Universitat de Barcelona
Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRADO DE MATEMÁTICAS

Trabajo de fin de grado

ENTRE EL MANDATO DE LAS URNAS Y EL ÍNDICE DE PODER: JUNTS, EL JUEZ DE LA INVESTIDURA

Autor: Alicia Soriano Rossa

Director: Dr. Mikel Álvarez Mozos
Realizado en: Departamento de Matemática Económica, Financiera y Actuarial

Barcelona, 15 de enero de 2024

Abstract

This paper proposes the study of simple weighted majority games, as the main goal. In particular, we seek to represent these games mathematically and study the principal power indices that measure the transfer of utility between players. That is, measuring the strength of each agent when applying or maintaining their strategy. In order to achieve it, some of the most important concepts and results on cooperative games will be presented.

In addition, we will study some restrictions on cooperation and present a power index that allows us to dynamically analyse changes due to restrictions in the game.

Finally, as an illustration, we will analyse the parliament of The Congress of Deputies of Spain after the general elections of July 23, 2023. We will see how a political scenario can fit into the framework of Game Theory, and we will analyse the voting processes where participants can form coalitions. Applying a priori unions based on ideological affinities, we will estimate the real power of each parliamentary group.

Resumen

En este trabajo se propone el objetivo de estudiar los juegos simples de mayoría ponderada. En particular, se busca representar éstos juegos matemáticamente y estudiar los principales índices de poder que miden la transferencia de utilidad entre los jugadores. Esto es, medir qué fuerza tiene cada agente a la hora de aplicar o mantener su estrategia. Para ello, se presentarán algunos de los principales conceptos y resultados sobre los juegos cooperativos.

Además, estudiaremos ciertas restricciones a la cooperación y presentaremos un índice de poder que nos permita analizar de manera dinámica los cambios por restricciones en el juego.

Finalmente, como ilustración, analizaremos el parlamento del Congreso de los Diputados tras las elecciones generales del 23 julio de 2023. Veremos como un escenario político puede encajar en el marco de la Teoría de Juegos y analizaremos los procesos de votación donde los participantes pueden formar coaliciones. Aplicando uniones a priori basadas en afinidades ideológicas, estimaremos el poder real de cada grupo parlamentario.

2020 Mathematics Subject Classification. 91A06, 91A12, 91A80, 91B12, 91F10

Agradecimientos

Me gustaría expresar mi gratitud hacia mi familia y amigos, quienes me han brindado su apoyo y afecto constante a lo largo de la realización de este trabajo y, en general, durante los cinco años y medio que he pasado en la facultad.

En particular, quiero transmitir mi más sincero agradecimiento al Dr. Mikel Álvarez por su tiempo, inestimable ayuda y comprensión durante todo el proceso de desarrollo de este trabajo. Su guía y respaldo han sido fundamentales para el éxito de este proyecto, y estoy verdaderamente agradecida por su contribución a mi formación académica.

Índice

Capítulo 1

1. Introducción

Los primeros precursores del análisis de juegos trataban de solucionar juegos de mesa. Matemáticos como Borel (1021), Zermelo (1933) y von Neumann (1928) hicieron las primeras aportaciones científicas al área. No obstante, se establece como nacimiento de la Teoría de Juegos la publicación del libro "Theory of Games and Economic Behavior" en 1944, de los profesores von Neumann y Morgenstern.

Iniciada a mediados del siglo XX, la Teoría de Juegos ha conseguido acercar las disciplinas de las Matemáticas y las Ciencias Sociales. Es la rama de las matemáticas que estudia la toma de decisiones por parte de los individuos. En particular, la política y la economía han sido dos de los campos en los que se han aplicado éstos modelos matemáticos, con el fin de estudiar la conducta humana. De hecho, Cournot (1838) y Bertrand (1883), con motivaciones puramente económicas, ya resolvieron cómo deben comportarse las empresas cuando compiten en cantidades o precios.

Podemos definir la Teoría de Juegos como el campo de las matemáticas que estudia situaciones de toma de decisiones. Todas estas situaciones tienen en común que existe un número de *jugadores* o agentes que toman las decisiones, que cada uno de ellos tiene sus propias preferencias, y como fruto de las decisiones de cada jugador, tendremos un resultado.

En general, el objetivo de cada agente será maximizar su *utilidad*, es decir, el beneficio que pueda obtener del juego. Al conjunto de decisiones que tome un jugador, se denominan *estrategias*. Según si las decisiones son tomadas de manera individual o involucran a dos o más agentes, los juegos serán no cooperativos o cooperativos, respectivamente.

En los juegos no cooperativos no hay comunicación entre los jugadores y la Teoría de Juegos estudia el comportamiento de los actores que integran el juego y las estratégias óptimas de cada uno sobre sus oponentes. Se busca encontrar la mejor decisión basada en las predicciones que cada agente puede hacer.

Por el contrario, en los juegos cooperativos los agentes pueden llegar a acuerdos entre ellos y formar coaliciones que les permita obtener mayor utilidad, incluso antes de iniciar el juego. Se asume que los jugadores pueden comprometerse mediante acuerdos vinculantes a actuar de manera socialmente óptima, por lo que surge el interés en saber cómo repartir los beneficios obtenidos fruto de su cooperación. Analizar la comunicación entre jugadores y la formación de coaliciones es también crucial en los juegos cooperativos. La equidad y el reparto justo pasan a ser conceptos claves en el estudio de las estrategias.

Distinguimos dos clases de juegos cooperativos según si la utilidad es transferible o intransferible. En los juegos cooperativos de utilidad transferible, la utilidad que obtiene la coalición puede ser repartida y dividida entre los jugadores que la forman sin ninguna pérdida. Por contra, hay situaciones en las que el pago no puede ser transferido, estas corresponden a los juegos de utilidad no transferible.

Dentro de este marco teórico, un objetivo principal del estudio de juegos con utilidad transferible, es la evaulación y cuantificación de la influencia de los integrantes de una coalición. Los índices de poder son herramientas que nos permiten medir la influencia relativa de un actor en los resultados finales del juego cooperativo. Fundamentalmente, los índices de poder proporcionan una perspectiva cuantitativa a la hora de examinar dinámicas de cooperación.

Capítulo 2

2. Juegos Cooperativos

Destinamos este capítulo a describir brevemente los dos tipos de juegos cooperativos según la transferencia de utilidad. Se presentan a continuación los conceptos previos necesarios para caracterizar este tipo de juegos.

De ahora en adelante, denotaremos por $N = \{1, \ldots, \text{n}\}$ al conjunto de jugadores y por $|S|$ al número de jugadores en cada coalición $S \subset N$. Haciendo un abuso de notación, es habitual referirse a la *gran coalición*, formada por todos los jugadores, como coalición N. Por contra, llamamos *coalición vacía* a la coalición sin ningún miembro.
Finalmente, denotaremos por $\mathbb{R}^S$ al conjunto de resultados que los jugadores de una coalición S pueden obtener por ellos mismos.

Observación: Dada una coalición $S \subseteq N$, su vector de pagos $x \in \mathbb{R}^S$ cumple

$$x(S) = \sum_{i \in S} x_i.$$

2.1. Juegos de Utilidad No Transferible

Se presenta a continuación una breve introducción a los juegos cooperativos de utilidad no transferible, o simplemente NTU. Constituyen la clase más general dentro de los juegos cooperativos y, aún existiendo acuerdos vinculantes entre jugadores, la utilidad no puede ser transferible ya sea porque no es divisible o es subjetiva.

Definición 2.1. *Dada una coalición $S \subset N$ y un conjunto $A \subset \mathbb{R}^S$, decimos que A es* comprensivo *si, para todo par x,$y \in \mathbb{R}^S$ tal que $x \in A$, $y \leq x$, tenemos que $y \in A$.*
Además, el conjunto completamente comprensivo *de un conjunto A es el conjunto comprensivo más pequeño que contiene A.*

Definición 2.2. *Un juego cooperativo de* utilidad no transferible *(NTU) es un par (N,v), donde N es el conjunto de jugadores y v una función que asigna, a cada coalición $S \subset N$, un conjunto $v(S) \subset \mathbb{R}^S$. Por convención, $v(\emptyset) := \{0\}$.*
Además, para cada $S \subset N$, $S \neq \emptyset$:

1. *$v(S)$ es un subconjunto no vacío y cerrado de $\mathbb{R}^S$.*
2. *$v(S)$ es comprensivo. Además, para cada $i \in N$, $v(\{i\}) \neq \mathbb{R}$, i.e., existe $v_i \in \mathbb{R}$ tal que $v(\{i\}) = (-\infty,\ v_i]$.*
3. *El conjunto $v(S) \cap \{y \in \mathbb{R}^S$: para cada $i \in S$, $y_i \geq v_i\}$ es acotado.*

Observación: Sean $x, y \in \mathbb{R}^S$ dos vectores de dimensión $|S|$. En las definiciones anteriores hemos considerado que $x \geq y$ si y solo si para cada $i \in S$, $x_i \geq y_i$.

Observación 2: La idea de requerir que los conjuntos $v(S)$ sean comprensivos es que los jugadores que pertenecen a una coalición S pueden prescindir de la utilidad si así lo desean. A menudo también se asume que los conjuntos sean convexos, para introducir loterías.

Definición 2.3. *Sea (N, V) un juego NTU. Entonces, llamamos* asignaciones *a los vectores de $\mathbb{R}^N$. Una asignación $x \in \mathbb{R}^N$ es* factible *si existe una partición $\{S_1, \ldots, S_k\}$ de N que satisface, para cada $l \in \{1, \ldots, k\}$, tenemos $y \in V(S_l)$ tal que, para cada $i \in S_l$, $y_i = x_i$.*

Dado que la utilidad no es transferible entre los jugadores, el pago para cada coalición viene determinado por un conjunto de vectores de utilidad, y no un único valor.

Ejemplo 2.1: (El juego del banquero (Owen 1972))
Consideremos el siguiente juego NTU:

$$v(\{i\}) = \{x_i : x_i \leq 0\},\ i \in \{1, 2, 3\},$$

$$v(\{1, 2\}) = \{(x_1, x_2) : x_1 + 4x_2 \leq 1000 \ \ y \ \ x_1 \leq 1000\},$$
$$v(\{1, 3\}) = \{(x_1, x_3) : x_1 \leq 0 \ \ y \ \ x_3 \leq 0\},$$
$$v(\{2, 3\}) = \{(x_2, x_3) : x_2 \leq 0 \ \ y \ \ x_3 \leq 0\},$$
$$v(\{N\}) = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + x_3 \leq 1000\}.$$

Como bien podemos observar, ningún jugador puede obtener un pago positivo de manera individual. Si colaboran entre los dos primeros agentes, el primero obtará a recibir hasta 1000 dólares. Si el jugador 1 decide recompensar a su ayudante entonces el dinero se perderá con probabilidad del 75 %. El tercer jugador actúa como banquero, de manera que el jugador 1 pueda efectuar la transacción de manera segura utilizándolo como intermediario.

El caso anterior nos ejemplifica la razón por la que estos juegos se denominan de utilidad no transferible. Aunque (1000,0) $\in v(\{1,2\})$, los jugadores 1 y 2 no pueden acordar repartirse los beneficios (500,500) sin la ayuda del jugador 3.

El principal objetivo de análisis en este campo es encontrar reglas, llamadas *soluciones*, para escoger asignaciones factibles que resulten equitativas, justas y estables. Si una solución consta de una única asignación, a esta se la denomina *regla de asignación.*

2.2. Juegos de Utilidad Transferible

Los juegos de utilidad transferible, o simplemente juegos TU, son la clase de juegos cooperativos más estudiados. Aunque parten de las mismas premisas que los juegos NTU, los beneficios generados por las diferentes coaliciones de jugadores pueden ser repartidos. Por ello, $v(S)$ puede caracterizarse mediante un único número real, llamado *valor* de la coalición.

El estudio se centra en decidir cómo repartir los beneficios generados a modo de compensación por las posibles renúncias individuales de los jugadores en pos de un mayor beneficio colectivo.

Definición 2.4. *Un* juego TU *es un par (N,v), donde N es el conjunto de jugadores y v:* $2^N \to \mathbb{R}$ *es la* función característica *del juego, es decir, asigna a cada coalición* $S \subseteq N$ *un valor* $v(S) \in \mathbb{R}$. *Por convenio,* $v(\emptyset) := 0$.

Podemos interpretar v(S) como el valor de la coalición S, el beneficio que la cooperación de jugadores puede llegar a obtener.

Si no existe confusión posible, denotaremos al juego (N,v) simplemente por su función característica, v. También, utilizaremos la notación $v(i)$ y $v(ij)$ para referirnos a $v(\{i\})$ y $v(\{i,j\})$, respectivamente.

Observación: Un juego TU puede ser considerado como un juego NTU, (N, V), si definimos, para cada coalición no nula $S \subset N$, $V(S) := \{y \in \mathbb{R}^S : \sum_{i \in S} y_i \leq v(S)\}$.

Denotaremos por G^N a la clase de juegos TU con n jugadores.

Observación: Dados dos juegos TU $v, w \in G^N$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, para cada coalición $S \subset N$ definimos

1. $(v + w) \in G^N$ como $(v + w)(S) = v(S) + w(S)$
2. $(\alpha v) \in G^N$ como $(\alpha v)(S) = \alpha v(S)$.

Por lo tanto, el conjunto G^N tiene estructura de espacio vectorial con las operaciones de suma y producto por escalar. La dimensión del espacio es $2^n - 1$.

Definición 2.5. *Sea* $v \in G^N$ *y* $S \subset N$. *La* restricción *de v a la coalición S, es el juego TU* (S, v_S), *donde para cada* $T \subset S$, $v_S(T) := v(T)$.

Ejemplo 2.2: (Dividir un millón)
Un hombre adinerado muere y deja en herencia a sus tres sobrinos un millón de euros. Únicamente pone la condición que al menos dos de ellos acuerden como repartir la cantidad entre los tres; de lo contrario, el millón de euros será quemado.
Esta situación puede ser modelada por el juego TU (N,v), donde $N = \{1,2,3\}$, $v(1) = v(2) = v(3) = 0$, y $v(12) = v(13) = v(23) = v(N) = 1$.

Ejemplo 2.3: (El profesor visitante)
Tres grupos de investigación, de las universidades de Milán (grupo 1), Génova (grupo 2), y Santiago de Compostela (grupo 3), planean invitar a un profesor japonés para que imparta un curso de Teoría de Juegos en sus universidades. Para minimizar costes, intentan coordinar los tres cursos para repartir el coste de la visita entre las tres instituciones. Con este objetivo han estimado que el coste del trayecto para cada posible coalición será:

$$c(1) = 1500, c(2) = 1600, c(3) = 1900$$

$$c(12) = 1600, c(13) = 2900, c(23) = 3000$$

$$c(N) = 3000$$

Se trata de un juego de utilidad transferible, pero a diferencia del ejemplo anterior, es un *juego de costes*. Tenemos que para cada S, $c(S)$ representa el coste a cubrir. El juego asociado a esta situación es el juego de ahorro siguiente, donde para cada $S \subset N$,

$$v(S) = \sum_{i \in S} c(i) - c(S).$$

Por lo tanto,

$$v(1) = v(2) = v(3) = 0, \; v(12) = 1500, \; v(13) = 500, \; v(23) = 500 \; y \; v(N) = 2000.$$

En el ejemplo anterior hemos visto como los juegos TU también pueden modelar situaciones que involucran costes en vez de beneficios.

A continuación, definimos diferentes clases de juegos TU con especial importancia.

Definición 2.6. *Un juego TU, $v \in G^N$, es* superaditivo *si para cada $S,T \subset N$, con $S \cap T = \emptyset$, entonces*

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T).$$

Tendremos que un juego TU es superaditivo si los jugadores tienen incentivos reales para cooperar en todos los casos. Es decir, se cumple que la unión de un par de coaliciones disjuntas siempre produce mayor o igual utilidad. Por esta razón, en juegos superaditivos, suele formarse la gran coalición.

El ejemplo de modelización anterior, *Dividir un millón*, y el juego de ahorro asociado al ejemplo 2.3, cumplen con la propiedad de juego TU superaditivo.

Definición 2.7. *Un juego TU, $v \in G^N$, es* débilmente superaditivo *si, para cada jugador $i \in N$ y cada coalición $S \subset N \backslash \{i\}$, $v(S) + v(i) \leq v(S \cup \{i\})$.*

Definición 2.8. *Un juego TU, $v \in G^N$, es* aditivo *si, para cada jugador $i \in N$ y cada coalición $S \subset N \backslash \{i\}$, $v(S) + v(i) = v(S \cup \{i\})$. En particular, para cada $S \subset N$, $v(S) = \sum_{i \in S} v(\{i\})$.*

La propiedad de juego débilmente superaditivo nos dice que la unión de un nuevo jugador a la coalición siempre produce mayor o igual utilidad que si actuaran de manera unilateral.

Si el juego es simplemente aditivo, entonces tendremos que la unión de un jugador externo a la coalición generará la misma utilidad que si actuaran de manera separada. De este modo, se cumple que el valor de una coalición S es igual a la suma de los valores de todos sus integrantes. En este caso, los jugadores no tienen incentivos reales a cooperar, ya que generarán el mismo beneficio por ellos mismos.

Definición 2.9. *Un juego TU, $v \in G^N$, es* monótono *si, para cada par de coaliciones $S,T \subset N$, con $S \subset T$, se tiene $v(S) \leq v(T)$.*

En este tipo de juegos todos los jugadores aportan valor a la coalición que pertenecen. Al crecer el número de integrantes el beneficio colectivo no disminuirá.

Definición 2.10. *Un juego TU es* cero-normalizado *si, para cada jugador* $i \in N$, $v(i) = 0$.

Se tiene por lo tanto que, en esta clase de juegos, los agentes no producen ningún valor si actúan por cuenta propia.

Definición 2.11. *Dado un juego TU* $v \in G^N$*, llamamos* cero-normalización *de* v *al juego cero-normalizado* w *tal que para cada coalición* $S \subset N$, $w(S) = v(S)$ - $\sum_{i \in S} v(i)$.

Definición 2.12. *Sea* $v \in G^N$*. Entonces,* v *es un juego* cero-monótono *si su cero-normalización es un juego monótono.*

La cero-normalización nos permite medir la influencia real de las coaliciones sin tener en cuenta los jugadores individualmente.

De las definiciones anteriores se extrae el resultado siguiente.

Proposición 2.13. *Todo juego* $v \in G^N$ *superaditivo con valores no negativos es necesariamente un juego monótono. Entonces,* v *es un juego débilmente superaditivo si y solo si es cero-monótono.*

Demostración. Sea v un juego superaditivo no-negativo y sean S, T dos coaliciones tales que $S \subset T$. Si consideramos la coalición $T \backslash S$, entonces

$$v(S) \leq v(S) + v(T \backslash S) \leq v(S \cup (T \backslash S)) = v(T).$$

Queda probado que cumple la condición de monotonía. □

Observación: El recíproco no es cierto.

Capítulo 3

3. Soluciones de los juegos cooperativos TU

El principal objetivo de la teoría de juegos cooperativos de utilidad transferible es definir soluciones (en particular, conjuntos de asignaciones) que resulten admisibles para los jugadores. Los dos enfoques más importantes se centran en la estabilidad y la justicia. El primero es el enfoque de estudio detrás de conceptos como el *core* (Gillies 1953), mientras que encontrar un reparto justo motivó al *valor de Shapley* (Shapley 1953), ambos conceptos presentados en este capítulo.

3.1. El núcleo

Esta sección está dedicada a presentar el concepto más importante relacionado con la estabilidad de las soluciones: el *núcleo* o "core".

A continuación introducimos algunas propiedades de las asignaciones relacionadas con los juegos TU. Sea $v \in \mathrm{G}^N$ y $x \in \mathbb{R}^N$ una asignación:

Definición 3.1. *Una asiganción x es* eficiente *si*

$$\sum_{i \in N} x_i = v(N).$$

Observación: Dado un juego superaditivo v, se cumplirá la propiedad de eficiencia si los beneficios totales de la gran coalición son compartidos entre los jugadores.

Definición 3.2. *La asignación x es* individualmente racional *si, para cada $i \in N$, $x_i \geq v(i)$.*

Es decir, la propiedad de individualidad racional fuerza que ningún jugador reciba menor utilidad que la que podría obtener de manera unilateral.

Al conjunto de asignaciones eficientes e individualmente racionales de un juego TU, llamado conjunto de imputaciones, lo denotaremos por $I(v)$. Formalmente,

Definición 3.3. *Sea $v \in G^N$. El* conjunto de imputaciones *de v, $I(v)$, es definido por*

$$I(v) := \{x \in \mathbb{R}^N : \sum_{i \in N} x_i = v(N) \text{ } y, \text{ para cada } i \in N, \ x_i \geq v(i)\}.$$

Observación: El conjunto de imputaciones de un juego superaditivo siempre es no vacío.

La individualidad racional de las asignaciones de $I(v)$ garantiza que ningún jugador tenga una motivación real para bloquear una asiganción de $I(v)$, dado que no puede conseguir mayor utilidad individualmente. Buscamos ahora una condición homóloga a 3.2 para coaliciones.

Definición 3.4. *Dado $v \in G^N$, una asignación $x \in \mathbb{R}^N$ es* coalicionalmente racional *si, para cada coalición $S \subset N$, $\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$.*

Esta propiedad asegura que ninguna coalición de jugadores tenga incentivos a bloquear una asignación del conjunto de imputaciones $I(v)$.

El núcleo es el conjunto de asignaciones que cumplen las condiciones de eficiencia y racionalidad individual y coalicional.

Definición 3.5. *Sea $v \in G^N$. El* núcleo*, o core, de v es definido por*

$$C(v) := \{x \in I(v) : \textit{para cada } S \subset N, \sum_{i \in S} x_i \geq v(S)\}.$$

Observación: El núcleo, $C(v)$, es un subconjunto del conjunto de imputaciones, $I(v)$.

Por definición, para cualquier asignación del núcleo, ninguna coalición percibe menor beneficio del que podrían conseguir por ellos mismos. Es por ello que estas asignaciones son estables, las coaliciones no tienen incentivos a bloquearlas.

Ejemplo 3.1: (El juego del guante)
Tres jugadores están dispuestos a repartirse los beneficios de vender un par de guantes (derecha-izquierda). El jugador 1 tiene un guante para la mano izquierda y los jugadores 2 y 3 tienen un guante para la mano derecha cada uno. Teniendo en cuenta que pueden vender el par de guantes por un euro, podemos representar el juego TU (N,v) como

$$v(1) = v(2) = v(3) = v(23) = 0 \;\; y \;\; v(12) = v(13) = v(N) = 1.$$

Tenemos entonces que el núcleo del juego es $\{(1,0,0)\}$, dado que el valor de tener un guante para la mano derecha pierde cierto valor al haber demasiados. Observamos como en todas las coaliciones con beneficio no nulo el jugador 1 está presente.

Ejemplo 3.2: (Dividir un millón)
Es fácil comprobar que el core del juego *dividir un millón* es vacío, $C(v) = \emptyset$.

Este ejemplo nos ilustra que puede darse el caso que un juego presente situaciones altamente inestables. Los correspondientes juegos tienen núcleo vacío.

El siguiente caso nos sirve para ilustrar que el núcleo de un juego puede contener múltiples soluciones estables.

Ejemplo 3.3: (El profesor visitante)
El núcleo del juego de ahorro asociado al problema del profesor visitante viene dado por el conjunto no vacío $\{x \in I(v) : \; x_1 + x_2 \geq 1500, \; x_1 + x_3 \geq 500, \; x_2 + x_3 \geq 500\}$. La figura 1 representa el core (zona sombreada) del juego dentro del conjunto de imputaciones.

De hecho, podemos ver representados los conjuntos $I(v)$ y $C(v)$ como subconjuntos de $\{x \in \mathbb{R}^N : \sum_{i \in N} x_i = v(N)\}$. El vértice i de $I(v)$ es la asignación x tal que, para cada $j \neq i$, $x_j = v(j) = 0$ y $x_i = v(N) - \sum_{j \neq i} v(j) = 2000$.

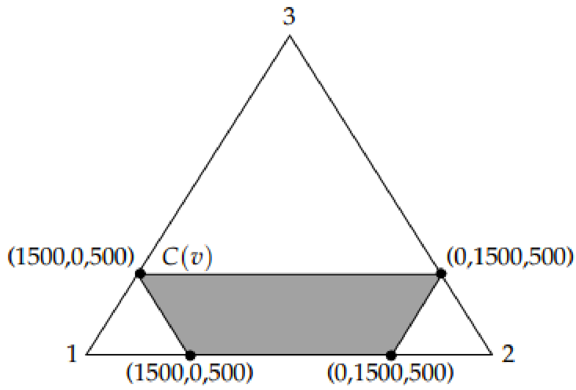

Figura 1: Núcleo del juego del profesor visitante

A continuación presentamos el teorema de Bondareva-Shapley, que proporciona una condición necesaria y suficiente para que un juego no tenga núcleo vacío.

Definición 3.6. *Una familia de coaliciones $\mathcal{F} \subset 2^N \backslash \{\emptyset\}$ es* equilibrada *si existen númeos reales positivos $\{\alpha_S : S \in \mathcal{F}\}$ tal que , para cada $i \in N$,*

$$\sum_{S \in \mathcal{F}, i \in S} \alpha_S = 1.$$

Los númeos reales positivos $\{\alpha_S : S \in \mathcal{F}\}$ son denominados coeficientes de equilibrio.

Definición 3.7. *Un juego TU, $v \in G^N$, es* equilibrado *si, para cada familia equilibrada $\mathcal{F}$, con coeficientes de equilibrio $\{\alpha_S : S \in \mathcal{F}\}$,*

$$\sum_{S \in \mathcal{F}} \alpha_S v(S) \leq v(N).$$

Definición 3.8. *Un juego TU, $v \in G^N$, es* totalmente equilibrado *si, para cada $S \subset N$, el juego TU (S, v_S) es equilibrado.*

Observación: Cada partición de N es una familia de coaliciones equilibrada con todos los coeficientes de equilibrio igual a 1. Por lo tanto, dado un juego TU $v \in \mathrm{G}^N$, una condición necesaria para que v sea un juego equilibrado es que $\sum_{i \in N} v(i) \leq v(N)$.

Podemos interpretar los coeficientes de equilibrio como el tiempo que cada jugador dedica a la coalición S. Por lo tanto, la condición de equilibrio sugiere la imposibilidad de los jugadores de distribuir su tiempo entre las diferentes coaliciones de manera que produzcan un beneficio superior al de la gran coalición, $v(N)$.

Teorema 3.9. (Bondareva-Shapley) *Sea $v \in G^N$. Entonces, $C(v) \neq \emptyset$ si y solo si v es un juego equilibrado.*

Demostración. Queremos probar que los elementos del núcleo de un juego TU (si existen) coinciden con las soluciones óptimas utilizando resultados de programación lineal.

$\Rightarrow$: Sea $v \in \mathrm{G}^N$ un juego TU tal que $\mathrm{C}(v) \neq \emptyset$. Sea $x \in \mathrm{C}(v)$ y $\mathcal{F}$ una familia equilibrada de coaliciones con coeficientes de equilibrio $\{\alpha_S : \mathrm{S} \in \mathcal{F}\}$. Entonces,

$$\sum_{S\in\mathcal{F}} \alpha_S v(S) \leq \sum_{S\in\mathcal{F}} \sum_{i\in S} \alpha_S x_i = \sum_{i\in N} (x_i \sum_{S\in\mathcal{F}, i\in S} \alpha_S) = \sum_{i\in N} x_i = v(N).$$

Por lo tanto, tenemos que todo juego con núcleo no vacío es equilibrado.

$\Leftarrow$: Supongamos que $v \in \mathrm{G}^N$ es equilibrado y consideramos el problema de programación lineal (P):

$$\texttt{Minimizar} \sum_{i\in N} x_i$$

$$\texttt{sujeto a} \sum_{i\in S} x_i \geq v(S), \ \ \forall S \in 2^N \backslash \{\emptyset\}.$$

Claramente, el núcleo del juego será no vacío si y solo si existe una solución óptima $\hat{x}$ con $\sum_{i\in N} x_i = v(N)$.

El dual de (P) es el siguiente problema de programación lineal (D):

$$\texttt{Maximizar} \sum_{S\in 2^N\backslash\{\emptyset\}} \alpha_S v(S)$$

$$\texttt{sujeto a} \sum_{S\in 2^N\backslash\{\emptyset\}, i\in S} \alpha_S = 1, \ \forall i \in N, \alpha_S \geq 0, \forall S \in 2^N \backslash \{\emptyset\}$$

Teniendo en cuenta que el conjunto de soluciones factibles del dual es compacto y no vacío y que la función objetivo es continua, (D) tiene, al menos, una solución óptima $\overline{\alpha}$.

Sea $\overline{\mathcal{F}} := \{S \subset N : \overline{\alpha}_S > 0\}$, entonces $\overline{\mathcal{F}}$ es una familia equilibrada con coeficientes $\{\overline{\alpha}_S : S \in \overline{\mathcal{F}}\}$.

Ahora, por el teorema fundamental de dualidad en programación lineal tenemos que: *Dado un programa lineal P y su dual D, se cumple necesariamente una de las siguientes afirmaciones:*

1. *Los dos programas tienen soluciones óptimas y los valores de sus respectivas funciones objetivo en el óptimo coinciden*

2. *Uno de los programas tiene óptimo no acotado y el otro no tiene ninguna solución factible*

3. *Ninguno de los dos programas tiene soluciones factibles.*

Por lo tanto, como (D) tiene al menos una solución óptima, entonces (P) también. Sea $\overline{x}$ la solución óptima, tenemos que:

$$\sum_{i\in N} \overline{x}_i = \sum_{S\in 2^N\backslash\{\emptyset\}} \overline{\alpha}_S v(S)$$

Dado que v es equilibrado y $\overline{x}$ es una solución óptima, $v(N) = \sum_{i\in N} \overline{x}_i$. Por lo tanto, $\overline{x} \in C(v)$ y queda probado que para todo juego equilibrado $C(v) \neq \emptyset$. $\square$

El teorema de Bondareva-Shapley fue demostrado de manera independiente por Bondareva en 1963 y por Shapley en 1967, demostrando que la clase de juegos con núucleo no vacío coincide con la clase de juegos equilibrados.

3.2. El Valor de Shapley

Esta sección tiene como principal objetivo presentar y estudiar el *valor de Shapley*, la regla de asignación más importante para los juegos TU. Aunque el núcleo es el conjunto de soluciones con mayor relevancia, a veces es necesario obtener una única regla de asignación que represente el reparto de beneficios entre los jugadores. El valor de Shapley nos proporcionará una solución a esta necesidad.

Definición 3.10. *Una* regla de asignación *para un juego TU de n-jugadores es una función* $\varphi : G^N \to \mathbb{R}^N$

Exponemos a continuación dos conceptos necesarios para la caracterización del valor de Shapley.

Definición 3.11. *Sea* $v \in G^N$.

1. *Un jugador* $i \in N$ *es un* jugador nulo *si, para cada coalición* $S \subset N$, $v(S \cup \{i\})$ - $v(S) = 0$.
2. *Dos jugadores* i,j *son* simétricos *si, para cada coalición* $S \subset N \backslash \{i,j\}$, $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$.

Las siguientes son cuatro propiedades que debemos imponer a una regla de asignación φ, y que serán necesarias para caracterizar el valor de Shapley de manera axiomática:

- **Eficiencia (EFF):** La regla de asignación φ cumple la condición de EFF si, para cada juego $v \in G^N$, se cumple $\sum_{i \in N} \varphi_i(v) = v(N)$.
- **Jugador Nulo (NPP):** La regla de asignación φ cumple la condición de NPP si, para cada $v \in G^N$ y cada jugador nulo $i \in N$, $\varphi_i(v) = 0$.
- **Simetría (SYM):** La regla de asignación φ cumple la condición de SYM si, para cada $v \in G^N$ y cada par de jugadores $i,j \in N$ simétricos, $\varphi_i(v) = \varphi_j(v)$.
- **Linealidad (LIN):** La regla de asignación φ cumple la condición de LIN si, para cada par $v,w \in G^N$, $\varphi(\alpha v + \beta w) = \alpha\varphi(v) + \beta\varphi(w)$, i.e., $\varphi_i(\alpha v + \beta w) = \alpha\varphi_i(v) + \beta\varphi_i(w)$ para todo $i \in S$.

Toda regla de asignación eficiente repartirá los beneficios totales de la gran coalición entre los jugadores. La propiedad de jugador nulo asegura que los jugadores que no generen ningún beneficio a su coalición no reciban compensación. La propiedad de simetría impone a la regla de asignación que reparta la misma utilidad a aquellos jugadores que aporten el mismo valor a la coalición. Finalmente, toda regla de asignación lineal procura que los jugadores reciban la misma compensación independientemente de si los juegos suceden de manera simultánea o independiente y la magnitud que tengan.

Definidas estas propiedades ya podemos presentar la definición del valor de Shapley, introducida por Shapley en 1953.

Definición 3.12. *Denotaremos por* $\Pi(N)$ *al conjunto de* permutaciones *de todos los jugadores de un juego v. Para cada* $\pi \in \Pi(N)$*, definimos* $P^{\pi}(i)$ *al conjunto de* predecesores *de i según el orden dictaminado por* π*, i.e.,* $j \in P^{\pi}(i)$ *si y solo si* $\pi(j) < \pi(i)$.

Definición 3.13. *Sea* $v \in G^N$ *un juego TU. Sea* $\pi \in \Pi(N)$*. La componente i-ésima del* vector de contribuciones marginales *asociado a* π*, que denotaremos por* $m^{\pi}(v) \in \mathbb{R}^N$*, queda definida por*

$$m_i^{\pi}(v) := v(P^{\pi}(i) \cup \{i\}) - v(P^{\pi}(i)).$$

Teniendo en cuenta la componente de orden aleatorio, la fórmula del valor de Shapley *viene dada por*

$$\Phi_i(v) := \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi(N)} m_i^{\pi}(v). \tag{3.1}$$

Por lo tanto, tenemos que el valor de Shapley es una asignación que proporciona a cada jugador $i \in N$ la media ponderada de sus contribuciones a las diferentes coaliciones $S \subset N \backslash \{i\}$. Es por lo tanto un vector n-dimensional.

La fórmula que permite calcular el valor de Shapley de cada jugador puede interpretarse de la siguiente manera. Para formar la gran coalición los jugadores deben ir uniéndose uno a uno. Cuando un jugador entra a formar parte de la coalición recibe su contribución, es decir, si S representa la coalición de jugadores antes de i, el jugador i recibe $v(P^{\pi}(i) \cup \{i\}) - v(P^{\pi}(i))$. El orden de entrada de cada jugador es escogido de manera aleatoria y cada una de las $n!$ posibilidades son equiprobables.

Tenemos por lo tanto que el valor de Shapley consta de dos partes: la primera componente permite calcular el número total de posibles permutaciones en la que se puede formar la coalición, y la segunda representa la contribución marginal de cada jugador al unirse a ella.

Dado que las contribuciones (diferencia entre el valor una vez adherido y antes de su unión) son representadas en el momento de integración en una determinada coalición. El beneficio que puede aportar un jugador irá directamente relacionado con el momento de llegada, es decir, en función de si entra antes o después que el resto de agentes.

Siguiendo el razonamiento expuesto, podemos dar una definición alternativa del valor de Shapley basada en las diferentes permutaciones de los jugadores.

Proposición 3.14. *Sea* $v \in G^N$ *un juego TU de n jugadores. El* valor de Shapley*,* Φ*, para cada* $i \in N$*, es equivalente a la expresión*

$$\Phi_i(v) := \sum_{S \subset N \backslash \{i\}} \frac{|S|!\,(n - |S| - 1)!}{n!} (v(S \cup \{i\}) - v(S)). \tag{3.2}$$

Dado que hay varias permutaciones que coinciden en los predecesores de i, podemos reducir algunos cálculos considerando por un lado los jugadores que quedan delante de i, y por otro lado aquellos que le siguen. Este es el enfoque que nos proporciona la fórmula 3.2.

Teorema 3.15. (Caracterización del valor Shapley) *El valor de Shapley es la única regla de asignación en G^N que satisface las propiedades de eficiencia, jugador nulo, simetría y linealidad.*

Antes de demostrar el teorema presentamos a continuación una clase de juegos TU que nos será necesaria, los *juegos de unanimidad.*

Definición 3.16. *Dentro de la clase de juegos TU, G^N, dada una coalición $S \subset N$, llamamos* juego de unanimidad de la coalición *S al par (N, w^S), donde para cada $T \subset N$*

$$w^S(T) = \begin{cases} 1 & si\ S \subseteq T \\ \\ 0 & en\ caso\ contrario. \end{cases}$$

Dado que podemos representar todo juego $v \in G^N$ como un vector $\{v(S)\}_{S \in 2^N \setminus \{\emptyset\}} \in \mathbb{R}^{2^n - 1}$ entonces, G^N queda identificado como un espacio vectorial de dimensión $2^n - 1$.

Lema 3.17. *El conjunto de juegos de unanimidad es una base de G^N.*

Demostración. Demostraremos, por argumentación al absurdo, que $U(N) := \{w^S : S \in 2^N \setminus \{\emptyset\}\}$ es un conjunto de $2^n - 1$ vectores linealmente independientes, y por lo tanto base de este espacio vectorial.

Sea $\{\alpha_s\}_{S \in 2^N \setminus \{\emptyset\}} \subset \mathbb{R}$ tal que $\sum_{S \in 2^N \setminus \{\emptyset\}} \alpha_S w^S = 0$ y supongamos que existe $T \in 2^N \setminus \{\emptyset\}$ con $\alpha_T \neq 0$. Podemos asumir, w.l.g., que no existe $\hat{T} \subsetneq T$ tal que $\alpha_{\hat{T}} \neq 0$. Por lo tanto,

$$0 = \sum_{S \in 2^N \setminus \{\emptyset\}} \alpha_S w^S(T) = \alpha_T \neq 0$$

y llegamos a contradicción. $\square$

Pasamos a ver la demostración del teorema de caracterización.

Demostración. Primero veamos que el valor de Shapley cumple las cuatro condiciones.

- **Eficiencia**: Para probar la propiedad de EFF utilizaremos la definición equivalente (3.1) para ver que $\sum_{i \in N} \Phi_i(v) = v(N)$.

$$\sum_{i \in N} \Phi_i(v) = \sum_{i \in N} \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \pi(N)} m_i^\pi(v) = \sum_{i \in N} \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \pi(N)} v(P^\pi(i) \cup \{i\}) - v(P^\pi(i))$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{i \in N} \sum_{\pi \in \pi(N)} v(P^\pi(i) \cup \{i\}) - v(P^\pi(i)) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \pi(N)} \sum_{i \in N} v(P^\pi(i) \cup \{i\}) - v(P^\pi(i))$$

donde,

$$\sum_{i \in N} v(P^\pi(i) \cup \{i\}) - v(P^\pi(i)) = v(\pi^{-1}(1)) - v(\emptyset) + v(\pi^{-1}(1 \cup 2))$$

$$-v(\pi^{-1}(1)) + v(\pi^{-1}(1 \cup 2 \cup 3)) - v(\pi^{-1}(1 \cup 2)) + \ldots + v(\pi^{-1}(N))$$
$$-v(\pi^{-1}(1 \cup 2 \cup \ldots \cup n-1)) = v(\pi^{-1}(N)) - v(\emptyset) = v(N) - v(\emptyset).$$

Por lo tanto, utilizando este cálculo y dado que un juego de n jugadores tiene $n!$ posibles permutaciones obtenemos:

$$\sum_{i \in N} \Phi_i(v) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \pi(N)} v(N) - v(\emptyset) = \frac{1}{n!}\, n!\, v(N) = v(N)$$

- **Jugador Nulo**: Utilizando que un jugador i es nulo si su entrada a una coalición no aumenta el beneficio total. Sea i tal que $v(S \cup \{i\}) - v(S) = 0$,

$$\Phi_i(v) = \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} \frac{|S|!\,(n-|S|-1)!}{n!} (v(S \cup \{i\}) - v(S)) = 0.$$

- **Simetría**: Para cumplir con la condición de simetría, el valor de Shapley debe proporcionar el mismo valor para cada par de jugadores i,$j \in N$, es decir $\Phi_i(v) = \Phi_j(v)$.

$$\Phi_i(v) = \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} \frac{|S|!\,(n-|S|-1)!}{n!} (v(S \cup \{i\}) - v(S))$$
$$= \sum_{S \subset N \setminus \{i,j\}} \frac{|S|!\,(n-|S|-1)!}{n!} (v(S \cup \{i\}) - v(S))$$
$$+ \sum_{S \subset N \setminus \{i,j\}} \frac{(|S|+1)!\,(n-(|S|+1)-1)!}{n!} (v(S \cup \{i,j\}) - v(S \cup \{j\}))$$

Ahora, dado que dos jugadores son simétricos si, para cada coalición $S \subset N \setminus \{i,j\}$, se cumple $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$,

$$\Phi_i(v) = \sum_{S \subset N \setminus \{i,j\}} \frac{|S|!\,(n-|S|-1)!}{n!} (v(S \cup \{i\}) - v(S))$$
$$+ \sum_{S \subset N \setminus \{i,j\}} \frac{(|S|+1)!\,(n-(|S|+1)-1)!}{n!} (v(S \cup \{i,j\}) - v(S \cup \{j\}))$$
$$= \sum_{S \subset N \setminus \{i,j\}} \frac{|S|!\,(n-|S|-1)!}{n!} (v(S \cup \{j\}) - v(S))$$
$$+ \sum_{S \subset N \setminus \{i,j\}} \frac{(|S|+1)!\,(n-(|S|+1)-1)!}{n!} (v(S \cup \{i,j\}) - v(S \cup \{i\}))$$
$$= \sum_{S \subset N \setminus \{j\}} \frac{|S|!\,(n-|S|-1)!}{n!} (v(S \cup \{j\}) - v(S)) = \Phi_j(v).$$

- **Linealidad**: Sean $v, w \in G^N$ dos juegos TU,

$$\Phi_i(v+w) = \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} \frac{|S|!\,(n-|S|-1)!}{n!} ((v+w)(S \cup \{i\}) - (v+w)(S)).$$

Tenemos que el juego $v + w \in G^N$ verifica para cada coalición $S \subset N, (v+w)(S) = v(S) + w(S)$, por lo tanto

$$\sum_{S \subset N \setminus \{i\}} \frac{|S|!\,(n-|S|-1)!}{n!}((v+w)(S \cup \{i\}) - (v+w)(S))$$

$$= \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} \frac{|S|!\,(n-|S|-1)!}{n!}(v(S \cup \{i\}) + w(S \cup \{i\}) - v(S) - w(S))$$

$$= \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} \frac{|S|!\,(n-|S|-1)!}{n!}(v(S \cup \{i\}) - v(S) + w(S \cup \{i\}) - w(S))$$

$$= \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} \frac{|S|!\,(n-|S|-1)!}{n!}(v(S \cup \{i\}) - v(S))$$

$$+ \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} \frac{|S|!\,(n-|S|-1)!}{n!}(w(S \cup \{i\}) - w(S))$$

Quedando así demostrado que $\Phi_i(v+w) = \Phi_i(v) + \Phi_i(w)$.

Veamos ahora $\Phi_i(\alpha v) = \alpha \Phi_i(v)$:

$$\sum_{S \subset N \setminus \{i\}} \frac{|S|!\,(n-|S|-1)!}{n!}((\alpha v)(S \cup \{i\}) - (\alpha v)(S))$$

$$= \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} \frac{|S|!\,(n-|S|-1)!}{n!}(\alpha v(S \cup \{i\}) - \alpha v(S))$$

$$= \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} \frac{|S|!\,(n-|S|-1)!}{n!}\alpha(v(S \cup \{i\}) - v(S))$$

$$= \alpha \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} \frac{|S|!\,(n-|S|-1)!}{n!}(v(S \cup \{i\}) - v(S))$$

De ello, obtenemos que $\Phi_i(\alpha v + \beta w) = \alpha \Phi_i(v) + \beta \Phi_i(w)$

Para demostrar la unicidad veremos que toda regla de asignación que cumple las cuatro propiedades queda únicamente determinada. Basaremos la prueba en el hecho que todo juego $v \in G^N$ TU se puede expresar como una combinación lineal de juegos de unanimidad.

Consideramos φ una regla de asignación que satisface EFF, NPP, SYM y LIN.

Ahora, como φ cumple las condiciones de EFF, NPP y SYM, tenemos que para cada $i \in N$, cada coalición $S \subset N$ no vacía, y cada $\alpha_S \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_i(\alpha_S w^S) = \begin{cases} \frac{\alpha_S}{|S|} & si\ i \in S, \\ \\ 0 & en\ caso\ contrario. \end{cases}$$

Entonces, si φ también cumple la propiedad de LIN y dado que el conjunto de juegos de unanimidad es base de G^N, podemos concluir que φ está únicamente determinada. $\square$

Visto que el valor de Shapley es la única regla de asignación que cumple estas cuatro características, pasamos a ver la independencia lógica de cada una de ellas.

Proposición 3.18. *Ninguno de los axiomas usados en la caracterización del valor de Shapley es superfluo.*

Demostración. Para la demostración utilizaremos que si eliminamos una de las condiciones, existe una regla de asignación diferente el valor de Shapley que cumple las tres restantes.

- **Eliminar EFF**: Para todo juego $v \in G^N$, la regla de asignación $\varphi := 2\Phi(v)$ satisface NPP, SYM y LIN.
- **Eliminar NPP**: Para todo juego $v \in G^N$, la *regla de división equitativa*, $\varphi_i(v) = v(N)/n$, cumple las propiedades de EFF, SYM y LIN.
- **Eliminar SYM**: Consideramos $v \in G^N$ y sea $\Pi^1(N)$ el conjunto de órdenes de los n jugadores en los que el jugador 1 está en primera posición, es decir, $\pi \in \Pi^1(N)$ si y solo si $\pi(1) = 1$. Entonces, para cada $i \in N$, $\varphi_i(v) := \frac{1}{(n-1)!} \sum_{\pi \in \Pi^1(N)} m_i^\pi(v)$ cumple las propiedades de EFF, NPP y LIN.
- **Eliminar LIN**: Sea $v \in G^N$, para cada $i \in N$ definimos la regla de asignación $\varphi_i(v) = 0$ si i es un jugador nulo y $\varphi_i(v) = \frac{v(N)}{n-d}$ en caso contrario, donde d denota el número total de jugadores nulos. La regla de asignación definida cumple las condiciones de EFF, NPP y SYM.

□

Observación: Sea $v \in G^N$ un juego superaditivo. Para cada $i \in N$ y cada $\pi \in \Pi(N)$, tenemos $m_i^\pi(v) \geq v(i)$. Por ende,

$$\Phi_i(v) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi(N)} m_i^\pi(v) \geq \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi(N)} v(i) = v(i).$$

Es decir, en los juegos superaditivos el valor de Shapley pertenece al conjunto de imputaciones dado que a cualquier jugador le asigna un beneficio mayor al que podría haber conseguido unilateralmente.

Ejemplo 3.4: (El juego del guante)
El valor de Shapley para el juego del guante es (2/3,1/6,1/6). Recordamos que el núcleo del juego es {(1,0,0)}. Por lo tanto, aunque el núcleo sea no vacío, el valor de Shapley puede no ser una asignación del núcleo.

El ejemplo anterior muestra que el valor de Shapley es una regla de asignación más justa. Aunque para vender el par de guantes siempre debe formar parte de la coalición el primer jugador, no parece razonable decir que los dos restantes carecen de valor. Por ello, la asignación (2/3,1/6,1/6) resulta más adecuada que el núcleo.

Por otro lado, el valor de Shapley, al no pertenecer al núcleo, resulta ser una asignación no estable en este caso.

Capítulo 4

4. Juegos simples

Una vez detalladas las dos grandes clases de juegos cooperativos y haber estudiado los dos conceptos de soluciones más importantes, presentamos una introducción a una subclase de los juegos de utilidad transferible: los *juegos simple*.

Los juegos simples nos permiten describir y analizar procesos de toma de decisiones en un colectivo. Una clase especial y de gran relevancia dentro de los juegos simples son los denominados *juegos de mayoría ponderada*. A menudo estos juegos son utilizados en diversas áreas de las ciencias sociales.

A diferencia de los ejemplos anteriores, uno de los focos más interesantes de estudio en los juegos simples es la definición de una medida de la distribución de poder e influencia que posee cada jugador, y no el reparto de los beneficios propiamente. Las reglas o soluciones que satisfacen permiten medir el poder de cada agente se denominan *índices de poder*.

Presentamos a continuación la formalización y nomenclatura de los juegos simples.

Definición 4.1. *Denominamos* juego simple *a un juego TU $v \in G^N$ que cumple:*

1. *Monotonía: si $S \subset T$ entonces $v(S) \leq v(T)$*
2. *Para toda coalición $S \subset N$ se tiene $v(S) \in \{0, 1\}$*
3. *$v(N) = 1$*

Denotaremos por S^N al conjunto de juegos simples con n jugadores.

Distinguimos entre dos tipos de coaliciones en los juegos simples, dado que la función característica solo asigna los valores 0 y 1. Las coaliciones S tales que $v(S) = 1$ se denominan *coaliciones ganadoras*. Mientras que aquellas que reciben el valor 0, $v(S) = 0$, son las *coaliciones perdedoras*.

Definimos el conjunto de coaliciones ganadoras, "winning" en inglés, como

$$W(v) := \{S \subset N : v(S) = 1\}.$$

Claramente v queda completamente determinado por la colección W.

Si solo consideramos aquellas coaliciones que no tienen ningún elemento innecesario, es decir, no contienen ninguna otra coalición ganadora entre sus miembros, obtenemos la *coalición ganadora minimal*. Esto es, S es una coalición ganadora minimal si $S \in W$ pero $S\{i\} \neq W$ para todo $i \in S$. Equivalentemente,

$$W^m(v) := \{S \in W : para\ cada\ T \subset S,\ si\ T \subset S,\ entonces\ T = S\}.$$

Salvo si existe posibilidad de confusión, omitiremos la alusión al juego, denotando W al conjunto de coaliciones ganadoras y W^m a la colección de coaliciones ganadoras minimales.

Como es evidente, $W^m \subseteq W$. Dado que podemos obtener W a partir de W^m ampliando las coaliciones ganadoras minimales, tenemos que W^m también determina el juego.

Ejemplo 4.1: (El consorcio)
Existe un consorcio formado por cuatro empresas, de las cuales dos de ellas tienen un volumen de facturación semejante, y las otras dos, también semejantes entre si, de menor magnitud. Designaremos por $i \in N = \{1, \dots, 4\}$ a los cuatro presidentes que conforman el consorcio. Para aprobar una propuesta, esta debe tener al menos el apoyo de los representantes de las dos empresas principales, o bien de las dos secundarias y una de las principales. De esta manera la toma de decisiones queda estructurada de manera equilibrada y se evitan situaciones de impasse. El conjunto de coaliciones ganadoras es:

$$W = \{\{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{N\}\}$$

Sin tener elementos superfluos, obtenemos la colección minimal de coaliciones ganadoras:

$$W = \{\{1,2\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}\}$$

Dado que el juego simple queda definido completamente por los dos conjuntos, podemos deducir de lo anterior

$$v(1,2) = v(1,2,3) = v(1,2,4) = v(1,3,4) = v(2,3,4) = v(1,2,3,4) = 1,$$

mientras que para cualquier otra coalición $S \subseteq N$, $v(S) = 0$.

4.1. Juegos de Mayoría Ponderada

Presentamos a continuación el tipo de juegos simples más frecuente en la práctica, los *juegos de mayoría ponderada*. Los introduciremos a partir de un ejemplo, que nos servirá para obtener la generalización natural.

Ejemplo 4.2:
Imaginemos un comité formado por n personas que deben tomar una decisión. Cada jugador queda representado por un voto y para aprobar la propuesta se requieren un mínimo de q votos a favor. Suele tomarse $\frac{n}{2} \leq q \leq n$. Obtenemos así el juego simple caracterizado por $W = \{S \subseteq N : |S| \geq q\}$, o alternativamente $v = [q; 1, \dots, 1]$ donde el primer número indica los votos mínimos necesarios para que una coalición sea ganadora y los siguientes la cantidad de votos asignados a cada jugador.

Formalmente,

Definición 4.2. *Un juego simple $v \in S^N$ es un* juego de mayoría *si el conjunto de coaliciones ganadoras $W(v)$ al juego que cumple*

$$W(v) = \{S \subseteq N : |S| \geq q\},$$

donde $q \in \mathbb{R}$ representa la cuota.

A veces las situaciones que se pretenden modelar sufren pequeños cambios debido a la asociación por razones ideológicas de carácter político, económico o social. Estos procesos pierden la homogeneidad de voto y no todos los participantes reciben el mismo número de votos. El claro ejemplo de ello son los organismos de representación en el ámbito político.

Definición 4.3. *Un juego simple* $v \in S^N$ *es un* juego de mayoría ponderada *si dada una quota* q*, con* $q > 0$*, y un sistema de pesos* $\{p_1, \ldots, p_n\} \in \mathbb{R}^+$*, se tiene* $v(S) = 1$ *si y solo si* $\sum_{i \in S} p_i \geq q$.

Si se cumple que q es el mínimo entero superior a $\frac{n}{2}$, se dice que representa la condición de *mayoría simple*. Si por el contrario tenemos $q = n$, se tratará de un juego de *unanimidad*, donde la única coalición ganadora es la gran coalición. Para cualquier otro valor de q, entre ambos extremos, se denominan *mayorías cualificadas*.

Hemos visto que los juegos de mayoría ponderada son capaces de representar situaciones en las que existe heterogeneidad en el número de votos asignados a los jugadores. Estos juegos permiten modelizar muchos mecanismos de votación, como procesos democráticos o el funcionamiento de las juntas de accionistas en los que deben decidir sobre una propuesta única para cambiar un *status quo*.

Ejemplo 4.3: (El consorcio)
Es posible modelizar el juego del consorcio mediante un juego de mayoría ponderada. Basta con tomar el sistema de pesos $\{p_1, \ldots, p_n\} = \{2, 2, 1, 1\}$ y cuota $q = 4$. Es decir, $v = [4; 2, 2, 1, 1]$.

Ejemplo 4.4: (El juego del guante) En el juego descrito en las secciones anteriores, obtenemos como conjunto de coaliciones ganadoras $W = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ y la colección minimal de coaliciones ganadoras es $W^m = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}\}$. La cuota del juego es $q = 3$ y los pesos asociados $p_1 = 2, p_2 = p_3 = 1$, de manera que podemos expresar el juego como $v =$ [3; 2,1,1].

Capítulo 5

5. Índices de Poder

Como se ha adelantado en la sección anterior, el objetivo principal de estudio de los juegos simples es el análisis de la distribución de poder entre los jugadores. Estos mecanismo reciben el nombre de *índices de poder*. En los juegos simples y de mayoría ponderada en particular, nos proporcionan la influencia que tendrá cada uno en el resultado final de la votación. Si bien la colección minimal de coaliciones ganadoras ya nos proporciona cierta información sobre la repercusión de cada agente, se busca precisar numéricamente la fuerza real.

A modo de ilustración, podemos pensar en un índice de poder como una unidad de beneficio a repartir entre los jugadores de manera que refleje la relevancia estratégica de cada uno. Aunque existen conceptos específicos para los juegos simples, el problema que nos ocupa no dista mucho de las soluciones en los juegos cooperativos vistas con anterioridad.

En términos generales, tendremos que un mecanismo que mida la distribución de poder será una asignación $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ tal que

1. $a_i \geq 0$ *para todo* $i \in N$
2. $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$

siendo $N = \{1, \ldots, n\}$ el conjunto de agentes decisores.

Presentamos a continuación la definición formal.

Definición 5.1. *Un* índice de poder *sobre* S^N *es una regla de asignación de la forma* $\phi : S^N \to [0,1]^n$*, que asigna a cada juego simple,* $v \in S^N$*, un vector de reparto entre los jugadores*

$$\phi(v) = (\phi_1(v), \phi_2(v), \ldots, \phi_n(v))$$

tal que $\sum_{i=1}^{n} \phi_i = 1$.

La componente i-ésima del vector de reparto representa el poder que tiene el jugador i en el juego.

Aunque los juegos simples son una subclase de los juegos cooperativos TU y por lo tanto los índices de poder cumplen las condiciones de solución general, no todas las caracterizaciones axiomáticas de los juegos cooperativos serán aplicables en muchos casos.

5.1. Valor de Owen

Dedicamos esta sección a presentar el *valor de Owen*, una extensión del valor de Shapley. Como hemos visto con anterioridad, el valor de Shapley considera que todas las coaliciones son equiprobables, mientras que el valor de Owen incorpora la premisa que algunas de ellas pueden resultar más factibles que otras.

Consideremos la estructura coalicional $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_m\} \subset N$, i.e., una partición de N conformada antes de iniciarse el juego. Dado que es una estructura coalicional a priori, se tiene

1. Un jugador no puede pertenecer a dos coaliciones diferentes, es decir, $C_i \cap C_j = \emptyset \; si \; i \neq j$
2. Todos los jugadores deben pertenecer a una coalición, y por ende, $\sum_{i=1}^{n} C_i = N$.

Podemos interpretar entonces las coaliciones como la unión de aquellos jugadores más afines a cooperar.

Definición 5.2. *Un* juego con una estructura coalicional *es una terna* $(N, v, \mathcal{C})$ *tal que* $v \in G^N$.

A lo largo de la sección, denotamos por $\mathcal{P}(N)$ el conjunto de particiones de N. Además, ponemos por M el conjunto $\{1,\ldots,m\}$, siendo $m = |\mathcal{C}|$.

Denotaremos por $\Pi_{\mathcal{C}}(N)$ al conjunto de todas las permutaciones admisibles de la estructura coalicional $\mathcal{C}$. Es decir, se tiene que los elementos de cada formación de $\mathcal{C}$ no serán separados por $\sigma \in \Pi_{\mathcal{C}}(N)$ (Algaba et al., 2022).

$$\sigma \in \Pi_{\mathcal{C}}(N) \;\; si \; y \; solo \; si \;\; \forall i, j, k \in N \; con \; i, j \in C_p, \; p = 1, \ldots, m,$$

$$y \;\; \sigma(i) < \sigma(k) < \sigma(j), \; entonces \; k \in C_p.$$

Los únicos dos casos en los que el conjunto de órdenes $\Pi(N)$ y el conjunto de órdenes admisibles $\Pi_{\mathcal{C}}(N)$ coinciden son:

1. Si la partición del conjunto de jugadores es una única coalición, i.e., $\mathcal{C} = \{C_1\} = \{N\}$,
2. Si la partición del conjunto de jugadores consta de $|N|$ coaliciones, i.e., $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_{|N|}\}$, siendo cada coalición formada por un único jugador.

En ambos casos todas las permutaciones de $\Pi(N)$ son también admisibles con la estructura coalicional $\mathcal{C}$, lo que implica $\Pi(N) = \Pi_{\mathcal{C}}(N)$.

Observación: En cualquier otro caso se cumple $\Pi_{\mathcal{C}}(N) \subset \Pi(N)$.

Después de esta breve introducción definimos formalmente el valor de Owen:

Definición 5.3. *Sea* $v \in G^N$ *un juego TU. Sea* $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_m\}$ *la estructura coalicional a priori. El* valor de Owen *es la función* $\mathcal{O} : G^N \to \mathbb{R}^N$ *definida como*

$$\mathcal{O}_i(v, \mathcal{C}) = \frac{1}{|\Pi_{\mathcal{C}}(N)|} \sum_{\sigma \in \Pi_{\mathcal{C}}(N)} m_i^{\sigma}(v), \tag{5.1}$$

donde $m_i^{\sigma}(v)$ *denota la contribución marginal del jugador* i.

Observación: Nótese que formalmente la definición del valor de Owen es equivalente a la definición del valor de Shapley. La única diferencia recae en el conjunto de órdenes sobre el cual las contribuciones marginales son calculadas. En el caso del valor de Shapley el conjunto de órdenes $\Pi(N)$ es igual a $n!$ órdenes, mientras que en el valor de Owen tendremos $m! \times |C_1|! \times \ldots \times |C_m|!$ órdenes posibles, no necesariamente igual a $n!$.

El valor de Owen se calcula primero determinando el conjunto de órdenes admisibles con la estructura coalicional $\mathcal{C}$, y después, para cada permutación, la contribución marginal del jugador. Finalmente, la suma de todas las contribuciones marginales de un jugador i es dividida entre el número total de órdenes admisibles.

Ejemplo 5.1:
Sea $v \in G^N$ con $N = \{1, \ldots, 4\}$ y estructura coalicional $\mathcal{C} = \{\{1,3\}, \{2\}, \{4\}\}$ tal que

S	$\emptyset$	{1}	{2}	{3}	{4}	{1,2}	{1,3}	{1,4}	{2,3}	{2,4}
$v(S)$	0	0	0	0	0	30	30	40	40	50

{3,4}	{1,2,3}	{1,2,4}	{1,3,4}	{2,3,4}	{1,2,3,4}
50	60	70	80	90	100

Tabla 1: Juego con cuatro jugadores

Tendremos entonces 12 ($= 3! \times 2! \times 1! \times 1!$) órdenes admisibles:

1. En primer lugar, consideramos todas las permutaciones de la estructura coalicional. Es decir, los diferentes órdenes de las coaliciones de $\mathcal{C}$: (C_1, C_2, C_3), (C_1, C_3, C_2), (C_2, C_1, C_3), (C_2, C_3, C_1), (C_3, C_1, C_2) *y* (C_3, C_2, C_1). Donde $C_1 = \{1, 3\}, C_2 = \{2\}, C_3 = \{4\}$.

2. A continuación, determinamos las permutaciones de jugadores dentro de cada coalición. En este caso, solo la coalición C_1 consta de más de un jugador. Los componentes de esta coalición podrán ir ordenados 13 o 31. Si cogemos el orden coalicional (C_1, C_2, C_3) obtendremos dos resultados posibles: (1324) y (3124). De manera análoga, para cada uno de los seis órdenes obtenidos en el punto 1, obtendremos las doce permutaciones admisibles del juego.

En la tabla 2 se detallan las contribuciones marginales de cada jugador en cada permutación.

El valor de Owen de este ejemplo es igual a

$$\mathcal{O}(v, \mathcal{C}) = \frac{1}{12}(240, 240, 360, 360) = (20, 20, 30, 30).$$

σ	$m_1^\sigma(v)$	$m_2^\sigma(v)$	$m_3^\sigma(v)$	$m_4^\sigma(v)$
(1324)	0	30	30	40
(1342)	0	20	30	50
(3124)	30	30	0	40
(3142)	30	20	0	50
(2134)	30	0	30	40
(2314)	20	0	40	40
(2413)	20	0	30	50
(2431)	10	0	40	50
(4132)	40	20	40	0
(4312)	30	20	50	0
(4213)	20	50	30	0
(4231)	10	50	40	0

Tabla 2: Contribuciones marginales del juego descrito

Alternativamente, podemos definir el valor de Owen mediante el concepto de *juego cociente*.

Definición 5.4. *Consideramos un juego $v \in G^N$ con estructura coalicional descrita por $\mathcal{C} = \{C_1,\ldots,C_m\}$, tal que el conjunto $M = \{1,\ldots,m\}$ indica los jugadores o coaliciones del juego v. Llamamos* juego cociente *a la pareja $(M,v_{\mathcal{C}})$, donde $v_{\mathcal{C}} = v/\mathcal{C}$ viene dado por la expresión $v_{\mathcal{C}}(S) = v(\cup_{j\in S} C_j)$ para cada coalición $S \subset M$.*

Observación: El número de jugadores en el juego cociente es igual al número de coaliciones en la estructura coalicional.

Introducido este concepto, resulta sencillo ver el pago que corresponde a cada coalición dado que el juego cociente es el inducido por v cuando se consideran las coaliciones de la partición $\mathcal{C}$ como agentes. El beneficio total será repartido entre las diferentes agrupaciones como si cada una fuera un único jugador.

Una vez asignado el valor total de la coalición, es necesario determinar el reparto correspondiente a cada uno de los integrantes según su contribución. Para ser justa esta no debe partirse en cantidades iguales, si no que debe compensar las diferentes posibilidades de cada miembro individualmente. Además, también deberá tener en cuenta los beneficios que pudiera obtener la coalición si se uniera a una o varias de las restantes coaliciones.

Para ello, en cada coalición tendrá lugar un nuevo juego. Esto es, el juego (C_i, v_{C_i}) es jugado para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, dividiendo así la utilidad que la coalición ha obtenido en el juego cociente entre sus miembros.

La siguiente es una formulación alternativa basada en la argumentación expuesta del juego cociente. Fue presentada por Owen en 1977 [13]:

Proposición 5.5. *Sea $v \in G^N$, $\mathcal{C}$ una estructura coalicional a priori del juego y $M =$*

$\{1,\ldots,m\}$ *tal que* $m = |\mathcal{C}|$. *Definimos el* valor de Owen *como*

$$\mathcal{O}_i(v;\mathcal{C}) = \sum_{T\subset M,\, j\notin T}\ \sum_{K\subset S_j,\, i\notin K} \frac{k!\,(s_j-k-1)!\,t!\,(m-t-1)!}{s_j!\,m!}[v(Q\cup K\cup\{i\}) - v(Q\cup K)], \tag{5.2}$$

donde $Q = \cup_{q\in T} S_q$, $t = |T|$, $k = |K|$ *y* $s_j = |S_j|$.

Del mismo modo que vimos con el valor de Shapley, podemos caracterizar de manera axiomática el valor coalicional propuesto por Owen. Recordemos que el primero cumple las condiciones de eficiencia, linealidad, simetría y jugador nulo. Aunque el valor de Owen es una extensión, por el teorema 3.15 no puede satisfacer los mismos axiomas. Por lo tanto, podrán compartir como máximo tres de las cuatro características.

A diferencia de lo expuesto para el valor de Shapley, ahora deberemos diferenciar la propiedad de simetría según si el juego es un juego cociente, entre las diferentes coaliciones, o interno dentro de una coalición.

Definición 5.6. *Consideremos* ϕ *una regla de asignación:*

- *Dos jugadores de una misma coalición* $i, j \in C_k$ *son simétricos si* $v(S\cup\{i\}) = v(S\cup\{j\})$, *para cualquier* $S \subseteq N\backslash\{i,j\}$. *Si* $\phi_i(v) = \phi_j(v)$ *para todo* $v \in G^N$ *y todo jugador simétrico en la coalición, entonces* ϕ *satisface la propiedad de* simetría dentro de coaliciones.
- *Dos coaliciones* $C_i, C_j \subset N$ *son simétricas si* $v(S\cup\{C_i\}) = v(S\cup\{C_j\})$, *para cualquier* $S \subseteq N\backslash\{C_i, C_j\}$. *Si* $\phi_{C_i}(v) = \phi_{C_j}(v)$ *para todo* $v \in G^N$ *y toda coalición simétrica de* v, *entonces* ϕ *satisface la propiedad de* simetría en el juego cociente.

Teorema 5.7. (Caracterización del valor de Owen) *El valor de Owen es la única regla de asignación en* G^N *que satisface las propiedades de eficiencia, jugador nulo, linealidad, simetría dentro de coaliciones y simetría en el juego cociente.*

Demostración. Utilizando la fórmula (5.2) y operando de manera análoga a la demostración de la caracterización del valor de Shapley, no resulta muy difícil ver que el valor coalicional de Owen cumple los cinco axiomas.

Para ver que $\mathcal{O}$ es el único valor que satisface las cinco propiedades, veamos que cualquier juego puede darse como una combinación lineal de juegos de la forma u^R, donde

$$u^R(S) = \begin{cases} 1 & si\ R\subset S \\ \\ 0 & si\ R\not\subset S. \end{cases}$$

Dado un juego u^R y una partición coalicional $\mathcal{C} = \{S_1,\ldots,S_m\}$, definimos $R' = \{j \mid S_j \cap R \neq \emptyset\}$ y $R_j = S_j \cap R$. Queda claro entonces que $v = u/\mathcal{C}$ es de la forma

$$v(T) = \begin{cases} 1 & si\ R'\subset T \\ \\ 0 & si\ R'\not\subset T. \end{cases}$$

Imponiendo los axiomas de jugador nulo, simetría coalicional y eficiencia, obtenemos

$$\sum_{i\in S_j} \mathcal{O}_i(u^R) = \begin{cases} \frac{1}{|R'|} & si\ j\in R' \\ \\ 0 & si\ j\notin R'. \end{cases}$$

Ahora, por la simetría de jugadores dentro de una coalición, vemos que $\mathcal{O}$ debe asignar el mismo beneficio a dos jugadores i y k si $i, k \in R_j$ para $j \in M$. Obteniendo,

$$\mathcal{O}_i(u^R) = \begin{cases} \frac{1}{|R'||R_j|} & si\ i \in R_j \\ \\ 0 & si\ i \notin R. \end{cases}$$

Por lo tanto, estas cuatro condiciones determinan de manera única un valor para los juegos de la forma u^R, o múltiplos de estos, con estructura coalicional arbitraria. Imponiendo finalmente la linealidad, junto con el hecho que los juegos u^R forman una base, obtenemos la unicidad. $\square$

Aunque disponer de dos formulaciones equivalentes para el valor de Owen pueda reducir algunos cálculos previos a la obtención de los valores de cada jugador, en la práctica obtener los valores coaliciones puede resultar computacionalmente costoso. Una solución a la complejidad de cálculos es aproximar el valor de Owen en lugar de calcular el valor exacto.

5.2. Algoritmo de aproximación para el valor de Owen

Como ya habíamos adelantado, a medida que el número de jugadores crece en un juego, resulta más laborioso el cálculo computacional para obtener el valor de Owen. En este capítulo se presenta un método de aproximación para el valor coalicional.

El algoritmo de aproximación descrito a continuación se trata de un algoritmo de muestreo aleatorio. Fue presentado por Saavedra-Nieves et al. en 2018.

Random sampling algorithm: (Saavedra-Nieves et al., 2018)

1. Consideramos un juego $v \in G^N$, una estructura coalicional $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_m\}$ y $p \in \mathbb{N}$.

2. De manera aleatoria seleccionamos p órdenes del conjunto de órdenes admisibles $\Pi_C(N)$, y denotemos por $\mathcal{T}$ el conjunto de esta selección. Nótese que cada órden admisible es equiprobable de salir seleccionado.

3. Ahora, para cada jugador i calculamos la contribución marginal para cada $\sigma \in \mathcal{T}$. Es decir, $m_i^\sigma(v) = v(P^\sigma(\sigma(i)) \cup (\sigma(i)) - v(P^\sigma(\sigma(i))))$, donde P^σ denota el conjunto de jugadores previos a i en el órden dado por σ.

4. La estimación del valor de Owen para cada jugador i es la media de su contribución marginal sobre la muestra de p órdenes:

$$\mathcal{C}_i(v, \mathcal{C}) = \frac{1}{p} \sum_{\sigma \in \mathcal{T}} m_i^\sigma(v).$$

En el ejemplo 5.2 se muestra una sencilla implementación del algoritmo de muestreo aleatorio.

Ejemplo 5.2: Consideramos $v \in G^N$ con $N = \{1, \ldots, 4\}$ el juego descrito anteriormente en la tabla 1 con estructura coalicional $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, C_3\}$, con $C_1 = \{1, 3\}$, $C_2 = \{2\}$ y $C_3 = \{4\}$. Si definimos $p = 4$ entonces obtendremos cuatro órdenes escogidos aleatoriamente del conjunto de todas las permutaciones de N compatibles con $\mathcal{C}$.

A continuación, se presentan los cuatro órdenes escogidos de manera aleatoria junto con la contribución marginal de cada jugador.

σ	$m_1^\sigma(v)$	$m_2^\sigma(v)$	$m_3^\sigma(v)$	$m_4^\sigma(v)$
(1324)	0	30	30	40
(2314)	20	0	40	40
(2413)	20	0	30	50
(4231)	10	50	40	0

Tabla 3: Órdenes escogidos y contribuciones marginales del juego de cuatro jugadores

Pasamos a calcular la aproximación del valor de Owen de cada jugador. Esto es,

$$\hat{O}(v, \mathcal{C}) = \frac{1}{4}(50, 80, 140, 130) = (\frac{25}{2}, 20, 35, \frac{65}{2}).$$

Observamos que el valor de Owen aproximado obtenido no es igual al valor de Owen real, que es (20, 20, 30, 30) (ejemplo 5.1). Uno de los motivos se debe a que hay cuatro órdenes y tres coaliciones, lo que implica que las coaliciones no están divididas equitativamente entre las posiciones, es decir, la coalición 1 es una vez la primera coalición, una vez la segunda coalición pero dos veces la última.

Una mejora de este algoritmo podría ser elegir los órdenes de tal manera que cada coalición salga con la misma frecuencia en cada posición. Otro enfoque que mejoraría la exactitud del método sería replicarlo un mayor número de veces, es decir aumentando p. De este modo, obtendríamos una estimación más cercana al valor de Owen real.

En el capítulo siguiente se pretende estudiar el valor coalicional de Owen de los partidos políticos que conforman un parlamento. Dado que el volumen de jugadores, y por ende órdenes admisibles, aumenta notablemente, se ha utilizado un algoritmo similar al expuesto en esta sección.

Detallamos el procedimiento que lleva a cabo nuestro programa:

1. Consideramos un juego $v \in G^N$, una estructura coalicional $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_m\}$ y $p \in \mathbb{N}$ del órden de 1×10^7.

2. De manera aleatoria seleccionamos p órdenes del conjunto de órdenes admisibles $\Pi_C(N)$, y dentro de cada coalición determinamos una permutación aleatoria de sus jugadores. De modo que cada órden admisible es equiprobable de salir seleccionado.

3. Ahora, para calcular la contribución marginal de cada jugador i, simulamos un juego minimal. En cada juego minimal (p en total) asignamos valor 1 al primer partido político que da mayoría absoluta siguiendo el órden $\sigma \in \Pi_C(N)$.

4. De este modo, generamos un vector de puntuaciones con el número de juegos minimales ganados por cada agente. Denotemos a este vector como $x = (x_1, \dots, x_n)$, donde x_i será el número de veces que el jugador i ha conseguido la mayoría.

5. La estimación del valor de Owen para cada jugador i será la media de su puntuación sobre la muestra de p órdenes:

$$\mathcal{C}_i(v, \mathcal{C}) = \frac{1}{p} x_i.$$

Ejemplo 5.3: Consideremos [13;10,8,5,2] el reparto de escaños de un parlamento formado por cuatro partidos políticos. Sea la estructura coalicional $\mathcal{C} = \{P_1, \{P_2, P_3\}, P_4\}$ donde P_i denota el partido i por orden de representación. Si iteramos tres veces el algoritmo y obtenemos los órdenes

$$(8, 5, 2, 10) \;\; (10, 5, 8, 2) \;\; (2, 10, 8, 5)$$

1. En el primer caso P_3 suma mayoría absoluta junto con P_3 ($8+5 = 13$), por lo tanto $x_3 = 1$.

2. En el segundo escenario P_3 suma mayoría absoluta junto con P_1 ($10+5 = 15 > 13$), por lo tanto $x_3 = 2$.

3. En el último caso P_2 suma mayoría absoluta junto con P_1 y P_4 ($2+10+8 = 20$), por lo tanto $x_2 = 1$.

El último paso sería dividir la puntuación de cada jugador entre las iteraciones simuladas. Esto es,

$$\hat{\mathcal{O}}(v, \mathcal{C}) = \frac{1}{3}(0, 1, 2, 0).$$

Dado que el número de simulaciones es muy pequeño el valor obtenido dista de ser el real, pero iterando un gran número de veces este sencillo caso, podríamos obtener una aproximación fiable del valor de Owen para cada jugador. No obstante, el ejemplo expuesto resulta útil para ilustrar y asentar las ideas del algoritmo que se aplicará en el caso de estudio.

Capítulo 6

6. Elecciones Generales 2023

En este último capítulo veremos cómo trabajar con los índices de poder estudiados y su gran utilidad en el ámbito político. Éstos nos permiten analizar las fuerzas de cada coalición dentro de un parlamento. A continuación se estudia el poder relativo de cada partido político con representación en el Congreso de los Diputados y las posibles coaliciones entre ellos después de las elecciones del 23 de julio de 2023.

El lunes 29 de mayo de 2023, el presidente del Gobierno, Pedro Sánchez, convoca elecciones anticipadas tras la pérdida territorial ocasionada por unos malos resultados para el Partido Socialista Obrero Español (PSOE) en las elecciones autonómicas y municipales del día anterior. Ante el riesgo de un mayor desgaste por alargar su Ejecutivo, se fijan las próximas elecciones generales el 23 de julio, buscando neutralizar el cambio de ciclo favorable al Partido Popular (PP).

Se presentan así unas elecciones basadas en dos bloques. Por un lado, el partido dirigido por Alberto Núñez Feijoó se presenta como alternativa al gobierno actual con la intención de obtener mayoría absoluta en solitario. No obstante, todos los sondeos publicados apuntan que necesitarán del apoyo de sus socios de gobiernos autonómicos y municipales, Vox. Por contra, el PSOE aspira a salir reelegido y poder repetir la coalición con Sumar que les llevó al frente del gobierno español los últimos cuatro años. La anterior legislatura fue la primera en el Estado con un gobierno de coalición y rompió el bipartidismo.

A modo de contextualització, es necesario poner de manifiesto las variaciones en los partidos políticos a la izquierda del PSOE. A finales de la XIV legislatura, Yolanda Díaz, actual vicepresidenta y ministra de Trabajo, lanza una nueva plataforma política llamada Movimiento Sumar. Ésta pretende aglutinar y dar voz a todas las fuerzas políticas cercanas como Podemos, En Comú Podem, Más País y Compromís, entre otros.
De esta manera, y a causa de los resultados electorales en las elecciones municipales y autonómicas, Sumar pasa a ser la plataforma mayoritaria que reúne al resto de partidos políticos progresistas alternativos al Partido Socialista.

Celebradas las elecciones del 23J, las formaciones que obtuvieron representación parlamentaria fueron: Partido Popular, Partido Socialista Obrero Español, Vox, Sumar, Esquerra Republicana de Catalunya (ERC), Junts per Catalunya (JxCAT), Euskal Herria Bildu (EH Bildu), Partido Nacionalista Vasco (PNV), Bloque Nacionalista Galego (BNG), Coalición Canaria (CCa) y Unión del Pueblo Navarro (UPN).

En estas circunstancias y con una participación del 70,39 %, las elecciones del 23 de julio de 2023, confeccionaron el siguiente juego parlamentario de mayoría ponderada. Es decir, los 350 escaños del Congreso quedaron repartidos de la siguiente manera:

$$u = [176; 136, 122, 33, 31, 7, 7, 6, 5, 1, 1, 1]$$

Generando el juego simple (N, W), donde

$$N = [PP,\ PSOE,\ Vox,\ Sumar,\ ERC,\ JxCAT,\ EHBildu,\ PNV,\ BNG,\ CCa,\ UPN]$$

y la família de las coaliciones ganadoras W está formada por aquellas coaliciones que controlan 176 votos o más.

Analizando los resultados intuitivamente podemos deducir que el PP, al tener mayor representación, obtendrá un valor de Shapley, y por ende poder, superior al resto. No obstante, la gran fragmentación del parlamento no le permitirá tener fuerza suficiente para poder gobernar de manera independiente.

En la tabla siguiente se muestran los valores que otorga el índice de Shapley a cada partido.

PP	PSOE	Vox	Sumar	ERC	JxCAT
0.3861	0.2118	0.1520	0.1124	0.0357	0.0357

EH Bildu	PNV	BNG	CCa	UPN
0.0270	0.0175	0.0072	0.0072	0.0072

Tabla 4: Valores de Shapley

Otra manera de ver representado el poder de cada formación es mediante la colección minimal de coaliciones ganadoras. Puesto que hay un gran número de partidos políticos con representación, enumerar toda la lista sería pesado e ineficiente. Se detalla a continuación tan solo aquellas en las que participaría el Partido Popular:

$$W^m_{PP} = \{\{PP, PSOE\}, \{PP, Vox, Sumar\}, \{PP, Vox, ERC\}, \{PP, Vox, JxCAT\},$$

$$\{PP, Vox, EHBildu, BNG\}, \{PP, Vox, EHBildu, CCa\},$$

$$\{PP, Vox, EHBildu, UPN\}, \{PP, Vox, PNV, BNG, CCa\},$$

$$\{PP, Vox, PNV, BNG, UPN\}, \{PP, Vox, PNV, CCa, UPN\},$$

$$\{PP, Sumar, ERC, BNG, CCa\}, \{PP, Sumar, ERC, BNG, UPN\},$$

$$\{PP, Sumar, ERC, CCa, UPN\}\{PP, Sumar, JxCAT, BNG, CCa\},$$

$$\{PP, Sumar, JxCAT, BNG, UPN\}, \{PP, Sumar, JxCAT, CCa, UPN\}$$

$$\{PP, Sumar, EHBildu, BNG, CCa, UPN\},$$

En la práctica sin embargo, la gran mayoría de partidos regionalistas se negaron a pactar con Feijoó por su alianza con Vox [8]. A finales de septiembre de 2023, se celebra un pleno de investidura para el candidato con mayor número de votos que acabaría en fallida.

Delante de esta situación, se abría por primera vez la opción de que gobernara un candidato que no hubiera ganado en número de escaños. Un período de muchas negociaciones entre el PSOE, junto con Sumar que ya habrían pactado para continuar el gobierno de coalición, y el resto de fuerzas regionales o con menor representación.

6.1. Juego con restricciones: Política de bloques

Puesto que la creación de coaliciones altera la estructura inicial del parlamento, es necesario disponer de otras medidas que sean capaces de reflejar el poder de manera dinámica. Un método utilizado para modelar estas restricciones es la consideración de uniones a priori basadas en afinidades ideológicas. Todas ellas estarán definidas por grafos -relaciones binarias irreflexivas y simétricas-.

El valor de Owen [13], estudiado en secciones anteriores, define y caracteriza el valor coalicional para juegos cooperativos TU. Basaremos nuestro análisis en este índice de poder, ya que valora los efectos de la formación de coaliciones a tres niveles: el valor que obtiene la formación en su conjunto, la distribución de la misma entre sus integrantes y el valor residual que perciben el resto de agentes que no están en la coalición.

Un punto crucial a la hora de seleccionar coaliciones será tener en cuenta la capacidad de proporcionar a cada uno de los jugadores una posición aceptable para garantizar la estabilidad del compromiso acordado. Los beneficios de la coalición deben ser repartidos según la contribución de cada integrante.

Una vez definido el valor coalicional de Owen, podemos estudiar el poder que obtendría cada coalición factible de nuestro escenario parlamentario. Para ello, adoptaremos como hipótesis de trabajo una perfecta disciplina de voto, decisiones de tipo binario, es necesaria mayoría absoluta para la aprobación y la utilidad del poder, y por lo tanto del valor coalicional, es fraccionable y transferible.

Introducimos a continuación las diferentes coaliciones consideradas, y su justificación mediante similitudes ideológicas.

En primer lugar, es natural considerar una coalición entre los dos partidos políticos que han gobernado conjuntamente en la anterior legislatura (Partido Socialista Obrero Español y Sumar) y otra entre los dos principales partidos de derechas, el Partido Popular y Vox, puesto que gobiernan de manera conjunta en diversas comunidades autónomas y municipios.
Estas uniones tienen como resultado la siguiente estructura coalicional:

$$PP + Vox; PSOE + Sumar = \{\{PP, Vox\}, \{PSOE, Sumar\}, \{ERC\}, \{JxCAT\},$$
$$\{EHBildu\}, \{PNV\}, \{BNG\}, \{CCa\}, \{UPN\}\}$$

En la tabla 5 se muestra el porcentaje de representación, el valor otorgado por el índice de Shapley y el valor coalicional de las diferentes formaciones políticas.

Comparando el porcentaje de representación en el Congreso y el valor de Shapley, observamos que precisamente los dos partidos políticos con más escaños son los únicos que tienen una cuota de poder menor a la correspondiente a los escaños. El PP con 38'85 % de escaños obtiene 0.3861, y el PSOE con una representación del 34,85 por ciento, tan solo un 0.2118 de poder.
En cambio, el resto de grupos, con representación inferior al 10 %, están en mejor posición estratégica que la que indican sus escaños.

Partido	% escaños	Valor de Shapley	PP+Vox; PSOE+Sumar
PP	0.3885	0.3861	0.3066
PSOE	0.3485	0.2118	0.0422
Vox	0.0943	0.1520	0.3066
Sumar	0.0885	0.1124	0.0422
ERC	0.0200	0.0357	0.0845
JxCAT	0.0200	0.0357	0.0845
EH Bildu	0.0171	0.0270	0.0666
PNV	0.0143	0.0175	0.0310
BNG	0.0028	0.0072	0.0119
CCa	0.0028	0.0072	0.0119
UPN	0.0028	0.0072	0.0119

Tabla 5: Porcentaje de escaños y poder de cada partido político antes y después de la formación de las coaliciones

Como bien podemos observar al comparar con la tercera columna, al formarse coaliciones, aquellos partidos que tienen una menor cuota de representación, ganan poder y se sitúan en una mejor posición estratégica. Por contra, exceptuando Vox, aquellos que se encuentran dentro de una agrupación de gobierno ven reducido el poder que ostentaban. Es por ello, que la estratégia de formar una coalición pierde eficacia si el resto de los agentes no optan también por formar otras coaliciones.

Una vez analizadas las dos coaliciones principales, sobre las cuales se basó la campaña política de las elecciones generales y la mayoría del voto de la población, el objetivo es estudiar diferentes agrupaciones del resto de formaciones sobre este escenario.

Siguiendo el mismo argumento de afinidad ideológica, es razonable considerar la coalición entre Esquerra Republicana de Catalunya y Euskal Herria Bildu puesto que se presentaron juntos al senado en 2023, bajo la marca 'Izquierdas por la Independencia'. De hecho, también podemos incluir al Bloque Nacionalista Galego en esta coalición, pues en 2019 ya se presentaron los tres juntos a las elecciones europeas de mayo con la denominación 'Ahora Repúblicas'.

Considerando como una coalición a estos tres partidos, tendremos como estructura coalicional:

$$ERC + EHBildu + BNG = \{\{PP, Vox\}, \{PSOE, Sumar\}, \{ERC, EHBildu, BNG\},$$
$$\{JxCAT\}, \{PNV\}, \{CCa\}, \{UPN\}\}$$

Los nuevos valores coalicionales se muestra en la última columna de la tabla 6.

En este punto ya es observable como Junts per Catalunya se encuentra en una posición privilegiada, puesto que tan solo con 7 diputados (el 2 por ciento del total de escaños), es el tercer partido político con más poder.

También cabe destacar que a medida que surgen o consideramos más coaliciones, el PP

Partido	Valor de Shapley	PP+Vox; PSOE+Sumar	ERC+EH Bildu+BNG
PP	0.3861	0.3066	0.2667
PSOE	0.2118	0.0422	0.0667
Vox	0.1520	0.3066	0.2667
Sumar	0.1124	0.0422	0.0667
ERC	0.0357	0.0845	0.0667
JxCAT	0.0357	0.0845	0.1331
EH Bildu	0.0270	0.0666	0.0548
PNV	0.0175	0.0310	0.0334
BNG	0.0072	0.0119	0.0119
CCa	0.0072	0.0119	0.0167
UPN	0.0072	0.0119	0.0167

Tabla 6: Poder de cada partido político antes y después de la formación entre los partidos regionalistas de izquierdas

pierde poder y posibilidades de gobernar si no es pactando con un mayor número de formaciones. En cambio, el PSOE y Sumar ven su poder aumentado alrededor de 2,5 puntos porcentuales.

Es desde esta situación que, con el avance del escrutinio, se empezó a especular con que el partido dirigido por Carles Puigdemont podría tener la llave para o bien bloquear cualquier investidura, o bien permitir a Pedro Sánchez salir reelegido como presidente.

Podemos considerar también una coalición, aunque de facto, a Junts y el PNV. Ambos son partidos nacionalistas de carcácter conservador y ambos pugnan con los partidos nacionalistas y progresistas unidos en la coalición descrita anteriormente (ERC y Bildu), por lo que cabe esperar que sigan una estrategia política parecida a lo largo de la legislatura, y en particular en las votaciones de investidura. La nueva estructura coalicional será:

$$JxCAT + PNV = \{\{PP, Vox\}, \{PSOE, Sumar\}, \{ERC, EHBildu, BNG\},$$

$$\{JxCAT, PNV\}, \{CCa\}, \{UPN\}\}$$

Los valores coalicionales obtenidos por cada partido se muestran en la segunda columna de la tabla 7. Incluimos también en la tercera columna el reparto de poder si consideramos como una única agrupación, a {PSOE, Sumar, ERC, EH Bildu, BNG} que denotaremos por 'Coalición de Izquierdas' para mayor claridad. La justificación para considerar esta unión se basa en la cooperación que hubo entre todos ellos en la anterior legislatura. Es decir, consideramos como estructura:

$$PSOE + Sumar + ERC + EHBildu + BNG = \{\{PP, Vox\},$$

$$\{PSOE, Sumar, ERC, EHBildu, BNG\}, \{JxCAT, PNV\}, \{CCa\}, \{UPN\}\}$$

Exponemos a continuación los resultados obtenidos de las dos coaliciones definidas.

Partido	ERC+EH Bildu+BNG	JxCAT+PNV	Coalición de Izquierdas
PP	0.2667	0.2602	0.1667
PSOE	0.0667	0.0930	0.0859
Vox	0.2667	0.2467	0.1667
Sumar	0.0667	0.0840	0.0859
ERC	0.0667	0.0850	0.0859
JxCAT	0.1331	0.1227	0.2500
EH Bildu	0.0548	0.0686	0.0735
PNV	0.0334	0.0339	0.0832
BNG	0.0119	0.0059	0.0025
CCa	0.0167	0.0000	0.0000
UPN	0.0167	0.0000	0.0000

Tabla 7: Poder de cada partido político antes y después de la formación de las dos coaliciones estudiadas

Observando los resultados mostrados en la última columna, queda claro que la unión entre partidos regionalistas aumenta su poder de manera generalizada, y en consecuencia la alianza entre los dos partidos de derechas ve mermada su capacidad de formar gobierno. Dado que los índices de poder utilizados se basan en el número de swings que tiene cada partido, el descenso que experimenta el PP se explica por la pérdida de posibles compatibilidades con otras formaciones.

En el caso estudiado, la formación y unión en intención de voto de los partidos minoritarios provoca que se reduzcan de manera considerable el número de swings del Partido Popular (ya solo tendrá un swing con la coalición de partidos de izquierda y no todos los que ostentaba con cada uno de los integrantes), en cambio, no se reducen para todos sus rivales.

Sin embargo, el dato más importante que podemos extraer es que, de nuevo, Junts ostenta un poder mucho mayor al otorgado en representación parlamentaria o anterior a la formación de las coaliciones. En particular, en este escenario ya se sitúa como la formación política con mayor valor coalicional. Por el contrario, CCa y UPN pasan a ser jugadores nulos, es decir, sin valor estratégico.

El aumento de poder de Junts per Catalunya también tiene una lectura similar a la del PP, pero a la inversa. La formación de coaliciones hace disminuir el número de posibilidades del partido mayoritario, pero también el número total de swings. Es por ello, que Junts aún teniendo menor representación, al mantener gran parte de sus swings una vez formadas las coaliciones mayoritarias, ve incrementado su poder.

Ahora, la diferencia de poder otorgado entre JxCAT y PNV, aún siendo de la misma coalición, se explica porque el primero es swing de la coalición de derechas (136+33+7) pero el PNV por sí solo no (deberían pactar con UPN y CCa también). Del mismo modo, JxCAT es swing del bloque progresista sumando otras fuerzas pero el partido vasco sólo si llega después del partido catalán.

Una vez estudiadas todas las coaliciones posibles basadas en afinidades ideológicas y analizados los resultados obtenidos para cada escenario, llegamos a la conclusión que el partido nacionalista conservador catalán, Junts per Catalunya, se encuentra en una posición envidiable que le permite ser clave en la gobernabilidad si decide apoyar la investidura del candidato socialista, o bien forzar una repetición electoral.

A principios de noviembre de 2023, los socios de gobierno, PSOE y Sumar, llegaban a un acuerdo con el partido de Carles Puigdemont. Este aseguraba la reelección del presidente de España a cambio de la concesión de parte de las peticiones y reclamaciones de los regionalistas. De este modo, Pedro Sánchez salía elegido nuevamente presidente del Gobierno con un total de 179 'síes' (Sumar, ERC, JxCAT, EH Bildu, PNV, BNG Y CCa) frente a 171 'noes' (PP, Vox y UPN).
De modo que el estudio realizado nos ha servido para mostrar la fuerza de negociación que ha tenido el partido político Junts, que ha sido un socio imprescindible para la investidura.

A continuación, se muestra el porcentaje de escaños, el valor de Shapley y el poder de cada partido político antes y después de la sesión de investidura del 15 y 16 de noviembre de 2023.

$$\{\{PP, Vox, UPN\}, \{PSOE, Sumar, ERC, JxCAT, EHBildu, PNV, BNG, CCa\}\}$$

Se recoge en la tabla siguiente el valor coalicional de cada partido. Denominaremos 'Socios de Investidura' al bloque formado por aquellos partidos políticos que votaron a favor. Al ser una coalición ganadora, con más escaños de los necesarios para conseguir mayoría absoluta, los partidos que no forman parte pasan a ser agentes nulos.

Partido	% escaños	Valor de Shapley	Socios de Investidura
PP	0.3885	0.3861	0.0000
PSOE	0.3485	0.2118	0.1756
Vox	0.0943	0.1520	0.0000
Sumar	0.0885	0.1124	0.1756
ERC	0.0200	0.0357	0.1756
JxCAT	0.0200	0.0357	0.1756
EH Bildu	0.0171	0.0270	0.1041
PNV	0.0143	0.0175	0.0310
BNG	0.0028	0.0072	0.0089
CCa	0.0028	0.0072	0.0089
UPN	0.0028	0.0072	0.0000

Tabla 8: Porcentaje de escaños y poder de cada partido político antes y después de la investidura de Pedro Sánchez (2023)

Este último análisis nos permite observar cómo se reparte el poder entre los socios y formar algunas conjeturas sobre futuras negociaciones internas.

Nuestro estudio sobre la configuración del parlamento del Congreso de los Diputados nos ha permitido evaluar y analizar diferentes estructuras coalicionales admisibles según criterios de afinidad ideológica. Utilizando el valor coalicional de Owen hemos sido capaces de poner de manifiesto las transferencias de poder que surgen al optar por la estrategia de coalición con otras formaciones políticas. Hemos podido observar como Junts per Catalunya se sitúa en punto crucial al haber optado por una estrategia más neutral hasta el momento decisivo, viendo así incrementado su poder negociador de manera considerable. Su decisión final, se explica por su carácter nacionalista y su voluntad de conseguir acuerdos claves para su partido, más que por un eje ideológico izquierda-derecha.

Capítulo 7

7. Conclusiones

En la realización de este trabajo hemos introducido los conceptos más relevantes de la teoría de juegos cooperativos. En particular, se ha puesto el enfoque de estudio sobre los juegos simples y de mayoría ponderada, dado que este tipo de juegos nos proporcionan técnicas matemáticas adecuadas para describir situaciones decisorias dentro de un sistema de votación y analizar el comportamiento estratégico de los grupos parlamentarios.

Además, se han presentado las dos clases de soluciones más importantes de los juegos cooperativos de utilidad transferible, así como uno de los principales índices de poder coalicionales, el valor de Owen. Las herramientas estudiadas nos han permitido explicar el gran poder que ostentaba Junts per Catalunya después de las elecciones generales de 2023.

En el parlamento analizado, hemos podido constatar como las soluciones clásicas son meramente orientativas y no logran el objetivo de explicar el poder real de cada jugador. Por lo tanto, en sistemas de votación donde no sólo votan individuos, sino formaciones conjuntas, es necesario contextualizar y especificar las relaciones entre jugadores (en el ámbito político las coaliciones son formadas por afinidad ideológica). El valor de Owen, aún conservando el significado y la sensibilidad del valor de Shapley, logra evaluar de manera dinámica la variación de poder en un marco de negociación y así otorgar un valor objetivo a las estrategias coalicionales.

Después de la argumentación y elaboración de afinidades entre partidos políticos, el análisis del Parlamento Español, hemos observado que en escenarios altamente fragmentados aquellas formaciones políticas con menor representación pueden resultar cruciales. Asimismo, se ha evidenciado una notable coincidencia entre las expectativas basadas en la racionalidad matemática de los partídos políticos y la conducta exhibida en las negociaciones y votaciones de investidura.

Referencias

[1] Algaba, E., Prieto, A., Saavedra-Nieves, A., & Hamers, H.: Analyzing zerkani network with the owen value, 2022. bibitemJuegosSimples Amer, R., Carreras, F., Magaña, A.: Juegos simples e Ãndice de poder de Shapley-Shubik, *Revista de estudios polÃticos* 121, 2003.

[2] Bergantiños, G.; Carreras, F.; García-Jurado, I.: Cooperation when some players are incompatible, *Methods and Models of Operations Research (ZOR)* 38, 187-201, 1993.

[3] Carreras, F.; Owen, G.: Valor coalicional y estrategias parlamentarias, *Revista Española de Investigaciones Sociológicas* 71, 157-176, 1995.

[4] Carreras, F.: Restriction of simple games, *Mathematical Social Sciences*, 21, 245-260, 1991.

[5] Chun, Y.: A new axiomatization of the Shapley value, *Games and Economic Behaviour* 1, 119-130, 1989.

[6] Dubey, P.: On the uniqueness of the Shapley value, *International Journal of Game Theory* 4, 131-139, 1975.

[7] Elecciones generales 23J [Internet]. *Generales23j.es.* Julio de 2023.
`https://resultados.generales23j.es/es/inicio/0`

[8] Europa Press: 'El PNV reitera su no a Feijóo por su pacto con Vox y porque sólo propone "más leña"territorial'. 27 de septiembre de 2023.
`https://www.europapress.es/nacional/noticia-pnv-reitera-no-feijoo-pacto-vox-porque-solo-propone-mas-lena-territorial-20230927103309.html`

[9] Giménez, J. & Puente, A.: The Owen and the Owen-Banzhaf Values Applied to the Study of the Madrid Assembly and the Andalusian Parliament in Legislature 2015-2019. 45-52, 2019.

[10] González-Díaz, J.; García-Jurado, I.; Fiestras-Janeiro, M.G.: Cooperative Games, *An introductory Course on Mathematical Game Theory*, American Mathematical Society, 2010.

[11] Manfred J. Holler: Forming Coalitions and Measuring Voting Power. *Political Studies* 30(2), 262-271, 1982.

[12] Myerson, Roger B.: Graphs and Cooperation in Games. *Mathematics of Operations Research*, 2, 225-229, 1977.

[13] Owen, G.: Values of games with a priori unions. In: Henn R.; Moeschlin O. (eds), *Essays in Mathematical Economics and Game Theory*, 76-88, Springer, Berlin, Heidelberg, 1977.

[14] Roth AE, ed.: The Shapley Value: Essays in Honor of Lloyd S. Shapley. *Cambridge: Cambridge University Press*, 1988.

[15] Saavedra-Nieves, A., García-Jurado, I., & Fiestras-Janeiro, M. G.: Estimation of the owen value based on sampling. In E. Gil, E. Gil, J. Gil, & M. A. Gil (Eds.), *The mathematics of the uncertain: A tribute to Pedro Gil*, 347-356, 2018.

[16] Vázquez-Bragea, M., van den Nouwelandb, A., García-Jurado, I.: Owen's coalitional value and aircraft landing fees. *Mathematical Social Sciences* 34, 273-286, 1997.

[17] van Wanrooij, M.: An approximation method for the Owen value. 2022. `http://arno.uvt.nl/show.cgi?fid=158948`

A. Anexo

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <time.h>
#include <math.h>

// Minimal game simulation
void MinimalGame (int numPlayers, double* gameValues, int* ordering, double* punctuation,
int majority) {
   int aux = 0;

   for (int i = 0; i < numPlayers; i++) {
      aux += gameValues[ordering[i]];
      if (aux == majority || aux > majority) {
         punctuation[ordering[i]]++;
         break;
      }
   }
}


int main() {
   srand(time(NULL));

   int numPlayers = 11, numCoal = 5, p = 10;
   double gameValues[] = {136, 122, 33, 31, 7, 7, 6, 5, 1, 1, 1};
   double punctuation[numPlayers];
   int ordering[numPlayers], used[numPlayers], usedCoal[numCoal];
   int i, j, aux;
   double majority = 0;

   for (i = 0; i < numPlayers; i++) {
      majority += gameValues[i];
      punctuation[i] = 0;
   }
```

```
majority = majority/2;
aux = majority;
if (majority - aux == 0) {
   majority ++;
}
else {
   majority = ceil(majority);
}

double owenValues[numPlayers];
for (i = 0; i < numPlayers; i++) {
   owenValues[i] = 0.0;
}

// Random sampling to estimate Owen values
for (int k = 0; k < p; k++) {
 for (i = 0; i < numPlayers; i++) {
    ordering[i] = i;
    used[i] = 0;
 }
 for (i = 0; i < numCoal; i++) {
    usedCoal[i] = 0;
 }

 for (i = 0; i < numPlayers; i++) {
    int c = rand() % (numCoal);
    while (usedCoal[c] == 1) {
       c = rand() % (numCoal);
    }
    if (c == 0) {
       usedCoal[c] = 1;
       int r = rand() % 2;
       if (r == 0) {
          ordering[i] = 0;
          ordering[i+1] = 2;
          used[0] = 1;
          used[2] = 1;
       }
```

```
        else {
            ordering[i] = 2;
            ordering[i+1] = 0;
            used[0] = 1;
            used[2] = 1;
        }
        i++;
    }
else if (c == 1) {
    usedCoal[c] = 1;
    for (int k = 0; k < 5; k++) {
        int r = rand() % (numPlayers);
        while (used[r] == 1 || r == 0 || r == 2 || r == 5 || r == 7 || r == 9 || r == 10) {
            r = rand() % (numPlayers);
        }
        ordering[i] = r;
        used[r] = 1;
        i++;
    }
    i--;
}
else if (c == 2) {
    usedCoal[c] = 1;
    int r = rand() % 2;
    if (r == 0) {
        ordering[i] = 5;
        ordering[i+1] = 7;
        used[5] = 1;
        used[7] = 1;
    }
```

```
            else {
               ordering[i] = 7;
               ordering[i+1] = 5;
               used[5] = 1;
               used[7] = 1;
            }
            i++;
         }
         else {
            usedCoal[c] = 1;
            j = (rand() % (2)) + 9;
            while (used[j] == 1) {
               j = rand() % (numPlayers);
            }
            ordering[i] = j;
            used[j] = 1;
         }
      }

      for (int l = 0; l < numPlayers; l++) {
         printf ("%d\t", ordering[l]);
      }
      printf ("\n");

      // Sampling Minimal Game
      MinimalGame (numPlayers, gameValues, ordering, punctuation, majority);
   }

   for (i = 0; i < numPlayers; i++) {
      owenValues[i] += punctuation[i] / p;
   }
      printf ("Estimated Owen Values:\n");
      for (i = 0; i < numPlayers; i++) {
         printf ("Player %d: %.4lf\n", i, owenValues[i]);
      }

      return 0;
   }
```