2}\, dz_i \;=\; b4^{n/2}\prod_{i=1}^{n}\sqrt{\pi} \;=\; b(4\pi)^{n/2}.$$

Por lo que $b(4\pi)^{n/2} = 1$ y $b = (4\pi)^{-n/2}$.

Esto nos lleva a la siguiente definición:

Definición 1.1: La función

$$\varphi(x,t) \coloneqq \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & (\, x \in\mathbb{R}^n\,,\; t>0) \\ 0 & (\, x \in\mathbb{R}^n\,,\; t<0) \end{cases}$$

se denomina **solución fundamental** de la ecuación del calor.

La razón de que llamemos a esta función solución fundamental es que, como iremos viendo a lo largo del trabajo, es de vital importancia para el cálculo de soluciones generales.

Notar que $\varphi(x,t)$ tiene una singularidad cuando $(x,t) \to (0,0)$. Hablaremos de esto un poco más en detalle más adelante.

1.2. Problema de valor inicial para el caso homogéneo

Ahora empleamos φ para crear una solución al problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & en\ \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ u = g & en\ \mathbb{R}^n \times \{t=0\}. \end{cases} \tag{1.4}$$

En la **sección 1.1** hemos visto que la función $(x,t) \to \varphi(x,t)$ resuelve la ecuación del calor para $t>0$ por lo que también lo hace $(x,t) \to \varphi(x-y,t)$ para cada $y \in \mathbb{R}^n$ fijo. En consecuencia, la convolución (en las variables espaciales)

$$u(x,t) = (\varphi * g)(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y,t) g(y)\, dy \ =$$

$$= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) dy, \quad (x \in \mathbb{R}^n, \mathrm{t} > 0) \qquad (1.5)$$

también es solución. Para ver que es solución de (1.4) usaremos el siguiente teorema:

Teorema 1.2 (Solución del problema de valor inicial): Suponemos $g \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ y definimos u como en (1.5). Entonces:

(i) $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$.

(ii) $u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = 0, \qquad (x \in \mathbb{R}^n, \mathrm{t} > 0).$

(iii) $\lim_{(x,t)\to(x^0,0)} u(x,t) = g(x^0)$ para cada punto $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $\qquad (x \in \mathbb{R}^n, \mathrm{t} > 0).$

Demostración:

Como la función $\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ es infinitamente diferenciable, con derivadas uniformemente acotadas para cualquier orden en $\mathbb{R}^n \times [\delta, \infty)$ para cada $\delta > 0$, podemos ver que $u \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ y además

$$u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} [(\varphi_t - \Delta_x \varphi)(x-y,t)] g(y) dy = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}^n, \mathrm{t} > 0),$$

ya que φ resuelve la ecuación del calor. Fijamos $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$. Elegimos $\delta > 0$ tal que $|g(y) - g(x^0)| < \varepsilon$ si $|y - x^0| < \delta$, $x^0 \in \mathbb{R}^n$. Entonces si $|x - x^0| < \frac{\delta}{2}$ tenemos que

$$|u(x,t) - g(x^0)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y,t)[g(y) - g(x^0)] dy \right| \leq$$

$$\leq \int_{\mathrm{B}(x^0,\delta)} \varphi(x-y,t) |g(y) - g(x^0)| dy \ +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^n - \mathrm{B}(x^0,\delta)} \varphi(x-y,t) |g(y) - g(x^0)| dy = I + J.$$

Ahora usando que la integral de la solución fundamental es uno tenemos que

$$I \ \leq \ \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y,t) dy = \ \varepsilon.$$

Si ahora $|x - x^0| \leq \frac{\delta}{2}$ y $|y - x^0| \geq \delta$, entonces

$$|y - x^0| \leq |y - x| + |x - x^0| \leq |y - x| + \frac{\delta}{2} \leq |y - x| + \frac{1}{2}|y - x^0|.$$

Por tanto $|y - x| \geq \frac{1}{2}|y - x^0|$ y se sigue que

$$J \leq 2\|g\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^n - B(x^0,\delta)} \varphi(x-y,t)dy \leq \frac{C}{t^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n - B(x^0,\delta)} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy \leq$$

$$\leq \frac{C}{t^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n - B(x^0,\delta)} e^{-\frac{|y-x^0|^2}{16t}} dy = \frac{C}{t^{n/2}} \int_{\delta}^{\infty} e^{-\frac{r^2}{16t}} \cdot r^{n-1} dr \xrightarrow[t \to 0^+]{} 0.$$

Finalmente si $|x - x^0| < \frac{\delta}{2}$ y $t > 0$ es suficientemente pequeña, $|u(x,t) - g(x^0)| < 2\varepsilon$ y haciendo ε tender a 0 obtenemos el último enunciado.

$\square$

Tenemos pues que nuestra u definida en (1.5) es solución de la ecuación del calor y además se aproxima a g cuando $t \to 0$ para todo punto $x \in \mathbb{R}^n$ y por tanto resuelve el problema (1.4).

Volviendo ahora a la singularidad de $\varphi(x,t)$ cuando $(x,t) \to (0,0)$, normalmente se expresa como:

$$\lim_{t \to 0} \varphi(x,t) = \delta_0(x),$$

donde $\delta_0(x)$ es la "función" **delta de Dirac**. La "función" delta de Dirac es una distribución o función generalizada introducida por el físico británico Paul Dirac y se define como:

$$\delta_a(x) \equiv \delta(x-a),$$

siendo $\delta(x)$ la función que tiende a infinito cuando $x = a$ y es igual a cero para cualquier otro valor.

La delta de Dirac no es una función estrictamente hablando, puesto que hemos visto que requeriría tomar valores infinitos. Matemáticamente se puede definir como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(x) f(x) dx = f(a) \qquad \forall f \in C_C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Observación 1.3: La solución fundamental φ resuelve el problema del valor inicial:

$$\begin{cases} \varphi_t - \Delta\varphi = f & en\ \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ \varphi = \delta_0(x) & en\ \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

1.3. Solución fundamental por Fourier

Otra forma de calcular la solución fundamental de la ecuación del calor es mediante la transformada de Fourier. Antes de empezar a ver cómo obtenerla vamos a definir unos conceptos básicos y enunciar dos teoremas relacionados con la teoría de la transformada de Fourier sin entrar en mucho detalle:

Definición 1.4: Sea f una función integrable en $\mathbb{R}^n$, es decir,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx < \infty,$$

se define la transformada de Fourier de f por

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} f(x)dx.$$

Definición 1.5: Sea f una función integrable en $\mathbb{R}^n$, se define la transformada inversa de Fourier de f como

$$(f)^{\smile}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} f(\xi)d\xi.$$

Teorema 1.6 (Inversión de la transformada de Fourier)**:** Si $f \in S(\mathbb{R}^n)$, entonces $(\hat{f})^{\smile} = f$.

Teorema 1.7 (Teorema de convolución)**:** Si $f, g \in S(\mathbb{R}^n)$, entonces se cumple que:

i) $(\widehat{f * g}) = (2\pi)^{n/2}(\hat{f})(\hat{g})$.

ii) $(\widehat{fg}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}(\hat{f}) * (\hat{g})$.

Una vez definidos estos conceptos podemos empezar a buscar la solución fundamental de la ecuación del calor usando la transformada de Fourier.

Consideremos el problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & en\ \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ u = g & en\ \mathbb{R}^n \times \{t=0\}, \qquad g \in S(\mathbb{R}^n). \end{cases}$$

Si aplicamos la transformada de Fourier en las variables espaciales

$$\hat{u}(\xi,t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} u(x,t)dx$$

se tiene

$$\begin{cases} \hat{u}_t(\xi,t) + |\xi|^2 \hat{u}(\xi,t) = 0 & en\ \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ \hat{u}(\xi,t) = \hat{g}(\xi) & en\ \mathbb{R}^n \times \{t=0\}. \end{cases}$$

Si consideramos ξ un parámetro podemos pensar esto como una EDO respecto a t y obtenemos que

$$\hat{u}(\xi,t) = \hat{g}(\xi)e^{-|\xi|^2 t}$$

es solución. Ahora si aplicamos la inversa de la transformada de Fourier a $\hat{u}(\xi,t)$ y el **teorema 1.7** obtenemos que

$$u(x,t) = (\hat{u})^{\check{}}(x,t) = \left(\hat{g}(\xi)e^{-|\xi|^2 t}\right)^{\check{}} = \frac{(g * F)(x,t)}{(2\pi)^{n/2}},$$

donde $\hat{F} = e^{-|\xi|^2 t}$ y por el **teorema 1.6**

$$F(x,t) = \left(e^{-|\xi|^2 t}\right)^{\check{}} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} e^{-|\xi|^2 t} d\xi.$$

Observemos que

$$ix \cdot \xi - |\xi|^2 t = -\left(\frac{ix}{2\sqrt{t}} - \xi\sqrt{t}\right)^2 - \frac{|x|^2}{4t}$$

y de esta forma podemos obtener

$$F(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\left(\frac{ix}{2\sqrt{t}} - \xi\sqrt{t}\right)^2} d\xi.$$

Solo nos falta calcular la última integral, para ello primero consideramos la integral para una variable:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{ix_1}{2\sqrt{t}} - \xi_1\sqrt{t}\right)^2} d\xi_1.$$

Ahora fijaremos x_1 y t y para cada $R > 0$ consideraremos el camino de integración γ definido por los segmentos que unen $-R + 0i$ con $R + 0i$, $R + 0i$ con $R + \frac{x_1}{2\sqrt{t}}i$, $R + \frac{x_1}{2\sqrt{t}}i$ con $-R + \frac{x_1}{2\sqrt{t}}i$ y $-R + \frac{x_1}{2\sqrt{t}}i$ con $-R + 0i$. Observamos ahora que en el interior del rectángulo formado por γ tenemos una función del tipo $h(z) = e^{-(z)^2}$ que es analítica. Por tanto el teorema de Cauchy implica que

$$\int_{\gamma} e^{-z^2} dz = 0$$

y como además

$$\lim_{R\to\infty} \left| \int_0^{\frac{x_1}{2\sqrt{t}}} e^{-\left(is - R\sqrt{t}\right)^2} ds \right| = 0,$$

tenemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{ix_1}{2\sqrt{t}} - \xi_1\sqrt{t}\right)^2} d\xi_1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\xi_1\sqrt{t}\right)^2} d\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\frac{\pi}{t}}.$$

Es fácil observar que

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\left(\frac{ix}{2\sqrt{t}} - \xi\sqrt{t}\right)^2} d\xi = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{ix_1}{2\sqrt{t}} - \xi_1\sqrt{t}\right)^2} d\xi_1 \right)^n,$$

por tanto

$$F(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \left(\sqrt{\frac{\pi}{t}}\right)^n = \frac{1}{(2t)^{n/2}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

y concluimos que

$$u(x,t) = \frac{(g * F)(x,t)}{(2\pi)^{n/2}} = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) dy.$$

Observación 1.8: Como acabamos de ver:

$$F = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} e^{-|\xi|^2 t} d\xi = \frac{1}{(2t)^{n/2}} e^{-\frac{x^2}{4t}} = (2\pi)^{n/2} \varphi(x,t).$$

1.4. Solución al problema no homogéneo

Ahora dirijamos nuestra atención al problema no homogéneo

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & en\ \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ u = g & en\ \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

Para poder resolver este problema primero resolveremos el caso $g = 0$:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & en\ \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ u = 0 & en\ \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases} \tag{1.6}$$

Para crear una fórmula para la solución, empecemos recordando la motivación que condujo a (1.5). Debemos observar además que la función $(x,t) \to \varphi(x-y, t-s)$ es solución de la ecuación del calor para $t \geq s$. Ahora, fijando s, la función

$$w = w(x,t;s) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y, t-s) f(y,s)\, dy$$

resuelve

$$\begin{cases} w_t(x,t;s) - \Delta w(x,t;s) = 0 & en\ \mathbb{R}^n \times (s,\infty), \\ w(x,t;s) = f(x,s) & en\ \mathbb{R}^n \times \{t = s\}, \end{cases} \tag{1.6_s}$$

que es sencillamente el problema del valor inicial de la forma (1.4), reemplazando el tiempo inicial $t = 0$ con $t = s$ y la función g por $f(x,s)$. Por tanto $w(x,t;s)$ no es una solución de (1.6).No obstante, por el método de variación de parámetros (o principio de Duhamel), podemos construir una solución de (1.6) a partir de las soluciones de (1.6_s), integrando con respecto a s.

La idea es considerar

$$u(x,t) = \int_0^t w(x,t;s) ds, \qquad (x \in \mathbb{R}^n, t > 0)$$

y substituyendo tenemos

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y,t-s) f(y,s)\, dyds \ =$$

$$= \int_0^t \frac{1}{(4\pi(t-s)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} f(y,s)\, dyds\,.$$

Por simplicidad podemos asumir que $f \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ y que tiene soporte compacto, estas son condiciones suficientes para garantizar la solución de la integral anterior y por tanto la fórmula funciona.

Con esto ya podemos resolver el problema no homogéneo general

$$\begin{cases} v_t - \Delta v = f & en\ \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ v = g & en\ \mathbb{R}^n \times \{t=0\}. \end{cases} \tag{1.7}$$

Para ello buscamos una solución w para el problema homogéneo siguiente usando el método visto en la **sección 1.2**

$$\begin{cases} w_t - \Delta w = 0 & en\ \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ w = g & en\ \mathbb{R}^n \times \{t=0\}. \end{cases}$$

Ahora consideramos u la solución del problema (1.6). Si definimos $v = u + w$ se puede ver que se cumple que

$$\begin{cases} v_t - \Delta v = u_t - \Delta u + w_t - \Delta w = f & en\ \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ v = u + w = g & en\ \mathbb{R}^n \times \{t=0\}. \end{cases}$$

De esta forma tenemos que

$$v(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) dy + \int_0^t \frac{1}{(4\pi(t-s)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} f(y,s) dyds$$

es solución de (1.7).

1.5. Dominios acotados y condiciones sobre la frontera

Una cuestión habitual es buscar soluciones del problema del valor inicial en dominios acotados que cumplan ciertas condiciones específicas. Ahora consideraremos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado, $f(x,t): \Omega \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ una función y el problema del valor inicial

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & en\ \Omega \times (0,\infty) \\ u = f & en\ \partial\Omega \times (0,\infty) \\ u = g & en\ \Omega \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Es decir, el problema del valor inicial anterior pero restringido a Ω y con la condición adicional sobre la frontera de Ω. Este conjunto de condiciones, donde se fija una temperatura f sobre $\partial\Omega$ se conoce como **condiciones de frontera de Dirichlet** (o de primer tipo) y al problema del valor inicial con condiciones de tipo Dirichlet se le llama **problema de Dirichlet.**

Otra forma habitual de imponer condiciones sobre la frontera es definiendo el flujo de la temperatura a través de esta. Para ello definimos μ como el vector normal unitario a la frontera $\partial\Omega$ y planteamos el siguiente problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & en\ \Omega \times (0,\infty) \\ \nabla u \cdot \mu = f & en\ \partial\Omega \times (0,\infty) \\ u = g & en\ \Omega \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Este conjunto de condiciones se conoce como **condiciones de frontera de Neumann** (o de segundo tipo).

Más adelante demostraremos que con estas condiciones podemos garantizar la existencia de una única solución.

1.6. Método de separación de variables

El **método de separación de variables** es un procedimiento para encontrar una solución completa particular para ciertos problemas que involucran ecuaciones en derivadas parciales. Para ver cómo funciona este método vamos a resolver un problema de valor inicial bastante general.

Sea $\Omega \in \mathbb{R}^n$ un dominio acotado consideremos el siguiente problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & en\ \Omega \times (0, \infty) \\ u = 0 & en\ \partial\Omega \times [0, \infty) \\ u = g & en\ \Omega\ \times \{t = 0\} \end{cases} \tag{1.8}$$

Suponemos que existe una solución de tipo $u(x,t) = v(t)w(x)$, $\quad (u \in \Omega, t \geq 0)$; esto es, buscamos una solución de (1.8) con las variables $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ separadas de la variable t.

Operando obtenemos

$$u_t(x,t) = v'(t)w(x) \text{ y } \Delta u(x,t) = v(t)\Delta w(x).$$

Por tanto

$$u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = v'(t)w(x) - v(t)\Delta w(x) = 0$$

y separando las variables en cada lado de la igualdad

$$\frac{v'(t)}{v(t)} = \frac{\Delta w(x)}{w(x)}$$

siempre que $v(t), w(x) \neq 0$. Ahora observamos que tenemos igualdad entre un término que depende solo de la variable t y otro que depende solo de x. La única posibilidad es que exista una constante μ tal que

$$\frac{v'(t)}{v(t)} = \mu = \frac{\Delta w(x)}{w(x)}.$$

Tenemos ahora que resolver las dos ecuaciones:

$$v'(t) = \mu v(t), \tag{1.9}$$

$$\Delta w(x) = \mu w(x). \tag{1.10}$$

Primeramente, si μ es conocido, (1.9) es una EDO y la solución es $v(t) = ce^{\mu t}$ para una constante c. Entonces solo nos queda resolver (1.10).

Decimos que λ es un **autovalor** del laplaciano con condiciones Dirichlet en Ω siempre y cuando exista una función w no idénticamente igual a cero que resuelva

$$\begin{cases} -\Delta w = \lambda w & en\ \Omega, \\ w = 0 & en\ \partial\Omega. \end{cases}$$

Decimos también que la función w es su correspondiente **autofunción.**

Si ahora λ es un autovalor y w su correspondiente autofunción, podemos substituir arriba $-\lambda = \mu$ y observamos que

$$u = ce^{-\lambda t}w \tag{1.11}$$

resuelve

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & en\ \Omega \times (0,\infty) \\ u = 0 & en\ \partial\Omega \times [0,\infty) \end{cases} \tag{1.12}$$

con la condición inicial $u(\cdot\,,0) = cw$. De este modo la función u definida en (1.11) resuelve (1.8) para $g = cw$. Más en general, sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ los autovalores de sus correspondientes autofunciones $w_1, w_2, \ldots$ y $c_1, c_2, \ldots$ unas constantes, entonces

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-\lambda_k t} w_k \tag{1.13}$$

resuelve (1.12) con la condición inicial $u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k w_k$. No obstante para que este método funcione necesitamos ser capaces de encontrar autovalores, autofunciones y constantes que satisfagan que $\sum_{k=1}^{\infty} c_k w_k = g$ y también hay que verificar que (1.13) converja de alguna manera.

1.7. Ejemplo

Para terminar esta sección vamos a ver un ejemplo sencillo de cómo calcular la solución de la ecuación del calor en un círculo de radio r. Para ello vamos a pensar el círculo como un segmento en el que identificamos sus dos extremos. Tenemos entonces el siguiente problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & en\ [-\pi r, \pi r] \times (0,\infty), \\ u = g & en\ [-\pi r, \pi r] \times \{t = 0\}, \\ u(-\pi r, t) = u(\pi r, t) & en\ (0,\infty), \\ u_x(-\pi r, t) = u_x(\pi r, t) & en\ (0,\infty). \end{cases}$$

Ahora definimos v, w como:

$$u(x,t) = v(t)w(x).$$

Siguiendo el método de separación de variables tenemos las ecuaciones

$$v'(t) = \mu v(t),$$

$$w''(x) = \mu w(x),$$

para alguna constante μ. También hemos visto que en este caso $v(t) = ce^{\mu t}$ para alguna constante c.

Para hallar w vamos a distinguir 3 casos:

- $\mu = 0$:

  $$w''(x) = 0 \rightarrow w'(x) = A \rightarrow w(x) = Ax + B,$$

  para ciertas constantes A y B. Aplicando la condición de la frontera tenemos que

  $$w(-\pi r) = -\pi r A + B = \pi r A + B = w(\pi r)$$

  por lo que deducimos que $A = 0$ y $w = B$. Aplicando ahora la condición sobre el flujo no obtenemos mas información.

- $\mu = \lambda^2$, $\lambda \neq 0$:

  $$w''(x) - \lambda^2 w(x) = 0 \xrightarrow[EDO]{} w(x) = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x}.$$

  Aplicando la condición de la frontera tenemos que

  $$w(-\pi r) = Ae^{-\lambda \pi r} + Be^{\lambda \pi r} = Ae^{\lambda \pi r} + Be^{-\lambda \pi r} = w(\pi r),$$

  que implica que $A = B$. Aplicando ahora la condición sobre el flujo obtenemos que

  $$w_x(-\pi r) = \lambda Ae^{-\lambda \pi r} - \lambda Be^{\lambda \pi r} = \lambda Ae^{\lambda \pi r} - \lambda Be^{-\lambda \pi r} = w_x(\pi r)$$

  y si desarrollamos la igualdad obtenemos que $A = -B$. Juntando los 2 resultados obtenemos que $A = B = 0$ es la única solución. Como estábamos buscando soluciones distintas de la trivial tenemos que $\mu \neq \lambda^2$.

- $\mu = -\lambda^2$, $\lambda \neq 0$:

$$w''(x) + \lambda^2 w(x) = 0 \xrightarrow[EDO]{} w(x) = Acos(\lambda x) + Bsin(\lambda x).$$

Aplicando la condición de la frontera tenemos que

$$w(-\pi r) = Acos(-\lambda \pi r) + Bsin(-\lambda \pi r) = Acos(\lambda \pi r) + Bsin(\lambda \pi r) = w(\pi r)$$

y usando que las funciones cos y sin son par e impar respectivamente obtenemos que o bien $B = 0$ o que $sin(\lambda \pi r) = 0$. Aplicando ahora la condición sobre el flujo obtenemos que

$$w_x(-\pi r) = -\lambda Asin(-\lambda \pi r) + \lambda Bcos(-\lambda \pi r) =$$

$$= -\lambda Asin(\lambda \pi r) + \lambda Bcos(\lambda \pi r) = w_x(\pi r),$$

aplicando de nuevo las propiedades de las funciones cos y sin obtenemos que o bien $A = 0$ o $sin(\lambda \pi r) = 0$. Si $sin(\lambda \pi r) \neq 0$ tendríamos la solución trivial $A = B = 0$ como única solución, por tanto $sin(\lambda \pi r) = 0$ lo que implica que $\lambda = \frac{k}{r}$ para $k = 1,2,3 \ldots$. Por tanto $w(x) = Acos\left(\frac{kx}{r}\right) + Bsin\left(\frac{kx}{r}\right)$.

Finalmente por superposición tenemos que

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{\mu_k t} w_k = B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{k}{r}\right)^2 t} \left(A_k cos\left(\frac{kx}{r}\right) + B_k sin\left(\frac{kx}{r}\right) \right)$$

y se tiene que cumplir que

$$u(x,0) = B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k cos\left(\frac{kx}{r}\right) + B_k sin\left(\frac{kx}{r}\right) \right) = g(x).$$

Para hallar los coeficientes A_k, B_k podemos usar los coeficientes de Fourier de forma que

$$B_0 = \frac{1}{2\pi r} \int_{-\pi r}^{\pi r} g(x)\, dx,$$

$$A_k = \frac{1}{\pi r} \int_{-\pi r}^{\pi r} g(x) cos\left(\frac{kx}{r}\right) dx, \qquad k = 1,2,3 \ldots ,$$

$$B_k = \frac{1}{\pi r}\int_{-\pi r}^{\pi r} g(x) sin\left(\frac{kx}{r}\right)\, dx, \qquad\qquad k = 1,2,3 \ldots \;.$$

2. Propiedades de la ecuación del calor

En esta sección veremos dos propiedades importantes de la ecuación del calor: la unicidad y la suavidad de sus soluciones. Para ello veremos primero la propiedad del valor medio para la ecuación del calor. A través de la propiedad del valor medio demostraremos el principio del máximo fuerte. Posteriormente usaremos el teorema del máximo fuerte para demostrar la unicidad y usaremos esta última para demostrar la suavidad. También veremos una forma alternativa para demostrar la unicidad sin necesidad de usar el principio del máximo fuerte, conocido como el método de las energías.

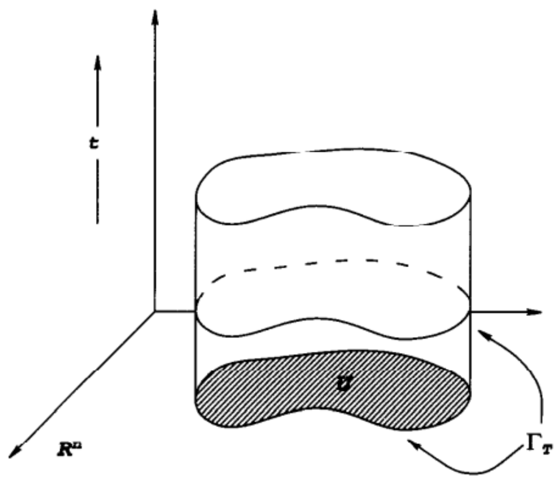
2.1. Valor medio:

A partir de ahora consideraremos $U \subset \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ un conjunto abierto y acotado y fijaremos un tiempo $T > 0$.

Definimos:

(i) El cilindro parabólico $U_T \coloneqq U \times (0, T]$

(ii) El borde parabólico de U_T, $\Gamma_T \coloneqq \overline{U}_T - U_T$



Definición 2.1: Para un $x \in \mathbb{R}^n$ fijo, $t \in \mathbb{R}$, $r > 0$, definimos:

$$E(x,t;r) := \left\{(y,s) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid s \leq t, \quad \varphi(x-y,t-s) \geq \frac{1}{r^n}\right\} =$$

$$= \left\{(y,s) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid s \leq t, \quad \frac{1}{(4\pi(t-s))^{n/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} \geq \frac{1}{r^n}\right\} =$$

$$= \left\{(y,s) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid s \leq t, |x-y|^2 \leq 4(t-s)\left(\frac{n}{2} log\big(4\pi(t-s)\big) + log(r^n)\right)\right\}.$$

Esta es una región cuyo borde es un conjunto de nivel de $\varphi(x-y,t-s)$. En ocasiones se le llama a $E(x,t;r)$ "bola de calor".

Teorema 2.2 (Propiedad del valor medio para la ecuación del calor)**:** Sea $u \in C_1^2(U_T)$ solución de la ecuación del calor (1.1) en U_T , se cumple que para cada $E(x,t;r) \subset U_T$:

$$u(x,t) = \frac{1}{4r^n} \int\int_{E(x,t;r)} u(y,s) \frac{|x-y|^2}{(t-s)^2} dyds.$$

Demostración:

Supongamos por ahora que $u \in C^\infty(U_T)$. Podemos asumir (usando traslaciones) que $x = 0$ y $t = 0$. Escribimos $E(r) = E(0,0;r)$ y ahora definimos:

$$\phi(r) = \frac{1}{r^n} \int\int_{E(r)} u(y,s) \frac{|y|^2}{s^2} dyds = \int\int_{E(1)} u(ry,r^2s) \frac{|y|^2}{s^2} dyds.$$

Calculamos ahora:

$$\phi'(r) = \int\int_{E(1)} \left(\sum_{i=1}^{n} u_{y_i}(ry,r^2s) y_i \frac{|y|^2}{s^2} + 2ru_s(ry,r^2s) \frac{|y|^2}{s}\right) dyds =$$

$$= \frac{1}{r^{n+1}} \int\int_{E(r)} \left(\sum_{i=1}^{n} u_{y_i}(y,s) y_i \frac{|y|^2}{s^2} + 2u_s(y,s) \frac{|y|^2}{s}\right) dyds = A + B,$$

donde $u_{y_i} = \frac{\partial}{\partial y_i} u$.

Para seguir la demostración introduciremos la siguiente función:

$$\psi(y,s;r) = -\frac{n}{2}log(-4\pi s) + \frac{|y|^2}{4s} + nlog(r),$$

que podemos expresar como:

$$\psi(y,s;r) = log\big(\varphi(y,-s)\big) + nlog(r).$$

Observemos que $\psi = 0$ en $\partial E(r)$ ya que $\varphi(y,-s) = \frac{1}{\mathrm{r}^{\mathrm{n}}}$ en $\partial E(r)$. Usando esta función podemos escribir B como:

$$B = \frac{1}{r^{n+1}}\int\int_{E(r)} 2u_s \frac{|y|^2}{s} dyds = \frac{1}{r^{n+1}}\int\int_{E(r)} 4u_s \sum_{i=1}^{n} y_i\psi_{y_i} dyds$$

e integrando por partes respecto a y:

$$B = \frac{-1}{\mathrm{r}^{\mathrm{n+1}}}\int\int_{E(r)}\left(4nu_s\psi + 4\sum_{i=1}^{n} u_{sy_i}y_i\psi\right)dyds.$$

Integrando por partes ahora el segundo término respecto a s obtenemos:

$$B = \frac{1}{r^{n+1}}\int\int_{E(r)}\left(-4nu_s\psi + 4\sum_{i=1}^{n} u_{y_i}y_i\psi_s\right)dyds =$$

$$= \frac{1}{\mathrm{r}^{\mathrm{n+1}}}\int\int_{E(r)}\left(-4nu_s\psi + 4\sum_{i=1}^{n} u_{y_i}y_i\left(-\frac{n}{2s} - \frac{|y|^2}{4s^2}\right)\right)dyds =$$

$$= \frac{1}{\mathrm{r}^{\mathrm{n+1}}}\int\int_{E(r)}\left(-4nu_s\psi - \frac{2n}{s}\sum_{i=1}^{n} u_{y_i}y_i\right)dyds - A.$$

Como u resuelve la ecuación del calor:

$$\phi'(r) = A + B = \frac{1}{\mathrm{r}^{\mathrm{n+1}}}\int\int_{E(r)}\left(-4n\Delta_y u\psi - \frac{2n}{s}\sum_{i=1}^{n} u_{y_i}y_i\right)dyds$$

e integrando por partes respecto y en el primer término

$$\phi'(r) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\mathrm{r}^{\mathrm{n+1}}} \int\int_{E(r)} \left(4nu_{y_i}\psi_{y_i} - \frac{2n}{s} u_{y_i} y_i\right) dyds = 0, \qquad (2.1)$$

donde la última igualdad se obtiene aplicando la definición de ψ. Por tanto ϕ es constante y

$$\phi(r) = \lim_{t\to 0} \phi(t) = u(0,0)\left(\lim_{t\to 0} \frac{1}{t^n}\int\int_{E(t)} \frac{|y|^2}{s^2} dsdy\right) = 4u(0,0).$$

La última igualdad viene del cálculo de la integral

$$\frac{1}{t^n}\int\int_{E(t)} \frac{|y|^2}{s^2} dsdy = \int\int_{E(1)} \frac{|y|^2}{s^2} dsdy,$$

donde

$$E(1) = \{(y,s) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid s \leq 0,\ \varphi(-y,-s) \geq 1\} =$$

$$= \{(y,s) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid s \leq 0,\ |y|^2 \leq 2ns\log(-4\pi s)\}.$$

A la hora de integrar, solo nos interesan los valores de s que cumplen que $-2ns\log(-4\pi s) \geq 0$. Como $s \leq 0$, esto último equivale a que $\log(-4\pi s) \leq 0$ y tenemos que $s \geq -\frac{1}{4\pi}$. Por tanto la integral nos queda

$$\int_{-\frac{1}{4\pi}}^{0} \int_{|y|^2 \leq 2ns\log(-4\pi s)} \frac{|y|^2}{s^2} dyds$$

y pasando a coordenadas n-esféricas tenemos

$$I = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_{-\frac{1}{4\pi}}^{0} \int_{0}^{\sqrt{2ns\log(-4\pi s)}} \frac{r^2}{s^2} r^{n-1}\, drds =$$

$$= \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)(n+2)} \int_{-\frac{1}{4\pi}}^{0} \frac{(2ns\log(-4\pi s))^{\frac{n+2}{2}}}{s^2}\, ds =$$

$$= \frac{2\pi^{n/2}(2n)^{\frac{n}{2}+1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)(n+2)} \int_{-\frac{1}{4\pi}}^{0} (\log(-4\pi s))^{\frac{n}{2}+1}\, s^{\frac{n}{2}-1}\, ds.$$

Ahora con el cambio de variable $\log(-4\pi s) = \tau$ tenemos

$$I = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}(2n)^{\frac{n}{2}+1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)(n+2)}\int_0^{-\infty} \tau^{\frac{n}{2}+1}\left(-\frac{e^{\tau}}{4\pi}\right)^{\frac{n}{2}} d\tau =$$

$$= \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}(2n)^{\frac{n}{2}+1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)(n+2)(-4\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_0^{-\infty} \tau^{\frac{n}{2}+1} e^{\frac{n}{2}\tau}\, d\tau$$

$$= \frac{2(2n)^{\frac{n}{2}+1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)(n+2)(-4)^{\frac{n}{2}}}\int_0^{\infty} -\left(-\frac{2\tau}{n}\right)^{\frac{n}{2}+1} e^{-\tau}\frac{2d\tau}{n} =$$

$$= \frac{2^4}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)(n+2)n}\Gamma\left(\frac{n}{2}+2\right).$$

Finalmente usando las propiedades de la función Γ tenemos

$$I = \frac{2^4}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)(n+2)n}\left(\frac{n}{2}+1\right)\frac{n}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = 4.$$

Recordemos que esta demostración la hemos hecho suponiendo que $u \in C^{\infty}(U_T)$. Si ahora u satisface solo la hipótesis del teorema, podemos deducir (2.1) reemplazando u por $u^{\varepsilon} = \eta_{\varepsilon} * u$, siendo η_{ε} la aproximación a la unidad en las variables x y t (mas detalles en el Apéndice) y haciendo $\varepsilon \to 0$. Es decir, si no se cumple que $u \in C^{\infty}(U_T)$, podemos aproximar u por funciones que sí son $C^{\infty}(U_T)$ para obtener el resultado.

□

2.2. Principio del máximo:

Teorema 2.3 (Principio del máximo fuerte para la ecuación del calor): Sea $u \in C_1^2(U_T) \cap C(\overline{U}_T)$ una solución de la ecuación del calor en U_T.

(i) Entonces $\max_{\overline{U}_T} u = \max_{\Gamma_T} u$ (donde recordemos $\Gamma_T = \overline{U}_T - U_T$)

(ii) Si además, U es conexo y existe un punto $(x_0, t_0) \in U_T$ tal que $u(x_0, t_0) = \max_{\overline{U}_T} u$, entonces u es constante en $\overline{U}_{t_0}$

Demostración:

Supongamos que existe un punto $(x_0, t_0) \in U_T$ con $u(x_0, t_0) = M = \max_{\bar{U}_T} u$. Entonces para todo $r > 0$ suficientemente pequeño, $E(x_0, t_0; r) \in U_T$ y podemos usar la propiedad del valor medio (**teorema 2.2**) para deducir que

$$M = u(x_0, t_0) = \frac{1}{4r^n} \int\int_{E(x_0,t_0;r)} u(y, s) \frac{|x_0 - y|^2}{(t_0 - s)^2} dyds \leq M$$

ya que, como hemos visto en la demostración del **teorema 2.2**,

$$4 = \frac{1}{r^n} \int\int_{E(x_0,t_0;r)} \frac{|x_0 - y|^2}{(t_0 - s)^2} dyds.$$

Tenemos igualdad solo si u es idénticamente igual a M en $E(x_0, t_0; r)$. Es decir:

$$u(x_0, t_0) = M \quad \text{para todo } (y, s) \in E(x_0, t_0; r).$$

Ahora trazamos un segmento L en U_T que conecta (x_0, t_0) con otro punto $(y_0, s_0) \in U_T$ tal que $s_0 < t_0$. Consideramos:

$$r_0 = min\{ s \geq s_0 \mid u(x, t) = M \ \forall (x, t) \in L, s \leq t \leq t_0 \}.$$

Como u es continuo, se alcanza el mínimo. Suponemos $r_0 > s_0$. Entonces $u(z_0, r_0) = M$ para algún punto (z_0, r_0) en $L \cap U_T$ y por tanto $u \equiv M$ en $E(z_0, r_0; r)$ para todo $r > 0$ suficientemente pequeño. Como $E(z_0, r_0; r)$ contiene $L \cap \{r_0 - \sigma \leq t \leq r_0\}$ para algún $\sigma > 0$, tenemos una contradicción. Por tanto $r_0 = s_0$ y $u \equiv M$ en L.

Ahora fijamos $x \in U$ y $0 \leq t < t_0$. Existen puntos $\{x_0, x_1, \dots, x_m = x\}$ tales que los segmentos de recta en $\mathbb{R}^n$ que conectan x_{i-1} a x_i están en U para $0 \leq i \leq m$. Esto se debe a que el conjunto de puntos en U que pueden estar conectados a x_0 por un camino poligonal es no vacío, abierto y relativamente cerrado en U. Elegimos tiempos $t_0 > t_1 > \cdots > t_m = t$, entonces la línea de segmentos en $\mathbb{R}^{n+1}$que conectan (x_{i-1}, t_{i-1}) con (x_i, t_i), $(0 \leq i \leq m)$ están en U_T. Como hemos visto que $u \equiv M$ en cada segmento, entonces $u(x, t) = M$.

Por tanto tenemos, por una parte, que si existe un punto $(x_0, t_0) \in U_T$ con $u(x_0, t_0) = M = \max_{\bar{U}_T} u$ y podemos trazar un conjunto de segmentos como en el párrafo anterior para cualquier punto $x \in U$ (es decir, U es conexo), entonces $u(x, t) = M$ para todo $t \leq t_0$. Por otra, que si existe un punto $(x_0, t_0) \in U_T$ con $u(x_0, t_0) = M = \max_{\bar{U}_T} u$, entonces existe $(x_1, t_1) \in \Gamma_T$ tal que $u(x_1, t_1) = M$ y por tanto $\max_{U_T} u \leq \max_{\Gamma_T} u$.

□

Observación 2.4: El principio del máximo fuerte implica que si U es conexo y $u \in C_1^2(U_T) \cap C(\overline{U}_T)$ y satisface:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & en\ U_T \\ u = 0 & en\ \partial U_T \times [0,T] \\ u = g & en\ U \times \{t = 0\} \end{cases}$$

donde $g \geq 0$, entonces u es positivo *en todo* U_T si g lo es en *algún lugar* de U. Para demostrar esto basta considerar el problema para $v = -u$ y aplicando el principio del máximo llegamos al resultado.

2.3. Unicidad:

Una importante aplicación del principio del máximo es el siguiente teorema de unicidad.

Teorema 2.5 (Unicidad en dominios acotados): Sea $g \in C(\Gamma_T)$, $f \in C(U_T)$. Entonces existe como mucho una solución $u \in C_1^2(U_T) \cap C(\overline{U}_T)$ del problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & en\ U_T \\ u = g & en\ \Gamma_T \end{cases}$$

Demostración:

Sean u y $\tilde{u}$ dos soluciones del problema anterior, aplicando el **teorema 2.3** a $w = \pm(u - \tilde{u})$ ya lo tendríamos.

□

Ahora extenderemos la unicidad al problema de Cauchy, es decir, el problema del valor inicial para $U = \mathbb{R}^n$. Como ya no estamos en una región acotada debemos introducir algún control en el comportamiento de las soluciones para $|x|$ grande.

Teorema 2.6 (Principio del máximo para el problema de Cauchy): Suponemos que $u \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times (0,T]) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ resuelve:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & en\ \mathbb{R}^n \times (0,T) \\ u = g & en\ \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

y satisface la estimación de crecimiento

$$u(x,t) \leq Ae^{a|x|^2}, \qquad (x \in \mathbb{R}^n,\ 0 \leq t \leq T)$$

para constantes $A, a > 0$. Entonces se cumple que

$$sup_{\mathbb{R}^n \times (0,T]}\, u = sup_{\mathbb{R}^n}\, g.$$

Demostración:

Primero asumimos que $4aT < 1$ y por tanto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $4a(T+\varepsilon) < 1$. Fijamos un $y \in \mathbb{R}^n$ y un $\mu > 0$ y definimos:

$$v(x,t) = u(x,t) - \frac{\mu}{(T+\varepsilon-t)^{n/2}} e^{\frac{|x-y|^2}{4(T+\varepsilon-t)}} \qquad (x \in \mathbb{R}^n, t > 0).$$

Por un cálculo directo obtenemos:

$$v_t - \Delta v = 0, \qquad en\ \mathbb{R}^n \times (0,T].$$

Fijando $r > 0$ y estableciendo $U = B^0(y,r)$ y $U_T = B^0(y,r) \times (0,T]$, entonces, de acuerdo al **teorema 2.3**,

$$\max_{\overline{U}_T} v = \max_{\Gamma_T} v \qquad \text{(donde recordemos } \Gamma_T = \overline{U}_T - U_T\text{).}$$

Ahora, si $x \in \mathbb{R}^n$,

$$v(x,0) = u(x,0) - \frac{\mu}{(T+\varepsilon)^{n/2}} e^{\frac{|x-y|^2}{4(T+\varepsilon)}} \leq u(x,0) = g(x)$$

y si $|x-y| = r$, $0 \leq t \leq T$ entonces

$$v(x,t) = u(x,t) - \frac{\mu}{(T+\varepsilon-t)^{n/2}} e^{\frac{r^2}{4(T+\varepsilon-t)}} \leq$$

$$\leq Ae^{a|x|^2} - \frac{\mu}{(T+\varepsilon-t)^{n/2}} e^{\frac{r^2}{4(T+\varepsilon-t)}} \leq$$

$$\leq Ae^{a(|y|+r)^2} - \frac{\mu}{(T+\varepsilon)^{n/2}} e^{\frac{r^2}{4(T+\varepsilon)}}.$$

Ahora, como $4a(T+\varepsilon) < 1$, $\frac{1}{4(T+\varepsilon)} = a + \gamma$ para algún $\gamma > 0$.

Sustituyendo en la desigualdad anterior:

$$v(x,t) \leq Ae^{a(|y|+r)^2} - \mu(4(a+\gamma))^{n/2} e^{(a+\gamma)r^2} =$$

$$= Ae^{a|y|^2} e^{a(2|y|r+r^2)} - \mu(4(a+\gamma))^{n/2} e^{(a+\gamma)r^2} \leq$$

$$\leq Ae^{a|y|^2} e^{\left(a+\frac{\gamma}{2}\right)r^2} - \mu(4(a+\gamma))^{n/2} e^{(a+\gamma)r^2} \leq sup_{\mathbb{R}^n}\, g$$

para r lo suficientemente grande.

Como también tenemos que $\max_{\bar{U}_T} v = \max_{\Gamma_T} v$,

$$v(y,t) \leq sup_{\mathbb{R}^n}\, g$$

para todo $y \in \mathbb{R}^n,\ 0 \leq t \leq T$.

En el caso de que no se cumpla la hipótesis inicial ($4aT < 1$), podemos aplicar el resultado anterior repetidamente en intervalos de tiempo $[0, T_1]$, $[T_1, 2T_1]$, etc., para $T_1 = \frac{1}{8a}$.

□

Teorema 2.7 (Unicidad para el problema de Cauchy)**:** Sean $g \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^n)$, $f \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^n \times (0, \mathrm{T}])$. Entonces existe como mucho una solución $u \in \mathrm{C}_1^2(\mathbb{R}^n \times (0, \mathrm{T}]) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0, \mathrm{T}])$ del problema del valor inicial:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & en\ \mathbb{R}^n \times (0, \mathrm{T}) \\ u = g & en\ \mathbb{R}^n \times \{\mathrm{t} = 0\} \end{cases}$$

que satisface la estimación de crecimiento

$$u(x,t) \leq Ae^{a|x|^2}, \qquad (x \in \mathbb{R}^n,\ 0 \leq \mathrm{t} \leq \mathrm{T})$$

para constantes $A, a > 0$.

Demostración:

Si $u, \tilde{u}$ satisfacen estas propiedades, podemos aplicar el **teorema 2.6** a $w = \pm(u - \tilde{u})$ y ya lo tendríamos.

□

2.4. Método de las energías:

Ahora vamos a investigar de nuevo el problema del valor inicial

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & en\ U_T \\ u = g & en\ \Gamma_T \end{cases} \tag{2.2}$$

pero usando la integración por partes para probar la unicidad en lugar del principio del máximo como usamos en la sección anterior. Como antes, asumiremos que $U \in \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto y acotado y que ∂U es C^1. También el tiempo final $T > 0$ es conocido.

Teorema 2.8 (Unicidad)**:** Existe como mucha una solución $u \in C_1^2(\overline{U}_T)$ de (2.2).

Demostración:

Sean u y $\tilde{u}$ dos soluciones del problema (2.2), $w = u - \tilde{u}$ es solución de

$$\begin{cases} w_t - \Delta w = 0 & en\ U_T \\ w = 0 & en\ \Gamma_T \end{cases}$$

Definimos

$$e(t) = \int_U w^2(x,t)dx, \qquad (0 \le t \le T),$$

entonces

$$\dot{e}(t) = 2\int_U ww_t dx = 2\int_U w\Delta w\, dx = -2\int_U |Dw|^2 dx \le 0$$

y por tanto $e(t) \le e(0) = 0$, $(0 \le t \le T)$ y $w = u - \tilde{u} \equiv 0$ en U_T.

□

Una pregunta algo más sutil es la que concierne a la unicidad hacia atrás en el tiempo de la ecuación del calor. Para esto suponemos que u y $\tilde{u}$ son dos soluciones suaves de la ecuación del calor en U_T con las mismas condiciones de contorno en ∂U_T :

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & en\ U_T \\ u = g & en\ \partial U_T \times [0,T] \end{cases} \tag{2.3}$$

$$\begin{cases} \tilde{u}_t - \Delta \tilde{u} = 0 & en\ U_T \\ \tilde{u} = g & en\ \partial U_T \ \times [0,\mathrm{T}] \end{cases} \tag{2.4}$$

para alguna función g.

Teorema 2.9 (Unicidad hacia atrás)**:** Suponemos que $u, \tilde{u} \in \mathrm{C}^2(\overline{U}_T)$ son soluciones de (2.3) y (2.4). Si

$$u(x,T) = \tilde{u}(x,T), \quad x \in U$$

entonces $u \equiv \tilde{u}$ en U_T.

Es decir, si dos distribuciones de temperatura en U coinciden para un tiempo $T > 0$ y tienen las mismas condiciones de contorno para tiempos $0 \leq t \leq T$, entonces estas temperaturas tienen que ser iguales dentro de U para todo tiempo anterior a T.

Demostración:

Escribimos $w = u - \tilde{u}$ y, al igual que en la demostración del **teorema 2.8,** definimos

$$e(t) = \int_U w^2(x,t)dx \qquad (0 \leq t \leq T),$$

como antes

$$\dot{e}(t) = -2\int_U |\nabla w|^2 dx$$

y además

$$\ddot{e}(t) = -4\int_U \nabla w \cdot \nabla w_t\, dx = 4\int_U \Delta w w_t\, dx = 4\int_U (\Delta w)^2 dx.$$

Ahora como $w = 0$ en ∂U_T

$$\int_U |\nabla w|^2 dx = -\int_U w\Delta w\, dx \leq \left(\int_U w^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_U (\Delta w)^2 dx\right)^{1/2}$$

y usando las derivadas anteriores tenemos que

$$\left(\dot{e}(t)\right)^2 = 4\left(\int_U |\nabla w|^2 dx\right)^2 \leq \left(\int_U w^2 dx\right)\left(4\int_U (\Delta w)^2 dx\right) = e(t)\ddot{e}(t).$$

Entonces tenemos que $\left(\dot{e}(t)\right)^2 \leq e(t)\,\ddot{e}(t), \quad (0 \leq t \leq T).$

Ahora si $e(t) = 0$ para todo $0 \leq t \leq T$ ya lo tendríamos. Si no, existe un intervalo $[t_1, t_2] \in [0, T]$ con

$$e(t) > 0 \qquad \text{para } t_1 \leq t < t_2, \quad e(t_2) = 0.$$

Ahora escribimos $f(t) = log\, e(t)$, $(t_1 \leq t < t_2)$. Entonces

$$\ddot{f}(t) = \frac{\ddot{e}(t)}{e(t)} - \frac{\dot{e}(t)^2}{e(t)^2} \geq 0$$

y por tanto f es convexa en el intervalo (t_1, t_2). Consecuentemente si $0 < \tau < 1$, $t_1 \leq t < t_2$, tenemos

$$f((1-\tau)t_1 + \tau t) \leq (1-\tau)f(t_1) + \tau f(t),$$

usando la definición de f:

$$e((1-\tau)t_1 + \tau t) \leq e(t_1)^{1-\tau} e(t)^{\tau}$$

y por tanto

$$0 \leq e((1-\tau)t_1 + \tau t) \leq e(t_1)^{1-\tau} e(t)^{\tau}, \qquad (0 < \tau < 1).$$

Pero como $e(t_2) = 0$ esto implica que $e(t) = 0$ para todo tiempo $t_1 \leq t < t_2$ esto lleva a una contradicción.

□

2.5. Regularidad

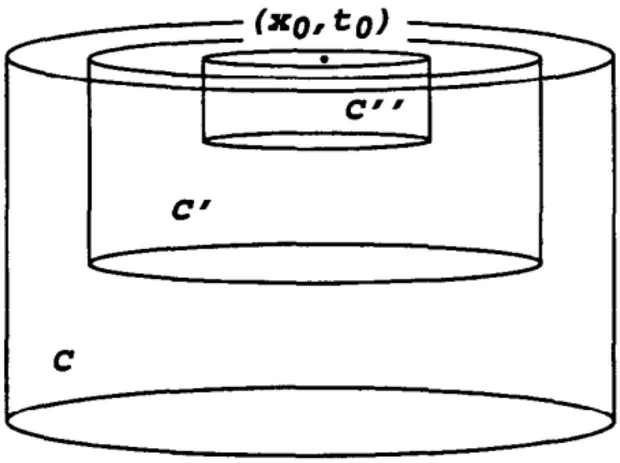
Teorema 2.10 (Suavidad)**:** Suponemos $u \in C_1^2(U_T)$ resuelve la ecuación del calor en U_T. Entonces $u \in C^\infty(U_T)$.

Demostración:

Sea

$$C(x, t; r) = \{(y, s) \mid |x - y| \leq r, \ t - r^2 \leq s \leq t\}$$

el cilindro cerrado de radio r, altura r^2 y (x, t) en el centro de la tapa superior. Fijamos $(x_0, t_0) \subset U_T$ y elegimos un $r > 0$ lo suficientemente pequeño para que $C := C(x_0, t_0; r) \subset U_T$. Definimos también los cilindros mas pequeños $C' := C\left(x_0, t_0; \frac{3}{4}r\right)$ y $C'' := C\left(x_0, t_0; \frac{1}{2}r\right)$.



Elegimos una función suave $\zeta = \zeta(x,t)$ tal que

$$\begin{cases} 0 \leq \zeta \leq 1 & \\ \zeta \equiv 1 & en\ C' \\ \zeta \equiv 0 & cerca\ de\ la\ frontera\ de\ C \end{cases}$$

Extendiendo, $\zeta \equiv 0$ en $(\mathbb{R}^n \times [0,t_0]) - C$.

Asumimos temporalmente que $u \in C^\infty(U_T)$ y nombramos

$$v(x,t) := \zeta(x,t)u(x,t), \qquad (x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq t \leq t_0).$$

Entonces

$$v_t = \zeta u_t + \zeta_t u, \quad \Delta v = \zeta \Delta u + 2\nabla\zeta \cdot \nabla u + u\Delta\zeta$$

y es fácil ver que

$$v = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\},$$

$$v_t - \Delta v = \zeta_t u - 2\nabla\zeta \cdot \nabla u - u\Delta\zeta =: \tilde{f} \quad \text{en } \mathbb{R}^n \times (0,t_0). \tag{2.5}$$

Ahora sea:

$$\tilde{v}(x,t) := \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y, t-s)\tilde{f}(y,s)dyds.$$

De acuerdo a lo visto en la **sección 1.3**

$$\begin{cases} \tilde{v}_t - \Delta\tilde{u} = \tilde{f} & en\ \mathbb{R}^n \times (0,t_0), \\ \tilde{v} = 0 & en\ \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

Ya que $|v|, |\tilde{v}| \leq A$ para alguna constante A, el **teorema 2.7** implica $v \equiv \tilde{v}$; esto es

$$v(x,t) := \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n}^0 \varphi(x-y, t-s)\tilde{f}(y,s)dyds. \tag{2.6}$$

Ahora suponemos $(x,t) \in C''$. Como $\zeta \equiv 0$ fuera del cilindro C, (2.5) y (2.6) implican que

$$u(x,t) := \iint_C \varphi(x-y,t-s)\big[(\zeta_s(y,s) - \Delta\zeta(y,s)\big)u(y,s) - \\ -2\nabla\zeta(y,s)\cdot\nabla u(y,s)]dyds.$$

Observemos en esta expresión que la parte entre [ ] desaparece en alguna región cerca de la singularidad de φ ya que (x,y) está en C'' y ζ entonces es constante. Integrando por partes el último término obtenemos:

$$u(x,t) = \iint_C [\varphi(x-y,t-s)(\zeta_s(y,s) + \Delta\zeta(y,s) + \\ +2\nabla_y\varphi(x-y,t-s)\cdot\nabla\zeta(y,s)\big]u(y,s)dyds. \tag{2.7}$$

Hemos probado esta fórmula asumiendo que $u \in C^\infty(U_T)$. Si ahora u satisface solo la hipótesis del teorema, podemos deducir (2.7) de la misma forma que lo hemos hecho en la demostración del **teorema 2.2,** usando la aproximación a la unidad η_ε y aproximando u mediante funciones suaves.

Para finalizar observemos que la fórmula (2.7) es de la forma

$$u(x,t) = \iint_C K(x,t,y,s)u(y,s)dyds, \qquad (x,t) \in C'', \tag{2.8}$$

donde $K(x,t,y,s) = 0$ para todos los puntos $(y,s) \in C'$ ya que $\zeta \equiv 1$ en C'. Mencionar también que K es suave en $C - C'$. Usando (2.8) podemos ver que $u \in C^\infty(C'')$.

□

3. Aplicaciones de la ecuación del calor

Para terminar el trabajo, tomando como referencia el artículo de Yoichi Miyazaki ([4]), veremos dos enunciados relacionados con el teorema de Liouville y los demostraremos usando la ecuación del calor y las propiedades que hemos visto hasta ahora. En primer lugar demostraremos el propio teorema de Liouville para funciones armónicas, que afirma que si una función armónica está acotada, entonces es constante En segundo lugar demostraremos una de las extensiones del teorema de Liouville que afirma que si tenemos una función armónica cuyo crecimiento está acotado por una potencia de la distancia al origen, entonces la función es un polinomio. Para ambas demostraciones lo que haremos es ver que si una solución u es armónica entonces cumple que $\Delta u(x) = 0$ en el sentido de las distribuciones, a partir de esto veremos que $v = \varphi * u$ es constante respecto al tiempo, siendo φ solución fundamental, y usaremos esto último para acotar las derivadas de u.

3.1. Teorema de Liouville:

Teorema 3.1 (Teorema de Liouville)**:** Sea $u(x)$ una función armónica en $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, es decir, $u(x) \in C^2(\mathbb{R}^{\mathrm{n}})$ y $\Delta u(x) = 0$. Se cumple que si $u(x)$ está acotada entonces es constante.

Demostración:

Para esta demostración veremos primero que el hecho de que $u(x)$ sea armónica implica que

$$\int_{\mathbb{R}^{\mathrm{n}}} \Delta f(x) u(x)\, dx = 0 \qquad \text{para todo } f \in C_C^{\infty}(\mathbb{R}^{\mathrm{n}}). \tag{3.1}$$

Para ello consideremos la integral para x_1 e integrando por partes dos veces se obtiene que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2} f(x) u(x) dx_1 = \left[u(x) f_{x_1}(x)\right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} f_{x_1}(x) u_{x_1}(x) dx_1 =$$

$$= \left[u(x)f_{x_1}(x) - u_{x_1}(x)f(x)\right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{\mathbb{R}} f(x)\frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2}u(x)dx_1.$$

Por tanto

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Delta f(x)u(x)dx = \sum_{i=1}^{n}\left[u(x)f_{x_i}(x) - u_{x_i}(x)f(x)\right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\Delta u(x)dx.$$

Ahora por hipótesis

$$f(x)\Delta u(x) = 0,$$

$$\left[u(x)f_{x_i}(x) - u_{x_i}(x)f(x)\right]_{-\infty}^{\infty} = 0, \qquad i = 1,2,\dots,n.$$

Juntando todo tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Delta f(x)u(x)\,dx = 0 \qquad \text{para todo } f \in C_C^{\infty}(\mathbb{R}^n).$$

Ahora definimos:

$$K(x) = \frac{1}{(4\pi)^{n/2}}e^{-\frac{|x|^2}{4}}, \qquad \varphi(x,t) = \frac{1}{t^{n/2}}\,K\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$$

para $t > 0$. Entonces $\varphi(x,t)$ es precisamente la solución fundamental que definimos en la **sección 1.1** y por tanto satisface la ecuación del calor $\varphi_t(x,t) - \Delta\varphi(x,t) = 0$ y $\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x,t)\,dx = 1$. Definimos

$$v(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x-y,t)u(y)dy,$$

que, como hemos visto en la **sección 1.2,** también es solución de la ecuación del calor y, por tanto, pertenece a $C^{\infty}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$ (ya que las soluciones de la ecuación del calor son suaves como hemos visto en el **teorema 2.10**). Notemos que (3.1) también funciona para φ ya que $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ y $C_C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ es denso en $S(\mathbb{R}^n)$. Aplicando las propiedades de $\varphi(x,t)$ y las premisas sobre u, tenemos que

$$v_t(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n}\varphi_t(x-y,t)u(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n}\Delta_x\varphi(x-y,t)u(y)dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_y \varphi(x-y,t)u(y)dy = 0.$$

Por tanto $v(x,t)$ es independiente de t. Como $v(x,t)$ converge a $u(x)$ cuando $t \to 0^+$, tenemos que $v(x,t) = u(x)$. Esto implica que $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Derivando en x_j obtenemos:

$$u_{x_j}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_{x_j}(x-y,t)u(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{1}{t^{n/2}} K_{x_j}\left(\frac{x-y}{\sqrt{t}}\right) u(y)dy =$$

$$= -\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\sqrt{t}} K_{x_j}(z) u\left(-z\sqrt{t} + x\right) dz$$

y por tanto

$$\left|u_{x_j}(x)\right| \leq \frac{1}{\sqrt{t}} \left\|K_{x_j}\right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

Haciendo $t \to \infty$ obtenemos $u_{x_j}(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $1 \leq j \leq n$. Por tanto $u(x)$ es constante.

□

Comentario 3.2: Para que el teorema funcione basta que se cumpla que $u(x)$ sea continua en $\mathbb{R}^n$ y que $\Delta u(x) = 0$ en el sentido de las distribuciones, es decir:

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x)\Delta f(x)\, dx = 0 \qquad \text{para todo } f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{3.2}$$

En este caso, si u es acotada, entonces es constante.

Que u cumpla que $\Delta u(x) = 0$ en el sentido de las distribuciones es, en general, una condición más débil que el ser armónica (de hecho hemos demostrado que las hipótesis del **teorema 3.1** implican las del **Comentario 3.2**). No obstante, en este caso se puede demostrar que ambas condiciones son equivalentes. La demostración viene directamente del **lema de Weyl** que afirma que si u cumple (3.2) entonces $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y satisface $\Delta u = 0$ puntualmente en $\mathbb{R}^n$.

3.2. Extensión del teorema de Liouville

Una de las extensiones del **Teorema de Liouville** se ocupa de estudiar el comportamiento de una función armónica cuyo crecimiento está por una potencia de la distancia al origen.

Teorema 3.3: Sea $u(x)$ una función que satisface que $u(x) \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $\Delta u(x) = 0$ y la inecuación

$$|u(x)| \leq c(1+|x|)^s \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n$$

para algunas constantes $c > 0$, $s \geq 0$. Entonces $u(x)$ es un polinomio de grado al menos $[s]$ donde $[s]$ es el entero no negativo que cumple que $[s] \leq s < [s] + 1$.

Demostración:

Podemos definir $K(x)$, $\varphi(x,t)$ y $v(x,t)$ como en el **teorema 3.1** y, repitiendo la misma demostración, llegamos a que $v(x,t)$ es constante respecto a t y tenemos que $v(x,t) = u(x)$ y $u(x)$ es C^∞. Derivando ahora en x varias veces:

$$\partial^\alpha u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{t^{\alpha/2}} \varphi_\alpha(x-y) u(y) dy,$$

donde $\varphi_\alpha(x) = \frac{1}{t^{n/2}} \partial^\alpha K\left(\frac{x}{t^{1/2}}\right)$.

Usando las desigualdades

$$1 + |y| \leq (1+|x|)(1+|x-y|)$$

$$|u(x)| \leq c(1+|x|)^s \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n$$

para algunas constantes $c > 0$, $s \geq 0$, tenemos, para $t \geq 1$,

$$|\partial^\alpha u(x)| \leq \mathrm{c} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{t^{\alpha/2}} |\varphi_\alpha(x-y)| (1+|y|)^s dy \leq$$

$$\leq \mathrm{c}(1+|x|)^s \int_{\mathbb{R}^n} t^{(s-\alpha)/2} \left(1 + \frac{|x-y|}{t^{1/2}}\right)^s |\varphi_\alpha(x-y)| dy \leq$$

$$\leq c(1+|x|)^s t^{(s-\alpha)/2} \int_{\mathbb{R}^n} (1+|z|)^s |\partial^\alpha K(z)| dz,$$

donde la última integral es finita. Haciendo $t \to \infty$ obtenemos que $|\partial^\alpha u(x)| = 0$ para $\alpha \geq [s] + 1$. Por tanto $u(x)$ es un polinomio de grado como mucho $[s]$.

□

Comentario 3.4: El **teorema 3.3** no solo es válido para $\Delta u(x) = 0$, también funciona para un polinomio homogéneo $P(\xi)$ de grado m que satisfaga que $P(\xi) \neq 0$ para todo $\xi \neq 0$ y u función continua en $\mathbb{R}^n$ que cumpla la inecuación anterior y que

$$P(\partial_x)u = 0$$

en el sentido de las distribuciones.

En el caso del teorema, $P(\xi) = \sum_{i=1}^n \xi_i^2$ y $P(\partial_x) = \Delta$. Otro ejemplo, con $m = 3$, sería $P(\xi) = \sum_{i=1}^n \xi_i^3$ y $P(\partial_x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^3}{\partial x_i^3}$.

Apéndice

Definición A.1: Definimos $\eta \in \mathrm{C}^{\infty}(\mathbb{R}^{\mathrm{n}})$ como:

$$\eta(x) = \begin{cases} ce^{\frac{1}{|x|^2-1}} & si\ |x| < 1 \\ 0 & si\ |x| \geq 1 \end{cases}$$

donde la constante $c > 0$ tiene que cumplir que $\int_{\mathbb{R}^n} \eta\, dx = 1$.

Definimos también para cada $\varepsilon > 0$:

$$\eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

La función η se conoce como aproximación a la unidad y las funciones η_ε son C^{∞} y cumplen que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon\, dx = 1, \qquad sop(\eta_\varepsilon) \subset B(0,\varepsilon).$$

Bibliografía

[1] L.C. Evans - Partial Differential Equations, second ed., AMS, Providence, 2010.

[2] Gerald B. Folland - Introducción a las ecuaciones diferenciales parciales, segunda edición (1995).

[3] Ireneo Peral Alonso - Primer Curso de Ecuaciones en Derivadas Parciales.

[4] Yoichi Miyazaki - Expositiones Mathematicae Volume 33, Issue 1, 2015, Pages 101-104.