Universitat de Barcelona

Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

Equivalència Espectral de Matrius Polinomials i Teorema de la Suma d'Índexs

Autor: Álvaro Luque i Merino

Director:	**Dra. Maria Eulàlia Montoro Lopez**
Realitzat a:	**Departament de Matemàtiques i Informàtica**

Barcelona, 17 de gener de 2024

Abstract

Spectral equivalence is an equivalence relation between polynomial matrices that allows us to relate matrices of different degrees and sizes with the same spectral structure. This equivalence relation enables us to define strong linearizations and ℓ-ifications, transformations on which the companion forms we will see are based. These companion forms will help us prove the Index Sum Theorem, which establishes a fundamental relationship among the rank, degree, and the total size of the spectral and singular structure of any polynomial matrix.

Resum

L'equivalència espectral és una relació d'equivalència entre matrius polinomials que ens permet relacionar matrius de diferents graus i tamanys amb la mateixa estructura espectral. Aquesta relació d'equivalència ens permet definir les linealizacions i ℓ-ificacions fortes, transformacions en les quals es basen les formes companyes que veurem. Aquestes formes companyes ens ajudaran a demostrar el Teorema de la Suma d'Índexs, que ens defineix una relació fonamental entre el rang, grau, i el tamany total de l'estructura espectral i singular d'una matriu polinomial qualsevol.

2020 Mathematics Subject Classification. 65F15, 15A54, 15A18, 15A21, 15A22

Agraïments

En primer lloc, vull agrair tota l'ajuda i el suport rebut durant aquest semestre per part de la meva tutora, la professora Eulàlia Montoro.

Als meus amics, a la Malena i a tots els que m'heu acompanyat durants aquests anys, gràcies. Sense vosaltres no estaria aquí, ni seria qui soc.

Per últim, vull donar les gràcies als meus pares pel suport incondicional que m'han ofert sempre.

Índex

Introducció

La branca de les matemàtiques encarregada d'estudiar les matrius, entre d'altres matèries, és l'àlgebra lineal. Situem l'origen d'aquesta branca a principis del segle XVII, però no és fins a mitjans del segle XX que es va començar a investigar les propietats i aplicacions de les matrius polinomials. L'estudi de les matrius polinomials o λ-matrius és, per tant, molt recent.

Un dels primers matemàtics que va estudiar aquest tipus de matrius va ser Peter Lancaster, motivat per diversos problemes que apareixien a la teoria de vibració, teoria de sistemes, anàlisi numèric o processament de senyals.

Un dels elements clau en l'estudi de les matrius polinomials és conèixer la distribució dels valors propis, és a dir, valors que disminueixen el rang d'una matriu. Aquest fet ens permet manipular i classificar les matrius amb més facilitat. Per aquest motiu és tant important estudiar l'estructura espectral de les matrius i les transformacions que la preserven.

Un dels objectius d'aquest treball és estudiar diferents relacions d'equivalència entre matrius polinomials, fixant-nos en els invariants que es conserven a cada una d'elles.

Trobarem que una de les relacions d'equivalència és suficientment forta en quant a la conservació d'invariants i flexible per a poder relacionar matrius de diferent tamany i grau. Tot i així no es preserven els índexs minimals (graus d'una base minimal del nucli).

Per tant, seguint el mateix propòsit de trobar una relació fonamental per conservar aquests invariants arribarem al Teorema de la Suma d'Índexs:

Teorema. *Sigui* $P(\lambda) \in \mathbb{F}^{m\times n}[\lambda]$*, aleshores*

$$\delta_{fin}(P(\lambda)) + \delta_\infty(P(\lambda)) + \mu(P(\lambda)) = grade(P(\lambda)) \cdot rang(P(\lambda)).$$

La primera versió d'aquest teorema va sorgir l'any 1979, a la tesi doctoral de per Paul Van Dooren, enfocant el resultat en matrius racionals. L'any 1991, C. Praagman va descobrir independentment del treball de Van Dooren aquest mateix resultat per a matrius polinomials.

Part d'aquest estudi és conegut per a matrius quadrades, però gràcies als autors de ([3]) s'ha pogut generalitzar al cas de matrius rectangulars.

Estructura de la Memòria

Al Capítol 1 comencem a introduir conceptes amb els quals desenvoluparem el cos del treball.

Als Capítols 2 i 3 ens centrem en les relacions d'equivalència entre matrius polinomials, estudiem les seves propietats i les comparem per acabar triant la que ens és més convenient, que és l'equivalència espectral.

Al Capítol 4 passem a treballar amb la relació esmentada i introduïm les linealitzacions companyes de Frobenius, que són representants per aquestes classes d'equivalència, i les generalitzem.

Al Capítol 5 enunciem i demostrem diferents versions del Teorema de la Suma d'Índexs.

Abans d'introduir les diverses relacions d'equivalència, al Capítol de preliminars presentem la forma de Smith, a partir de la qual definirem tots els conceptes bàsics per a l'estudi de l'estructura espectral finita de les matrius polinomials. També estudiarem el cas no regular, per això haurem de definir l'estructura singular i els índexs minimals.

A continuació fem un primer estudi de les relacions d'equivalència, fixant-nos individualment en els invariants que es preserven amb cada una d'elles. També apareixeran nous conceptes, com la forma canònica de Kronecker o les linealitzacions i ℓ-ificacions.

Seguidament compararem alguna d'aquestes equivalències entre elles, i l'efecte que tenen en l'estructura infinita i singular de Jordan. Acabarem el capítol 3 escollint la relació d'equivalència més adient, tenint en compte la flexibilitat permesa a l'hora de transformar les matrius a més dels invariants que es conserven o que són fàcils de recuperar.

Treballarem amb les formes companyes de grau ℓ, basant-nos en les linealitzacions companyes de Frobenius, que són linealitzacions fortes conegudes per a matrius regulars [7, 8] però veurem que també ho són per a matrius singulars.

Finalment introduïrem el Teorema de la Suma d'Índexs amb versions que restringeixen el resultat a certs tipus de matrius, per acabar generalitzant el Teorema per a qualsevol matriu polinomial.

Notació

- Denotem $\mathbb{F}$ un cos qualsevol i $\mathbb{F}^{m\times n}$ l'àlgebra de les matrius $m \times n$ amb coeficients a $\mathbb{F}$.
- Denotem 0_n la matriu nul·la a $\mathbb{F}^{n\times n}$.
- Escrivim $\mathbb{F}[\lambda]$ com l'anell de polinomis amb coeficients a $\mathbb{F}$ i $\mathbb{F}(\lambda)$ com el cos de funcions racionals amb coeficients a $\mathbb{F}$.
- Un polinomi $P(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]$ és **idèntic a zero** ($P(\lambda) \equiv 0$) si tots els seus coeficients són idèntics a zero.
- Una matriu polinomial

  $$P(\lambda) = \sum_{i=0}^{k} \lambda^i A_i \ , \qquad A_i \in \mathbb{F}^{m\times n}$$

  és **regular** si $m = n$ i $detP(\lambda) \not\equiv 0$. Altrament, direm que és **singular**.
- La transposada d'una matriu $P(\lambda) \in \mathbb{F}^{m\times n}[\lambda]$ és la matriu $P(\lambda)^T \in \mathbb{F}^{n\times m}[\lambda]$ que té les files de $P(\lambda)$ com a columnes i viceversa.
- El **rang** de $P(\lambda) \in \mathbb{F}^{m\times n}[\lambda]$ és el tamany del menor de $P(\lambda)$ no idèntic a zero més gran. Equivalentment, és el rang de la matriu vista com una matriu simple amb coeficients de $\mathbb{F}(\lambda)$.
- El **grau** d'una matriu $P(\lambda) \in \mathbb{F}^{m\times n}[\lambda]$, $deg(P)$, és el nombre d més gran tal que la matriu coeficient de λ^d a $P(\lambda)$ és diferent de zero.
- El **grau estès** de $P(\lambda) \in \mathbb{F}^{m\times n}[\lambda]$, $grade(P)$, és el "grau"més gran des d'on mirem una matriu. Notem que $grade(P) \geq deg(P)$.

  Exemple 0.0.1. Sigui $P(\lambda) = A = 0_n\lambda + A \in \mathbb{F}^{m\times n}[\lambda]$, el grau de la matriu $P(\lambda)$ és 0, però el grau estès s'ha d'especificar. Si mirem la matriu $P(\lambda) = A$ el grau estès correspon amb el grau, però si mirem la matriu com $P(\lambda) = 0_n\lambda + A$, el grau segueix sent 0 però el grau estès serà 1.

  Així que sempre haurem de triar el grau extès de la matriu. Sinó l'especifiquem sobreentendrem que pot ser qualsevol complint $grade(P) \geq deg(P)$.
- Anomenarem **feix** a les matrius polinomials amb grau estès 1: $A\lambda + B$.
- $P(\lambda) \in \mathbb{F}^{n\times n}[\lambda]$ és una **matriu unimodular** si $det(P(\lambda)) = k \in \mathbb{F}\backslash\{0\}$.

- Sigui $P(\lambda) \in \mathbb{F}^{m\times n}[\lambda]$, $P(\lambda) \not\equiv 0$ tal que $deg(P) = d \geq 0$. Per $j \geq d$ diem que el ***j*-revers** de P és la matriu $rev_j P$ donada per

$$rev_j P(\lambda) := \lambda^j P(\frac{1}{\lambda}).$$

Quan $j = d$ diem que el j-revers de P és el revers de P i el denotem com $rev\ P(\lambda)$.

Exemple 0.0.2. Tenim les matrius següents i els seus j-revers:

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} (\lambda-1)^2 & \lambda \\ \lambda-2 & 1 \end{bmatrix}, \quad rev\ A(\lambda) = \lambda^2 A(\frac{1}{\lambda}) = \lambda^2 \begin{bmatrix} (\frac{1}{\lambda}-1)^2 & \frac{1}{\lambda} \\ \frac{1}{\lambda}-2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\lambda-1)^2 & \lambda \\ \lambda-2\lambda^2 & \lambda^2 \end{bmatrix}$$

$$B(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & -2\lambda^2 \\ 0 & 1 & \lambda^4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad rev_5 B(\lambda) = \lambda^5 B(\frac{1}{\lambda}) = \lambda^5 \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\lambda} & \frac{-2}{\lambda^2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{\lambda^4} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^5 & \lambda^4 & -2\lambda^3 \\ 0 & \lambda^5 & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda^5 \end{bmatrix}.$$

Capítol 1

Preliminars

Abans de començar amb la matèria del treball farem una petita presentació d'alguns conceptes essencials per al desenvolupament d'aquesta.

1.1 Forma canònica de Smith

La forma canònica d'una matriu $P(\lambda) \in \mathbb{F}^{m\times n}[\lambda]$ sota la transformació $E(\lambda)P(\lambda)F(\lambda)$, amb $E(\lambda) \in \mathbb{F}^{m\times m}[\lambda]$ i $F(\lambda) \in \mathbb{F}^{n\times n}[\lambda]$ matrius unimodulars, s'anomena forma canònica de Smith.

Utilitzarem aquest concepte per definir l'estructura espectral finita d'una matriu polinomial.

Teorema 1.1.1. *([5]) (Forma de Smith) Sigui $P(\lambda) \in \mathbb{F}^{m\times n}[\lambda]$. Aleshores $\exists r \in \mathbb{N}$ i existeixen $E(\lambda) \in \mathbb{F}^{m\times m}[\lambda]$ i $F(\lambda) \in \mathbb{F}^{n\times n}[\lambda]$ matrius unimodulars tal que*

$$E(\lambda)P(\lambda)F(\lambda) = diag(d_1(\lambda), \ldots, d_{min\{m,n\}}(\lambda)) := D(\lambda),$$

on $d_i(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]$, per $i = 1, \ldots, min\{m,n\}$. A més, $d_1(\lambda), \ldots, d_r(\lambda)$ són mònics, $d_{r+1}(\lambda), \ldots, d_{min\{m,n\}}(\lambda) \equiv 0$ i $d_1(\lambda), \ldots, d_r(\lambda)$ formen una cadena de divisibilitat tal que $d_j(\lambda)$ és divisor de $d_{j+1}(\lambda)$, per $j = 1, \ldots, r-1$.
$D(\lambda) \in \mathbb{F}^{m\times n}[\lambda]$ és única i $r = rang(P)$.

Els elements $d_j(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]$ diferents de zero s'anomenen **polinomis invariants**.

Sigui $c_i(\lambda)$ el màxim comú divisor de tots els menors $i \times i$, per $i = 1, \ldots, min\{m,n\}$, aleshores

$$d_1(\lambda) = c_1(\lambda) \quad \text{i} \quad d_i(\lambda) = \frac{c_i(\lambda)}{c_{i-1}(\lambda)} \text{ per } i = 1, \ldots, min\{m,n\}. \tag{1.1.1}$$

Exemple 1.1.2. Siguin

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \lambda \\ \lambda & \lambda & 1 \\ \lambda^2-\lambda & \lambda^2-1 & \lambda^2-\lambda \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda^2 & 0 \\ \lambda^3 & \lambda^5 & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda \end{bmatrix}$$

Els polinomis invariants de $A(\lambda)$ són: $d_1(\lambda) = 1,\ d_2(\lambda) = 1,\ d_3(\lambda) = 0.$

Els polinomis invariants de $B(\lambda)$ són: $d_1(\lambda) = \lambda,\ d_2(\lambda) = \lambda,\ d_3(\lambda) = \lambda^5 - \lambda^4.$

1.2 Estructura espectral d'una matriu polinomial

L'estructura espectral d'una matriu polinomials generalitza el concepte d'estructura espectral d'una matriu.

1.2.1 Estructura espectral finita

Definició 1.2.1. *Sigui $P(\lambda) \in \mathbb{F}^{m\times n}[\lambda]$, $P(\lambda) \not\equiv 0$ tal que $rang(P(\lambda)) = r$. Per algún $\lambda_0 \in \overline{\mathbb{F}}$, els polinomis invariants $d_i(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]$ de $P(\lambda)$, $1 \le i \le r$ estan factoritzats com*

$$d_i(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^{\alpha_i} p_i(\lambda), \quad \text{on } \; p_i(\lambda_0) \neq 0.$$

La seqüència d'exponents satisfà

$$0 \le \alpha_1 \le \alpha_2 \le \ldots \le \alpha_r$$

*per la propietat de cadena de divisibilitat de la forma de Smith, i es diu **seqüència de multiplicitats parcials** de $P(\lambda)$ a $\lambda_0 \in \overline{\mathbb{F}}$.*

Definició 1.2.2. *Sigui $P(\lambda) \in \mathbb{F}^{m\times n}[\lambda]$, amb $rang(P(\lambda)) = r$ aleshores diem que λ_0 és un **valor propi** de $P(\lambda)$ si $rang(P(\lambda_0)) < r$.*

Exemple 1.2.3. Recuperant la matriu $B(\lambda)$ de l'Exemple 1.1.2, on

$$d_1(\lambda) = \lambda, \; d_2(\lambda) = \lambda, \; d_3(\lambda) = \lambda^5 - \lambda^4,$$

Aleshores,

$$\begin{array}{llll}
\underline{\lambda_0 = 0\,|} & & & \\
d_1(\lambda) = (\lambda-0)^{\alpha_1} p_1(\lambda) = \lambda & \text{on} & p_1(\lambda) = 1 & \text{i } \alpha_1 = 1 \\
d_2(\lambda) = (\lambda-0)^{\alpha_2} p_2(\lambda) = \lambda & \text{on} & p_2(\lambda) = 1 & \text{i } \alpha_2 = 1 \\
d_3(\lambda) = (\lambda-0)^{\alpha_3} p_3(\lambda) = \lambda^5 - \lambda^4 & \text{on} & p_3(\lambda) = \lambda - 1 & \text{i } \alpha_3 = 4 \\
\underline{\lambda_0 = 1\,|} & & & \\
d_1(\lambda) = (\lambda-1)^{\alpha_1} p_1(\lambda) = \lambda & \text{on} & p_1(\lambda) = \lambda & \text{i } \alpha_1 = 0 \\
d_2(\lambda) = (\lambda-1)^{\alpha_2} p_2(\lambda) = \lambda & \text{on} & p_2(\lambda) = \lambda & \text{i } \alpha_2 = 0 \\
d_3(\lambda) = (\lambda-1)^{\alpha_3} p_3(\lambda) = \lambda^5 - \lambda^4 & \text{on} & p_3(\lambda) = \lambda^4 & \text{i } \alpha_3 = 1
\end{array}$$

Per tant, la seqüència de multiplicitats parcials del valor propi $\lambda_0 = 0$ és $(1, 1, 4)$ i la del valor propi $\lambda_0 = 1$ és $(0, 0, 1)$, àmbdues satisfan

$$0 \le 1 \le 1 \le 4 \quad \text{i} \quad 0 \le 0 \le 0 \le 1$$

Definició 1.2.4. *$\lambda_0 \in \overline{\mathbb{F}}$ és un **valor propi finit** de $P(\lambda) \in \mathbb{F}^{m\times n}[\lambda]$ si la seva seqüència de multiplicitats parcials no és la seqüència de zeros.*
*Els **divisors elementals** de $\lambda_0 \in \overline{\mathbb{F}}$ són el conjunt de factors $(\lambda - \lambda_0)^{\alpha_i}$ $(\alpha_i \neq 0)$ comptats amb repeticions.*
*La **multiplicitat algebraica** de $\lambda_0 \in \overline{\mathbb{F}}$ és la suma de la seva seqüència de multiplicitats parcials $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_r$.*
*La **multiplicitat geomètrica** és el nombre de termes diferents de zero de la seqüència $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$.*

Exemple 1.2.5. Seguint amb la matriu i els resultats de l'Exemple 1.2.3, per al valor propi $\lambda_0 = 0$, els divisors elementals són

$$\lambda, \ \lambda \text{ i } \lambda^4,$$

la multiplicitat algebraica és

$$1 + 1 + 4 = 6$$

i la multiplicitat geomètrica és 3.

Per al valor propi $\lambda_0 = 1$, l'únic divisor elemental és

$$\lambda - 1,$$

la multiplicitat algebraica és

$$0 + 0 + 1 = 1$$

i la multiplicitat geomètrica és 1.

Definició 1.2.6. *Sigui $P(\lambda) \in \mathbb{F}^{m \times n}[\lambda]$ amb $m > n$, $rang(P(\lambda)) = r$ i polinomis invariants $d_1(\lambda), d_2(\lambda), \ldots, d_r(\lambda)$ com al Teorema 1.1.1.*
Aleshores $\delta_{fin}(P(\lambda))$ és la suma dels graus dels polinomis invariants, és a dir,

$$\delta_{fin}(P(\lambda)) := \sum_{i=1}^{r} deg(d_i(\lambda)).$$

Exemple 1.2.7. Tornant a la matriu $B(\lambda)$ de l'Exemple 1.1.2 on

$$\delta_{fin}(B(\lambda)) = \sum_{i=1}^{3} deg(d_i(\lambda)) = deg(\lambda) + deg(\lambda) + deg(\lambda^5 - \lambda^4) = 1 + 1 + 5 = 7.$$

1.2.2 Estructura espectral infinita

Quan $P(\lambda)$ no és regular necessitem definir l'estructura espectral infinita.

Definició 1.2.8. *Sigui $P(\lambda) \in \mathbb{F}^{m \times n}[\lambda]$, $P(\lambda) \not\equiv 0$ tal que $rang(P(\lambda)) = r$ i $deg(P(\lambda)) = d$, diem que $\lambda_0 = \infty$ és un valor propi de $P(\lambda)$ si i només si 0 és un valor propi a $rev_d P(\lambda)$.*
La seqüència de multiplicitats parcials de $P(\lambda)$ a $\lambda_0 = \infty$ està definida com la seqüència del valor propi 0 a $rev_d P(\lambda)$ de $\lambda_0 = \infty$.
Si la seqüència és $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$, per cada $\alpha_i \neq 0$ diem que hi ha un divisor elemental de grau α_i per al valor propi $\lambda_0 = \infty$. Als α_i corresponents a $\lambda_0 = 0$ els anomenem ***índexs estructurals*** *de $P(\lambda)$ a ∞.*

Exemple 1.2.9. Seguint amb la matriu $B(\lambda)$ de l'Exemple 1.1.2, calculem

$$rev_5 B(\lambda) = \lambda^5 B(\frac{1}{\lambda}) = \begin{bmatrix} \lambda^4 & \lambda^3 & 0 \\ \lambda^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda^4 \end{bmatrix}.$$

Calculem els polinomis invariants de $rev_5 B(\lambda)$:

$$d_1(\lambda) = 1, \quad d_2(\lambda) = \lambda^4 \quad \text{i} \quad d_3(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^5,$$

per tant, per al valor propi $\lambda_0 = 0$ tenim

$$\begin{array}{llll} d_1(\lambda) = (\lambda - 0)^{\alpha_1} p_1(\lambda) = \lambda & \text{on} \quad p_1(\lambda) = 1 & \text{i} & \alpha_1 = 0 \\ d_2(\lambda) = (\lambda - 0)^{\alpha_2} p_2(\lambda) = \lambda & \text{on} \quad p_2(\lambda) = 1 & \text{i} & \alpha_2 = 4 \\ d_3(\lambda) = (\lambda - 0)^{\alpha_3} p_3(\lambda) = \lambda^5 - \lambda^4 & \text{on} \quad p_3(\lambda) = 1 - \lambda & \text{i} & \alpha_3 = 4 \end{array}$$

Per tant, els índexs estructurals de $P(\lambda)$ a ∞ són $(0, 4, 4)$. Els divisors elementals infinits són $\{\lambda^4, \lambda^4\}$.

Definició 1.2.10. *Sigui $P(\lambda) \in \mathbb{F}^{m\times n}[\lambda]$, $P(\lambda) \not\equiv 0$, tal que $deg(P) = d$ amb seqüència de multiplicitats parcials $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ a ∞. Aleshores*

$$\delta_\infty(P(\lambda)) := \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_r$$

és la multiplicitat algebraica del valor propi a ∞.

Exemple 1.2.11. Sigui $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ invertible, la matriu constant $P(\lambda) = A$ té $deg(P(\lambda)) = grade(P(\lambda)) = 0$ i no té cap valor propi finit ja que té la forma de Smith trivial $D(\lambda) = I_n$, i tampoc té cap valor propi infinit ja que el seu revers $rev_0 P(\lambda) = A$ també té la forma de Smith trivial.

Però si mirem la matriu com un feix, $P(\lambda) = 0_n\lambda + A$ llavors $grade(P(\lambda)) = 1$ i el seu revers serà $rev_1 P(\lambda) = \lambda A + 0_n$ amb forma de Smith λI_n. Per tant el $rev_1 P(\lambda)$ tindrà valor propi 0 i seqüència de multiplicitats parcials $(1, 1, \ldots, 1)$ amb multiplicitat algebraica n.

Per tant $P(\lambda)$ vista com un feix no té valors propis finits però té el valor propi ∞ amb $\delta_\infty(P(\lambda)) = n$.
En general, si

$$P(\lambda) = A = \lambda^g 0_n + \ldots + \lambda 0_n + A$$

on $g \geq 1$ és el grau estès, aleshores $P(\lambda)$ tindrà el valor propi ∞ amb seqüència de multiplicitats parcials $(g, g, \ldots, g)$ i $\delta_\infty(P(\lambda)) = gn$.

Al lema següent veiem com varia la seqüència de multiplicitats parcials d'un valor propi en funció del valor del grau estès.

Lema 1.2.12. *([3]) Sigui $P(\lambda) \in \mathbb{F}^{m\times n}[\lambda]$ amb $rang(P(\lambda)) = r$ i $grade(P(\lambda)) = deg(P(\lambda)) = d$ amb seqüència de multiplicitats parcials a $\lambda_0 = \infty$*

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$$

i $\delta_\infty(P(\lambda)) = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_r$.
Aleshores si $grade(P(\lambda)) = g > d$ té com a seqüència de multiplicitats parcials

$$(\alpha_1 + (g - d), \alpha_2 + (g - d), \ldots, \alpha_r + (g - d))$$

a $\lambda_0 = \infty$ i $\delta_\infty = (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_r) + r(g - d)$.

Demostració. És immediat donat que

$$rev_g(P(\lambda)) = \lambda^{g-d} rev_d(P(\lambda)).$$

□

Definició 1.2.13. *Sigui* $P(\lambda) \in \mathbb{F}^{m\times n}[\lambda]$*, el conjunt de valors propis de* $P(\lambda)$*, tant finits com infinits, és l'****espectre*** *de* $P(\lambda)$*.*
El conjunt de divisors elementals de $P(\lambda)$*, tant finits com infinits, amb repeticions incloses, formen l'* ***estructura espectral*** *de* $P(\lambda)$*.*

Als índexs estructurals dels valors propis finits i infinits de $P(\lambda)$ *també ens referim, en cada cas, com l'estructura finita de Jordan o l'****estructura infinita de Jordan****.*

Exemple 1.2.14. Hem vist la part finita de l'espectre i de l'estructura espectral de la matriu $B(\lambda)$ a l'Exemple 1.2.3 i la part infinita a l'Exemple 1.2.9, per tant si ho ajuntem, ens queda que l'espectre de $B(\lambda)$ són els valors propis

$$\{0, 1, \infty\}$$

i l'estructura espectral són els divisors elementals

$$\{\lambda, \lambda, \lambda - 1, \lambda^4, \lambda^4, \lambda^4\}.$$

1.3 Índexs minimals

En el cas de matrius polinomials singulars podem parlar de nuclis, i en particular, dels graus d'una base minimal del nucli.

Introduïm un seguit de conceptes per poder definir què són els índexs minimals i l'estructura singular d'una matriu.

Definició 1.3.1. $P(\lambda) \in \mathbb{F}^{m\times n}[\lambda]$ *és singular si algun dels subespais*

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_r(P(\lambda)) &:= \{x(\lambda) \in \mathbb{F}^{n\times 1}(\lambda) : P(\lambda)x(\lambda) \equiv 0\}, \\ \mathcal{N}_\ell(P(\lambda)) &:= \{y^T(\lambda) \in \mathbb{F}^{1\times m}(\lambda) : y^T(\lambda)P(\lambda) \equiv 0^T\} \end{aligned}$$

és no trivial.
Ens referirem a aquests subespais com ***nucli per la dreta*** *o* ***esquerra*** *de* $P(\lambda)$ *respectivament.*

En particular, si $P(\lambda) \in \mathbb{F}^{m\times n}[\lambda]$ *amb* $m = n$*, és singular si* $det(P(\lambda)) \equiv 0$*, en canvi si* $m \neq n$ *aleshores sempre és singular.*

Definició 1.3.2. *L'****ordre*** *d'una base és la suma dels graus dels elements de la base.*

Definició 1.3.3. *Sigui* $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{F}(\lambda)^n$*, una* ***base minimal*** *de* $\mathcal{V}$ *és qualsevol base polinomial de* $\mathcal{V}$ *amb l'ordre mínim de totes les possibles bases de polinomis de* $\mathcal{V}$*.*

Definició 1.3.4. *Sigui* $P(\lambda) \in \mathbb{F}^{m\times n}[\lambda]$ *singular,* $\mathcal{N}_\ell(P(\lambda)) = \{y_1^T(\lambda), y_2^T(\lambda), \ldots, y_q^T(\lambda)\}$ *i* $\mathcal{N}_r(P(\lambda)) = \{x_1(\lambda), x_2(\lambda), \ldots, x_p(\lambda)\}$ *les bases minimals dels nuclis per l'esquerra i per la dreta respectivament, tal que*

$$\begin{aligned} 0 \leq deg(y_1(\lambda)) \leq deg(y_2(\lambda)) \leq \ldots \leq deg(y_q(\lambda)) \quad i \\ 0 \leq deg(x_1(\lambda)) \leq deg(x_2(\lambda)) \leq \ldots \leq deg(x_p(\lambda)) \end{aligned}$$

Aleshores $\eta_i = deg(y_i(\lambda))$ *per* $i = 1, 2, \ldots, q$ *i* $\varepsilon_j = deg(x_j(\lambda))$ *per* $j = 1, 2, \ldots, p$*, són els* ***índexs minimals*** *per l'esquerra i per la dreta de* $P(\lambda)$ *respectivament.*

Observació 1.3.5. *Per a qualsevol base minimal els índexs sempre seran els mateixos, ja que l'ordre és el mateix per a tota base minimal. Aquest resultat el podem trobar demostrat a [4].*

Definició 1.3.6. *Sigui $P(\lambda) \in \mathbb{F}^{m\times n}[\lambda]$ singular, amb índexs minimals*

$$\eta_1 \leq \ldots \leq \eta_q \text{ i } \varepsilon_1 \leq \ldots \leq \varepsilon_p,$$

aleshores

$$\mu(P(\lambda)) := \sum_{i=1}^{q} \eta_i + \sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j.$$

Si $P(\lambda)$ és regular, $\mu(P(\lambda)) := 0$.

Observació 1.3.7. *$\mu(P(\lambda)) = 0$ també pot succeir amb $P(\lambda)$ singular, per exemple, quan els vectors del nucli són constants.*

Definició 1.3.8. *El conjunt d'índexs minimals de $P(\lambda) \in \mathbb{F}^{m\times n}[\lambda]$, per la dreta i per l'esquerra i amb repeticions incloses, constitueixen l'**estructura singular** de $P(\lambda)$. Si $P(\lambda)$ és regular, l'estructura singular és buida.*

Exemple 1.3.9. Donada la matriu fila $P(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & -\lambda & 0 \end{bmatrix}$ que té rang 1,

$$\mathcal{N}_\ell(P(\lambda)) = \{0\}.$$

Una base minimal de $\mathcal{N}_r(P(\lambda))$ és

$$\mathcal{N}_r(P(\lambda)) = \big\{ (0 \quad 0 \quad 1), (\lambda \quad 1 \quad 0) \big\}.$$

Els índexs minimals són $\varepsilon_1 = 0$ i $\varepsilon_2 = 1$, i per tant $\mu(P(\lambda)) = 1$.

Capítol 2

Relacions d'equivalència entre matrius polinomials

2.1 Equivalència unimodular

Definició 2.1.1. *Diem que $P(\lambda) \in \mathbb{F}^{m\times n}[\lambda]$ i $Q(\lambda) \in \mathbb{F}^{m\times n}[\lambda]$ són* ***unimodularment equivalents*** *si existeixen $E(\lambda) \in \mathbb{F}^{m\times m}[\lambda]$ i $F(\lambda) \in \mathbb{F}^{n\times n}[\lambda]$ matrius unimodulars tal que*

$$E(\lambda) \cdot P(\lambda) \cdot F(\lambda) = Q(\lambda).$$

Denotem aquesta equivalència com $P(\lambda) \sim Q(\lambda)$. Es pot demostrar que és una relació d'equivalència.

La forma canònica d'una matriu polinomial $P(\lambda) \in \mathbb{F}^{m\times n}[\lambda]$ sota la transformació $E(\lambda) \cdot P(\lambda) \cdot F(\lambda)$ és la **forma canònica de Smith** de $P(\lambda)$, definida al Teorema 1.1.1.

A continuació mostrem una taula amb els invariants que es preserven entre dues matrius polinomials unimodularment equivalents.

Tamany	**Rang**	**Grau**	**Divisors elementals finits**	**Divisors elementals infinits**	**Índexs minimals**
✓	✓	×	✓	×	×

Taula 2.1: Invariants sota l'equivalència unimodular

Exemple 2.1.2. Siguin $P(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $Q(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ tenim que $P(\lambda) \sim Q(\lambda)$ ja que:

$$\begin{bmatrix} \lambda & \lambda^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2 \cdot \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calculem els revers de $P(\lambda)$ i $Q(\lambda)$ per poder comparar les seves estructures espectrals infinites:

$$rev_2 P(\lambda) = \lambda^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda} & \frac{1}{\lambda^2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda^2 \end{bmatrix},$$

$$rev_1 Q(\lambda) = \lambda \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Les formes de Smith dels reversos són $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^3 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ respectivament. Aleshores, ja que els reversos no tenen la mateixa forma de Smith, les matrius tindran divisors elementals infinits diferents.

2.2 Equivalència unimodular estricta

Una equivalència més restrictiva però que preservarà l'estructura espectral infinita és la següent.

Definició 2.2.1. *Diem que $P(\lambda) \in \mathbb{F}^{m\times n}[\lambda]$ i $Q(\lambda) \in \mathbb{F}^{m\times n}[\lambda]$ són* ***estrictament equivalents*** *si existeixen $E \in \mathbb{F}^{m\times m}$ i $F \in \mathbb{F}^{n\times n}$ matrius invertibles tal que*

$$E \cdot P(\lambda) \cdot F = Q(\lambda).$$

Denotem aquesta equivalència com $P(\lambda) \underset{e}{\sim} Q(\lambda)$. Es pot demostrar que és relació d'equivalència.

En el cas d'equivalència unimodular estricta només tenim forma canònica si $P(\lambda)$ és un feix de matrius i el cos és algebraicament tancat. No es coneix forma canònica per a altres casos.

Teorema 2.2.2. *([10]) (Forma canònica de Kronecker) Tot feix de matrius a $\overline{\mathbb{F}}$ és estrictament equivalent a una suma directa de blocs com els següents:*

- $(\lambda - \lambda_0)I_k + N_k$, *on* $N_k := \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{k\times k}[\lambda]$, *(capta divisors elementals finits)*
- $I_m + \lambda N_m$, *(capta divisors elementals infinits)*
- $S_d(\lambda) := \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{d\times(d+1)}[\lambda]$ *o* $S_d^T(\lambda)$ *amb* $d \geq 1$, *(capta índexs minimals)*
- $0_{p\times q}$, *on* $p, q \geq 0$.

Exemple 2.2.3. Donat el feix

$$L(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \lambda+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ \lambda & 0 & 1 & \lambda+1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

i donada la matriu

$$K(\lambda) = \left[\begin{array}{ccc|cc} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = S_2(\lambda) \oplus \Big(I_2 + \lambda N_2\Big),$$

veiem que són estrictament equivalents ja que

$$\begin{bmatrix}\lambda & 1 & \lambda+1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1\\ \lambda & 0 & 1 & \lambda+1 & 1\\ 0 & 1 & \lambda & 1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

A continuació mostrem una taula amb els invariants que es preserven entre dues matrius polinomials estrictament equivalents.

Tamany	**Rang**	**Grau**	**Divisors elementals finits**	**Divisors elementals infinits**	**Índexs minimals**
✓	✓	✓	✓	✓	×

Taula 2.2: Invariants sota l'equivalència unimodular estricta

Exemple 2.2.4. Siguin $P(\lambda) = \begin{bmatrix}\lambda & \lambda\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ i $Q(\lambda) = \begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ tenim que $P(\lambda) \underset{e}{\sim} Q(\lambda)$

$$\begin{bmatrix}\lambda & \lambda\\ 0 & 1\end{bmatrix} = I_2 \cdot \begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Cal calcular els j-revers de $P(\lambda)$ i $Q(\lambda)$ per poder comparar les seves estructures espectrals infinites.

$$rev_1 P(\lambda) = \lambda \begin{bmatrix}\frac{1}{\lambda} & \frac{1}{\lambda}\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & \lambda\end{bmatrix},$$

$$rev_1 Q(\lambda) = \lambda \begin{bmatrix}\frac{1}{\lambda} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}.$$

Aleshores, la forma de Smith dels reversos són $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}$ respectivament. Per tant les matrius $P(\lambda)$ i $Q(\lambda)$ tindran els mateixos divisors elementals infinits.

2.3 Equivalència unimodular espectral

En aquesta secció definirem dues equivalències que permeten relacionar matrius de diferents tamanys i diferents graus.

Definició 2.3.1. *Diem que $P(\lambda) \in \mathbb{F}^{m\times n}[\lambda]$ i $Q(\lambda) \in \mathbb{F}^{p\times q}[\lambda]$ són* ***estesa i unimodularment equivalents*** *si $\exists r, s \geq 0$ tal que*

$$diag(P, I_s) \sim diag(Q, I_t).$$

Denotem aquesta equivalència com $P(\lambda) \smile Q(\lambda)$.

Normalment tindrem, o bé $s = 0$, o bé $t = 0$, encara que poden ser diferents de zero simultàniament. Més endavant veurem que $diag(P, I_s) \sim diag(Q, I_t)$ amb $s \neq 0$ i $t \neq 0$ $\iff$ $diag(P, I_s) \sim diag(Q, I_t)$ amb $s = 0$ o $t = 0$.

A continuació mostrem una taula amb els invariants que es preserven entre dues matrius polinomials estesa i undimodularment equivalents.

Tamany	**Rang**	**Grau**	**Divisors elementals finits**	**Divisors elementals infinits**	**Índexs minimals**
$\times$	$\times$	$\times$	✓	$\times$	$\times$

Taula 2.3: Invariants sota l'equivalència unimodular estesa

Definició 2.3.2. *Diem que $P(\lambda) \in \mathbb{F}^{m\times n}[\lambda]$ i $Q(\lambda) \in \mathbb{F}^{p\times q}[\lambda]$ són* ***espectralment equivalents*** *si*

$$P(\lambda) \smile Q(\lambda) \text{ i } rev_g P(\lambda) \smile rev_h Q(\lambda).$$

Denotem aquesta equivalència com $P(\lambda) \asymp Q(\lambda)$.

Definició 2.3.3. *Diem que $R(\lambda) \in \mathbb{F}^{m\times n}[\lambda]$ amb $deg(R(\lambda)) = l$, és una* ***ℓ-ificació*** *de $P(\lambda)$ si $P(\lambda) \smile Q(\lambda)$. Si a més $P(\lambda) \asymp Q(\lambda)$ l'anomenarem* ***ℓ-ificació forta****.*
Quan $R(\lambda)$ té grau estès 1 o 2, anomenem a les ℓ-ificacions ***linealització*** *i* ***quadrificació*** *respectivament.*

Per $P(\lambda) \in \mathbb{F}^{n\times n}[\lambda]$ amb $grade(P(\lambda)) = k$, la definició clàssica (veure [7], [8]) diu que la linealització per $P(\lambda)$ és un feix $L(\lambda)$ de la forma

$$L(\lambda) \sim \begin{bmatrix} P(\lambda) & 0 \\ 0 & I_s \end{bmatrix} \tag{2.3.1}$$

on $s = (k-1)n$. A més, seria linealització forta clàssica si $rev_1 L(\lambda) \sim diag[rev_k P(\lambda), I_s]$.

Les ℓ-ificacions no han de ser d'un tamany concret, però demanarem que sigui inferior al de $P(\lambda)$.

Exemple 2.3.4. Donada $P(\lambda) = \left[\begin{smallmatrix} \lambda & \lambda^2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ i el feix $L(\lambda) = \begin{bmatrix}\lambda\end{bmatrix}$. Tenim que

$$P(\lambda) \sim \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L(\lambda) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

per tant $L(\lambda) \smile P(\lambda)$. És a dir que $L(\lambda)$ és una linealització de $P(\lambda)$.
Qualsevol feix de la forma $\widetilde{L}(\lambda) = diag[L(\lambda), I_s]$ és també una linealització de $P(\lambda)$, per tant $P(\lambda)$ té una possible linealització de qualsevol tamany.
D'altra banda, podem veure que $L(\lambda)$ no és una linealització forta ja que

$$rev_1 L(\lambda) = \begin{bmatrix}1\end{bmatrix} \text{ i } rev_2 P(\lambda) = \left[\begin{smallmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda^2 \end{smallmatrix}\right],$$

i mirant determinants veiem que

$$diag[rev_1 L(\lambda), I_s] \not\sim diag[rev_2 P(\lambda), I_t] \implies rev_1 L(\lambda) \not\smile rev_2 P(\lambda) \implies L(\lambda) \not\asymp P(\lambda).$$

Lema 2.3.5. *([3]) Siguin $P(\lambda) \in \mathbb{F}^{m\times n}[\lambda]$ i $Q(\lambda) \in \mathbb{F}^{p\times q}[\lambda]$:*

1. *$P \smile Q$ i $P \asymp Q$ són relacions d'equivalència.*
2. *Si $P \smile Q$, aleshores $p - m = q - n$, és a dir, la diferència de tamany és la mateixa per files i columnes.*

Demostració.

1. Per veure que una relació és relació d'equivalència hem de veure que és (i) reflexiva, (ii) simètrica i (iii) transitiva.

   (i) $P(\lambda) \smile P(\lambda)$ cert ja que $diag(P(\lambda), I_s) \sim diag(P(\lambda), I_s)$.

   (ii) $P(\lambda) \smile Q(\lambda) \implies Q(\lambda) \smile P(\lambda)$ cert ja que:

$$\begin{aligned} &P(\lambda) \smile Q(\lambda) \implies diag(P(\lambda), I_s) \sim diag(Q(\lambda), I_t) \implies \\ &diag(Q(\lambda), I_t) \sim diag(P(\lambda), I_s) \implies Q(\lambda) \smile P(\lambda) \end{aligned}$$

   (iii) $P(\lambda) \smile Q(\lambda)$ i $Q(\lambda) \smile R(\lambda) \implies P(\lambda) \smile R(\lambda)$:

$$\begin{aligned} P(\lambda) \smile Q(\lambda) &\implies diag(P(\lambda), I_s) \sim diag(Q(\lambda), I_t) \\ Q(\lambda) \smile R(\lambda) &\implies diag(Q(\lambda), I_t) \sim diag(R(\lambda), I_u) \end{aligned} \implies$$

$$diag(P(\lambda), I_s) \sim diag(R(\lambda), I_u) \implies P(\lambda) \smile R(\lambda).$$

   Per veure que $\asymp$ és relació d'equivalència, hem de tenir en compte que

$$P(\lambda) \asymp Q(\lambda) \iff P(\lambda) \smile Q(\lambda) \text{ i } rev_g P(\lambda) \smile rev_h Q(\lambda).$$

   Com acabem de veure que $\smile$ satisfà totes les condicions per ser relació d'equivalència, aleshores $\asymp$ també ho és.

2. Com que

$$\begin{bmatrix} P(\lambda) & \\ & I_s \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} Q(\lambda) & \\ & I_t \end{bmatrix},$$

   tenim que

$$m + s = p + t \text{ i } n + s = q + t,$$

per tant:

$$\begin{aligned} m - p &= t - s \\ n - q &= t - s \end{aligned} \implies m - p = n - q$$

$\square$

A continuació mostrem una taula amb els invariants que es preserven entre dues matrius polinomials espectraltament equivalents.

Tamany	Rang	Grau	Divisors elementals finits	Divisors elementals infinits	Índexs minimals
$\times$	$\times$	$\times$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\times$

Taula 2.4: Invariants sota l'equivalència espectral

2.4 Altres equivalències entre matrius polinomials

En aquesta secció introduirem dues noves relacions d'equivalència, la primera ve donada per *Pugh* i *Shelton* a [13], a qui s'atribueix gran part de la investigació de relacions d'equivalència de matrius polinomials. L'altra és una variació d'aquesta, introduïda per *Karampetakis* i *Vologiannidis* a [9].

Definició 2.4.1. *Siguin $A(\lambda) \in \mathbb{F}^{m\times n}[\lambda]$ i $B(\lambda) \in \mathbb{F}^{m\times p}[\lambda]$. Direm que $L(\lambda) \in \mathbb{F}^{m\times m}[\lambda]$ és un* ***divisor comú per l'esquerra*** *de $A(\lambda)$ i $B(\lambda)$ si*

$$A(\lambda) = L(\lambda)C(\lambda) \text{ i } B(\lambda) = L(\lambda)D(\lambda)$$

per algun $C(\lambda) \in \mathbb{F}^{m\times n}[\lambda]$ i $D(\lambda) \in \mathbb{F}^{m\times p}[\lambda]$.
Direm que $A(\lambda)$ i $B(\lambda)$ són ***coprimers per l'esquerra*** *si tots els divisors comuns per l'esquerra de $A(\lambda)$ i de $B(\lambda)$ són unimodulars.*
Es defineix anàlogament per la dreta.

Definició 2.4.2. *Siguin $P(\lambda) \in \mathbb{F}^{m\times n}[\lambda]$ i $Q(\lambda) \in \mathbb{F}^{p\times q}[\lambda]$ amb $p-m = q-n$. Aleshores $P(\lambda)$ i $Q(\lambda)$ són:*

1. ***PS-eue*** *(estesa i unimodularment equivalents en el sentit de Pugh i Shelton) si $\exists M(\lambda) \in \mathbb{F}^{m\times n}[\lambda]$ i $\exists N(\lambda) \in \mathbb{F}^{p\times q}[\lambda]$ tal que*

$$M(\lambda)P(\lambda) = Q(\lambda)N(\lambda)$$

   on $M(\lambda)$, $P(\lambda)$ són coprimers per l'esquerra i $Q(\lambda)$, $N(\lambda)$ són coprimers per la dreta.

2. ***KV-fe*** *(fortament equivalents en el sentit de Karampetakis i Vologiannidis) si*

   (i) $P(\lambda)$ i $Q(\lambda)$ són PS-eue i

   (ii) $\exists \widetilde{M}(\lambda) \in \mathbb{F}^{p\times m}(\lambda)$ i $\exists \widetilde{N}(\lambda) \in \mathbb{F}^{q\times n}(\lambda)$ sense pols a $\lambda = 0$ tal que

$$\widetilde{M}(\lambda) \cdot rev\, P(\lambda) = rev\, Q(\lambda) \cdot \widetilde{N}(\lambda)$$

   on

$$\begin{bmatrix} \widetilde{M}(\lambda) & rev\, Q(\lambda) \end{bmatrix} \qquad i \qquad \begin{bmatrix} rev\, P(\lambda) \\ -\widetilde{N}(\lambda) \end{bmatrix}$$

   tenen rang màxim a $\lambda = 0$.

Aquestes relacions també són relacions d'equivalència, però la demostració no és fàcil de fer (veure [13]).

Observacions 2.4.3.

1. *Ens referim als pols de les matrius racionals com es fa al Teorema 4.1 del Capítol 3 de [14].*

2. *Tot i el diferent aspecte del parell d'equivalències PS-eue i KV-fe en comparació amb el parell equivalència unimodular estesa ($\smile$) i equivalència espectral ($\asymp$), en realitat fan la partició del conjunt de matrius polinomials en exactament les mateixes classes d'equivalència tal i com veurem al següent capítol.*

3. *Les relacions $\smile$ i $\asymp$ són molt més convenients per a l'Àlgebra Lineal Numèrica ja que, donada $P(\lambda) \in \mathbb{F}^{m\times n}[\lambda]$ és molt més fàcil construir matrius $Q(\lambda)$ explícitament tal que $P(\lambda) \smile Q(\lambda)$ o $P(\lambda) \asymp Q(\lambda)$.*

   En canvi, PS-eue i KV-fe són més convenients per a la Teoria de Sistemes.

Capítol 3

Comparació entre les diferents relacions d'equivalència

En aquest capítol volem estudiar si hi ha algun tipus de relació entre les relacions d'equivalència definides al capítol anterior.

3.1 Caracterització de $P \smile Q$ i $P \asymp Q$

Comencem caracteritzant les relacions $P \smile Q$ i $P \asymp Q$ en funció de la seva estructura espectral i singular.

Teorema 3.1.1. *([3]) Siguin $P(\lambda) \in \mathbb{F}^{m\times n}[\lambda]$ i $Q(\lambda) \in \mathbb{F}^{p\times q}[\lambda]$, amb $deg(P(\lambda)) = g$ i $deg(Q(\lambda)) = h$ tals que*

(a) $dim\mathcal{N}_r(P(\lambda)) = dim\mathcal{N}_r(Q(\lambda))$ i $dim\mathcal{N}_\ell(P(\lambda)) = dim\mathcal{N}_\ell(Q(\lambda))$ ($P(\lambda)$ i $Q(\lambda)$ tenen la mateixa quantitat d'índexs minimals per la dreta i, respectivament, per l'esquerra).

(b) $P(\lambda)$ i $Q(\lambda)$ tenen exactament els mateixos divisors elementals finits.

(c) $P(\lambda)$ i $Q(\lambda)$ tenen exactament els mateixos divisors elementals infinits.

Aleshores:

(i) $P(\lambda) \smile Q(\lambda) \iff$ es compleixen (a) i (b).

(ii) $P(\lambda) \asymp Q(\lambda) \iff$ es compleixen (a), (b) i (c).

Demostració.

(i) ($\Longrightarrow$) Si $P(\lambda) \smile Q(\lambda)$, per la Definició 2.3.1, tenim

$$dim\mathcal{N}_r(P(\lambda)) = dim\mathcal{N}_r(diag(P(\lambda), I_s)) = dim\mathcal{N}_r(diag(Q(\lambda), I_t)) = dim\mathcal{N}_r(Q(\lambda)).$$

Anàlogament pels índexs minimals per l'esquerra. $P(\lambda)$ i $Q(\lambda)$ tenen els mateixos divisors elementals finits perquè $diag[P(\lambda), I_s] \sim diag[Q(\lambda), I_t]$, que és equivalent a dir que tenen la mateixa forma de Smith.

($\Longleftarrow$) Primer veiem que la condició $(a) \implies p - m = q - n$, per tant $\exists s \geq 0$ i $\exists t \geq 0$ tals que

$$m + s = p + t \quad \text{i} \quad n + s = q + t$$

és a dir, tals que $diag[P(\lambda), I_s]$ i $diag[Q(\lambda), I_t]$ tenen el mateix tamany.

A més,

$$\begin{aligned} dim\mathcal{N}_r(P(\lambda)) = dim\mathcal{N}_r(Q(\lambda)) &\implies n - rang(P(\lambda)) = q - rang(Q(\lambda)) \\ dim\mathcal{N}_\ell(P(\lambda)) = dim\mathcal{N}_\ell(Q(\lambda)) &\implies m - rang(P(\lambda)) = p - rang(Q(\lambda)) \end{aligned}$$

Això implica que

$$p - m = rang(Q(\lambda)) - rang(P(\lambda)) = q - n$$

Per tant, per qualssevol $s, t \geq 0$ que satisfan $s - t = p - m = q - n$ tindrem que $diag[P(\lambda), I_s]$ i $diag[Q(\lambda), I_t]$ tenen el mateix tamany.

Per qualssevol s, t que triem, la condició (a) implica que $diag[P(\lambda), I_s] = diag[Q(\lambda), I_t]$, i junt amb la condició (b), tenim que $diag[P(\lambda), I_s]$ i $diag[Q(\lambda), I_t]$ tenen el mateix tamany, rang, i els mateixos divisors elementals finits, és a dir, tenen la mateixa forma de Smith $\implies diag[P(\lambda), I_s] \sim diag[Q(\lambda), I_t] \implies P(\lambda) \smile Q(\lambda)$.

(ii) ($\Longrightarrow$) Si tenim $P(\lambda) \asymp Q(\lambda)$ llavors $P(\lambda) \smile Q(\lambda)$ i, com ja hem vist, alehores tenim les condicions (a) i (b). Per veure que tenim també (c) només hem de tornar a aplicar el mateix procés que abans amb $rev_g P(\lambda)$ i $rev_h Q(\lambda)$.

($\Longleftarrow$) Hem vist que amb les condicions (a) i (b) impliquen $P(\lambda) \smile Q(\lambda)$, així que només ens cal veure que $rev_g P(\lambda) \smile rev_h Q(\lambda)$ per tenir $P(\lambda) \asymp Q(\lambda)$.

Les condicions (b) i (c) impliquen que $rev_g P(\lambda)$ i $rev_h Q(\lambda)$ tenen els mateixos divisors elementals finits, el que vol dir que podem usar la condició (b) amb $rev_g P(\lambda)$ i $rev_h Q(\lambda)$.

Per veure que també podem utilitzar la condició (a) per $rev_g P(\lambda)$ i $rev_h Q(\lambda)$, primer observem que una matriu polinomial i el seu revers sempre tenen el mateix rang. Per tant

$$dim\mathcal{N}_r(rev_g P(\lambda)) = n - rang(rev_g P(\lambda)) = n - rang(P(\lambda)) = dim\mathcal{N}_r(P(\lambda)).$$

Anàlogament es veu que $dim\mathcal{N}_\ell(rev_g P(\lambda)) = dim\mathcal{N}_\ell(P(\lambda))$. Igual que ho hem vist per $P(\lambda)$ i $rev_g P(\lambda)$, també es compleix per $Q(\lambda)$ i $rev_h Q(\lambda)$, i utilitzant que $dim\mathcal{N}_r(P(\lambda)) = dim\mathcal{N}_r(Q(\lambda))$ tenim

$$dim\mathcal{N}_r(rev_g P(\lambda)) = dim\mathcal{N}_r(P(\lambda)) = dim\mathcal{N}_r(Q(\lambda)) = dim\mathcal{N}_r(Q(\lambda)).$$

Anàlogament es veu que $dim\mathcal{N}_\ell(rev_g P(\lambda)) = dim\mathcal{N}_\ell(rev_h Q(\lambda))$, i per tant la condició (a) també serveix per $rev_g P(\lambda)$ i $rev_h Q(\lambda) \implies rev_g P(\lambda) \smile rev_h Q(\lambda) \implies P(\lambda) \asymp Q(\lambda)$.

□

Per tant els invariants que es conserven amb les equivalències $\smile$ i $\asymp$ són exactament els que s'indiquen a les Taules 2.3 i 2.4 respectivament.

Corol·lari 3.1.2. *([3])*

1. $P(\lambda) \smile Q(\lambda) \iff diag[P(\lambda), I_s] \sim diag[Q(\lambda), I_t]$ *es pot donar amb* $s = 0$ *o* $t = 0$.

2. $P(\lambda) \asymp Q(\lambda) \iff diag[P(\lambda), I_s] \sim diag[Q(\lambda), I_t]$ *es pot donar amb* $s = 0$ *o* $t = 0$ *i* $diag[rev_g(P(\lambda)), I_u] \sim diag[rev_h(Q(\lambda)), I_v]$ *es pot donar amb* $u = 0$ *o* $v = 0$.

Demostració. És suficient amb modificar la part $(i)(\Longleftarrow)$ de la demostració del Teorema 3.1.1, on es trien exactament els únics $s, t \geq 0$ que satisfan l'equació diofantina

$$s - t = p - m = q - n$$

on $s = 0$ o $t = 0$. □

3.1.1 Comparació entre $\smile$ i PS-eue

Al següent teorema veurem que les relacions d'equivalència PS-eue i $\smile$ són, de fet, equivalents.

Teorema 3.1.3. *([3]) Siguin* $P(\lambda) \in \mathbb{F}^{m\times n}[\lambda]$ *i* $Q(\lambda) \in \mathbb{F}^{p\times q}[\lambda]$*. Llavors*

$$P(\lambda) \smile Q(\lambda) \iff P(\lambda) \text{ i } Q(\lambda) \text{ són PS-eue.}$$

Demostració. $(\Longleftarrow)$ Si $P(\lambda)$ i $Q(\lambda)$ són *PS-eue*, podem assumir sense pèrdua de generalitat que

$$s := m - p = n - q \geq 0.$$

$P(\lambda)$ i $diag[Q(\lambda), I_s]$ tenen la mateixa forma de Smith (veure [13]). Per tant,

$$P(\lambda) \sim diag[Q(\lambda), I_s] \implies P(\lambda) \smile Q(\lambda).$$

$(\Longrightarrow)$ Si $P(\lambda) \smile Q(\lambda)$, tenim que $P(\lambda) \sim diag[Q(\lambda), I_s]$. Per tant la forma de Smith de $P(\lambda)$ és $diag[I_s, D_Q(\lambda)]$, on $D_Q(\lambda)$ és la forma de Smith de $Q(\lambda)$. I, per tant, $P(\lambda)$ i $Q(\lambda)$ són *PS-eue.*

□

3.1.2 Comparació entre $\asymp$ i KV-fe

Al següent teorema veurem que les relacions d'equivalència $\asymp$ i KV-fe són, de fet, equivalents.

Teorema 3.1.4. *([3]) Siguin* $P(\lambda) \in \mathbb{F}^{m\times n}[\lambda]$ *i* $Q(\lambda) \in \mathbb{F}^{p\times q}[\lambda]$ *amb* $grade(P(\lambda)) = deg(P(\lambda))$ *i* $grade(Q(\lambda)) = deg(Q(\lambda))$*. Llavors* $P(\lambda) \asymp Q(\lambda) \iff P(\lambda)$ *i* $Q(\lambda)$ *són KV-fe.*

Demostració. $(\Longrightarrow)$ $P(\lambda) \asymp Q(\lambda) \implies P(\lambda) \smile Q(\lambda)$ i $rev\ P(\lambda) \smile rev\ Q(\lambda)$. El Teorema 3.1.3 aplicat a $P(\lambda)$ i $Q(\lambda) \implies P(\lambda)$ i $Q(\lambda)$ són PS-eue, que és la condició 2.(i) de la Definició 2.4.2.

Ara, aplicant el Teorema 3.1.3 a $rev\ P(\lambda)$ i $rev\ Q(\lambda) \implies P(\lambda)$ i $rev\ Q(\lambda)$ són PSeue, és a dir, $\exists \widetilde{M}(\lambda) \in \mathbb{F}^{p\times m}(\lambda)$ i $\exists \widetilde{N}(\lambda) \in \mathbb{F}^{q\times n}(\lambda)$ tals que

$$\widetilde{M}(\lambda) \cdot rev\ P(\lambda) = rev\ Q(\lambda) \cdot \widetilde{N}(\lambda), \tag{3.1.1}$$

on $\widetilde{M}(\lambda)$ i $rev\ Q(\lambda)$ són coprimers per l'esquerra i $rev\ P(\lambda)$ i $\widetilde{N}(\lambda)$ són coprimers per la dreta. Això és el mateix que dir que

$$\begin{bmatrix} \widetilde{M}(\lambda) & rev\ Q(\lambda) \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{bmatrix} rev\ P(\lambda) \\ -\widetilde{N}(\lambda) \end{bmatrix} \quad \text{tenen rang màxim } \forall \lambda \in \overline{\mathbb{F}}. \tag{3.1.2}$$

Observem que les equacions (3.1.1) i (3.1.2) impliquen la condició 2.(ii) de la Definició 2.4.2, ja que $\widetilde{M}(\lambda)$ i $\widetilde{N}(\lambda)$ no tenen pols finits. Ja hem vist que $P(\lambda)$ i $Q(\lambda)$ són KV-fe.

($\Longleftarrow$) Si $P(\lambda)$ i $Q(\lambda)$ són KV-fe, per la condició 2.(ii) de la Definició 2.4.2 tenim que $P(\lambda)$ i $Q(\lambda)$ són PS-eue, i pel Teorema 3.1.3, tenim $P(\lambda) \smile Q(\lambda)$. Per la primera part del Teorema 3.1.1 tenim la mateixa quantitat d'índexs minimals per la dreta i per l'esquerra. A més $P(\lambda)$ i $Q(\lambda)$ tenen la mateixa quantitat de divisors elementals infinits, tal i com es veu al Teorema 2 de [9]. Per tant per la segona part del Teorema 3.1.1 tenim $P(\lambda) \asymp Q(\lambda)$.

□

3.2 Estructura infinita de Jordan i estructura singular de Jordan

En aquesta secció estudiarem l'efecte de les equivalències unimodular escricta, unimodular estesa i l'espectral sobre l'estructura infinita de Jordan i l'estructura singular.

Ens centrarem principalment en els feixos de matrius per fer un estudi més concret i centrar-nos en les propietats de les linealitzacions i linealitzacions fortes definides a partir de l'equivalència unimodular i l'equivalència espectral.

Teorema 3.2.1. *([3]) Siguin $L_1(\lambda) \in \mathbb{F}^{m\times n}[\lambda]$ i $L_2(\lambda) \in \mathbb{F}^{m\times n}[\lambda]$ feixos de matrius amb $grade(L_1(\lambda)) = grade(L_2(\lambda))$, tal que satisfan les següents condicions*

(a) $L_1(\lambda)$ i $L_2(\lambda)$ tenen exactament els mateixos divisors elementals finits,

(b) $rang(L_1(\lambda)) = rang(L_2(\lambda))$,

(c) $L_1(\lambda)$ i $L_2(\lambda)$ tenen la mateixa quantitat d'índexs minimals per la dreta i l'esquerra,

(d) $\delta_\infty(L_1(\lambda)) + \mu(L_1(\lambda)) = \delta_\infty(L_2(\lambda)) + \mu(L_2(\lambda))$,

aleshores les afirmacions següents són equivalents:

1. *$L_1(\lambda) \sim L_2(\lambda)$.*
2. *$L_1(\lambda)$ i $L_2(\lambda)$ tenen la mateixa Forma de Smith.*
3. *$L_1(\lambda)$ i $L_2(\lambda)$ satisfan (a) i (b).*
4. *$L_1(\lambda)$ i $L_2(\lambda)$ satisfan (a) i (c).*
5. *$L_1(\lambda)$ i $L_2(\lambda)$ satisfan (a) i (d).*

Demostració. De la unicitat de la Forma de Smith és directe que (1) i (2) són equivalents. L'equivalència entre (2) i (3) ve donada de que la Forma de Smith és única determinada pel seu tamany, rang i divisors elementals finits.

L'equivalència entre (3) i (4) és una conseqüència de les caracteritzacions

$$\# \text{ d'índexs minimals per l'esquerra de } L_i(\lambda) = dim(\mathcal{N}_\ell(L_i(\lambda))) = m - rang(L_i(\lambda)),$$
$$\# \text{ d'índexs minimals per la drerta de } L_i(\lambda) = dim(\mathcal{N}_r(L_i(\lambda))) = n - rang(L_i(\lambda)),$$

per $i = 1, 2$, que venen donades directament de la Definició 1.3.4.

Finalment, l'equivalència entre (3) i (5) és a conseqüència de la relació

$$rang(L(\lambda)) = \delta_{fin}(L(\lambda)) + \delta_\infty(L(\lambda)) + \mu(L(\lambda)),$$

que provarem més endavant al Lema 5.0.3.

□

Observació 3.2.2. *La part més interessant del Teorema 3.2.1 és l'equivalència de les afirmacions (1) i (5). Aquest resultat mostra que, a més dels divisors elementals finits, l'única estructura independent de les matrius polinomials preservada per l'equivalència unimodular és la suma $\delta_\infty + \mu$.*

Per tant, amb l'equivalència unimodular es poden canviar els valors de δ_∞ i μ individualment, creant o destruint l'estructura de Jordan a ∞, compensant amb l'alteració de l'ordre de les bases minimals per la dreta i/o l'esquerra.

Amb l'equivalència unimodular estesa ($\smile$) tenim el mateix problema que amb l'equivalència unimodular, és massa feble per preservar tota l'estructura espectral d'una matriu polinomial, i pot barrejar l'estructura infinita de Jordan amb l'estructura singular.

A continuació estudiarem alguns efectes que les equivalències $\smile$ i $\asymp$ tenen sobre l'estructura infinita de Jordan i l'estructura singular.

Teorema 3.2.3. *([3]) Sigui $P(\lambda) \in \mathbb{F}^{m\times n}[\lambda]$ amb $rang(P(\lambda)) = r$. Sigui $q := m - r$ i $p := n-r$ el nombre d'índexs minimals de $P(\lambda)$ per l'esquerra i per la dreta respectivament. Aleshores:*

1. *$\exists L(\lambda) \in \mathbb{F}^{s_1\times s_2}[\lambda]$ un feix tal que*

$$L(\lambda) \smile P(\lambda) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{c} s_1 \geq \delta_{fin}(P(\lambda)) + q, \\ s_2 \geq \delta_{fin}(P(\lambda)) + p, \text{ i} \\ s_1 - s_2 = q - p = m - n. \end{array}$$

2. *Per qualssevol q índexs minimals per l'esquerra $0 \leq \eta_1 \leq \cdots \leq \eta_q$ i qualssevol p índexs minimals per la dreta $0 \leq \varepsilon_1 \leq \cdots \leq \varepsilon_p$, amb qualsevol seqüència de multiplicitats parcials $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_\ell$ pel valor propi ∞, $\exists \widetilde{L}(\lambda) \in \mathbb{F}^{s_1\times s_2}[\lambda]$ linealització per $P(\lambda)$ on*

$$s_1 = \delta_{fin}(P(\lambda)) + q + \mu + \omega,$$

$$s_2 = \delta_{fin}(P(\lambda)) + p + \mu + \omega.$$

Per $\mu(P(\lambda)) := \sum_i \eta_i + \sum_j \varepsilon_j \geq 0$ *(la suma de tots els índexs minimals) i* $\omega(P(\lambda)) := \sum_k t_k \geq 0$ *(la suma de les multiplicitats parcials a* ∞*).*

Demostració.

1. ($\Longrightarrow$) Si $L(\lambda) \smile P(\lambda)$, per l'apartat (*b*) del Lema 2.3.5 tenim $s_1 - m = s_2 - n$, que és la tercera condició a demostrar. Ara, si transformem $L(\lambda)$ en una forma canònica de Kronecker $K(\lambda)$ amb equivalència estricta, $L(\lambda)$ i $K(\lambda)$ tenen els mateixos divisors elementals que $P(\lambda)$, per tant ha d'haver blocs a $K(\lambda)$ que corresponguin a aquests divisors elementals ocupant $\delta_{fin}(P(\lambda))$ files i $\delta_{fin}(P(\lambda))$ columnes.

   Però com $L(\lambda)$ i $K(\lambda)$ tenen la mateixa quantitat d'índexs minimals per la dreta i per l'esquerra que $P(\lambda)$, ha d'haver almenys q files i p columnes a $K(\lambda)$. Per tant, $K(\lambda)$ i també $L(\lambda)$ tenen almenys $\delta_{fin}(P(\lambda)) + q$ files i $\delta_{fin}(P(\lambda)) + p$ columnes.

   ($\Longleftarrow$) Per veure que existeix una linealització de $P(\lambda)$ per a cada tamany primer recordem que per a qualsevol polinomi mònic de grau k, $p(\lambda) = \lambda^k + a_{k-1} + \lambda^{k-1} + \cdots + a_0$, el feix de matrius company de Frobenius associat és

$$\mathcal{C}_p(\lambda) := \lambda I_k + \begin{bmatrix} a_{k-1} & a_{k-2} & \cdots & a_0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{k \times k}[\lambda].$$

   Per [8] sabem que $\mathcal{C}_p(\lambda) \sim diag[p(\lambda), I_{k-1}]$, tal i com podem veure a la demostració del Teorema 4.1.2.

   Ara, si $d_j(\lambda), \ldots, d_r(\lambda)$ son polinomis invariants de $P(\lambda)$ no trivials (amb grau positiu), aleshores la suma directa dels blocs companys

$$F(\lambda) := \mathcal{C}_{d_j}(\lambda) \oplus \cdots \oplus \mathcal{C}_{d_r}(\lambda)$$

   defineix un feix de matrius amb exactament els mateixos divisors elementals finits que $P(\lambda)$. Com $deg(d_j(\lambda)) + \cdots + deg(d_r(\lambda)) = \delta_{fin}(\lambda)$ aleshores $F(\lambda)$ té tamany $\delta_{fin}(\lambda) \times \delta_{fin}(\lambda)$. Llavors la suma directa

$$L(\lambda) := F(\lambda) \oplus 0_{q \times p} \oplus I_\alpha \quad \text{per } \alpha \in \mathbb{N}$$

   ens dona un feix de matrius amb exactament q índexs minimals per l'esquerra i p per la dreta, tots zero, i exactament els mateixos divisors elementals que $P(\lambda)$. Per tant $L(\lambda) \smile P(\lambda)$.

2. Per construir una linealització $\widetilde{L}(\lambda)$ per $P(\lambda)$ amb la mateixa estructura singular i mateixa estructura infinita de Jordan considerem el feix

$$S(\lambda) := S_{\varepsilon_1}(\lambda) \oplus \cdots \oplus S_{\varepsilon_p}(\lambda) \oplus S^T_{\eta_1}(\lambda) \oplus \cdots \oplus S^T_{\eta_q}(\lambda)$$

   on

$$S_d(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{d \times (d+1)}[\lambda].$$

Considerem també el feix

$$\Omega(\lambda) := I_\omega + \lambda N,$$

on $N = J_{t_1}(0) \oplus \cdots \oplus J_{t_\ell}(0)$ és la suma directa de blocs nilpotents de Jordan. Aleshores

$$\widetilde{L}(\lambda) := F(\lambda) \oplus S(\lambda) \oplus \Omega(\lambda)$$

és un feix amb l'estructura infinita de Jordan i l'estructura singular que $P(\lambda)$ i és una linealització de $P(\lambda)$ per el Teorema 3.1.1, ja que per la construcció de $\widetilde{L}(\lambda)$ té els mateixos divisors elementals finits que $P(\lambda)$ i la mateixa quantitat d'índexs minimals per la dreta i per l'esquerra que $P(\lambda)$. $S(\lambda) \in \mathbb{F}^{(q+\mu)\times(p+\mu)}$ i $\Omega(\lambda) \in \mathbb{F}^{\omega\times\omega}$.

□

Ara considerarem l'equivalència espectral. Al Teorema 3.1.1 hem vist que aquesta equivalència preserva l'estructura espectral, pero de l'estructura singular els únics invariants són el nombre d'índexs minimals per la dreta i el nombre d'índexs minimals per l'esquerra.

Per tant si tenim una matriu $P(\lambda)$ amb p i q nombre d'índexs minimals per la dreta i l'esquerra respectivament, esperarem que existeixi una matriu $Q(\lambda)$ espectralment equivalent a $P(\lambda)$ amb la mateixa quantitat p i q però amb diferents valors.

El teorema següent, que és l'anàleg del Teorema 3.2.3 per a l'equivalència espectral, diu que aquesta matriu sempre existeix i, aquesta, pot ser sempre un feix.

Teorema 3.2.4. *([3]) Sigui $P(\lambda) \in \mathbb{F}^{m\times n}[\lambda]$ amb $rang(P(\lambda)) = r$, i siguin $q := m - r$ i $p := n-r$ el nombre d'índexs minimals de $P(\lambda)$ per l'esquerra i per la dreta respectivament. Si $P(\lambda)$ és singular, és a dir, si $q \neq 0$ o $p \neq 0$, aleshores:*

1. *$\exists L(\lambda) \in \mathbb{F}^{s_1\times s_2}[\lambda]$ un feix tal que*

$$L(\lambda) \asymp P(\lambda) \quad \iff \quad \begin{array}{c} s_1 \geq \delta_{fin}(P(\lambda)) + \delta_\infty(P(\lambda)) + q, \\ s_2 \geq \delta_{fin}(P(\lambda)) + \delta_\infty(P(\lambda)) + p, \text{ i} \\ s_1 - s_2 = q - p = m - n. \end{array}$$

2. *Per qualssevol q índexs minimals per l'esquerra $0 \leq \eta_1 \leq \cdots \leq \eta_q$ i qualssevol p índexs minimals per la dreta $0 \leq \varepsilon_1 \leq \cdots \leq \varepsilon_p$, amb qualsevol seqüència de multiplicitats parcials $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_\ell$ pel valor propi ∞, $\exists \widetilde{L}(\lambda) \in \mathbb{F}^{s_1\times s_2}[\lambda]$ linealització per $P(\lambda)$ on*

$$s_1 = \delta_{fin}(P(\lambda)) + \delta_\infty(P(\lambda)) + q + \mu,$$

$$s_2 = \delta_{fin}(P(\lambda)) + \delta_\infty(P(\lambda)) + p + \mu.$$

Per $\mu := \sum_i \eta_i + \sum_j \varepsilon_j \geq 0$ (la suma de tots els índexs minimals).

D'altra banda, si $P(\lambda)$ és regular, és a dir, si $q = p = \mu = 0$, aleshores existeix una linealització forta $s_1 \times s_2$ de $P(\lambda)$ en el sentit de la Definició 2.3.3 si i només si $s_1 = s_2 = \delta_{fin}(P(\lambda)) + \delta_\infty(P(\lambda))$.

Demostració. La demostració és idèntica a la del Teorema 3.2.3 tenint en compte que ara els divisors elementals també es preserven. □

Als capítols anteriors hem vist que l'equivalència espectral ens ofereix un bon equilibri entre la flexibilitat per canviar de tamany i grau i la rigidesa de preservar l'estructura de Jordan. Per tant, d'ara en endavant només tractarem amb matrius polinomials espectralment equivalents.

Evidentment volem poder conservar també l'estructura singular, per matrius regulars sempre es pot obtenir amb una linealització forta, però per les matrius singulars és més problemàtic ja que ni tan sols amb una linealització forta ens ho garantitza.

Capítol 4

Formes companyes per matrius polinomials

Al Teorema 3.2.4 hem vist que sota l'equivalència espectral no podem controlar els valors dels índexs minimals, però l'objectiu final és trobar una relació general restringint el tamany, el grau i la suma d'índexs minimals (veure Capítol 5).

Comencem definint conceptes bàsics sobre les linealitzacions companyes de Frobenius, molt conegudes per matrius quadrades però no tant per les rectangulars.

Definició 4.0.1. *Considerem l'espai de matrius polinomials $m \times n$ i grau fix g a un cos arbitrari $\mathbb{F}$, $\mathcal{P}(g, m \times n, \mathbb{F})$.*

Una ***forma companya de grau ℓ*** *per $P(\lambda) \in \mathcal{P}(g, m \times n, \mathbb{F})$ és una matriu $\mathcal{C}_P(\lambda) \in \mathcal{P}(\ell, p \times q, \mathbb{F})$ amb entrades en els coeficients de la matriu $P(\lambda)$, de manera que $\mathcal{C}_P(\lambda)$ sigui una ℓ-ificació forta de $P(\lambda)$ per a tot $P(\lambda) \in \mathcal{P}(g, m \times n, \mathbb{F})$, independentment de si $P(\lambda)$ és regular o singular.*

Hem de veure cada entrada de cada matriu coeficient de $P(\lambda) = \sum_{i=0}^{g} \lambda^i A_i \in \mathbb{F}^{m \times n}[\lambda]$ com una variable independent x_j.

Així tot plegat tindrem $(g+1)mn$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_{mn}$, per tant, estem identificant $\mathcal{P}(g, m \times n, \mathbb{F})$ amb $\mathbb{F}^{(g+1)mn}$.

Aleshores el model per construir $\mathcal{C}_P(\lambda)$ és la funció

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(g, m \times n, \mathbb{F}) &\longrightarrow \mathcal{P}(\ell, p \times q, \mathbb{F}) \\ (x_1, x_2, \ldots, x_{(g+1)mn}) &\longmapsto \mathcal{C}_P(\lambda) = \sum_{i=0}^{\ell} \lambda^i X_i, \end{aligned}$$

on cada entrada de cada matriu coeficient X_i és una funció d'un d'aquests dos tipus:

- constant, és a dir una funció $\alpha \in \mathbb{F}$,
- constant múltiple d'una i només una de les variables, és a dir, una funció βx_j per algun $\beta \in \mathbb{F}$ i $1 \leq j \leq (g+1)mn$.

La forma més comú de construir una matriu companya de grau ℓ és $\mathcal{C}_P(\lambda) = \sum_{i=0}^{\ell} \lambda^i X_i$, consisteix a separar per blocs cada matriu coeficient X_i de manera que cada subbloc diferent de zero sigui $\pm I_r$ per $r > 0$ o $\pm A_i$ per $i = 0, \ldots, g$.

Observació 4.0.2. *Les formes companyes de grau ℓ poden tenir altres propietats a més de les mencionades prèviament a la Definició 4.0.1. Com per exemple:*

- *Els vectors propis, índexs minimals i/o les bases minimals de $P(\lambda)$ es poden recuperar fàcilment de $\mathcal{C}_P(\lambda)$.*
- *Podem preservar l'estructura de $P(\lambda)$.*

D'ara en endavant, sinó es diu explícitament el grau de la matriu companya, sobreentenem que el grau és 1.

4.1 Formes companyes de Frobenius per a matrius rectangulars

Definició 4.1.1. *Sigui $P(\lambda) = \lambda^k A_k + \lambda^{k-1} A_{k-1} + \ldots + \lambda A_1 + A_0 \in \mathbb{F}^{m\times n}[\lambda]$, amb $grade(P(\lambda)) = k$. Definim:*

$$X_1 = \begin{bmatrix} A_k & & & \\ & I_n & & \\ & & \ddots & \\ & & & I_n \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{s_1\times t_1} \quad i \quad Y_1 = \begin{bmatrix} A_{k-1} & A_{k-2} & \cdots & A_0 \\ -I_n & 0 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & -I_n & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{s_1\times t_1},$$

on $s_1 = m + (k-1)n$ i $t_1 = kn$.

*Aleshores la **primera forma companya de Frobenius** és el feix*

$$\mathcal{C}_1(\lambda) := \lambda X_1 + Y_1 \in \mathbb{F}^{s_1\times t_1}[\lambda].$$

Aquesta és la forma companya de Frobenius més coneguda i utilitzada.

Per matrius regulars tenim que $C_1(\lambda) \asymp P(\lambda)$, és a dir, que $C_1(\lambda)$ és una linealització forta de $P(\lambda)$ (veure [7, 8]).

A continuació veurem que $C_1(\lambda)$ també és una linealització forta per matrius singulars.

Teorema 4.1.2. *([3]) Sigui $P(\lambda) \in \mathbb{F}^{m\times n}[\lambda]$ amb $grau(P(\lambda)) = k \geq 2$, i sigui $C_1(\lambda)$ la seva primera forma companya de Frobenius. Aleshores:*

(a) $C_1(\lambda) \asymp P(\lambda)$ ($C_1(\lambda)$ és una linealització forta de $P(\lambda)$).

(b) (b1) Si $\mathcal{N}_r(C_1(\lambda)) = \{z_1(\lambda), \ldots, z_p(\lambda)\}$ és una base minimal per la dreta qualsevol de $C_1(\lambda)$, amb vectors dividits en blocs segons els blocs en columna de $C_1(\lambda)$, i sigui $x_j(\lambda)$ el k-éssim bloc $(n \times 1)$ de $z_j(\lambda)$ per $j = 1, \ldots, p$.
Aleshores, $\{x_1(\lambda), \ldots, x_p(\lambda)\}$ és una base minimal per la dreta de $P(\lambda)$.

(b2) Si $\mathcal{N}_\ell(C_1(\lambda)) = \{w_1(\lambda)^T, \ldots, w_q(\lambda)^T\}$ és una base minimal per l'esquerra qualsevol de $C_1(\lambda)$, amb vectors dividits en blocs segons els blocs en fila de $C_1(\lambda)$, i sigui $y_j(\lambda)^T$ el primer bloc $(1 \times m)$ de $w_j(\lambda)^T$ per $j = 1, \ldots, q$.
Aleshores, $\{y_1(\lambda)^T, \ldots, y_q(\lambda)^T\}$ és una base minimal per l'esquerra de $P(\lambda)$.

(c) (c1) Si $0 \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \leq \cdots \leq \varepsilon_p$ *són els índexs minimals per la dreta de* $P(\lambda)$*, aleshores*

$$\varepsilon_1 + k - 1 \leq \varepsilon_2 + k - 1 \leq \cdots \leq \varepsilon_p + k - 1$$

són els índexs minimals per la dreta de $C_1(\lambda)$*.*

(c2) Si $0 \leq \eta_1 \leq \eta_2 \leq \cdots \leq \eta_q$ *són els índexs minimals per l'esquerra de* $P(\lambda)$*, aleshores*

$$\eta_1 \leq \eta_2 \leq \cdots \leq \eta_p$$

també són els índexs minimals per l'esquerra de $C_1(\lambda)$*.*

Demostració. Sigui $P_i(\lambda) = \lambda^i A_k + \lambda^{i-1} A_{k-1} + \cdots + \lambda A_{k-i+1} + A_{k-i}$ el i-èssim pas de Horner de $P(\lambda)$, per $i = 0, 1, \ldots, k$. Notem que

$$P_0(\lambda) = A_k, \quad P_k(\lambda) = P(\lambda), \quad \text{i}$$

$$P_{i+1}(\lambda) - \lambda P_i(\lambda) = A_{k-(i+1)} \quad \text{per } i = 0, \ldots, k-1. \tag{4.1.1}$$

Siguin

$$S(\lambda) = \begin{bmatrix} I_m & P_1(\lambda) & P_2(\lambda) & \cdots & P_{k-1}(\lambda) \\ 0 & I_n & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & I_n & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & I_n \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{(m+(k-1)n)\times(m+(k-1)n)}[\lambda]$$

i

$$R(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^{k-1} I_n & -I_n & -\lambda I_n & \cdots & -\lambda^{k-2} I_n \\ \lambda^{k-2} I_n & 0 & -I_n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -\lambda I_n \\ \lambda I_n & 0 & \cdots & 0 & -I_n \\ I_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{nk\times nk}[\lambda].$$

És fàcil veure que són matrius unimodulars. Utilitzant (4.1.1) calculem:

$$S(\lambda)C_1(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & P(\lambda) \\ -I_n & \lambda I_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -I_n & \lambda I_n & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -I_n & \lambda I_n \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{(m+(k-1)n)\times nk}[\lambda],$$

llavors,

$$S(\lambda)C_1(\lambda)R(\lambda) = \begin{bmatrix} P(\lambda) & & & \\ & I_n & & \\ & & \ddots & \\ & & & I_n \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{(m+(k-1)n)\times nk}[\lambda], \tag{4.1.2}$$

per tant $C_1(\lambda) \smile P(\lambda)$. Ara, sigui

$$\widetilde{S}(\lambda) = \begin{bmatrix} I_m & -\widetilde{P}_{k-2}(\lambda) & -\widetilde{P}_{k-3}(\lambda) & \cdots & -\widetilde{P}_0(\lambda) \\ 0 & I_n & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & I_n & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & I_n \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{(m+(k-1)n)\times nk}[\lambda],$$

on $\widetilde{P}_i(\lambda) := \lambda A_i + \lambda^2 A_{i-1} + \cdots + \lambda^{i+1} A_0$ per $i = 0, \ldots, k-2$ i

$$\widetilde{R}(\lambda) \begin{bmatrix} I_n & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda I_n & I_n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \lambda^{k-1} I_n & \cdots & \lambda I_n & I_n \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{nk\times nk}[\lambda];$$

que és un bloc de Toeplitz.

Observem que $\widetilde{R}(\lambda)$ i $\widetilde{S}(\lambda)$ són unimodulars.

Veiem les relacions que satisfan $\widetilde{P}_i(\lambda)$:

$$\begin{aligned} &\widetilde{P}_0(\lambda) = \lambda A_0, \qquad rev_k P(\lambda) = \lambda \widetilde{P}_{k-2}(\lambda) + \lambda A_{k-1} + A_k, \quad \text{i} \\ &\widetilde{P}_{i+1}(\lambda) - \lambda \widetilde{P}_i(\lambda) = \lambda A_{i+1} \quad \text{per } i = 0, \ldots, k-3. \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

Utilitzant (4.1.3) arribem a

$$\widetilde{S}(\lambda) rev_1 C_1(\lambda) = \begin{bmatrix} rev_k P(\lambda) & & & \\ & I_n & & \\ & & \ddots & \\ & & & I_n \end{bmatrix}.$$

Per tant $rev_1 C_1(\lambda) \smile rev_k P(\lambda)$, i ja hem provat (a).

Per provar (b) i (c), començarem pels índexs i bases minimals per la dreta. Observem que l'estructura dels últims blocs per files de $C_1(\lambda)$ fa que tots els $z(\lambda) \in \mathcal{N}_r(C_1(\lambda))$ sigui de la forma

$$z(\lambda) = \left[\lambda^{k-1} x(\lambda)^T \cdots x(\lambda)^T \right]^T \tag{4.1.4}$$

per algun $x(\lambda) \in \mathbb{F}^n(\lambda)$.

Del primer bloc per files de $C_1(\lambda)$ veiem que $z(\lambda) \in \mathcal{N}_r(C_1(\lambda)) \iff x(\lambda) \in \mathcal{N}_r(P(\lambda))$. Per com és l'estructura de $z(\lambda)$ a (4.1.4),

$$z(\lambda) \text{ és un vector polinomial } \iff x(\lambda) \text{ és vector polinomial.}$$

L'estructura de $z(\lambda)$ també implica que un conjunt de vectors $z_1(\lambda), \ldots, z_j(\lambda) \in \mathcal{N}_r(C_1(\lambda))$ són linealment independents $\iff$ $x_1(\lambda), \ldots, x_j(\lambda) \in \mathcal{N}_r(P(\lambda))$ també són linealment independents.

Per tant aquesta correspondència $z(\lambda) \leftrightarrow x(\lambda)$ indueix una correspondència element a element entre els vectors de $\mathcal{N}_r(C_1(\lambda))$ i els de $\mathcal{N}_r(P(\lambda))$.

Per els vectors diferents de zero $z(\lambda)$ i $x(\lambda)$ tenim $deg(z(\lambda)) = deg(x(\lambda)) + (k-1)$, per tant la diferència entre l'ordre de cada parell de vectors correspostos entre $\mathcal{N}_r(C_1(\lambda))$ i $\mathcal{N}_r(P(\lambda))$ és exactament $p(k-1)$, on $p = dim(\mathcal{N}_r(C_1(\lambda))) = dim(\mathcal{N}_r(P(\lambda)))$. Per tant

$z_1(\lambda), \ldots, z_j(\lambda) \in \mathcal{N}_r(C_1(\lambda))$ és una base minimal per la dreta de $C_1(\lambda) \iff x_1(\lambda), \ldots, x_j(\lambda) \in \mathcal{N}_r(P(\lambda))$ és base minimal per la dreta de $P(\lambda)$,

per tant ja hem provat $(b1)$ i $(c1)$.

Per acabar la demostració ens falta provar $(b2)$ i $(c2)$ pels índexs i bases minimals per l'esquerra. L'estructura dels vectors a $\mathcal{N}_\ell(C_1(\lambda))$ és més complicada però podem esbrinar a partir de (4.1.2), reescrit com:

$$C_1(\lambda) = S^{-1}(\lambda) diag[P(\lambda), I_n, \ldots, I_n] R^{-1}(\lambda).$$

Això implica que, sigui $T(\lambda) := S^{-1}(\lambda) diag[P(\lambda), I_n, \ldots, I_n]$, aleshores $\mathcal{N}_\ell(C_1(\lambda)) = \mathcal{N}_\ell(T(\lambda))$.

Però

$$T(\lambda) = \begin{bmatrix} P(\lambda) & -P_1(\lambda) & -P_2(\lambda) & \cdots & -P_{k-1}(\lambda) \\ 0 & I_n & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & I_n & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & I_n \end{bmatrix},$$

per tant $w(\lambda)^T \in \mathcal{N}_\ell(C_1(\lambda)) \iff w(\lambda)^T$ és de la forma

$$w(\lambda)^T = \begin{bmatrix} y(\lambda)^T & y(\lambda)^T P_1(\lambda) & \cdots & y(\lambda)^T P_{k-1}(\lambda) \end{bmatrix}$$

per algun $y(\lambda)^T \in \mathcal{N}_\ell(P(\lambda)) \subseteq \mathbb{F}^{1\times m}(\lambda)$.

De la mateixa manera que hem vist pels índexs i bases minimals per la dreta, tenim que la correspondència entre $w(\lambda)^T \leftrightarrow y(\lambda)^T$ indueix una correspondència element a element entre els vectors de $\mathcal{N}_\ell(C_1(\lambda))$ i els vectors de $\mathcal{N}_\ell(P(\lambda))$. Per acabar la demostració ens falta trobar una relació entre els graus dels vectors correspostos de $w(\lambda)^T$ i $y(\lambda)^T$.

Volem veure que

$$deg(w(\lambda)^T) = deg(y(\lambda)^T)$$

es compleix $\forall w(\lambda)^T \in \mathcal{N}_\ell(C_1(\lambda))$. Considerem el pas de Horner $P_i(\lambda)$ per $1 \le i \le k-1$. Llavors

$$\lambda^{k-1} P_i(\lambda) + \widehat{P}_{k-i-1}(\lambda) = P(\lambda), \tag{4.1.5}$$

on $\widehat{P}_{k-i-1}(\lambda) = \lambda^{k-i-1} A_{k-i-1} + \cdots + \lambda A_1 + A_0$. Ara suposem que $y(\lambda)^T$ és un vector qualsevol de $\mathcal{N}_\ell(P(\lambda))$ tal que $y(\lambda)^T P_i(\lambda) \neq 0$. Aleshores, de 4.1.5 veiem que

$$\lambda^{k-i} y(\lambda)^T P_i(\lambda) = -y(\lambda)^T \widehat{P}_{k-i-1}(\lambda),$$

i calculant els graus de cada costat queda

$$(k-i) + deg(y(\lambda)^T P_i(\lambda)) = deg(y(\lambda)^T \widehat{P}_{k-i-1}(\lambda)) \le (k-i-1) + deg(y(\lambda)^T),$$

per tant $deg(y(\lambda^T P_i(\lambda))) < deg(y(\lambda)^T)$. Amb això i la forma que tenen $w(\lambda)^T$ amb qualsevol $y(\lambda)^T \in \mathcal{N}_\ell(P(\lambda))$, tenim que o $y(\lambda)^T P_i(\lambda) = 0$ o $deg(y(\lambda^T P_i(\lambda))) < deg(y(\lambda)^T)$ per $1 \le i \le k-1$, per tant $deg(w(\lambda)^T) = deg(y(\lambda)^T)$.

Així doncs, tots els parells de vectors correspostos entre $\mathcal{N}_\ell(C_1(\lambda))$ i $\mathcal{N}_\ell(P(\lambda))$ tenen el mateix ordre, i per tant, la base minimal de $\mathcal{N}_\ell(P(\lambda))$ ve induïda per la base minimal de $\mathcal{N}_\ell(C_1(\lambda))$, completant la demostració de $(b2)$ i $(c2)$.

□

Per la segona forma companya de Frobenius $C_2(\lambda) := \lambda X_2 + Y_2$, on

$$X_2 = \begin{bmatrix} A_k & & & \\ & I_m & & \\ & & \ddots & \\ & & & I_m \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{s_2 \times t_2}[\lambda] \quad \text{i} \quad Y_2 = \begin{bmatrix} A_{k-1} & -I_m & & 0 \\ A_{k-2} & 0 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & -I_m \\ A_0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{s_2 \times t_2}[\lambda] \tag{4.1.6}$$

amb $s_2 = km$ i $t_2 = n + (k-1)m$, tenim resultats similars.

Teorema 4.1.3. *([3]) Sigui $P(\lambda) = \sum_{i=0}^{k} \lambda^i A_i \in \mathbb{F}^{m\times n}[\lambda]$ amb grau$(P(\lambda)) = k \geq 2$ i sigui $C_2(\lambda)$ la seva segona forma companya de Frobenius. Aleshores:*

(a) $C_2(\lambda) \asymp P(\lambda)$ ($C_2(\lambda)$ és una linealització forta de $P(\lambda)$).

(b) (b1) Si $\mathcal{N}_r(C_2(\lambda)) = \{z_1(\lambda), \ldots, z_p(\lambda)\}$ és una base minimal per la dreta qualsevol de $C_2(\lambda)$, amb vectors dividits en blocs segons els blocs en columna de $C_2(\lambda)$, i sigui $x_j(\lambda)$ el primer bloc $(n \times 1)$ de $z_j(\lambda)$ per $j = 1, \ldots, p$.
Aleshores, $\{x_1(\lambda), \ldots, x_p(\lambda)\}$ és una base minimal per la dreta de $P(\lambda)$.

(b2) Si $\mathcal{N}_\ell(C_2(\lambda)) = \{w_1(\lambda)^T, \ldots, w_q(\lambda)^T\}$ és una base minimal per l'esquerra qualsevol de $C_2(\lambda)$, amb vectors dividits en blocs segons els blocs en fila de $C_2(\lambda)$, i sigui $y_j(\lambda)^T$ el k-èssim bloc $(1 \times m)$ de $w_j(\lambda)^T$ per $j = 1, \ldots, q$.
Aleshores, $\{y_1(\lambda)^T, \ldots, y_q(\lambda)^T\}$ és una base minimal per l'esquerra de $P(\lambda)$.

(c) (c1) Si $0 \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \leq \cdots \leq \varepsilon_p$ són els índexs minimals per la dreta de $P(\lambda)$, aleshores

$$\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \leq \cdots \leq \varepsilon_p$$

també són els índexs minimals per la dreta de $C_2(\lambda)$.

(c2) Si $0 \leq \eta_1 \leq \eta_2 \leq \cdots \leq \eta_q$ són els índexs minimals per l'esquerra de $P(\lambda)$, aleshores

$$\eta_1 + k - 1 \leq \eta_2 + k - 1 \leq \cdots \leq \eta_p + k - 1$$

són els índexs minimals per l'esquerra de $C_2(\lambda)$.

Demostració. La demostració és similar a la del Teorema 4.1.2. □

4.2 Formes companyes per graus $\ell \geq 1$

Per a poder definir les noves ℓ-ificacions necessitem algunes definicions. Donada $P(\lambda) \in \mathbb{F}^{m\times n}[\lambda]$ amb $\deg(P(\lambda)) = k$, les ℓ-ificacions que construirem han de ser amb $1 \leq \ell \leq k$ un divisor de k, és a dir, tal que $k = \ell s$ per algun $s \in \mathbb{Z}$.

Basant-nos en els coeficients de $P(\lambda)$ i la factorització $k = \ell s$, les següents matrius polinomials de grau ℓ estan ben definides:

$$B_1(\lambda) := \lambda^\ell A_\ell + \lambda^{\ell-1} A_{\ell-1} + \ldots + \lambda A_1 + A_0, \tag{4.2.1}$$

$$B_j(\lambda) := \lambda^\ell A_{\ell j} + \lambda^{\ell-1} A_{\ell j-1} + \ldots + \lambda A_{\ell(j-1)+1}, \quad \text{per } j = 2, \ldots, s. \tag{4.2.2}$$

Observem que cada $B_j(\lambda)$ per $j = 2, \ldots, s$ té exactament ℓ termes, cap d'ells de grau 0, mentre que $B_1(\lambda)$ té $\ell + 1$ termes inclòs el terme de grau zero A_0. La propietat més rellevant de les matrius $B_1(\lambda), B_2(\lambda), \ldots, B_s(\lambda)$ és que satisfan la igualtat

$$P(\lambda) = \lambda^{\ell(s-1)} B_s(\lambda) + \lambda^{\ell(s-2)} B_{s-1}(\lambda) + \ldots + \lambda^\ell B_2(\lambda) + B_1(\lambda). \tag{4.2.3}$$

Usant les matrius $B_1(\lambda), B_2(\lambda), \ldots, B_s(\lambda)$ com blocs, definim les següents matrius de grau estès ℓ:

$$C_1^\ell(\lambda) := \begin{bmatrix} B_s(\lambda) & B_{s-1}(\lambda) & B_{s-2}(\lambda) & \cdots & B_1(\lambda) \\ -I_n & \lambda^\ell I_n & 0 & \cdots & 0 \\ & -I_n & \lambda^\ell I_n & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & -I_n & \lambda^\ell I_n \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{(m+(s-1)n)\times sn}[\lambda] \tag{4.2.4}$$

i

$$C_2^\ell(\lambda) := \begin{bmatrix} B_s(\lambda) & -I_m & & & \\ B_{s-1}(\lambda) & \lambda^\ell I_m & -I_m & 0 & \\ B_{s-2}(\lambda) & 0 & \lambda^\ell I_m & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -I_m \\ B_1(\lambda) & 0 & \cdots & 0 & \lambda^\ell I_m \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{sm\times(n+(s-1)m)}[\lambda]. \tag{4.2.5}$$

A continuació veurem dos teoremes que demostren que $C_1^\ell(\lambda)$ i $C_2^\ell(\lambda)$ són ℓ-ificacions fortes per $P(\lambda)$ de grau $k = \ell s$.

Teorema 4.2.1. *([3]) Sigui $P(\lambda) = \sum_{i=0}^k \lambda^i A_k \in \mathbb{F}^{m\times n}[\lambda]$ amb grau$(P(\lambda)) = k \geq 2$. Suposem $1 \leq \ell \leq k$ és un divisor de k amb $k = \ell s$ per $s \in \mathbb{Z}$ i sigui $C_1^\ell(\lambda)$ la matriu definida a (4.2.4). Aleshores:*

(a) $C_1^\ell(\lambda) \asymp P(\lambda)$ ($C_1^\ell(\lambda)$ és una linealització forta de $P(\lambda)$).

(b) (b1) Si $\mathcal{N}_r(C_1^\ell(\lambda)) = \{z_1(\lambda), \ldots, z_p(\lambda)\}$ és una base minimal per la dreta qualsevol de $C_1^\ell(\lambda)$, amb vectors dividits en blocs segons els blocs en columna de $C_1^\ell(\lambda)$, i sigui $x_j(\lambda)$ el s-éssim bloc $(n \times 1)$ de $z_j(\lambda)$ per $j = 1, \ldots, p$.
Aleshores, $\{x_1(\lambda), \ldots, x_p(\lambda)\}$ és una base minimal per la dreta de $P(\lambda)$.

(b2) Si $\mathcal{N}_\ell(C_1^\ell(\lambda)) = \{w_1(\lambda)^T, \ldots, w_q(\lambda)^T\}$ és una base minimal per l'esquerra qualsevol de $C_1^\ell(\lambda)$, amb vectors dividits en blocs segons els blocs en fila de $C_1^\ell(\lambda)$, i sigui $y_j(\lambda)^T$ el primer bloc $(1 \times m)$ de $w_j(\lambda)^T$ per $j = 1, \ldots, q$.
Aleshores, $\{y_1(\lambda)^T, \ldots, y_q(\lambda)^T\}$ és una base minimal per l'esquerra de $P(\lambda)$.

(c) (c1) Si $0 \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \leq \cdots \leq \varepsilon_p$ són els índexs minimals per la dreta de $P(\lambda)$, aleshores

$$\varepsilon_1 + k - \ell \leq \varepsilon_2 + k - \ell \leq \cdots \leq \varepsilon_p + k - \ell$$

són els índexs minimals per la dreta de $C_1^\ell(\lambda)$.

(c2) Si $0 \leq \eta_1 \leq \eta_2 \leq \cdots \leq \eta_q$ *són els índexs minimals per l'esquerra de* $P(\lambda)$*, aleshores*

$$\eta_1 \leq \eta_2 \leq \cdots \leq \eta_p$$

també són els índexs minimals per l'esquerra de $C_1^{\ell}(\lambda)$*.*

Demostració. El desenvolupament de la demostració avança en paral·lel amb la del Teorema 4.1.2, per tant no entrarem en molt detall.

Primer definirem els polinomis

$$Q_0(\lambda) := B_s(\lambda) \quad \text{i} \quad Q_j(\lambda) := \lambda^{\ell} Q_{j-1}(\lambda) + B_{s-j}(\lambda), \quad \text{per } j = 1, \dots, s-1, \tag{4.2.6}$$

que s'utilitzaran de forma anàloga als polinomis resultant dels passos de Horner de la demostració del Teorema 4.1.2.

Observem que podem reescriure (4.2.3) com

$$Q_{s-1}(\lambda) = P(\lambda).$$

Considerem les matrius unimodulars

$$S_{\ell}(\lambda) = \begin{bmatrix} I_m & Q_0(\lambda) & Q_1(\lambda) & \cdots & Q_{s-2}(\lambda) \\ 0 & I_n & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & I_n & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & I_n \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{(m+(s-1)n)\times(m+(s-1)n)}[\lambda]$$

i

$$R_{\ell}(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^{(s-l)\ell} I_n & -I_n & -\lambda^{\ell} I_n & \cdots & -\lambda^{(s-2)\ell} I_n \\ \lambda^{(s-2)\ell} I_n & 0 & -I_n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -\lambda^{\ell} I_n \\ \lambda^{\ell} I_n & 0 & \cdots & 0 & -I_n \\ I_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{sn\times sn}[\lambda].$$

Si operem utilitzant que $Q_{s-1}(\lambda) = P(\lambda)$, tenim que

$$S_{\ell}(\lambda) C_1^{\ell}(\lambda) R_{\ell}(\lambda) = diag[P(\lambda), I_n, \dots, I_n], \tag{4.2.7}$$

per tant $C_1^{\ell}(\lambda) \smile P(\lambda)$.

Volem veure que $rev_{\ell} C_1^{\ell}(\lambda) \smile rev_k P(\lambda)$. Primer observem que

$$rev_{\ell} C_1^{\ell}(\lambda) = \begin{bmatrix} rev_{\ell} B_s & rev_{\ell} B_{s-1} & rev_{\ell} B_{s-2} & \cdots & rev_{\ell} B_1 \\ -\lambda^{\ell} I_n & I_n & 0 & \cdots & 0 \\ & -\lambda^{\ell} I_n & I_n & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & -\lambda^{\ell} I_n & I_n \end{bmatrix},$$

i definim

$$\begin{aligned} \widetilde{Q}_0(\lambda) &:= rev_{\ell} B_1(\lambda) \quad i \\ \widetilde{Q}_j(\lambda) &:= \lambda^{\ell} \widetilde{Q}_{j-1}(\lambda) + rev_{\ell} B_{j+1}(\lambda), \quad \text{per } j = 1, \dots, s-1, \end{aligned} \tag{4.2.8}$$

tal que

$$\widetilde{Q}_{s-1}(\lambda) = rev_k P(\lambda). \tag{4.2.9}$$

Ara considerem les matrius unimodulars

$$\widetilde{S}_\ell(\lambda) = \begin{bmatrix} I_m & -\widetilde{Q}_{s-2}(\lambda) & -\widetilde{Q}_{s-3}(\lambda) & \cdots & -\widetilde{Q}_0(\lambda) \\ 0 & I_n & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & I_n & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & I_n \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{(m+(s-1)n)\times(m+(s-1)n)}[\lambda]$$

i

$$\widetilde{R}_\ell(\lambda) = \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda^\ell I_n & I_n & \ddots & \ddots & \vdots \\ \lambda^{2\ell} I_n & \lambda^\ell I_n & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \lambda^{(s-1)\ell} I_n & \cdots & \lambda^{2\ell} I_n & \lambda^\ell I_n & I_n \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{sn\times sn}[\lambda];$$

notem que $\widetilde{R}_\ell(\lambda)$ és un bloc de Toeplitz. Ara tornem a operar utilitzant (4.2.8) i (4.2.9) i arribem a

$$\widetilde{S}_\ell(\lambda) rev_\ell C_1^\ell(\lambda) \widetilde{R}_\ell(\lambda) = diag[rev_k P(\lambda), I_n, \ldots, I_n].$$

Per tant $rev_\ell C_1^\ell(\lambda) \smile rev_k P(\lambda)$ i queda demostrat l'apartat (a).

Ara veurem les demostracions dels apartats $(b1)$ i $(c1)$, que són molts semblants a les proves dels mateixos apartats del Teorema 4.1.2.

L'estructura de $C_1^\ell(\lambda)$ implica que $z(\lambda) \in \mathcal{N}_r(C_1^\ell(\lambda)) \iff$

$$z(\lambda) = \left[\lambda^{(s-1)\ell} x(\lambda)^T, \ldots, \lambda^{2\ell} x(\lambda)^T, \lambda^\ell x(\lambda)^T, x(\lambda)^T\right]^T \text{ per algun } x(\lambda) \in \mathcal{N}_r(P(\lambda)). \tag{4.2.10}$$

Aleshores $z(\lambda)$ és un vector polinomial $\iff$ $x(\lambda)$ és vector polinomial. L'estructura de $z(\lambda)$ també implica que un conjunt de vectors $z_1(\lambda), \ldots, z_j(\lambda) \in \mathcal{N}_r(C_1^\ell(\lambda))$ són linealment independents $\iff$ $x_1(\lambda), \ldots, x_j(\lambda) \in \mathcal{N}_r(P(\lambda))$ també són linealment independents. Per tant aquesta correspondència $z(\lambda) \leftrightarrow x(\lambda)$ indueix una correspondència element a element entre els vectors de $\mathcal{N}_r(C_1^\ell(\lambda))$ i els de $\mathcal{N}_r(P(\lambda))$.

També observem que per els vectors diferents de zero $z(\lambda)$ i $x(\lambda)$ tenim $deg(z(\lambda)) = deg(x(\lambda)) + (k-\ell)$. El que resta d'argument és idèntic al de la prova de $(b1)$ i $(c1)$ del Teorema 4.1.2 substituint $(k-1)$ per $(k-\ell)$.

Ara només queda demostrar $(b2)$ i $(c2)$, que torna a ser molt semblant a les proves dels mateixos apartats del Teorema 4.1.2.

De (4.2.7) els subespais per l'esquerra satisfan

$$\mathcal{N}_\ell(C_1^\ell(\lambda)) = \mathcal{N}_\ell(T_\ell(\lambda)),$$

on $T_\ell(\lambda) := S_\ell^{-1} diag[P(\lambda), I_n, \dots, I_n]$. És a dir

$$T_\ell(\lambda) = \begin{bmatrix} P(\lambda) & -Q_0(\lambda) & -Q_1(\lambda) & \cdots & -Q_{s-2}(\lambda) \\ 0 & I_n & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & I_n & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & I_n \end{bmatrix}.$$

Per tant $w(\lambda)^T \in \mathcal{N}_\ell(C_1^\ell(\lambda)) \iff w(\lambda)^T$ és de la forma

$$w(\lambda)^T = \begin{bmatrix} y(\lambda)^T & y(\lambda)^T Q_0(\lambda) & \cdots y(\lambda)^T Q_{s-2}(\lambda) \end{bmatrix}$$

per algun $y(\lambda) \in \mathcal{N}_\ell(P(\lambda)) \subseteq \mathbb{F}^{1\times m}(\lambda)$. El mateix argument de la demostració del Teorema 4.1.2 ara ens prova que la correspondència $w(\lambda)^T \leftrightarrow y(\lambda)^T$ que acabem de veure indueix una correspondència element a element entre els vectors de $\mathcal{N}_\ell(C_1^\ell(\lambda))$ i els vectors de $\mathcal{N}_\ell(P(\lambda))$.

Per acabar la demostració només falta veure que $deg(w(\lambda)^T) = deg(y(\lambda)^T)$ es compleix $\forall w(\lambda)^T \in \mathcal{N}_\ell(C_1^\ell(\lambda))$.

De 4.2.3 i 4.2.6 obtenim els anàlegs de 4.1.5:

$$\lambda^{\ell(s-(j+1))} Q_j(\lambda) + \widehat{Q}_j(\lambda) = P(\lambda) \text{ per cada } j = 0, 1, \dots, s-2,$$

on $\widehat{Q}_j(\lambda) = \lambda^{\ell(s-(j+2))} B_{s-(j+1)}(\lambda) + \cdots + \lambda^\ell B_2(\lambda) + B_1(\lambda)$ és el truncament de $P(\lambda)$ de grau $(\ell(s-(j+2)) + \ell)$. Per tant si $y(\lambda)^T \in \mathcal{N}_\ell(P(\lambda))$ i $y(\lambda)^T Q_j(\lambda) \neq 0$, aleshores

$$\lambda^{\ell(s-(j+1))} y(\lambda)^T Q_j(\lambda) = -y(\lambda)^T \widehat{Q}_j(\lambda).$$

Com que $deg(B_{s-(j+1)}(\lambda)) = \ell$, calculant el grau a cada banda de la igualtat ens queda

$$\begin{aligned} \ell(s-(j+1)) + deg(y(\lambda)^T Q_j(\lambda)) &= deg(y(\lambda)^T \widehat{Q}_j(\lambda)) \\ &\leq deg(y(\lambda)^T) + \ell(s-(j+2)) + \ell, \end{aligned}$$

per tant,

$$deg(y(\lambda)^T Q_j(\lambda)) \leq deg(y(\lambda)^T) \quad \text{per } j = 0, 1, \dots, s-2.$$

Per tant, per la forma que té $w(\lambda)^T$ amb qualsevol $y(\lambda)^T \in \mathcal{N}_\ell(P(\lambda))$, tenim

$$deg(y(\lambda)^T Q_j(\lambda)) \leq deg(y(\lambda)^T) \quad \text{o} \quad y(\lambda)^T Q_j(\lambda) = 0 \quad \text{per } 0 \leq j \leq s-2$$

per tant $deg(w(\lambda)^T) = deg(y(\lambda)^T)$.

Un cop vist això, pel mateix argument que a la demostració del Teorema 4.1.2 hem provat els apartats $(b2)$ i $(c2)$.

□

Ara veurem la contrapartida del Teorema 4.2.1 però per a $C_2^\ell(\lambda)$.

Teorema 4.2.2. *([3]) Sigui $P(\lambda) = \sum_{i=0}^k \lambda^i A_i \in \mathbb{F}^{m\times n}[\lambda]$ amb $grau(P(\lambda)) = k \geq 2$. Suposem $1 \leq \ell \leq k$ és un divisor de k amb $k = \ell s$ per $s \in \mathbb{Z}$ i sigui $C_2^\ell(\lambda)$ la matriu definida a (4.2.5). Aleshores:*

(a) $C_2^\ell(\lambda) \asymp P(\lambda)$ ($C_2^\ell(\lambda)$ *és una linealització forta de* $P(\lambda)$).

(b) (b1) *Si* $\mathcal{N}_r(C_2^\ell(\lambda)) = \{z_1(\lambda), \dots, z_p(\lambda)\}$ *és una base minimal per la dreta qualsevol de* $C_2^\ell(\lambda)$*, amb vectors dividits en blocs segons els blocs en columna de* $C_2^\ell(\lambda)$*, i sigui* $x_j(\lambda)$ *el primer bloc* $(n \times 1)$ *de* $z_j(\lambda)$ *per* $j = 1, \dots, p$*. Aleshores,* $\{x_1(\lambda), \dots, x_p(\lambda)\}$ *és una base minimal per la dreta de* $P(\lambda)$.

(b2) *Si* $\mathcal{N}_r(C_2^\ell(\lambda)) = \{w_1(\lambda)^T, \dots, w_q(\lambda)^T\}$ *és una base minimal per l'esquerra qualsevol de* $C_2^\ell(\lambda)$*, amb vectors dividits en blocs segons els blocs en fila de* $C_2^\ell(\lambda)$*, i sigui* $y_j(\lambda)^T$ *el s-èssim bloc* $(1 \times m)$ *de* $w_j(\lambda)^T$ *per* $j = 1, \dots, q$*. Aleshores,* $\{y_1(\lambda)^T, \dots, y_q(\lambda)^T\}$ *és una base minimal per l'esquerra de* $P(\lambda)$.

(c) (c1) *Si* $0 \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \leq \cdots \leq \varepsilon_p$ *són els índexs minimals per la dreta de* $P(\lambda)$*, aleshores*

$$\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \leq \cdots \leq \varepsilon_p$$

també són els índexs minimals per la dreta de $C_2^\ell(\lambda)$.

(c2) *Si* $0 \leq \eta_1 \leq \eta_2 \leq \cdots \leq \eta_q$ *són els índexs minimals per l'esquerra de* $P(\lambda)$*, aleshores*

$$\eta_1 + k - \ell \leq \eta_2 + k - \ell \leq \cdots \leq \eta_p + k - \ell$$

són els índexs minimals per l'esquerra de $C_2^\ell(\lambda)$.

Demostració. La demostració és molt similar a la del Teorema 4.2.1. $\square$

Després de les linealitzacions, les quadrificacions són les ℓ-ificacions més importants des del punt de vista pràctic.

Hem vist que per a la construcció de les formes C_1^ℓ i C_2^ℓ de grau ℓ és necessari que ℓ sigui divisor de $k = deg(P(\lambda))$. Per tant, tenim el següent corol·lari.

Corol·lari 4.2.3. *([3]) Per a qualsevol matriu polinomial de grau parell existeix una quadrificació forta.*

Per tancar el capítol mostrarem una manera senzilla de construir ℓ-ificacions per a qualsevol $P(\lambda) \in \mathbb{F}^{m \times n}[\lambda]$ amb $deg(P(\lambda)) = k$, on el grau ℓ pot ser triat arbitrariament sempre que $1 \leq \ell < k$. Aquestes ℓ-ificacions no es consideren formes companyes de grau ℓ ja que generalment no són ℓ-ificacions fortes. Igualment ens donen un model uniforme per construir ℓ-ificacions per a qualsevol $P(\lambda)$. Les definim de la forma següent:

$$W_1^\ell(\lambda) := \begin{bmatrix} P_\ell(\lambda) & A_{k-\ell-1} & \cdots & A_1 & A_0 \\ -I_n & \lambda I_n & & 0 & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & -I_n & \lambda I_n & 0 \\ 0 & & & -I_n & \lambda I_n \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{(m+n(k-\ell))\times n(k-\ell+1)}[\lambda] \qquad (4.2.11)$$

i

$$W_2^\ell(\lambda) := \begin{bmatrix} P_\ell(\lambda) & -I_m & & & 0 \\ A_{k-\ell-1} & \lambda I_m & -I_m & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ A_1 & 0 & \cdots & \lambda I_m & -I_m \\ A_0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda I_m \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{(m(k-\ell+1))\times(n+m(k-\ell))}[\lambda], \qquad (4.2.12)$$

on $P_\ell(\lambda) = \lambda^\ell A_k + \lambda^{\ell-1} A_{k-1} + \cdots + A_{k-\ell}$ és el ℓ-èssim pas de Horner de $P(\lambda)$.

A [3] es demostra que $W_1^\ell(\lambda)$ i $W_1^\ell(\lambda)$ són ℓ-ificacions de $P(\lambda)$ i la relació dels índexs minimals i bases minimals entre les matrius.

Observació 4.2.4. *Si $P(\lambda) \in \mathbb{F}^{n\times n}[\lambda]$ és regular aleshores no tindrà nucli, per tant els vectors interessants en aquest cas són els vectors propis per la dreta i per l'esquerra (bases dels espais nuls $\mathcal{N}_r(P(\lambda_0)) \subseteq \overline{\mathbb{F}}^{n\times 1}$ i $\mathcal{N}_\ell(P(\lambda_0)) \subseteq \overline{\mathbb{F}}^{1\times n}$) corresponents a cada valor propi $\lambda_0 \in \overline{\mathbb{F}}$ de $P(\lambda)$. Per tant, al cas regular ens agradaria saber com recuperar les bases $\mathcal{N}_\ell(P(\lambda_0))$ i $\mathcal{N}_r(P(\lambda_0))$ de les bases $\mathcal{N}_\ell(C_1^\ell(\lambda_0))$, $\mathcal{N}_\ell(C_2^\ell(\lambda_0))$ i $\mathcal{N}_r(C_1^\ell(\lambda_0))$, $\mathcal{N}_r(C_2^\ell(\lambda_0))$ respectivament. Resulta que per cada valor propi finit ho podem aconseguir de la mateixa manera que hem descrit als Teoremes 4.2.1 i 4.2.2.*

Per $\lambda_0 = \infty$ els subespais interessants són els de la matriu coeficient de λ^ℓ a $C_1^\ell(\lambda)$ i $C_2^\ell(\lambda)$ i els de la matriu coeficient λ^k a $P(\lambda)$. Més endavant veurem que es poden recuperar els vectors propis de $P(\lambda)$ del primer bloc de cada base minimal $\mathcal{N}_\ell(C_1^\ell(\lambda_0))$, $\mathcal{N}_r(C_1^\ell(\lambda_0))$, $\mathcal{N}_\ell(C_2^\ell(\lambda_0))$ i $\mathcal{N}_r(C_2^\ell(\lambda_0))$.

Capítol 5

Teorema de la suma d'índexs per matrius polinomials

En aquest capítol veurem que, donada $P(\lambda) \in \mathbb{F}^{m\times n}[\lambda]$ es pot establir una relació fonamental entre els índexs estructurals i els índexs minimals. Aquesta relació és ben coneguda per matrius polinomials sobre el cos $\mathbb{R}$ (veure [12]).

Primer considerarem aquesta relació per dos casos particulars (matrius polinomials regulars i feixos de matrius) i després l'extendrem per al cas general.

Lema 5.0.1. *([1]) (Suma d'índexs per matrius polinomials regulars). Sigui $P(\lambda) \in \mathbb{F}^{n\times n}[\lambda]$ regular i amb $grade(P(\lambda)) = k$, aleshores:*

$$\delta_{fin}(P(\lambda)) + \delta_\infty(P(\lambda)) = kn.$$

Demostració. A partir de la forma de Smith de $P(\lambda)$ és pot veure que $\delta_{fin}(P(\lambda)) = d$ on $d := deg(det(P(\lambda)))$, per tant $d \leq kn$.
D'altra banda, $P(\lambda)$ regular $\implies rev_k P(\lambda)$ regular, aleshores $\delta_\infty(P(\lambda)) = det(rev_k P(\lambda))$.

Escrivim

$$det(P(\lambda)) = a_d\lambda^d + a_{d-1}\lambda^{d-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

amb $a_d \neq 0$, d'on

$$\begin{aligned} det(rev_k P(\lambda)) &= det\left(\lambda^k P\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right) = \lambda^{kn}\left(detP\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right) \\ &= \lambda^{kn}(a_d\lambda^{-d} + a_{d-1}\lambda^{-(d-1)} + \cdots + a_1\lambda^{-1} + a_0) \\ &= \lambda^{kn-d}(a_d + a_{d-1}\lambda + \cdots + a_1\lambda^{d-1} + a_0\lambda^d). \end{aligned}$$

I com $a_d \neq 0$, tenim que

$$\delta_\infty(P(\lambda)) = kn - d,$$

i per tant

$$\delta_{fin}(P(\lambda)) + \delta_\infty(P(\lambda)) = d + (kn - d) = kn.$$

$\square$

Recordem que la Forma Canònica de Kronecker definida al Teorema 2.2.2 requereix que el cos $\mathbb{F}$ sigui algebraicament tancat. En el cas que $\mathbb{F}$ no és algebraicament tancat podem considerar la següent forma.

Lema 5.0.2. *([6]) (Forma parcial de Kronecker) Sigui $L(\lambda) \in \mathbb{F}^{m\times n}[\lambda]$ un feix de matrius, aleshores*

$$L(\lambda) \underset{e}{\sim} \begin{bmatrix} R(\lambda) & 0 \\ 0 & S(\lambda) \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{m\times n}[\lambda],$$

on $R(\lambda) \in \mathbb{F}^{r\times r}[\lambda]$ és un feix de matrius regular i $S(\lambda) \in \mathbb{F}^{(m-r)\times(n-r)}$ és un feix de matrius sense espectre finit ni infinit i que és la suma directa de blocs de la forma $0_{k\times\ell}$, $S_d(\lambda)$ i $S_d^T(\lambda)$, on

$$S_d(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{d\times(d+1)}[\lambda]$$

Demostració. Veure la primera part de la prova de la forma canònica de Kronecker donada per Gantmacher a [6].

□

Lema 5.0.3. *([3]) (Suma d'índexs per feixos de matrius). Per qualsevol feix de matrius $L(\lambda) \in \mathbb{F}^{m\times n}[\lambda]$ es compleix que*

$$\delta_{fin}(L(\lambda)) + \delta_\infty(L(\lambda)) + \mu(L(\lambda)) = rang(L(\lambda)).$$

Demostració. Com que l'equivalència estricta conserva els divisors elementals finits i els infinits, i també els índexs minimals per la dreta i per l'esquerra, podem suposar sense pèrdua de generalitat per el Lema 5.0.2 que $L(\lambda)$ està en forma parcial de Kronecker, amb part regular $R(\lambda)$ i part singular $S(\lambda)$.

$\mu(L(\lambda)) = \mu(S(\lambda))$ perquè $R(\lambda)$ és regular i és directe que $rang(S(\lambda)) = \mu(S(\lambda))$. Per el Lema 5.0.1 tenim que

$$rang(R(\lambda)) = \delta_{fin}(R(\lambda)) + \delta_\infty(R(\lambda)).$$

Per tant

$$rang(L(\lambda)) = rang(R(\lambda)) + rang(S(\lambda)) = \delta_{fin}(R(\lambda)) + \delta_\infty(R(\lambda)) + \mu(L(\lambda)).$$

□

Finalment, considerem el resultat per a matrius polinomials $P(\lambda)$ qualsevol.

El Teorema de la suma d'índexs per a matrius polinomials, que ens dona una relació fonamental entre el rang, grau i tamany total de l'estructura espectral i singular d'una matriu polinomial qualsevol.

Teorema 5.0.4. *([3]) Sigui $P(\lambda) \in \mathbb{F}^{m\times n}[\lambda]$, aleshores*

$$\delta_{fin}(P(\lambda)) + \delta_\infty(P(\lambda)) + \mu(P(\lambda)) = grade(P(\lambda)) \cdot rang(P(\lambda)).$$

Demostració. Obtenim el resultat comptant de dues maneres diferents el rang de la primera forma companya de Frobenius $C_1(\lambda)$ de $P(\lambda)$.

La primera manera és utilitzant el Lema 5.0.3, l'apartat (c) del Teorema 4.1.2 i el fet que $C_1(\lambda)$ i $P(\lambda)$ tenen exactament els mateixos divisors elementals, finits i infinits (ja que $C_1(\lambda)$ és una linealització forta de $P(\lambda)$).

Concretament, sigui $grade(P(\lambda)) = k$ tenim

$$\begin{aligned} rang(C_1(\lambda)) &= \delta_{fin}(C_1(\lambda)) + \delta_\infty(C_1(\lambda)) + \mu(C_1(\lambda)) = \\ &= \delta_{fin}(P(\lambda)) + \delta_\infty(P(\lambda)) + \mu(P(\lambda)) + p(k-1), \end{aligned}$$

on p és el nombre d'índexs minimals per la dreta de $P(\lambda)$ (és a dir, $p = dim(\mathcal{N}_r(P(\lambda)))$.

La segona manera de comptar el rang de $C_1(\lambda)$ utilitza que $C_1(\lambda) \sim diag[P(\lambda), I_{n(k-1)}]$, de manera que

$$rang(C_1(\lambda)) = rang(P(\lambda)) + n(k-1) = r + n(k-1),$$

on $r = rang(P(\lambda))$.

Finalment, si igualem els dos resultats de comptar $rang(C_1(\lambda))$ de maneres diferents, obtenim

$$\delta_{fin}(P(\lambda)) + \delta_\infty(P(\lambda)) + \mu(P(\lambda)) + p(k-1) = r + n(k-1)$$

i aleshores

$$\delta_{fin}(P(\lambda)) + \delta_\infty(P(\lambda)) + \mu(P(\lambda)) = r + (n-p)(k-1) = r + r(k-1) = kr$$

com volíem.

□

Observació 5.0.5. *Cal remarcar que el resultat del Teorema 5.0.4 es compleix per a qualsevol matriu polinomial $P(\lambda)$ amb $grade(P(\lambda))$ qualsevol. Tot i que $\delta_{fin}(P(\lambda))$, $\mu(P(\lambda))$ i $rang(P(\lambda)$ són independents de $grade(P(\lambda))$, $\delta_\infty(P(\lambda))$ no ho és. L'efecte de la variació de $grade(P(\lambda))$ sobre $\delta_\infty(P(\lambda))$ és compensa amb la pròpia variació de $grade(P(\lambda))$ (veure Lema 1.2.12).*

Capítol 6

Conclusions

En quant als objectius del treball comentats al principi, crec que s'han assolit satisfactòriament.

Des del meu punt de vista, m'agradaria destacar que treballar en aquest TFG ha superat les meves expectatives. He pogut explorar un dels temes que més m'havia cridat l'atenció durant el grau i endinsar-me en la lectura de diversos articles.

He après a elaborar definicions formals, a escriure demostracions organitzades i riguroses i a trobar una manera més clara d'explicar els conceptes que treballem.

Els objectius de la part tècnica del treball també s'han complit raonablement, ja que hem estudiat una relació d'equivalència que ens permet transformar matrius polinomials variant el tamany i el grau, preservant l'estructura espectral. A més hem vist que gràcies al Teorema de la Suma d'Índexs hi ha una relació fonamental entre el rang, grau, i el tamany total de l'estructura espectral i singular d'una matriu polinomial qualsevol.

Finalment, cal destacar que no hem pogut aprofundir més per les limitacions de temps. Recomano continuar la lectura de [3] ja que mostren moltes més propietats de les formes companyes i linealitzacions, arribant a veure que no és possible conservar tots els índexs minimals amb formes companyes.

Bibliografia

[1] De Terán, F.; Dopico, F. M.: Sharp lower bounds for the dimension of linearizations of matrix polynomials, *Electron. J. Linear Algebra*, 17:518–531, 2008.

[2] De Terán, F.; Dopico, F. M.; Mackey, D. S.: Linearizations of singular matrix polynomials and the recovery of minimal indices, *Electron. J. Linear Algebra*, 18:371–402, 2009.

[3] De Terán, F.; Dopico, F. M.; Mackey, D. S.: Spectral equivalence of matrix polynomials and the Index Sum Theorem, *Linear Algebra and its Applications*, 459:264–333, 2014.

[4] Forney, G. D.: Minimal bases of rational vector spaces, with applications to multivariable linear systems, *SIAM*, J. Control 13:493–520, 1975.

[5] Frobenius, G.: Theorie der linearen Formen mit ganzen Coefficienten, *J. Reine Angew. Math. Crelle* 86:146-208, 1878.

[6] Gantmacher, F. R.: *Theory of Matrices*, Chelsea, New York, 1959.

[7] Gohberg, I.; Kaashoek, M. A.; Lancaster, P.: General theory of regular matrix polynomials and band Toeplitz operators, *Integral Equations Operator Theory*, 11(6):776-882, 1988.

[8] Gohberg, I.; Lancaster, P.; Rodman, L.: Matrix Polynomials, *Academic Press*, New York, 1982.

[9] Karampetakis, N. P.; Vologiannidis, S.: Infinite elementary divisor structure-preserving transformations for polynomial matrices, *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.* 13:493–503, 2003.

[10] Kronecker, L.: Über die congruenten Transformationen der bilinearen Formen, *1874, in: Collected Works I* 423-483, Chelsea, New York, 1968.

[11] Lancaster, P.: Linearizations of regular matrix polynomials, *Electron. J. Linear Algebra* 17:21-27, 2008.

[12] Praagman, C.: Invariants of polynomial matrices, *I. Landau (Ed.), Proceedings of the First European Control Conference (Grenoble, 1991)*, INRIA 1274–1277, 1991.

[13] Pugh, A. C.; Shelton, A. K.: On a new definition of strict system equivalence, *Int. J. Control* 27:657–672, 1978.

[14] Rosenbrock, H.H.: State-Space and Multivariable Theory, *John Wiley*, New York, 1970.