Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

Modes de vibració d'una membrana

Autor: Guillem Sans Olivella

Director: Dr. Àngel Jorba Monte
Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 17 de gener de 2024

Abstract

Whats gives a membrane his sound, such as a drum membrane, are their ressonance frequencies. We will study analitically and numerically the vibration modes for different shaped membranes. Finally, we will check that Mark Kac was wrong when the asked if 'Can one hear the shape of a drum?'.

Resum

El que dona el so a una membrana, com pot ser la membrana d'un timbal, són les seves freqüències de ressonància o freqüències normals de vibració. En aquest treball farem l'estudi analític i numèric dels modes normals de vibració de membranes de diferents formes. Finalment, comprovarem que Mark Kac s'equivocava quan es preguntava si es pot escoltar la forma d'un timbal.

2020 Mathematics Subject Classification. 35B10, 35Q74

Als meus pares, els companys de feina i els meus amics.

Índex

1 Introducció

L'objecte d'estudi d'aquest treball son l'estudi analític i l'obtenció mitjançant mètodes numèrics dels modes de vibració d'una membrana amb una forma determinada. Al llarg del treball, es desenvoluparan tots els conceptes necessaris per poder recórrer el camí que ens plantegem, però abans m'agradaria explicar breument les motivacions que m'han dut a tractar aquesta temàtica.

Motivació del problema

La meva motivació inicial va ser continuar l'estudi que vaig realitzar en el treball de recerca sobre un problema semblant al que plantejo, però més complicat: l'estudi analític i numèric de les figures de Chladni. Aquestes figures son les representacions visuals d'ones estacionàries en una membrana amb els extrems lliures, habitualment una placa.

Vaig acabar optant, per recomanació del meu tutor, començar a estudiar l'article que el 1966 publicava Mark Kac [3], que tenia per títol 'Can one hear the shape of a drum?'. En ell, Kac es preguntava si coneixent quines són les freqüències de ressonància d'una membrana, podriem saber quina forma tenia. Durant l'article, desenvolupa que es poden 'escoltar' propietats com l'àrea, però un contraexemple nega la seva pregunta: dues membranes de formes diferents, amb exactament les mateixes freqüències de ressonància.

Finalment, durant la confecció del treball, el pes principal s'ha anat derivant en el càlcul numèric d'aquests modes de vibració sota membranes amb formes concretes (quadrada, rectangular, circular) i fins i tot les dues membranes que esmentava abans.

Estructura de la Memòria

La memòria s'estructura de la manera següent.

En el segon capítol es duu a terme la deducció de l'equació d'ones en dues dimensions, que és l'equació que regeix el moviment de les membranes, per tant serà una equació fonamental. Previ a això, deduirem també l'equació unidimensional.

El tercer capítol desenvolupa de manera analítica el problema a abordar en aquells casos on es pot resoldre sense massa dificultat. Amb una introducció sobre les equacions diferencials en derivades parcials i alguns resultats útils, passarem pel cas de la membrana quadrada, la rectangular com la seva generalització, i per últim la circular.

El quart capítol enuncia i desenvolupa amb detall quins mètodes s'han utilitzat per dur a terme l'anàlisi numèrica del problema. Per transformar l'equació diferencial en un problema d'àlgebra lineal numèrica, s'ha utilitzat el mètode de les diferències finites. Un cop aquí, els dos mètodes que s'utilitzen per resoldre el problema son el mètode cíclic de Jacobi i el mètode o algoritme QR.

Al cinquè capítol s'explica l'aplicació del mètode de les diferències finites en els diferents dominis en que s'ha estudiat el problema: circular, quadrat, i per últim, en membranes amb certa irregularitat, que ens han permès dur l'estudi dels modes de vibració a les dues membranes de Kac.

Finalment, en els últims capítols es mostren els resultats obtinguts i la seva comparació amb la solució analítica del problema, per acabar amb unes conclusions generals sobre el treball.

2 L'equació d'ones

En aquest primer capítol teòric, deduirem l'equació d'ones en dues dimensions, que és l'equació de la que partirem, i a partir d'ella, obtindrem l'equació per als modes normals de vibració d'una membrana. Abans d'això, però, començarem per un cas més senzill.

2.1 Equació d'ones 1-D

Considerem una corda de longitud L sotmesa a una tensió T amb una densitat lineal de massa homogènia μ que es troba inicialment en repòs sobre l'eix Ox. És a dir, la massa total de la corda serà $M = \int_0^L \mu dx$. Assumirem que no hi ha gravetat, i a més que la corda és unidimensional (és a dir, infinitessimalment estreta) i completament flexible. Considerem un petit desplaçament o perturbació de la corda respecte la posició d'equilibri.

Considerem dos punts propers de la corda, separats per una distància dx en la direcció horitzontal, i per un desplaçament $d\psi$ verticalment. Si el pendent $d\psi/dx$ és petit, podem fer l'aproximació que els punts de la corda només es mouen en la direcció vertical, és a dir, no hi ha desplaçaments horitzontals. Això és cert perquè la llargada de la corda entre aquests dos punts és

$$\sqrt{dx^2 + d\psi^2} = dx\sqrt{1 + \left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2} \sim dx\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2\right) = dx + d\psi\frac{1}{2}\left(\frac{d\psi}{dx}\right)$$

Per tant, la distància màxima a la que es podrà desplaçar un punt horitzontalment serà $\Delta x \leq \sqrt{dx^2 + d\psi^2} - dx = d\psi\frac{1}{2}\left(\frac{d\psi}{dx}\right)$, és a dir, $\frac{1}{2}\left(\frac{d\psi}{dx}\right)$ vegades el desplaçament vertical, i si suposem que el pendent $d\psi/dx$ és petit, podem ignorar els desplaçaments horitzontals. És a dir

$$\frac{d\psi}{dx} << 1 \Longrightarrow \frac{\Delta x}{d\psi} << 1$$

Així doncs, podem considerar que cada punt està etiquetat amb un únic valor x. L'estratègia per trobar l'equació d'ona serà escriure la segona llei de Newton $F = ma$ en la component vertical per a un tros de corda que vagi des de x fins a $x + dx$, com es mostra a la figura 1.

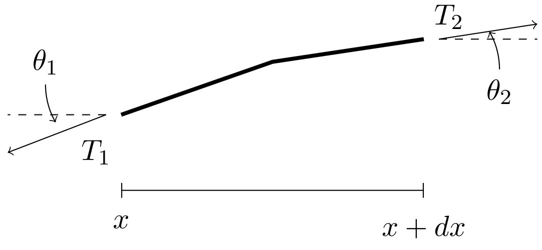


Figura 1: Secció de corda entre x i $x + dx$.

Siguin T_1, T_2 les tensions que experimenta la corda als seus extrems. Ara, el pendent $d\psi/dx$ és petit, de manera que aquest és essencialment igual als angles θ de la figura. Si utilitzem l'aproximació $\cos\theta \simeq 1 - \theta^2/2$ per calcular les components horitzontals de les tensions, podem aproximar $T_1\cos\theta_1 \simeq T_1(1 - \theta_1^2/2)$ i $T_2\cos\theta_2 \simeq T_2(1 - \theta_2^2/2)$ i com que $\theta_i^2 \simeq (d\psi/dx)^2$, aleshores $T_1\cos\theta_1 \simeq T_1$ i $T_2\cos\theta_2 \simeq T_2$. Ara bé, tal i com hem dit abans, negligim els desplaçaments horitzontals de la corda, per tant les forces en la direcció horitzontal s'han de cancel·lar, és a dir, $T_1 = T_2$. Diguem-li T a partir d'ara. En el cas vertical, tenim les components $T\sin\theta_1$ i $T\sin\theta_2$. Com que el pendent és petit, novament podem utilitzar aproximacions de primer ordre, $\sin\theta_i \simeq \theta_i$, i per tant $T\sin\theta_1 \simeq T\psi'(x)$ i $T\sin\theta_2 \simeq T\psi'(x+dx)$. La força neta vertical serà

$$F_{net} = T\left(\psi'(x+dx) - \psi'(x)\right) = Tdx\frac{\psi'(x+dx) - \psi'(x)}{dx} = Tdx\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}$$

on hem assumit que dx és infinitessimal i hem utilitzat la definició de la derivada. Ara, com que la massa d'aquest tros de corda és $m = \int_x^{x+dx} \mu d\tilde{x} = \mu dx$, la segona llei de Newton resulta

$$F_{net} = ma \Longrightarrow Tdx\frac{d^2\psi}{dx^2} = (\mu dx)\frac{d^2\psi}{dt^2} \Longrightarrow \frac{d^2\psi}{dt^2} = \frac{T}{\mu}\frac{d^2\phi}{dx^2}$$

Hem arribat, doncs, a l'equació d'ones (que, escrivint ψ com a funció depenent de x i t, queda)

$$\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}$$

Si definim $c^2 := T/\mu$ i tenint en compte la definició de laplacià en una dimensió, $\Delta z := \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, podem reescriure

$$\Delta\psi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

2.2 Equació d'ones 2-D

Hem deduit l'equació d'ones en el cas unidimensional. Ens servirà de guia per a fer la deducció de l'equació en dues dimensions. Suposem, doncs, una membrana dos dimensional, amb densitat superficial uniforme σ. Assumim que el pla $x-y$ és la posició d'equilibri de la membrana. Així doncs, la direcció transversal serà l'eix z. Aquesta vegada, la massa total de la membrana serà $M = \int_\Omega \sigma dxdy$, on Ω és el domini on estigui definida la membrana. Com abans, suposarem que no hi ha gravetat. Considerem un petit rectangle al pla $x-y$ amb costats Δx i Δy. Durant el moviment, aquesta membrana es desplaçarà en la direcció z. Com abans, assumirem que no hi ha desplaçaments horitzontals (és a dir, el pendent de l'onada és petit), de manera que el rectangle mantindrà aproximadament la seva forma, encara que estarà una mica curvat, i això serà el que provoqui el seu moviment.

Sigui S la tensió, ara superficial. A diferència d'abans, aquesta tensió actuarà sobre tot un costat del rectangle. És a dir, el costat de mida Δx experimentarà una força $S\Delta x$ perpendicular a ell, i el costat de mida Δy, una força $S\Delta y$. Així doncs, si visualitzem el rectangle al llarg de l'eix y, una secció d'aquest serà com el de la figura següent:

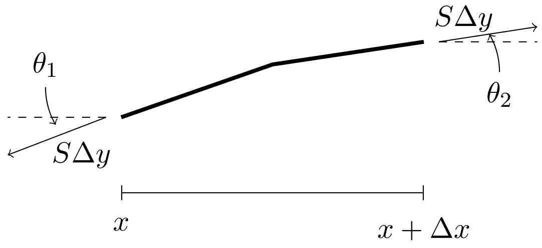


Figura 2: Secció del rectangle $\Delta x \Delta y$.

Si fem una deducció similar al cas 1-D, arribarem a que la suma de forces en la direcció z serà

$$F = S\Delta y(z'(x + \Delta x) - z'(x)) = S\Delta y \Delta x \frac{z'(x + \Delta x) - z'(x)}{\Delta x} \simeq S\Delta y \Delta x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

Aquesta es la força resultant que actua sobre els dos costats de llargada Δy. Si ara fem el mateix per als costats de llargada Δx, obtindrem

$$F = S\Delta x \Delta y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Per tant, la força total neta serà

$$F_{net} = S\Delta x \Delta y \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)$$

Si finalment apliquem la segona llei de Newton, tenint en compte que la massa del rectangle serà $\sigma \Delta x \Delta y$, obtenim

$$\sigma \Delta x \Delta y \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = S\Delta x \Delta y \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)$$

o equivalentment

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{S}{\sigma} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)$$

Similarment al cas unidimensional, definint $c^2 := S/\sigma$, i tenint en compte la definició de laplacià en dues dimensions

$$\Delta z := \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

podem reescriure

$$\Delta z = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

Aquesta és l'equació d'ones en dues dimensions (espaials), a partir de la qual partirem.

3 Resultats analítics dels modes de vibració d'una membrana

El que hem obtingut abans, l'equació d'ones, és una equació diferencial en derivades parcials (EDP). Abans de desenvolupar els resultats analítics, recordem algunes definicions importants sobre les EDPs que ens seran necessàries.

Definició 3.1. *S'anomena equació diferencial en derivades parcials o equació en derivades parcials (EDP) a una equació de la forma*

$$F\left(x_1,\dots,x_n,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial u}{\partial x_n},\dots,\frac{\partial^m u}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}},\dots\right)=0$$

on $F: U\subseteq\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\cdots\times\mathbb{R}^{n^m}\longrightarrow\mathbb{R}$*, sent* $U\subseteq\mathbb{R}^n$*,* $n>1$*,* $k_1+\cdots+k_n=m$*. Les variables* $(x_1,\dots,x_n)\in\Omega$ *s'anomenen independents, i* $u\equiv u(x_1,\dots,x_n)$ *es la variable dependent.*
La EDP estarà definida i plantejada a la regió oberta (finita o infinita) $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$*.*

Definició 3.2. *L'ordre d'una EDP es defineix com l'ordre més alt de les derivades que apareixen a l'equació.*

Observació 3.3. Una manera abreujada d'expressar les derivades parcials és la següent

$$\frac{\partial u}{\partial x_k}=u_{x_k}$$

$$\frac{\partial^m u}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}}=u_{\underbrace{x_1\cdots x_1}_{k_1}\cdots\underbrace{x_n\cdots x_n}_{k_n}}$$

Observació 3.4. En dimensions baixes, es solen utilitzar les variables (x,y,z) quan aquelles variables siguin espaials, i t quan la variable sigui temporal.

Exemple 3.5. L'equació d'ones en dues dimensions es pot escriure com

$$F\left(x_1,x_2,x_3,u,\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}=0$$

on $F:\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$, o també es pot escriure

$$F(t,x,y,u,u_{tt},u_{xx},u_{yy})=u_{xx}+u_{yy}-\frac{1}{c}u_{tt}=0\Longleftrightarrow u_{xx}+u_{yy}=\frac{1}{c}u_{tt}$$

Per poder obtenir la solució analítica dels modes normals de vibració d'una membrana, ens cal utilitzar la tècnica de la separació de variables. Aquesta tècnica és molt utilitzada per resoldre equacions diferencials en derivades parcials de manera analítica, i es basa en els següents passos

1. Suposar que la funció $f = f(\mu, \lambda)$, que és solució del problema, es pot escriure com a producte de funcions, cadascuna depenent únicament d'una de les variables. Això és

   $$f(\mu, \lambda) = m(\mu) \cdot l(\lambda)$$

2. Substituir aquesta expressió a l'equació original, i aïllar termes fins obtenir una igualtat on cada terme depengui exclusivament d'alguna de les variables separades abans. És a dir, obtindrem una igualtat de la forma

   $$M(m(\mu), \mu) = L(l(\lambda), \lambda)$$

   En aquest cas, el terme de l'esquerra depèn únicament de μ mentre que el dret depèn només de λ.

3. Aleshores, com que tenim una igualtat entre dues magnituds que són completament independents, l'única solució es que siguin iguals a una constant,

   $$M(m(\mu), \mu) = k = L(l(\lambda), \lambda)$$

   Això genera dues equacions, on cadascuna només dependrà d'una de les variables separades

   $$M(m(\mu), \mu) = k \quad L(l(\lambda), \lambda) = k$$

   D'aquesta manera serà més senzill trobar les funcions $m(\mu)$ i $l(\lambda)$. Un cop trobades, la funció que soluciona l'equació diferencial serà el producte de les dues solucions de les equacions anteriors.

3.1 Membrana quadrada

Podem procedir, doncs, a fer l'estudi dels modes normals de vibració en una membrana quadrada. Definim $\Omega = (0, a) \times (0, a)$ un quadrat de costat a, el nostre domini, i $\partial\Omega$ la vora d'aquest quadrat. L'equació diferencial que regeix el moviment d'una membrana 2-dimensional és, com hem vist al capítol anterior, l'equació d'ones.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \Delta f \tag{3.1}$$

Definim

$$f(x, y; t) = f(\vec{\rho}; t)$$

com la funció de desplaçament vertical de la membrana en un punt $(x, y) = \vec{\rho}$ en un instant de temps t. Al llarg d'aquest capítol, ens interessarà particularment l'estudi dels modes de vibració, és a dir, les ones estacionàries. Podem suposar, doncs, que per aquestes ones, la funció f és de la forma

$$f(x, y; t) = \tau(t) \cdot u(x, y) \tag{3.2}$$

és a dir, expresem el desplaçament com a producte d'una funció exclusivament temporal i una funció exclusivament espaial. Això resultarà en una mateixa ona, que estarà modulada pel temps. Com que ara la funció τ només depèn del temps, la derivada parcial temporal serà derivada total. Substituint aquesta expressió a l'equació (3.1), obtenim

$$\frac{\partial^2 \tau u}{\partial t^2} = c^2 \Delta \tau u \iff u\frac{d^2\tau}{dt^2} = c^2 \tau \Delta u$$

Si ara dividim a costat i costat per la funció f, el que ens queda és

$$\frac{1}{\tau}\frac{d^2\tau}{dt^2} = \frac{c^2}{u}\Delta u$$

Hem arribat a una relació que en el seu costat esquerre només depèn del temps, i en el seu dret, només de l'espai. L'única possibilitat és que totes dues siguin iguals a una constant, que per conveniència definirem com $-\omega^2$.

$$\frac{1}{\tau}\frac{d^2\tau}{dt^2} = -\omega^2 = \frac{c^2}{u}\Delta u$$

de manera que ens resulta el sistema d'equacions diferencials següent:

$$\frac{d^2\tau}{dt^2} + \omega^2 \tau = 0$$

$$\Delta u + \frac{\omega^2}{c^2} u = 0$$

La solució analítica de la part temporal és de la forma

$$\tau(t) = \tau_1 \cos wt + \tau_2 \sin wt$$

per alguns τ_1, τ_2, que es poden determinar amb les condicions inicials. Per altra banda, la part espaial es pot reescriure com

$$\Delta u = -\frac{\omega^2}{c^2} u = \lambda u \tag{3.3}$$

L'equació anterior, amb condicions de contorn en el domini determinat, és a dir

$$\begin{cases} \Delta u = \lambda u & (x, y) \in \Omega \\ u = 0 & (x, y) \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3.4}$$

s'anomena equació de Helmholtz, i serà la que resoldrem numèricament (veure secció 5). Ara, però, continuem amb el desenvolupament analític. Per resoldre l'equació de Helmholtz de manera analítica, tornarem a utilitzar la separació de variables. Escrivim

$$u(x, y) = \phi(x) \cdot \psi(y)$$

i substituim a 3.3. Tenint en compte la definició del Laplacià, obtenim

$$\frac{\partial^2 \phi\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi\psi}{\partial y^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\phi\psi = 0$$

Ara tenint en compte que cada funció només depèn d'una de les variables, això es pot reescriure com

$$\psi\frac{d^2\phi}{dx^2} + \phi\frac{d^2\psi}{dy^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\phi\psi = 0$$

Dividint tot per $u = \phi\psi$ i aïllant termes, obtenim

$$\frac{1}{\phi}\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\frac{1}{\psi}\left(\frac{d^2\psi}{d} + \frac{\omega^2}{c^2}\psi\right)$$

Novament, aquests dos termes han de ser iguals a una constant, que anomenem per conveniència $-q^2$, obtenint així

$$\begin{aligned} \frac{1}{\phi}\frac{d^2\phi}{dx^2} &= -q^2 \\ -\frac{1}{\psi}\left(\frac{d^2\psi}{dy^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\psi\right) &= -q^2 \end{aligned}$$

Definint $r^2 = \omega^2/c^2 - q^2$, podem reescriure el sistema d'equacions diferencials

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\phi}{dx^2} + q^2\phi = 0 \\ \dfrac{d^2\psi}{dy^2} + r^2\psi = 0 \end{cases}$$

Les dues equacions diferencials tenen solucions conegudes, com la que hem obtingut abans pel temps, això és

$$\begin{cases} \phi(x) = C_x\cos(qx) + D_x\sin(qx) \\ \phi(y) = C_y\cos(ry) + D_y\sin(ry) \end{cases}$$

La condició de contorn de 3.4 imposa que els quatre costats del quadrat estiguin fixats, és a dir

$$\left.\begin{aligned} \phi(0) &= 0 \\ \phi(a) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad C_x = 0 \quad \sin(qa) = 0 \Longrightarrow q = \frac{m\pi}{a}$$

$$\left.\begin{aligned} \psi(0) &= 0 \\ \psi(a) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad C_y = 0 \quad \sin(ra) = 0 \Longrightarrow r = \frac{n\pi}{a}$$

$$u_{mn}(x,y) = \phi_m(x)\cdot\psi_n(y) = \sin\left(\frac{mx}{a}x\right)\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right) \quad m,n = 1,2,3\ldots$$

Per cada parell de valors m i n, tenim la freqüència del mode de vibració ω_{mn}

$$\frac{\omega^2}{c^2} = q^2 + r^2 \quad \omega_{mn}^2 = c^2\left(\frac{m^2\pi^2 + n^2\pi^2}{a^2}\right)$$

3.2 Membrana rectangular

El cas de la membrana rectangular és una generalització de l'anterior, per tant comentarem per damunt els aspectes que siguin diferents. En aquest cas, el nostre domini serà $\Omega = (0,a) \times (0,b)$ un rectangle de costats a i b, el nostre domini, i $\partial\Omega$ la vora d'aquest rectangle.

Les dues equacions diferencials que s'obtenen després de la separació de variables tindran la mateixa solució que en el cas quadrat, això és

$$\begin{cases} \phi(x) = C_x \cos(qx) + D_x \sin(qx) \\ \phi(y) = C_y \cos(ry) + D_y \sin(ry) \end{cases}$$

La condició de contorn de 3.4 imposarà ara que els quatre costats del rectangle estiguin fixats, és a dir

$$\left.\begin{array}{ll} \phi(0) & = 0 \\ \phi(a) & = 0 \end{array}\right\} \quad C_x = 0 \quad \sin(qa) = 0 \Longrightarrow q = \frac{m\pi}{a}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \psi(0) & = 0 \\ \psi(b) & = 0 \end{array}\right\} \quad C_y = 0 \quad \sin(rb) = 0 \Longrightarrow r = \frac{n\pi}{b}$$

Per tant, les solucions seran de la forma

$$u_{mn}(x,y) = \phi_m(x) \cdot \psi_n(y) = \sin\left(\frac{mx}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \quad m,n = 1,2,3\ldots$$

Per cada parell de valors m i n, tenim la freqüència del mode de vibració ω_{mn}

$$\frac{\omega^2}{c^2} = q^2 + r^2 \quad \omega_{mn}^2 = c^2\left(\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2}\right)$$

3.3 Membrana circular

Ara estudiarem analíticament els modes de vibració de la membrana circular. Definim, doncs, $\Omega = \mathring{D}(0,R) = \{(x,y)|x^2 + y^2 < R^2\}$, de manera que $\partial\Omega$ serà la circumferència centrada en l'origen de radi R. Amb la membrana circular, reescrivim explícitament l'equació que regeix el comportament de les solucions estacionàries, és a dir, l'equació 3.3 amb coordenades polars, i ens queda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = -\frac{\omega^2}{c^2}u \tag{3.5}$$

Novament farem servir el mètode de separació de variables, aquest cop tenint en compte que $u = u(r,\theta)$

$$u(r,\theta) = \rho(r) \cdot \phi(\theta)$$

i substituim a 3.5.

$$\frac{\partial^2 \rho\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \rho\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \rho\phi}{\partial \theta^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\rho\phi = 0$$

Ara tenint en compte que cada funció només depèn d'una de les variables, això es pot reescriure com

$$\phi\frac{d^2\rho}{dr^2} + \frac{\phi}{r}\frac{d\rho}{dr} + \frac{\rho}{r^2}\frac{d^2\phi}{d\theta^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\rho\phi = 0$$

Dividint tot per $u = \rho\phi$ i aïllant termes, obtenim

$$-\frac{1}{\rho(r)}\left(r^2\frac{d^2\rho}{dr^2} + r\frac{d\rho}{dr} + \frac{\omega^2}{c^2}r^2\rho(r)\right) = \frac{1}{\phi(\theta)}\frac{d^2\phi}{d\theta^2}$$

Anomenarem $-m^2$ a la constant, de manera que

$$\frac{1}{\rho(r)}\left(r^2\frac{d^2\rho}{dr^2} + r\frac{d\rho}{dr} + \frac{\omega^2}{c^2}r^2\rho(r)\right) = m^2$$

$$\frac{1}{\phi(\theta)}\frac{d^2\phi}{d\theta^2} = -m^2$$

Així doncs, obtenim el sistema d'equació diferencials

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\rho}{dr^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{d\rho}{dr} + \left(\dfrac{\omega^2}{c^2} - \dfrac{m^2}{r^2}\right)\rho = 0 \\ \dfrac{d^2\phi}{d\theta^2} + m^2\phi = 0 \end{cases}$$

Veiem que la segona equació és molt similar a les anteriors, de manera que la seva solució (sense tenir en compte encara les condicions de contorn) serà com abans.

$$\phi(\theta) = C_\theta\cos(m\theta) + D_\theta\sin(m\theta)$$

La primera equació mereix una mica més l'atenció. Si multipliquem tota l'equació per r^2 i fem el canvi de variable $x = r\omega/c$, obtindrem l'equació de Bessel

$$x^2\frac{d^2\rho}{dx^2} + x\frac{d\rho}{dx} + (x^2 - m^2)\rho = 0$$

que té per solució

$$\rho(x) = AJ_m(x) + BY_m(x)$$

on les funcions J_m, Y_m son les funcions de Bessel de primera i segona espècie.
La solució del sistema de dues equacions, doncs, és

$$\begin{cases} \rho(r) = C_rJ_m\left(\dfrac{\omega}{c}r\right) + D_rY_m\left(\dfrac{\omega}{c}r\right) \\ \phi(\theta) = C_\theta\cos(m\theta) + D_\theta\sin(m\theta) \end{cases}$$

on $m = 0, 1, 2, 3\ldots$. Com que $Y_m(r)$ es fa infinit quan $r \to 0$, el coeficient D_r haurà de ser zero. Per altra banda, imposant la condició de contorn de 3.4, obtenim que $\rho(r = R) = 0$. Si denotem $\alpha_{m,n}$ les arrels $1, 2, \ldots, n$ de la funció $J_m(x)$, aleshores aquests valors determinen les freqüències dels diferents modes de vibració $\omega_{mn} = \alpha_{mn}c/R$. Així doncs

$$u_{mn}(r,\theta) = \rho_{mn}(r)\phi_m(\theta) = J_m\left(\frac{\alpha_{mn}}{R}r\right)\cdot(C_n\cos(m\theta) + D_n\sin(m\theta)) \quad m = 0, 1, 2, \ldots, n = 1, 2, 3\ldots$$

4 Mètodes numèrics per a la resolució del problema

El problema que ens plantegem resoldre és

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

per a diferents dominis Ω, de manera que necessitem mètodes numèrics per poder resoldre aquesta equació diferencial.
Abans d'entrar en detall amb els mètodes, però, definirem alguns conceptes i enunciarem alguns resultats que ens seran d'utilitat per a les següents seccions.

Definició 4.1. *Sigui $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriu quadrada. Un vector $v \in \mathbb{C}^n$ no nul és un* vector propi *d'A, i $\lambda \in \mathbb{C}$ el seu corresponent valor propi, si*

$$Av = \lambda v$$

El conjunt de tots els valors propis d'A s'anomena espectre*, i es denota Σ*

Definició 4.2. *Una descomposició en valors propis d'una matriu quadrada A, es una factorització*

$$A = X\Delta X^{-1}$$

Definició 4.3. *Si $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es no singular, aleshores la funció $A \to X^{-1}AX$ s'anomena transformació de similitud. Diem que dues matrius A i B son similars si existeix alguna transformació de similitud entre elles, es a dir, si existexi $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ no singular tal que $B = X^{-1}AX$.*

Teorema 4.4. *Si $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es no singular, aleshores A i $X^{-1}AX$ tenen el mateix polinomi característic, i per tant els mateixos valors propis.*

Demostració. En primer lloc, si el polinomi característic és el mateix, aleshores els valors propis també ho seran. Per tant, només cal calcular

$$\begin{aligned} p_{X^{-1}AX}(z) &= \det(X^{-1}AX - zI) = \det(X^{-1}(A - zI)X) \\ &= \det(X^{-1})\det(A - zI)\det(X) = \det(A - zI) = p_A(z) \end{aligned}$$

□

En particular, ens interessarà especialment un tipus de transformació similar o factorització, que és la següent.

Definició 4.5. *Una factorització de Schur de la matriu A es una factorització de la forma*

$$A = QTQ^T$$

on Q es una matriu unitària i T es triangular superior.

Observació 4.6. Com que A i T son similars, els valors propis d'A apareixeran a la diagonal de T.

4.1 Mètode de les diferències finites

El mètode de les diferències finites consisteix en realitzar una discretització de l'espai, convertint-lo en una malla de punts, i aproximar l'equació diferencial en cada punt per diferències entre el punt i els del seu entorn. Així, l'equació diferencial en tot el domini s'aproxima per un sistema d'equacions lineal que es pot solucionar de manera numèrica. En particular, en el nostre cas, el que ens interessarà serà trobar els vectors i valors propis d'aquella matriu, i per tant necessitarem mètodes numèrics per resoldre aquest tipus de problemes (seccions 4.2 i 4.3).

Es important tenir en compte que el tamany de pas s'ha de triar amb cura per garantir la precisió de la solució. Si el tamany de pas es massa gran, la solució pot ser molt poc precisa. D'altra banda, si el tamany de pas es massa petit, el procés de càlcul pot ser molt lent i requerir molt temps de computació.

Per obtenir les equacions discretitzades, ens cal veure el següent:
Sigui $u : \Omega \subset R^2 \longrightarrow R^2$ una funció. Donat un punt $(x_0, y_0) \in R^2$, podem calcular en valor de la funció en un punt proper a aquest. Sigui h un valor petit, mitjançant Taylor, tenim que

$$\begin{aligned} u(x_0+h, y_0) &= u(x_0, y_0) + \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0, y_0)h^2 + O(h^3) \\ u(x_0-h, y_0) &= u(x_0, y_0) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0, y_0)h^2 + O(h^3) \end{aligned} \tag{4.1}$$

De manera que sumant els dos desenvolupaments anteriors, obtenim

$$u(x_0+h, y_0) + u(x_0-h, y_0) = 2u(x_0, y_0) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0, y_0)h^2 + O(h^4)$$

Si ho reescrivim, podem aïllar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0, y_0) = u_{xx}(x_0, y_0) = \frac{u(x_0+h, y_0) + u(x_0-h, y_0) - 2u(x_0, y_0)}{h^2} + O(h^2)$$

Anàlogament en el cas de la y, obtenim

$$u_{yy}(x_0, y_0) = \frac{u(x_0, y_0+h) + u(x_0, y_0-h) - 2u(x_0, y_0)}{h^2} + O(h^2)$$

I per tant, el laplacià d'una funció es pot aproximar per

$$\Delta u(x_0, y_0) = \frac{u(x_0+h, y_0) + u(x_0-h, y_0) + u(x_0, y_0+h) + u(x_0, y_0-h) - 4u(x_0, y_0)}{h^2} + O(h^2)$$

A partir de 4.1, podem obtenir aproximacions de la primera i segona derivades d'altres maneres que també ens seran útils:

1. Diferència finita cap endavant

$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{u(x_0+h, y_0) - u(x_0, y_0)}{h} + O(h)$$

2. Diferència finita cap enrere

$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{u(x_0, y_0) - u(x_0-h, y_0)}{h} + O(h)$$

3. Diferència finita centrada

$$\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x} = \frac{u(x_0+h,y_0) - u(x_0-h,y_0)}{2h} + O(h^2)$$

4. Diferència *forward* de la segona derivada

   Fent el desenvolupament en sèrie de Taylor de

$$u(x_0+2h,y_0) = u(x_0,y_0) + \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)2h + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0,y_0)4h^2 + O(h^3)$$

   podem obtenir

$$\frac{\partial^2 u(x_0,y_0)}{\partial x^2} = \frac{u(x_0+2h,y_0) + u(x_0,y_0) - 2u(x_0+h,y_0)}{2h^2} + O(h)$$

4.2 Mètode cíclic de Jacobi

El mètode de Jacobi consisteix en una seqüència de transformacions ortogonals de la forma

$$A \to P_1^T A P_1 \to P_2^T P_1^T A P_1 P_2 \to ...$$

Cada transformació (una rotació de Jacobi) es una rotació dissenyada per col·locar un zero en algun element de la matriu fora de la diagonal. Les transformacions successives desfan alguns zeros, però els termes de fora la diagonal es tornen petits fins que la matriu finalment esdevé diagonal. La matriu formada pel producte de les diferents transformacions ens dona la matriu dels vectors propis, i els termes de la diagonal de la matriu final son els valors propis.
Aquest és un mètode que funciona molt bé per matrius simètriques de dimensió moderada.
Sigui A una matriu real simètrica. Una rotació de Jacobi P_{pq} és una matriu de la forma

$$P_{pq} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \cdots & & & & & \\ & & c & \cdots & s & & \\ & & \vdots & 1 & \vdots & & \\ & & -s & \cdots & c & & \\ & & & & & \cdots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

on tots els elements de la diagonal son 1 excepte els dos elements c a les files p i q. Tot els elements de fora de la diagonal son zero, a excepció de l'element s de la fila p columna q i l'element $-s$ de la fila q columna p. Les lletres c i s representen el cosinus i el sinus d'un angle de rotació ϕ, de manera que $c^2 + s^2 = 1$. Aquestes matrius son les que s'utilitzen per transformar la matriu A segons

$$A' = P_{pq}^T A P_{pq}$$

Aquestes transformacions canvien només les files i columnes p i q de la matriu A

$$A' = \begin{bmatrix} & & a'_{0p} & & a'_{0q} & & \\ & & \vdots & & \vdots & & \\ a'_{p0} & \cdots & a'_{pp} & \cdots & a'_{pq} & \cdots & a'_{p,n-1} \\ & & \vdots & & \vdots & & \\ a'_{q0} & \cdots & a'_{qp} & \cdots & a'_{qq} & \cdots & a'_{q,n-1} \\ & & \vdots & & \vdots & & \\ & & a'_{n-1,p} & & a'_{n-1,q} & & \end{bmatrix}$$

Podem obtenir explícitament aquests canvis tenint en compte que la matriu A és simètrica. Resulta

$$\left.\begin{array}{rl} a'_{rp} = & ca_{rp} - sa_{rq} \\ a'_{rq} = & ca_{rq} + sa_{rp} \end{array}\right\} \quad r \neq p, r \neq q$$

$$\begin{array}{rl} a'_{pp} = & c^2 a_{pp} + s^2 a_{qq} - 2sca_{pq} \\ a'_{qq} = & s^2 a_{pp} + c^2 a_{qq} + 2sca_{pq} \\ a'_{pq} = & (c^2 - s^2)a_{pq} + sc(a_{pp} - a_{qq}) \end{array}$$

La idea del mètode de Jaconi es convertir a zero els elements de fora la diagonal mitjançant un seguit de rotacions planes, i.e., producte de rotacions de Jacobi. Així doncs, per fer $a'_{pq} = 0$, l'última equació anterior ens dona l'expressió de l'angle de rotació ϕ:

$$\theta \equiv \cot 2\phi \equiv \frac{c^2 - s^2}{2sc} = \frac{a_{qq} - a_{pp}}{2a_{pq}}$$

Si definim $t \equiv s/c$, la definició de θ es pot reescriure

$$t^2 + 2t\theta - 1 = 0$$

La solució més estable es la que obtenim amb l'arrel més petita, que es

$$t = \frac{\operatorname{sgn}(\theta)}{|\theta| + \sqrt{\theta^2 + 1}}$$

Podem calcular, doncs, quan valen c i s

$$\begin{array}{rl} c = & \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \\ s = & tc \end{array}$$

Finalment, per minimitzar errors d'arrodoniment, escriurem directament

$$a'_{pq} = 0$$

Convergència

Es pot veure la convergència del mètode de Jacobi considerant la suma dels quadrats dels elements fora de la diagonal

$$S = \sum_{r \neq s} |a_{rs}|^2$$

Utilitzant l'expressió explicita de la matriu A', podem veure que

$$S' = S - 2|a_{pq}|^2$$

La seqüència de nombres S' és monòtona decreixent, i com que està acotada inferiorment per zero, eventualment acabarà convergint a aquest valor (amb la precisió dels ordinadors).

Valors i vectors propis

Per tant, finalment obtindrem una matriu D que serà diagonal. Els termes de la diagonal ens donaran els valors propis de la matriu original A, ja que

$$D = P^T A P$$

on $P = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdots$ i P_i es la i-èsima matriu de Jacobi utilitzada. Les columnes de P seran els vectors propis. Igual que amb A', podem calcular explícitament com és la matriu V' després d'haver aplicat una matriu de Jacobi, és a dir

$$V' = V \cdot P_{pq}$$

Obtindrem

$$\begin{aligned} v'_{rs} &= \quad v_{rs} \quad (s \neq p, s \neq q) \\ v'_{rq} &= \quad c v_{rp} - s v_{rq} \\ v'_{rq} &= \quad s v_{rq} + c v_{rq} \end{aligned}$$

Mètode cíclic

Per últim, només queda parlar de la tria dels p, q en cada pas. L'algoritme original que plantejava Jacobi era buscar l'element de fora la diagonal més gran, però això és força costós computacionalment parlant. Així doncs, el mètode que he utilitzat és recorrer tots els elements de manera cíclica per files, és a dir, anar en l'ordre $P_{01}, P_{02}, \ldots, P_{0,n-1}, P_{12}, P_{13}, \ldots$ Per tal de millorar una mica el rendiment, abans de realitzar les operacions corresponent per multiplicar la matriu P_{pq}, es comprova que l'element a_{pq} sigui més gran que una certa tolerància. En cas que no, es salta el pas.

4.3 Mètode QR

El mètode o algoritme QR es basa en el següent. Qualsevol matriu real es pot descomposar de la forma

$$A = Q \cdot R$$

on Q es ortogonal i R triangular superior. Ara, considerem la matriu formada per escriure els factors anteriors en ordre oposat. Això es

$$A' = R \cdot Q$$

Com que Q es ortogonal, de la primera equació podem obtenir $R = Q^T \cdot A$, de manera que la segona equació resulta

$$A' = Q^T \cdot A \cdot Q$$

Veiem, doncs que A' es una transformació ortogonal de A, amb el que les matrius A' i A seran similars.

Factorització QR. Algoritme de Schwarz-Rutishauser

L'algoritme de Schwarz-Rutishauser és una millora de l'algoritme d'ortogonalització clàssic de Gram-Schmidt, de manera que per entendre el primer, hem de recordar aquest últim. L'ortogonalització de Gram-Schmidt es basa en calcular una matriu ortogonal Q a partir d'una altra A, fent projeccions ortogonals de cada vectors $a_k \in A, k = 1, \dots, n$ a una vase de vectors $q_i \in Q(k), i = 1, \dots, k$ coneguts. Cada vector $q_k \in Q$ es calculat restant al vector a_k la suma de les seves projeccions en els vectors q_i.
La projecció d'un vector a en un altre q s'obté a través de

$$\mathrm{proj}_{\vec{q}}\vec{a} = \frac{\langle \vec{q}, \vec{a} \rangle}{\langle \vec{q}, \vec{q} \rangle}\vec{q} = \frac{\langle \vec{q}, \vec{a} \rangle}{||\vec{q}||^2}\vec{q}$$

Així doncs, el procés de Gram-Schmidt es pot expressar com

$$\vec{q}_k = \vec{a}_k - \sum_{i=1}^{k} \mathrm{proj}_{\vec{q}_i}\vec{a}_k$$

$$\vec{q}_k = \frac{\vec{q}_k}{||\vec{q}_k||}$$

L'algoritme de Schwarz-Rutishauser proposa el següent: calcular les projeccions i després normalitzar es poden estalviar, si enlloc de calcular la projecció calcules només el producte escalar. És a dir, tenint en compte la defició de projecció, podem escriure

$$\vec{q}_k = \vec{a}_k - \sum_{i=1}^{k} \left\langle \vec{q}_i^T, \vec{a}_k \right\rangle \vec{q}_i$$

Ara bé, com que la matriu $R = Q^T A$, podem calcular l'i-èsim element del vector columna r_k segons

$$r_{i,k} = \left\langle \vec{q}_i^T, \vec{a}_k \right\rangle$$

Substituint això a l'equació de més amunt, tenim

$$\vec{q}_k = \vec{a}_k - \sum_{i=1}^{k} r_{i,k}\vec{q}_i$$

Com que inicialment Q és igual a A, el càlcul de $\vec{q}$ i $\vec{r}$ es pot escriure de manera recursiva

$$r_{i,k} = \langle \vec{q}_i^T, \vec{q}_k \rangle$$

$$\vec{q}_k = \vec{q}_k - r_{i,k}\vec{q}_i$$

Per últim, ens caldrà calcular el valor $r_{k,k}$, que serà la norma del vector $\vec{q}_k$

$$r_{k,k} = ||\vec{q}_k||$$

i finalment normalitzar el vector columna $\vec{q}_k$, dividint-lo tot per la seva norma, acabada de calcular i igual al terme $r_{k,k}$.

Reducció Hessenberg

Definició 4.7. *Una matriu $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ s'anomena Hessenberg superior si*

$$h_{i,j} = 0 \quad \forall i, j \quad amb \quad i > j + 1$$

Una matriu Hessenberg superior és irreductible si

$$h_{i+1,i} \neq 0 \forall i \in \{1, \ldots, n-1\}$$

Per aplicar el mètode QR per a matrius genèriques, se sol fer prèviament una reducció de la matriu a una matriu Hessenberg.

Una de les maneres de fer aquesta reducció és mitjançant les transformacions de Householder.
Les transformacions de Householder son transformacions ortogonals corresponents a reflexions en un pla. Les reflexions respecte un pla ortogonal a un vector unitari v es poden expressar matricialment segons

$$H = I - 2vv^T$$

Ens interessarà en concret fer projeccions que vagin a parar al primer vector de la base e_1. Suposem que volem fer la projecció d'un vector a. Això és

$$Ha = \alpha e_1 \Longrightarrow \|Ha\| = \|a\| = \alpha\|e_1\| = \alpha$$

Volem que la projecció preservi la norma.
Sigui u el vector que va de Ha a a, és a dir, de la projecció del vector al vector original. Aleshores, podem escriure

$$Ha = a - u \Longleftrightarrow u = a - Ha = a - \alpha e_1$$

Si triem $\alpha = -\text{sign}(a_1)\|a\|$, aleshores el vector u queda definit per $u = a + \text{sign}(a_1)\|a\|e_1$.

Proposició 4.8. *El vector $v = u/\|u\|$ satisfà*

$$H = I - 2vv^T$$

Demostració. Per agilitzar, definim $s = -\text{sign}(a_1)$. Volem veure que es compleix

$$Ha = \left(I - 2\frac{uu^T}{u^Tu}\right)a = s\|a\|e_1$$

. Comprovem-ho:

$$u^Ta = (a - s\|a\|e_1)^Ta = \|a\|^2 - sa_1\|a\|$$

$$\begin{aligned} u^Tu =&(a - s\|a\|e_1)^T(a - s\|a\|e_1) \\ =&\|a\|^2 - 2sa_1\|a\| + \|x\|^2\|e_1\|^2 \\ =&2(\|a\|^2 - sa_1\|a\|) = 2u^Ta \end{aligned}$$

$$Ha = a - 2u\frac{u^Ta}{u^Tu} = a - u = s\|a\|e_1$$

Per últim, a partir d'aquestes matrius de Householder, podem construir la descomposició de Hessenberg de la matriu A, és a dir,

$$U_0^TAU_0 = H, \qquad U_0^TU_0 = I$$

com a producte de matrius de Householder $P_1, \ldots, P_{n-2}$. El rol de P_k es posar zeros a la k-èsima columna sota la subdiagonal.

Iteració QR desplaçada

Sigui $\mu \in \mathbb{R}$ i considerem la iteració:

$$\begin{aligned} &H = U_0^TAU_0 \qquad \text{(reducció Hessenberg)} \\ &\text{per} \quad k = 1, 2, \ldots \\ &\quad H - \mu I = UR \qquad \text{(factoritació QR)} \\ &\quad H = RU + \mu I \end{aligned}$$

L'escalar μ s'anomena desplaçament. Les matrius H generades son similars a A, ja que

$$RU + \mu I = U^T(UR + \mu I)U = U^THU$$

Si ordenem els valors propis λ_i d'A de manera que

$$|\lambda_1 - \mu| \geq \cdots \geq |\lambda_n - \mu|$$

i μ està fixat, aleshores es pot demostrar que el p-èsim element de la subdiagonal convergeix a zero segons el quocient

$$\left|\frac{\lambda_{p+1} - \mu}{\lambda_p - \mu}\right|^k$$

Si $\lambda_p = \lambda_{p+1}$, aleshores clarament no convergeix. Però, per exemple, si μ és molt més proper a λ_n que a la resta, col·locar un zero a la posició $(n, n-1)$ és ràpid. Un cop aconseguit, podrem desacoplar la matriu H en dues submatrius irreductibles. De manera més genèrica, si tenim

$$H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ 0 & H_{22} \end{bmatrix}$$

aleshores el problema es desacopla en dos problemes menors que involucren H_{11} i H_{22}. Això dona lloc a la iteració QR amb desplaçament variable:

$$
\begin{array}{ll}
H = U_0^T A U_0 & \text{(reducció Hessenberg)} \\
\text{per} \quad k = 1, 2, \ldots & \\
\quad \mu = H(n,n) & \\
\quad H - \mu I = UR & \text{(factorització QR)} \\
\quad H = RU + \mu I &
\end{array}
$$

Amb aquest mètode, doncs, obtindrem finalment una matriu H triangular superior que contindrà els valors propis de la matriu A

Determinació dels vectors propis

Amb els resultats vists anteriorment, en el cas d'una matriu no simètrica, no és possible calcular directament els vectors propis mitjançant el mètode QR. La matriu $H^{(k)}$ final és triangular superior però no diagonal. La manera de calcular els vectors propis seria resolent el sistema $(H^{(k)} - \lambda)w = 0$. Com que H és triangular, es podria resoldre ràpidament per substitució backward, és a dir, l'algoritme seria

$$
\begin{array}{rl}
\text{per} & k = n, n-1, \ldots, 1 \\
\text{si} & |h_{k,k} - \lambda| < tol \\
& \quad w_{k,k} = 1 \\
\text{si no} & \\
& \qquad w_{k,k} = 0 \\
& \text{per } j = k+1, \ldots, n \\
& \qquad w_{k,k} = w_{k,k} - h_{k,j} w_j \\
w_{k,k} = & \quad w_{k,k}/(h_{k,k} - \lambda)
\end{array}
$$

No obstant, aquest algoritme presenta certs problemes quan tenim un valor propi amb multiplicitat més gran que 1, ja que aleshores la condició $|h_{k,k} - \lambda| < tol$ es compleix dues vegades. D'aquesta manera és dificil obtenir dos vectors propis de valor propi igual que siguin linealment independents.
És per això que l'he modificat de manera que en cada iteració i de l'algoritme anterior, on utilitzo el valor propi $\lambda_i = h_{i,i}$ faig directament $\omega_{i,i} = 1$, i si per algun $k \neq i$ tinc que $|h_{k,k} - \lambda| < tol$, aleshores $\omega_{k,k} = 0$ a continuació desenvolupo l'algoritme tal i com està. D'aquesta manera, si per exemple $\lambda_1 = \lambda_2$, la iteració $i = 1$ em genera un vector de la forma $(1, 0, \ldots)$ mentre que la iteració $i = 2$ em genera un vector $(0, 1, \ldots)$, amb el que m'asseguro que són linealment independents.

Un cop tinc els vectors propis, utilitzant la relació

$$
H^{(k)} = U^{T(k)} \cdots U^{T(1)} H^{(0)} U^{(1)} \cdots U^{(k)} = U^T H^{(0)} U
$$

podem recuperar els vectors propis de la matriu Hessenberg $H^{(0)}$, ja que si v és un vector propi de $H^{(0)}$, és a dir, si $H^{(0)}v = \lambda v$ per algun λ, aleshores

$$
H^{(0)}v = \lambda v \Longleftrightarrow U H^{(k)} U^T v = \lambda v \Longleftrightarrow H^{(k)} U^T v = U^T \lambda v = H^{(k)}(U^T v) = \lambda(U^T v)
$$

Per tant, $\omega := U^T v$ és un vector propi de la matriu triangular superior $H^{(k)}$, i per tant, per recuperar els vectors propis només cal fer $v = U\omega$. Finalment, com que $H^{(0)} = U_0^T A U_0$, tindrem que el vector propi de la matriu A serà $u = U_0 v = U_0 U w$.

5 Implementació numèrica

En aquesta secció veurem com s'ha dut a terme la implementació numèrica de la resolució de l'equació 3.4 en els casos de la geometria quadrada, geometria polar, i en el cas de dues superfícies poligonals.

5.1 Membrana quadrada

Hem de buscar els vectors i valors propis de l'operador Δ en la nostra geometria determinada, en aquest cas, la quadrada. Reescrivim explicitament l'equació anterior en el cas d'un espai de dimensió 2 en coordenades cartesianes, i ens queda:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\omega^2}{c^2} u$$

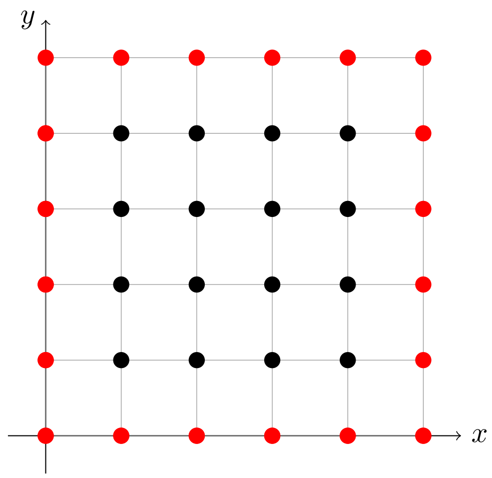


Figura 3: Malla de discretització en el cas de la membrana quadrada.

Si ara considerem una graella a la membrana de mida N en cada coordenada, és a dir, de N^2 punts, podem aproximar en cada punt l'equació diferencial anterior per una equació més senzilla, utilitzant les aproximacions següents:

$$f''(x) \simeq \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h}$$

Si definim $x_k := x_0 + kh$, on $h = \frac{x_1 - x_0}{N+1}$ i anàlogament per y_k aleshores l'equació diferencial en cada punt x_i y_j és de la forma

$$\frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial x^2} \simeq \frac{u(x_{i-1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i+1}, y_j)}{h^2}$$

$$\frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial y^2} \simeq \frac{u(x, y_{j-1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j+1})}{h^2}$$

Per simplificar la notació, escriurem $u_{i,j} := u(x_i, y_j)$.

$$\frac{u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{x,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j}}{h^2} \simeq -\frac{\omega^2}{c^2} u_{i,j}$$

$$u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j} \simeq -h^2 \frac{\omega^2}{c^2} u_{ij}$$

Hem discretitzat una equació diferencial en derivades parcials a un sistema de N^2 equacions lineals. Per tant, només cal escriure-la de forma matricial, en una matriu A, i resoldre el problema $AU = \lambda U$, on U serà un vector de mida N^2 que representarà la posició z de cada punt de la graella. Els valors propis λ seran negatius i proporcionals al quadrat de la freqüència d'oscil·lació d'aquella ona ($\lambda = -h^2 \frac{\omega^2}{c^2}$). La matriu té la forma per blocs

$$A = \begin{bmatrix} B & I_N & & & \\ I_N & B & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & I_N \\ & & & I_N & B \end{bmatrix}$$

on I_N és la matriu identitat de dimensió N, com la matriu B, que té la forma

$$B = \begin{bmatrix} -4 & 1 & & \\ 1 & -4 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

La matriu resultant és clarament simètrica, de manera que amb el mètode cíclic de Jacobi podem obtenir les solucions del problema de valors i vectors propis.

5.2 Membrana circular

Ara separarem l'espai també amb una graella però de les components (r, θ) de les coordenades polars. És a dir, tindrem $r_k := kh$ i $\theta_l = lh_\theta$ on $h = \frac{R}{N_r+1}$ i $h_\theta = \frac{2\pi}{N_t heta}$ Aleshores, podem aproximar en cada punt l'equació diferencial anterior per una equació més senzilla, com abans:

Per simplificar la notació, escriurem $u_{k,l} := u(r_k, \theta_l)$.

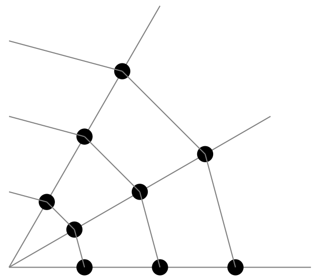


Figura 4: Malla de discretització en coordenades polars.

A partir del laplacià en coordenades polars i utilitzant les diferències finites per r i θ, el terme de l'esquerra de l'equació 3.5 resulta

$$\frac{u_{k+1,l} + u_{k-1,l} - 2u_{k,l}}{h^2} + \frac{1}{r_k}\frac{u_{k+1,l} - u_{k-1,l}}{2h} + \frac{1}{r_k^2}\frac{u_{k,l+1} + u_{k,l-1} - 2u_{k,l}}{h_\theta^2}$$

Agrupant termes, obtenim

$$-2\left(1 + \frac{h_r^2}{r_k^2 h_\theta^2}\right) u_{k,l} + \left(1 + \frac{h_r}{2r_k}\right) u_{k+1,l} + \left(1 - \frac{h_r}{2r_k}\right) u_{k-1,l} + \frac{h_r^2}{h_\theta^2 r_k^2}(u_{k,l+1} + u_{k,l-1})$$

Ara tenint en compte que $r_k = kh_r R$, i multiplicant tot per h_θ^2:

$$-2\left(h_\theta^2 + \frac{1}{k^2R^2}\right) u_{k,l} + \left(h_\theta^2 + \frac{h_\theta^2}{2kR}\right) u_{k+1,l} + \left(h_\theta^2 - \frac{h_\theta^2}{2kR}\right) u_{k-1,l} + \frac{1}{k^2R^2}(u_{k,l+1} + u_{k,l-1})$$

Cas $r = 0$

El cas $r = 0$ presenta una singularitat quan es fa una discretització en coordenades polars. Davant d'això, les dues opcions més comunes son, o bé ignorar-lo començant a partir de $r = h$ i modificant la discretització en aquests punts, o bé considerar-lo utilitzant la discretització cartesiana localment en $r = 0$. He optat per aquesta segona, i de fet el punt $r = 0$ representa la primera component del vector u. He tingut en compte per als exemples numèrics que N_θ fos divisible entre 4, per tal que aquesta aproximació fos el mes acurada possible.

Novament, hem discretitzat una equació diferencial en derivades parcials a un sistema de $(N_r + 1) \cdot N_\theta + 1$ equacions lineals. Per tant, només cal escriure-la de forma matricial, en una matriu A, i només haurem de resoldre el problema $Au = \lambda u$, on u serà un vector de mida $(N_r + 1) \cdot N_\theta + 1$. La matriu té la forma per blocs

$$A = \begin{bmatrix} -4 & \Theta_N & & & \\ C & A(r_k) & B_+(r_k) & & \\ & B_-(r_k) & A(r_k) & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & B_+(r_k) \\ & & & B_+(r_k) & A(r_k) \end{bmatrix}$$

on les matrius $A(r_k)$, $B_+(r_k)$, $B_-(t_k)$ i C son

$$A(r_k) = \begin{bmatrix} -4 & \frac{1}{r_k^2} & & \frac{1}{r_k^2} \\ \frac{1}{r_k^2} & -4 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \frac{1}{r_k^2} \\ \frac{1}{r_k^2} & & \frac{1}{r_k^2} & -4 \end{bmatrix}$$

$$B_+(r_k) = \left(1 + \frac{h}{2r_k}\right) I_{N_\theta}$$

$$B_-(r_k) = \left(1 - \frac{h}{2r_k}\right) I_{N_\theta}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 - \frac{h}{2r_k} \\ \vdots \\ 1 - \frac{h}{2r_k} \end{bmatrix}$$

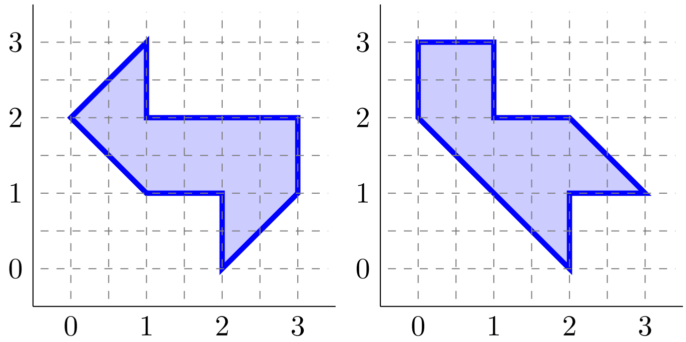
Per últim,

$$\Theta_N = (1, \dots, 1, \dots, 1, \dots, 1, \dots)$$

on cada 1 està $N/4$ posicions allunyat de l'anterior/següent. Com es pot veure, la matriu de la discretització polar no és simètrica a diferència de les matrius obtingudes per discretització de coordenades cartesianes. Aquest fet provoca que s'hagi hagut de desenvolupar el mètode QR per als casos on el mètode cíclic de Jacobi no funciona. Després d'una llarga recerca, no he trobat cap referència que fes una discretització en coordenades polars que donés com a resultat una matriu simètrica. El fet que això no sigui possible es podria justificar tenint en compte que perquè sigui simètrica, la contribució de dos punts en les discretitzacions de l'altre han de ser simètriques. És a dir, la contribució que un punt p_1 té sobre un punt p_2 quan discretitzem l'equació en p_2, ha de ser la mateixa contribució que té p_2 en p_1. Això assegura que $a_{i_1,i_2} = a_{i_2,i_1}$ (entenent i_j com l'índex del punt p_j) i per tant la matriu sigui simètrica. El problema es que amb l'equació plantejada tal i com està, dos punts contigus al llarg del radi tindran contribucions diferents, ja que les equacions tenen dependència explícita del radi, i per tant, no serà possible obtenir una discretització simètrica.

5.3 Membrana irregular

Per últim, explicarem com s'ha dut a terme la discretització de les dues superfícies



Definició del polígon

Per a fer la discretització de superfícies com les de la imatge anterior, el primer que s'ha fet és partir d'una discretització en coordenades cartesianes del quadrat $(0,1)^2$ i extendre-la fins allà on fos necessari. Aleshores, per tal que les condicions de contorn apliquin bé en la graella de punts de discretització, cal que es compleixin les condicions següents

1. Tots els vèrtexs estiguin sobre punts amb coordenades enteres (o naturals). Aquesta condició es podria relaxar, tenint en compte que el que és necessari és que els vèrtexs estiguin sobre punts de la discretització. No obstant, si no estiguéssin sobre punts amb coordenades enteres, aquesta condició podria dependre de la mida de la discretització.

2. Els seus costats siguin o be paral·lels a algun dels eixos x, y, o be amb un angle de 45^{o} respecte ells. D'aquesta manera ens assegurem que els punts de l'entorn d'un punt interior siguin o bé interiors, o estiguin just sobre la vora de la superfície.

L'article [4] explica que una solució quan la graella no encaixa amb la vora, és traslladar les condicions de contorn punts del voltant, o bé interpolar, però això queda fora de l'abast d'aquest treball.

Punts interiors

El següent pas ha estat determinar de tots els punts de la graella, aquells que es troben estrictament a l'interior del polígon. Per fer-ho, he utilitzat un algoritme que recorre tots els punts de la graella, i per cadascun, traça un raig perpendicular que va comptant quantes vegades travessa una aresta. Si a l'arribar al final el nombre d'arestes és imparell, aleshores el punt es troba dins del polígon. Si el nombre, en canvi, és parell, vol dir que el punt es troba fora d'aquest. Tot i la senzillesa d'aquest algoritme, funciona prou bé, tot i que hi ha algun cas excepcional: quan el punt està en una aresta o en un vèrtex. Per tant, he afegit dues condicions adicionals que fan que un punt molt proper a un vèrtex o a una aresta (més proper que la distància entre dos punts consecutius de la graella) els considerin fora de l'interior del polígon.

Construcció de la matriu

Un cop tinc els punts interiors, ja puc construir la matriu de discretització. Per fer-ho, he de posar tots els termes de la diagonal a -4 i trobar els punts que estan relacionats. És a dir, dos punts estaran relacionats si estan un al costat de l'altre. Per trobar aquestes relacions, utilitzo el següent algoritme:

1. En el pas de tria de punts interiors, emmagatzemo la informació sobre l'índex del primer punt de cada fila, així com les coordenades del primer i últim punts de cada fila.
2. Per cada punt, si el següent punt segueix a la mateixa fila (és a dir, si les coordenades y són iguals) aleshores els dos punts estan relacionats.
3. Quan hi ha un canvi de fila, comparo les coordenades x dels primers punts de la nova fila i la fila anterior. En el cas que la coordenada x del punt de la fila anterior sigui més petit, aniré recorrent la fila anterior fins trobar un punt amb les mateixes coordenades. En el cas que sigui major, m'esperaré fins que el bucle arribi a la coordenada x del primer punt de la fila anterior. En qualsevol cas, tindré la correspondència entre el punt de la nova fila i el punt de l'anterior, així que quan la trobi, els dos punts estaran relacionats.

Si els punts i i j estan relacionats, això vol dir que $a_{ij} = a_{ji} = 1$, de manera que aquesta construcció ens assegura que la matriu resultant serà simètrica i, per tant, la podrem resoldre amb el mètode cíclic de Jacobi.
Finalment esmentar que aquesta implementació és més genèrica que la quadrada. De fet, l'he aprofitat per fer els càlculs per una membrana rectangular de mides $a = 3$ i $b = 1$, i també per una membrana quadrada de costat $a = 3$.

6 Resultats

En aquesta secció veurem els resultats obtinguts amb els programes que he realitzat. Els resultats que es mostren a continuació estan calculats amb els següents valors:
En tots els exemples, s'ha agafat un valor de la velocitat de propagació $c = 1$.
En el cas de la matriu circular: $R = 1$, $N_r = 10$, $N_\theta = 32$, de manera que la matriu és de dimensió $dim = 321$ $(= N_r \cdot N_\theta + 1)$.
En el cas de la matriu quadrada: $a = 1$, $N = 50$, de manera que la matriu és de dimensió $dim = 2500$ $(= N^2)$.
En el cas de les figures de Kac i la matriu rectangular, s'ha fet una discretització de $N = 20$ sobre cada costat del quadrat unitat (és a dir, $19^2 = 361$ punts a $(0,1)^2$), i les figures estaven definides a dins de $(0,3)^2$. Els punts interiors de les figures de Kac, i per tant, la dimensió de les matrius és de $dim = 1311$, i en el cas de la membrana rectangular, la dimensió de la matriu és de $dim = 1121$ $(= 19 \cdot 59)$.

En primer lloc, veiem els primers modes normals de vibració per a les membranes circulars i quadrades. Podem comprovar amb les figures de la solució analítica que els resultats obtinguts són satisfactòriament semblants als analítics que esperariem.

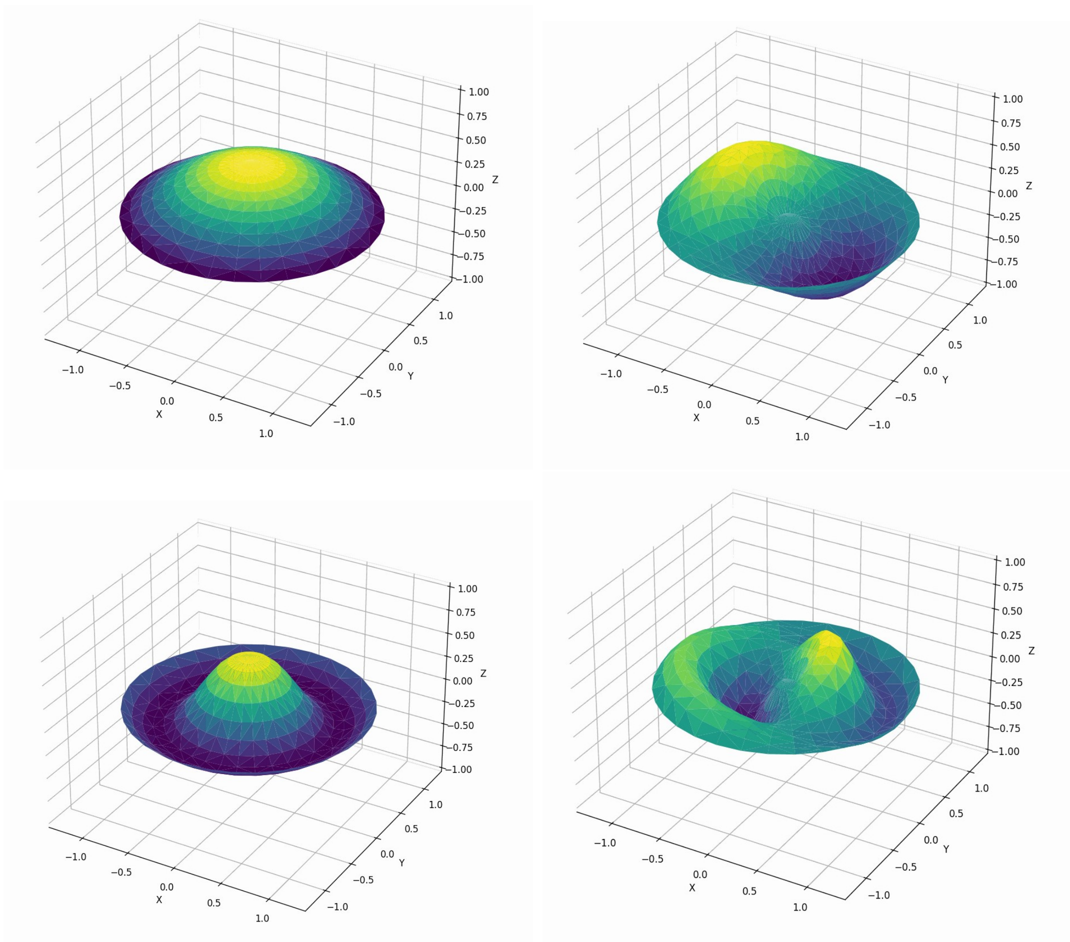


Figura 5: Primers modes normals de vibració per a la membrana circular de radi $R = 1$.

Com veurem en la secció següent amb més detall, podem observar que en el cas de la membrana quadrada, els vectors propis corresponents al model (2,1) i el mode (1,2) no s'aproximen als que hem predit teòricament. Esperariem que les ondulacions tinguessin el seu màxim a l'alçada del centre d'algun dels costat, i no a prop del vèrtex. Això és degut una degeneració en els valors propis: la simetria quadrada provoca que els modes (2,1) i (1,2) tinguin el mateix valor propi, de manera que el subconjunt de vectors propis en aquest cas és de dimensió 2. Per tant, si bé el que hem obtingut no era el que esperavem analíticament, es pot comprovar que aquest és combinació lineal del vector propi (2,1) i el (1,2) que tenim analíticament. De fet, si veiem la figura 7, observem que ara clarament el (2,1) i el (1,2) són com esperariem. Aquest problema ens passarà sempre que dues parelles (n_1, m_1) i (n_2, m_2) siguin tals que el seu valor propi sigui el mateix.

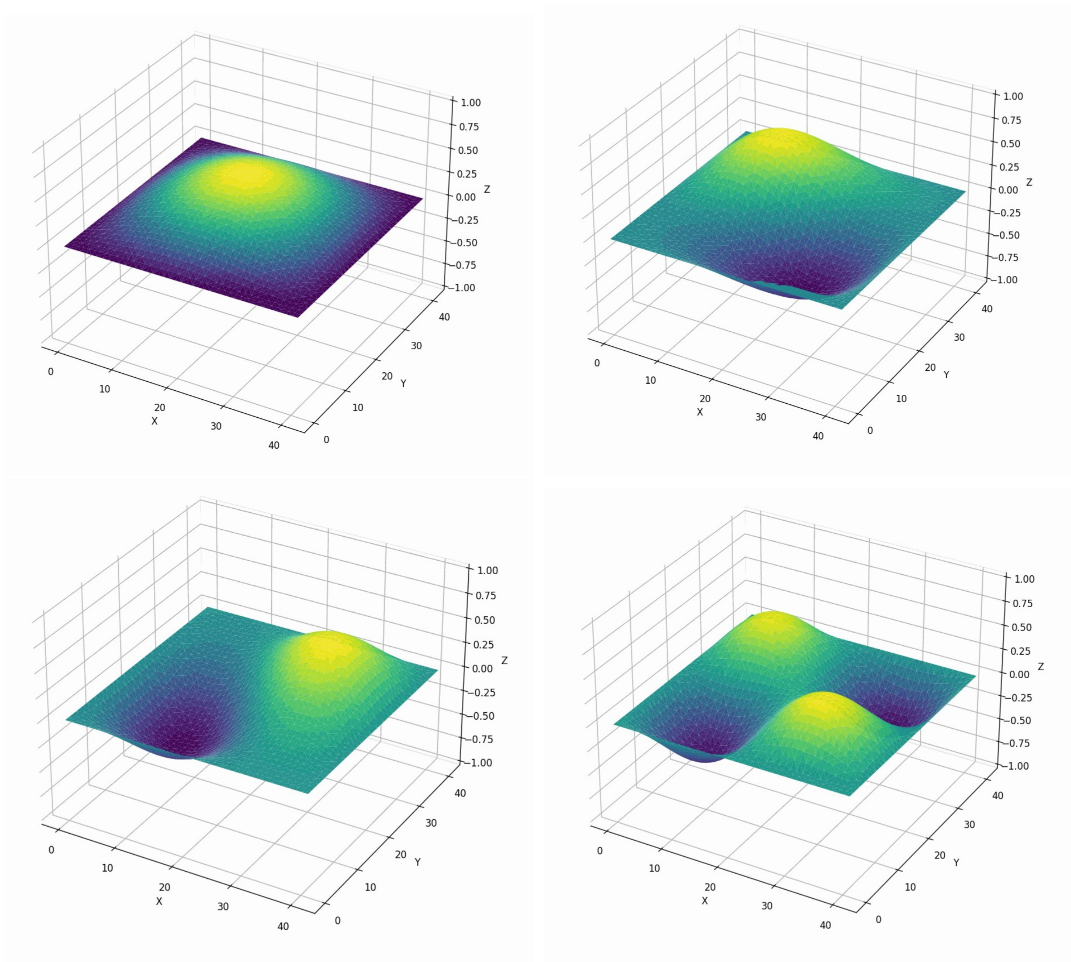


Figura 6: Primers modes normals de vibració per a la membrana quadrada de costat $a = 1$.

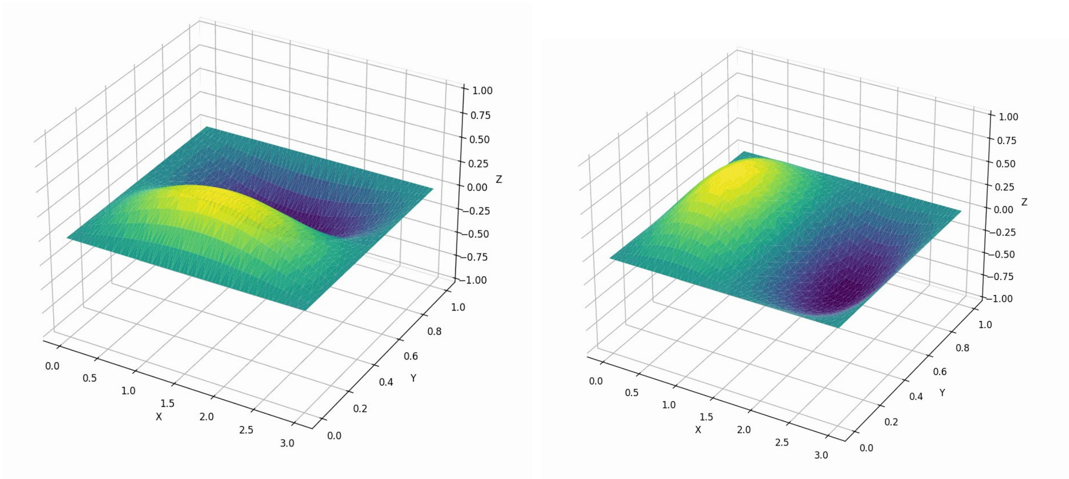


Figura 7: Modes de vibració (2,1) i (1,2) per a la membrana rectangular de costats $a = 3$ i $b = 1$.

Per últim, aquí veiem el resultat de discretitzar les dues figures irregulars que refuten la pregunta de Kac [3]. Podem veure a la taula 1 que els valors propis mostrats son exactament iguals amb la precisió del programa. De fet, tots els valors propis calculats coincidien. Així que si aquests dos timbals existissin, sonarien igual.
Finalment, també podem veure una representació dels primers modes normals de vibració de les dues superfícies.

Vaps S_1	Vaps S_2
-10.1734857	-10.1734857
-14.6295013	-14.6295013
-20.7135001	-20.7135001
-26.0540872	-26.0540872
-28.9429661	-28.9429661
-36.6630525	-36.6630525
-42.1023696	-42.1023696
-45.8243775	-45.8243775
-49.0041145	-49.0041145

Taula 1: Comparativa dels primers valors propis de les dues superfícies irregulars.

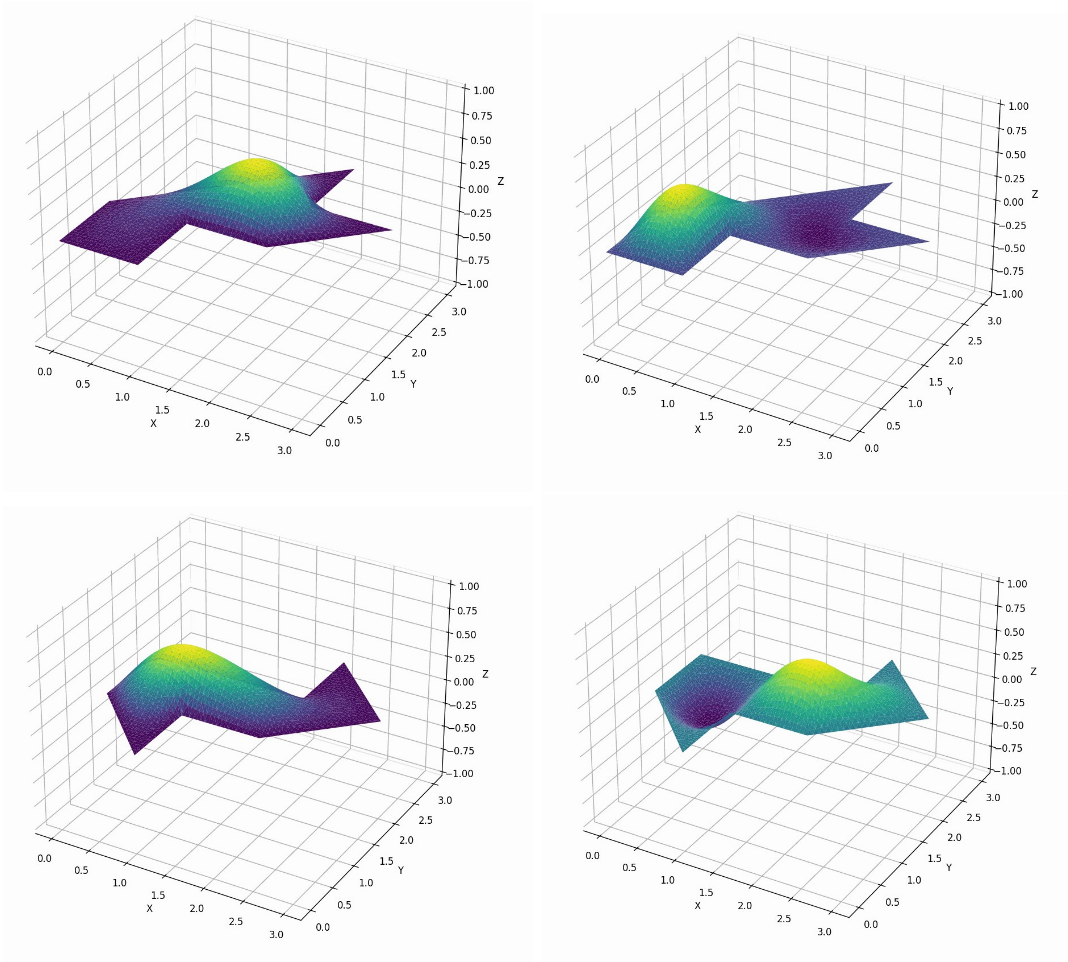


Figura 8: Primers modes normals de vibració per a les dues superfícies irregulars.

7 Comparativa amb la solució analítica

En aquesta secció veurem les imatges dels primers modes de vibració calculats analíticament en el cas de la membrana circular, la membrana quadrada i la membrana rectangular. També es mostra en unes taules la diferència màxima entre la solució analítica i la solució numèrica, entès aquest màxim com $max_i|u_n(x_i, y_i) - u_a(x_i, y_i)|$ on u_n és la solució numèrica i u_a l'analítica.

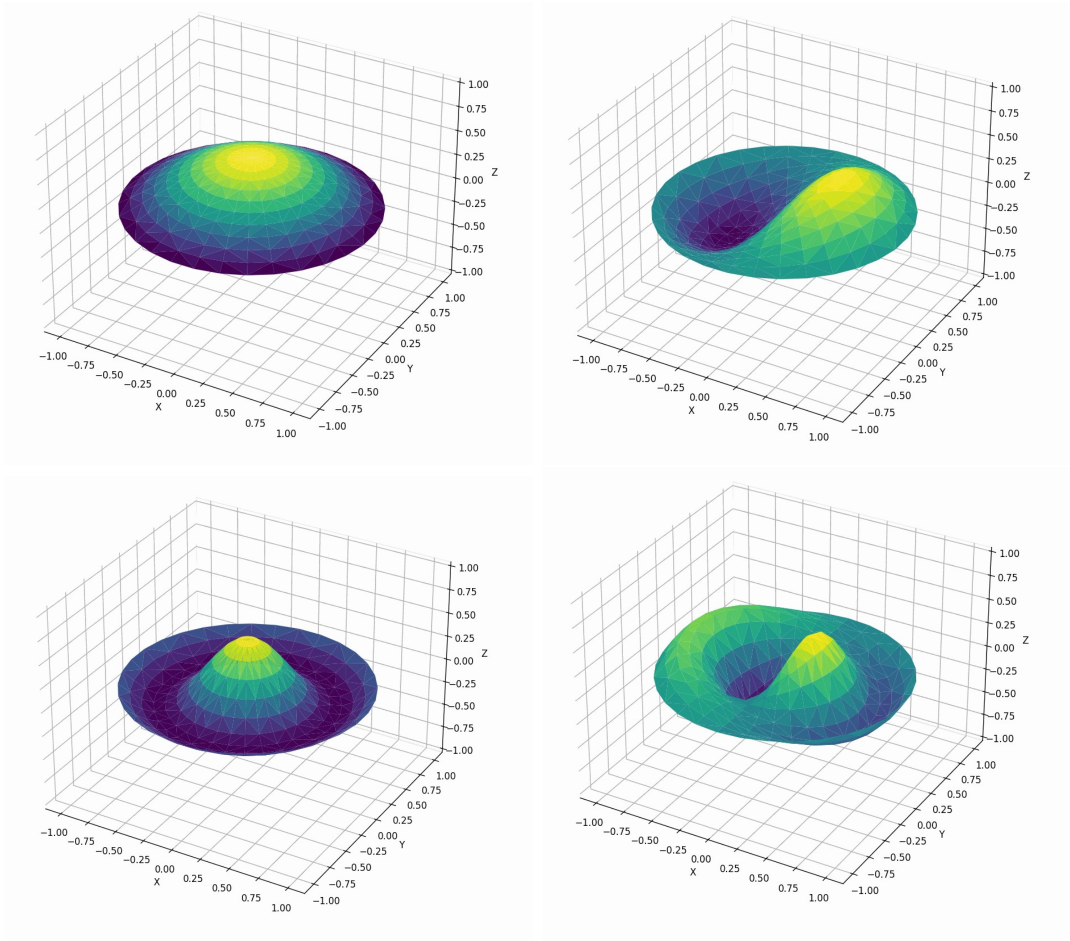


Figura 9: Primers modes normals de vibració per a la membrana circular de radi $R = 1$.

m	n	Diferència màxima	ω analític	ω numèric
0	1	8.324×10^{-5}	2.40482556	2.39916027
1	1	1.420×10^{-3}	3.83170597	3.81844209
0	2	1.866×10^{-4}	5.52007811	5.46136430
1	2	7.092×10^{-3}	7.01558667	6.92650706

Taula 2: Error en el càlcul dels vectors propis i comparativa dels valors propis de la membrana circular.

En el cas de la membrana quadrada, i del justificat en el capítol anterior, en el cas (2,1) (resp. (1,2)), la taula mostra les diferències entre la solució analítica i la suma (resp. resta) dels dos modes de vibració obtinguts numèricament. Com es pot comprovar, no s'obtenen valors tan bons com en els casos (1,1) i (2,2), però tot i així són raonablement acceptables, ja que hem de tenir en compte possibles errors en trobar aquesta correspondència de modes de vibració. A més, s'hi afegeix una comparativa dels valors propis obtinguts numèricament i els predits analíticament.

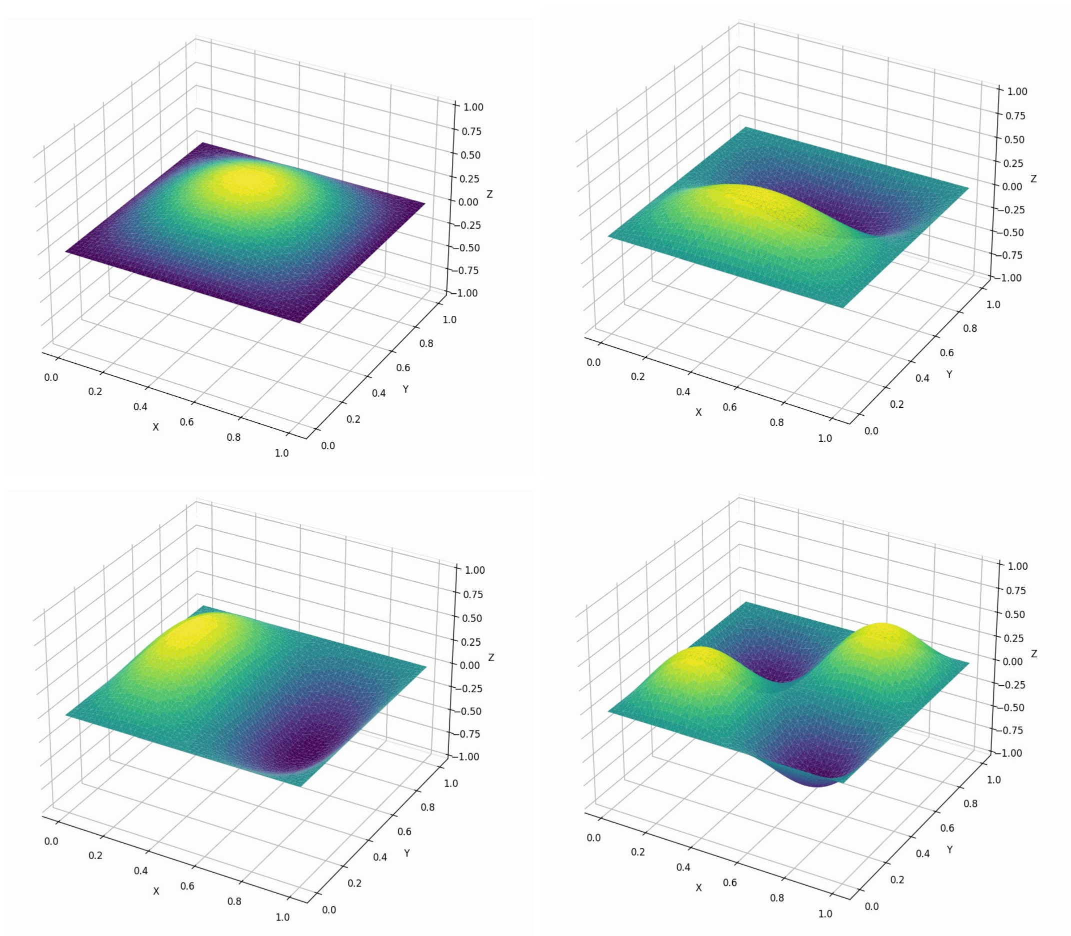


Figura 10: Primers modes normals de vibració per a la membrana quadrada de costat $a = 1$.

m	n	Diferència màxima	ω analític	ω numèric
1	1	1.023×10^{-4}	4.44288294	4.44184646
1	2	4.136×10^{-2}	7.02481473	7.02068373
2	1	4.132×10^{-2}	7.02481473	7.02068373
2	2	1.973×10^{-4}	8.88576588	8.88031531

Taula 3: Error en el càlcul dels vectors propis i comparativa dels valors propis de la membrana quadrada.

Podem veure en el cas de la membrana rectangular, per als primers modes de vibració, on encara no s'ha produit la degeneració, les solucions numèriques s'aproximen molt be a les analítiques.

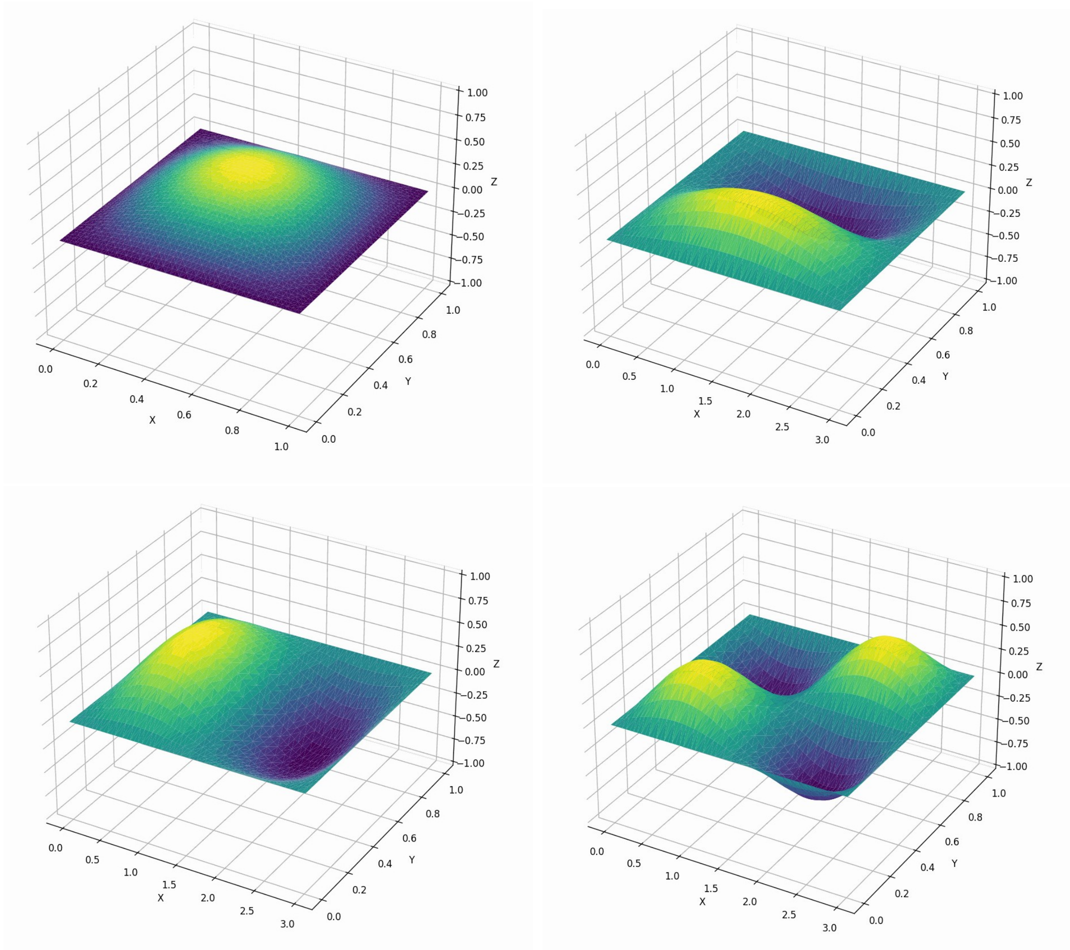


Figura 11: Primers modes normals de vibració per a la membrana rectangular de costats $a = 3$ i $b = 1$.

m	n	Diferència màxima	ω analític	ω numèric
1	1	4.937×10^{-5}	3.31152942	3.30842859
1	2	4.937×10^{-5}	6.36985403	6.34438012
2	1	4.946×10^{-5}	3.77572447	3.77250726
2	2	4.946×10^{-5}	6.62305884	6.59827786

Taula 4: Error en el càlcul dels primers vectors propis i comparativa dels valors propis de la membrana rectangular.

8 Conclusions

Podem afirmar, doncs, que hem obtingut unes simulacions numèriques molt satisfactòries dels modes de vibració de membranes.

En el cas de les membranes circulars, amb les taules anteriors podem deduir que la solució numèrica és millor o més propera com més petit és el nombre n, és a dir, la partició dels angles. En els casos de $n = 0$ obtenim diferències de l'ordre de $10^{-5}, 10^{-4}$ mentre que augmenta quan $n = 1$.

Els casos de degeneració dels vectors propis de la membrana quadrada queden justificats amb els resultats obtinguts de la membrana rectangular. Tot i així, queda pendent estudiar si es podrien evitar d'alguna manera.

Finalment, hem comprovat que efectivament les dues superfícies de Kac tenen els seus valors propis iguals, i hem pogut observar alguns dels seus modes de vibració fonamentals.

No obstant, aquests resultats també presenten certes limitacions, com l'efectivitat i velocitat dels mètodes quan la dimensió de la discretització creix molt, o la pròpia limitació de les diferències finites. Una possible continuació seria provar altres mètodes numèrics més ràpids i eficients, així com el mètode dels elements finits per poder ser capaços de discretitzar superfícies amb vora més complexa.
A més, els programes que he fet tractaven les matrius de discretització, que son matrius esparses, com matrius plenes amb molts zeros. Una millora que es podria implementar respecte això pot ser el tractament més curós de memòria, guardant només la quantitat de memòria necessària, que incrementaria l'eficiència per a dimensions molt grans.

Referències

[1] Lawrence C. Evans. *Partial differential equations.* American Mathematical Society, Providence, R.I., 2010.

[2] G. Golub and C. Loan. Matrix computations: John hopkins university press. 01 1996.

[3] Mark Kac. Can one hear the shape of a drum? *The American Mathematical Monthly*, 73(4):1–23, 1966.

[4] J. Kuttler and V. Sigillito. Eigenvalues of the laplacian in two dimensions. *Siam Review - SIAM REV*, 26, 04 1984.

[5] William Press, Saul Teukolsky, William Vetterling, and Brian Flannery. Numerical recipes. *Cambridge, UK, Cambridge University Press*, 01 1992.