



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

SECUENCIAS DE GRADOS DE REALIZACIÓN ÚNICA

Autor: Ramón Rovira Cortés

Director: Dr. Kolja Knauer
Realitzat a: Departament de
matemàtica aplicada

Barcelona, 16 de enero de 2024

Resumen

Una secuencia de enteros positivos es gráfica si esta es la secuencia de grados de un grafo simple. Decimos que este grafo realiza la secuencia. Además, si solo un grafo y sus grafos isomorfos realizan dicha secuencia, la secuencia es una secuencia gráfica con realización única. A lo largo de este trabajo analizaremos diferentes teoremas y algoritmos para identificar este tipo de secuencias. Posteriormente, veremos un código elaborado por mi mismo para encontrar las secuencias deseadas. Finalmente, usaré todo el trabajo previo para crear la siguiente cota inferior del número de secuencias gráficas con realización única de longitud n .

Teorema. Sea $p(i)$ el número de particiones del entero i . Dado un entero $n \geq 7$.

- Si n es impar, el número de secuencias de grados gráficas con realización única verifica:

$$u(n) \geq 2^{n-5}u(5) + \sum_{i=6}^n 2^{n-i+1}p(i) - \sum_{i=6}^n i2^{n-i} - \sum_{i=0}^{\frac{n-7}{2}} (4^{i+1} + 3 \cdot 4^i)$$

- Si n es par, el número de secuencias de grados gráficas con realización única verifica:

$$u(n) \geq 2^{n-5}u(5) + \sum_{i=6}^n 2^{n-i+1}p(i) - \sum_{i=6}^n i2^{n-i} - \sum_{i=6}^{\frac{n-8}{2}} (2^{2i+1} + 6 \cdot 4^i) - 2^{n-5}$$

Abstract

A positive integer sequence is graphic if it is the degree sequence of a simple graph. We say this graph realizes the sequence. In addition, if up to isomorphism only one graph realizes the sequence, the sequence is a graphic sequence with unique realization. Throughout the work we will analyze several theorems and algorithms used to identify this type of sequences. Following that, we will see code done by me to make it easier to find the desired sequences. Finally, I will use all the previous work to create the following lower bound of the number of single realization graphic sequences of length n .

Teorema. *Be $p(i)$ the number of partitions of the integer i . Given an integer $n \geq 7$.*

- *if n is odd, the number of graphic sequences with unique realization verifies:*

$$u(n) \geq 2^{n-5}u(5) + \sum_{i=6}^n 2^{n-i+1}p(i) - \sum_{i=6}^n i2^{n-i} - \sum_{i=0}^{\frac{n-7}{2}} (4^{i+1} + 3 \cdot 4^i)$$

- *if n is even, the number of graphic sequences with unique realization verifies:*

$$u(n) \geq 2^{n-5}u(5) + \sum_{i=6}^n 2^{n-i+1}p(i) - \sum_{i=6}^n i2^{n-i} - \sum_{i=6}^{\frac{n-8}{2}} (2^{2i+1} + 6 \cdot 4^i) - 2^{n-5}$$

Agradecimientos

Quiero agradecer al Dr. Kolja Knauer por tutorizarme el trabajo y ayudarme siempre que lo he necesitado. Además me gustaría agradecer a mi familia y pareja su apoyo incondicional durante estos meses.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Motivación	1
1.2. Objetivos y desarrollo del trabajo	1
2. Resultados previos	3
2.1. Conocimientos básicos sobre grafos	3
2.2. Particiones	7
2.3. Teoremas clásicos	8
2.3.1. Erdős-Gallai	8
2.3.2. Seis criterios más para que una secuencia de grados sea gráfica	9
3. Extensión de una secuencia a una n mayor con el mismo número de realizaciones	11
4. Swaps y Havel-Hakimi	15
5. Creación del programa	19
5.1. SageMath	19
5.2. Funciones	20
5.2.1. Unicidad	20
5.2.2. AG	21
5.2.3. UG	21
5.2.4. Cota	22
6. Resultados computacionales para n pequeña	23
6.1. Familias de de secuencias de grados gráficas de realización única . .	23
6.2. Resultados computacionales de $n = 1$ a $n = 10$	24
7. Familias de secuencias gráficas con realización única	25

7.1. Familias encontradas	25
7.2. Familias de secuencias de grados de realización única	26
7.2.1. Número de secuencias en cada familia	29
7.2.2. Intersección entre ellas	30
7.3. Cota inferior	33
7.4. Comparación de la cota para $4 \leq n \leq 10$	33
7.5. Cota inferior independiente de $n - 1$	34
7.6. Cota superior	35
7.6.1. Comparación de la cota superior para $n \leq 10$	36
8. Conclusiones	37

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

La teoría de grafos ha sido una rama de las matemáticas que siempre me ha llamado la atención. Además de recibir influencia de muchas otras áreas, está muy presente en una gran cantidad de ámbitos debido a su gran número de usos.

El artículo de Ichishima y Muntaner-Batlle [10] introduce el concepto de que un único grafo realice una secuencia de grados. Juntando esto con mi interés por la teoría de grafos, encontré un buen punto de partida de mi trabajo.

1.2. Objetivos y desarrollo del trabajo

El objetivo de este trabajo es encontrar una cota inferior del número de secuencias gráficas con una única realización. Para ello dividiré el trabajo en dos partes, una base teórica que me permita trabajar en la creación de la cota y la creación de la cota en sí.

La primera parte se basa principalmente en la introducción de definiciones referentes a grafos y particiones, enunciación de criterios que nos permitan encontrar que secuencias son gráficas y de los teoremas que nos permitan reconocer cuales tienen una única realización y cuales no.

La segunda mitad del trabajo parte de la creación de un código que me permita ver que estructura comparten las secuencias que busquemos, el análisis de los resultados que obtengo y las familias de secuencias que puedo identificar ahí, a parte de las familias que conocía anteriormente. Finalmente, busco la cantidad de secuencias en cada familia y las intersecciones entre cada familia. Juntando todo lo anterior defino la cota inferior.

Capítulo 2

Resultados previos

2.1. Conocimientos básicos sobre grafos

A continuación veremos unos conceptos básicos y proposiciones sobre grafos que nos ayudarán a entender mejor que es un grafo. En el libro de West [19] podemos encontrar esta información.

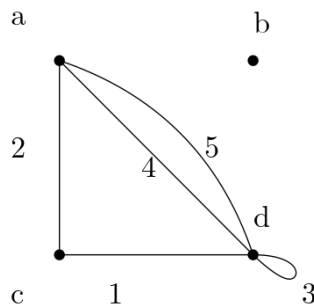
Definición 2.1.1. *Un grafo G es una tripleta consistente en un conjunto de vértices $V(G)$, un conjunto de aristas $E(G)$ y una relación que asocia cada arista con dos vértices no necesariamente distintos.*

Definición 2.1.2. *Diremos que la arista es incidente a los vértices de $V(G)$ asociados con ella.*

Definición 2.1.3. *Dados dos vértices $u, v \in V(G)$, diremos que los vértices son vecinos si existe una arista $e \in E(G)$ incidente a u y v .*

Definición 2.1.4. *Un loop es una arista incidente a un solo vértice. Aristas múltiples, son aristas incidentes a los mismos vértices.*

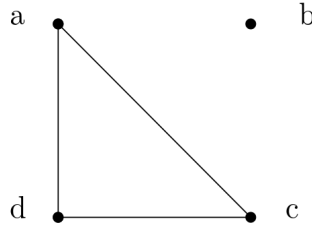
Ejemplo 2.1.5. Sea el grafo G con $V(G) = \{a, b, c, d\}$ y $E(G) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, con representación gráfica:



Definición 2.1.6. *Un grafo simple es un grafo que no tiene loops ni aristas múltiples.*

Especificamos un grafo simple por su conjunto de vértices y de aristas, tratando el conjunto de aristas como un conjunto de pares de vértices no ordenados.

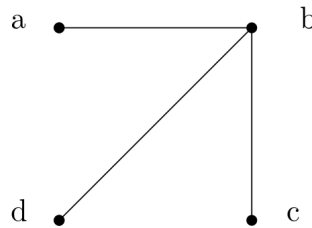
Ejemplo 2.1.7. Sea el grafo G con $V(G) = \{a, b, c, d\}$ y $E(G) = \{(a, d), (a, c), (d, c)\}$, su representación gráfica es:



Este grafo es un grafo simple ya que no tiene ni loops ni aristas, no como el grafo del ejemplo anterior.

Definición 2.1.8. El complemento $\bar{G}$ de un grafo simple G es el grafo simple con conjunto de vértices $V(G)$ y conjunto de aristas definido por $uv \in E(\bar{G})$ si y solo si $uv \notin E(G)$.

Ejemplo 2.1.9. Sea G el grafo del ejemplo 2.1.7, $\bar{G}$ será



Definición 2.1.10. Un grafo G es bipartito si $V(G)$ es la unión de dos conjuntos independientes y disjuntos (posiblemente vacíos) de G .

Definición 2.1.11. Un subgrafo de un grafo G es un grafo H tal que $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$ y con la asociación de vértices para las aristas igual a la de G . Entoces escribimos $H \subseteq G$ y decimos que G contiene H .

Definición 2.1.12. Un grafo coplato es un grafo simple donde todos los vértices son vecinos unos con los otros. Si el grafo completo tiene n vértices, lo denotamos como K_n .

Definición 2.1.13. Una clique es un subconjunto U de los vértices de un grafo simple G donde para todo $u, v \in U$, $(u, v) \in E(G)$.

Definición 2.1.14. Un grafo bipartito completo es un grafo bipartito simple donde dos vértices son vecinos si y solo si pertenecen a diferentes conjuntos de la partición. Cuando los conjuntos tienen tamaño r y s , lo denotamos como $K_{r,s}$.

Definición 2.1.15. Un isomorfismo de un grafo simple G a un grafo simple H es una biyección $f : V(G) \rightarrow V(H)$ tal que $uv \in E(G)$ si y solo si $f(u)f(v) \in E(H)$. Decimos G es isomorfo a H , y lo escribimos como $G \cong H$ si existe un isomorfismo de G a H .

Proposición 2.1.16. *La relación de isomorfismo es una relación de equivalencia en el conjunto de grafos simples.*

Demostración. Propiedad reflexiva: la permutación identidad en $V(G)$ es un isomorfismo de G a si mismo. Por lo tanto, $G \cong G$.

Propiedad simétrica: si $f : V(G) \rightarrow V(H)$ es un isomorfismo de G a H , entonces f^{-1} es un isomorfismo de H a G . Entonces, $G \cong H$ implica que $H \cong G$.

Propiedad transitiva: Supongamos que $g : V(G) \rightarrow V(H)$ y $f : V(F) \rightarrow V(G)$ son isomorfismos. Tenemos que $uv \in E(F)$ si y solo si $f(u)f(v) \in E(G)$, $xy \in E(G)$ si y solo si $g(x)g(y) \in E(H)$. Como f es un isomorfismo, para todo $xy \in E(G)$ podemos encontrar $uv \in E(F)$ tal que $f(u) = x$ y $f(v) = y$. Esto significa que $uv \in E(F)$ si y solo si $g(f(u))g(f(v)) \in E(H)$. Por lo tanto, la composición $g \circ f$ es un isomorfismo de F a H . Hemos demostrado que $F \cong G$ y $G \cong H$ juntos implica $F \cong H$. $\square$

Definición 2.1.17. *Una clase de isomorfismos de grafos es una clase de equivalencia de grafos respecto la relación de isomorfismo.*

Definición 2.1.18. *Un grafo es autocomplementario si es isomorfo a su complemento.*

Definición 2.1.19. *La unión de los grafos $G_1, \dots, G_k$ escrita como $G_1 \cup \dots \cup G_k$, es el grafo con conjunto de vértices $\bigcup_{i=1}^k V(G_i)$ y conjunto de aristas $\bigcup_{i=1}^k E(G_i)$.*

Corolario 2.1.20. *En el caso que tengamos un grafo G y un vértice $v \notin V(G)$, el grafo $G \cup v$ es el grafo con conjunto de vértices $V(G) \cup \{v\}$ y conjunto de aristas $E(G)$.*

Definición 2.1.21. *Sea G un grafo y $v \in V(G)$, el grafo $G \setminus v$ es el grafo que tiene por conjunto de vértices el conjunto $V(G) \setminus \{v\}$ y por conjunto de aristas el conjunto $E(G) \setminus \{e \in E(G) : e \text{ es incidente a } v\}$.*

Definición 2.1.22. *Sea G un grafo con conjunto de vértices $V(G)$ y conjunto de aristas $E(G)$ y v un vértice tal que $v \notin V(G)$.*

Definimos $G + v$ como el grafo con conjunto de vértices $V(G) \cup \{v\}$ y conjunto de aristas $E(G) \cup \bigcup_{u \in V(G)} \{(v, u)\}$.

Definición 2.1.23. *El grado de un vértice v en un grafo G , escrito como $d_G(v)$ o $d(v)$, es el número de aristas incidentes a v , excepto que cada loop cuenta por 2. El grado máximo es $\Delta(G)$ y el grado mínimo es $\delta(G)$.*

Proposición 2.1.24. *Dado un vértice $v \in V(G)$, y un isomorfismo $f : V(G) \rightarrow V(H)$, entonces $d_G(v) = d_H(f(v))$.*

Demostración. Para todo $u \in V(G)$ tal que $uv \in E(G)$ tenemos que $f(u)f(v) \in E(H)$. Además, para todo $w, t \in V(G)$, $f(w) = f(t) \iff w = t$ ya que f es una biyección. Por lo tanto, $d_G(v) \leq d_H(f(v))$.

Usando el mismo argumento en la otra dirección encontramos que $d_G(v) \geq d_H(f(v))$. Así que $d_G(v) = d_H(f(v))$. $\square$

Definición 2.1.25. Dado un grafo G , diremos que un vértice es *apex* si es vecino de todos los otros vértices del grafo. Diremos que un vértice es *aislado* si no es vecino de ningún otro vértice.

Proposición 2.1.26. Sea G un grafo con n vértices y $v \in V(G)$. Si G es simple y $d(v) = n - 1$ entonces v es apex. Si $d(v) = 0$ entonces v es aislado.

Demostración. Si $d(v) = 0$, v no tiene ningún vecino y por lo tanto es aislado. Si G es un grafo simple, G no tiene aristas múltiples ni loops y como $d(v) = n - 1$, v es vecino de todos los otros vértices. Por lo tanto, v es apex. $\square$

Proposición 2.1.27. Si G es un grafo, entonces

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2e(G)$$

Donde $e(G)$ es el número de aristas de G .

Demostración. Sumando los grados contamos las aristas dos veces, ya que cada arista es incidente a dos vértices y contribuye al grado de los dos. $\square$

Definición 2.1.28. La secuencia de grados de un grafo es la lista de los grados de sus vértices, normalmente escrita en orden no creciente $d_1 \geq \dots \geq d_n$.

Definición 2.1.29. Una secuencia gráfica es una lista de números no negativos que es la secuencia de grados de un grafo simple. Un grafo simple con secuencia de grados d realiza d .

Observación 2.1.30. Dada una secuencia gráfica, podemos tener dos grafos no isomorfos que la realizan. Por ejemplo, la secuencia 3,3,2,2,1,1 está realizada por al menos los siguientes grafos:



Si fueran isomorfos, como los isomorfismos conservan el grado de los vértices, los dos vértices de grado 3 deberían ser vecinos, pero no lo son. Por lo tanto, no podemos crear un isomorfismo entre ellos, y por ende no son isomorfos.

Proposición 2.1.31. Sea G un grafo simple con secuencia de grados $d_1, \dots, d_n$, entonces el grafo $\bar{G}$ tiene secuencia de grados $n - d_n - 1, \dots, n - d_1 - 1$.

Demostración. Sea G un grafo simple con secuencia de grados $d_1, \dots, d_n$. Sea $v \in V(G)$ el vértice de grado d_i , v es vecino de d_i vértices, pero en el grafo $\bar{G}$ solo será vecino de los vértices que no sean sus vecinos en el grafo G . Como $\bar{G}$ tiene

n vértices y no es vecino de los d_i anteriores ni de él mismo, el número de vecinos de v en $\bar{G}$ es $n - d_i - 1$, que es también su grado en $\bar{G}$.

Aplicando este razonamiento a todos los vértices y reordenando los grados en orden no creciente, tenemos que la secuencia de grados de $\bar{G}$ es $n - d_n - 1, \dots, n - d_1 - 1$. $\square$

Definición 2.1.32. *Dado un vértice $v \in V(G)$, definimos $N(v)$ como el conjunto de vecinos de v .*

Debido a que a partir de ahora solo trabajaré con grafos simples, en cualquier momento que escriba grafo, me refiero a grafo simple.

Definición 2.1.33. *Una secuencia de grados gráfica tiene una única realización si todas las realizaciones de la secuencia de grados son isomorfas entre ellas.*

2.2. Particiones

Vamos a introducir el concepto de partición [1] para poder usarlo posteriormente en la creación de la cota inferior del número de secuencias gráficas con una única realización.

Definición 2.2.1. *Decimos que una secuencia de enteros positivos en orden no creciente (mayores o iguales a 1) es una partición de n si la suma de esos enteros da n .*

Notación 2.2.2. *Definimos $p(n)$ como el número de particiones de n .*

Notación 2.2.3. *Definimos $p_m(n)$ como el número de particiones de n en m números.*

Observación 2.2.4. Sea n un entero mayor o igual a 1,

$$p(n) = \sum_{i=1}^n p_i(n)$$

Voy a introducir una cota inferior del número de particiones de n extraída del artículo de Attila [13] pero no lo demostraré. Lo usaremos más tarde para elaborar una cota inferior del número de secuencias gráficas con realización única más fácil de calcular.

Teorema 2.2.5. *Para todo entero n tenemos que*

$$\frac{e^{2\sqrt{n}}}{14} < p(n).$$

2.3. Teoremas clásicos

La pregunta *¿Cuales secuencias son gráficas?* es natural y se ha respondido de muchas maneras. En esta sección presentaré unos resultados clásicos que responden a esta pregunta. Solo demostraré el Teorema de Erdős-Gallai [18], pero se puede encontrar la demostración de los criterios de Ryser [14], Berge [3], Fulkerson-Hoffman-McAndrew [6], Bollobás [4], Grünbaum [7] y Hässelbarth [9] en el artículo de Sierksma y Hoogeveen [15] (el cual muestra una equivalencia circular con los siete teoremas) y en el trabajo de final de grado de Martí Sabaté [11]. A parte, en el capítulo de *swaps* enunciaré y demostraré el Teorema y algoritmo de Havel Hakimi.

2.3.1. Erdős-Gallai

Teorema 2.3.1. *Una lista $(d_1, \dots, d_n)$ de enteros no negativos en orden no creciente es gráfica si y solo si su suma es par, y para todo entero k con $1 \leq k \leq n$,*

$$\sum_{i=1}^k d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^n \min\{k, d_i\}, \quad \forall 1 \leq k \leq n. \quad (2.3.1)$$

Demostración. La necesidad es inmediata: cada arista se cuenta dos veces, dando como resultado una suma par, y la parte de la derecha de la desigualdad es la contribución máxima a la suma de los primeros k grados de aristas inducidas por los vértices correspondientes y aristas conectadas a los vértices restantes.

Para que sea suficiente, llamaremos subrealización de la lista $(d_1, \dots, d_n)$ a un grafo con vértices $v_1, \dots, v_n$ tal que $d(v_i) \leq d_i$ para $1 \leq i \leq n$. Dada una lista $(d_1, \dots, d_n)$ que la suma de sus valores sea par y satisfaga (3.1), construimos una realización a través de subrealizaciones consecutivas. La subrealización inicial tiene n vértices y ninguna arista.

En una subrealización, el índice crítico r es el índice más grande que verifica $d(v_i) = d_i$ para todo $1 \leq i < r$. Inicialmente, $r = 1$ a no ser que la lista sea todo 0, en cuyo caso el proceso está completo.

Mientras $r \leq n$, creamos nuevas subrealizaciones con menor deficiencia $d_r - d(v_r)$ en el vértice v_r sin alterar el grado de ningún vértice v_i con $i < r$. El proceso solo puede parar cuando la subrealización es una realización de d .

Vamos a describir el proceso. Para ello definimos $S = \{v_{r+1}, \dots, v_n\}$. Mantenemos la condición de que S es un conjunto independiente.

- Caso(0): v_r no es vecino de v_i para algún vértice v_i tal que $d(v_i) < d_i$. En ese caso añadimos la arista $v_r v_i$.
- Caso(1): v_r no es vecino de v_i para alguna i con $i < r$. Dado que $d(v_i) = d_i \geq d_r > d(v_r)$, existe $u \in N(v_i) - (N(v_r) \cup \{v_r\})$, donde $N(z) = \{y : z \text{ vecino de } y\}$. Si $d_r - d(v_r) \geq 2$, entonces reemplazamos uv_i con $\{uv_r, v_i v_r\}$. Si $d_r - d(v_r) = 1$, entonces como $\sum d_i - \sum d(v_i)$ es par, existe un índice k con

$k > r$ tal que $d(v_k) < d_k$. Aplicamos el Caso(0) a no ser que v_r sea vecino de v_k ; reemplazamos $\{v_r v_k, uv_i\}$ con $\{uv_r, v_i v_r\}$.

- Caso(2): $v_1, \dots, v_{r-1} \in N(v_r)$, y $d(v_k) \neq \min\{r, d_k\}$ para alguna k tal que $k > r$. En una subrealización, $d(v_k) \leq d_k$. Como S es independiente, $d(v_k) \leq r$. Por lo tanto $d(v_k) < \min\{r, d_k\}$, y el Caso(0) se aplica a no ser que v_k sea vecino de v_r . Como $d(v_k) < r$, existe una i con $i < r$ tal que v_k no es vecino de v_i . Como $d(v_i) > d(v_r)$, existe un $u \in N(v_i) - (N(v_r) \cup \{v_r\})$. Reemplazamos uv_i por $\{uv_r, v_i v_k\}$.
- Caso(3): $v_1, \dots, v_{r-1} \in N(v_r)$, y v_i no es vecino de v_j por algunas i y j tal que $i < j < r$. Se aplica el Caso(1) a no ser que $v_i, v_j \in N(v_r)$. Como $d(v_i) \geq d(v_j) > d(v_r)$, existe $u \in N(v_i) - (N(v_r) \cup \{v_r\})$ y $w \in N(v_j) - (N(v_r) \cup \{v_r\})$ (posiblemente $u = w$). Como $u, w \notin N(v_r)$, se aplica el caso 1 a no ser que $u, w \in S$. Reemplazamos $\{uv_i, wv_j\}$ por $\{v_i v_j, uv_r\}$.

Si no se aplica ninguno de estos casos, entonces $v_1, \dots, v_r$ son vecinos 2 a 2, y $d(v_k) = \min\{r, d_k\}$ para $k > r$. Como S es independiente, $\sum_{i=1}^r d(v_i) = r(r-1) + \sum_{k=r+1}^n \min\{r, d_k\}$. Por (3.1), $\sum_{i=1}^n d_i$ está acotado por la derecha. De modo que ya hemos eliminado la deficiencia en el vertice r . Seguimos con $r+1$.

□

2.3.2. Seis criterios más para que una secuencia de grados sea gráfica

Teorema 2.3.2. (Criterio de Ryser [14]) Una secuencia $(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_n)$ de enteros no negativos la llamamos gráfica bipartita si y solo si existen dos grafos bipartitos simples con los grados de los vértices definidos por las secuencias de grados $(a_1, \dots, a_p)$ y $(b_1, \dots, b_n)$. Dada una secuencia $(d_1, \dots, d_n)$ de n enteros no negativos decreciente, definimos $f = \max\{i : d_i \geq i\}$ y $\bar{d}_i = d_i + 1$ si $i \leq f$ y $\bar{d}_i = d_i$ en caso contrario.

Entonces, la secuencia $(d_1, \dots, d_n)$ será gráfica si $(\bar{d}_1, \dots, \bar{d}_n; \bar{d}_1, \dots, \bar{d}_n)$ es una secuencia gráfica bipartita.

Teorema 2.3.3. (Criterio de Berge [3]) Sea $(d_1, \dots, d_n)$ una secuencia de n enteros no negativos decreciente. Definimos la matriz de n filas y n columnas $A = (a_{i,j})$ como:

$$a_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{si } i = j \\ 1, & \text{si } j \in \{1, \dots, d_i\} \text{ y } d_i < i \\ 1, & \text{si } j \in \{1, \dots, d_{i+1}\} \setminus \{i\} \text{ y } d_i \geq i \\ 0, & \text{el resto} \end{cases}$$

Definimos $\bar{d}_i = \sum_{j=1}^n a_{j,i}$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$

Entonces, la secuencia $(d_1, \dots, d_n)$ será gráfica si

$$\sum_{i=1}^k d_i \leq \sum_{i=1}^k \bar{d}_i \text{ para todo } 1 \leq k \leq n.$$

Teorema 2.3.4. (Criterio de Fulkerson-Hoffman-McAndrew [6]) Sea $(d_1, \dots, d_n)$ una secuencia de n enteros no negativos decreciente, esta secuencia será gráfica si

$$\sum_{i=1}^k d_i \leq k(n - m - 1) + \sum_{i=n-m+1}^n d_i \text{ para todo } 1 \leq k \leq n$$

$m \geq 0$ y $k + m \leq n$.

Teorema 2.3.5. (Criterio de Bollobás [4]) Sea $(d_1, \dots, d_n)$ una secuencia de n enteros no negativos decreciente, esta secuencia será gráfica si

$$\sum_{i=1}^k d_i \leq \sum_{i=k+1}^n d_i + \sum_{i=1}^k \min\{d_i, k - 1\} \text{ para todo } 1 \leq k \leq n.$$

Teorema 2.3.6. (Criterio de Grünbaum [7]) Sea $(d_1, \dots, d_n)$ una secuencia de n enteros no negativos decreciente, esta secuencia será gráfica si:

$$\sum_{i=1}^k \max\{k - 1, d_i\} \leq k(k - 1) + \sum_{i=k+1}^n d_i \text{ para todo } 1 \leq k \leq n.$$

Teorema 2.3.7. (Criterio de Hässelbarth [9]) Sea $(d_1, \dots, d_n)$ una secuencia de n enteros no negativos decreciente. Definimos la matriz de n filas y n columnas $A = (a_{i,j})$ como:

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{si } j \in \{1, \dots, d_i\} \\ 0, & \text{el resto} \end{cases}$$

Definimos $d'_i = \sum_{j=1}^n a_{j,i}$. Entonces, $d_1, \dots, d_n$ será gráfica si:

$$\sum_{i=1}^k d_i \leq \sum_{i=1}^k (d'_i - 1) \text{ para todo } 1 \leq k \leq f.$$

Con $f = \max\{i : d_i \geq i\}$.

Capítulo 3

Extensión de una secuencia a una n mayor con el mismo número de realizaciones

En este capítulo analizaré el artículo de Ichishima y Muntaner-Batlle [10] que fue el punto de partida del trabajo y el cual contiene información esencial para realizar la cota inferior de del número de secuencias de grados de longitud n con única realización.

Lema 3.0.1. Sean $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ dos grafos de orden n para los cuales existen vértices únicos $v_1 \in V_1$ y $v_2 \in V_2$ tal que

$$\deg(v_1) = \deg(v_2) = n - 1. \quad (3.0.1)$$

Entonces $G_1 \cong G_2$ si y solo si $G_1 - v_1 \cong G_2 - v_2$.

Demostración. Asumimos que $G_1 \cong G_2$. Existe un isomorfismo $\phi : V_1 \rightarrow V_2$. Como v_i ($i = 1, 2$) son los únicos vértices de V_i de grado $n - 1$ y todo isomorfismo mantiene grados, entonces $\phi(v_1) = v_2$. De modo que, si consideramos $G_1 \setminus v_1$ y $G_2 \setminus v_2$, la función $\phi' : V_1 \setminus \{v_1\} \rightarrow V_2 \setminus \{v_2\}$ definida por $\phi'(a) = \phi(a)$ está bien definida y es biyectiva. Además, $ab \in E_1 \setminus \{v_1x | x \in V_1 \setminus \{v_1\}\}$ si y solo si $\phi'(a)\phi'(b) \in E_2 \setminus \{v_2x | x \in V_2 \setminus \{v_2\}\}$. Esto implica que $\phi' : V_1 \setminus \{v_1\} \rightarrow V_2 \setminus \{v_2\}$ es un isomorfismo, lo que significa que $G_1 \setminus v_1 \cong G_2 \setminus v_2$.

Ahora, asumimos que $H_1 = (V'_1, E'_1)$ y $H_2 = (V'_2, E'_2)$ son dos grafos isomorfos con un isomorfismo $\phi : V'_1 \rightarrow V'_2$. También, sean v_1 y v_2 dos nuevos vértices, consideramos los dos nuevos grafos $H_1 + v_1$ y $H_2 + v_2$. Consideramos la función $\phi' : V(H_1) + v_1 \rightarrow V(H_2) + v_2$ definida por

$$\phi'(v) = \begin{cases} \phi(v), & \text{if } v \in V'_1 \\ v_2, & \text{if } v = v_1. \end{cases} \quad (3.0.2)$$

Como ϕ es un isomorfismo de H_1 a H_2 , vemos que una arista $ab \in E(H_1 + v_1)$ y $\{a, b\} \cap \{v_1\} = \emptyset$ si y solo si $\phi'(a)\phi'(b) \in E(H_2 + v_2)$. Por otra parte, si $av_1 \in$

$E(H_1 + v_1)$ para todo $a \in V_1'$ y $bv_2 \in E(H_2 + v_2)$ para todo $b \in V_2'$, entonces $\phi'(a)\phi'(v_1) = \phi(a)v_2 \in E(H_2 + v_2)$. Esto implica que ϕ' es un isomorfismo de $H_1 + v_1$ a $H_2 + v_2$, por ende $H_1 + v_1 \cong H_2 + v_2$. $\square$

Lema 3.0.2. Sean $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ dos grafos. Si v_1 y v_2 son dos nuevos vértices, entonces $G_1 \cong G_2$ si y solo si $G_1 \cup v_1 \cong G_2 \cup v_2$.

Demostración. Primero, asumimos que $G_1 \cong G_2$. Por lo tanto, existe un isomorfismo $\phi : V_1 \rightarrow V_2$. Ahora consideramos la función $\phi' : V_1 \cup \{v_1\} \rightarrow V_2 \cup \{v_2\}$ definida por

$$\phi'(v) = \begin{cases} \phi(v), & \text{if } v \in V_1 \\ v_2, & \text{if } v = v_1. \end{cases} \quad (3.0.3)$$

Como no existe ninguna arista de la forma av_1 en $G_1 \cup v_1$ ni tampoco ninguna arista de la forma bv_2 en $G_2 \cup v_2$, vemos que ϕ' es un isomorfismo de $G_1 \cup v_1$ a $G_2 \cup v_2$ y por ende $G_1 \cup v_1 \cong G_2 \cup v_2$.

Ahora, asumimos que $G_1 \cup v_1 \cong G_2 \cup v_2$. Por lo tanto, existe un isomorfismo $\phi : V_1 \rightarrow V_2$. Como la imagen a través de ϕ de un vértice aislado es un vértice aislado, podemos asumir que $\phi(v_1) = v_2$. Esto implica que la función $\phi' : V_1 \rightarrow V_2$ definida por $\phi(v) = v$ para todo $v \in V_1$ está bien definida, es biyectiva y un isomorfismo de G_1 a G_2 . Por ende, $G_1 \cong G_2$. $\square$

Sea $S_0 : d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_{n-1} \geq d_n \geq 0$ una secuencia gráfica. Si asumimos que existen exactamente k ($k \geq 1$) grafos que realizan S_0 , entonces tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.0.3. Las secuencias

$$S_0^{(1)} : n+1, d_1+1, \dots, d_{n-1}+1, d_n+1, 1$$

$$S_0^{(2)} : n+3, n+2, d_1+2, \dots, d_{n-1}+2, d_n+2, 2, 1$$

$$S_0^{(3)} : n+5, n+4, n+3, d_1+3, \dots, d_{n-1}+3, d_n+3, 3, 2, 1$$

$$\vdots$$

$$S_0^{(i)} : n+2i-1, \dots, n+i+1, n+i, d_1+i, \dots, d_{n-1}+i, d_n+i, i, \dots, 3, 2, 1$$

$$\vdots$$

son todas gráficas. Además, existen exactamente k , $k \geq 1$, grafos conexas y no isomorfos que realizan cada una de las secuencias $S_0^{(1)}, S_0^{(2)}, \dots, S_0^{(i)}, \dots$.

Demostración. Empezamos demostrando que toda secuencia $S_0^{(i)}$ es gráfica para todo entero i positivo. Para hacer esto, solo debemos encontrar un grafo que realice S_0 , introducir dos nuevos vértices y crear aristas entre uno de estos vértices y los vértices restantes. Por ende, $S_0^{(1)}$ es gráfica. Para obtener un grafo que realice $S_0^{(2)}$, debemos hacer el mismo proceso de nuevo. Si continuamos este proceso inductivamente, obtenemos un grafo que realiza $S_0^{(i)}$ para todo entero i positivo.

Ahora, observamos que como todo grafo que realiza $S_0^{(i)}$ ($i \geq 1$) tiene un vértice adyacente al resto de vértices, así que todos estos grafos son connexos. Falta ver que todas las secuencias restantes realizan exactamente $k(k \geq 1)$ grafos. Para verlo definimos $S_0^{(0)} = S_0$. Observamos que hay $k(k \geq 1)$ grafos no isomorfos que realizan $S_0^{(0)}$.

Sea $i = l(l \geq 0)$ y asumimos que existen exactamente $k(k \geq 1)$ grafos no isomorfos que realizan $S_0^{(l)}$. Consideramos la secuencia

$$S_0^{(l+1)} : n+2l+1, \dots, n+l+2, n+l+1, d_1+l+1, \dots, d_{n-1}+l+1, d_n+l+1, l+1, l, \dots, 2, 1. \quad (3.0.4)$$

y sea $G_0^{(l+1)}$ cualquier grafo que realice $S_0^{(l+1)}$. Ahora podemos ver que el vértice de grado $n+2l+1$ es adyacente a todos los otros vértices de $V(G_0^{(l+1)})$. También es cierto que si eliminamos ese vértice, obtenemos un nuevo grafo con $(0, S_0^{(l)})$ como secuencia de grados. Por hipótesis inductiva, existen exactamente $k(k \geq 1)$ grafos no isomorfos con $S_0^{(l)}$ como secuencia de grados. Entonces, por el lema 4.2 vemos que hay exactamente $k(k \geq 1)$ grafos no isomorfos con secuencia de grados $(0, S_0^{(l)})$, y el lema 4.1 implica que hay exactamente $k(k \geq 1)$ grafos no isomorfos con secuencia de grados $S_0^{(l+1)}$.

□

Este teorema nos permite encontrar una secuencia gráfica con realización única de longitud $n+2m$ (con n, m enteros positivos) si tenemos una secuencia gráfica con realización única de longitud n .

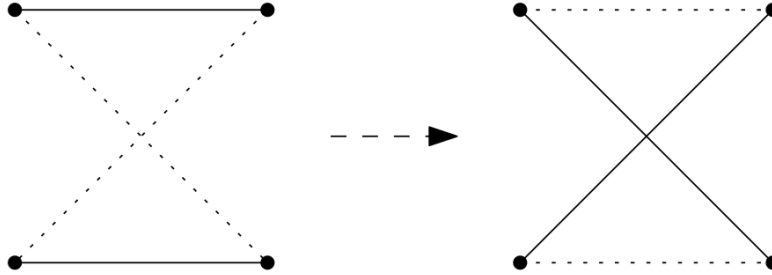
Más adelante veremos que si tenemos una secuencia gráfica con realización única de longitud n , podemos encontrar dos secuencias gráficas con realización única de longitud $n+1$ partiendo de los lemas 3.0.1 y 3.0.2.

Capítulo 4

Swaps y Havel-Hakimi

En este capítulo hablaremos del concepto de *swap* introducido por Erdős, Király y Miklós [5] y lo usaremos para demostrar dos teoremas, uno de ellos el teorema de Havel-Hakimi [8].

Definición 4.0.1. Sea G un grafo simple y sean a, b, c, d vértices diferentes de G y $(a, c), (b, d) \in E(G)$ pero $(b, c), (a, d) \notin E(G)$. Entonces el grafo G' tal que $V(G') = V(G)$ y $E(G') = E(G) \setminus (a, c), (b, d) \cup (b, c), (a, d)$ es otra realización de la secuencia de grados de G . A este proceso lo llamamos *swap*. La nueva realización puede ser isomorfa a la realización de la secuencia antes de hacer el *swap*.



Observación 4.0.2. Los swaps preservan la secuencia de grados del grafo.

Teorema 4.0.3. (Havel-Hakimi [8]) Para $n > 1$, una lista de enteros no negativos d de tamaño n es gráfica si y solo si d' es gráfica, donde d' se obtiene a partir de d eliminando su mayor elemento Δ y restando 1 de los Δ siguientes mayores elementos. La única secuencia gráfica de 1 elemento es $d_1 = 0$.

Demostración. Para $n = 1$ es trivial. Para $n > 1$, primero demostramos que la condición es suficiente. Dada d con $d_1 \geq \dots \geq d_n$ y un grafo simple G' con secuencia de grados $d' : d_2 - 1 \geq \dots \geq d_{\Delta+1} - 1 \geq d_{\Delta+2} \geq \dots \geq d_n$, añadimos un nuevo vértice adyacente a los vértices de G' con grados $d_2 - 1, \dots, d_{\Delta+1} - 1$. Estos d_i son los Δ mayores elementos de d después de (una copia de) Δ , pero $d_2 - 1, \dots, d_{\Delta+1} - 1$ no tienen porque ser los Δ mayores numeros en d' .

Para demostrar la necesidad, empezamos con un grafo simple G realizando d y producimos un grafo simple G' realizando d' . Sea w un vértice de grado Δ en G . Sea S un conjunto de Δ vértices de G con los grados deseados $d_2, \dots, d_{\Delta+1}$. Si $N(w) = S$, entonces eliminamos w para obtener G' .

En caso de que algunos vértices de S no estén en $N(w)$, modificamos G para incrementar $|N(w) \cap S|$ sin cambiar el grado de ningún vértice. Este paso lo hacemos con una serie de swaps. Como $|N(w) \cap S|$ puede aumentar como mucho Δ veces, repitiendo esto convertimos G en otro grafo G'' que realiza d y tiene $S = N(w)$. A partir de G'' eliminamos w para obtener G' que realiza d' .

Para encontrar la modificación cuando $N(w) \neq S$, escogemos $x \in S$ y $z \notin S$ tal que w es vecino de z pero w no es vecino de x . Queremos añadir wx y eliminar wz , pero debemos mantener los grados de los vértices. Como $d(x) \geq d(z)$ y w es vecino de z pero no de x , debe haber un vértice y adyacente a x pero no a z . Entonces, eliminamos $\{wz, xy\}$ y añadimos $\{wx, yz\}$ para incrementar $|N(w) \cap S|$. $\square$

Observación 4.0.4. A partir del Teorema de Havel-Hakimi podemos obtener el algoritmo de Havel-Hakimi para saber si una secuencia es gráfica o no. El algoritmo es el siguiente:

Dada una secuencia de grados d con valor máximo Δ , el algoritmo consiste en:

1. Generar la secuencia d' que se obtiene a partir de d eliminando su mayor elemento Δ y restando 1 de los Δ siguientes mayores elementos.
2. Si d' tiene un 0 lo eliminamos.
3. Reorganizamos los valores en orden no creciente.
4. Si d' tiene algun valor mayor o igual a la longitud de la secuencia, la secuencia no será gráfica (en la siguiente iteración no tendremos suficientes valores donde restar 1), en caso contrario volvemos a aplicar el primer paso con d' si la longitud de la secuencia es mayor o igual a 2.

Si al terminar las iteraciones tenemos una secuencia sin valores (sería equivalente a una secuencia $d' : 0$), o con solo un 0, la secuencia original es gráfica, si la secuencia que obtenemos tiene un solo elemento mayor o igual a 1, la secuencia original no es gráfica.

Ejemplo 4.0.5. Vamos a aplicar el algoritmo de Havel-Hakimi a la secuencia $d : 3, 3, 2, 2, 1, 1$.

- 2,1,1,1,1
- 0,0,1,1
- 1,1

- 0

Como la secuencia final es solo un 0, la secuencia $d : 3, 3, 2, 2, 1, 1$ es una secuencia gráfica.

Ejemplo 4.0.6. Aplicamos el algoritmo de Havel-Hakimi a la secuencia $d : 3, 3, 2, 1$

- 2,1,0
- 2,1

Como tenemos un valor mayor o igual a la longitud de la secuencia, la secuencia $d : 3, 3, 2, 1$ no es gráfica.

Como podemos ver, el algoritmo de Havel-Hakimi es muy sencillo de utilizar, así que será lo que usaremos principalmente para demostrar que una secuencia es gráfica en posteriores apartados.

Teorema 4.0.7. Sean G y H dos grafos con conjunto de vértices V , entonces $d_G(v) = d_H(v)$ para todo vértice $v \in V$ si y solo si hay una secuencia de swaps que transforma G en H .

Demostración. Todo *swap* conserva los grados de los vértices, así que la condición es suficiente.

Cuando $d_G(v) = d_H(v)$ para todo vértice $v \in V$, obtenemos una secuencia de *swaps* apropiada por inducción en el número de vértices, n .

Si $n \leq 3$, entonces para cada $d_1, \dots, d_n$ hay como mucho un solo grafo con $d(v_i) = d_i$. Por ende, podemos usar $n = 3$ como paso inicial.

Consideramos $n \geq 4$, sea w un vértice de grado máximo Δ . Sea $S = \{v_1, \dots, v_\Delta\}$ un conjunto fijo de vértices con los Δ mayores grados a parte de w .

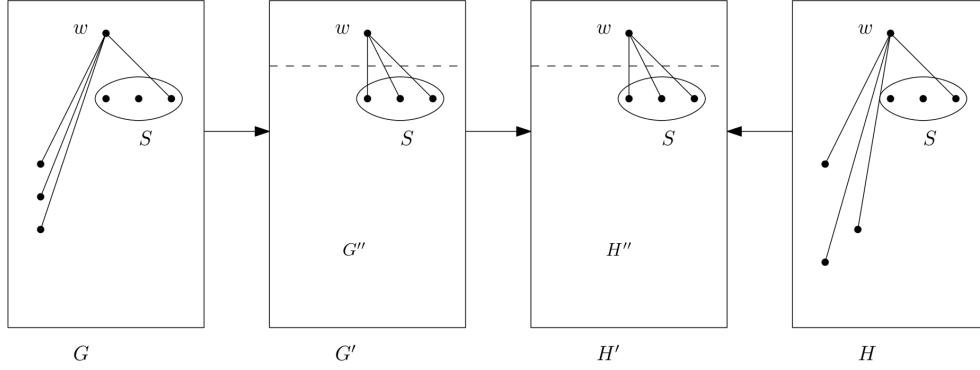
Dado cualquier grafo G , podemos transformar G en G' usando *swaps*, siendo G' un grafo donde $N_{G'}(w) = S$.

En caso de que un $v_i \in S$ no sea vecino de w , significa que $\exists u$ con $d_G(u) < d_G(v_i)$ vecino de v_i . Solo tenemos que buscar un vértice t vecino de v_i que no sea vecino de u y hacer el swap de las aristas $(w, u), (v_i, t)$ por las aristas $(w, v_i), (u, t)$. Este swap siempre es posible ya que si no existiera un vértice t que verificara estas condiciones, el $d_G(u)$ sería mayor a $d_G(v_i)$ y tendríamos una contradicción.

Aplicamos este proceso en G y H para obtener G' y H' .

Como $N_{G'}(w) = N_{H'}(w)$, eliminando w obtenemos los grafos $G'' = G' \setminus w$ y $H'' = H' \setminus w$ con $d_{G''}(v) = d_{H''}(v)$ para todo vértice v .

Usando la hipótesis de inducción, alguna secuencia de *swaps* transforma G'' en H'' . Como esta secuencia no involucra a w , y w tiene los mismos vecinos en G' y H' , aplicando esta secuencia transformamos G' en H' . Por ende, podemos transformar G en H transformando G en G' , después G' en H' y finalmente (en orden inverso) haciendo la transformación de H en H' .



□

Observación 4.0.8. Por lo tanto, dada una secuencia gráfica, podemos transformar una realización en otra usando solo swaps.

La idea para el siguiente corolario proviene del artículo de Király [12].

Corolario 4.0.9. G es la única realización de su secuencia de grados si y solo si para todo swap, el grafo resultante G' es isomorfo a G .

Este corolario es lo que nos permitirá programar una función que nos indique si una secuencia gráfica tiene una única realización o no.

Capítulo 5

Creación del programa

5.1. SageMath

Las diferentes funciones que he usado para realizar el trabajo han sido escritas usando SageMath [17], un lenguaje de programación basado en Python. Tiene un gran número de funciones integradas relacionadas con mi trabajo. Además simplifica mucho el uso de grafos, permitiéndome escribir código claro y corto.

5.2. Funciones

5.2.1. Unicidad

Esta función identifica si dado un grafo, su secuencia de grados, tiene realización única o no. Conseguimos esto intentando todos los swaps posibles en el grafo. Si después de algun swap obtenemos un grafo no isomorfo al original, tenemos que la secuencia de grados del grafo no tiene realización única. Si después de todos los swaps no hemos obtenido ningún grafo isomorfo al original, sabemos que el grafo original es la única realización del grafo. Esta función es correcta debido teorema 4.0.2.

```
def uniqueness(gp):
    for e1 in gp.edges():
        H = gp.copy()
        H.delete_vertices([e1[0], e1[1]])

        for e2 in H.edges():
            if e2 > e1: continue
            if not(gp.has_edge(e1[0], e2[1])) and not(gp.has_edge(e1[1], e2[0])):
                G = gp.copy()
                G.delete_edges([e1, e2])
                G.add_edge(e1[0], e2[1])
                G.add_edge(e1[1], e2[0])
                if not(G.is_isomorphic(gp)):
                    return False

            elif not(gp.has_edge(e1[0], e2[0])) and not(gp.has_edge(e1[1], e2[1])):
                G = gp.copy()
                G.delete_edges([e1, e2])
                G.add_edge(e1[0], e2[0])
                G.add_edge(e1[1], e2[1])
                if not(G.is_isomorphic(gp)):
                    return False

    return True
```

5.2.2. AG

Esta función, dado un entero positivo n , crea una matriz de 2 filas y tantas columnas como el número de secuencias de grados realizables diferentes de longitud n . La i -ésima columna contiene un grafo que realiza la i -ésima secuencia de grados de las anteriormente mencionadas, y si su realización es única o no. Para hacer esto usamos la función *uniqueness*.

La función `DegreeSequences(n)` es una función de SageMath que da una lista de las secuencias de grados de longitud n realizables.

```
def ag(n):
    DS = DegreeSequences(n)

    gpl = []

    for ds in DS:
        G = graphs.DegreeSequence(ds)
        gpl.append([G, uniqueness(G)])

    return gpl
```

5.2.3. UG

Esta función, dada una matriz realizada por la función anterior, muestra los grafos con secuencia de grados con única realización que no tienen ningún vértice apex o aislado. Además muestra en pantalla 2 números, el número de secuencias de grados de longitud n con realización única y el número de secuencias de grados de longitud n con realización única sin vértices aislados ni apex.

```
def ug(gpl, n):
    cnt=0
    cnt2=0
    for i in range(len(gpl)):
        if gpl[i][1]==True:
            cnt2 = cnt2 + 1
            if max(gpl[i][0].degree())<n-1 and min(gpl[i][0].degree())>0:
                show(gpl[i][0])
                cnt = cnt + 1
    print(cnt2)
    print(cnt)
```

5.2.4. Cota

Esta función calcula una cota inferior del número de secuencias de grados de longitud n con realización única si sabemos cuantas secuencias de grados de longitud $n - 1$ tienen realización única. Esta cota la veremos y demostraremos en los siguientes apartados.

La función `Partitions(n)` es una función de SageMath que da las particiones de n .

```
def cota(n, ant):
    if n < 4: print('n debe ser mayor o igual a 4.')
    else:
        print('cota')
        if n==4:
            print(2*ant+2*Partitions(n).cardinality()-n-3)
        elif n==5:
            print(2*ant+2*Partitions(n).cardinality()-n-4)
        elif n%2==0:
            print(2*ant+2*Partitions(n).cardinality()-n-2)
        else:
            print(2*ant+2*Partitions(n).cardinality()-n-3)
```

Capítulo 6

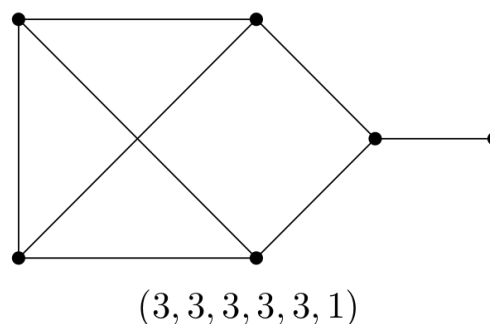
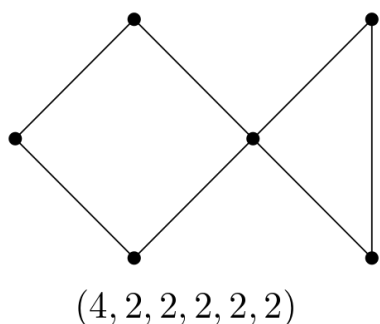
Resultados computacionales para n pequeña

6.1. Familias de de secuencias de grados gráficas de realización única

Usando las funciones que he creado, he podido visualizar una representación gráfica de las secuencias de grados sin un vértice aislado o apex que tienen única realización para un n pequeño. A partir de ahí he podido identificar algunas familias de las que hablaré en posteriores apartados y del proceso que he seguido para encontrarlas.

Además me ha servido para contar el número de secuencias de grados de realización única para $n < 10$.

Estos dos grafos son dos ejemplos de una realización única de su secuencia de grados que he encontrado usando las funciones.



6.2. Resultados computacionales de $n = 1$ a $n = 10$

n	número de secuencias de realización única	sin apex ni aislado
1	1	0
2	2	0
3	4	0
4	11	3
5	28	6
6	72	16
7	170	26
8	407	67
9	956	142
10	2252	340

Capítulo 7

Familias de secuencias gráficas con realización única

Con la información que hemos obtenido hasta ahora con el programa, vamos a buscar familias de secuencias dentro del conjunto de las secuencias gráficas de realización única.

Debemos remarcar que las familias que buscamos no deben tener ni vértices aislados ni apex. Esto se debe a que estas secuencias las podemos obtener haciendo extensiones de secuencias más cortas, como veremos en los siguientes corolarios. Si no fuera así, tendríamos intersecciones innecesarias, que complicarían cálculos posteriores.

7.1. Familias encontradas

Al usar la función UG podemos ver los grafos que realizan las secuencias gráficas sin vértices aislados ni apex que intentamos contar.

Al menos para un n pequeño, podemos observar que muchos de los grafos tienen una gran cantidad de vértices de grado 1 con estructuras parecidas.

Con esta información podemos intuir cuales serán las familias con las que trabajaremos:

- Las secuencias de grados de la forma $S_1(n) : a, 1, \dots, 1$ de longitud n con $n - 1 > a \geq 1$ y $a + n - 1$ par. Un ejemplo sería:

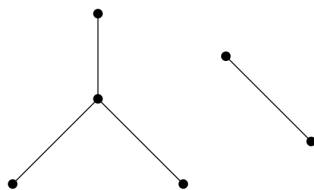


Figura 7.1: Secuencia 3,1,1,1,1,1

- Las secuencias de grados de la forma $S_2(n) : a_1, \dots, a_m, 1, \dots, 1$ de longitud n que verifican que $n-1 > a_i \geq m-1$, $\sum_{i=1}^m a_i = n-m+2\binom{m}{2}$ y $n-2 \geq m \geq 2$. Dos ejemplos serían:

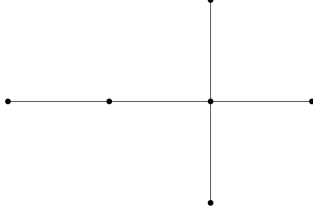


Figura 7.2: Secuencia 4,2,1,1,1,1

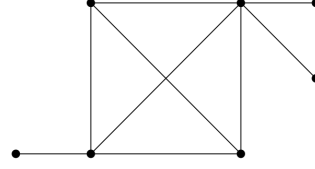


Figura 7.3: Secuencia 5,4,3,3,1,1,1

- Las secuencias de grados de la familia $S_3(n)$ son secuencias de grados de longitud n con realización única que contienen vértices apex o aislados.

A parte, también trabajaremos con las secuencias del complementario de las secuencias anteriores. Demostraremos que las podemos usar en los siguientes lemas.

7.2. Familias de secuencias de grados de realización única

Corolario 7.2.1. *La secuencia de grados $S : d_1, \dots, d_n$ es gráfica con realización única si y solo si la secuencia de grados (n, S') con $S' : d_1 + 1, \dots, d_n + 1$ también es gráfica con realización única.*

Demostración. G realiza de la secuencia S si y solo si para un $v \notin V(G)$, $G + v$ realiza la secuencia (n, S') debido al Teorema 4.0.3.

Sea H un grafo cualquiera que realice (n, S') , y etiquetamos su vértice de grado máximo como v . $H \setminus v$ también realiza S . Si S tiene una única realización $H \setminus v \cong G$. Aplicando el Lema 3.0.1 vemos que es equivalente a que $H \cong G + v$.

Por lo tanto, es equivalente a que (n, S') también tenga una única realización. $\square$

Corolario 7.2.2. *Una secuencia de grados S de longitud n tiene una única realización si y solo si la secuencia de grados $(S, 0)$ de longitud $n+1$ también tiene una única realización.*

Demostración. G es una realización de la secuencia S si y solo si dado un $v \notin V(G)$, $G \cup v$ realiza la secuencia $(S, 0)$.

Si tenemos cualquier grafo H que realiza $(S, 0)$, y etiquetamos uno de sus vértices de grado 0 como v . $H \setminus v$ también realiza S . Si S tiene una única realización $H \setminus v \cong G$. Aplicando el Lema 3.0.2 vemos que es equivalente a que $H \cong G + v$.

Por lo tanto, es equivalente a que $(S, 0)$ también tenga una única realización. $\square$

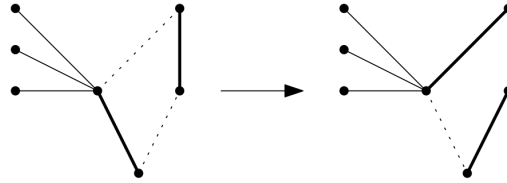
Lema 7.2.3. *Dada una secuencia de grados $S_1 \in S_1(n)$, S_1 es realizable y su realización es única.*

Demostración. Para demostrar el lema, daremos una realización de la secuencia y veremos que todo swap genera un grafo isomorfo al original. Este argumento es válido debido al Corolario 4.0.9.

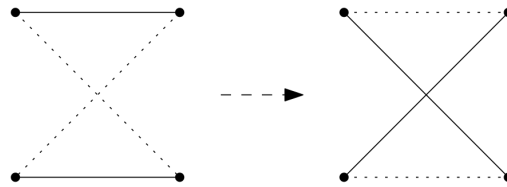
La unión disjunta de $K_{1,a}$ y $\frac{n-1-a}{2}$ aristas incidentes en dos vértices de grado 1. Como $n-1+a$ es par, $n-1-a$ también, entonces ya tenemos una realización de la secuencia.

En este grafo tenemos 2 swaps posibles:

- $u, v, w, t \in V(G)$, $(u, v), (w, t) \in E(G)$, $dg(u) = a$, $dg(v) = dg(w) = dg(t) = 1$. Definimos G' como un grafo tal que $V(G') = V(G)$ y $E(G') = E(G) \setminus (u, v), (w, t) \cup (u, t), (w, v)$. La función $f : V(G) \rightarrow V(G')$ tal que $f(x) = x \forall x \in V(G) \setminus \{v, t\}$, $f(v) = t$ y $f(t) = v$ es un isomorfismo entre G y G' .



- $u, v, w, t \in V(G)$, $(u, v), (w, t) \in E(G)$, $dg(u) = dg(v) = dg(w) = dg(t) = 1$. Definimos G' como un grafo tal que $V(G') = V(G)$ y $E(G') = E(G) \setminus (u, v), (w, t) \cup (u, t), (w, v)$. La función $f : V(G) \rightarrow V(G')$ tal que $f(x) = x \forall x \in V(G) \setminus \{v, t\}$, $f(v) = t$ y $f(t) = v$ es un isomorfismo entre G y G' .



Como los swaps solo generan realizaciones isomorfas, la realización de la secuencia es única. $\square$

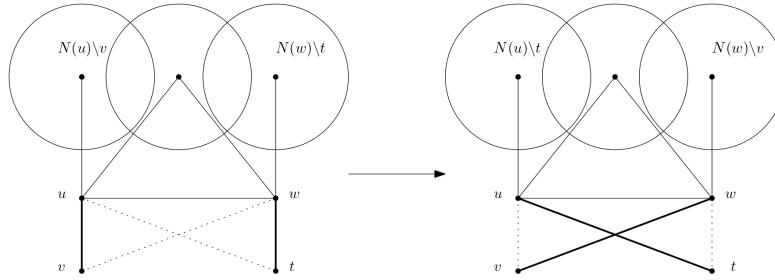
Lema 7.2.4. *Dada una secuencia de grados $S_2 \in S_2(n)$, S_2 es realizable y su realización es única.*

Demostración. Para demostrar el lema, daremos una realización de la secuencia y veremos que todo swap genera un grafo isomorfo al original. Este argumento es válido debido al Corolario 4.0.9.

Sea G un grafo simple que tiene m vértices en un conjunto A y $n - m$ vértices de grado 1 en un conjunto B , tal que los vértices de A forman una clique y los vértices de B son vecinos de algún vértice de A , pero al menos dos vértices de B son vecinos de diferentes vértices de A . Entonces, G realiza S_2 .

En este grafo tenemos 1 swap posible:

- $u, v, w, t \in V(G)$, $(u, v), (w, t) \in E(G)$ con $dg(u), dg(w) > 1$ y $dg(v) = dg(t) = 1$. Definimos G' como un grafo tal que $V(G') = V(G)$ y $E(G') = E(G) \setminus (u, v), (w, t) \cup (u, t), (w, v)$. La función $f : V(G) \rightarrow V(G')$ tal que $f(x) = x \ \forall x \in V(G) \setminus \{v, t\}$, $f(v) = t$ y $f(t) = v$ es un isomorfismo entre G y G' .



Como los swaps solo generan realizaciones isomorfas, la realización de la secuencia es única. $\square$

Lema 7.2.5. *Sea S una secuencia de grados realizable y única. La secuencia de grados del complementario de la realización de S también tiene realización única.*

Demostración. Sea $S : a_1, \dots, a_n$, definimos $\bar{S} : n - a_n, \dots, n - a_1$. Sea G la realización de S , entonces $\bar{G}$ tiene por secuencia de grados $\bar{S}$. Sea H otra realización de $\bar{S}$, $\bar{H}$ realiza S . Como S tiene realización única, $\bar{H} \cong G$. Por lo tanto, $\bar{G} \cong H$. $\square$

7.2.1. Número de secuencias en cada familia

Corolario 7.2.6. Sea $u(n)$ el número de secuencias de grados con realización única de longitud n , entonces existen $u(n)$ secuencias de grados de longitud $n + 1$ con realización única y un vértice aislado.

También existen $u(n)$ secuencias de grados de longitud $n + 1$ con realización única y un vértice apex.

Demostración. Esto es consecuencia directa de los corolarios 7.2.1 y 7.2.2. $\square$

Lema 7.2.7. Para todo $n \geq 4$, $S_1(n)$ contiene $\frac{n-2}{2}$ secuencias de grados. Si n es impar, contiene $\frac{n-3}{2}$.

Demostración. Sea n par, $a + n - 1$ será par si y solo si a es impar. Como $n - 1 > a \geq 1$, solo tenemos $\frac{n-2}{2}$ posibles a . Por lo tanto, tenemos $\frac{n-2}{2}$ secuencias de grados.

Si n es impar, $a + n - 1$ será par si y solo si a es par. Como $n - 1 > a \geq 1$, solo tenemos $\frac{n-3}{2}$ posibles a . Por lo tanto, tenemos $\frac{n-3}{2}$ secuencias de grados. $\square$

Lema 7.2.8. Para todo $n \geq 4$, $S_2(n)$ contiene $p(n) - n$ secuencias de grados.

Demostración. Definimos $a'_i = a_i - (m - 2)$. Estos a'_i verifican:

$$m - 1 - m + 2 \leq a'_i < n - 1 - m + 2 \iff 1 \leq a'_i < n - m + 1. \quad (7.2.1)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m a'_i &= \sum_{i=1}^m a_i - (m - 2) = -m(m - 2) + \sum_{i=1}^m a_i = \\ &= -m^2 + 2m + n - m + 2 \binom{m}{2} = -m^2 + m + n + 2 \binom{m}{2} = \end{aligned}$$

$$= -m^2 + m + n + 2 \frac{m!}{2!(m-2)!} = -m^2 + m + n + m(m-1) = n. \quad (7.2.2)$$

Podemos ver que el número de secuencias de grados que buscamos para un m específico es igual al número de secuencias $a'_1, \dots, a'_m$ para un m específico.

El número de estas secuencias para un m específico es $p_m(n) - 1$ ya que la secuencia con $a'_1 = n - m + 1$ y $a'_i = 1$ para $i = 2, \dots, m$ es una partición de n en m números, pero no verifica la condición 7.2.1.

Ahora solo nos falta sumar el número para todo m tal que $n - 2 \geq m \geq 2$.

$$\sum_{m=2}^{n-2} p_m(n) - 1 = -(n-3) + \sum_{m=2}^{n-2} p_m(n) = -n + 3 + p(n) - p_1(n) - p_{n-1}(n) - p_n(n) = p(n) - n.$$

$\square$

7.2.2. Intersección entre ellas

Debemos ver si las familias de secuencias de grados de realización única y sus complementarios intersecan entre ellas.

Definimos como $\overline{S_1(n)}$ la familia de secuencias de grados de los grafos complementarios de las realizaciones de la familia $S_1(n)$. De la misma forma definimos $\overline{S_2(n)}$ y $\overline{S_3(n)}$.

Lema 7.2.9. *Las secuencias en $\overline{S_3(n)}$ tienen realización única. Además, $S_3(n) = \overline{S_3(n)}$.*

Demostración. Las secuencias en $\overline{S_3(n)}$ tienen realización única por el lema 7.2.5. $S_3(n) = \overline{S_3(n)}$ ya que si una secuencia contiene un valor igual a $n - 1$, su complementario tendrá un valor igual a 0 y viceversa. Por lo tanto, la intersección es total. $\square$

Las familias $S_1(n), S_2(n), \overline{S_1(n)}$ y $\overline{S_2(n)}$ no intersecan con las familias $S_3(n)$ y $\overline{S_3(n)}$ ya que todos sus valores son mayores que 0 y menores que $n - 1$.

Solo debemos ver las intersecciones de las familias $S_1(n), S_2(n), \overline{S_1(n)}$ y $\overline{S_2(n)}$. Sabemos que las secuencias en $\overline{S_1(n)}$ y $\overline{S_2(n)}$ tienen realización única por el lema 7.2.5.

Observación 7.2.10. $\overline{\overline{S(n)}} = S$ y $\overline{S(n) \cap T(n)} = \overline{S(n)} \cap \overline{T(n)}$

Lema 7.2.11. *La familia de secuencias $S_1(n)$ y la familia de secuencias $S_2(n)$ no intersecan.*

Además, $\overline{S_1(n)}$ y $\overline{S_2(n)}$ tampoco intersecan.

Demostración. Las secuencias de la familia $S_1(n)$ tienen como máximo 1 valor mayor que 1, mientras que las secuencias de la familia $S_2(n)$ tienen como mínimo 2 valores mayores que 1. Por lo tanto la intersección de las dos familias es nula.

Usando esto y la Observación 7.2.10 vemos que $\overline{S_1(n)} \cap \overline{S_2(n)} = \emptyset$. $\square$

Lema 7.2.12. *La familia de secuencias $\overline{S_1(n)}$ y la familia de secuencias $S_2(n)$ no intersecan.*

Además, $S_1(n)$ y $\overline{S_2(n)}$ tampoco intersecan.

Demostración. Las secuencias de la familia $\overline{S_1(n)}$ no tienen ningún valor igual a 1, ya que si el valor más pequeño vale 1, $n - a - 1 = 1 \iff a = n - 2$, siendo $a + n - 1 = n - 2 + n - 1 = 2n - 3$ que es impar, llegando a contradicción. Pero las secuencias de la familia $S_2(n)$ tienen como mínimo 2 valores iguales a 1. Por lo tanto la intersección de las dos familias es nula.

Usando esto y la Observación 7.2.10 vemos que $S_1(n) \cap \overline{S_2(n)} = \emptyset$. $\square$

Lema 7.2.13. *La familia de secuencias $S_1(n)$ y la familia de sus complementarios $\overline{S_1(n)}$ no intersecan.*

Demostración. Las secuencias de la familia $S_1(n)$ tienen $n \geq 3$ para poder verificar que $n - 1 > a \geq 1$. Por lo tanto, las secuencias de la familia $S_1(n)$ tendrán como mínimo 2 valores iguales a 1, pero su complementario tiene como máximo 1 valor igual a 1, por lo tanto estas familias de secuencias no interseccionan. $\square$

Lema 7.2.14. *La familia de secuencias $S_2(n)$ y la familia de sus complementarios $\overline{S_2(n)}$ no intersecan para $n \geq 6$. Para $n = 4$ y $n = 5$ la intersección es una secuencia.*

Demostración. Las secuencias de la familia $\overline{S_2(n)}$ son de la forma $n - 2, \dots, n - 2, n - a_m - 1, \dots, n - a_1 - 1$ y verifican que $n - 1 > a_i \geq m - 1$, $\sum_{i=1}^m a_i = n - m + 2 \binom{m}{2}$ y $n - 2 \geq m \geq 2$.

Vamos a redefinir estas secuencias como secuencias de la forma $n - 2, \dots, n - 2, b_m, \dots, b_1$ con $b_i = n - 1 - a_i$. Debido a esto, los b_i verifican:

$$\begin{aligned} n - 1 &> a_i \geq m - 1 \\ 1 - n &< -a_i \leq 1 - m \\ 0 &< n - 1 - a_i \leq n - m \\ 0 &< b_i \leq n - m \end{aligned} \tag{7.2.3}$$

y

$$\sum_{i=1}^m b_i = m(n - 1) - \sum_{i=1}^m a_i = mn + m - n - m^2 \tag{7.2.4}$$

Además, como $n - 2 \geq m \geq 2$, sabemos que deben tener al menos dos valores iguales a $n - 2$.

Supongamos que la secuencia $a_1, \dots, a_m, 1, \dots, 1$ pertenece a la familia $S_2(n)$, siendo $a_1 = a_2 = a_3 = n - 2$. Sabemos que $\sum_{i=1}^m a_i = n + m^2 - 2m$. También sabemos que $a_1 = a_2 = a_3 = n - 2$ y $a_i \geq m - 1$ para todo $i \in \{4, \dots, m\}$. Por lo tanto:

$$\sum_{i=1}^m a_i - 3(n - 2) - (m - 3)(m - 1) \geq 0$$

Que es equivalente a $2(m - n) + 3 \geq 0$.

Y como $n - 2 \geq m \iff m - n \leq -2$.

Esto implica que $0 \leq 2(m - n) + 3 \leq 2(-2) + 3 = -1$. Hemos llegado a contradicción, por lo tanto, no tenemos intersección de las secuencias con 3 o más valores iguales a $n - 2$.

Con esto, solo debemos ver si existe intersección de la familia de secuencias $S_2(n)$

y las secuencias de la forma $n - 2, n - 2, b_{n-2}, \dots, b_1$ que verifiquen las condiciones 7.2.3 y 7.2.4.

Partiendo de la condición 7.2.3 y de que $m = n - 2$, $b_i \leq n - m = n - n + 2 = 2$, Por lo tanto, los b_i solo pueden ser 1 o 2. Vamos a ver los diferentes casos dependiendo del cuantos valores sean 2:

- Almenos $b_{n-2} = b_{n-3} = 2$ (esto significa que $n \geq 6$ y $m' \geq 4$ donde m' es el numero de valores diferentes de 1 que tiene la secuencia):

$$b_{n-2} = 2 < 4 - 1 \leq m' - 1$$

por lo que estas secuencias no pertenecen a la familia $S_2(n)$, ya que no cumple sus condiciones.

- $b_{n-2} = 2$ y el resto de $b_i = 1$:
La secuencia es $n - 2, n - 2, 2, 1, \dots, 1$. En este caso $n \geq 5$, $m' = 3$ y $2 \geq 3 - 1$. Solo queda una condición.

$$2n - 2 = 2(n - 2) + 2 = \sum_{i=1}^3 a_i = n + m'^2 - 2m' = n + 3$$

$$n = 5$$

Por lo que para $n = 5$ si hay intersección. La intersección es la secuencia 3,3,2,1,1 que es a la vez su complementario.

- La secuencia es $n - 2, n - 2, 1, \dots, 1$:
Para esta secuencia $n \geq 4$, $m' = 2$ y $n - 2 \geq 2 - 1$. Solo queda una condición.

$$2n - 4 = \sum_{i=1}^2 a_i = n + m'^2 - 2m' = n$$

$$n = 4$$

Por lo que para $n = 4$ si hay intersección. La intersección es la secuencia 2,2,1,1 que es a la vez su complementario.

□

Con estos dos lemas, vemos que ninguna de las familias que hemos definido interseca entre ellas para $n \geq 6$ y para $n = 4$ y $n = 5$ la intersección es una sola secuencia.

7.3. Cota inferior

Como hemos visto que ninguna familia de las que hemos definido interseca entre ellas para $n \geq 6$, hemos conseguido las siguientes cota inferior del número de secuencias de grados de realización única de longitud n para $n \geq 6$ y otras dos cotas para $n = 4$ y $n = 5$:

Teorema 7.3.1. *Sea $n \geq 6$:*

- *Para n par:*

$$u(n) \geq 2u(n-1) + 2p(n) - n - 2.$$

- *Para n impar:*

$$u(n) \geq 2u(n-1) + 2p(n) - n - 3.$$

Teorema 7.3.2. *Para los valores $n = 4$ y $n = 5$ tenemos la siguiente cota inferior:*

- *Para $n = 4$:*

$$u(n) \geq 2u(n-1) + 2p(n) - n - 3.$$

- *Para $n = 5$:*

$$u(n) \geq 2u(n-1) + 2p(n) - n - 4.$$

7.4. Comparación de la cota para $4 \leq n \leq 10$

Asumiendo que al calcular la cota de $u(n)$ conocemos el valor de $u(n-1)$, estos són los resultados que hemos obtenido y su comparación con el valor real:

n	$u(n)$	sin apex ni aislado	valor de la cota	diferencia entre $u(n)$ y el valor de la cota
4	11	3	11	0
5	28	6	27	1
6	72	16	68	4
7	170	26	156	14
8	407	67	346	61
9	956	142	740	216
10	2252	340	1552	700

Podemos ver como mayor es n , más crece la diferencia entre la cota y el número de secuencias de longitud n con única realización.

7.5. Cota inferior independiente de $n - 1$

Usando el Teorema 7.3.1 podemos crear una cota para todo $n \geq 7$ que no sea dependiente de el número de secuencias con una única realización de longitud $n - 1$.

Teorema 7.5.1. *Dado un entero $n \geq 7$.*

- *Si n es impar, el número de secuencias de grados gráficas con realización única verifica:*

$$u(n) \geq 2^{n-5}u(5) + \sum_{i=6}^n 2^{n-i+1}p(i) - \sum_{i=6}^n i2^{n-i} - \sum_{i=0}^{\frac{n-7}{2}} (4^{i+1} + 3 \cdot 4^i)$$

- *Si n es par, el número de secuencias de grados gráficas con realización única verifica:*

$$u(n) \geq 2^{n-5}u(5) + \sum_{i=6}^n 2^{n-i+1}p(i) - \sum_{i=6}^n i2^{n-i} - \sum_{i=0}^{\frac{n-8}{2}} (2^{2i+1} + 6 \cdot 4^i) - 2^{n-5}$$

Demostración. Vamos a demostrar el teorema por inducción.

Sea $n = 7$

$$\begin{aligned} u(7) &\geq 2u(6) + 2p(7) - 7 - 3 \geq 2(2u(5) + 2p(6) - 6 - 2) + 2p(7) - 7 - 3 = \\ &= 4u(5) + 4p(6) + 2p(7) - 2 \cdot 6 - 7 - 2 \cdot 2 - 3. \end{aligned}$$

Para $n = 7$ es cierto.

Sea n impar, si el teorema es cierto para $n - 1$:

$$\begin{aligned} u(n) &\geq 2u(n-1) + 2p(n) - n - 3 \geq \\ &\geq 2p(n) - n - 3 + 2(2^{n-1-5}u(5) + \sum_{i=6}^{n-1} 2^{n-1-i+1}p(i) - \sum_{i=6}^{n-1} i2^{n-1-i} - \sum_{i=0}^{\frac{n-9}{2}} (2^{2i+1} + 6 \cdot 4^i) - 2^{n-6}) = \\ &2^{n-5}u(5) + \sum_{i=6}^n 2^{n-i+1}p(i) - \sum_{i=6}^n i2^{n-i} - \sum_{i=0}^{\frac{n-7}{2}} (4^{i+1} + 3 \cdot 4^i) \end{aligned}$$

Sea n par, si el teorema es cierto para $n - 1$:

$$\begin{aligned} u(n) &\geq 2u(n-1) + 2p(n) - n - 2 \geq \\ &\geq 2p(n) - n - 2 + 2(2^{n-1-5}u(5) + \sum_{i=6}^{n-1} 2^{n-1-i+1}p(i) - \sum_{i=6}^{n-1} i2^{n-1-i} - \sum_{i=0}^{\frac{n-8}{2}} (4^{i+1} + 3 \cdot 4^i)) = \end{aligned}$$

$$= 2^{n-5}u(5) + \sum_{i=6}^n 2^{n-i+1}p(i) - \sum_{i=6}^n i2^{n-i} - \sum_{i=6}^{\frac{n-8}{2}} (2^{2i+1} + 6 \cdot 4^i) - 2^{n-5}$$

□

Teniendo en cuenta que $u(5) = 28$ y que $\frac{e^{2\sqrt{n}}}{14} < p(n)$, como hemos podido ver en el Teorema 2.2.5, escribimos una cota más fácil de calcular.

Corolario 7.5.2. *Dado un entero $n \geq 7$.*

- *Si n es impar, el número de secuencias de grados gráficas con realización única verifica:*

$$u(n) \geq 2^{n-5} \cdot 28 + \sum_{i=6}^n 2^{n-i+1} \frac{e^{2\sqrt{i}}}{14} - \sum_{i=6}^n i2^{n-i} - \sum_{i=0}^{\frac{n-7}{2}} (4^{i+1} + 3 \cdot 4^i)$$

- *Si n es par, el número de secuencias de grados gráficas con realización única verifica:*

$$u(n) \geq 2^{n-5} \cdot 28 + \sum_{i=6}^n 2^{n-i+1} \frac{e^{2\sqrt{i}}}{14} - \sum_{i=6}^n i2^{n-i} - \sum_{i=6}^{\frac{n-8}{2}} (2^{2i+1} + 6 \cdot 4^i) - 2^{n-5}$$

7.6. Cota superior

Una posible ampliación del trabajo sería encontrar una cota superior de $u(n)$. Aunque no lo voy a demostrar, voy a aportar el número de secuencias gráficas de longitud n elaborada por Balister, Donoderwinkel, Groenland y Johnston [2].

Teorema 7.6.1. *Sea $G(n)$ el número de secuencias gráficas de longitud n .*

Dado $n > 0$:

$$G(n) = (C + o(1))4^n/n^{3/4}$$

con $C \approx 0,0990094$ y donde $o(1)$ es una función que converge a 0.

Aunque este valor no es el que estamos intentando acotar, es obvio que $G(n) \geq u(n)$. Usando esto podemos escribir el siguiente corolario.

Corolario 7.6.2. *Dado $n > 0$, y $C \approx 0,0990094$:*

$$u(n) \leq (C + o(1))4^n/n^{3/4}.$$

7.6.1. Comparación de la cota superior para $n \leq 10$

Comparamos los valores $u(n)$ con los valores $G(n)$ obtenidos de la enciclopedia OEIS [16].

n	$G(n)$	$u(n)$	diferencia
1	1	1	0
2	2	2	0
3	4	4	0
4	11	11	0
5	31	28	3
6	102	72	30
7	304	170	134
8	1213	407	806
9	4361	956	3405
10	16016	2252	13764

Podemos ver que la diferencia entre la cota superior y el valor de $u(n)$ aumenta rápidamente con el aumento del valor de n .

Capítulo 8

Conclusiones

Aunque he encontrado una cota inferior y superior del número de secuencias gráficas con una única realización, la cota superior no es buena. Por lo tanto, no sabemos como de cerca está la cota inferior del número real.

Como he dicho en la sección 7.6, una posible ampliación del trabajo sería encontrar una buena cota superior y usar eso para mejorar la actual cota inferior.

Bibliografia

- [1] George E. Andrews. *The theory of partitions*, volume Vol. 2 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Amsterdam, 1976.
- [2] Paul Balister, Serte Donderwinkel, Carla Groenland, Tom Johnston, and Alex Scott. Counting graphic sequences via integrated random walks, 2023.
- [3] Claude Berge. *Graphs and hypergraphs*, volume Vol. 6 of *North-Holland Mathematical Library*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-London; American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1973. Translated from the French by Edward Minieka.
- [4] Béla Bollobás. *Extremal graph theory*, volume 11 of *London Mathematical Society Monographs*. Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], London-New York, 1978.
- [5] Péter L. Erdős, Zoltán Király, and István Miklós. On the swap-distances of different realizations of a graphical degree sequence. *Combin. Probab. Comput.*, 22(3):366–383, 2013.
- [6] D. R. Fulkerson, A. J. Hoffman, and M. H. McAndrew. Some properties of graphs with multiple edges. *Canadian J. Math.*, 17:166–177, 1965.
- [7] B. Grünbaum. Graphs and complexes. *Report of the University of Washington, Seattle, Math.*, 572B, 1969. (private communication).
- [8] S. L. Hakimi. On realizability of a set of integers as degrees of the vertices of a linear graph. I. *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, 10:496–506, 1962.
- [9] Werner Hässelbarth. Die Verzweigtheit von Graphen. *Match*, (16):3–17, 1984.
- [10] Rikio Ichishima and Francesc Antoni Muntaner-Batle. Non-isomorphic graphs with common degree sequences. *Open J. Discrete Appl. Math.*, 6(1):12–15, 2023.
- [11] Martí Sabaté Josep. Caracteritzacions de successions gràfiques. 2019.
- [12] Zoltán Király. Recognizing graphic degree sequences and generating all realizations. Technical Report TR-2011-11, Egerváry Research Group, Budapest, 2011. egres.elte.hu.

- [13] Attila Maróti. On elementary lower bounds for the partition function. *Integers*, 3:A10, 9, 2003.
- [14] H. J. Ryser. Combinatorial properties of matrices of zeros and ones. *Canadian J. Math.*, 9:371–377, 1957.
- [15] Gerard Sierksma and Han Hoogeveen. Seven criteria for integer sequences being graphic. *J. Graph Theory*, 15(2):223–231, 1991.
- [16] N. J. A. Sloane. Entry A004251 in the On-line Encyclopedia of Integer Sequences. <https://oeis.org/A004251>. Accessed on January 15 2024.
- [17] W. A. Stein et al. *Sage Mathematics Software (Version 10.1)*. The Sage Development Team, 2023. <http://www.sagemath.org>.
- [18] Amitabha Tripathi, Sushmita Venugopalan, and Douglas B. West. A short constructive proof of the erdos-gallai characterization of graphic lists. *Discrete Mathematics*, 310(4):843–844, 2010.
- [19] Douglas B. West. *Introduction to graph theory*. Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, 1996.