UNIVERSITAT DE BARCELONA

Reflexión en la formación de profesores de matemáticas de Ecuador sobre la complejidad de los objetos matemáticos a enseñar

Carmen Eulalia Calle Palomeque

TESIS DOCTORAL

Reflexión en la formación de profesores de matemáticas de Ecuador sobre la complejidad de los objetos matemáticos a enseñar

Carmen Eulalia Calle Palomeque

Enero 2023

Reflexión en la formación de profesores de matemáticas de Ecuador sobre la complejidad de los objetos matemáticos a enseñar

Memoria presentada para optar al grado de doctor por la Universitat de Barcelona

Programa de doctorado en Didáctica de las ciencias, las lenguas, las artes y las humanidades

Facultad de Educación

Autora: Carmen Eulalia Calle Palomeque

Directores: Vicenç Font Moll y Adriana Breda

Tutor: Vicenç Font Moll

UNIVERSITAT DE BARCELONA

Resumen

La revisión de la literatura sobre la reflexión sobre la práctica docente muestra que el profesorado tiene dificultades para interpretar aspectos epistémicos de las tareas y para identificar su potencial educativo. Por tanto, es relevante investigar si estas dificultades también se dan en el profesorado ecuatoriano. En esta línea, la problemática de investigación se concretó en la enseñanza y el aprendizaje (EA) del criterio "implementar una muestra representativa de la complejidad del objeto matemático que se quiere enseñar" en procesos de formación implementados en dos contextos institucionales: a) con profesores de secundaria de matemáticas de Ecuador en activo y b) en la formación inicial de docentes en el nivel de la Educación General Básica y el Bachillerato, en concreto, en la Carrera de pedagogía de las ciencias experimentales: matemáticas y física.

El objetivo general (OG) de investigación es: Desarrollar el diseño, la implementación y el análisis de ciclos formativos que promuevan la realización de análisis valorativos de procesos de instrucción por parte de los profesores utilizando la herramienta criterios de idoneidad didáctica (CID) e investigar cómo se desarrolla el análisis didáctico en estos dispositivos formativos. En particular, se hace énfasis en el desarrollo de la reflexión docente acerca a la EA de los objetos matemáticos a través del uso del componente "representatividad de la complejidad del objeto matemático a enseñar" del CID epistémico. Este objetivo general se concreta en cinco objetivos específicos, los dos primeros son instrumentales para conseguir los tres últimos.

OE1: Construir una posición compartida entre los directores de tesis y la doctoranda acerca de las diferentes maneras de entender la complejidad de los objetos matemáticos y sobre criterios para diseñar secuencias didácticas para la enseñanza del componente representatividad de la complejidad.

OE2: Elaboración de un banco de tareas para su posible incorporación a ciclos formativos direccionados a la formación continua e inicial de profesores de matemáticas, que haga énfasis en la EA del uso del componente "representatividad de la complejidad del objeto matemático" del criterio de idoneidad epistémica.

OE3: Diseñar e implementar ciclos formativos (CF) en la formación continua de profesores de matemáticas de secundaria en ejercicio, acerca del uso del componente "representatividad de la complejidad del objeto matemático" del criterio de idoneidad epistémica.

OE4: Diseñar e implementar ciclos formativos (CF) en la formación inicial de profesores de educación básica superior y bachillerato de matemáticas –para la enseñanza y aprendizaje del componente "representatividad de la complejidad del objeto matemático" del criterio de idoneidad epistémica– para usarlo en la reflexión de secuencias didácticas diseñadas e implementadas para la enseñanza y el aprendizaje de diferentes objetos matemáticos contemplado en el currículo de secundaria ecuatoriano.

OE5: Investigar la reflexión que hacen los profesores en servicio y los futuros profesores de matemáticas ecuatorianos acerca de la "representatividad de la complejidad del objeto matemático" del CID epistémico, al usar este componente en la reflexión de secuencias didácticas diseñadas e implementadas en sus prácticas preprofesionales.

La consecución de estos objetivos se muestra en las siete publicaciones que constituyen esta tesis. Los resultados relacionados con los objetivos 1 y 2 están presentes en las siete publicaciones. Los resultados relacionados con los objetivos 3 y 5 se hallan en las tres primeras publicaciones (capítulos 2–4) realizadas en el contexto de la formación continua del profesorado de secundaria de matemáticas del Ecuador. Los resultados relacionados con los objetivos 4 y 5 se hallan en las publicaciones 4, 5 y 6 (capítulos 5–7) realizadas en el contexto de la formación inicial del profesorado de secundaria de matemáticas del Ecuador. El capítulo de libro que se presenta como séptima publicación (capítulo 8), se relaciona con el objetivo 5 y es una presentación conjunta de las cinco primeras publicaciones (capítulos 2–6) que permite tener una visión global sobre las publicaciones de esta tesis.

Si bien las características metodológicas generales son las mismas en las siete publicaciones (cualitativa y con muestras intencionales), las fuentes de información y la metodología específica para cada uno de los cinco OE es diferente. Para los objetivos 1 y 2, después de un análisis de las diferentes fuentes documentales, se ha construido una posición compartida entre los directores de tesis y la doctoranda acerca de las diferentes maneras de entender la complejidad de los objetos matemáticos y sobre criterios para diseñar secuencias didácticas para la enseñanza del componente representatividad de la complejidad. A su vez, se ha confeccionado un banco de tareas (algunas presentes en las fuentes consultadas y otras de diseño propio) correspondientes a bloques temáticos diferentes y que sirven para mostrar la pluralidad de significados de un objeto matemático, de sus tipos de representación y de los problemas donde se aplica. Para los objetivos 3 y 4 se han diseñado e implementado ciclos formativos cuyo objetivo era introducir los CID para orientar la reflexión sobre la propia práctica. Para ello, se adaptó, a cada contexto institucional, la estructura habitual de un ciclo formativo cuyo objetivo es realizar un rediseño de la práctica docente, orientado a su mejora, usando la herramienta CID como referente teórico. Para el último objetivo, la metodología utilizada, básicamente, ha consistido en el análisis de contenido.

Para los objetivos OE1 y OE2 los resultados obtenidos son: a) una posición compartida entre la doctoranda y sus directores de tesis sobre cómo entender la complejidad de los objetos matemáticos. Se ha tomado como referente teórico el Enfoque Ontosemiótico (EOS) y, de acuerdo con este enfoque, se ha caracterizado la complejidad de los objetos matemáticos (en términos de pluri significación). Por otra parte, (b) se han acordado criterios para diseñar secuencias didácticas para la enseñanza del componente representatividad de la complejidad, que se sintetizan de la siguiente manera: si se pretende enseñar a profesores o futuros profesores la importancia de tener en cuenta, para la EA de un determinado objeto matemático, una muestra representativa de los diferentes *significados de dicho objeto en el diseño, valoración y rediseño de secuencias de tareas, el proceso de instrucción se debe diseñar teniendo en cuenta el siguiente principio: para poder usar este componente en la valoración y rediseño de secuencias de tareas, el profesor, como mínimo, debe conocer los diferentes significados del objeto matemático a enseñar y sus conexiones, debe conocer cuáles de estos significados están incluidos en el currículum y debe poder seleccionar y/o crear tareas en las que se tenga que usar un determinado significado del objeto matemático que se pretende enseñar. Siguiendo estos criterios (c) se ha confeccionado un banco de tareas (algunas presentes en las fuentes consultadas y otras de diseño propio) correspondientes a distintos bloques temáticos y que sirven para mostrar la pluralidad de significados, representaciones y campos de problema de un objeto matemático.*

Para el objetivo OE3 el resultado es que se ha diseñado e implementado un ciclo formativo en la formación continua de profesores de matemáticas de secundaria en ejercicio, acerca al uso del uso del componente "representatividad de la complejidad del objeto matemático" del criterio de idoneidad epistémica. Dicho ciclo sigue esta secuencia: a) Análisis de casos (sin teoría). b) Emergencia de los niveles de análisis didácticos propuestos por el EOS. c) Tendencias en la enseñanza de las matemáticas. d) Teoría (CID). e) En la asignatura de Trabajo Final de Máster los alumnos utilizarán los CID para valorar su propia práctica, en concreto la unidad que han diseñado e implementado. Por otra parte, en el paso d de esta secuencia se ha enseñado el uso del componente representatividad de la complejidad de acuerdo con los criterios específicos obtenidos como resultado de los OE1 y OE2. La implementación de los pasos a-d se describe en el primer artículo (capítulo 2) y el paso e en el tercer artículo (capítulo 4). Con relación al objetivo 5, las publicaciones de los capítulos 2–4 aportan resultados específicos para los objetos matemáticos: Teorema de Pitágoras, media aritmética y medidas de tendencia central.

Con relación al OE4 se han diseñado e implementado varios ciclos formativos en asignaturas de la Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales de la Universidad de Cuenca en los que se pone el énfasis, sobre todo, en la descripción de la EA del componente "muestra representativa de la complejidad del objeto a enseñar" de acuerdo con los criterios elaborados en los objetivos específicos OE1 y OE2. En concreto, para este componente, se siguió la siguiente secuencia; a) los estudiantes conjuntamente con el docente seleccionaron una serie de objetos matemáticos de los cuales se estudiaría su complejidad, b) con los objetos asignados y los grupos organizados, a cada uno se le proporcionó literatura relacionada con el objeto sobre el que debían reflexionar, c) el grupo debía hacerse preguntas como cuáles son los significados parciales del objeto matemático, cuáles se trabajan según el currículo con los alumnos de secundaria, y qué representaciones se pueden asociar a cada uno de los significados parciales de estos objetos matemáticos, d) se les pidió que propusieran problemas para cada significado, e) después, cada grupo informó de sus reflexiones al gran grupo, f) el gran grupo resolvió las tareas que se habían propuesto en cada pequeño grupo, g) finalmente, los estudiantes discutieron los resultados obtenidos, analizando su aplicación y generalización, a través de conclusiones y recomendaciones para tener en cuenta la complejidad de *los objetos matemáticos en los procesos instruccionales. Con relación al OE5, las publicaciones de los capítulos 5–7 aportan resultados específicos para diversos objetos matemáticos, entre otros: media aritmética; números complejos, Teorema de Tales, ecuaciones, fracciones, funciones afines y cuadráticas.*

La conclusión general de esta tesis es que incorporar el componente muestra representativa de la complejidad del objeto matemático para valorar la idoneidad epistémica de un proceso de EA, no es tarea fácil, ni para los formadores ni para sus alumnos (futuros profesores o profesores en servicio), pero se puede enseñar y aprender como parte del proceso de formación del profesorado ecuatoriano de matemáticas de secundaria. Entre otras razones, por la necesidad de realizar un estudio preliminar orientado a la reconstrucción de un significado global sobre el objeto matemático que se quiere enseñar para ser conscientes de su complejidad.

Ahora bien, a pesar de estas dificultades, un resultado de la reflexión sobre la complejidad de los objetos matemáticos en la formación de profesores es que, como resultado de la experiencia realizada, los participantes son conscientes de que, para mejorar el aprendizaje de las matemáticas, es necesario tener en cuenta la complejidad de los objetos matemáticos, entendida como las diferentes formas de comprender los significados y su aplicación en la resolución de problemas. Entre otras razones porque, para el profesor, conocer una muestra representativa de significados de un objeto matemático, le permite trabajar con una diversidad de problemas, facilitando que los alumnos construyan una red de significados parciales, conectados entre sí, que les permita desarrollar la competencia matemática que les posibilita resolver diferentes tipos de problemas.

Otra conclusión a resaltar, relacionada con la investigación de artículo 7, es el papel que tienen las matemáticas enseñadas en la guía de valoración de la práctica preprofesional utilizada por los docentes tutores de la Carrera de Pedagogía en Ciencias Experimentales de la Universidad de Cuenca. Por una parte, las preguntas de la guía se pueden reinterpretar como indicadores, componentes o criterios del constructo CID y, por otra parte, casi no se contemplan preguntas sobre la idoneidad epistémica. El hecho de que la institución no considere prioritario la contemplación de los aspectos epistémicos en la evaluación de las prácticas docentes de sus estudiantes es un resultado que puede facilitar que esta institución ahora vea como problemático algo que antes no se consideraba así (dar poca importancia a valorar la calidad matemática que imparten sus alumnos). Al asumir como problemática la guía que se usa para valorar la práctica, se pueden propiciar cambios en la institución para generar una nueva guía enriquecida con preguntas relacionadas con la calidad de las matemáticas enseñadas.

Abstract

The literature on reflection on teaching practice shows that teachers have difficulties interpreting epistemic aspects of tasks and identifying their educational potential. Therefore, it is relevant to investigate whether these difficulties also occur in Ecuadorian teachers. In this line, the research problem was focused on the teaching and learning (TL) of the criterion "to implement a representative sample of the complexity of the mathematical object to be taught" in training processes implemented in two institutional contexts: a) with active secondary mathematics teachers in Ecuador and b) in the initial training of teachers at the General Basic Education and High School level, specifically, in the Pedagogy of Experimental Sciences: Mathematics and Physics.

The research's general objective (GO) is to develop the design, implementation, and analysis of training cycles that promote the performance of evaluative analysis of instructional processes by teachers using the didactic suitability criteria tool (DSC) and to investigate how didactic analysis is developed in these training devices. In particular, emphasis is placed on the development of teacher reflection on the TL of mathematical objects through the use of the "representativeness of the complexity of the mathematical object to be taught" component of the epistemic DSC. This general objective encompasses five specific objectives, the first two are instrumental to achieve the last three.

SO1: To build a shared position between the thesis directors and the doctoral candidate on the different ways of understanding the complexity of mathematical objects and on criteria for designing didactic sequences for teaching the complexity representativeness component.

SO2: To create of a bank of tasks for their possible incorporation into training cycles aimed at the continuous and initial training of mathematics teachers, emphasizing the TL of the use of the "representativeness of the complexity of the mathematical object" component of the epistemic suitability criterion.

SO3: To design and implement training cycles (TC) in the continuing education of in-service secondary mathematics teachers on the use of the "representativeness of the complexity of the mathematical object" component of the epistemic suitability criterion.

SO4: To design and implement training cycles (TC) in the initial training of mathematics teachers of higher basic education and high school for the teaching and learning of the component "representativeness of the complexity of the mathematical object" of the epistemic suitability criterion- to use it in the reflection of didactic sequences designed and implemented for the teaching and learning of different mathematical objects contemplated in the Ecuadorian secondary school curriculum.

SO5: To investigate the reflection made by in-service teachers and future Ecuadorian mathematics teachers about the "representativeness of the complexity of the mathematical object" of the epistemic DSC, when

using this component in the reflection of didactic sequences designed and implemented in their pre-professional practicum.

These objectives are achieved in the seven publications that constitute this thesis. The results related to objectives 1 and 2 are present in all seven publications. The results related to objectives 3 and 5 are found in the first three publications (chapters 2-4) carried out in the context of the continuing education of secondary mathematics teachers in Ecuador. The results related to objectives 4 and 5 can be found in publications 4, 5 and 6 (chapters 5-7), which were published in the context of the initial training of secondary mathematics teachers in Ecuador. The book chapter presented as the seventh publication (chapter 8) is related to objective 5 and it is a joint presentation of the first five publications (chapters 2-6) that allows a global view of the publications of this thesis.

Although the general methodological characteristics are the same in the seven publications (qualitative and with purposive samples), the sources of information and the specific methodology for each of the five SOs is different. For objectives 1 and 2, after an analysis of the different documentary sources, a shared position has been constructed between the thesis directors and the doctoral candidate about the different ways of understanding the complexity of mathematical objects and about criteria for designing didactic sequences for the teaching of the representativeness of the complexity component. At the same time, a bank of tasks (some of them present in the sources consulted and others of our own design) corresponding to different thematic blocks, which serve to show the plurality of meanings of a mathematical object, its types of representation, and of the problems where it is applied, was designed. For objectives 3 and 4, training cycles have been designed and implemented with the aim of introducing the DSC to guide reflection on one's own practice. To this end, the usual structure of a training cycle was adapted to each institutional context, the objective of which is to redesign teaching practice with a view to its improvement, using the DSC tool as a theoretical reference. For the last objective, the methodology used basically consisted of content analysis.

For objectives SO1 and SO2, the results obtained are a) a shared position between the doctoral student and her thesis directors on how to understand the complexity of mathematical objects. The Ontosemiotic Approach (OSA) has been taken as a theoretical reference and, according to this approach, the complexity of mathematical objects (in terms of pluri-significance) has been characterized. On the other hand, (b) criteria have been agreed upon to design didactic sequences for the teaching of the representativeness of the complexity component, which are synthesized as follows: if teachers or future teachers are to be taught the importance of taking into account, for the TL of a given mathematical object, a representative sample of the different meanings of that object in the design, assessment, and redesign of task sequences, the instructional process must be designed taking into account the following principle: in order to be able to use this component in the assessment and redesign of task sequences, the *teacher, at a minimum, must know the different meanings of the mathematical object to be taught and their connections; also the teacher must know which of these meanings are included in the curriculum and must be able to select and/or create tasks in which a certain meaning of the mathematical object to be taught has to be used. Following these criteria (c), a bank of tasks (some of them present in the sources consulted and others of our own design) corresponding to different thematic blocks has been created to show the plurality of meanings, representations, and problem fields of a mathematical object.*

For objective SO3, the result is that a training cycle has been designed and implemented in the continuing education of practicing secondary school mathematics teachers, about the use of the "representativeness of the complexity of the mathematical object" component of the epistemic suitability criterion. This cycle follows this sequence: a) Analysis of cases (without theory). b) Emergence of the levels of didactic analysis proposed by the OSA. c) Trends in the teaching of mathematics. d) Theory (DSC). e) In the Master's Final Project course, students will use the DSC to evaluate their own practice, specifically the unit they have designed and implemented. On the other hand, in step d of this sequence the use of the complexity representativeness component has been taught according to the specific criteria obtained as a result of SO1 and SO2. The implementation of steps a-d is described in the first article (chapter 2) and step e in the third article (chapter 4). Regarding objective 5, the publications in chapters 2-4 provide specific results for the mathematical objects: Pythagorean Theorem, arithmetic mean, and measures of central tendency.

In relation to SO4, several training cycles have been designed and implemented in subjects of the Experimental Sciences Pedagogy Program of the University of Cuenca, emphasizing, above all, the description of the TL of the component "representative sample of the complexity of the object to be taught" in accordance with the criteria elaborated in the specific objectives SO1 and SO2. Specifically, for this component, the following sequence was followed; a) the students together with the teacher selected a series of mathematical objects whose complexity would be studied, b) with the objects assigned and the groups organized, each one was provided with literature related to the object on which they were to reflect, c) the group had to ask themselves questions such as what are the partial meanings of the mathematical object, which ones are worked according to the curriculum with high school students, and what representations can be associated to each of the partial meanings of these mathematical objects, d) they were asked to propose problems for each meaning, e) then, each group reported their reflections to the large group, f) the large group solved the tasks that had been proposed in each small group, g) finally, the students discussed the results obtained, analyzing their application and generalization, through conclusions and recommendations to take into account the complexity of mathematical objects in the instructional processes. In relation to SO5, the publications in chapters 5-7 provide specific results for various mathematical objects, among others: arithmetic mean; complex numbers, Thales' Theorem, equations, fractions, affine and quadratic functions.

The general conclusion of this thesis is that incorporating the component representative sample of the complexity of the mathematical object to assess the epistemic suitability of a TL process is not an easy task, neither for trainers nor for their students (future teachers or in-service teachers), but it can be taught and learned as part of the training process of Ecuadorian secondary mathematics teachers. Among other reasons, for the need to carry out a preliminary study oriented to the reconstruction of a global meaning of the mathematical object to be taught in order to be aware of its complexity.

Now, despite these difficulties, one result of the reflection on the complexity of mathematical objects in teacher training is that, as a result of the experience carried out, the participants are aware that in order to improve the learning of mathematics it is necessary to consider the complexity of mathematical objects, understood as the different ways of comprehending the meanings and their application in problem-solving. Among other reasons, the teacher´s knowledge of a representative sample of meanings of a mathematical object allows him/her to work with a diversity of problems, facilitating students to build a network of partial meanings, connected to each other, which allows them to develop the mathematical competence that enables them to solve different types of problems.

Another conclusion to highlight, related to the research article seven, is the role of the mathematics taught in the evaluation guide of the pre-professional practicum used by the tutor teachers of the Pedagogy in Experimental Sciences Career of the University of Cuenca. On the one hand, the questions in the guide can be reinterpreted as indicators, components, or criteria of the DSC construct and, on the other hand, almost no questions on epistemic suitability are contemplated. The fact that the institution does not consider the epistemic aspects as a priority in the evaluation of its students' teaching practicum, is a result that may lead the institution to see a problem that was not considered as such before (giving little importance to assessing the mathematical quality taught by its students). By assuming as problematic the guide used to evaluate practicum, changes can be brought about in the institution to generate a new guide enriched with questions related to the quality of the mathematics taught.

Resum

La revisió de la literatura sobre la reflexió sobre la pràctica docent mostra que el professorat té dificultats per a interpretar aspectes epistèmics de les tasques i per a identificar el seu potencial educatiu. Per tant, és rellevant investigar si aquestes dificultats també es donen en el professorat equatorià. En aquesta línia, la problemàtica de recerca es va concretar en l'ensenyament i l'aprenentatge (EA) del criteri "implementar una mostra representativa de la complexitat de l'objecte matemàtic que es vol ensenyar" en processos de formació implementats en dos contextos institucionals: a) amb professors de secundària de matemàtiques de l'Equador en actiu i b) en la formació inicial de docents en el nivell de l'Educació General Bàsica i el Batxillerat, en concret, en la Carrera de pedagogia de les ciències experimentals: matemàtiques i física.

L'objectiu general (OG) de recerca és: Desenvolupar el disseny, la implementació i l'anàlisi de cicles formatius que promoguin la realització d'anàlisis valoratives de processos d'instrucció per part dels professors utilitzant l'eina criteris d'idoneïtat didàctica (CID) i investigar com es desenvolupa l'anàlisi didàctica en aquests dispositius formatius. En particular, es fa èmfasi en el desenvolupament de la reflexió docent sobre l'EA dels objectes matemàtics a través de l'ús del component "representativitat de la complexitat de l'objecte matemàtic a ensenyar" del CID epistèmic. Aquest objectiu general es concreta en cinc objectius específics, els dos primers són instrumentals per a aconseguir els tres últims.

OE1: Construir una posició compartida entre els directors de tesis i la doctoranda sobre les diferents maneres d'entendre la complexitat dels objectes matemàtics i sobre criteris per a dissenyar seqüències didàctiques per a l'ensenyament del component representativitat de la complexitat.

OE2: Elaboració d'un banc de tasques per a la seva possible incorporació a cicles formatius adreçats a la formació contínua i inicial de professors de matemàtiques, que faci èmfasis en l'EA de l'ús del component "representativitat de la complexitat de l'objecte matemàtic" del criteri d'idoneïtat epistèmica.

OE3: Dissenyar i implementar cicles formatius (CF) en la formació contínua de professors de matemàtiques de secundària en exercici, sobre l'ús del component "representativitat de la complexitat de l'objecte matemàtic" del criteri d'idoneïtat epistèmica.

OE4: Dissenyar i implementar cicles formatius (CF) en la formació inicial de professors d'educació bàsica superior i batxillerat de matemàtiques –per a l'ensenyament i aprenentatge del component "representativitat de la complexitat de l'objecte matemàtic" del criteri d'idoneïtat epistèmica– per a usar-lo en la reflexió de seqüències didàctiques dissenyades i implementades per a l'ensenyament i l'aprenentatge de diferents objectes matemàtics contemplat en el currículum de secundària equatorià.

OE5: Investigar la reflexió que fan els professors en servei i els futurs professors de matemàtiques equatorians sobre la "representativitat de la complexitat de l'objecte matemàtic" del CID epistèmic, en usar aquest component en la reflexió de seqüències didàctiques dissenyades i implementades en les seves pràctiques preprofessionals.

La consecució d'aquests objectius es mostra en les set publicacions que constitueixen aquesta tesi. Els resultats relacionats amb els objectius 1 i 2 són presents en les set publicacions. Els resultats relacionats amb els objectius 3 i 5 es troben en les tres primeres publicacions (capítols 2–4) realitzades en el context de la formació contínua del professorat de secundària de matemàtiques de l'Equador. Els resultats relacionats amb els objectius 4 i 5 es troben en les publicacions 4, 5 i 6 (capítols 5–7) realitzades en el context de la formació inicial del professorat de secundària de matemàtiques de l'Equador. El capítol de llibre que es presenta com a setena publicació (capítol 8), es relaciona amb l'objectiu 5 i és una presentació conjunta de les cinc primeres publicacions (capítols 2–6) que permet tenir una visió global sobre les publicacions d'aquesta tesi.

Si bé les característiques metodològiques generals són les mateixes en les set publicacions (qualitativa i amb mostres intencionals), les fonts d'informació i la metodologia específica per a cadascun dels cinc OE és diferent. Per als objectius 1 i 2, després d'una anàlisi de les diferents fonts documentals, s'ha construït una posició compartida entre els directors de tesis i la doctoranda sobre les diferents maneres d'entendre la complexitat dels objectes matemàtics i sobre criteris per a dissenyar seqüències didàctiques per a l'ensenyament del component representativitat de la complexitat. Al seu torn, s'ha confeccionat un banc de tasques (algunes presents en les fonts consultades i altres de disseny propi) corresponents a blocs temàtics diferents i que serveixen per a mostrar la pluralitat de significats d'un objecte matemàtic, dels seus tipus de representació i dels problemes on s'aplica. Per als objectius 3 i 4 s'han dissenyat i implementat cicles formatius l'objectiu dels quals era introduir els CID per a orientar la reflexió sobre la pròpia pràctica. Per a això, es va adaptar, a cada context institucional, l'estructura habitual d'un cicle formatiu l'objectiu del qual és realitzar un redissenyo de la pràctica docent, orientat a la seva millora, usant l'eina CID com a referent teòric. Per a l'últim objectiu, la metodologia utilitzada, bàsicament, ha consistit en l'anàlisi de contingut.

Per als objectius OE1 i OE2 els resultats obtinguts són: a) una posició compartida entre la doctoranda i els seus directors de tesis sobre com entendre la complexitat dels objectes matemàtics. S'ha pres com a referent teòric l'Enfocament Ontosemiòtic (EOS) i, d'acord amb aquest enfocament, s'ha caracteritzat la complexitat dels objectes matemàtics (en termes de pluri significació). D'altra banda, (b) s'han acordat criteris per a dissenyar seqüències didàctiques per a l'ensenyament del component representativitat de la complexitat, que se sintetitzen de la següent manera: si es pretén ensenyar a professors o futurs professors la importància de tenir en compte, per a l'EA d'un determinat objecte matemàtic, una mostra representativa dels diferents significats d'aquest objecte *en el disseny, valoració i redissenyo de seqüències de tasques, el procés d'instrucció s'ha de dissenyar tenint en compte el següent principi: per a poder usar aquest component en la valoració i redissenyo de seqüències de tasques, el professor, com a mínim, ha de conèixer els diferents significats de l'objecte matemàtic a ensenyar i les seves connexions, ha de conèixer quins d'aquests significats estan inclosos en el currículum i ha de poder seleccionar i/o crear tasques en les quals s'hagi d'usar un determinat significat de l'objecte matemàtic que es pretén ensenyar. Seguint aquests criteris (c) s'ha confeccionat un banc de tasques (algunes presents en les fonts consultades i altres de disseny propi) corresponents a diferents blocs temàtics i que serveixen per a mostrar la pluralitat de significats, representacions i camps de problema d'un objecte matemàtic.*

Per a l'objectiu OE3 el resultat és que s'ha dissenyat i implementat un cicle formatiu en la formació contínua de professors de matemàtiques de secundària en exercici, acosta a l'ús de l'ús del component "representativitat de la complexitat de l'objecte matemàtic" del criteri d'idoneïtat epistèmica. Aquest cicle segueix aquesta seqüència: a) Anàlisi de casos (sense teoria). b) Emergència dels nivells d'anàlisis didàctiques proposades pel EOS. c) Tendències en l'ensenyament de les matemàtiques. d) Teoria (CID). e) En l'assignatura de Treball Final de Màster els alumnes utilitzaran els CID per a valorar la seva pròpia pràctica, en concret la unitat que han dissenyat i implementat. D'altra banda, en el pas d d'aquesta seqüència s'ha ensenyat l'ús del component representativitat de la complexitat d'acord amb els criteris específics obtinguts com a resultat dels OE1 i OE2. La implementació dels passos a-d es descriu en el primer article (capítol 2) i el pas e en el tercer article (capítol 4). En relació amb l'objectiu 5, les publicacions dels capítols 2–4 aporten resultats específics per als objectes matemàtics: Teorema de Pitàgores, mitjana aritmètica i mesures de tendència central.

En relació amb l'OE4 s'han dissenyat i implementat diversos cicles formatius en assignatures de la Carrera de Pedagogia de les Ciències Experimentals de la Universidad de Cuenca en els quals es posa l'èmfasi, sobretot, en la descripció de l'EA del component "mostra representativa de la complexitat de l'objecte a ensenyar" d'acord amb els criteris elaborats en els objectius específics OE1 i OE2. En concret, per a aquest component, es va seguir la següent seqüència; a) els estudiants conjuntament amb el docent van seleccionar una sèrie d'objectes matemàtics dels quals s'estudiaria la seva complexitat, b) amb els objectes assignats i els grups organitzats, a cadascun se li va proporcionar literatura relacionada amb l'objecte sobre el qual havien de reflexionar, c) el grup havia de fer-se preguntes com quins són els significats parcials de l'objecte matemàtic, quins es treballen segons el currículum amb els alumnes de secundària, i quines representacions es poden associar a cadascun dels significats parcials d'aquests objectes matemàtics, d) se'ls va demanar que proposessin problemes per a cada significat, e) després, cada grup va informar de les seves reflexions al gran grup, f) el gran grup va resoldre les tasques que s'havien proposat en cada petit grup, g) finalment, els estudiants van discutir els resultats obtinguts, analitzant la seva aplicació i generalització, a través de conclusions i recomanacions per a tenir en compte la complexitat dels *objectes matemàtics en els processos d'instrucció. En relació amb el OE5, les publicacions dels capítols 5–7 aporten resultats específics per a diversos objectes matemàtics, entre d'altres: mitjana aritmètica; nombres complexos, Teorema de Tales, equacions, fraccions, funcions afins i quadràtiques.*

La conclusió general d'aquesta tesi és que incorporar el component mostra representativa de la complexitat de l'objecte matemàtic per a valorar la idoneïtat epistèmica d'un procés d'EA, no és tasca fàcil, ni per als formadors ni per als seus alumnes (futurs professors o professors en servei), però es pot ensenyar i aprendre com a part del procés de formació del professorat equatorià de matemàtiques de secundària. Entre altres raons, per la necessitat de realitzar un estudi preliminar orientat a la reconstrucció d'un significat global sobre l'objecte matemàtic que es vol ensenyar per a ser conscients de la seva complexitat.

Ara bé, malgrat aquestes dificultats, un resultat de la reflexió sobre la complexitat dels objectes matemàtics en la formació de professors és que, com a resultat de l'experiència realitzada, els participants són conscients que, per a millorar l'aprenentatge de les matemàtiques, és necessari tenir en compte la complexitat dels objectes matemàtics, entesa com les diferents maneres de comprendre els significats i la seva aplicació en la resolució de problemes. Entre altres raons perquè, per al professor, conèixer una mostra representativa de significats d'un objecte matemàtic, li permet treballar amb una diversitat de problemes, facilitant que els alumnes construeixin una xarxa de significats parcials, connectats entre si, que els permeti desenvolupar la competència matemàtica que els possibilita resoldre diferents tipus de problemes.

Una altra conclusió a ressaltar, relacionada amb la recerca de l'article 7, és el paper que tenen les matemàtiques ensenyades en la guia de valoració de la pràctica preprofessional utilitzada pels docents tutors de la Carrera de Pedagogia en Ciències Experimentals de la Universidad de Cuenca. D'una banda, les preguntes de la guia es poden reinterpretar com a indicadors, components o criteris del constructe CID i, d'altra banda, gairebé no es contemplen preguntes sobre la idoneïtat epistèmica. El fet que la institució no consideri prioritari la contemplació dels aspectes epistèmics en l'avaluació de les pràctiques docents dels seus estudiants és un resultat que pot facilitar que aquesta institució ara vegi com a problemàtic alguna cosa que abans no es considerava així (donar poca importància a valorar la qualitat matemàtica que imparteixen els seus alumnes). En assumir com a problemàtica la guia que s'usa per a valorar la pràctica, es poden propiciar canvis en la institució per a generar una nova guia enriquida amb preguntes relacionades amb la qualitat de les matemàtiques ensenyades.

Dedicatoria

A mi esposo Luis, por su complicidad en todas las aventuras de formación profesional que he emprendido, haciéndome sentir que mi triunfo es su triunfo.

A mis hijos Jessica, Fabricio y Joseph, quienes me impulsaron a cumplir mi meta, apoyándome con su ingenio, en cada momento requerido.

A mis padres Flavio (*in memoriam*) y Ana, por confiar en lo que yo podía llegar a ser.

Agradecimientos

A Dios, porque me ha dado fuerza y sabiduría, para culminar este proyecto, brindándome una vida llena de aprendizajes, experiencias y sobre todo felicidad.

Mi reconocimiento de gratitud a quienes hicieron posible que esta tesis doctoral llegue a su culminación:

A la Universitat de Barcelona, por abrir horizontes hacia la excelencia de la educación matemática. De manera especial a mis directores, los doctores Vicenç Font y Adriana Breda, quienes demostraron, profesionalismo y generosidad, al momento de impartir conocimiento.

A la Universidad de Cuenca, por darme la oportunidad de continuar con mi formación profesional, en pro de la educación matemática de mi país. Especialmente a los estudiantes y profesores de la Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales por su apoyo en los diferentes procesos de investigación efectuados.

Reconocimiento

Esta tesis doctoral se enmarca en el proyecto de investigación sobre formación de profesores *Uso del lesson study y la noción de idoneidad didáctica para el desarrollo de la competencia en análisis e intervención didáctica en la formación de profesores de matemáticas*, PGC2018-098603-B-I00 (MCIU/AEI/FEDER, UE).

ÍNDICE

LISTA DE ABREVIATURAS

APOE – Teoría Acción-Proceso-Objeto-Esquema

BGU – Bachillerato General Unificado

CANP – Capacity and Network Project

CC – Configuraciones cognitivas

CCDM – Modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico Matemáticas

CE – Configuraciones epistémicas

CEAACES – Consejo de Evaluación, Acreditación y Aseguramiento de la Calidad de la Educación de la Educación Superior

CF – ciclos formativos

CGM – La Ciencia Cognitiva de las Matemáticas

CID – Criterios de Idoneidad Didáctica

DM – Didactics of Mathematics

ECTS – European Credit Transfer System

EGB – Educación General Básica

EGBS – Educación General Básica Superior

EOS – Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemáticos

ICMI – International Commission on Mathematical Instruction

INEVAL – Instituto Nacional de Evaluación Educativa

MINEDUC – Ministerio de Educación

MTC – medidas de tendencia central

NCTM – National Council of Teachers of Mathematics

OSA – Onto-semiotic Approach to Mathematical Cognition and Instruction

PCA – Proyecto Curricular Institucional

PCA – Plan Curricular Anual

TAD – Teoría Antropológica de lo Didáctico

TFM – trabajo de fin de máster

TO – Teoría de la Objetivación

UB – Universitat de Barcelona

UNAE – Universidad Nacional de Educación

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE CUADROS

ÍNDICE DE FIGURAS

CAPÍTULO I: JUSTIFICACIÓN, RELEVANCIA, PROBLEMA Y OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

RESUMEN

En el apartado 1 de este capítulo se presenta el origen y las principales características del problema de investigación y se justifica su relevancia. El origen se relaciona con mi interés en la mejora de la enseñanza de las matemáticas en el Ecuador y, sobre todo, en la mejora de la formación del profesorado de matemáticas como un elemento clave para conseguir la mejora de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en el Ecuador. Este interés me llevó a plantear un problema de investigación relacionado con la necesidad de profundizar en la formación, tanto inicial como continua, de los profesores que imparten matemáticas en el Ecuador; haciendo énfasis en el desarrollo de la reflexión sobre su práctica docente. En referencia a la reflexión sobre la práctica docente, la revisión de la literatura internacional muestra que el profesorado tiene dificultades para interpretar aspectos epistémicos de las tareas y para identificar su potencial educativo. Ahora bien, en el Ecuador hay poca investigación sobre la reflexión del profesorado sobre su práctica, por tanto, es relevante investigar si estas dificultades también se dan en el profesorado ecuatoriano. En esta línea, concreté mi problemática de investigación en la enseñanza y el aprendizaje del criterio "implementar una muestra representativa de la complejidad del objeto matemático que se quiere enseñar", en procesos de formación implementados con profesores de secundaria de matemáticas de Ecuador en activo y en la Universidad de Cuenca en la formación inicial de docentes en el nivel de la Educación General Básica y el Bachillerato.

A continuación, en el segundo apartado, se hace una diagnosis de las debilidades de la formación inicial y continua de los profesores de matemáticas de secundaria de Ecuador y se comenta la política que ha seguido el Ministerio de Educación de Ecuador para intentar solucionarlas. Se señalan tres grandes deficiencias en la formación del profesorado de matemáticas: 1) el bajo nivel académico de las instituciones encargadas de esta instrucción, lo cual repercute en una débil formación en matemáticas y su didáctica de los profesores formados en estas instituciones. 2) la poca cantidad de contenidos de la especialidad de matemáticas y de su didáctica contemplados en el currículum de las instituciones que forman profesores y 3) el escaso número de profesores de primaria y secundaria con titulación de máster. Con relación a la tercera debilidad, una de las acciones para la mejora de la formación de los profesores realizadas por el Ministerio de Educación ha sido firmar convenios con universidades españolas para que oferten en el país maestrías en Didáctica de las Matemáticas, siendo una de estas maestrías ofertada por la Universitat de Barcelona (UB).

En el apartado 3 se presentan los contextos institucionales donde se ha realizado los procesos formativos investigados, Se trata de programas de formación realizados en las siguientes instituciones que

presentan algunas de las características de la formación de los profesores y futuros profesores de matemáticas de secundaria del ecuador comentadas en el apartado anterior: a) Máster de Formación del Profesorado de Educación Secundaria en el Ecuador en la especialización Matemáticas, impartido por la Universitat de Barcelona en la primera edición y por la Universitat de Barcelona y la Universidad Nacional de Educación de Ecuador en la segunda edición y b) Carrera de pedagogía de las ciencias experimentales: matemáticas y física de la Universidad de Cuenca.

En el apartado 4, dado que los procesos formativos diseñados e implementados en estos dos contextos institucionales se han enfocado al desarrollo de la reflexión sobre la práctica del profesorado, se hace un breve resumen del referente teórico usado para el desarrollo de la reflexión sobre la práctica. En estos ciclos formativos se enseña el constructo criterios de idoneidad didáctica (desglosado en componentes e indicadores) como pauta para organizar la reflexión sobre la práctica. En particular, se hace énfasis en la enseñanza y aprendizaje del uso del componente "Representatividad de la complejidad del objeto matemático a enseñar" del criterio de idoneidad epistémica, entendido como plurisignificación, utilizando como contexto de reflexión diferentes objetos matemáticos contenidos en el currículo.

En el apartado 5 se presentan los objetivos de la investigación. Se trata de un objetivo general que se concreta en cinco objetivos específicos. Estos objetivos parten de la idea de que es relevante desarrollar el diseño y la implementación de ciclos formativos que promuevan la realización de análisis valorativos de procesos de instrucción por parte de los profesores (en formación o en servicio) utilizando la herramienta criterios de idoneidad didáctica e investigar cómo se desarrolla la competencia de análisis de la idoneidad didáctica en estos dispositivos formativos. En particular, se hace énfasis en la enseñanza y aprendizaje del uso del componente "representatividad de la complejidad del objeto matemático a enseñar" del criterio de idoneidad epistémica, utilizando como contexto de reflexión diferentes objetos matemáticos contenidos en el currículo de secundaria.

En el apartado 6 se presenta un breve resumen de la metodología seguida: sus características generales (cualitativa y con muestras intencionales), las fuentes de información y la metodología específica para cada uno de los cinco objetivos específicos previstos.

Por último, en el apartado 7 se explica la estructura de la memoria de investigación que se presenta organizada en 9 capítulos. Después del capítulo 1, siguen siete capítulos donde se presentan las publicaciones que constituyen la tesis. Los capítulos 2-4 se han realizado en el contexto de la formación continua del profesorado de secundaria de matemáticas del Ecuador. Los capítulos 5-7 son investigaciones que se han realizado en el contexto de la formación inicial del profesorado de secundaria de matemáticas del Ecuador. El capítulo 8 es una presentación conjunta de las publicaciones de los capítulos 2-6 que permite tener una visión global sobre las publicaciones que constituyen esta tesis. Finalmente, en el capítulo 9 se exponen las conclusiones obtenidas para *cada uno de los objetivos propuestos, la difusión del trabajo realizado, las limitaciones encontradas y las posibles líneas de investigación futuras.*

1.1 Introducción

El problema de investigación nace de mi interés en la mejora de la enseñanza de las matemáticas en el Ecuador y, sobre todo, en la formación del profesorado de matemáticas como un elemento clave para conseguirla, dados los malos resultados obtenidos por la mayoría de los alumnos en esta materia. Conseguir esta mejora conlleva la necesidad de una reflexión profunda sobre los conocimientos y las competencias que necesitan los profesores para enseñar esta materia.

Como profesora de la Carrera de Pedagogía en Ciencias Experimentales de la Universidad de Cuenca este interés general se concreta, en primer lugar, en una mejora de la formación del futuro profesorado que enseñará matemáticas en la secundaria y, en segundo lugar, en la mejora de la formación continua del profesorado que está enseñando esta materia actualmente.

Los antecedentes que han dado lugar a este estudio son:

1. La reforma educativa ecuatoriana y su actualización en el 2016 no ha obtenido los resultados positivos esperados en el área de las matemáticas, como se ha evidenciado en el último informe de las pruebas PISA-D, donde el Ecuador obtuvo un rendimiento muy bajo en matemáticas, evidenciando que los alumnos de secundaria no tienen los conocimientos ni las competencias requeridas para participar, de manera satisfactoria, en la sociedad del saber.

2. La formación del profesorado si bien en teoría debería ser coherente con el modelo de formación de destrezas con criterios de desempeño, propuesto en el currículo ecuatoriano, en la práctica no lo es. Este hecho tiene su origen, en mi opinión, en una falta de reflexión consensuada que dé primacía a una formación de un profesional flexible y reflexivo, que sea capaz de reflexionar sobre su práctica para elaborar una solución a sus problemas profesionales y asegurar su aplicación. Esta realidad conlleva la necesidad de profundizar en la formación, tanto inicial como continua, de los profesores que imparten matemáticas en el Ecuador; haciendo énfasis en el desarrollo de la reflexión sobre su práctica docente.

3. En referencia a la reflexión sobre la práctica docente, la revisión de la literatura internacional muestra que el profesorado tiene dificultades para interpretar aspectos epistémicos de las tareas y para identificar su potencial educativo. Si bien en el Ecuador hay poca investigación sobre la reflexión del profesorado sobre su práctica, mi amplia experiencia en la

formación del profesorado (primero en la formación continua del profesorado de matemáticas de secundaria, y, después, como profesora de la Universidad de Cuenca en la formación inicial de docentes en el nivel de la Educación General Básica Superior y el Bachillerato) es que estas dificultades también se dan en el profesorado ecuatoriano, en particular la reflexión sobre los aspectos epistémicos.

4. Los tres antecedentes acabados de comentar fueron el inicio de una problemática de investigación que me interesó mucho. Por una parte, se trataba de conseguir que los profesores desarrollaran la competencia matemática de sus alumnos, lo cual implicaba una cierta reflexión de tipo epistémico sobre la complejidad de los contenidos a enseñar; pero, por otra parte, este tipo de reflexión presenta muchas dificultades para los profesores tal como lo señala la investigación internacional sobre la formación del profesorado de matemáticas.

5. La profundización sobre esta problemática me llevó a documentar que las reflexiones sobre la complejidad de los objetos matemáticos (entendida como diversidad de significados), y la conexión de los componentes de esta complejidad, son frecuentes en muchos de los enfoques teóricos utilizados en el área de la Educación Matemática. Como consecuencia de estas reflexiones hay una tendencia a que la formación del profesorado de matemáticas contemple secuencias didácticas para que los profesores tengan en cuenta la complejidad del objeto matemático a enseñar.

6. Esta problemática de investigación que iba definiendo tenía muchos aspectos en común con los principios asumidos por el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemáticos (EOS). Por esta razón, me fui interesando en la agenda de investigación que proponía dicho enfoque, en particular en la respuesta a una de las preguntas que ha sido el motor de desarrollo del EOS: ¿Qué es un objeto matemático y cuál es su significado en una determinada institución? En el EOS se da una respuesta a la pregunta anterior en la que la noción de complejidad del objeto matemático y la de articulación de los componentes de dicha complejidad juegan un papel esencial. En particular, en el EOS se ha desarrollado el constructo idoneidad didáctica de un proceso de instrucción. Dicho constructo se compone en seis criterios de idoneidad parciales, uno de los cuales es el criterio de idoneidad epistémica, desglosados en componentes e indicadores; siendo uno de los componentes del criterio de idoneidad epistémica tener en cuenta una muestra representativa de la complejidad del objeto que se quiere enseñar (entendida como una pluralidad de significados).

7. En diferentes procesos de formación de profesores de matemáticas de España, México,

Brasil, Chile, Panamá, Costa Rica, Venezuela y Argentina, se han realizado un conjunto de investigaciones que tienen como finalidad investigar el uso del constructo criterios de idoneidad didáctica, propuestos por el EOS, como herramienta para organizar la reflexión del profesor sobre su práctica, cuando esta reflexión está orientada hacia la valoración y mejora de dicha práctica. En esta línea, concreté mi problemática de investigación en la enseñanza y el aprendizaje del criterio "implementar una muestra representativa de la complejidad del objeto matemático que se quiere enseñar", en procesos de formación implementados con profesores de secundaria de matemáticas de Ecuador y con futuros profesores del nivel de la Educación General Básica Superior y el Bachillerato de la Universidad de Cuenca.

8. En esta investigación se han desarrollado diferentes procesos formativos con la participación de profesores en formación inicial y continua ecuatorianos y desde distintos espacios académicos como, por ejemplo, las cátedras de la Universidad de Cuenca que forman parte de la malla curricular de la carrera de Pedagogía en Ciencias Experimentales (asignaturas, práctica pre profesional, proceso de titulación, etc.); de esta manera se ha logrado conocer la percepción de los profesores en activo y de los futuros profesores de matemáticas sobre la complejidad de los objetos matemático y su posible aplicación en la práctica docente, con la finalidad de mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la Educación General Básica (EGB) y el Bachillerato General Unificado (BGU).

En la memoria que sigue de la investigación realizada se amplían estas consideraciones y los resultados de investigación obtenidos muestran la importancia de trabajar la reflexión sobre la complejidad de los objetos matemáticos a enseñar en la formación de profesores de matemáticas del Ecuador. Se trata de resultados que, por una parte, ayudan a aumentar el conocimiento sobre el proceso de enseñanza del componente "muestra representativa de la complejidad del objeto matemático a enseñar" en la formación del profesorado de matemáticas ecuatoriano, y, por otra parte, son resultados sobre las instituciones colaboradoras, en particular la Universidad de Cuenca, que pueden ser de gran ayuda para los profesores que las integran.

1.2 Características de la formación de los profesores y futuros profesores de matemáticas de secundaria del Ecuador

La educación matemática en el Ecuador ha pretendido avanzar hacia la excelencia académica, para lo cual, desde hace unos diez años atrás, se vienen implementado políticas educativas que buscan conseguir una educación primaria universal, erradicar el hambre y la pobreza, y corregir las desigualdades de género (Cortez, 2014), cuya consecución depende en buena medida de la educación de la sociedad en general.

En este escenario, a partir del 2010, se establece la reforma actual, tanto en la educación general básica (EGB) como en el bachillerato general unificado (BGU): el modelo de formación de destrezas con criterios de desempeño, enmarcado en una estructura curricular claramente definida para los diferentes niveles y subniveles, iniciando desde un nivel macro, Currículo Nacional Obligatorio, seguido de un nivel meso, referido a las instituciones educativas quienes aplican el Currículo Institucional, a través del Proyecto Curricular Institucional (PCA) y el Plan Curricular Anual (PCA) y finalmente el nivel micro, que es el currículo de aula, en donde el docente es quien se responsabiliza de la planificación y las adaptaciones curriculares.

Los niveles meso y micro son flexibles, lo que facilita la propuesta de mejora de los procesos de instrucción por parte de los docentes, y se complementan con la formulación de criterios de evaluación, en donde se pretende garantizar una mejora en los resultados de aprendizaje, permitiendo que los estudiantes alcancen los niveles de logro en la educación y por ende, se consiga el objetivo general de perfil de salida del bachiller ecuatoriano.

Ahora bien, la propuesta descrita, al parecer, no refleja en los estudiantes estos logros de aprendizaje; un ejemplo de esta realidad son algunos resultados obtenidos en evaluaciones tanto internas como externas. El último informe de los países que participaron en PISA-D, en donde el Ecuador tuvo el mejor desempeño en todas las materias, sostuvo que la mayor parte de los estudiantes no llegaron al nivel 2 en matemáticas; todo lo cual muestra que los alumnos de secundaria no tienen los conocimientos, ni las habilidades necesarias para participar de manera satisfactoria en la sociedad del saber.

Con la finalidad de mejorar estos resultados, y otros similares en diferentes países, la *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI) viene realizando periódicamente el *Capacity and Network Project* (CANP), que es un proyecto de desarrollo de la Educación matemática en regiones donde se considera que hay debilidades importantes. La primera edición tuvo lugar en Mali, el 2011. El CANP 2 fue en Costa Rica, en el 2012; el CANP 3 en Camboya, en el 2013; y el CANP 4 en Tanzania, en el 2014. En 2016, se realizó el CANP 5 en Lima, orientado a la subregión sudamericana andina conformada por Bolivia, Ecuador, Paraguay y Perú. En este evento, la representación de Ecuador presentó un informe de la situación de la enseñanza de las matemáticas en el país en el que se señalan debilidades y fortalezas, siendo la formación de profesores, tanto la inicial como la permanente, uno de los aspectos a mejorar (Martínez Jara et al., 2018).

En este informe se señalan tres grandes deficiencias en la formación del profesorado de matemáticas: 1) el bajo nivel de las instituciones encargadas de esta instrucción, lo cual repercute en una débil formación en matemáticas y su didáctica de los profesores formados en estas instituciones. 2) la poca cantidad de contenidos de la especialidad de matemáticas y de su didáctica contemplados en el currículum de las instituciones que forman profesores y 3) el escaso número de profesores de primaria y secundaria con titulación de máster.

En este informe se señala que en el Ecuador la formación del docente en el área de matemáticas en la actualidad la realizan las universidades y los títulos que éstas otorgan son: Licenciaturas en Ciencias de la Educación con Mención en Física - Matemáticas o Licenciaturas en Física - Matemática y Licenciaturas en Ciencias de la Educación o en Educación General Básica; los dos primeros están habilitados para enseñar de octavo a décimo de Educación General Básica (EGB) y en Bachillerato General Unificado (BGU), lo que anteriormente se llamaba secundaria, etapa en la que se enfocará este estudio. Los segundos en cambio están habilitados para enseñar de primero a séptimo y en ciertos casos hasta décimo de EGB dependiendo de la universidad, el equivalente a lo que era la educación primaria (Martínez Jara et al., 2018). En el Ecuador existen 31 universidades que ofrecen carreras de tercer nivel (nivel de grado) vinculadas con la educación, pero solo 11 de ellas las tienen con mención en ciencias exactas (SENESCYT, 2019), siendo la Universidad de Cuenca una de ellas.

En el 2013 todas las universidades del Ecuador fueron sometidas a un proceso de acreditación por el anterior Consejo de Evaluación, Acreditación y Aseguramiento de la Calidad de la Educación de la Educación Superior (CEAACES). Esta acreditación asignó categorías (A, B, C y D) a cada universidad. Con fecha abril del 2016, las universidades en la categoría C y D eran el 55% del total.

El hecho de que más de la mitad de las universidades que imparten la carrera de educación estén en las dos últimas categorías, no garantiza la formación adecuada del docente tanto en educación básica como en la especialidad de matemáticas (CEAACES, 2014). Por tanto, uno de los problemas importantes relacionados con la formación inicial de profesores de matemáticas en Ecuador es el bajo nivel de las instituciones encargadas de esta instrucción, lo cual repercute en una débil formación en matemáticas y su didáctica de los profesores formados en estas instituciones. Todos estos puntos conllevan a una instrucción de tercer nivel (grado) deficiente, y hacen plausible inferir que puede ser una de las causas de que, en la última evaluación realizada por el Instituto Nacional de Evaluación Educativa (INEVAL) que se realizó a los profesores fiscales, el promedio de nota fue 664 sobre 1000 en el área de matemáticas (INEVAL, 2020) (el aprobado se considera a partir de 600). Se trata de unos resultados preocupantes, ya que muestran poco conocimiento y competencia matemática en los profesores.

El currículo de las carreras que forman a los profesores evidencia otro de los problemas relevantes de la formación inicial de profesores de matemáticas: la poca cantidad de contenidos de esta especialidad y de su didáctica contemplados en el currículum. La totalidad del peso del área de las matemáticas y su didáctica es del 47% del total de toda la carrera (en este caso carrera de matemáticas y física). Para la educación básica, en cambio, la situación es más grave ya que las matemáticas y su didáctica alcanzan solo el 5%, debido a que la carrera se centra en la pedagogía y métodos para todas las áreas temáticas.

Por otro lado, cada uno de los programas de las carreras de Licenciatura en Pedagogía de las Ciencias Experimentales (matemáticas – física) han considerado de igual importancia la parte teórica como la práctica.

Los estudios de formación inicial siguen la estructura tradicional en la que se les enseña a los futuros profesores de matemáticas, por un lado, pedagogía general y, por el otro, matemáticas, pero el nexo entre estos dos tipos de contenidos (la pedagogía o didáctica de las matemáticas) prácticamente no tiene cabida. Expresado de otra manera, el desarrollo de la Didáctica de las Matemáticas como disciplina científica en estas últimas décadas casi no ha tenido impacto en la formación de los futuros profesores ecuatorianos.

Una de las razones del limitado impacto de la Didáctica de la Matemáticas (DM) en la formación de futuros profesores es que el país, en su conjunto, ha permanecido aislado del desarrollo de esta área. Algunos ejemplos de este aislamiento son que: 1) no se han formado sociedades de profesores de secundaria en el Ecuador (siendo uno de los pocos países donde esto pasa), 2) casi no hay revistas de DM, tanto de profesores como de investigación, 3) hasta hace poco no ha habido tesis doctorales en el país relacionadas con esta materia, 4) la comunidad ecuatoriana casi no asiste a los congresos internacionales, 5) tampoco hay congresos nacionales, etc. (Martínez et al., 2016).

Si bien el CEAACES (2015) reclama que haya una relación entre la investigación en educación y la práctica preprofesional de los futuros docentes, mediante la metodología de investigación-acción; el hecho es que sobre investigación en educación matemática no existen líneas definidas en las universidades que forman profesores que hayan sido fructíferas y con incidencia clara en el sistema educativo.

Por otra parte, dados los resultados deficientes en cuanto a dominio de contenidos según los resultados del INEVAL arriba expuestos, el gobierno ha impulsado y financiado algunos cursos de capacitación, donde la mayoría de los profesores participantes son del sistema público y fiscal. En particular, el Ministerio de Educación (MINEDUC) desarrolló el Programa de Maestrías con Universidades Españolas, una de las cuales fue la Universitat de Barcelona.

Este programa también pretendía resolver uno de los aspectos en el que el gobierno de la nación se había propuesto incidir: el escaso número de profesores de primaria y secundaria con titulación de máster. Desde el 2014 el Ministerio de Educación – en convenio con las siguientes universidades españolas: Universidad de Barcelona, Universidad Autónoma de Madrid, la Universidad Complutense de Madrid y la Universidad Nacional de Educación a Distancia–, ofertó programas de maestrías que han beneficiado a alrededor de 2400 docentes, de los cuales 2322 profesores culminaron sus estudios (MINEDUC, 2015; Presidencia de la República del Ecuador, 2016). En una segunda fase se ofrecieron programas de maestría conjuntos entre una universidad ecuatoriana y una universidad extranjera. En concreto, durante los años 2017 – 2018, la Universidad Nacional de Educación (UNAE) del Ecuador en convenio con la Universidad de Barcelona (UB) implementaron una maestría internacional con la concesión de títulos de ambas instituciones (Yamamoto y Malaspina, 2018), hasta el 2020 en diferentes universidades obtuvieron sus postgrados 4606 profesores, donde 591 docentes han sido del área de matemática (MINEDUC, 2022).

En el caso del programa de maestrías impulsado por el gobierno de Ecuador, por una parte, se pretendía el desarrollo profesional de los participantes con el objetivo de mejorar su práctica docente y, por otra parte, se tenía por objetivo que el programa de formación permitiera que los participantes adaptasen su práctica a la reforma educativa que se había implantado en el país. Con relación al impacto en la práctica docente de los participantes en estas maestrías hay poca investigación, entre la que destaca la de Flores (2022). Esta autora investigó el impacto que produjo el programa de máster impartido por la UB, sobre la enseñanza de un determinado tópico: las funciones. Una de las conclusiones de esta investigación es que el docente que participó en estos másteres, si bien realiza una práctica didáctica descontextualizada, mecanicista y con insuficiente idoneidad didáctica, tiene la percepción de que implementan una enseñanza de las matemáticas contextualizada y constructivista y, además, con alta idoneidad didáctica.

A partir de septiembre de 2017, se implementa en la educación superior ecuatoriana, los rediseños de carrera, con la intención de mejorar la formación inicial, en donde, además de establecer el nombre de acuerdo a la norma emitida por el CINE, Pedagogía de las Ciencias Experimentales, se pretende organizar una propuesta curricular, centrada en la formación disciplinar y el componente educativo; siendo este escenario, uno de los contextos de esta investigación.

1.3 Contexto de la investigación

La investigación que se describe en esta memoria se ha realizado en procesos formativos de instituciones que presentan algunas de las características de la formación de los profesores y futuros profesores de matemáticas de secundaria del Ecuador comentadas en la sección anterior: a) Máster de Formación del Profesorado de Educación Secundaria en el Ecuador en la especialización Matemáticas, impartido por la Universitat de Barcelona en la primera edición y por la Universitat de Barcelona y la Universidad Nacional de Educación de Ecuador en la segunda edición y b) Carrera de pedagogía de las ciencias experimentales: matemáticas y física de la Universidad de Cuenca.

Máster de Formación del Profesorado de Educación Secundaria en el Ecuador

Este máster tenía como objetivo la formación continua y profesionalización docente. Dado su aspecto profesional, el máster se extendió a lo largo de dos años y estaba dividido en tres bloques: a) el bloque general (15 créditos *European Credit Transfer System*, ECTS) que incluye asignaturas de la psicología, sociología, orientación y sistema educativo ecuatoriano; b) el bloque específico (21 créditos ECTS) que contempla las asignaturas de la disciplina (matemática) y su didáctica y; c) el bloque de prácticum y trabajo de fin de máster (TFM) (24 créditos ECTS) que se orienta al ejercicio de articulación entre la teoría y la práctica.

Una de las asignaturas del bloque específico de este máster, titulada *Innovación e Investigación sobre la Propia Práctica*, impartida en el segundo año, tenía como principal objetivo presentar propuestas de innovación y herramientas de valoración de la idoneidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas que permitan al profesor la mejora de su propia práctica. Además, la asignatura pretendía hacer una iniciación a la investigación en Didáctica de las Matemáticas y a la difusión de sus resultados. La noción de idoneidad didáctica desglosada en criterios, componentes e indicadores fue utilizada posteriormente por los participantes en su Trabajo de Fin de Máster.

Por otro lado, el TFM debió ser un trabajo original, autónomo e individual que permitiese al estudiante mostrar de forma integrada los contenidos formativos recibidos y las competencias generales asociadas al título de Máster en Formación del Profesorado de Secundaria de Matemáticas, y debía contribuir a reflexionar y profundizar en el análisis de su propia práctica, posibilitando proponer elementos de mejora de esta. Dicha mejora se debía de justificar a partir de la reflexión de la comunidad de investigación en Educación Matemática sobre el tema que se ha desarrollado en su periodo de prácticas.

Un elemento clave del TFM es su relación directa con la experiencia escolar realizada previamente (el diseño y la implementación de una unidad didáctica). En el TFM se realiza la implementación de una unidad didáctica, se hace una valoración y se formulan lineamientos de mejora justificada de dicha unidad didáctica.

Carrera de pedagogía de las ciencias experimentales: matemáticas y física de la Universidad de Cuenca

La Carrera que forma Licenciados en Pedagogía de las Ciencias Experimentales: Matemáticas y Física estudia los contextos, problemas, procesos y fenómenos socio-educativos en el ámbito de la enseñanza-aprendizaje de la Física y las Matemáticas en los niveles de Educación General Básica Superior y de Bachillerato, con una visión integral.

La Carrera consta de ocho semestres y parte de los procesos formativos investigados se han implementado desde algunas de las asignaturas de estos ciclos. En concreto, en la asignatura de Álgebra Superior del segundo semestre, Prácticas laborables II y Didáctica de las Matemáticas del sexto semestre.

En el plan de Carrera de Ciencias Experimentales de la Universidad de Cuenca, los futuros profesores realizan cuatro prácticas preprofesionales en centros de secundaria: en la primera, fundamentalmente se hacen prácticas de observación y apoyo docente; en la segunda, diseñan e implementan una secuencia de tareas de aproximadamente unas 12 horas de clase; en la tercera práctica vuelven a diseñar e implementar una secuencia de tareas de aproximadamente unas 12 horas de clase, pero ahora después de haber cursado asignaturas de didáctica de las matemáticas que les da herramientas teóricas que no se tenían en la práctica dos y; la cuarta práctica preprofesional consiste en la colaboración con proyectos de vinculación con la sociedad organizados por la universidad (por ejemplo, un proyecto de apoyo pedagógico a estudiantes adultos). En su práctica preprofesional el futuro profesor cuenta con dos tutores, el de la universidad (Docente tutor) y el profesor de la institución donde se realiza la práctica (Docente orientador).

1.4 Referente teórico apara el desarrollo de la reflexión sobre la práctica

Los procesos formativos diseñados e implementados en estos dos contextos institucionales se han enfocado al desarrollo de la reflexión sobre la práctica del profesorado. Dicha reflexión es una estrategia clave para el desarrollo profesional docente que sirve, tanto para el análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, como para su mejora. Dewey (1989), por ejemplo, afirma que un valor propio del pensamiento reflexivo es que nos libera de la actividad meramente impulsiva y puramente rutinaria, es decir, nos permite dirigir nuestras actividades con previsión y fines claros. De la misma forma, Schön (1992) resalta la necesidad de la formación de profesionales reflexivos, enfatizando que los centros de formación de profesores deben repensar la epistemología de la práctica y los fundamentos pedagógicos en que se basan sus planes de estudio, al mismo tiempo que deben favorecer cambios en sus instituciones para que abran un espacio para la práctica reflexiva, como un elemento clave en la formación de sus profesionales. A su vez, Brockbank y McGill (2002) afirman que la reflexión es una competencia que nos permite aprender de la práctica y mejorarla. En esta misma línea, Perrenoud (2004) argumenta que, para conseguir profesores reflexivos, se necesita combinar aspectos diferentes. Por un lado, es necesario que el profesor tenga un método de reflexión (que en general puede ser similar en diferentes asuntos) y, por otro lado, son necesarias estructuras conceptuales específicas de cada disciplina.

Según Breda, Font y Pino-Fan (2018), muchas tendencias sobre la formación de profesores, sea inicial o continua, sugieren la investigación de los docentes y la reflexión sobre la práctica docente como fundamental para el desarrollo profesional y la mejora de la enseñanza. Desde la Didáctica de la Matemática surgen diferentes propuestas que proporcionan marcos conceptuales relacionados con el desarrollo de la reflexión, tales como: la competencia de mirar con sentido (Mason, 2002), la metodología del Estudio del Concepto (Davis, 2008), el conocimiento matemático para una enseñanza de matemáticas de calidad (Hill et al., 2008), la mirada profesional (Llinares, 2012), el Lesson Study (LS) (Isoda, Arcavi y Lorca, 2007) y los Criterios de Idoneidad Didáctica (CID) del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción Matemáticos (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2019; Font, Planas, y Godino, 2010).

En la línea de potenciar la reflexión del profesor sobre su propia práctica, el constructo CID (y su desglose en componentes e indicadores), propuesto en el marco del EOS (Godino, Batanero y Font, 2019), puede servir para guiar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y para evaluar sus implementaciones. En este sentido, los CID son, en primer lugar, unos principios que indican cómo las cosas deben ser hechas y, en segundo lugar, sirven para valorar el proceso de instrucción realizado (Breda, Font y Lima, 2015; Breda, Font y Pino- Fan, 2018). Los CID pueden ser utilizados como herramienta metodológica para organizar la reflexión del profesor, tal como se viene haciendo en diferentes procesos de formación en algunos países (Esqué y Breda, 2021; Breda, Pochulu, Sánchez y Font; Font, Breda y Pino-Fan, 2017; Morales-López y Araya-Román, 2020; Morales-Maure, Durán-González, Pérez-Maya y Bustamante, 2019; Pochulu, Font y Rodríguez, 2016; Ramos, 2006; Seckel, 2016).

En esta línea, el presente trabajo de investigación tiene como objetivo desarrollar el diseño y la implementación de ciclos formativos que promuevan la realización de análisis valorativos de procesos de instrucción por parte de los profesores (en formación o en servicio) utilizando la herramienta criterios de idoneidad didáctica e investigar cómo se desarrolla la competencia de análisis de la idoneidad didáctica en estos dispositivos formativos. En particular, se hace énfasis en la enseñanza y aprendizaje del uso del componente <<representatividad de la complejidad del objeto matemático a enseñar>> del criterio de idoneidad epistémica, utilizando como contexto de reflexión, los diferentes objetos matemáticos contenidos en el currículo. A través de los dispositivos de formación, se reflejará la necesidad de abordar la complejidad del objeto matemático que se quiere enseñar, argumentada de varias formas, siendo una de las más importantes el hecho de que, en muchos currículos, se exige que las matemáticas enseñadas se apliquen a la resolución de problemas (en especial, problemas de contexto extra matemático). Se les hace observar a los participantes que los problemas donde el uso de un determinado objeto matemático es determinante, son de diversos tipos y que, para su resolución, se ponen en funcionamiento diferentes significados parciales del objeto que se pretende enseñar. Por tanto, o bien se enseña una muestra representativa de significados parciales del significado global del objeto matemático en cuestión, o bien sólo los alumnos más creativos pueden aplicar el objeto a los diversos problemas.

1.5 Objetivos de la investigación

1.5.1. Objetivo general

OG: Desarrollar el diseño, la implementación y el análisis de ciclos formativos que promuevan la realización de análisis valorativos de procesos de instrucción por parte de los profesores (en formación o en servicio) utilizando la herramienta criterios de idoneidad didáctica e investigar cómo se desarrolla el análisis didáctico en estos dispositivos formativos. En particular, se hace énfasis en el desarrollo de la reflexión docente acerca a la enseñanza y aprendizaje de los objetos matemáticos a través del uso del componente “representatividad de la complejidad del objeto matemático a enseñar” del criterio de idoneidad epistémica.

1.5.2. Objetivos específicos

Este objetivo general se concreta en cinco objetivos específicos, siendo los dos primeros objetivos instrumentales para conseguir los tres últimos.

OE1: Construir una posición compartida entre los directores de tesis y la doctoranda acerca de las diferentes maneras de entender la complejidad de los objetos matemáticos y sobre criterios para diseñar secuencias didácticas para la enseñanza del componente representatividad de la complejidad.

OE2: Elaboración de un banco de tareas para su posible incorporación a ciclos formativos direccionados a la formación continua de profesores de matemáticas y a la formación inicial de profesores de matemáticas, que haga énfasis en la enseñanza y aprendizaje del uso del componente “representatividad de la complejidad del objeto matemático” del criterio de idoneidad epistémica

OE3: Diseñar e implementar ciclos formativos (CF) en la formación continua de profesores de matemáticas de secundaria en ejercicio, acerca al uso del uso del componente “representatividad de la complejidad del objeto matemático” del criterio de idoneidad epistémica.

OE4: Diseñar e implementar ciclos formativos (CF) en la formación inicial de profesores de educación básica superior y bachillerato de matemáticas - para la enseñanza y aprendizaje del componente “representatividad de la complejidad del objeto matemático” del criterio de idoneidad epistémica, para usarlo en la reflexión de secuencias didácticas diseñadas e implementadas para la enseñanza y el aprendizaje de diferentes objetos matemáticos contemplado en el currículo de secundaria ecuatoriano.

OE5: Investigar la reflexión que hacen tanto los profesores en servicio como los futuros profesores de matemáticas ecuatorianos acerca de la “representatividad de la complejidad del objeto matemático” del criterio de idoneidad epistémica, al usarlo en la reflexión de secuencias didácticas diseñadas e implementadas en sus prácticas preprofesionales.

1.6 Metodología

La investigación es primordialmente cualitativa, puesto que estamos interesados primero en describir, sobre todo, el desarrollo de un aspecto parcial de la competencia en análisis e intervención didáctica de los profesores y futuros profesores ecuatorianos (analizar y valorar la idoneidad epistémica de procesos de instrucción). Se trata de una investigación que tiene, además, un componente de desarrollo ya que se pretende, por un lado, proporcionar conocimiento detallado acerca del estado actual de la formación de profesores de secundaria (en formación y en servicio) en Ecuador y, por otro lado, elaborar recursos didácticos específicos para mejorar la formación de estos profesores.

Las muestras son intencionales ya que los ciclos formativos se han implementado con profesores de secundaria en el máster de Formación de Profesores de Secundaria de Matemáticas de Ecuador de Universitat de Barcelona durante sus dos ediciones y con futuros profesores de la Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales de la Universidad de Cuenca. Al ser una muestra intencional, si bien no es estadísticamente representativa, puede ofrecer información relevante para la formación de profesores en el Ecuador.

El registro de la información se ha obtenido mediante la grabación en video de algunas de las clases impartidas, la documentación grabada en la plataforma Moodle del campus virtual (presentaciones, lecturas, tareas y respuestas de los alumnos a las tareas, cuestionarios y respuestas de los alumnos a los cuestionarios) y material impreso.

Esta metodología cualitativa se ha concretado de diferente manera para cada objetivo específico. Para los objetivos 1 y 2, se ha hecho una revisión bibliográfica selectiva y, después de un análisis de las diferentes fuentes documentales, se ha construido una posición compartida entre los directores de tesis y la doctoranda acerca de las diferentes maneras de entender la complejidad de los objetos matemáticos y sobre criterios para diseñar secuencias didácticas para la enseñanza del componente representatividad de la complejidad. A su vez, se ha confeccionado un banco de tareas (algunas presentes en las fuentes consultadas y otras de diseño propio) correspondientes a bloques temáticos diferentes y que sirven para mostrar la pluralidad de significados de un objeto matemático, de sus tipos de representación y de los problemas donde se aplica.

Para los objetivos 3 y 4 se han diseñado e implementado ciclos formativos cuyo objetivo era introducir los CID para orientar la reflexión sobre la propia práctica. Para ello, se adaptó, a cada contexto institucional, la estructura habitual de un ciclo formativo cuyo objetivo es realizar un rediseño de la práctica docente, orientado a su mejora, usando la herramienta CID como referente teórico (Llinares et al., 2022). Dicho armazón ha sido la base para el diseño e implementación de ciclos formativos para el desarrollo de la reflexión del profesor sobre la mejora de su práctica, entre otros, en un grado de futuros profesores de primaria en Chile (Seckel, 2016; Seckel y Font, 2020), un máster de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria en España (Font, Breda y Pino-Fan, 2017; Esqué y Breda, 2021), un diplomado para maestros de primaria en servicio en Panamá (Morales-Maure, 2019; Morales-Maure, Durán-González, Pérez-Maya y Bustamante, 2019; García-Marimón, Morales-Maure, Diez-Palomar y Durán-González, 2021); y, combinado con la estrategia de desarrollo profesional Lesson Study, en la formación continua de profesores de educación básica en Brasil (Hummes, Font y Breda, 2019, Hummes, Breda y Font, 2022).

Para el último objetivo la metodología utilizada, básicamente, ha consistido en el análisis de contenido. Es decir, para el análisis de las respuestas se partía de categorías a priori: los diferentes tipos de significado del objeto matemático a enseñar, sus diferentes tipos de representaciones y una variedad de problemas en los que el uso de este objeto matemático era determinante para la resolución de la tarea (obtenidos a partir de fuentes documentales y de una triangulación de expertos) y se trataba de ver, por ejemplo, si, dado un determinado significado parcial del objeto matemático fijado previamente, los profesores pueden crear una tarea en la que este significado parcial sea indicado para su resolución. Por otra parte, podían emerger alguna nueva categoría (por ejemplo, un nuevo tipo de significado) que surgiera a posteriori como resultado del análisis de las respuestas.

1.7 Estructura de la memoria de investigación

Esta memoria de investigación se ha organizado en 9 capítulos. En el capítulo 1 se presenta el origen, las principales características del problema de investigación de esta tesis, su relevancia y los objetivos de investigación.

A continuación, siguen siete capítulos donde se presentan las publicaciones que constituyen la tesis que se presenta. Los capítulos 2-4 se han realizado en el contexto de la formación inicial del profesorado de secundaria de matemáticas del Ecuador. Los capítulos 5-7 son investigaciones que se han realizado en el contexto de la formación inicial del profesorado de secundaria de matemáticas del Ecuador. El capítulo 8 es una presentación conjunta de las publicaciones de los capítulos 2-7 que permite tener una visión global sobre las publicaciones que constituyen esta tesis.

Finalmente, en el capítulo 9 se exponen las conclusiones obtenidas para cada uno de los objetivos propuestos, la difusión del trabajo realizado, las limitaciones encontradas y las posibles líneas de investigación futuras.

CAPÍTULO II: ARTÍCULO CIENTÍFICO 1

2.1 Artículo publicado (en prensa)

Autores: Eulalia Calle, Adriana Breda y Vicenç Font.

Filiación: Universidad de Cuenca y Universidad de Barcelona.

Referencia: Calle, E., Breda, A., & Font, V. (2023). Significados parciales del teorema de Pitágoras usados por profesores en la creación de tareas en el marco de un programa de formación continua. *Uniciencia, 35* (1), en prensa.

2.2 Indexación de la revista

Articulo indexado en Emerging Sources Citation Index con Category Rank 78/134 en MULTIDISCIPLINARY SCIENCES, Scopus con CiteScore de 0,7 y FWCI de 3,63, DOAJ, Aquatic Science & Fisheries Abstracts (ASFA), DIALNET. Evaluada en: LATINDEX. Catálogo v2.0 (2018 -) Directory of Open Access Journals ERIHPlus LATINDEX. Catálogo v1.0 (2002 - 2017); REDIB. Red Iberoamericana de Innovación y conocimiento científico. Métricas en: SJR. SCImago Journal & Country Rank, Scopus Sources. Políticas OA: SHERPA/RoMEO. ICDS MIAR (2021): 10. Citas en Google Scholar: 19. Articulo realizado en el marco de los proyectos PGC2018-098603-B-I00 (MCIU/AEI/FEDER, UE) y REDICE18-2000 (ICE-UB).

2.3 Resumen del artículo científico 1

Este articulo atiende a los objetivos específicos 3 y 5 de esta tesis.

[Objetivo] El objetivo de este artículo es presentar resultados de una investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje del criterio “implementar una muestra representativa de la complejidad del objeto matemático que se quiere enseñar”, implementado con profesores de secundaria de matemáticas de Ecuador en un máster de formación continua. **[Metodología]** Después de explicar el proceso de instrucción en el que se enseñó este criterio, se presenta el análisis cualitativo de las respuestas a una de las tareas que se propuso a los alumnos de este máster: crear tareas en las que, para su resolución, se tenía que aplicar un determinado significado parcial del teorema de Pitágoras (el geométrico o el aritmético-algebraico), como ejemplo de evidencia del aprendizaje conseguido. **[Resultados]** Los resultados muestran que algunos alumnos del máster proponen tareas para trabajar el teorema de Pitágoras, pero no especifican ni justifican si las tareas diseñadas por ellos están relacionadas con el significado aritmético-algebraico, con el geométrico o con ambos; otros no propusieron ninguna tarea para

trabajar el significado aritmético-algebraico y un participante del máster no propuso ninguna tarea para trabajar el significado geométrico. También se observa que algunos crearon tareas que no se corresponden con el significado que señalan. **[Conclusiones]** Se concluye que los profesores tienen dificultades para crear una tarea y señalar el tipo del significado del teorema de Pitágoras que se debe usar para resolverla y que el significado geométrico es el que mejor relacionan con la tarea que proponen.

Palabras clave: formación continua de profesores; significados parciales del teorema de Pitágoras; idoneidad didáctica; creación de tareas.

2.4 Abstract

[Objective] The objective of this article is to present the results of a research on the teaching and learning of the criterion "implement a representative sample of the complexity of the mathematical object to be taught", implemented with high school mathematics teachers from Ecuador in a training master's degree. **[Methodology]** After explaining the instructional process in which this criterion was taught, the qualitative analysis of the responses to one of the tasks proposed to the students of this master's degree is presented: create tasks in which, for their resolution, they had to apply a certain partial meaning of the Pythagorean theorem (geometric or arithmetic-algebraic), as an example of evidence of learning achieved. **[Results]** The results indicate that some students of the master propose tasks to work on the Pythagorean theorem, but they do not specify or justify whether the tasks designed by them are related to the arithmetic-algebraic meaning, to the geometric one or to both; others did not propose any task to work on the arithmetic-algebraic meaning and one participant of the master's degree did not propose any task to work on the geometric meaning. It is also observed that some created tasks that do not correspond to the indicated meaning. **[Conclusions]** It is concluded that teachers have difficulties in creating a task and indicating the type of meaning of the Pythagorean theorem that should be used to solve it and that the geometric meaning is the one that best relates to the task they propose.

Keywords: continuous training of teachers; partial meanings of the Pythagorean theorem; didactic suitability; task creation.

2.5 Introducción

En la investigación en Educación Matemática se ha considerado un tema de interés el estudio de las conexiones matemáticas (Zengin, 2019). Los resultados de estas investigaciones han impactado en currículos de diferentes países Estados Unidos (National Council of Teachers of Mathematics, 2000 y 2013), Colombia (Ministerio de Educación Nacional, 1998), Turquía (Ministry of National Education, 2013), España (Generalitat de Catalunya, 2015) y Australia (Australian Curriculum Assessment and Reporting Authority, 2012), entre otros y el fomento de las conexiones se ha incorporado, en ellos, como un aspecto clave.

En los estudios sobre conexiones se consideran dos grandes tipos de conexiones matemáticas: las intra-matemáticas y las extra-matemáticas. Con relación a las primeras, a partir de los trabajos de Businskas (2008) en los que se proponían cinco tipos de conexiones, se han ido añadiendo otros tipos de conexiones (Flores y García, 2017) hasta llegar a los nueve tipos de conexiones propuestos en la Teoría Extendida de las Conexiones Rodríguez-Nieto, Rodríguez-Vásquez y Font (2020), siendo uno de los tipos considerados, siendo uno de los tipos considerados la conexión de significado, en particular la conexión entre distintos significados parciales de un mismo objeto matemático (que es el tipo de conexión que interesa en esta investigación).

La importancia que se da al establecimiento de conexiones matemáticas, en particular las intra-matemáticas, va de la mano con la importancia que se da a la reflexión sobre la complejidad de los objetos matemáticos. En mayor o menor medida, la problemática de la complejidad asociada al objeto matemático, y la articulación de sus componentes, está presente en casi todos los marcos teóricos del área de la Educación Matemática, en particular en el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción matemática (EOS, a partir de ahora) (Godino, Batanero y Font, 2019). En este enfoque se modeliza la complejidad de los objetos matemáticos por medio de sus pluri significaciones, entendidas como significados parciales, y de las conexiones que se establecen entre ellos (Godino, Burgos y Gea, 2021).

En la actualidad se han propuestos diferentes modelos de categorías de conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. Entre ellos, el Modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico Matemáticas (CCDM) basado en constructos del EOS (Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017). En este modelo se considera que, para que un alumno pueda ser competente en la aplicación de las nociones matemáticas, es necesario que en el proceso de instrucción se le enseñe una muestra representativa, metafóricamente hablando, y bien conectada de los diferentes significados parciales (o sentidos) de estas nociones. En consecuencia, se considera necesario que los profesores de matemáticas tengan en cuenta la complejidad del objeto matemático que se pretende enseñar (entendida ésta como pluralidad de significados parciales) en el diseño, implementación, valoración y rediseño de procesos de instrucción y que, por tanto, son necesarios procesos formativos que permitan a los profesores reflexionar sobre la complejidad de los objetos matemáticos y su posible aplicación en el diseño de tareas en su práctica docente con la finalidad de mejorarla.

Siguiendo esta línea de investigación, el presente trabajo presenta los resultados de una investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje del criterio *"implementar una muestra representativa de la complejidad del objeto matemático que se quiere enseñar"*, en un proceso de instrucción implementado con 95 profesores de secundaria de matemáticas de Ecuador. Para ello, se diseñó e implementó una secuencia de tareas orientada a reflexionar sobre los diferentes significados de algunos objetos matemáticos y su posible aplicación en la práctica docente, con la finalidad de mejorarla; y, para tener evidencias de su aprendizaje, se les propuso, entre otras, crear tareas (que podían ser problemas o simples ejercicios) en los que, para su resolución, se tenía que aplicar un determinado significado parcial del teorema de Pitágoras (el geométrico o el aritmético-algebraico). Por tanto, la investigación que se relata pretende, como primer objetivo, describir el proceso de instrucción realizado y, como segundo objetivo, evidenciar el aprendizaje logrado analizando si los participantes pueden, dados uno de los dos significados parciales diferentes del teorema de Pitágoras (el geométrico y el aritmético-algebraico), crear tareas en las que, para su resolución, sea necesario este significado parcial. Este segundo objetivo pretende contestar a la siguiente pregunta: ¿Dado un significado parcial del teorema de Pitágoras fijado previamente, pueden los profesores crear una tarea en la que este significado parcial sea indicado para su resolución?

El teorema de Pitágoras ha sido objeto de múltiples investigaciones. Loomis (1968), por ejemplo, clasifica 370 demostraciones del teorema. Las investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje de este teorema han usado diferentes marcos teóricos, y en muchas de ellas se han tenido en cuenta sus diferentes significados parciales de manera explícita (e.g., en Chaverri-Hernández et al., 2020), mientras que en otras se hace implícitamente. Ahora bien, no hemos encontrado ninguna en la que se proponga a los participantes la creación de una tarea en la que se deba usar un determinado significado parcial para su resolución, y tampoco ninguna sobre el teorema de Pitágoras en la formación de profesores de Ecuador.

Después de esta introducción, donde se explican los objetivos, se presentan, en la sección del marco teórico, algunos constructos del EOS. Seguidamente se expone la metodología cualitativa que se ha seguido y se explica la gestión del proceso de instrucción orientado a reflexionar sobre la complejidad de los objetos matemáticos y, también, cómo se analizaron las producciones de los participantes. A continuación, se presentan los resultados y una discusión sobre ellos y, por último, algunas consideraciones finales.

2.6 Marco teórico

En esta sección explicamos, de manera breve, el modelo CCDM y la subcompetencia de análisis de la idoneidad didáctica y, con más detalle, el componente "Muestra representativa de la complejidad del objeto matemático que se quiere enseñar" del criterio de idoneidad epistémica. Por último, explicamos los significados parciales que se han tenido en cuenta para describir la complejidad del teorema de Pitágoras.

El modelo CCDM y la Idoneidad Didáctica

En el modelo teórico de competencias y conocimientos didáctico-matemáticos del profesor de matemática (modelo CCDM), basado en constructos del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemáticos (Godino, Batanero y Font, 2019) se considera que las dos competencias clave del profesor de matemáticas son la competencia matemática y la competencia de análisis e intervención didáctica, siendo el núcleo fundamental de esta última (Breda, Pino-Fan y Font, 2017) diseñar, aplicar y valorar secuencias de aprendizaje propias y de otros, mediante técnicas de análisis didáctico y criterios de idoneidad, para establecer ciclos de planificación, implementación, valoración y plantear propuestas de mejora. Esta competencia general está formada por diferentes subcompetencias: 1) subcompetencia de análisis de la actividad matemática; 2) subcompetencia de análisis y gestión de la interacción y de su efecto sobre el aprendizaje de los estudiantes; 3) subcompetencia de análisis de normas y metanormas; y 4) subcompetencia de valoración de la idoneidad didáctica de procesos de instrucción. En este trabajo nos centraremos, sobre todo, en esta última subcompetencia, más en concreto en uno de sus componentes. La subcompetencia de valoración de la idoneidad didáctica de procesos de instrucción hace hincapié en el análisis de idoneidad didáctica. Esta noción se descompone en los siguientes criterios parciales de idoneidad didáctica (Font, Planas y Godino, 2010): idoneidad epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, mediacional e interaccional. En particular, la idoneidad epistémica se refiere, sobre todo, al grado de representatividad e interconexión de los significados institucionales implementados (o pretendidos) respecto de un significado de referencia. En Breda, Pino-Fan y Font (2017) se aporta un sistema de componentes e indicadores para cada criterio que sirve de guía de análisis y valoración de la idoneidad didáctica, que está pensado para un proceso de instrucción en cualquier etapa educativa.

La idoneidad epistémica y la complejidad de los objetos matemáticos

Tanto los componentes como los indicadores de los criterios de idoneidad didáctica se han confeccionado teniendo en cuenta las tendencias, los principios y los resultados de la investigación en el área de Didáctica de las Matemáticas (Godino, 2013; Breda, Font y Pino-

Fan, 2018). En particular, para la idoneidad epistémica se ha tenido en cuenta un principio fundamental del EOS que, con los matices propios de cada enfoque, es (o puede ser) asumido por otros enfoques teóricos del área. Nos referimos al principio que se puede formular de la siguiente manera: los objetos matemáticos emergen de las prácticas, lo cual conlleva su complejidad (Font, Godino y Gallardo, 2013; Rondero y Font, 2015). De este principio se deriva un componente (representatividad) cuyo objetivo es que se tenga en cuenta, dentro de lo posible, dicha complejidad en el diseño y rediseño de las secuencias didácticas.

El componente "Muestra representativa de la complejidad de los objetos matemáticos" (entendida la complejidad como pluralidad de significados parciales y la noción de muestra representativa en términos metafóricos), se refiere al grado de representatividad e interconexión de los significados institucionales implementados (o pretendidos) respecto de un significado de referencia (Giacomone, Godino y Beltrán-Pellicer, 2018). Cada uno de estos significados permite resolver tipos de tareas diferentes, por lo cual, si se quiere enseñar una muestra representativa de significados parciales es necesario presentar una muestra variada de tareas (Font, Breda y Seckel, 2017). Y, a su vez, si se quiere conseguir que el alumno sea competente en la resolución de una variedad de problemas, en particular extra-matemáticos, donde el objeto matemático en cuestión tiene un rol determinante, es necesario que los alumnos dispongan de una red de significados parciales bien conectados entre sí. En el siguiente cuadro se recogen los indicadores de dicho componente.

Tabla 1. El componente Representatividad y sus indicadores

Componente de la Idoneidad Epistémica	Indicadores
Muestra representativa de la complejidad del objeto matemático a enseñar	✓ Los significados parciales (definiciones, propiedades, procedimientos, etc.) son una muestra representativa de la complejidad de la noción matemática que se quiere enseñar ✓ Los significados parciales (definiciones, propiedades, procedimientos, etc.) son una muestra representativa de la complejidad contemplada en el currículo de la noción matemática que se quiere enseñar. ✓ Para uno o varios significados parciales seleccionados para su implementación, ¿se contempla una muestra representativa de problemas? ✓ Para uno o varios significados parciales seleccionados para su implementación, ¿se contempla el uso de diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico…), tratamientos y conversiones entre los mismos?

Nota: Font, Breda y Seckel (2017).

Primero hay que valorar si los significados parciales (definiciones, propiedades, procedimientos, etc.) seleccionados para su implementación son una muestra representativa de la complejidad de la noción matemática que se quiere enseñar (para ello la mirada se dirige a las matemáticas). En segundo lugar, dado que el currículo contempla parte de estos significados parciales, hay que valorar si la muestra de significados presentes en el proceso de instrucción son también una muestra representativa de los contemplados en el currículo (en el currículo en general, en la etapa o ciclo o en el curso donde se realiza la implementación) – la expresión muestra representativa, como se ha dicho, se está usando de manera metafórica y es muy contextual, es decir depende mucho del objeto que se enseña y del nivel donde se enseña; a un ejemplo de lo que se entiende por muestra representativa se puede poner con el objeto pendiente; en España en la etapa 12-16 años el currículo contempla cuatro significados de este objeto (geométrico, trigonométrico, algebraico y funcional), con alumnos de 15 años el geométrico, el algebraico y el funcional se podrían considerar una muestra representativa, en cambio no lo sería explicar solo el algébrico y el funcional. Una vez seleccionados uno o varios significados parciales para su implementación, valorar, como mínimo, si se contempla una muestra representativa de representaciones del objeto y de tareas en los que se aplica o emerge.

Investigaciones sobre la complejidad de diferentes objetos matemáticos y su uso en la formación de profesores

Utilizando como referente teórico el EOS se han realizado diferentes investigaciones para profundizar en la complejidad de diferentes objetos matemáticos, así como en la comprensión que tienen los estudiantes de dicha complejidad (*e.g.*, por ejemplo, Wilhelmi, Godino y Lacasta, 2007; Burgos, et al., 2020; Calle, Breda y Font, 2021). Por otra parte, en diferentes procesos de formación de profesores de matemáticas de España y Latinoamérica se han realizado investigaciones que tienen como finalidad investigar el uso del constructo criterios de idoneidad didáctica como herramienta para organizar la reflexión del profesor sobre su práctica, cuando esta reflexión está orientada hacia la valoración y mejora de la práctica (*e.g.*, Ferreres y Vanegas, 2015; Espinoza y Pochulu, 2019; Morales-Maure, Durán-González, Pérez-Maya y Bustamante, 2019; Burgos, Beltrán-Pellicer y Godino, 2020). Estas investigaciones han puesto de manifiesto diferentes aspectos con relación al componente "Muestra representativa de la complejidad del objeto matemático", de los cuales queremos señalar aquí los siguientes:

1. Aunque no se incorpore explícitamente en el proceso de instrucción la enseñanza de los componentes e indicadores de los criterios de idoneidad didáctica, algunos de ellos, y en particular el componente "Muestra representativa de la complejidad del objeto matemático",

están presentes de manera implícita cuando los profesores hacen valoraciones de sus propuestas didácticas (Breda, 2020).

2. Incorporar este componente para valorar la idoneidad epistémica de un proceso de enseñanza y aprendizaje no es tarea fácil, ni para los formadores ni para sus alumnos (profesores o futuros profesores), pero se puede enseñar como parte del proceso de formación del profesorado. Por ejemplo, para el caso de España, entre otros, Burgos, et al. (2018) y Esqué y Breda (2021) documentan procesos de formación sobre este componente, así como se hace en Seckel (2016) para el caso de Chile.

En Esqué y Breda (2021) se explica cómo usaron en su TFM este componente en la valoración y rediseño de una unidad didáctica de cara a futuras implementaciones alumnos de un Máster de Formación inicial de Profesorado de Secundaria de Matemáticas en España. Burgos et al. (2018), a su vez, cuando trabajan en el reconocimiento de niveles de algebrización en una tarea de proporcionalidad por futuros profesores de matemáticas de secundaria, focalizan la atención en la faceta epistémica del modelo CCDM, dando importancia al conocimiento de la pluralidad de los significados de los objetos matemáticos en diferentes contextos, llegando a determinar incluso que los docentes en su intento de lograr un nivel de algebrización, sacrifican la significación del enunciado del problema.

En Seckel (2016) se describe un proceso de formación de una formadora de profesores chilenos de educación básica con mención en matemática cuyo objetivo es desarrollar su competencia reflexiva y la de sus alumnos. Un aspecto que se trató en el diseño e implementación del ciclo formativo que recibió esta profesora fue cómo abordar el componente "Muestra representativa de la complejidad del objeto matemático" (proporcionalidad en este caso).

En relación con la creación de problemas con fines didácticos, en el marco del EOS, se considera que es particularmente importante que el profesor identifique los objetos matemáticos primarios en la solución de un problema y establezca interrelaciones entre ellos; es decir, entre la situación-problema, lenguajes, proposiciones, definiciones, procedimientos y argumentos. Así, se tendrán redes de objetos que intervienen y emergen, que se denominan configuraciones epistémicas (CE) cuando son consideradas desde una perspectiva institucional y configuraciones cognitivas (CC) cuando son consideradas desde una perspectiva personal. El análisis de estas configuraciones permite tener información acerca de la anatomía de la solución de un problema y permite, entre otros aspectos, crear nuevos problemas por variación de los dados inicialmente, o bien crear nuevos problemas directamente para que en su solución se tenga que utilizar un determinado objeto primario (o varios). Esta manera de entender la creación de problemas usando herramientas del EOS se ha incorporado al enfoque de creación de problemas desarrollado por Malaspina y colaboradores, siendo usado en diversas experiencias didácticas en el Perú, Ecuador y España (Malaspina, Rubio y Torres, 2019; Torres, 2020).

Complejidad del objeto matemático teorema de Pitágoras.

El teorema de Pitágoras es quizás la relación matemática, de cierta complejidad, más conocida por personas con una formación básica. En su versión geométrica dice que, en un triángulo rectángulo, siendo a la medida de la hipotenusa y b y c las medidas de los catetos, el área de un cuadrado construido tomando como lado la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre cada uno de los catetos (lo cual se representa como $a^2 = b^2 + c^2$). Esta mirada geométrica se va diluyendo cuando se hace una mirada un poco más aritmético-algebraica y el teorema de Pitágoras se entiende como una relación entre los números, o letras, que representan las longitudes de los lados del triángulo rectángulo. De esta manera, los números o letras substituyen a longitudes de segmentos o áreas de cuadrados y su función es representarlos. En esta mirada los símbolos representan magnitudes o relaciones entre ellas, pero, si bien se pueden realizar acciones sobre ellos, no se consideran objetos con independencia de la magnitud que representan. Los valores que pueden tener los símbolos son los que permiten las magnitudes y la situación que representan.

Si se profundiza en la mirada aritmético-algebraica, los valores que pueden tener los símbolos son los que se quiera considerar y no están condicionados por la situación que inicialmente representaban. Ahora los símbolos se consideran objetos sobre los cuales se pueden realizar acciones e incluso se puede prescindir de los objetos, relaciones y situaciones que representan. Esta mirada lleva a entender a, b, c como números o letras que no representan necesariamente magnitudes geométricas y que cumplen que $a^2 = b^2 + c^2$. Primero como ternas pitagóricas de número enteros, pasando por fracciones pitagóricas y llegando a ternas (a,b,c) que pueden no ser enteros, pero que cumplen la relación $a^2 = b^2 + c^2$.

Estas diferentes miradas al teorema de Pitágoras nos llevan a considerar que, en los primeros años de la secundaria, hay dos significados parciales del teorema de Pitágoras que permiten caracterizar su complejidad, por una parte: 1) el significado geométrico donde vamos a englobar todas las interpretaciones de a, b, c como longitudes de lados del triángulo y sus respectivos cuadrados como las áreas de los cuadrados que los tienen por lados y 2) el significado aritmético-algebraico donde a, b, c se van a entender como números o letras que no representan magnitudes geométricas y que cumplen que $a^2 = b^2 + c^2$. El nexo de conexión entre estos dos significados son las situaciones o problemas en los que se calculan longitudes de alguno de los lados del triángulo rectángulo, sin hacer mención explícita de sus áreas. Se trata de situaciones en las que se interrelacionan los dos tipos de significados ya que, por una parte se considera un referente geométrico, pero, por otra parte, se hace un tratamiento aritmético-algebraico para hallar la solución.

El teorema de Pitágoras presenta también interesantes conexiones con otros problemas y teorías, que pueden ampliar los significados parciales anteriores, pero que no serán considerados en este trabajo enfocado hacia los primeros años de la secundaria, que es donde por primera vez se enseña este teorema. Se trata de conexiones con nociones tales como la sección áurea, la simetría dinámica, espirales logarítmicas, trisección del ángulo, duplicación del cubo, cuadratura del círculo, determinación del valor de π, concepto de número irracional, polígonos y poliedros regulares y estrellados, teoría de números, constructibilidad de ángulos y polígonos, fracciones continuas, trigonometría, geometría analítica, vectores, espacios de Hilbert, etc. (Barroso Gavilán, 2001; González, 2008; Martínez, 2000).

2.7 Metodología

En ese apartado, presentamos primero, el contexto del estudio (profesores participantes, tipo de máster y características del alumnado), En segundo lugar, se narra la implementación de la secuencia didáctica, desde la óptica del docente que imparte la asignatura, en la que se engloba la tarea del teorema de Pitágoras analizada con detalle como evidencia de aprendizaje. Se trata de un tipo de ciclo formativo desarrollado en el marco del EOS (Breda, Pino-Fan y Font, 2017) para el desarrollo de las competencias y conocimientos del profesor. En este caso, dado que se pretendía enseñar a los alumnos del máster (profesores de secundaria en activo) la importancia de tener en cuenta, para la enseñanza y aprendizaje de un determinado objeto matemático, una muestra representativa de los diferentes significados de dicho objeto en el diseño, valoración y rediseño de secuencias de tareas, el proceso de instrucción se diseñó teniendo en cuenta el siguiente principio: para poder usar este componente en la valoración y rediseño de secuencias de tareas, el profesor, como mínimo, debe conocer los diferentes significados del objeto matemático a enseñar (significado holístico) y sus conexiones, debe conocer cuáles de estos significados están incluidos en el currículum y debe poder seleccionar y/o crear tareas en las que se tenga que usar un determinado significado del objeto matemático que se pretende enseñar. En el diseño de la secuencia didáctica participaron los tres autores y en la implementación tres formadores de profesores, dos de los cuales eran el segundo y tercer autor de este documento.

El tercer formador fue informado sobre la investigación y dio su consentimiento informado para participar.

A partir de los diarios de clase y de la documentación del campus virtual registrados en el año de 2018, para el primer objetivo, se ha realizado una narración, desde la perspectiva del formador, de lo que fue la enseñanza realizada. Esta implementación lo consideramos como un estudio de caso múltiple que se enmarca en las investigaciones en didáctica de las matemáticas de tipo cualitativo-descriptivo.

Por otra parte, para el segundo objetivo, se presenta la tarea propuesta por los formadores como ejemplo de evidencia de aprendizaje y se muestra cómo se han analizado las respuestas de los docentes, conservando su anonimato. En este caso, se trata de una metodología mixta ya que, por una parte, se consideran categorías cualitativas previas (dos tipos de significados) y otras emergentes de los datos y, por la otra, se hace una cuantificación de los tipos de respuestas.

Contexto del estudio

Han participado tres formadores que tenían a su cargo 95 profesores de matemáticas de instituciones educativas públicas y privadas de diferentes ciudades de Ecuador, en particular, profesores que trabajan en los niveles de Educación General Básica Superior y Bachillerato General Unificado.

De los tres formadores participantes, uno tenía experiencia en impartir esta asignatura en másteres similares, mientras que los otros dos, impartieron esta asignatura por primera vez. Los tres formadores conocían a fondo los Criterios de Idoneidad Didáctica y habían realizado investigaciones sobre la complejidad de diferentes objetos matemáticos. El tercer autor de este artículo participó en diferentes investigaciones para profundizar en la complejidad de diferentes objetos matemáticos: números naturales (Godino, et al., 2009), media aritmética (Rondero y Font, 2015), límite (Contreras, García y Font, 2012), Optimización (Balcaza, Contreras y Font, 2017) y colaboró, con la segunda autora, para caracterizar la complejidad del Teorema de Thales (Font, Breda y Seckel, 2017) y, con el tercer formador, para caracterizar la complejidad de la derivada (Pino-Fan, Castro, Godino y Font, 2013; Pino-Fan, Godino y Font, 2011) y de la antiderivada (Gordillo, et al., 2018). A su vez, la segunda autora, profundizó en la complejidad de las inecuaciones (Monje, Seckel y Breda, 2018).

De los 95 profesores que cursaron el máster, la mayoría acreditan formación inicial en Licenciatura en Matemáticas, pero, algunos presentan formación inicial en Educación General Básica, Sociología u otras áreas del conocimiento. Además de ejercer la actividad de docencia en matemáticas, los profesores estaban realizando un máster profesional de formación de profesores de matemáticas de secundaria. Dado su enfoque profesional, este máster se extiende a lo largo de dos años y está dividido en tres bloques: a) el bloque general (15 créditos ECTS) que incluye asignaturas de la psicología, sociología, orientación y sistema educativo ecuatoriano; b) el bloque específico (21 créditos ECTS) que contempla las asignaturas de la disciplina (matemática) y su didáctica y; c) el bloque de *prácticum* y trabajo de fin de máster (TFM) (24 créditos ECTS) que se orienta al ejercicio de articulación entre la teoría y la práctica.

Tarea y ejemplo de análisis de las respuestas

La tarea cuyas respuestas se analizan era la siguiente:

> El teorema de Pitágoras tiene diferentes significados parciales. Por una parte, se puede considerar un significado geométrico (el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos) y un significado algébrico-aritmético −se trata de ternas de números, llamadas pitagóricas, en las que el primer número al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos números, por ejemplo: (5, 4, 3), (15, 12, 9) ... Propón dos tareas para cada uno de estos dos significados.

Se optó por un enunciado no muy extenso dado que, como se ha dicho antes, el teorema de Pitágoras es uno de los objetos de la matemática sobre el que las personas en general (y, por tanto, también los profesores) tiene más conocimientos. Tal como se explica en la sección posterior, en el contexto de la implementación realizada los profesores tenían claro que lo que se les preguntaba era que creasen tareas (que podían ser problemas o ejercicios) en los que uno de estos dos significados (geométrico y aritmético-algebraico) fuese determinante para su resolución. La tarea fue validada mediante: a) un estudio de los significados parciales del teorema de Pitágoras contemplado en los Trabajos Finales de Máster de futuros profesores de un master de formación de profesores de matemáticas de secundaria (14 TFM) de España en los que se valoraba la implementación de una secuencia de tarea y se daban orientaciones para su rediseño (donde se observó que estos dos significados eran los que estaban presentes siempre); b) mediante su aplicación a un grupo de cinco de futuros profesores –una prueba piloto– que llevó a realizar pequeñas modificaciones en la consigna propuesta, para garantizar la comprensión adecuada del enunciado y c) mediante un juicio de dos expertos.

Se pueden hacer muchas clasificaciones diferentes sobre los problemas que se resuelven mediante el teorema de Pitágoras como, por ejemplo, la que se hace en Chaverri-Hernández, et al. (2020). Ahora bien, en esta investigación, la creación de tareas se relaciona con las matemáticas necesarias para su resolución, en particular con un determinado significado parcial del objeto matemático (teorema de Pitágoras en este caso), pero sin concretar dicho significado en una configuración epistémica. La razón es que en el máster no se contempló un proceso específico de enseñanza y aprendizaje del uso de las configuraciones epistémicas de objetos primarios como herramienta de análisis de la actividad matemática necesaria para la resolución de la tarea propuesta.

Para el análisis de las respuestas se partía de categorías a priori (los dos tipos de significado) y se trataba de ver si, dado un significado del teorema de Pitágoras fijado previamente, los profesores pueden crear una tarea en la que este significado parcial sea indicado para su resolución (por ejemplo, si el significado fijado es el geométrico, entendido como una relación entre áreas, el problema propuesto pide calcular un área). Las respuestas en las que se proponía un problema en el que se debían calcular longitudes de alguno de los lados del triángulo rectángulo, sin hacer mención explícita de sus áreas se daban por válidas tanto si el participante las asociaba a un significado geométrico como al aritmético-algebraico. Por otra parte, podía emerger alguna nueva categoría que surgiera a posteriori como resultado del análisis de las respuestas. Por ejemplo, en la siguiente respuesta, con independencia de que se pida demostrar y que las longitudes no se expresen en unidades, se considera que hay correspondencia entre la tarea que se ha creado y el significado que se dice que se pone en funcionamiento para resolverla (el geométrico).

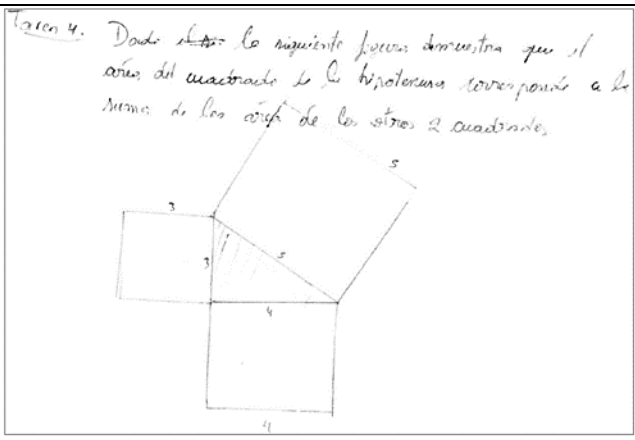
	Dada la siguiente figura demuestra que el área del cuadrado de la hipotenusa corresponde a la suma de las áreas de los otros 2 cuadrados.

Figura 1. Problema creado por el profesor 12 relacionada con el significado geométrico.

Fuente propia de la investigación.

Descripción de la implementación en la que se engloba la tarea del teorema de Pitágoras

En este apartado explicamos cómo se ha enseñado a los participantes la importancia de tener en cuenta una muestra representativa de los diferentes significados de un objeto matemático en el diseño, valoración y rediseño de secuencias de tareas. Para ello, se usa una metodología de autoestudio (una mirada a uno mismo en acción, generalmente dentro de contextos educativos) (Hamilton, Smith & Worthington, 2008).

Una de las asignaturas de este máster, titulada *Innovación e Investigación sobre la Propia Práctica*, impartida en el segundo año, tenía como principal objetivo presentar propuestas de innovación y herramientas de valoración de la idoneidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas que permitan al profesor la mejora de su propia práctica. La noción de idoneidad didáctica desglosada en criterios, componentes e indicadores fue utilizada posteriormente por los participantes en su Trabajo de Fin de Máster.

En esta asignatura, en lugar de presentar los criterios de idoneidad como principios ya elaborados se crearon momentos y espacios para su generación como resultado de consensos en el grupo. Después se explicó que los criterios de idoneidad didáctica deben ser entendidos como normas de corrección emanadas del discurso argumentativo de la comunidad educativa, cuando ésta está orientada a conseguir un consenso sobre lo que se puede considerar mejor. Desde esta perspectiva, la Didáctica de las Matemáticas nos puede ofrecer principios provisionales consensuados por la comunidad interesada, que pueden servir para guiar y valorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. También se explicó que para el desarrollo del constructo idoneidad didáctica, se habían considerado las tendencias actuales sobre la enseñanza de las matemáticas, los principios del National Council of Teachers of Mathematics (2000) y los aportes de los diferentes enfoques teóricos del área de Didáctica de las Matemáticas (Godino, 2013; Breda, Font y Pino-Fan, 2018).

También se remarcó que se entiende la idoneidad didáctica de un proceso de enseñanza y aprendizaje como el grado en que éste (o una parte de este) reúne ciertas características que permiten calificarlo como idóneo (óptimo o adecuado) para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes (aprendizaje) y los significados institucionales pretendidos o implementados (enseñanza), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (entorno). Se puso énfasis en que se trata de un constructo multidimensional que se tiene que descomponer en idoneidades parciales.

Con relación a los criterios parciales de idoneidad se comentó que se necesitan unos componentes e indicadores que los hagan operativos. Mediante diferentes tareas el grupo fue acordando diferentes componentes e indicadores de los criterios, las cuales pudieron encajar fácilmente con los propuestos en Breda, Pino-Fan y Font (2017). Se trata de generar una rúbrica (con criterios, componentes e indicadores) para ayudar a los profesores en la valoración de su práctica y guiar su rediseño, pero que es muy diferente a las guías docente cuyo propósito es ayudar a los maestros a dar forma a la instrucción y guiar su acción y toma de decisiones (Remillard, 2018), en particular es muy diferente a las guías docentes para el profesor que acompañan a los libros de texto.

A continuación, se comentan con más detalle alguna de las tareas relacionadas con la emergencia del componente "Muestra representativa de la complejidad del objeto matemático que se quiere enseñar". Para hacer emerger este componente, primero se remarcó que actualmente hay una tendencia a considerar que saber matemáticas incluye la competencia para aplicarlas a situaciones de la vida real, y que dicha tendencia, en algunos países, se ha concretado en el diseño de currículums basados en competencias. Se hizo hincapié en que la idea de competencia en el fondo pone de relieve que las matemáticas que se enseñan han de ser útiles para resolver problemas en diferentes contextos, tomando como primer ejemplo problemas que se resuelven aplicando significados parciales diferentes del teorema de Thales (Font, Breda y Seckel, 2017).

Después se reflexionó sobre la complejidad de la noción de otros objetos matemáticos, entre ellos los de mediatriz y pendiente. Para el caso de la pendiente, lo primero que se hizo fue preguntarles a los alumnos del máster qué entendían por pendiente de una recta, como resultado de sus respuestas aparecieron los cuatro significados de la siguiente tarea que se les propuso a continuación:

Cuadro 1. Tarea sobre los diferentes significados del objeto matemático pendiente

Tarea: A continuación, tienes diferentes significados de la pendiente de una recta y diferentes actividades. Asocia cada significado con la actividad que pone en juego este significado para su resolución (justifica la asociación).

Significados:

a) Significado geométrico: la pendiente determina la inclinación de la recta

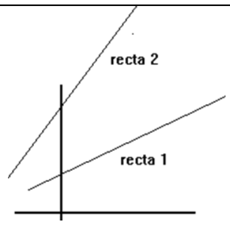
b) Significado trigonométrico: la pendiente es la tangente del ángulo que forma la recta con la parte positiva del eje de abscisas.

c) Significado algébrico: el número que multiplica a la x en la fórmula $y = mx + n$

d) Significado funcional: el aumento de la variable dependiente por unidad de la variable independiente.

Actividades:

Actividad 1. ¿Cuál de las rectas siguientes tiene más pendiente?



Actividad 2. Escribe la fórmula de las siguientes funciones:

Pendiente	-2	3	0
Ordenada en el origen	0	4	-5

Actividad 3. ¿Cuál es la pendiente de la recta y = 4x + 5?

Actividad 4. Dibuja el gráfico de la función y = 5x + 1 y di si son correctos o no los comentarios de los siguientes estudiantes:

Juan: Si nos situamos en un punto cualquiera de la recta y nos desplazamos una unidad hacia la derecha, después nos tenemos que desplazar 5 unidades hacia arriba en vertical hasta volver a tocar la recta.

Alba: Si nos situamos en un punto cualquiera de la recta y nos desplazamos una unidad hacia la derecha, nos tenemos que desplazar 5 unidades hacia abajo en vertical hasta tocar la recta.

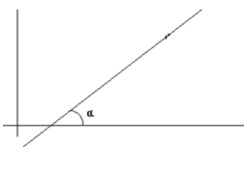
José: Si nos situamos en el origen de coordenadas y nos desplazamos cinco unidades hacia la derecha, nos tenemos que desplazar 1 unidad hacia arriba en vertical hasta tocar la recta.

Ana: Si nos situamos en un punto cualquiera de la recta y nos desplazamos dos unidades hacia la derecha, después nos tenemos que desplazar 10 unidades hacia arriba en vertical hasta tocar la recta.

Alberto: Si nos situamos en el punto de corte de la recta con el eje de ordenadas y nos desplazamos 3 unidades hacia la derecha, después nos tenemos que desplazar 15 unidades hacia arriba en vertical hasta tocar la recta.

Laura: Si nos situamos en un punto cualquiera de la recta y nos desplazamos un número de unidades en horizontal, para volver a tocar la recta nos tenemos que desplazar 5 unidades hacia arriba por cada unidad de desplazamiento horizontal.

Actividad 5. Halla la pendiente de una recta que forma un ángulo de 45° con la parte positiva del eje abscisas.



Nota: Fuente propia de la investigación.

En la puesta en común sobre la resolución de esta tarea se hizo hincapié en que cada problema exigía poner en funcionamiento un tipo de significado parcial de la pendiente diferente y que la otra cara de la moneda de la competencia en el uso de la noción de pendiente en la resolución de una variedad de problemas era la enseñanza de sus diferentes significados. Se trataba de que los alumnos del máster pasasen de un punto de vista ingenuo y optimista, que presupone que el alumno fácilmente realizará la transferencia del conocimiento matemático generado en un solo contexto a otros contextos nuevos y diferentes, a otro punto de vista más prudente en el que, si bien se considera que la posibilidad de transferencia creativa se puede dar, se asume que, sin un trabajo sobre una muestra representativa de la complejidad del objeto matemático que se quiere enseñar y la articulación y conexión de los componentes de dicha complejidad, es difícil que se pueda aplicar el objeto matemático a diferentes contextos. También se recuperó en este momento toda la reflexión que se había hecho en otra asignatura del máster sobre la importancia de presentar a los alumnos diferentes representaciones de un objeto matemática y trabajar los tratamientos y conversiones entre ellas.

Al final de la asignatura *Innovación e Investigación sobre la Propia Práctica* se realizó una evaluación (examen) para verificar los aprendizajes logrados por los profesores. En particular se les propusieron dos tareas, una sobre la complejidad de la media aritmética y otra sobre la complejidad del teorema de Pitágoras.

La tarea sobre la media aritmética, basada en Batanero (2000) y muy similar a la de la pendiente que se acaba de describir, trataba de que los profesores relacionasen los significados parciales: 1) la media como valor representativo de un conjunto de datos; 2) la media como la estimación de una medida; y 3) valor que compensa los excesos con los defectos (equilibrio, equidad, etc.), con tres problemas diferentes. Al analizar las respuestas, se concluye que un número importante de los alumnos del máster (56), al relacionar los tres significados con los problemas propuestos, lo hacen de forma confusa y errónea. Por otra parte, 21 dan una respuesta correcta, pero su justificación no es válida; mientras que 18 señalan las respuestas correctas, pero sin ningún tipo de justificación. La segunda tarea propuesta en el examen es la que se analiza en la próxima sección.

2.8 Análisis y resultados

La otra pregunta del examen era sobre la complejidad del teorema de Pitágoras. De los 95 profesores, 32 no contestaron la tarea y 63 la contestaron proponiendo una o dos actividades para el significado geométrico y una o dos para el significado aritmético-algébrico. Por tanto, los profesores propusieron hasta cuatro tareas a las que les asignaban alguno de los dos significados (o ninguno).

Con relación a los 63 profesores que contestaron, tenemos que: a) 10 profesores proponen tareas para trabajar el teorema de Pitágoras, pero no especifican ni justifican si las tareas diseñadas por ellos está relacionada con el significado aritmético-algebraico, con el geométrico o con ambos; b) 15 profesores no propusieron ninguna tarea para trabajar el significado aritmético-algebraico y un profesor no propuso ninguna tarea para trabajar el significado geométrico; c) 8 profesores crearon tareas que no se corresponden con el significado que señalan, en efecto, 6 profesores, para el significado aritmético-algebraico, proponen actividades de cálculo de áreas de cuadrados construidos sobre los lados del triángulo rectángulo, mientras que 2 profesores, para el significado geométrico, proponen tareas de comprobación del teorema de Pitágoras con diferentes ternas pitagóricas.

Con relación a las tareas creadas por los profesores, tenemos:

a) Tareas propuestas para el significado geométrico entendido como una relación de áreas. Hubo un total de 43 tareas propuestas relacionadas con comprobar que la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos de un triángulo rectángulo es igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa (como la tarea propuesta en la figura 1 de la sección de metodología). En este caso, hay correspondencia entre el significado señalado y la tarea propuesta.

b) Tareas propuestas por los profesores para el significado geométrico que son más indicadas para otros significados. Este es el caso del profesor 10 quien muestra, implícitamente, que conoce otros significados del teorema de Pitágoras ya que, como tarea para trabajar el significado geométrico, propone el cálculo del módulo de un vector (Figura 2). Es decir, utiliza que en la geometría vectorial-analítica el teorema de Pitágoras permite relacionar el módulo y las componentes de un vector del plano.

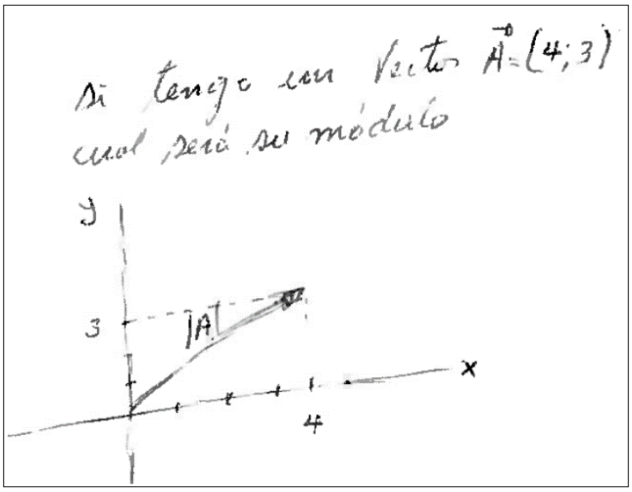


Figura 2. Problema creado por el profesor 10 para el significado geométrico.

Fuente propia de la investigación.

c) Tareas en las que hay correspondencia con el significado asociado (sea el geométrico o el aritmético-algebraico).

Hubo treinta tareas propuestas por los profesores participantes del máster relacionadas al cálculo de la longitud de uno de los lados del triángulo rectángulo y que asociaron esta tarea o bien con el significado geométrico o bien con el aritmético-algebraico. Los profesores que asociaron este tipo de tarea con el significado geométrico lo hicieron porque había un triángulo y se tenían que calcular longitudes (o alturas o distancias si era un problema contextualizado), mientras los que asociaron la tarea con el significado aritmético-algebraico lo hicieron porque la tarea propone para su la resolución el uso de operaciones algébricas a partir de una relación entre números. Como la tarea del profesor 13 que sigue a continuación (Figura 3):

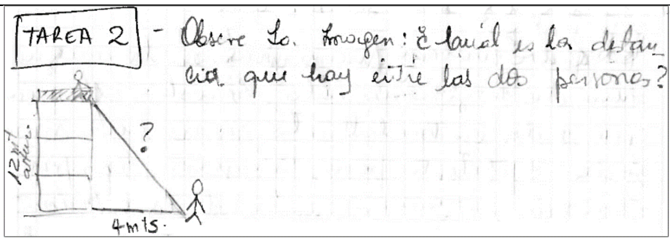
	Observe la imagen ¿Cuál es la distancia que hay entre las dos personas

Figura 3. Problema creado por el profesor 13 para el significado aritmético-algébrico.

Fuente propia de la investigación.

Dos tareas propuestas por dos profesores utilizaron una representación geométrica para hacer una comprobación algebraica del teorema de Pitágoras (ver figura 4).

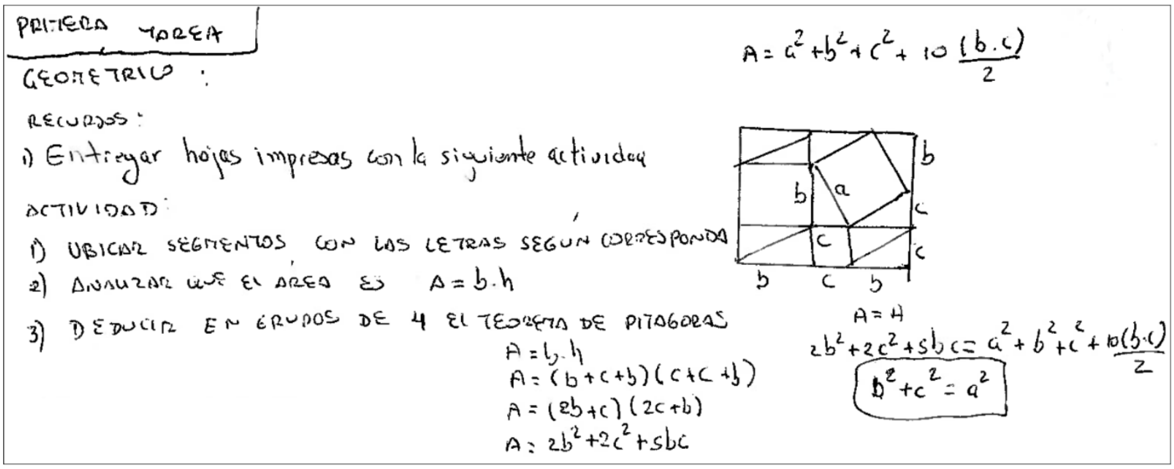


Figura 4. Problema creado por el profesor 9 para el significado geométrico. Fuente propia de la investigación.

Dos profesores, para el significado geométrico, proponen un tipo de tarea en la que se trata de comprobar que el área del semicírculo construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los semicírculos construidos sobre los catetos (ver figura 5), pero para ello se propone implícitamente que se haga una demostración de tipo algebraica. En este caso se puede considerar que el profesor, al proponer este tipo de tarea, usa un significado geométrico generalizado del teorema de Pitágoras: el área de la figura construida sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de las figuras semejantes construidas sobre los catetos.

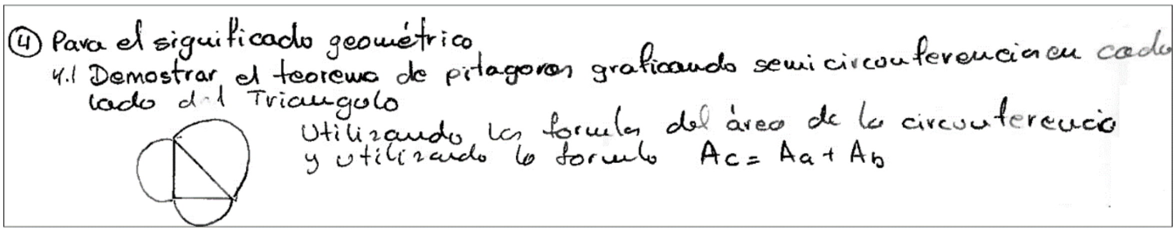
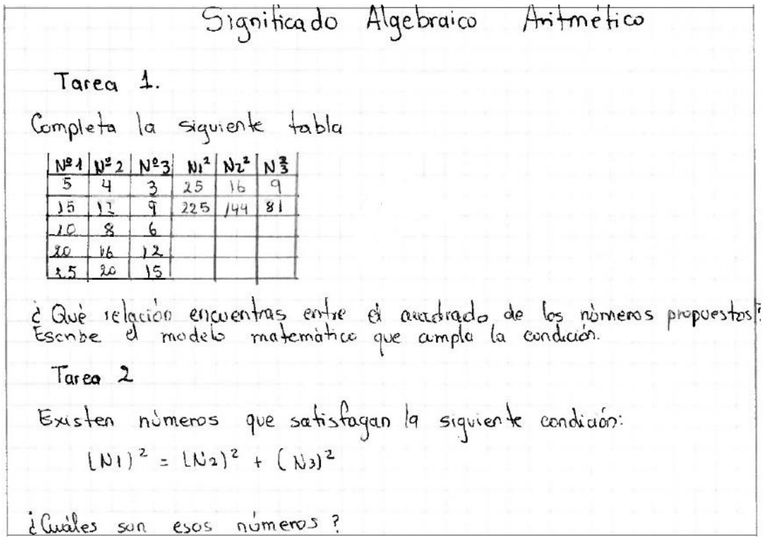


Figura 5. Problema creado por el profesor 15 para el significado geométrico.

Fuente propia de la investigación.

d) Tareas propuestas para el significado aritmético-algébrico:

Treinta y tres tareas fueron propuestas para este significado. Se trata de tareas relacionadas con la presentación de ternas de números en los que los alumnos debían comprobar o encontrar que un número al cuadrado era igual a la suma de los cuadrados de los otros dos. En este caso, también hay correspondencia entre el significado señalado y la tarea propuesta. Hay que resaltar que de estas 33, seis piden encontrar la regularidad en lugar de comprobarla. Como la tarea del profesor 8 que sigue a continuación:



Significado Algebraico Aritmético

Tarea 1.

Completa la siguiente tabla

Nº1	Nº2	Nº3	$N1^2$	$N2^2$	$N3^2$
5	4	3	25	16	9
15	12	9	225	144	81
10	8	6			
20	16	12			
25	20	15			

¿Qué relación encuentras entre el cuadrado de los números propuestos? Escribe el modelo matemático que cumpla la condición.

Tarea 2

Existen números que satisfagan la siguiente condición:

$$(N1)^2 = (N2)^2 + (N3)^2$$

¿Cuáles son esos números?

Figura 6. Problema creado por el profesor 8 para el significado aritmético-algébrico.

Fuente propia de la investigación.

Un primer resultado es que las respuestas dadas permiten inferir que los profesores tienen dificultades para crear una tarea y señalar el tipo del significado del teorema de Pitágoras que se debe usar para resolverla. Avala esta conclusión el hecho de que, de los 95 participantes, 32 (una tercera parte) dejó la respuesta en blanco, que otros diez, si bien proponen tareas, no especifican ni justifican si la tarea está relacionada con un significado u otro y que 16 no han propuesto ninguna tarea para trabajar uno de los dos significados (15 para el significado aritmético-algebraico y uno para el significado geométrico). Dicho de otra manera, más de la mitad del profesorado es incapaz de dar una respuesta completa (sea correcta o incorrecta) a la pregunta. Lo cual, teniendo en cuenta que la pregunta trata sobre el teorema de Pitágoras, que es uno de los contenidos matemáticos, de cierta complejidad, más conocido por personas con una formación básica, resulta muy significativo.

Por una parte, se trata de un resultado esperado y coherente con la información que se tenía sobre el conocimiento y competencias de estos profesores en las otras materias del máster, lo cual, a su vez, está relacionado con la débil formación matemática y didáctica de los profesores ecuatorianos, tal como se documenta (Martínez et al., 2018) en el reporte sobre Ecuador incluido en el informe, coordinado por Yamamoto y Malaspina (2018), sobre la Educación Matemática en la región andina. Pero, por otra parte, hay que tener en cuenta un aspecto que relativiza la relevancia de esta conclusión, nos referimos a que estas respuestas se dieron en un examen de una asignatura del máster que estaban cursando, donde el tiempo era limitado y esta pregunta era la última del examen. Es plausible que algunos profesores no respondiesen por falta de tiempo o por no considerar que fuese necesario responderla para superar el examen.

Ahora bien, consideramos que este resultado es una evidencia de que el tipo de instrucción realizada no consiguió que los profesores pudiesen crear tareas en las que se tenga que usar un determinado significado del objeto matemático que se pretende enseñar, al menos para la media aritmética y el teorema de Pitágoras. Se trata de un resultado preocupante ya que las orientaciones curriculares de Ecuador conllevan que estos profesores deberían poder presentar a sus alumnos diferentes significados (y conectarlos adecuadamente) de los objetos matemáticos que enseñan.

Un segundo resultado es que el significado geométrico, entendido como una relación de áreas de los cuadrados construidos sobre los lados, es el que los participantes mejor relacionan con la tarea que proponen, ya que hubo 43 tareas propuestas para este significado. Mientras que son menos, 33 tareas, las propuestas para el significado aritmético-algebraico, se trata de tareas relacionadas con la presentación de ternas de números en los que los alumnos debían comprobar o encontrar que un número al cuadrado era igual a la suma de los cuadrados de los otros dos. Este mejor manejo del significado geométrico por parte de los profesores participantes era, en cierta manera, un resultado esperado ya que, en los libros de texto que ellos usan para explicar el teorema de Pitágoras, no se pone especial énfasis en explicar una visión aritmética-algebraica a partir de ternas de números.

Con relación al significado geométrico, hay que remarcar que, para un grupo de profesores, basta que los símbolos representen los lados del triángulo para considerar que se usa el significado geométrico del teorema de Pitágoras, a pesar de que la resolución de la tarea parte de una relación entre números o símbolos y el lado que hay que calcular se obtiene por manipulación simbólica.

Con relación al uso explícito o implícito de otros significados del teorema de Pitágoras, se tiene, por una parte, que un profesor muestra, implícitamente, que conoce lo que se podría llamar el significado vectorial del teorema de Pitágoras, ya que utiliza que en la geometría vectorial-analítica este teorema permite relacionar el módulo y las componentes de un vector del plano, pero parece que no lo considera como un significado diferente o autónomo de la interpretación geométrica del teorema.

Por otra parte, en dos casos ha aparecido, implícitamente una versión generalizada del significado geométrico ya que se usa que el área de la figura construida sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de las figuras semejantes construidas sobre los catetos (semicírculos en las dos tareas detectadas). La generalización del teorema de Pitágoras para áreas de figuras semejantes es una buena situación para establecer una conexión entre el significado geométrico y el aritmético-algebraico. Ahora bien, no queda claro si realmente los dos profesores reconocen esta generalización del teorema para cualquier figura o bien solo para los semicírculos, ni si son conscientes del potencial de esta generalización para conectar los dos significados.

2.9 Conclusiones

La descripción del proceso de enseñanza y aprendizaje realizado, desde la perspectiva del formador que ha impartido el curso, ha permitido que se elabore un discurso sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje en el cual se explica los motivos por los cuales se seleccionaron y secuenciaron las tareas propuestas. En este sentido, queremos destacar la pertinencia e importancia del desarrollo de estas investigaciones en la comunidad de Educación Matemática, ya que se da voz al discurso profesional del profesor. Se trata de una narración temporal en la que se argumentan las acciones y decisiones tomadas.

Por otra parte, el segundo objetivo, relacionado con la pregunta ¿Dado un significado parcial del teorema de Pitágoras fijado previamente, pueden los profesores crear una tarea en la que este significado parcial sea indicado para su resolución? informa sobre cómo los profesores se apropian de los conocimientos didáctico-matemáticos implementados, ya que se ha evidenciado el aprendizaje logrado con relación a la complejidad del teorema de Pitágoras. Las dificultades observadas en los profesores ecuatorianos para reflexionar sobre la complejidad del teorema de Pitágoras (y más en general, de los objetos matemáticos), es un resultado coherente con la investigación sobre la formación de los profesores en la región andina (Yamamoto y Malaspina, 2018) y, también, con una amplia investigación internacional sobre el conocimiento y las competencias del profesorado de matemáticas, la cual ha evidenciado que los profesores tienen dificultades para interpretar aspectos epistémicos de las tareas y para identificar su potencial educativo (Stahnke, Schueler y Roesken-Winter, 2016).

Los resultados sobre la complejidad del teorema de Pitágoras (y más en general todo el proceso de instrucción implementado), fueron útiles para retroalimentar el proceso de instrucción de estos profesores en el máster, más allá de comentar sus respuestas con ellos. En particular, fue útil en sus trabajos de fin de máster.

Los profesores que realizaron el máster, a pesar de las dificultados que tuvieron, consideraron interesante la reflexión sobre la complejidad de los objetos matemáticos y su relación con el desarrollo de la competencia matemática de los alumnos. Dicha consideración, coincide con las conclusiones de la investigación de Calle y Breda (2019; 2021), donde futuros profesores de matemáticas ecuatorianos fueron cuestionados sobre los diferentes significados de algunos objetos matemáticos, concluyéndose que los participantes presentaron, en las tareas que diseñaron, diferentes significados de los objetos matemáticos, tanto intra como extra matemáticos, y consideraron importante tener en cuenta la complejidad de los objetos matemáticos, manifestando que los diferentes significados se deben ir presentando de forma gradual a los alumnos.

2.10 Financiamiento

Trabajo desarrollado en el marco del proyecto de investigación en formación de profesorado: PGC2018-098603-B-I00 (MCIU/AEI/FEDER, UE).

Consentimiento informado

Los participantes fueron informados y dieron su consentimiento.

Conflicto de intereses

Los autores declaran no tener algún conflicto de interés.

Declaración de la contribución de los autores

El porcentaje total de contribución para la conceptualización, preparación y corrección de este artículo fue el siguiente: E. C. 33 %, A. B. 33 % y V. F. 33 %.

Declaración de disponibilidad de los datos

Los datos que respaldan los resultados de este estudio serán puestos a disposición por el autor correspondiente [**A.B**], previa solicitud razonable.

2.11 Referencias

Australian Curriculum Assessment and Reporting Authority. (2012). Australian Curriculum Mathematics. Australia: ACARA. Recuperado de http://www.australiancurriculum.edu.au/Mathematics/Rationale

Balcaza, T., Contreras, A. y Font, V. (2017). Análisis de libros de texto sobre la optimización en el bachillerato. *Bolema, 31*(59), 1061-1081. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n59a11

Barroso, R. y Gavilán, J. M. (2001). Diversas perspectivas del Teorema de Pitágoras. *Epsilon, 50,* 283-251.

Batanero, C. (2000). Significado y comprensión de las medidas de posición central. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *25*, 41-58.

Breda, A. (2020). Características del análisis didáctico realizado por profesores para justificar la mejora en la enseñanza de las matemáticas. *Bolema*, *34*(66), 69-88. https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a04

Breda, A., Font, V. y Pino-Fan, L. R., (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica, *Bolema*, *32*(60), 255-278. https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13

Breda, A., Pino-Fan, L. R., & Font, V. (2017). Meta Didactic-Mathematical Knowledge of Teachers: Criteria for The Reflection and Assessment on Teaching Practice. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *13*(6), 1893-1918. https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.01207a

Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P., Giacomone, B. y Godino, J. D. (2018). Conocimientos y competencia de futuros profesores de matemáticas en tareas de proporcionalidad. *Educação e Pesquisa, 44,* 1-22. https://doi.org/10.1590/s1678-4634201844182013

Burgos, M., Castillo, M. J., Beltrán-Pellicer, P. y Godino, J. D. (2020). Análisis didáctico de una lección sobre proporcionalidad en un libro de texto de primaria con herramientas del enfoque ontosemiótico, *Bolema. 34*(66), 40-68. https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a03

Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P. y Godino, J. D. (2020). La cuestión de la idoneidad de los vídeos educativos de matemáticas: una experiencia de análisis con futuros maestros de educación primaria. *Revista Española de Pedagogía*, *78*(275), 27-49. https://doi.org/10.22550/REP78-1-2020-07

Businskas, A. M. (2008). *Conversations about connections: How secondary mathematics teachers conceptualize and contend with mathematical connections* [Unpublished PhD Thesis]. Faculty of Education-Simon Fraser University, Canada.

Calle, E. y Breda, A. (2019). Reflexión sobre la complejidad de los objetos matemáticos en la formación inicial de profesores. En D. Aguilar, M. Cobos, L. Claudio, E. Campozano (Eds), *La Investigación Educativa en un Mundo en Constante Transformación* (pp. 29-50). Cuenca: ASEFIE.

Calle, E. C., Breda, A., & Font, V. (2021). Reflection on the complexity of mathematical items in initial teacher education. *Journal of Higher Education Theory and Practice*, 21, 197-214, 2021. https://doi.org/10.33423/jhetp.v21i13.4801

Chaveri-Hernández, J. J., Hernández-Arce, K., Castillo-Céspedes, M. J. Vallejos-Meléndez, D. y Picado-Alfaro, M. (2020). ¿Qué modos de uso propone el profesorado de matemáticas en formación inicial para la enseñanza del teorema de Pitágoras en educación secundaria? *Uniciencia, 34*(1), 88-110. https://doi.org/10.15359/ru.34-1.6

Contreras, A., García, M. y Font, V. (2012). Análisis de un proceso de estudio sobre la enseñanza del límite de una función. *Bolema, 26*(42B), 667-690. https://doi.org/10.1590/S0103-636X2012000200013

Espinoza, R. F. y Pochulu, M. D. (2020). Diseño de un instrumento para valorar la comprensión alcanzada en divisibilidad por futuros profesores de matemática. *Bolema*, *34*(66), 294-313. https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a14

Esqué, D. y Breda, A. (2021). Valoración y rediseño de una unidad sobre proporcionalidad utilizando la herramienta Idoneidad Didáctica. *Uniciencia*, *35*(1), 38-54. https://doi.org/10.15359/ru.35-1.3

Ferreres, S. y Vanegas, Y. M. (2015). Uso de criterios de calidad en la reflexión sobre la práctica de los futuros profesores de secundaria de matemáticas. *Procedia-Social and Behavioral Sciences, 196,* 219-225. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2015.07.032

Flores, C. D., & García-García, J. (2017). Conexiones Intramatemáticas y Extramatemáticas que se producen al Resolver Problemas de Cálculo en Contexto: un Estudio de Casos en el Nivel Superior. *Bolema*, *31*(57), 158-180. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a08

Font, V., Breda, A. y Seckel, M. J. (2017). Algunas implicaciones didácticas derivadas de la complejidad de los objetos matemáticos cuándo estos se aplican a distintos contextos. *Revista brasileira de ensino de ciência e tecnologia*, *10*(2), 1-23. https://doi.org/10.3895/rbect.v10n2.5981

Font, V., Godino, J. D., & Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, 82, 97–124. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9411-0

Font, V., Planas, N. y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, *33*(1), 89-105. https://doi.org/10.1174/021037010790317243

Generalitat de Catalunya. (2015). Decret 187/2015, de 25 d'agost, d'ordenació dels ensenyaments de l'educació secundària obligatòria, DOGC núm. 6945 de 28.8.2015.

Recuperado de: http://dogc.gencat.cat/ca/pdogc_canals_interns/pdogc_resultats_fitxa/?action=fitxa&documentId=701354&language=ca_ES

Giacomone, B., Godino, J. D. y Beltrán-Pellicer, P. (2018). Developing the prospective mathematics teachers' didactical suitability analysis competence. *Educação e Pesquisa*, *44,* e172011.

Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática, 11*, 111-132.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2019). The Onto-semiotic Approach: implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics, 39*(1), 37-42.

Godino, J. D., Burgos, M., & Gea, M. (2021). Analysing theories of meaning in mathematics education from the onto-semiotic approach. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology.* https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/0020739X.2021.1896042

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Arrieche, M. (2009). ¿Alguien sabe qué es el número? *Unión, 19,* 34-46.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema*, *31*(57), 90-113. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05

González, P. (2008). El teorema llamado de Pitágoras. Una historia geométrica de 4.000 años. *SIGMA*, *32*, 103-130.

Gordillo, W., Pino-Fan, L., Font, V. y Ponce-Campuzano, J. (2018). Algunas tareas para evaluar la comprensión sobre el objeto matemático antiderivada. *Academia y virtualidad, 11*(2), 1- 17. https://doi.org/10.18359/ravi.2983

Hamilton, M. L., Smith, L., & Worthington, K. (2008). Fitting the methodology with the research: An exploration of narrative, self-study and auto-ethnography. *Studying teacher education*, *4*(1), 17-28. https://doi.org/10.1080/17425960801976321

Loomis, E. S. (1968). *The pithagorean proposition*. Washington, D.C.: NCTM.

Malaspina, U. V., Torres, C. y Rubio, N. V. (2019). How to Stimulate In-Service Teachers¿ Didactic Analysis Competence by Means of Problem Posing. En P. Liljedahl y M. Santos-Trigo (Eds.), *Mathematical Problem Solving* (pp. 133-151). Cham: Springer.

Martínez, A. (2000). Teorema de Pitágoras: originalidad de las demostraciones de E. García

Martínez, M., Castillo, P., Trelles, C., Calle, E., Ayala, A., Rivadeneira, F. y Auccahuallpa, R. (2018). Report on Mathematics Teacher Preparation in Ecuador. En Y. Yamamoto y U. Malaspina, (Eds.). *Mathematics Teacher Education in the Andean Region and Paraguay: A Comparative Analysis of Issues and Challenges* (pp. 19-45). Cham: Springer.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Bogotá: MEN.

Ministry of National Education. (2013). Secondary level mathematics curriculum: Grades 9–12. Ankara: Directorate of State Books.

Monje, Y., Seckel, M. J. y Breda, A. (2018). Tratamiento de la Inecuación en el Currículum y Textos Escolares Chilenos. *Bolema, 32*(61), 480-502. https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n61a09

Morales-Maure, L., Durán-González, R., Pérez-Maya, C. y Bustamante, M. (2019). Hallazgos en la formación de profesores para la enseñanza de la matemática desde la idoneidad didáctica. Experiencia en cinco regiones educativas de Panamá. *Inclusiones*, *6*(2), 142-162.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics. (2013). Connecting the NCTM process standards and the CCSSM practices. Reston, VA: NCTM.

Pino-Fan, L., Castro, W. F., Godino, J. D. y Font, V. (2013). Idoneidad epistémica del significado de la derivada en el currículo de bachillerato. *Paradigma, 34*(2), 123 – 150.

Pino-Fan, L., Godino, J. D. y Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa, 13*(1), 141-178.

Remillard, J. T. (2018). Examining teachers' interactions with curriculum resource to uncover pedagogical design capacity. En L. Fan, L. Trouche, C. Qi, S. Rezat, y J. Visnovska (Eds.), *Research on mathematics textbooks and teachers' resources: advances and issues* (pp. 69-88). Cham, Suiza: Springer.

Rodríguez-Nieto, C., Rodríguez-Vásquez, F. M., & Font, V. (2020). A new view about connections. The mathematical connections established by a teacher when teaching the derivative. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1799254

Rondero, C. y Font, V. (2015). Articulación de la complejidad matemática de la media aritmética. *Enseñanza de las Ciencias*, *33*(2), 29-49. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1386

Seckel, M. J. (2016). *Competencia en análisis didáctico en la formación inicial de profesores de educación general básica con mención en matemática* (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Barcelona, España.

Stahnke, R; Schueler, S., & Roesken-Winter, B. (2016). Teachers' perception, interpretation, and decision-making: a systematic review of empirical mathematics education research. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 48(1), 1-27. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0775-y

Torres, C. (2020). Developing teachers' didactic analysis competence by means of a problem-posing strategy and the quality of posed mathematical problems. In K. O. Villalba-Condori, A. Adúriz-Bravo, F. J. García-Peñalvo, J. Lavonen, Lung-Hsiang Wong & Tzu-Hua Wang (Eds.). *Education and Technology in Sciences. First International Congress, CISETC 2019 Arequipa, Peru, December 10–12, 2019. Revised Selected Papers* (pp. 88 - 100). Cham: Springer.

Wilhelmi, M. R., Godino, J. D. y Lacasta, E. (2007). Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. *Recherches en Didactique des Mathematiques, 27*(1), 77 - 120.

Yamamoto, Y., & Malaspina, U. (2018). *Mathematics Teacher Education in the Andean Region and Paraguay: A Comparative Analysis of Issues and Challenges*. Cham: Springer.

Zengin, Y. (2019). Development of mathematical connection skills in a dynamic learning environment. *Education and Information Technologies*, *24*(3), 2175-219. https://doi.org/10.1007/s10639-019-09870-x

CAPÍTULO III: ARTÍCULO CIENTÍFICO 2

3.1 Artículo publicado

Autores: Eulalia Calle, Adriana Breda y Vicenç Font.

Filiación: Universidad de Cuenca y Universidad de Barcelona.

Referencia: Calle, E. C., Breda, A., Font, V. (2020). ¿Qué significado atribuyen a la media aritmética profesores de matemáticas en ejercicio? *Revista Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 33(1), 643-652.

3.2 Indexación de la revista

Articulo indexado en QUALIS/CAPES PERIÓDICOS (categoría B1 en ENSINO). Articulo realizado en el marco de los proyectos PGC2018-098603-B-I00 (MCIU/AEI/FEDER, UE) y REDICE18-2000 (ICE-UB).

3.3 Resumen del artículo científico 2

Este articulo atiende al objetivo específico 5 de esta tesis.

Este trabajo tiene como objetivo estudiar si los profesores en activo pueden identificar el significado parcial del objeto matemático media aritmética que permite resolver un determinado problema. Para ello, se analizaron las respuestas de 95 docentes a una tarea que consistía en relacionar los distintos significados de este objeto matemático con una lista de problemas propuestos. Se concluye que la mayoría de los docentes no logran relacionar de forma correcta el significado de la media con el enunciado del problema correspondiente y, los que logran relacionar, justifican dicha relación de forma incorrecta.

Palabras Claves: Formación de profesores; Universidad y tercer ciclo; metodología cualitativa

3.4 Abstract

The objective of this work is to study if professors in practice can identify the partial meaning of the arithmetic average mathematical object that allows solving a certain problem. For this, the answers of 95 teachers were analyzed to a task that consisted in relating the different meanings of this mathematical object with a list of proposed problems. It is concluded that the majority of teachers fail to correctly relate the meaning of the mean with the statement of the corresponding problem and, those who manage to relate, justify this relationship incorrectly.

Key words: Teacher training; University and third cycle; qualitative methodology.

3.5 Introducción

En la actualidad se han propuestos diferentes modelos de categorías de conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. Uno de dichos modelos, es el Modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico Matemáticas (CCDM) del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2019; Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017; Pino-Fan, Godino y Font, 2018). En particular, en el marco de este modelo, se considera que, para que un alumno pueda ser competente en la aplicación de las nociones matemáticas, es necesario que en el proceso de instrucción se le enseñe una muestra representativa de los diferentes significados de estas nociones. En consecuencia, se considera necesario que los profesores de matemáticas tengan en cuenta la complejidad del objeto matemático que se pretende enseñar (entendida ésta como pluralidad de significados) en el diseño, implementación, valoración y rediseño de procesos de instrucción.

En el campo de la Didáctica de las Matemáticas, distintas investigaciones hacen énfasis en la importancia de abordar la complejidad del objeto matemático en la formación de profesores. Burgos, Beltrán-Pellicer, Giacomone y Godino (2018), por ejemplo, cuando trabajan en el reconocimiento de niveles de algebrización en una tarea de proporcionalidad por futuros profesores de matemáticas de secundaria, focalizan la atención, en la faceta epistémica del modelo CCDM, dando importancia al conocimiento de la pluralidad de los significados de los objetos matemáticos en diferentes contextos, llegando a determinar incluso que los docentes en su intento de lograr un nivel de algebrización, sacrifican la significación del enunciado del problema. Otro estudio relacionado con la igualdad de los números reales (Wilhelmi, Godino y Lacasta, 2004), plantea la necesidad de establecer los distintos significados asociados a los objetos matemáticos en diferentes momentos, enfatizando que ninguna definición, puede ser privilegiada. Por último, en una reflexión sobre la articulación de la complejidad matemática de la media aritmética, Rondero y Font (2015), usan la configuración epistémica (representaciones, definiciones, propiedades, problemas, etc.) como una herramienta importante para describir la complejidad de esta noción, además, profundizan en los mecanismos de articulación de dicha complejidad.

Siguiendo esta línea de investigación, el presente trabajo propone como objetivo estudiar si los profesores de matemáticas en ejercicio (estudiantes de un máster profesional para formación de profesores) pueden identificar el significado parcial del objeto matemático media aritmética que permite resolver un determinado problema, para lo cual plantea la siguiente pregunta: ¿Pueden relacionar los profesores de matemáticas en ejercicio los diferentes significados parciales de la media aritmética con diversas tipologías de problemas?

3.6 Marco teórico

En el marco teórico explicamos, de manera breve, el modelo CCDM del EOS, detallamos el componente Representatividad de la complejidad del objeto matemático que se quiere enseñar del criterio de idoneidad epistémica y explicamos la complejidad del objeto matemático media aritmética presentada por Rondero y Font (2015), que es el tema central de este artículo.

El modelo CCDM y la Idoneidad Didáctica

El Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción matemática (EOS) es un sistema teórico inclusivo en la Educación Matemática que articula diversas categorías de conocimientos y competencias (CCDM), de los profesores de matemáticas consideradas necesarias para una enseñanza idónea de las matemáticas (Godino, Batanero y Font, 2007; Godino, Batanero y Font, 2019). Este modelo teórico hace hincapié en el análisis de idoneidad didáctica, como una competencia para la reflexión global sobre la práctica docente, su valoración y mejora progresiva (Giacomone, Godino y Beltrán, 2018); por lo tanto, responde a qué criterios seguir en el diseño de secuencias de tareas, cómo desarrollar y evaluar la competencia matemática de los alumnos y qué cambios hacer para conseguir metas de aprendizaje superiores. Esta noción se descompone en los siguientes criterios parciales de idoneidad didáctica (Font, Planas y Godino, 2010):

- ✓ Idoneidad epistémica: se refiere al grado de representatividad e interconexión de los significados institucionales implementados (o pretendidos) respecto de un significado de referencia. Las tareas o situaciones-problemas son un componente fundamental en esta dimensión, y deben involucrar diversos objetos y procesos matemáticos.
- ✓ Idoneidad ecológica: grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro, la escuela y la sociedad y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla.
- ✓ Idoneidad cognitiva: grado en que los significados pretendidos e implementados están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/implementados.

- ✓ Idoneidad afectiva: grado de implicación (intereses, emociones, actitudes y creencias) del alumnado en el proceso de estudio.
- ✓ Idoneidad interaccional: grado en que las configuraciones didácticas y el discurso en la clase permiten, por una parte, identificar conflictos semióticos potenciales (que se puedan detectar a priori), y por otra, resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción.
- ✓ Idoneidad mediacional: grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.

En Breda y Lima (2016) y Breda, Pino-Fan y Font (2017) se aporta un sistema de componentes e indicadores que sirve de guía de análisis y valoración de la idoneidad didáctica, que está pensado para un proceso de instrucción en cualquier etapa educativa.

La idoneidad epistémica y la complejidad de los objetos matemáticos

Tanto los componentes como los indicadores de los criterios de idoneidad didáctica se han confeccionado teniendo en cuenta las tendencias, los principios y los resultados de la investigación en el área de Didáctica de las Matemáticas. En particular, para la idoneidad epistémica se ha tenido en cuenta un principio fundamental del EOS que, con los matices propios de cada enfoque, es (o puede ser) asumido por otros enfoques teóricos del área. Nos referimos al principio que se puede formular de la siguiente manera: los objetos matemáticos emergen de las prácticas, lo cual conlleva su complejidad (Font, Godino y Gallardo, 2013; Rondero y Font, 2015). De este principio se deriva un componente (representatividad) cuyo objetivo es que se tenga en cuenta, dentro de lo posible, dicha complejidad en el diseño y rediseño de las secuencias didácticas (Pino-Fan, Castro, Godino y Font, 2013).

El componente Representatividad de la complejidad de los objetos matemáticos (entendida como pluralidad de significados parciales), se refiere al grado de representatividad e interconexión de los significados institucionales implementados (o pretendidos) respecto de un significado de referencia (Godino, Giacomone y Beltrán-Pelliecer, 2018). Cada uno de estos significados permite resolver tipos de problemas diferentes, por lo cual, si se quiere enseñar una muestra representativa de significados parciales es necesario presentar una muestra variad de problemas (Font, Breda y Seckel, 2017).

La siguiente tabla (Font, Breda y Seckel, 2017), explica detalladamente, los indicadores del componente Representatividad del criterio de idoneidad epistémica.

Tabla 2. El componente de Representatividad y sus indicadores

Componente de la Idoneidad Epistémica	Indicadores
Representatividad	✓ Los significados parciales (definiciones, propiedades, procedimientos, etc.) son una muestra representativa de la complejidad de la noción matemática que se quiere enseñar ✓ Los significados parciales definiciones, propiedades, procedimientos, etc.) son una muestra representativa de la complejidad contemplada en el currículo de la noción matemática que se quiere enseñar. ✓ Para uno o varios significados parciales seleccionados para su implementación, ¿se contempla una muestra representativa de problemas? ✓ Para uno o varios significados parciales seleccionados para su implementación, ¿se contempla el uso de diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico…), tratamientos y conversiones entre los mismos?

Fuente: Font, Breda y Seckel (2017).

Investigaciones sobre la complejidad de diferentes objetos matemáticos

Se han realizado diferentes investigaciones para profundizar en la complejidad de diferentes objetos matemáticos: números naturales (Godino, Font, Wilhelmi y Arrieche, 2009), media aritmética (Rondero y Font, 2015), límite (Contreras, García y Font, 2012), optimización (Balcaza, Contreras y Font, 2017), Teorema de Tales (Font, Breda y Seckel, 2017), derivada y antiderivada, así como la comprensión que tienen los estudiantes de dicha complejidad (Pino-Fan, Godino y Font, 2011; Pino-Fan, Castro, Godino y Font, 2013; Pino-Fan, Font, Gordillo, Larios y Breda, 2018; Pino-Fan, Godino y Font, 2018), inecuación (Monje, Seckel y Breda, 2018).

Para el objeto matemático *derivada*, Pino, Godino y Font (2011) caracterizan su complejidad mediante nueve configuraciones de objetos primarios : 1) tangente en la matemática griega; 2) variación en la edad media; 3) métodos algebraicos para hallar tangentes; 4) concepciones cinemáticas para el trazado de tangentes; 5) ideas intuitivas de límite para el cálculo de máximos y mínimos; 6) métodos infinitesimales en el cálculo de tangentes; 7) cálculo de fluxiones; 8) cálculo de diferencias y, 9) derivada como límite. En Pino, Castro, Godino y Font (2013) se utilizan estas nueve configuraciones para la reconstrucción del significado global de la derivada, el cual es utilizado para valorar la representatividad del significado pretendido en el currículo de Bachillerato de México (a partir de las configuraciones de objetos primarios activadas en las prácticas matemáticas propuestas tanto en el Plan de Estudios como en los libros de texto de dicho nivel).

La caracterización de la complejidad de la derivada realizada en Pino-Fan, Godino y Font (2011) facilita tener elementos para diseñar cuestionarios que permiten caracterizar la comprensión de los estudiantes, futuros profesores o profesores en servicio sobre la derivada. En Pino-Fan, Godino y Font y (2018) se diseñó un cuestionario para determinar la comprensión de futuros profesores sobre la derivada en el que se incluyeron tareas que activan los diversos significados parciales de la derivada caracterizados en Pino-Fan, Godino y Font (2011).

En Gordillo y Pino-Fan (2016) la complejidad de la antiderivada se caracteriza mediante cuatro configuraciones de objetos primarios relacionadas con cuatro problemas fundamentales: a) el problema geométrico de las tangentes de una curva y la cuadratura de la misma; b) el problema de la relación fluxiones - fluentes; c) el problema sobre la relación de los diferenciales y las sumatorias; y d) el problema de la identificación de funciones elementales. La caracterización de dicha complejidad permite tener elementos para diseñar cuestionarios que permiten caracterizar la comprensión de los estudiantes, futuros profesores o profesores en servicio sobre la antiderivada. En Gordillo, Pino-Fan, Font y Ponce (2018) y en Pino-Fan, Font, Gordillo, Larios y Breda (2018) se diseñó un cuestionario para determinar la comprensión de los estudiantes universitarios sobre la antiderivada en el que se incluyeron tareas que activan los diversos significados parciales de la antiderivada caracterizados en Gordillo y Pino (2016).

Monje, Seckel y Breda (2018), por medio de un análisis comparativo entre la complejidad del objeto matemático inecuación con el currículo nacional y los textos escolares otorgados por el Ministerio de Educación de Chile, concluyeron que el tratamiento que se le otorga al objeto matemático en estudio (inecuaciones) no considera todos los componentes necesarios para la enseñanza de la inecuación a partir de su complejidad, en particular, se observó que tanto el currículo como los textos escolares dejan fuera, en particular, las inecuaciones cuadráticas y las inecuaciones con valor absoluto.

En estas investigaciones se llegó a la conclusión de que los profesores tenían que tener en cuenta la complejidad de los objetos matemáticos que enseñaban para conseguir una enseñanza más eficaz, lo cual llevó a los autores de este artículo a interesase por la manera de incorporar la problemática de la complejidad de los objetos matemáticos en la formación de profesores.

La complejidad del objeto matemático media aritmética

Rondero y Font (2015) profundizan sobre los mecanismos de articulación de la complejidad asociada al objeto matemático media aritmética. Para ello, describen dicha complejidad en términos de diferentes significados: suma de todos los valores dividida por el número de valores; estimación de una medida de una magnitud; valor representativo de un conjunto de datos; operador que asocia a un conjunto de datos un único valor; promedio de promedios y media ponderada. Enseñando una muestra representativa de estos significados, podemos decir que el maestro estaría trabajando, a través de la resolución de problemas, la representatividad del objeto matemático media aritmética y permitiendo que el estudiante articule o conecte los diferentes significados.

3.7 Metodología

En ese apartado, presentamos el contexto del estudio (participantes de la investigación, tipo de máster), explicamos el tipo de tarea que se les propuso y, aclaramos como se han analizado las respuestas de los docentes.

Contexto del estudio

Han participado de esta investigación, 95 profesores que ejercen la docencia de matemáticas en instituciones educativas públicas y privadas en diferentes provincias y ciudades de Ecuador, en particular, profesores que trabajan en los niveles de Educación General Básica Superior (EGBS) y Bachillerato General Unificado (BGU). La mayor parte de los profesores acreditan formación inicial en Licenciatura en Matemáticas, pero, algunos presentan formación inicial en Educación General Básica, Sociología u otras áreas del conocimiento. Además de ejercer la actividad de docencia en matemáticas, los profesores estaban realizando un máster profesional de formación de profesores de matemáticas de secundaria.

Dicho máster tiene como enfoque la formación continua y profesionalización docente. Dado su aspecto profesional, el máster se constituye de un curso de dos años, divididos en tres bloques: a) el bloque general (15 créditos ECTS) que incluye asignaturas de la psicología, sociología, orientación y sistema educativo ecuatoriano; b) el bloque específico (21 créditos ECTS) que contempla las asignaturas de la disciplina (matemática) y su didáctica y; c) el bloque de *prácticum* y trabajo de fin de máster (TFM) (24 créditos ECTS) que se orienta al ejercicio de articulación entre la teoría y la práctica.

Una de las asignaturas del currículo de este máster, titulada *Innovación e Investigación sobre la Propia Práctica*, impartida en el último semestre del curso, tenía como principal objetivo presentar propuestas de innovación y herramientas de valoración de la calidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas que permitan al profesor la mejora de su propia práctica. Además, la asignatura pretendía hacer una iniciación a la investigación en Didáctica de las Matemáticas y a la difusión de sus resultados.

Al final de la asignatura *Innovación e Investigación sobre la Propia Práctica* se realizó una evaluación para verificar los aprendizajes logrados por los profesores. Una de las tareas de evaluación consistía en identificar la comprensión que tienen los profesores acerca de los distintos significados de la media aritmética, haciéndoles relacionar el tipo de significado con distintos tipos de problemas planteados.

Tarea planteada a los profesores

La tarea, basada en Batanero (2000), trataba de que los profesores relacionasen los significados parciales de la media aritmética: 1) la media como valor representativo de un conjunto de datos; 2) la media como la estimación de una medida; y 3) valor que compensa los excesos con los defectos (equilibrio, equidad, etc.) con los siguientes problemas:

Problema A: Unos niños llevan a clase caramelos. Andrés lleva 5, María 8, José 6, Carmen 1 y Daniel no lleva ninguno. ¿Cómo repartir los caramelos de forma equitativa?

Problema B: Los siguientes valores se obtuvieron al medir la altura (cm.) alcanzada al saltar por un grupo de alumnos antes y después del entrenamiento. ¿Cree que el entrenamiento es efectivo?

Altura alcanzada en cm.

Alumnos	Ana	Bea	Carol	Diana	Elena	Fanny	Laia	Hilda	Inés	Juana
Antes del entrenamiento	115	112	107	119	115	138	126	105	104	115
Después del entrenamiento	128	115	106	128	122	145	132	109	102	117

Problema C: Ocho alumnos de la misma clase miden el peso de un objeto pequeño usando el mismo instrumento, obteniendo los siguientes valores en gramos: 6,2; 6,0; 6,0; 6,3; 6,1; 6,23; 6,15; 6,2. ¿Cuál sería la mejor estimación del peso real del objeto?

La tarea correcta que responde a esta identificación significado-problema, es:

- ✓ La media como valor representativo de un conjunto de datos, se corresponde con el problema B; (1- B)
- ✓ La media como la estimación de una medida, se corresponde con el problema C; (2- C)
- ✓ La media como valor que compensa los excesos con los defectos (equilibrio, equidad, etc.) se corresponde con el problema A. (3 - A)

Análisis de los datos

Para analizar las respuestas de los profesores, primero se estudió la correspondencia (o no) entre los tres significados parciales de la media aritmética contemplados en el diseño de la tarea y el problema, donde este significado es necesario para su resolución. También, se analizó la respuesta que los profesores daban para relacionar los distintos significados con los diferentes tipos de problemas.

3.8 Resultados

Al analizar las respuestas de los 95 profesores participantes, se concluye que un porcentaje importante (56%) al relacionar los tres significados con los problemas propuestos, lo hacen de forma confusa y errónea. Por otra parte, el 21% de los participantes, dan una respuesta correcta, pero su justificación no es válida (Figura 1); mientras que el 18%, señalan las respuestas correctas, sin ningún tipo de justificación

En la Figura 1, aunque el profesor hace la relación tipo de significado parcial con la tarea correspondiente de forma correcta, su justificación es confusa y poco clara. Por ejemplo, al justificar que el problema C se relaciona con el significado de la media como estimación de una medida, su justificativa para tal respuesta focaliza en que los valores, aunque sean iguales en la parte entera, se diferencian en la parte decimal, considerando a esta parte, como base para la estimación del peso real del objeto. Ese tipo de justificación, no tiene claridad ni rigurosidad desde el punto de vista matemático.

Entre los errores más frecuentes que presentan los profesores está lo de relacionar el problema B con el significado de media como estimación de una medida. En ese caso, es plausible suponer que solamente por tener muchos datos de una determinada situación, los profesores ya creen que el problema se refiere a una estimación de una medida (Figura 7):

Bloque B

Problema A → Valor que compensa los excesos con los defectos (equilibrio, equidad, etc) - Porque hay alumnos que llevan muchos caramelos y otro que no lleva ninguno. Entonces hay excesos y defectos que se solucionan con la equidad.

Problema B → La media como valor representativo de datos - Porque hace referencia a una medida que representa al entrenamiento que puede ser efectivo o no dependiendo de los resultados obtenidos al final del entrenamiento.

Problema C → La estimación de una medida Porque observamos iguales medidas en la parte entera difiriendo en la parte decimal, lo cual hace que el peso se estime según las medidas.

Figura 7. Respuesta correcta de uno de los profesores.

Fuente: los autores.

3) Media Aritmética: A continuación tienes diferentes significados de la media aritmética y diferentes problemas. Asocia cada significado con el problema que pone en juego este significado para su resolución

Significados:

- La media como valor representativo de un conjunto de datos
- La media como la estimación de una medida
- Valor que compensa los excesos con los defectos (equilibrio, equidad, etc.)

Problemas:

Problema A. Unos niños llevan a clase caramelos. Andrés lleva 5, María 8, José 6, Carmen 1 y Daniel no lleva ninguno. ¿Cómo repartir los caramelos de forma equitativa?

A = 5
M = 8
J = 6
C = 1

La suma total = 20/5
Media = 4

Se asocia con la media como valor represent de un conjunto de datos.

Problema B: Los siguientes valores se obtuvieron al medir la altura (cm.) alcanzada al saltar por un grupo de alumnos antes y después del entrenamiento. ¿Crees que el entrenamiento es efectivo?

Altura alcanzad en cm.

Alumnos	Ana	Bea	Carol	Diana	Elena	Fanny	Laia	Hilda	Inés	Juana	
Antes del entrenamiento	115	112	107	119	115	138	126	105	104	115	105,1
Después del entrenamiento	128	115	106	128	122	145	132	109	102	117	120,4

Se asocia con la medida como la estimación de una medida

Problema C. Ocho alumnos de la misma clase miden el peso de un objeto pequeño usando el mismo instrumento, obteniendo los siguientes valores en gramos: 6,2; 6,0; 6,0; 6,3; 6,1; 6,23; 6,15; 6,2. ¿Cuál sería la mejor estimación del peso real del objeto?

Se asocia con la media como estimación de una medida

Figura 8. Respuesta incorrecta de uno de los profesores.

Fuente: los autores.

También cometieron errores al relacionar el significado de la media como un valor representativo de un conjunto de datos, con el problema que trataba de la media como estimación de una medida, conforme la Figura 9.

Problema A. Unos niños llevan a clase caramelos. Andrés lleva 5, María 8, José 6, Carmen 1 y Daniel no lleva ninguno. ¿Cómo repartir los caramelos de forma equitativa?

2. La media como la estimación de una medida.

Problema B: Los siguientes valores se obtuvieron al medir la altura (cm.) alcanzada al saltar por un grupo de alumnos antes y después del entrenamiento. ¿Crees que el entrenamiento es efectivo?

Altura alcanzad en cm.

Alumnos	Ana	Bea	Carol	Diana	Elena	Fanny	Laia	Hilda	Inés	Juana
Antes del entrenamiento	115	112	107	119	115	138	126	105	104	115
Después del entrenamiento	128	115	106	128	122	145	132	109	102	117

3. Valor que compensa los excesos con los defectos (equilibrio, equidad)

Problema C. Ocho alumnos de la misma clase miden el peso de un objeto pequeño usando el mismo instrumento, obteniendo los siguientes valores en gramos: 6,2; 6,0; 6,0; 6,3; 6,1; 6,23; 6,15; 6,2. ¿Cuál sería la mejor estimación del peso real del objeto?

1. La media como un valor representativo de un conjunto de datos

Figura 9. Respuesta incorrecta de uno de los profesores.

Fuente: los autores.

Este tipo de resultado nos lleva a inferir que el conocimiento que tienen los profesores en ejercicio sobre la media aritmética, no les permite identificar el tipo de significado que es necesario poner en juego para la resolución de un problema (donde la noción de media aritmética es necesaria para su resolución).

3.9 Consideraciones finales

Una vez que se han revisado y analizado las respuestas que los 95 profesores dan a la relación entre significado y problema del objeto matemático media aritmética, se puede inferir que más de la mitad de éstos no tienen clara la comprensión de los diferentes significados de la media aritmética, lo que dificulta significativamente, aplicarlos en la resolución de problemas. Este resultado, evidencia la necesidad de trabajar, con los profesores, una muestra representativa de los diferentes significados del objeto matemático que se quiere enseñar. Se trata de un resultado coherente con lo que se propone en Rondero y Font (2015) cuando abordan la complejidad de la media aritmética y sus mecanismos de articulación, o Burgos, et al (2018), cuando hace referencia a la importancia de la pluralidad de los significados de la proporcionalidad.

El abordaje del componente Representatividad de la idoneidad epistémica, es elemento importante para una formación docente direccionada a formar profesores en conocimientos y competencias didáctico matemáticas, pues el profesor, al conocer una muestra representativa de significados de un determinado objeto matemático, puede trabajar con una muestra representativa de problemas, generando así, una mejor idoneidad epistémica; facilitando que los alumnos construyan una red de significados parciales, conectados entre sí, que les permita desarrollar la competencia matemática que les posibilita resolver diferentes tipos de problemas (en los que es necesario poner en funcionamiento alguno de los significados parciales del objeto matemático que se está enseñando).

3.10 Financiamiento

Trabajo desarrollado en el marco de los proyectos de investigación en formación de profesorado: PGC2018-098603-B-I00 (MCIU/AEI/FEDER, UE) y REDICE18-2000 (ICE-UB).

3.11 Referencias

Balcaza, T., Contreras, A., y Font, V. (2017). Análisis de Libros de Texto sobre la Optimización en el Bachillerato, *Bolema*, *31*(59), 1061-1081.

Breda, A., y Lima, V. M. R. (2016). Estudio de caso sobre el análisis didáctico realizado en un trabajo final de un máster para profesores de matemáticas en servicio. *REDIMAT - Journal of Research in Mathematics Education*, 5(1), 74-10. Doi: 10.4471/redimat.2016.1955

Breda, A., Pino-Fan, L. R., y Font, V. (2017). Meta Didactic-Mathematical Knowledge of Teachers: Criteria for The Reflection and Assessment on Teaching Practice. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 13, 1893-1918. Doi: 10.12973/eurasia.2017.01207a

Batanero, C. (2000). Significado y comprensión de las medidas de posición central. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *25*, 41-58.

Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P., Giacomone, B., y Godino, J. D. (2018). Conocimientos y competencia de futuros profesores de matemáticas en tareas de proporcionalidad. *Educação e Pesquisa, 44,* 1-22.

Contreras, A., García, M. y Font, V. (2012) Análisis de un Proceso de Estudio sobre la Enseñanza del Límite de una Función. *Bolema*, *26*(42B), 667-690.

Font, V., Breda, A., y Seckel, M. J. (2017). Algunas implicaciones didácticas derivadas de la complejidad de los objetos matemáticos cuando estos se aplican a distintos contextos. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, *10*(2), 1-23. Doi: 10.3895/rbect.v10n2.5981

Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics, 82,* 97–124.

Font, V., Planas, N., y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, *33*(1), 89-105.

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2019). The Onto-semiotic Approach: implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics, 39*(1), 37-42.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Arrieche, M. (2009) ¿Alguien sabe qué es el número? *Unión*, *19*, 34-46.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema*, *31*(57), 90-113.

Giacomone, B., Godino, J. D., y Beltrán-Pellicer, P. (2018). Developing the prospective mathematics teachers' didactical suitability analysis competence. *Educação e Pesquisa*, *44,* e172011.

Gordillo, W., & Pino-Fan, L. (2016). Una propuesta de reconstrucción del significado holístico de la antiderivada. *Bolema*, *30*(55), 535-558.

Gordillo, Pino-Fan, Font y Ponce (2018). Algunas tareas para evaluar la comprensión sobre el objeto matemático antiderivada. *Academia y virtualidad, 11*(2).

Monje, Y., Seckel, M. J., Breda, A. (2018). Tratamiento de la Inecuación en el Currículum y Textos Escolares Chilenos, *Bolema, 32*(61), 480-502.

Pino-Fan, L., Castro, W. F., Godino, J. D., y Font, V. (2013). Idoneidad epistémica del significado de la derivada en el currículo de bachillerato. *Paradigma*, *34*(2), 123 – 150.

Pino-Fan, L. R., Font, V., Gordillo, W., Larios, V., y Breda, A. (2018). Analysis of the meanings of the antiderivative used by students of the first engineering courses. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *16*(6), 1091-1113. Doi: 10.1007/s10763-017-9826-2

Pino-Fan, L., Godino, J. D., y Font, V. (2018). Assessing key epistemic features of didactic-mathematical knowledge of prospective teachers: the case of the derivative. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *21*(1), 63-94.

Pino-Fan, L., Godino, J. D. y Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa*, *13*(1), 141-178.

Rondero, C., y Font, V. (2015). Articulación de la complejidad matemática de la media aritmética. *Enseñanza de las Ciencias*, *33*(2), 29-49.

Wilhelmi, M. R., Godino, J. D., y Lacasta, E. (2007). Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. *Recherches en Didactique des Mathematiques, 27*(1), 77 - 120.

CAPÍTULO IV: ARTÍCULO CIENTÍFICO 3

4.1 Actas publicadas

Autores: Eulalia Calle, Adriana Breda y Vicenç Font.

Filiación: Universidad de Cuenca y Universidad de Barcelona.

Referencia: Calle, E.; Breda, A & Font, V. (2020). Significados de las medidas de tendencia central contemplados por profesores de matemática en sus trabajos de fin de máster. *Memorias del 5 Encuentro internacional en Educación Matemática* (457-462), Barranquilla: Universidad del Atlántico.

4.2 Indexación de las actas

Actas de un congreso internacional que han sido publicadas después de un proceso de revisión por pares. Publicación realizad en el marco del proyecto PGC2018-098603-B-I00 (MCIU/AEI/FEDER, UE).

4.3 Resumen del artículo científico 3

Este articulo atiende al objetivo específico 5 de esta tesis.

Este trabajo tiene como objetivo identificar qué significados de las medidas de tendencia central son contemplados por profesores de matemáticas en ejercicio. Para ello, se han analizado tres trabajos de fin de máster que han tenido como propuesta didáctica central el estudio de dicha noción. Se concluye que los profesores tienen presente la idea de trabajar diferentes significados, pero tienen dificultades en cómo diseñar tareas con problemas de aplicación que respondan a esta pluralidad de significados.

Palabras claves: significados de medidas de tendencia central, formación de profesores, trabajo de fin de máster.

4.4 Abstract

This work aims to identify which meanings of the measure of central tendency are contemplated by practicing mathematics teachers. For this, three master thesis projects have been analyzed, with the study of said mathematical object as a central didactic proposal. It is concluded that teachers take into account the idea of working different meanings, but have difficulties designing tasks with application problems that respond to this plurality of meanings.

Key words: meanings of central tendency measurement, teacher training, master's thesis.

4.4 Introducción

En el campo de la Didáctica de las Matemáticas, distintos modelos teóricos hacen énfasis en la importancia de abordar la complejidad del objeto matemático en la formación de profesores. Uno de dichos modelos, es el Modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico Matemáticas (CCDM) del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2019; Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017) que considera necesario que los profesores de matemáticas tengan en cuenta la complejidad del objeto matemático que se pretende enseñar (entendida ésta como pluralidad de significados) en el diseño, implementación, valoración y rediseño de procesos de instrucción. Se han realizado varias investigaciones que tienen como foco el estudio de la complejidad de los objetos matemáticos en la formación de profesores usando el EOS. Dichas investigaciones han tratado, entre otros, la complejidad de los siguientes objetos matemáticos: proporcionalidad (Burgos, Beltrán-Pellicer, Giacomone y Godino, 2018); igualdad de números reales (Wilhelmi, Godino y Lacasta, 2004); media aritmética (Calle, Breda y Font, 2020; Rondero y Font, 2015); diversos objetos matemáticos (Calle y Breda, 2019). Siguiendo esta línea de investigación, el presente trabajo se propone como objetivo identificar qué significados de la medida de tendencia central son contemplados por profesores de matemáticas en ejercicio (estudiantes de un máster profesional para formación de profesores) en las propuestas didácticas presentes en sus trabajos de fin de máster.

4.5 Marco teórico de la investigación

Usando constructos del EOS se ha generado una propuesta que articula diversas categorías de conocimientos y competencias (llamada modelo CCDM), de los profesores de matemáticas consideradas necesarias para una enseñanza idónea de las matemáticas (Godino, Batanero y Font, 2019). Este modelo teórico hace hincapié en el análisis de idoneidad didáctica, como una competencia para la reflexión global sobre la práctica docente, su valoración y mejora progresiva. La noción de idoneidad didáctica, responde a la siguiente pregunta: qué criterios seguir en el diseño de secuencias de tareas para desarrollar y evaluar la competencia matemática de los alumnos y qué cambios hacer para conseguir metas de aprendizaje superiores. Esta noción se descompone en los siguientes criterios parciales de idoneidad didáctica (Godino, Batanero y Font, 2019): Idoneidad epistémica, Idoneidad ecológica, Idoneidad cognitiva, Idoneidad afectiva, Idoneidad interaccional e Idoneidad mediacional.

2.1 La idoneidad epistémica y la complejidad de los objetos matemáticos

Para la idoneidad epistémica se ha tenido en cuenta un principio fundamental del EOS que, con los matices propios de cada enfoque, es (o puede ser) asumido por otros enfoques teóricos del área. Nos referimos al principio que se puede formular de la siguiente manera: los objetos matemáticos emergen de las prácticas, lo cual conlleva su complejidad (Rondero y Font, 2015). De este principio se deriva un componente (representatividad) cuyo objetivo es que se tenga en cuenta, dentro de lo posible, dicha complejidad en el diseño y rediseño de las secuencias didácticas.

El componente R*epresentatividad de la complejidad de los objetos matemáticos* (entendido como pluralidad de significados parciales), se refiere al grado de representatividad e interconexión de los significados institucionales implementados (o pretendidos) respecto de un significado de referencia (Giacomone, Godino y Beltrán-Pellicer, 2018; Font, Breda y Seckel, 2017). En el cuadro 2 se recogen los indicadores que evidencia si se ha tenido en cuenta o (no) este componente en el diseño e implementación de secuencias didácticas.

Cuadro 2. El componente de Representatividad y sus indicadores

Componente de la Idoneidad Epistémica	Indicadores
Representatividad de la complejidad del objeto matemático a enseñar	✓ Los significados parciales (definiciones, propiedades, procedimientos, etc.) son una muestra representativa de la complejidad de la noción matemática que se quiere enseñar ✓ Los significados parciales definiciones, propiedades, procedimientos, etc.) son una muestra representativa de la complejidad contemplada en el currículo de la noción matemática que se quiere enseñar. ✓ Para uno o varios significados parciales seleccionados para su implementación, ¿se contempla una muestra representativa de problemas? ✓ Para uno o varios significados parciales seleccionados para su implementación, ¿se contempla el uso de diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico…), tratamientos y conversiones entre los mismos?

Fuente: Font, Breda y Seckel (2017).

4.5 Metodología

En ese apartado, presentamos el contexto del estudio (participantes de la investigación, tipo de máster) y explicamos cómo se han analizado las respuestas de los docentes.

3.1 Contexto del estudio

Se ha seleccionado para esta investigación 3 trabajos de fin de máster, con la temática sobre medidas de tendencia central (MTC), realizados por profesores que ejercen la docencia de matemáticas en instituciones educativas públicas y privadas de secundaria en diferentes provincias y ciudades de Ecuador (un TFM, realizado por el profesor D, ha trabajado la MTC con estudiantes de 13 y 14 años del noveno grado de Educación General Básica, y los otros dos, realizados por las profesoras A y M, han trabajado la MTC con estudiantes de 16 y 17 años, del segundo curso de Bachillerato General Unificado).

Además de ejercer la actividad de docencia en matemáticas, los profesores estaban realizando un máster profesional de formación de profesores de matemáticas de secundaria.

Dicho máster tenía como enfoque la formación continua y profesionalización docente. Dado su aspecto profesional, el máster tuvo una duración de dos años, divididos en tres bloques: a) el bloque general (15 créditos ECTS) que incluye asignaturas de psicología, sociología, orientación y sistema educativo ecuatoriano; b) el bloque específico (21 créditos ECTS) que contempla las asignaturas de la disciplina (matemática) y su didáctica y; c) el bloque de *prácticum* y trabajo de fin de máster (TFM) (24 créditos ECTS) que se orienta al ejercicio de articulación entre la teoría y la práctica.

3.2 Análisis de los datos

Para analizar los TFM, se utilizó la noción de *representatividad del objeto matemático a ser enseñado* del EOS. En particular, se buscó identificar en los 3 TFM qué significados de las medidas de tendencia central fueron contemplados por los profesores en sus propuestas didácticas, utilizando para ello, los cuatro indicadores del Cuadro 1.

4.6 Análisis de resultados

Para los dos primeros indicadores *Muestra representativa de la complejidad del objeto matemático* (desde la perspectiva de las matemáticas y del currículum), el profesor D, inicia su propuesta ubicando los contenidos que trabaja en el currículum y menciona que "Las actividades se presentan en forma representativa y articulada a situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación utilizando expresiones matemáticas (verbal, grafica, simbólica) siendo claros y correctos en las definiciones, procedimientos, explicaciones, comprobaciones y demostraciones para el nivel educativo al que se imparten los conocimientos". Además muestra que conoce los diferentes significados parciales de la media aritmética cuando menciona que ha propuesto los siguiente problemas: "Utilizando la *estimación de la medida* se plantea el siguiente ejercicio en la actividad 5: Seis alumnos miden el peso de un objeto, con el mismo instrumento, obteniéndose los siguientes datos: 3, 8, 4, 10, 6, 2. ¿Cuál sería la mejor estimación del peso real del objeto?" y "En la actividad 10 se plantea el ejercicio utilizando la media como valor representativo: Las puntuaciones obtenidas por un grupo en una (segunda) prueba han sido: 15, 13, 16, 15, 19, 18, 15, 14, 18. ¿Crees que la prueba fue efectiva?". A pesar de que en el desarrollo de la propuesta, no se presentan de manera explícita a los estudiantes, los diferentes significados, se puede considerar la intención del profesor por abordar estos diferentes significados de media aritmética. El profesor D justifica finalmente la complejidad, indicando que se han planteado ejercicios de contextualización. Se infiere que, en su propuesta de secuencia didáctica, el profesor D tuvo en cuenta una cierta muestra representativa de los significados parciales del objeto media aritmética.

La profesora A ubica su propuesta en el currículo ecuatoriano: "El tema Medidas De Tendencia Central consta en el bloque seis denominado Estadística y Probabilidad, basado en el currículo de educación para segundo año bachillerato propuesto por el Ministerio De Educación de nuestro país, según la última reforma curricular". Sin embargo, en su desarrollo trabaja con otras destrezas relacionadas a la estadística y se concentra más en esos temas, abordando muy ligeramente las medidas de tendencia central. También señala que ha tenido limitaciones en su propuesta ya que en el "Cálculo de la media aritmética: Los alumnos aplican las fórmulas de la media simple y no usan la media ponderada; en la actividad 16 numeral 2 se observa que solo 8 estudiantes logaron resolver dicha actividad, demostrando que habían asimilado correctamente este algoritmo, mientras que los demás actuaron probando diferentes formas que no les ayudaron a resolver (ensayo-error), demostrando que existió una comprensión mecánica de su significado (Anexo 7). Acotando a esto, en la actividad 7 (Tarea) el 35% de los estudiantes optaron por calcular la mediana de variables cualitativas". Además, manifiesta que "Con relación a procurar enseñar una muestra representativa de la complejidad de las nociones enseñadas, considero que esto no se tuvo suficientemente en cuenta. Bien resulta que los problemas que se propusieron en la unidad didáctica estaban relacionados con el primer significado: Valor que compensa los excesos con los defectos (equilibrio, equidad, etc.) y no se trabajaron los otros dos". La profesora A reconoce que no se trabajó la pluri -significación de los objetos matemáticos, involucrado en las medidas de tendencia central, a pesar de que ella tiene claro los conceptos. Se infiere que en la propuesta de la profesora A no se consideró una muestra representativa de la complejidad MTC.

La profesora M ubica su propuesta en el bachillerato "Con el propósito de implementar la unidad didáctica en segundo de bachillerato se plantean los siguientes objetivos según el Ministerio de Educación (2017)", Por otra parte, la profesora M en su propuesta menciona que "Se escogieron ejercicios de razonamiento de la vida diaria y práctica de acuerdo con el nivel educativo a impartir las clases, no se observa ambigüedad, los ejercicios son claros sin crear confusión en el momento de resolverlos y ubicar su definición, las actividades planteadas están de acorde con la realización de procesos relevantes como: modelización, argumentación, resolución de problemas y de razonamiento. Los contenidos enseñados están acorde con el currículo del ministerio de educación". En esta reflexión sobre la idoneidad epistémica no se infiere que la profesora M tuviese en cuenta la representatividad de la complejidad del objeto matemático enseñado.

Para el indicador Muestra representativa de problemas de aplicación del objeto matemático, el profesor D propone, sobre todo, ejercicios en donde se aplica un solo significado para cada medida de tendencia central, aunque, como ya se mencionó, en su justificación indica que se han planteado problemas para aplicar otros significados como, para el caso de la media aritmética, la estimación de la medida y la media como valor representativo de un conjunto de datos.Por lo que se puede deducir que hay un cierto intento del profesor D por proponer problemas en los que se tenga que aplicar la pluri - significación de la media aritmética; aunque los objetos moda y mediana, solo son abordados con un único significado parcial. En cierta manera, se puede concluir que se contempla una muestra representativa de problemas para la media aritmética. La profesora A reconoce que "no se consideró una muestra representativa de problemas sobre la complejidad de las Medidas de Tendencia Central. Por ejemplo: se abordó el estudio de la Media Aritmética solo como un valor que compensa los excesos con los defectos (equilibrio, equidad, etc.) y no se abordaron los otros dos significados de la media", además de mencionar que está de acuerdo con tener en cuenta la complejidad de los objetos matemáticos y que se debe "procurar presentar una muestra representativa de problemas para la media aritmética y también para las otras medidas de centralización y no limitarnos a explicar la media como la compensación de los excesos con los defectos"; de esta manera, se concluye que, en esta propuesta de la profesora A, no se contempla una muestra representativa de problemas. La profesora M, en su propuesta, tampoco contempla una muestra representativa de problemas.

Para el indicador *Uso de diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico…), tratamientos y conversiones entre los mismos,* el profesor D menciona que ha explicado diferentes modos de expresión, aunque en la propuesta solo se visibilice en los vídeos que miran los estudiantes. Por tanto, en el caso del profesor D, se puede inferir que, para uno o varios significados parciales, seleccionados para su implementación, se contemplan, de manera implícita, diferentes modos de expresión. *L*a profesora A expone en su propuesta que está de acuerdo con tener en cuenta la complejidad de los objetos matemáticos; sin embargo, no lo hace en las tareas que propone y no contempla diferentes modos de expresión. La profesora M también implementa su propuesta didáctica sin tener en cuenta diferentes modos de expresión.

4.7 Conclusiones

Los profesores están de acuerdo en la importancia de considerar los diferentes significados de los objetos matemáticos en su proceso de enseñanza. Sin embargo, no saben cómo diseñar tareas con problemas de aplicación que respondan a esta diversidad de significados. Se trata de un resultado relevante si se tiene en cuenta que en el currículum ecuatoriano si se contempla una variedad de significados parciales de las diferentes medidas de tendencia central (media, mediana, moda), en particular es posible a partir del noveno año de EGB, profundizar mediante ejercicios y problemas, los diferentes significados de dichas medidas de tendencia central.

El desarrollo de las destrezas con criterio de desempeño, propuesto en el currículo ecuatoriano, tiene en cuenta, en cierta manera, la complejidad de los objetos matemáticos ya que los diferentes significados se pueden ir impartiendo, de acuerdo al nivel en el que se trabajan las destrezas. En este sentido es necesario continuar trabajando en la formación de profesores para que estos tengan en cuenta la complejidad de los objetos matemáticos como estrategia para mejorar los aprendizajes y desarrollar las destrezas con criterio de desempeño, propuestas por el Ministerio de Educación.

4.8 Financiamiento

Trabajo desarrollado en el marco del proyecto de investigación en formación de profesorado: PGC2018-098603-B-I00 (MCIU/AEI/FEDER, UE).

4.9 Referencias

Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P., Giacomone, B., y Godino, J. D. (2018). Conocimientos y competencia de futuros profesores de matemáticas en tareas de proporcionalidad. *Educação e Pesquisa, 44,* 1-22.

Calle, E., Breda, A. (2019). Reflexión sobre la complejidad de los objetos matemáticos en la formación inicial de profesores. En Daniel Aguilar, Martha Cobos, Luis Claudio Cortés, Enma Campozano (Eds), *La Investigación Educativa en un Mundo en Constante Transformación* (pp. 29-50). Cuenca: ASEFIE.

Calle, E., Breda, A., Font, V. (2020). ¿Qué significado atribuyen a la media aritmética profesores de matemáticas en ejercicio? *Revista Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *33*(1), 643-652.

Font, V., Breda, A., y Seckel, M. J. (2017). Algunas implicaciones didácticas derivadas de la complejidad de los objetos matemáticos cuando estos se aplican a distintos contextos. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, *10*(2), 1-23. Doi: 10.3895/rbect.v10n2.5981

Giacomone, B., Godino, J. D., y Beltrán-Pellicer, P. (2018). Developing the prospective mathematics teachers' didactical suitability analysis competence. *Educação e Pesquisa*, *44,* e172011.

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2019). The Onto-semiotic Approach: implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics, 39*(1), 37-42.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema*, *31*(57), 90-113.

Ministerio de Educación. (2017). Currículo vigente. Quito. Disponible en: <<https://educacion.gob.ec/curriculo/>>

Rondero, C., y Font, V. (2015). Articulación de la complejidad matemática de la media aritmética. *Enseñanza de las Ciencias*, *33*(2), 29-49.

Wilhelmi, M. R., Godino, J. D., y Lacasta, E. (2007). Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. *Recherches en Didactique des Mathematiques, 27*(1), 77 - 120.

CAPÍTULO V: ARTÍCULO CIENTÍFICO 4

5.1 Artículo publicado

Autores: Eulalia Calle, Adriana Breda y Vicenç Font.

Filiación: Universidad de Cuenca y Universidad de Barcelona.

Referencia: Calle, E., Breda, A., & Font, V. (2021). Reflection on the complexity of mathematical items in initial teacher education. *Journal of Higher Education Theory and Practice, 21*, 197-214. https://doi.org/10.33423/jhetp.v21i13.4801

5.2 Indexación del periodico

Artículo en revista indexada en Scopus, Education Abstracts, EBSCO Education Source, SCImago Journal & Country Rank, Scopus Sources. Factor de imapcto de 0,11 de SJR de Scopus con quartil Q4 de Scopus en el área de Educación. FWCI: 0,56. ICDS MIAR (2021): 9,5. Además, se enmarca en los proyectos PGC2018-098603-B-I00(MCIU/AEI/FEDER, UE), REDICE18-2000 (ICE- UB).

5.3 Resumen del artículo científico 4

Este artículo se relaciona con los objetivos específicos 4 y 5 de esta tesis. En particular, tiene como objetivo específico, conocer la percepción de los futuros profesores de Matemáticas sobre la importancia de contemplar la complejidad de los objetos en la práctica docente, con la finalidad de mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación General Básica (EGB) y el Bachillerato General Unificado (BGU). Para ello, 19 futuros profesores de matemáticas, que cursaban el segundo semestre de la asignatura de Algebra Superior de la Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales: Matemáticas y Física, de la Universidad de Cuenca, fueron organizados en cinco grupos y cuestionados sobre los diferentes significados de algunos objetos matemáticos y, además, se les propuso plantear problemas contextualizados en los que se tenía que aplicar un determinado significado en su resolución. Para analizar las respuestas de los futuros profesores se utilizó la herramienta Idoneidad Didáctica propuesta en el modelo de competencias y conocimientos del profesor de Matemáticas del Enfoque Ontosemiotico de la Cognición e Instrucción Matemáticas. En particular, se utilizaron como pauta de análisis los indicadores del componente Representatividad de la complejidad de los objetos matemáticos - entendida como pluralidad de significados parciales, donde cada uno de estos significados permiten resolver tipos de problemas diferentes - del criterio de idoneidad epistémica (uno de los criterios de idoneidad didáctica que se usa para valorar la calidad matemática del proceso de instrucción). Estos son: a) los significados parciales (definiciones, propiedades, procedimientos, etcétera) como una muestra representativa de la complejidad de la noción matemática que se quiere enseñar; b) los significados parciales: definiciones, propiedades, procedimientos, etc., son una muestra representativa de la complejidad contemplada en el currículo de la noción matemática que se quiere enseñar; c) para uno o varios significados parciales seleccionados para su implementación, ¿se contempla una muestra representativa de problemas?; d) Para uno o varios significados parciales seleccionados para su implementación, ¿se contempla el uso de diferentes modos de expresión (verbal, grafico, simbólico. . .), tratamientos y conversiones entre los mismos.

Los resultados muestran que en el grupo 1, al trabajar la actividad relacionada con los números complejos, se puede inferir que se tiene en cuenta el componente representatividad del criterio de idoneidad epistémica, a través de sus tres significados parciales: algebraico, geométrico y trigonométrico; además de una muestra representativa de problemas y el uso de diferentes modos de expresión, como verbal, grafico, simbólico y otros. En el grupo 2, al trabajar la actividad relacionada con el teorema de Tales se puede inferir que se tiene en cuenta el componente representatividad del criterio de idoneidad epistémica, mediante cuatro significados parciales: algebraico, aritmético, geométrico y trigonométrico; además de los otros criterios exigidos. El grupo 3, al trabajar una actividad relacionada con las ecuaciones, uso el componente representatividad del objeto maten ático "ecuaciones" de forma muy elemental. El grupo 4, al trabajar la actividad relacionada con las fracciones, también evidencia el cumplimiento del componente representatividad, a través del significado algebraico, geométrico y trigonométrico. El grupo 5, al trabajar la actividad relacionada con las funciones cuadráticas, contemplo la representatividad a través de los significados algebraico, geométrico y físico. Una vez concluidas y socializadas estas propuestas de pluri significación de los objetos matemáticos, los futuros docentes hicieron una evaluación de la actividad realizada donde manifestaron la importancia y necesidad de analizar la complejidad de los objetos matemáticos en la práctica docente, a fin de lograr aprendizajes significativos en los estudiantes de Educación General Básica y el Bachillerato. Por otra parte, argumentan que los diferentes significados se deben ir presentando a los alumnos de forma gradual. Destaca en las respuestas, además, que los participantes presentaron diferentes significados de los objetos matemáticos, tanto intra, como extra matemáticos. Tal es el caso del grupo 5 que considero los significados dentro de la Física que también corresponde a su formación profesional (Docencia en Matemáticas y Física); lo cual se puede considerar una evidencia de su capacidad para trabajar, no solo en contextos intra matemáticos, sino también en contextos extra matemáticos, es decir, como conexión que se puede dar entre las matemáticas y el mundo real. Se concluye que los estudiantes en formación docente son conscientes de que, para mejorar el aprendizaje de las Matemáticas, es necesario tener en cuenta la complejidad de los objetos matemáticos, entendida como las diferentes formas de comprender los significados y su aplicación en la resolución de problemas. Si se analiza la reflexión de los participantes en esta propuesta, se considera que estos podrían avanzar en su reflexión y profundizar en la articulación de la complejidad asociada al objeto matemático como un paso previo y necesario para avanzar a una visión unitaria del objeto maten ático. Dicha conclusión es coincidente con las que se han obtenido en diferentes procesos de formación de profesores de Matemáticas de España, México, Brasil, Ecuador, Chile, Panamá, Costa Rica, Venezuela y Argentina, en los cuales se han realizado un conjunto de investigaciones que tienen como finalidad indagar el uso del constructo, de criterios de idoneidad didáctica como herramienta para organizar la reflexión del profesor sobre su práctica. Estas investigaciones han puesto de manifiesto los siguientes aspectos: a) aunque no se incorpore explícitamente la enseñanza de los componentes e indicadores de los criterios de idoneidad didáctica, algunos de ellos, y en particular el componente <<muestra representativa de la complejidad del objeto matemático>>, están presentes de manera implícita cuando los profesores o futuros profesores hacen valoraciones de propuestas didácticas (suyas o de otros); b) Incorporar el componente <<muestra representativa de la complejidad del objeto matemático>> para valorar la idoneidad epistémica de un proceso de enseñanza y aprendizaje, no es tarea fácil, ni para los formadores ni para sus alumnos (futuros profesores o profesores en servicio), pero se puede enseñar como parte del proceso de formación del profesorado. En estos dispositivos formativos, se hace hincapié en la necesidad de realizar un estudio preliminar orientado a la reconstrucción de un significado global sobre el objeto matemático que se quiere enseñar para poder ser conscientes de su complejidad.

5.4 Abstract

This work aims to know the perception of future mathematics teachers about the complexity of mathematical objects and their possible application in teaching practice, in order to improve the teaching and learning of mathematics in Basic General Education (GBS) and the Unified General Baccalaureate (BGU). For this, 19 future professors were asked about the different meanings of some mathematical objects, and they were proposed to raise contextualized problems in which a certain meaning had to be applied in their resolution. The results show that encouraging reflection on the complexity of mathematical objects in the initial training of teachers and their relationship with the design of contextualized problems affects their way of understanding mathematical competence

Keywords: Initial teacher training, Complexity of mathematical objects, Contextualized problems.

5.5 Introduction

One of the areas of study of Mathematics Education is initial teacher training, due to the important role of the mathematics teacher in the development of instructional processes. In order to improve the training of future teachers and, as a consequence, to enhance the teaching and learning processes of mathematics, teacher training courses are emphasizing the application, in the training courses, of theoretical and methodological contributions related both to the results of research in the area of Didactics of Mathematics (DM), and to some current trends concerning the teaching of mathematics (Problem Solving, use of ICT, active learning, etc.) arising from these results.

A fundamental aspect to work on in the initial training of mathematics teachers - as pointed out by different research (Font, 2007; Pino-Fan, Godino, & Font, 2011; Pino-Fan, et al, 2018; Rondero & Font, 2015) - is the reflection about the different meanings of mathematical objects and their applications in the resolution of contextualized tasks.

To a greater or lesser extent, the complexity problem associated with the mathematical object, and the link between the components in which this complexity explodes, is present in almost all the emerging theoretical frameworks in the area of Mathematics Education. In this article we will take the Onto-semiotic Approach to Mathematical Cognition and Instruction (OSA, from now on) (Godino, Batanero, & Font, 2007 & 2019) as a theoretical reference. Working on the different meanings of a mathematical object is an aspect proposed in the OSA, where it is suggested to work on the complexity of mathematical objects through their multiple meanings.

Understanding the complexity in terms of a plurality of meanings is a result of the pragmatic view regarding meaning that is assumed in the OSA. From a pragmatic point of view, the meaning of a mathematical object is understood as the set of practices in which this object is involved in a determinant way (or not). In other words, it implies having practices regarding the field of experience that the object involves. When the meaning of a mathematical object is defined in terms of practices, as proposed in pragmatism, it appears that the meaning of a mathematical object is linked to other meanings and to other objects, since in practices this object is involved together with other mathematical objects. This fact makes it possible to make a distinction between two terms that are difficult to separate, we refer to the terms sense and meaning. Indeed, given that the object can be related to one or other objects depending on the context, the type of notation, etc. in order to give rise to different practices, we can understand sense as a partial meaning, that is, as a subset (sense) of the system of practices in which the object is determinant (meaning).

The meaning of a mathematical object understood as a system of practices can be divided into different kinds of more specific practices that are used in a specific context and with a specific type of notation, producing a specific sense. Each context helps to generate sense (allows the generation of a subset of practices), but does not generate all senses.

A mathematical object, which has been originated as an emergent of the system of practices that allows to solve a certain field of problems, with the passage of time is framed in different research programs. Each new research program allows solving new types of problems, applying new procedures, relating the object (and therefore defining) in a different way, using new representations, and so on. In this way, with the passage of time, new subsets of practices (senses) appear and extend the meaning of the object.

This work aims to know the perception of future mathematics teachers about the complexity of mathematical objects and their possible application in teaching practice, in order to improve the teaching and learning of mathematics in Basic General Education and the Unified General Baccalaureate.

The structure of the article is as follows. First, a brief explanation of some of the OSA constructs is provided, detailing the theoretical tool used in this research, followed by a description of the qualitative methodology followed, an analysis of the work of the participants in this proposal, and a discussion of the results.

5.6 Theoretical framework

In the theoretical framework we briefly explain the CCDM model of the OSA, going deeper into the representative sample component of the mathematical object complexity to be taught of the epistemic suitability criteria.

The CCDM model and Didactic Suitability

The model of mathematics teacher competences and knowledge (CCDM model) is based on OSA constructs (Godino, Batanero, & Font, 2007; Godino, Batanero, & Font,

2019) and articulates several categories of mathematics teachers' knowledge and competences considered necessary for an ideal mathematics teaching (Godino, Giacomone, Batanero, & Font, 2017). This theoretical model highlights the analysis of didactic suitability, as a competence for global reflection on teaching practice, its assessment and progressive improvement (Giacomone, Godino, & Beltrán, 2018); therefore, it answers what criteria to follow in the design of task sequences to develop and assess students' mathematical competence and what changes to make in order to achieve higher learning goals. This notion is categorized into the following partial criteria of didactic suitability (Font, Planas & Godino, 2010):

- ✓ *Epistemic suitability*: refers to the degree of representativeness and interconnectedness of the implemented (or intended) institutional meanings in relation to a reference meaning. Tasks or problem-situations are a critical component of this dimension, and should involve a variety of mathematical objects and processes.
- ✓ *Ecological suitability*: degree to which the study process is in line with the educational project of the institution, the school and society, and with the conditions of the environment in which it is developed.
- ✓ *Cognitive suitability*: degree to which intended and implemented meanings are in the area of potential learner development, as well as the proximity of achieved personal meanings to intended/implemented meanings.
- ✓ *Affective suitability*: degree of involvement (interests, emotions, attitudes and beliefs) of the students during the study process.
- ✓ *Interactional suitability*: degree to which didactic configurations and classroom discourse allow, on the one hand, to identify potential semiotic conflicts (that can be detected in advance), and on the other hand, to resolve conflicts that occur during the instructional process.
- ✓ *Means suitability*: degree of availability and adequacy of the material and time resources necessary for the development of the teaching-learning process.

According to Breda and Lima (2016) and Breda, Pino-Fan and Font (2017), a system of components and indicators is provided as a guide for the analysis and assessment of didactic suitability, which is designed for an instructional process at any educational stage.

Epistemic suitability and the complexity of mathematical objects.

The components and indicators of the didactic suitability criteria have been developed taking into consideration the trends, principles and results of research in the area of Didactics of Mathematics. Particularly, for epistemic suitability, a fundamental principle of EOS has been taken into account which, with the nuances specific to each approach, is (or can be) assumed by other theoretical approaches in the area. We refer to the principle that can be stated as follows: mathematical objects emerge from practices, which entails their complexity (Font, Godino, & Gallardo, 2013; Rondero & Font, 2015). From this principle a component (representativeness) is obtained, whose objective is to take into account, as far as possible, such complexity in the design and redesign of didactic sequences (Pino-Fan, Castro, Godino, & Font, 2013).

The *Representativeness component of the mathematical object complexity* (understood as plurality of partial meanings), refers to the degree of representativeness and interconnectedness of the implemented (or intended) institutional meanings regarding a reference meaning (Giacomone, Godino, & Beltrán-Pelliecer, 2018). Each of these meanings allows solving different types of problems, so if you want to apply the mathematical object to solve different problems (mathematical competence) it is necessary to teach a representative sample of partial meanings (Font, Breda, & Seckel, 2017).

The following table (Font, Breda, & Seckel, 2017), explains in detail, the indicators of the *Representativeness* component of the epistemic suitability criteria.

Tabla 3. The Representativeness component and its indicators

Epistemic Suitability Component	**Indicators**
Representativeness	✓ Partial meanings (definitions, properties, procedures, etc.) are a representative sample of the mathematical notion's complexity to be taught. ✓ Partial meanings (definitions, properties, procedures, etc.) are a representative sample of the complexity contemplated in the curriculum of the mathematical notion to be taught. ✓ For one or more partial meanings selected for implementation, is a representative sample of problems considered? ✓ For one or several partial meanings selected for implementation, is the use of different modes of expression (verbal, graphic, symbolic...), treatments and conversions between them considered?

Source: Font, Breda, and Seckel (2017).

Investigations regarding the complexity of different mathematical objects.

Different researches have been carried out in order to deepen the complexity of different mathematical objects: natural numbers (Godino, Font, Wilhelmi, & Arrieche, 2009), arithmetic mean (Rondero & Font, 2015), limit (Contreras, García, & Font, 2012), optimization (Balcaza, Contreras, & Font, 2017), proportionality (Godino, Beltrán-Pellicer, Burgos, & Giacomone, 2017; Burgos, Castillo, Beltrán-Pellicer & Godino, 2020), Tales' Theorem (Font, Breda, & Seckel, 2017), derivative and antiderivative, as well as students' understanding of such complexity (Pino-Fan, Godino, & Font, 2011; Pino-Fan, Castro, Godino, & Font, 2013; Pino-Fan, Font, Gordillo, Larios, & Breda, 2018; Pino-Fan, Godino, & Font, 2018), inequation (Monje, Seckel, & Breda, 2018).

For the mathematical object "derivative", Pino-Fan, Godino and Font (2011) characterize the complexity of the mathematical object by nine primary object configurations: 1) tangent in Greek mathematics; 2) variation in the Middle Ages; 3) algebraic methods for finding tangents; 4) kinematic conceptions for tracing tangents; 5) intuitive ideas of limit for calculating maxima and minima; 6) infinitesimal methods in calculating tangents; 7) Methodus fluxionum; 8) calculation of differences; and, 9) derivative as limit. In Pino-Fan, Castro, Godino and Font (2013) these nine configurations are used for the reconstruction of the global meaning of the derivative, which is used to assess the representativeness of the intended meaning in the Mexican high school curriculum (from the configurations of primary objects activated in the mathematical practices proposed both in the Curriculum and in the textbooks of that level).

The complexity characterization of the derivative made in Pino-Fan, Godino and Font (2011) facilitates having elements to design questionnaires to identify the understanding of students, future teachers or in-service teachers about the derivative. In Pino-Fan, Godino and Font and (2018) a questionnaire was designed in order to determine prospective teachers' understanding about the derivative in which tasks that activate the different partial meanings of the derivative characterized in Pino-Fan, Godino and Font (2011) were included.

In Gordillo and Pino-Fan (2016) the antiderivative complexity is defined by four primary object configurations related to four basic problems: a) the geometric problem of the tangents of a curve and the quadrature of the curve; b) the problem of the relation fluxions - fluents; c) the problem concerning the relation of differentials and summations; and d) the problem of the identification of elementary functions. The characterization of such complexity allows us to have elements available to design questionnaires that enable us to identify the understanding of students, future teachers or in-service teachers about the antiderivative. In Gordillo, Pino-Fan, Font, and Ponce (2018) and in Pino-Fan, Font, Gordillo, Larios, and Breda (2018) a questionnaire was designed to determine university students' understanding about the antiderivative in which tasks activating the different partial meanings of the antiderivative characterized in Gordillo and Pino (2016) were included.

Monje, Seckel and Breda (2018), by means of a comparative analysis between the complexity of the mathematical object, inequation with the national curriculum and the school texts granted by the Ministry of Education of Chile, concluded that the treatment given to the mathematical object under study (inequalities) does not consider all the necessary components for the teaching of the inequation from its complexity, in particular, it was observed that both the curriculum and the school texts leave out, in particular, quadratic inequalities and inequalities with absolute value.

These investigations concluded that teachers should consider the complexity of the mathematical objects they teach in order to obtain more effective teaching, which led the authors of this article to become interested in how to incorporate the problem of the mathematical object complexity in teacher training.

5.7 Objective

Understanding the perception that future mathematics teachers have about the importance of considering the complexity of mathematical objects in their teaching practice.

5.8 Methodology

In this section, we provide the study context (institution involved, research participants, etc.) and the qualitative methodology used to analyze the participants' responses.

Study context

Nineteen future mathematics teachers who are studying the second semester of the Advanced Algebra course of the Experimental Sciences Pedagogy Career: Mathematics and Physics, at the University of Cuenca, participated in the study.

Research Study Phases

In the first phase, the students jointly with the teacher agreed on a series of mathematical objects, of which they would deepen about their complexity. In the second phase, with the objects assigned and the groups organized, they were provided with literature related to the object on which they had to reflect. In a third phase, the group had to ask itself questions such as what are the partial meanings of the mathematical object worked on by the students and what representations could be given to the partial meanings of these mathematical objects. In a fourth phase, they were also asked to propose problems for each meaning. In the fifth phase, each group reported its reflections to the entire group. In a sixth phase, the whole group solved the tasks that had been proposed in each small group. Finally, the students discussed the results obtained, analyzing their application and generalization, through conclusions and recommendations to consider the mathematical objects complexity in the instructional processes.

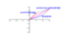
5.9 Results

The students participating in this study were organized into five groups of four or five students, sharing their proposals through a debate of ideas and presenting the following information as a result:

Tabla 4. Work done by students participating in the proposal. Group No. 1

<table>
<tr><th>MATHEMATICAL OBJECT ADDRESSED</th><th>Group No. 1: Complex numbers</th></tr>
<tr><td rowspan="2">ANALYSIS
OF THE
REPRESENTATIVENESS
AND THE</td><td>The partial meanings are a representative sample of the complexity of the mathematical notion to be taught, and they are also included in the curriculum:</td></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><td>Meaning 1:
Algebraic.</td><td>The unit of imaginary numbers is $\sqrt{-1}$ and is represented by the letter i, formed by a real number and an Imaginary one.</td></tr>
<tr><td>Meaning 2:
Geometric</td><td>This is done using a system of rectangular or Cartesian axes, where the real numbers are represented on the "x" axis and the imaginary quantities on the "y" axis. The plane formed by the real and imaginary axes is called Argand diagram.</td></tr>
<tr><td>Meaning 3:
Trigonometric</td><td>When we have a complex number in polar form (therefore, it is defined by just giving [Z] and "a") we can easily pass to the trigonometric form or also called argument module; that is, the complex number is given by its module and its angle.</td></tr>
</table>
For one or more partial meanings selected for implementation, a representative sample of problems is considered:
</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>ACTIVITY

PRESENTED</td>
<td>
<table>
<tr><td>Meaning 1:
Algebraic.</td><td>The quotient of two complex numbers is pure imaginary, their sum is real and is equal to 5. The number of the dividend is twice the number of the divisor. Finding the divisor</td></tr>
<tr><td>Meaning 2:
Geometric</td><td>Given the complex numbers, express in Argand diagram
$Z_1 = 3 + 3i$
$Z_2 = 1 - 2i$
$Z_3 = -2 - 2i$
$Z_4 = -3 + i$</td></tr>
<tr><td>Meaning 3:
Trigonometric</td><td>Convert the following complex number to its polar form: $Z = 1 - i$
Sum of complexes in binomial form
</td></tr>
</table>
In addition to the use of different ways of expression, treatments and conversions between them:
<table>
<tr><td>Meaning: Algebraic.</td><td>In the complex number a+ bi, "a" is called the real part and "bi" the imaginary part.
When a = O, the complex number is called pure imaginary. If b =0 the complex number reduces to the real number "a".</td></tr>
<tr><td>Meaning 2:
Geometric</td><td>By means of the vectorial sum we can obtain the geometrical shape representation</td></tr>
<tr><td>Meaning 3:
Trigonometric</td><td>To represent a complex number in this way, it is necessary to know the "radio vector", known as "module" and the angle that it forms with the positive part of the "x" axis.</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>

Source: developed by the authors.

Analyzing the activity performed by group No. 1, it can be evidenced that they comply with the *representativeness* of the epistemic suitability criteria, through their three partial meanings: algebraic, geometric and trigonometric; in addition to a representative sample of problems and the use of different ways of expression, such as verbal, graphic, symbolic and others.

After the discussion of this work, the presenters applied the following task, obtaining as a result that, out of the 15 participating students, 12 answered correctly to the questions posed in the task and only three students made minimal errors, as stated by the evaluators of

University of Cuenca

Pedagogy of Experimental Sciences

Complex Numbers

Name:…………………………………………………………….. Date: 07/01/2019

1 Calculate $E = \frac{x + y}{X - y^3}$

If it is fulfilled that (1 + i)2 +(1 + i)4 +(1 + i)6 +(1 + i)8 =x + yi

What is the meaning of complex number that you have used?

Figura 10. Test applied by group No. 1.

Source: developed by the authors.

group 1: "They correctly identified the algebraic meaning, but had a small error because they did not distinguish the properties of complex numbers".

The activity performed by the following group is detailed below:

Tabla 5. Work done by students participating in the proposal. Group No. 2

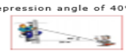
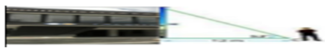
<table>
<tr><th>MATHEMATICAL OBJECT ADDRESSED</th><th>Group No. 2: Tales' Theorem</th></tr>
<tr><td rowspan="2">ANALYSIS OF THE</td><td>The partial meanings are a representative sample of the complexity of the mathematical notion to be taught, and they are also included in the curriculum:
<table>
<tr><td>Meaning 1:</td><td><u>Geometric Meaning</u>
Parallel lines. Similar triangles.
https://www.academia.edu/7659282Calvache_G_-
Plane and Space Geometry PDF</td></tr>
<tr><td>Meaning 2:</td><td><u>Algebraic Meaning</u>
Proportionality - Ratio. https://es.calameo.com/read/003671470afdd13dea2c2</td></tr>
<tr><td>Meaning 3:</td><td><u>Trigonometric Meaning</u>
Trigonometric Functions.
https://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales_didacticos/trigonometria/c1p1.html</td></tr>
<tr><td>Meaning 4:</td><td><u>Arithmetic Meaning</u>
Rule of three. https://www.smartick.es/blog/matematicas/algebra/regla-de-3-simple/</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>For one or more partial meanings selected for implementation, a representative sample of problems is considered:</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>REPRESENTATIVENES
S

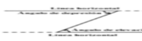
AND THE

ACTIVITY

PRESENTED</td>
<td>
<table>
<tr><td>Meaning 1:</td><td>In a triangle ABC we trace a line parallel to the side BC from a point B such that AB is 0.25 A. What is the similarity ratio?

Draw a right angle triangle with sides 15 and 8 cm. If its midpoints are joined, does it result in a triangle similar to it?
</td></tr>
<tr><td>Meaning 2:</td><td>Nine people perform a job in 16 days. How long will it take 8 people to perform the same job?
Upon arrival at the hotel we were given a map with the city's interesting places, and we were told that 5 centimeters of the map represented 600 meters of reality. Today we want to go to a park that is 8 centimeters away from the hotel on the map. How far is this park from the hotel?</td></tr>
<tr><td>Meaning 3:</td><td>An electrician, standing on a pole, observes his assistant on the ground 25 meters from the foot of the pole with a depression angle of 40°. Calculate the post height.

From a point on the ground, a student in algebra class observes the highest part of the philosophy faculty building with an elevation angle of 53° when he is 12 meters away from its base. What is the height of the faculty building?
</td></tr>
<tr><td>Meaning 4:</td><td>Sergio is in a photo with his friend Enrique. In the photo Sergio measures 4.5 cm and Enrique measures 4.25 cm. If Enrique is 1.7 meters tall in reality, how tall is Sergio?
Measure on the map the distance between the cities: Cuenca - Guayaquil and Quito - Portoviejo, find out what are the real distances between these cities. Scale: 1:50
Distance Cuenca - Guayaquil: 4 cm. Distance Quito - Portoviejo: 7 cm</td></tr>
</table>
In addition to the use of different ways of expression, treatments and conversions between them:
<table>
<tr><td></td><td>Geometric Meaning</td></tr>
<tr><td>Meaning 1:</td><td>Parallel lines: The segments of two transversal lines intercepted between parallels are proportional.

Similar triangles
• The corresponding angles must be congruent.
• The corresponding sides must be proportional.
If the corresponding angles are congruent
And the corresponding sides are proportional. Then we say that the equivalence is a similarity, and it is written: $\Delta_{ABC} \approx \Delta_{A'B'C'}$
The ratio of any two corresponding sides is the similarity ratio. It should be emphasized that this equivalence is not a congruence because to be a congruence the similarity ratio should be equal to unity.</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td></td><td>Algebraic Meaning</td></tr>
<tr><td>Meaning 2:</td><td>Proportionality:
Proportionality is a constant relationship or ratio between different measurable quantities. If one increases or decreases the other also increases or decreases proportionally, i.e. when two quantities vary directly with respect to each other.
Ratio between two numbers: Whenever we talk about Ratio between two numbers we are referring to the quotient (the result of dividing them) between them. So:
Ratio between two numbers "a" and "b" is the quotient between them: a / b
For example the Ratio between 10 and 2 is 5, since 10 / 5 = 2
 </td></tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>

Meaning 3	**TRIGONOMETRIC MEANING** **TRIGONOMETRIC RATIOS** Trigonometric ratios allow us to relate the magnitudes of angles and sides of a triangle. It is important to define them in a right angle triangle in order to be able to use the Pythagorean Theorem to obtain magnitudes of unknown sides and to find the remaining angles different from 90°.  Elevation angle: it is the angle between the horizontal plane and the line of sight to the object. Depression angle: It denotes the angle from the horizontal to the bottom of an object. 
Meaning 4	**ARITHMETIC MEANING** Rule of three: is a mechanism that allows the solution of problems related to the similarity between values, of which three are known and the fourth is an unknown. Thanks to this rule, the value of this fourth term can be discovered. In the simple rule of three, a similarity relation is established between two known values A and B and knowing a third value C, a fourth value D is calculated. $A \longrightarrow B$, $C \longrightarrow D$ $D = \frac{C \cdot B}{A}$ The similarity ratio between A and B must necessarily be direct when, within this proportionality, a higher value of A also corresponds to a higher value of B (or a lower value of A corresponds to a lower value of B).

Source: developed by the authors.

Similar to the previous case, it can be seen that the group No. 2, complies with the representativeness component of the epistemic suitability criteria, where it is expressed in four partial meanings: algebraic, arithmetic, geometric and trigonometric.

When applying the evaluation, they obtain as a result that, out of the 14 participating students, seven demonstrate a good application and connection of meanings with the problems posed, while the others, having an error, in the words of the group: "they recognize and apply the connection of the meanings with the problems posed".

UNIVERSITY OF CUENCA

Faculty of Philosophy, Literature and Educational Sciences
EXPERIMENTAL SCIENCE PEDAGOGY DEGREE PROGRAM
CASE STUDY: The Complexity of Mathematical Objects

EVALUATION.

STUDENT: Joseline Peralta DATE:

Subject: The Complexity of Mathematical Objects: Thales' Theorem

1. In the following statements, identify which mathematical object can be used to solve the problem. Please justify your answer.

1.1 The plan of a room whose dimensions are 9 m long and 6 m wide has been drawn. In the plan, the length of the room is 12 cm.
Calculate:
a) At what scale is the plan drawn?
b) What is the width of the room on the plan?

Algebraic, because the dimensions of the plan are proportional to the dimensions of the room.

1.2 According to legend, Thales measured the height of the pyramid of Cheops by placing a one-meter pole in the center of a circle of radius 1 m and waited until the shadow measured exactly one meter, at which point the shadow of the pyramid measured 147 m. How high is the pyramid?

Geometric because geometric figures are used

1.3. An engineer observes with a theodolite the top of a hill with an elevation angle of 41°, then approaches 28 m and the new elevation angle is 58° What is the height of the hill, if the theodolite measures 1.75 m?

Figura 11. Test applied by group No. 2.

Source: developed by the authors.

The detail of the next group's activity is:

Tabla 6. Work done by students participating in the proposal. Group No. 3

<table>
<tr><th>MATHEMATICAL OBJECT ADDRESSED</th><th>Group No. 3: Equations</th></tr>
<tr><td rowspan="2">ANALYSIS OF THE REPRESENTATIVENESS AND THE ACTIVITY PRESENTED</td><td>The partial meanings are a representative sample of the complexity of the mathematical notion to be taught, and they are also included in the curriculum:
<table>
<tr><td>Meaning 1: ALGEBRAIC</td><td>In a statement of the form E = F where E and F are algebraic expressions in x. the replacement set of a variable in an equation is the set of numbers for which the algebraic expressions are defined in the equation. Unless otherwise stated, we consider the replacement set to be a set of real numbers. A variable in an equation is sometimes called an undetermined variable.</td></tr>
<tr><td>Meaning 2: GEOMETRIC</td><td>The equation of the line passing through the point P(x1, y1) and having slope m.</td></tr>
<tr><td>Meaning 3: TRIGONOMETRIC</td><td>These are equalities that are only satisfied for certain series of angles. The equation's degree and the type of function will determine which angles satisfy the original equation.</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>For one or more partial meanings selected for implementation, a representative sample of problems is considered:
<table>
<tr><td>Meaning 1:</td><td>Find the solution set of the equation:
$4[3x - (5x - 1)] = 3 - 4x$</td></tr>
<tr><td>Meaning 2:</td><td>Find the equation of the line that passes through the point A(2, -4) and has a slope of (-1/3).</td></tr>
<tr><td>Meaning 3:</td><td>Solve the following equation and give the results in degrees.
$Sen\ x = 1$</td></tr>
</table>
In addition to the use of different ways of expression, treatments and conversions between them:
<table>
<tr><td>Meaning 1:</td><td>$E = F$</td></tr>
<tr><td>Meaning 2:</td><td>$Y - y_1 = m\ (x - x_1)$</td></tr>
<tr><td>Meaning 3:</td><td>$Tan^2x + Csc^2x - 3 = 0$</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

Source: developed by the authors.

Group No. 3 works on the representativeness of the mathematical object "equations" in a very elementary way and analyzes the evaluation of six of their classmates, where four of them answered the evaluation correctly and only two could not relate the meanings with the proposed problems.

It can be concluded that, in spite of presenting a rather simple work, the presenters' understanding regarding the mathematical object "equations" complexity is visible.

Problem 1: Find all the solutions of the following equation:

Sen x + cos x = √2
a. Relate it to a type of meaning.
b. Write down why you related to with that meaning.

Problem 2: "Passerby, this is the tomb of Diophantus: this is the one who with this surprising distribution tells you the number of years he lived. His childhood occupied the sixth part of his life; then during the twelfth part his cheek was covered with the first face hair He spent yet another seventh part of his life before he married, and five years later, he had a precious child who, having reached half his father's age, perished of an unfortunate death. His father had to survive him, mourning him, for four years. From all this we can deduce his age".

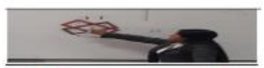
Relate to one type of meaning.

Figura 12. Test applied by group No. 3.

Source: developed by the authors

The following group presents its work, according to the following details:

Tabla 7. Work done by students participating in the proposal. Group No. 4

MATHEMATICAL OBJECT ADDRESSED	***Group No. 4: Fractions***
	The partial meanings are a representative sample of the complexity of the mathematical notion to be taught, and they are also included in the curriculum: Meaning 1: ALGEBRAIC  Meaning 2: ARITHMETIC  Meaning 3: GEOMETRIC 

<table>
<tr>
<td>ANALYSIS OF THE REPRESENTATIVENESS AND THE ACTIVITY PRESENTED</td>
<td>For one or more partial meanings selected for implementation, a representative sample of problems is considered:
<table>
<tr><td>Meaning 1:</td><td>A soccer field has unknown measurements. Nevertheless, a maintenance operator tells us that the ratio between width and length less twenty meters is equal to one half. Likewise, the sum of the length and width is 170 meters. What are the measurements of the soccer field?</td></tr>
<tr><td>Meaning 2:</td><td>Ester has spent 1/3 of her grandparents' allowance money to buy an adventure book. She also spent 1/9th of her money on buying a bag. What fraction of her money has Esther spent?</td></tr>
<tr><td>Meaning 3:</td><td>At a birthday party there are 4 yellow balloons, 2 orange balloons, 1 blue balloon and 5 red balloons. What fraction represents each color? If 5 are burst, we still have 7 balloons left, what fraction of the total are left without bursting?</td></tr>
</table>
In addition to the use of different ways of expression, treatments and conversions between them:
<table>
<tr><td>Meaning 1:</td><td>An expression that has at least one letter in the numerator or denominator.</td></tr>
<tr><td>Meaning 2:</td><td>It is the quotient of two numbers where the denominator must be different from zero, and the numerator must be integer.</td></tr>
<tr><td>Meaning 3:</td><td>It is considered as a whole that is divided into equal parts essentially indicating the relationship between the whole and a designated number of parts.</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>

Source: developed by the authors.

Group No. 4 shows compliance with the representativeness component, through algebraic, geometric and trigonometric meaning. On the other hand, in the evaluation applied to 15 students, 11 of them "Apply correctly the algebraic, geometric or trigonometric meanings, as appropriate"; while the others do not justify their given answers.

4. EVALUATION OF THE PROPOSAL

The following table shows the results obtained from the evaluation applied to our classmates, the purpose of which is to demonstrate whether the understanding of the meanings of the mathematical object Fractions is achieved.

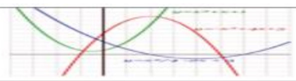
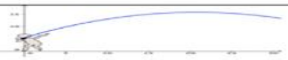
Problem 1: Solve:	Problem 2: Determine to which meaning it belongs. Please justify your answer.
$E = \frac{a-b}{(b+c-a)(b-c-a)} + \frac{b-c}{(c+a-b)(c-a-b)} + \frac{c-a}{(a+b-c)(a-b-c)}$	

Figura 13. Test applied by group No. 4.

Source: developed by the authors.

The next group shares its proposal in the following way:

Tabla 8. Work done by students participating in the proposal. Group No. 5

<table>
<tr><th>MATHEMATICAL OBJECT ADDRESSED</th><th>Group No. 5: Quadratic Functions</th></tr>
<tr><td rowspan="3">ANALYSIS OF THE REPRESENTATIVENESS AND THE ACTIVITY PRESENTED</td><td>The partial meanings are a representative sample of the complexity of the mathematical notion to be taught, and they are also included in the curriculum:
<table>
<tr><td>Meaning 1: ALGEBRAIC</td><td>They are polynomial functions of second degree of the form $f(x) = ax^2 + bx + c$</td></tr>
<tr><td>Meaning 2: GEOMETRIC</td><td>A parabola is a conic section which can be represented as follows. $F(x) = a(x - h)^2 + k$</td></tr>
<tr><td>Meaning 3: PHYSICAL</td><td>In the path followed by objects thrown upward and at a certain angle, the parabola represents the path of the ball (or rock, or arrow, or whatever has been thrown).
$$\Delta h = Vo + \frac{1}{2}gt^2$$</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>For one or more partial meanings selected for implementation, a representative sample of problems is considered:
<table>
<tr><td>Meaning 1: ALGEBRAIC</td><td>Consider the function "g" of equation $g(x)= x^2 + bx + c$. Knowing that $g(-1) = -6$ and $g(2)= -12$, write the equation of the function g and plot it.</td></tr>
<tr><td>Meaning 2: GEOMETRIC</td><td>Find the length of the focal chord of the parabola $x^2 + 8y = 0$ which is parallel to the line $3x + 4y - 7 = 0$.</td></tr>
<tr><td>Meaning 3: PHYSICAL</td><td>A fire hose shoots water at an angle of 48. How fast must the water come out so that the stream reaches a window 18 m above the ground if the firefighter is 20 m from the base of the building?</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>In addition to the use of different ways of expression, treatments and conversions between them:
<table>
<tr><td>Meaning 1: ALGEBRAIC</td><td></td></tr>
<tr><td>Meaning 2: GEOMETRIC</td><td></td></tr>
<tr><td>Meaning 3: PHYSICAL</td><td></td></tr>
</table></td></tr>
</table>

Source: developed by the authors.

Analyzing the activity performed by group No. 5, it can be observed that representativeness is considered through algebraic, geometric and physical meanings; and in the evaluation applied to 14 classmates, eight have an "excellent performance", four have a "normal performance" and only two, a "low performance" (as indicated by the presenters).

Problem D

Given the equation $X^2 + 6x + ky = 0$

For what value of K does it represent a parabola whose vertex belongs to the line y=6? For the value of K found, indicate vertex, focus and directrix.

Geometric Meaning

2. From what you have seen in class, select true or false. (2P) (2)

- A parabola will always have an intersection on the y-axis (ordinate) T
- If the discriminant is less than zero, the parabola has its vertex at a point on the abscissa axis(x) F
- The domain of a quadratic function is not constant F
- A parabola is concave upward if the value of a is equal to 0 F

3. Complete the formulas with the sign <, >, =, according to the graph (1,5P). (1.5)

UNIVERSITY OF CUENCA
FACULTY OF PHILOSOPHY, LITERATURE AND EDUCATIONAL SCIENCES
EXPERIMENTAL SCIENCE PEDAGOGY DEGREE PROGRAM
QUADRATIC FUNCTIONS LESSON

NAME: Marlon Rilovo P
SUBJECT: Advanced Algebra GROUP: I CYCLE: 2nd
TEACHERS: Sebastián Calero, Tania Orellana, Joseline Peralta and Cristina Tenesaca.
DATE: 2019/07/04
Use pencil or mechanical pencil to solve the exercises, mark the answers with a circle using blue ink pen, the use of liquid paper is allowed.

1- From what was exposed in the QUADRATIC FUNCTIONS class, relate the following problems with the meanings exposed in the class. (2p)

Problems:
Problem A: The profit motive (in thousands of dollars) of a company is given by:

$$P(x) = 5000 + 1000x - 5x^2$$

Where X is the amount (in thousands of dollars) the company spends on advertising. Find the quantity x, which the company has to spend to maximize its profit.

Algebraic Meaning

Problem B: An object is launched vertically upward with an initial velocity of Vo ft/sec. Its distance S (t), in feet above the ground is given by:

$S(t) - -16t^2 - V_o t$

Search V_o so that the highest point the object can reach is 300 feet above the ground.

Physical meaning

Problem C: Plot and state the properties of the function *f* whose equation is $f(x) = x^2 - 4x - 5$.

Algebraic meaning

Figura 14. Test applied by group No. 5.

Source: developed by the authors.

5.10 Results discussion

Of the 19 students who participated in this activity, the majority agreed that mathematical objects can be approached from their different meanings, as shown in Figure 15:

6. Do you think that mathematical objects can be represented in different ways?

(2 P)

Explain why. Yes, because as we explained above there are several ways to explain these objects in such a way that the information is provided in a variety of ways so that it reaches all our students.

8. Nowadays it is recommended to develop mathematical competencies; that is, students are expected to be able to solve different problems by applying the content that has been taught. Do you think that if we had explained only one of the proposed meanings, about arithmetic mean, the student would have been able to solve all the proposed problems? If your answer is no, what do you suggest in order to solve all the problems? (4P)
No, because some may understand and others may not, so it is suggested to address various meanings with known words for greater student comprehension. In addition, all the characteristics of the topic should be gathered in order to make the subject matter even better known.

Once these proposals of multiple meanings of mathematical objects and their respective evaluations have been concluded and shared, the perception of these future

Figura 15. Student's responses

Source: developed by the authors.

teachers is presented through the *conclusions and recommendations* of each of the groups:

Tabla 9. Conclusions and recommendations issued by the students participating in the proposal

WORKING GROUPS	**Conclusions and recommendations**
Group No. 1	The results of this work have been successful since a single topic can be broken down into smaller but no less important ones, that means, the topic is related to more branches of mathematics which can be useful to relate it and that students integrate the meanings, it is a very good proposal since students know more than a single meaning and they can work in their own way, so that they can reach the same result without having applied the same process, I would recommend to continue working with this type of proposals since the results are good.
Group No. 2	Upon observing and analyzing the results of the work, it is concluded that the application of this methodology within the classroom has been successful, since most of our classmates obtained "correct" in the majority of the problems posed. It can be stated that, in order to achieve meaningful learning with successful learning achievements, it is necessary to introduce different meanings of mathematical objects, since each student has his or her own learning and assimilation style. Concluding the peer review, it is clear that each one adopted the best meaning in accordance with the context of the problem, in order to facilitate the resolution of the problems. In our opinion, we consider that the use of didactic material for the explanation of the different meanings would be a good way to achieve meaningful learning in students. From our point of view, we think that applying exercises that illustrate

	each of the meanings of mathematical objects would help to achieve successful results. Before concluding, we would like to suggest a last recommendation based on the results and conclusions reached after the evaluation and research, so we can say that, if teachers apply this methodology in the classroom, they will achieve significant learning in students, since each one will choose the meaning that best suits their understanding or the context of the problem, obtaining excellent results.
Group No. 3	As a conclusion, we can apply this proposal since the subject is one of the most basic within algebra and it is also the basis for the next years. In the same way, students can develop their capabilities. In addition, it is a didactic proposal in which students can interact with the teacher and their classmates, thus keeping a satisfactory environment. Furthermore, we can use didactic materials and apply learning methodologies such as constructivism and technology by using applications such as GeoGebra. However, many times there will be conditions in which students, even though they know the required mathematical meanings, tend to confuse some things such as the case of trigonometric identities or factorization.
Group No. 4	Fractions are indispensable to our lives, whether in a job or in educational institutions. In order to apply them, it is necessary to have an understanding of the concept. It is very important to clarify the meanings of mathematical objects in order to facilitate the learning of mathematics. The use of didactic material is essential for facilitating understanding in the teaching-learning process; it also helps teachers and future teachers who experience this way of working to reinforce the contents they already have about fractions and to significantly build methodological strategies that will be useful for conceptualizing the notion of fractions. As a conclusion, when applying the test, the results we obtained were very positive, since the great majority of the students know how to recognize and interpret mathematical meanings, so we can say that there was significant learning. Students should know the properties to be applied when solving operations with fractions. Making the meanings of different mathematical objects known is a strategy that can really contribute a lot to teaching practice and facilitate student learning.
Group No. 5	As a consequence of the constant technological evolution, nowadays there are different sources in which we can find a lot of information related to the topic we need, either through web pages or virtual libraries, which are very useful tools for both students and teachers in order to keep up with the constant innovation of knowledge. There are different ways to teach a certain subject either in the area of mathematics or physics, mathematical objects have several meanings which are

	very helpful for teachers because they can choose the meaning that best suits the needs of students and the topic that needs to be explained depending on the subject they are teaching, so they can explain correctly and can reach their students so that they learn in a meaningful way and do not have any complications in higher courses. In order to confirm that the students are learning, the teacher must apply some periodic evaluations on the topics that have been previously explained, to which a grade is assigned to reflect the level of knowledge that the student has about the subject. We should not abuse the use of technology because it can be a great distraction, for this reason there are students who use it excessively and many times they do not use it for academic purposes. Both teachers and students should make sure that the sources from which they obtain information are reliable, since there are several sources in which the information is false.

Source: developed by the authors.

Therefore, it is concluded that, after this instructional process, the participants had the perception that it is important to consider the complexity of the mathematical objects to be taught in the teaching practice, in order to achieve significant learning in the students of Basic General Education and High School. They also state that the different meanings should be presented gradually.

It is also highlighted in the responses that the participants showed different meanings of mathematical objects, both intra, as well as extra-mathematical, such is the case of group No. 5 that considered the meanings within Physics that also corresponds to their professional training (Teaching in Mathematics and Physics); which can be considered as evidence of their ability to work, not only in intra-mathematical contexts, but also in extra-mathematical contexts, i.e. as a connection that can be given between mathematics and the real world (Font, et al, 2017).

5.11 Conclusions and implications

In different training processes for mathematics teachers in Spain, Mexico, Brazil, Ecuador, Chile, Panama, Costa Rica, Venezuela and Argentina, a series of investigations have been carried out to investigate the use of the didactic suitability criteria construct as a tool to organize the teacher's reflection on his/her practice, when this reflection is focused on the evaluation and improvement of the practice, with the objective of developing in teachers the subcompetence of analysis of the didactic suitability of an instructional process. These investigations have revealed the following aspects: 1) although the teaching of the components and indicators of the didactic suitability criteria are not explicitly incorporated, some of them, and in particular the component <<representative sample of the mathematical object complexity>>, are implicitly present when teachers or future teachers make evaluations of didactic proposals (their own or others') (Breda, 2020; Breda and Lima, 2016; Breda, Pino-Fan and Font, 2017). 2) Incorporating the component <<representative sample of the mathematical object complexity>> to assess the epistemic suitability of a teaching and learning process, is not an easy task, neither for trainers nor for their students (future teachers or in-service teachers), but it can be taught as part of the teacher training process. In these training devices, emphasis is placed on the need to carry out a preliminary study focused on the reconstruction of a global meaning of the mathematical object to be taught in order to be aware of its complexity.

According to the above-mentioned research, as a result of the experience, students in teacher training are aware that, in order to improve the learning of mathematics, it is necessary to take into consideration the complexity of mathematical objects, understood as the different ways of understanding the meanings and their application in the resolution of problems. In addition, analyzing what the participants worked on in this proposal, it gives us the idea that they could progress in their reflection and deepen in the complexity articulation associated to the mathematical object as a previous and necessary step to advance to a unitary vision of the mathematical object (Rondero and Font, 2015).

5.12 Acknowledgments

This work was supported by the research projects in teacher education: PGC2018-098603-B-100 (MINECO/FEDER, EU), REDICE18-2000 (ICE- UB).

5.13 References

Balcaza, T., Contreras, A., y Font, V. (2017). Análisis de Libros de Texto sobre la Optimización en el Bachillerato. *Bolema*, *31*(59), 1061-1081.

Breda, A. (2020). Características del análisis didáctico realizado por profesores para justificar la mejora en la enseñanza de las matemáticas. *Bolema. 34*(66), 69-88.

Breda, A., y Lima, V. M. R. (2016). Estudio de caso sobre el análisis didáctico realizado en un trabajo final de un máster para profesores de matemáticas en servicio. *REDIMAT - Journal of Research in Mathematics Education*, 5(1), 74-10. Doi: 10.4471/redimat.2016.1955

Breda, A., Pino-Fan, L. R., y Font, V. (2017). Meta Didactic-Mathematical Knowledge of Teachers: Criteria for The Reflection and Assessment on Teaching Practice. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 13, 1893-1918. Doi: 10.12973/eurasia.2017.01207a

Burgos, M., Castillo, M. J., Beltrán-Pellicer, P. & Godino, J. D. (2020). Análisis didáctico de una lección sobre proporcionalidad en un libro de texto de primaria con herramientas del enfoque ontosemiótico. *Bolema*, *34*(66), 40-68. https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a03

Contreras, A., García, M. y Font, V. (2012) Análisis de un Proceso de Estudio sobre la Enseñanza del Límite de una Función. *Bolema*, *26*(42B), 667-690.

Font, V. (2007). Comprensión y contexto: una mirada desde la didáctica de las matemáticas. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, *10*(2), 419–434.

Font, V., Breda, A., y Seckel, M. J. (2017). Algunas implicaciones didácticas derivadas de la complejidad de los objetos matemáticos cuando estos se aplican a distintos contextos. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, *10*(2), 1-23. Doi: 10.3895/rbect.v10n2.5981

Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics, 82,* 97–124.

Font, V., Planas, N., y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, *33*(1), 89-105.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM- The International Journal of Mathematics Education*, 39(1), 127 – 135.

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2019). The Onto-semiotic Approach: implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics, 39*(1), 37-42.

Godino, J. D., Beltrán-Pellicer, P., Burgos, M. y Giacomone, B. (2017). Significados pragmáticos y configuraciones ontosemióticas en el estudio de la proporcionalidad. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.* Disponible en, enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Arrieche, M. (2009) ¿Alguien sabe qué es el número? *Unión*, *19*, 34-46.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., & Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Boletim de Educação Matemática*, 31(57), 90-113.

Giacomone, B., Godino, J. D., y Beltrán-Pellicer, P. (2018). Developing the prospective mathematics teachers' didactical suitability analysis competence. *Educação e Pesquisa*, *44,* e172011.

Gordillo, W., & Pino-Fan, L. (2016). Una propuesta de reconstrucción del significado holístico de la antiderivada. *Bolema*, *30*(55), 535-558.

Gordillo, Pino-Fan, Font y Ponce (2018). Algunas tareas para evaluar la comprensión sobre el objeto matemático antiderivada. *Academia y virtualidad, 11*(2).

Monje, Y., Seckel, M. J., Breda, A. (2018). Tratamiento de la Inecuación en el Currículum y Textos Escolares Chilenos, *Bolema, 32*(61), 480-502.

Pino-Fan, L., Castro, W. F., Godino, J. D., y Font, V. (2013). Idoneidad epistémica del significado de la derivada en el currículo de bachillerato. *Paradigma*, *34*(2), 123 – 150.

Pino-Fan, L. R., Font, V., Gordillo, W., Larios, V., y Breda, A. (2018). Analysis of the meanings of the antiderivative used by students of the first engineering courses. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *16*(6), 1091-1113. Doi: 10.1007/s10763-017-9826-2

Pino-Fan, L., Godino, J. D., y Font, V. (2018). Assessing key epistemic features of didactic-mathematical knowledge of prospective teachers: the case of the derivative. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *21*(1), 63-94.

Pino-Fan, L., Godino, J. D. y Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa*, *13*(1), 141-178.

Rondero, C., & Font, V. (2015). *Articulación de la complejidad matemática de la media aritmética*. Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 33(2), 29-49.

CAPÍTULO VI: ARTÍCULO CIENTÍFICO 5

6.1 Artículo publicado

Autores: Eulalia Calle, Adriana Breda y Vicenç Font.

Filiación: Universidad de Cuenca y Universidad de Barcelona.

Referencia: Calle, E. C., Breda, A., Font, V. (2020). Conocimientos del futuro profesor de matemáticas sobre los diferentes significados de la media aritmética. *Revista Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 35(1), 138-146.

6.2 Indexación de la revista

Articulo indexado en QUALIS/CAPES PERIÓDICOS (categoría B1 en ENSINO). Articulo realizado en el marco del proyecto PGC2018-098603-B-I00 (MCIU/AEI/FEDER, UE).

6.3 Resumen del artículo científico 5

Este articulo atiende a los objetivos específicos 2 y 5 de esta tesis.

En este estudio se caracterizan los conocimientos de futuros profesores de matemáticas de la Universidad de Cuenca acerca del objeto matemático media aritmética. El estudio de abordaje cualitativo de tipo exploratorio-interpretativo indica que, de un total de veinte y dos futuros profesores participantes, veintiuno muestran poco conocimiento sobre la complejidad del objeto media aritmética (entendida como pluralidad de significados), presentando dificultades para justificar qué tipo de significado de media aritmética deben usar para resolver un determinado problema.

Palabras Clave: conocimientos matemáticos, formación inicial, media aritmética.

6.4 Abstract

This study characterizes the knowledge of future mathematics teachers at the University of Cuenca about the mathematical object of arithmetic mean. The exploratory-interpretive qualitative approach study indicates that, out of a total of twenty-two future participating teachers, twenty-one show little knowledge about the complexity of the object arithmetic mean (understood as a plurality of meanings), presenting difficulties to justify what kind of meaning of arithmetic mean they must use to solve a specific problem.

Key words: mathematical knowledge, initial formation, arithmetic mean.

6.5 Introducción

El interés por los procesos de mejora en la formación del profesorado ha generado modelos teóricos para identificar y clasificar el conocimiento del profesor (Davis y Renert, 2013; Fernández, Llinares y Valls, 2012; Liston, 2015; Mason, 2002; Rowland, Huckstep y Thwaites, 2005). El modelo de competencias y conocimientos didáctico-matemáticos del profesor de matemáticas (CCDM), basado en el Enfoque Ontosemiótico (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2019) es uno de ellos. En el marco del CCDM, el constructo criterios de idoneidad didáctica (CI) es una de las herramientas que se enseñan en diversos dispositivos formativos para desarrollar en los profesores la competencia de análisis de la idoneidad didáctica de un proceso de instrucción (Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017). La Idoneidad Didáctica se compone por seis criterios con sus respectivos componentes e indicadores. Uno de los criterios es el epistémico, que sirve para valorar la idoneidad matemática de un proceso de instrucción. Dicho criterio, contempla, entre sus componentes, presentar a los alumnos una muestra representativa de la *complejidad de los objetos matemáticos*. Tener en cuenta esta complejidad, como se sostiene en Burgos et al (2018), implica, entre otros aspectos, que el profesor pueda plantear y resolver una tipología diversificada de problemas, encontrar diferentes soluciones y analizar los conocimientos involucrados en la proposición y solución de dichos problemas.

En la línea de investigar sobre la incorporación de la reflexión sobre "la complejidad del objeto matemático a enseñar" en algunas experiencias de formación de profesores, un estudio publicado en Calle, Breda y Font (2020), con 95 docentes ecuatorianos de matemáticas en ejercicio, apunta que la mayoría de ellos no lograban relacionar, de forma correcta, el significado parcial del objeto media aritmética necesario para resolver un problema con su enunciado correspondiente, demostrando poco conocimiento acerca de la complejidad de dicho objeto matemático (entendida como pluralidad de significados). Dicho de otra manera, tenían dificultades para resolver una variedad de problemas en los que alguno de los diferentes significados de la media aritmética era determinante.

Se trata de una dificultad relevante si se tiene en cuenta que: 1) en el contexto ecuatoriano, la propuesta curricular del área de Matemática manifiesta que esta área está enfocada al desarrollo del pensamiento lógico y crítico para interpretar y resolver problemas de la vida cotidiana, implicando que el estudiante egresado del bachillerato sea competente en tomar iniciativas creativas, ser proactivo, perseverante, organizado, y trabajar en forma colaborativa para resolver problemas (Ministerio de Educación, 2016). 2) los bajos resultados de las evaluaciones aplicadas a los jóvenes ecuatorianos por organismos nacionales e internacionales

La realidad ecuatoriana, reflejada en los bajos resultados de las evaluaciones aplicadas a los jóvenes por organismos nacionales e internacionales (OCDE, 2017), requiere hacer efectiva la propuesta del Ministerio de Educación y superar las graves dificultades de los estudiantes de bachillerato, que no cuentan con conocimientos ni habilidades suficientes para participar de manera satisfactoria en la sociedad del saber. Este requerimiento del país pone en primer plano la necesidad de realizar cambios profundos en la formación inicial y continua de profesores de matemáticas, hasta alcanzar los conocimientos y las competencias didáctico matemáticas que debe tener el futuro profesor de matemáticas (Godino, 2018) para desarrollar la competencia matemática de sus alumnos.

En el marco de esta problemática, el objetivo de este trabajo es analizar los conocimientos de un grupo de futuros profesores ecuatorianos de matemáticas sobre la complejidad del objeto matemático media aritmética. Se ha seleccionado dicho objeto matemático por sus múltiples aplicaciones en contextos intra y extra matemáticos (Batanero, 2000).

A continuación, se presenta el marco teórico, la metodología utilizada, los resultados y algunas consideraciones finales.

6.6 Marco teórico

En esta sección exponemos, de manera breve, el modelo CCDM del EOS y la subcompetencia de análisis de la idoneidad didáctica y, con más detalle, el componente "*Representatividad* de la complejidad del objeto matemático que se quiere enseñar" del criterio de idoneidad epistémica. Por último, explicamos los significados parciales que se han tenido en cuenta para describir la complejidad del objeto matemático "Media Aritmética".

El modelo CCDM y la Idoneidad Didáctica

El Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción matemática (EOS) es un sistema teórico inclusivo en la Educación Matemática que articula diversas categorías de conocimientos y competencias (CCDM), de los profesores de matemáticas consideradas necesarias para una enseñanza idónea de las matemáticas (Godino, Batanero y Font, 2019). En este modelo teórico se considera que las dos competencias clave del profesor de matemáticas son la competencia matemática y la competencia de análisis e intervención didáctica, siendo el núcleo fundamental de esta última (Breda, Pino-Fan y Font, 2017) que consiste en diseñar, aplicar y valorar secuencias de aprendizaje propias y de otros, mediante técnicas de análisis didáctico y criterios de calidad, para establecer ciclos de planificación, implementación, valoración y plantear propuestas de mejora. Esta competencia general está formada por diferentes subcompetencias (Breda, Pino-Fan y Font, 2017): 1) subcompetencia de análisis de la actividad matemática ─ esta subcompetencia, en Godino, Giacomone, Batanero y Font (2017), se descompone a su vez en dos (competencia de análisis de significados globales y competencia de análisis ontosemiótico de prácticas matemáticas) ─; 2) subcompetencia de análisis y gestión de la interacción y de su efecto sobre el aprendizaje de los estudiantes; 3) subcompetencia de análisis de normas y metanormas; y 4) subcompetencia de valoración de la idoneidad didáctica de procesos de instrucción. En este trabajo nos centraremos, sobre todo en esta última subcompetencia, más en concreto una de sus componentes. La subcompetencia de valoración de la idoneidad didáctica de procesos de instrucción hace hincapié en el análisis de idoneidad didáctica, como una competencia para la reflexión global sobre la práctica docente, su valoración y mejora progresiva (Giacomone, Godino y Beltrán, 2018); por lo tanto, responde a qué criterios seguir en el diseño de secuencias de tareas, cómo desarrollar y evaluar la competencia matemática de los alumnos y qué cambios hacer para conseguir metas de aprendizaje superiores. Esta noción se descompone en los siguientes criterios parciales de idoneidad didáctica (Font, Planas y Godino, 2010):

✓ *Idoneidad epistémica*: se refiere al grado de representatividad e interconexión de los significados institucionales implementados (o pretendidos) respecto de un significado de referencia. Las tareas o situaciones-problemas son un componente fundamental en esta dimensión, y deben involucrar diversos objetos y procesos matemáticos.

✓ *Idoneidad ecológica*: grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro, la escuela y la sociedad y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla.

✓ *Idoneidad cognitiva*: grado en que los significados pretendidos e implementados están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/implementados.

✓ *Idoneidad afectiva*: grado de implicación (intereses, emociones, actitudes y creencias) del alumnado en el proceso de estudio.

✓ *Idoneidad interaccional*: grado en que las configuraciones didácticas y el discurso en la clase permiten, por una parte, identificar conflictos semióticos potenciales (que se puedan detectar a priori), y por otra, resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción.

✓ *Idoneidad mediacional*: grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.

En Breda y Lima (2016) y Breda, Pino-Fan y Font (2017) se aporta un sistema de componentes e indicadores que sirve de guía de análisis y valoración de la idoneidad didáctica, que está pensado para un proceso de instrucción en cualquier etapa educativa.

La idoneidad epistémica y la complejidad de los objetos matemáticos

Tanto los componentes como los indicadores de los criterios de idoneidad didáctica se han confeccionado teniendo en cuenta las tendencias, los principios y los resultados de la investigación en el área de Didáctica de las Matemáticas (Breda, Font y Pino-Fan, 2018). En particular, para la idoneidad epistémica se ha tenido en cuenta un principio fundamental del EOS que, con los matices propios de cada enfoque, es (o puede ser) asumido por otros enfoques teóricos del área. Nos referimos al principio que se puede formular de la siguiente manera: los objetos matemáticos emergen de las prácticas, lo cual conlleva su complejidad (Font, Godino y Gallardo, 2013; Rondero y Font, 2015). De este principio se deriva un componente (representatividad) cuyo objetivo es que se tenga en cuenta, dentro de lo posible, dicha complejidad en el diseño y rediseño de las secuencias didácticas (Pino-Fan, Castro, Godino y Font, 2013).

El componente *Representatividad de la complejidad de los objetos matemáticos* (entendida como pluralidad de significados parciales), se refiere al grado de representatividad e interconexión de los significados institucionales implementados (o pretendidos) respecto de un significado de referencia (Font, Pino-Fan y Breda, 2020; Giacomone, Godino y Beltrán-Pelliecer, 2018).

Cada uno de estos significados permite resolver tipos de problemas diferentes, por lo cual, si se quiere conseguir que el alumno sea competente en la resolución de una variedad de problemas, donde el objeto matemático en cuestión tenga un rol determinante, es necesario que el alumno disponga de una red de significados parciales de dicho objeto bien conectados entre sí (Font, Breda y Seckel, 2017). En esta línea, se han realizado diferentes investigaciones sobre la complejidad de la media aritmética, así como la comprensión que tienen de ella los estudiantes y profesores (Batanero, 2000, Calle, Breda y Font, 2020, Rondero y Font, 2015).

En la siguiente tabla (Font, Breda y Seckel, 2017), se recogen los indicadores del componente *Representatividad de la complejidad de los objetos matemáticos* del criterio de idoneidad epistémica.

Tabla 10. El componente de Representatividad y sus indicadores

Componente de la Idoneidad Epistémica	Indicadores
Representatividad	✓ Los significados parciales (definiciones, propiedades, procedimientos, etc.) son una muestra representativa de la complejidad de la noción matemática que se quiere enseñar ✓ Los significados parciales definiciones, propiedades, procedimientos, etc.) son una muestra representativa de la complejidad contemplada en el currículo de la noción matemática que se quiere enseñar. ✓ Para uno o varios significados parciales seleccionados para su implementación, ¿se contempla una muestra representativa de problemas? ✓ Para uno o varios significados parciales seleccionados para su implementación, ¿se contempla el uso de diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico…), tratamientos y conversiones entre los mismos?

Fuente: Font, Breda y Seckel (2017).

Primero hay que valorar si los significados parciales (definiciones, propiedades, procedimientos, etc.) seleccionados para su implementación son una muestra representativa de la complejidad de la noción matemática que se quiere enseñar (para ello la mirada se dirige a las matemáticas). En segundo lugar, dado que el currículo contempla parte de estos significados parciales, hay que valorar si la muestra de significados presentes en el proceso de instrucción son también una muestra representativa de los contemplados en el currículo (en el currículo en general, en la etapa o ciclo o en el curso donde se realiza la implementación). Una vez seleccionados uno o varios significados parciales para su implementación, valorar. Como mínimo, si se contempla una muestra representativa de representaciones del objeto y de problemas en los que se aplica o emerge.

Complejidad del objeto matemático Media Aritmética

Rondero y Font (2015) profundizan sobre los mecanismos de articulación de la complejidad asociada al objeto matemático media aritmética. Para ello, describen dicha complejidad en términos de diferentes significados: suma de todos los valores dividida por el número de valores; estimación de una medida de una magnitud; valor representativo de un conjunto de datos; operador que asocia a un conjunto de datos un único valor; promedio de promedios y media ponderada. Enseñando una muestra representativa de estos significados, podemos decir que el maestro estaría trabajando, a través de la resolución de problemas, la representatividad del objeto matemático media aritmética y permitiendo que el estudiante articule o conecte los diferentes significados. En esta investigación hemos utilizado tres significados distintos: La media como valor representativo de un conjunto de datos; La media como la estimación de una medida; La media como valor que compensa los excesos con los defectos.

En esta investigación, teniendo en cuenta los sujetos participantes, se consideraron tres de los significados parciales de la media aritmética contemplados en Batanero (2000): la media como *valor representativo de un conjunto de datos*; la media como la *estimación de una medida* y la media como *valor que compensa los excesos con los defectos* (equilibrio, equidad, etc.).

6.7 Metodología

En esta investigación se utilizó una metodología con un enfoque interpretativo de tipo exploratorio. Se contó con la participación de 22 futuros profesores de matemáticas que se encontraban cursando la asignatura de Álgebra en la Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales. El proceso se inició con la presentación de tres significados parciales del objeto media aritmética: la media como valor representativo de un conjunto de datos; la media como la estimación de una medida y la media como valor que compensa los excesos con los defectos (equilibrio, equidad, etc.), significados extraídos de Batanero (2000). Una vez que se interiorizó la pluri-significación de la media aritmética, se consultó sobre la necesidad de que los estudiantes comprendan estos significados y puedan aplicar en la resolución de problema de contexto, para desarrollar competencias matemáticas. Cuando los futuros docentes, indicaron estar de acuerdo, se aplicó una prueba con tres problemas que debían resolver, relacionándolos con sus significados correspondientes y justificando su respuesta. Los significados y problemas propuestos están ubicados en un nivel acorde a su formación inicial como profesionales:

Tabla 11. Problemas propuestos a los futuros profesores

	Problema A: Unos niños llevan a clase caramelos. Andrés lleva 5, María 8, José 6, Carmen 1 y Daniel no lleva ninguno. ¿Cómo repartir los caramelos de forma equitativa?
	Problema B: Los siguientes valores se obtuvieron al medir la altura (cm.) alcanzada al saltar por

un grupo de alumnos antes y después del entrenamiento. ¿Cree que el entrenamiento es efectivo?
Altura alcanzada en cm.

Alumnos	Ana	Bea	Carol	Diana	Elena	Fanny	Laia	Hilda	Inés	Juana
Antes del entrenamiento	115	112	107	119	115	138	126	105	104	115
Después del entrenamiento	128	115	106	128	122	145	132	109	102	117

Problema C: Ocho alumnos de la misma clase miden el peso de un objeto pequeño usando el mismo instrumento, obteniendo los siguientes valores en gramos: 6,2; 6,0; 6,0; 6,3; 6,1; 6,23; 6,15; 6,2. ¿Cuál sería la mejor estimación del peso real del objeto?

Fuente: Batanero (2000).

En el análisis de los resultados se valoró el razonamiento, a través de la justificación de las respuestas brindadas.

6.8 Resultados y discusión

Los resultados obtenidos con 22 futuros profesores de Matemáticas, al relacionar significados de media aritmética con problemas propuestos, muestran que la mayoría puede hacerlo de manera correcta (Tabla 12). No obstante, el razonamiento reflejado en la justificación dada a cada problema, indica que los docentes no tienen presente la complejidad del objeto matemático "media aritmética".

Tabla 12. Evaluación de respuestas dadas por 22 futuros profesores

Significados de media aritmética	**Respuestas correctas**	**Respuestas incorrectas**
1. La media como valor que compensa los excesos con los defectos	22	0
2. La media como la estimación de una medida	16	6
3. La media como valor representativo de un conjunto de datos	16	6

Fuente: de los autores.

Por un lado, las justificaciones dadas al problema A, son en su mayoría aceptables, debido a que, en el enunciado del problema, se sugiere el significado de "media aritmética" como equilibrio o equidad que representa el distribuir los caramelos entre los niños (Figura 1).

Por otro lado, los problemas B y C implican un razonamiento más exigente, más difícil de justificar. A pesar de no responder de manera aceptable, un importante porcentaje de docentes resuelven matemáticamente los problemas; es decir, obtienen la media aritmética y responden más bien a las preguntas de los problemas propuestos, más no a la relación solicitada (relacionar el tipo de problema con su significado correspondiente y justificar dicha relación) (Tabla 13).

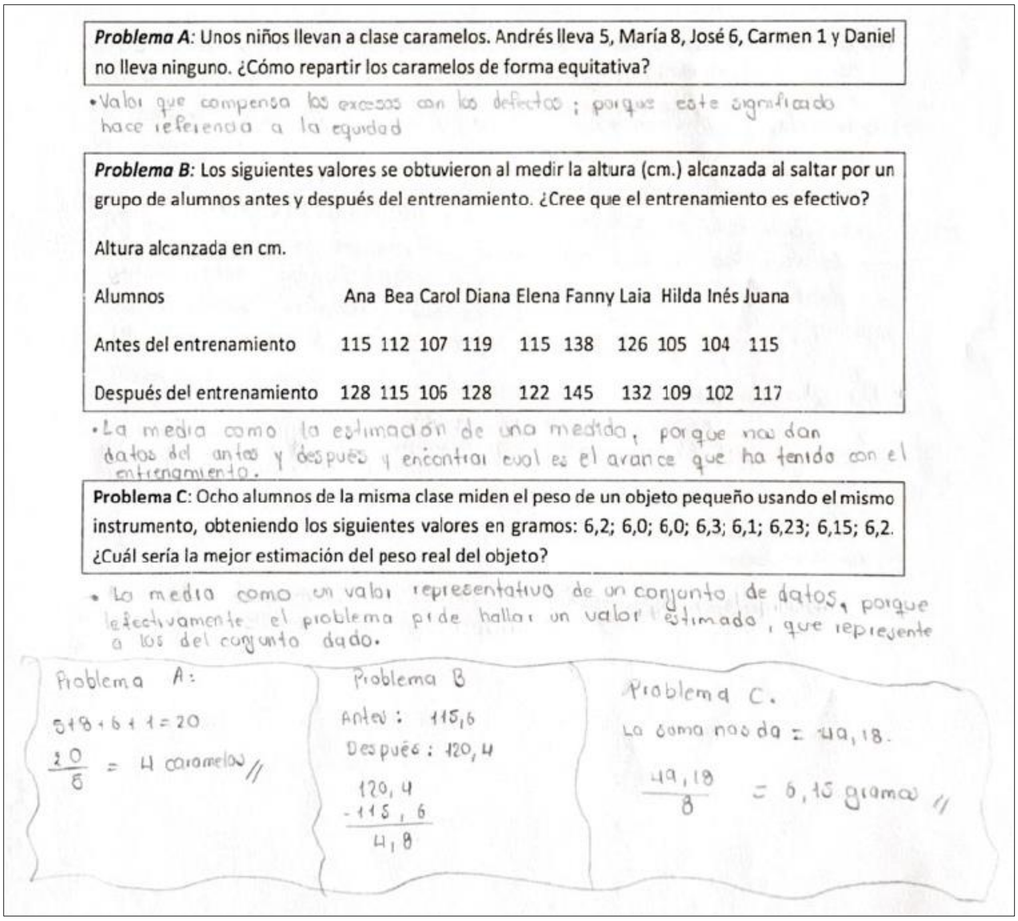
Tabla 13. Nivel de aceptación a las justificaciones dadas por los futuros profesores de matemáticas, cuando relacionan los significados de media aritmética con tres problemas propuestos

	Justificaciones de respuestas dadas	Total	Porcentaje de aceptación de resolución de los problemas.
Problema A:	Aceptables	18	
	No aceptables	4	82%
	Aceptables	1	
Problema B:	No aceptables	17	5%
	Ninguna justificación	4	
Problema C:	Aceptables	1	
	No Aceptables	21	5%

Fuente: de los autores.

A partir de estos resultados, se puede inferir que los profesores en formación pueden resolver los problemas propuestos, pero tienen dificultades para reflexionar sobre los diferentes tipos de significados y el establecimiento de relaciones entre estos significados y los problemas que permiten resolver.

Dicho de otra manera, los futuros profesores tienen dificultad para comprender que existen varios significados de un mismo objeto matemático, entendidos como su complejidad, que pueden ayudar a resolver un amplio abanico de problemas.


Problema A: Unos niños llevan a clase caramelos. Andrés lleva 5, María 8, José 6, Carmen 1 y Daniel no lleva ninguno. ¿Cómo repartir los caramelos de forma equitativa?

•Valor que compensa los excesos con los defectos; porque este significado hace referencia a la equidad

Problema B: Los siguientes valores se obtuvieron al medir la altura (cm.) alcanzada al saltar por un grupo de alumnos antes y después del entrenamiento. ¿Cree que el entrenamiento es efectivo?

Altura alcanzada en cm.

Alumnos	Ana	Bea	Carol	Diana	Elena	Fanny	Laia	Hilda	Inés	Juana
Antes del entrenamiento	115	112	107	119	115	138	126	105	104	115
Después del entrenamiento	128	115	106	128	122	145	132	109	102	117

•La media como la estimación de una medida, porque nos dan datos del antes y después y encontrar cual es el avance que ha tenido con el entrenamiento.

Problema C: Ocho alumnos de la misma clase miden el peso de un objeto pequeño usando el mismo instrumento, obteniendo los siguientes valores en gramos: 6,2; 6,0; 6,0; 6,3; 6,1; 6,23; 6,15; 6,2. ¿Cuál sería la mejor estimación del peso real del objeto?

• La media como un valor representativo de un conjunto de datos, porque efectivamente el problema pide hallar un valor estimado, que represente a los del conjunto dado.

Problema A:
$5+8+6+1=20$
$\frac{20}{5} = 4$ caramelos //

Problema B
Antes: 115,6
Después: 120,4
$120,4 - 115,6 = 4,8$

Problema C.
La suma nos da = 49,18.
$\frac{49,18}{8} = 6,15$ gramos //

Figura 16. Respuesta de un futuro profesor.

Fuente: los autores

Los resultados obtenidos en esta investigación, muestran que los docentes en formación inicial en el área de matemáticas, si bien pueden resolver los problemas propuestos de forma correcta (Figura 1), tienen dificultades para reflexionar sobre la complejidad del objeto matemático “media aritmética”. (Rondero y Font 2015). Se trata de un resultado coincidente con la investigación de Leavy y O’Loughlin (2006), cuando analizan la comprensión procedimental y conceptual del objeto matemático media aritmética, la cual muestra, en muchos casos, la limitada comprensión conceptual de dicho objeto por parte de los futuros profesores.

Este resultado coincide con otras investigaciones que muestran que los profesores presentan dificultades en interpretar aspectos epistémicos de las tareas que proponen a sus estudiantes y de su potencial educativo (Stahnke, Schueler y Roesken-Winter, 2016).

6.9 Conclusiones

Este trabajo tenía como objetivo caracterizar los conocimientos del futuro profesor de matemáticas sobre los diferentes significados de la media aritmética. Los resultados muestran que los 22 futuros docentes de la Universidad de Cuenca pueden resolver los problemas sobre la media aritmética; sin embargo, cuando se les pide justificar sus respuestas, se infiere que tienen dificultades para relacionar el tipo de problema propuesto con el significado de la media aritmética determinante para la resolución del problema y aún más para justificar dicha relación.

Dada la importancia que tiene el desarrollo de la competencia matemática de los alumnos en el currículum ecuatoriano y, más en general, en el currículum de muchos países, es importante fomentar la reflexión de los futuros profesores sobre los diferentes significados de un objeto matemático, ya que presentar una muestra representativa de esta variedad de significados permite a los alumnos poder resolver una variedad de problemas extra matemáticos (Font, Breda y Seckel, 2017).

6.10 Agradecimientos

Trabajo desarrollado en el marco del proyecto de investigación PGC2018-098603-B-I00 (MCIU/AEI/FEDER, UE).

6.11 Referencias

Batanero, C. (2000). Significado y comprensión de las medidas de posición central. *Uno.*

Revista de Didáctica de las Matemáticas, *25*, 41-58.

Breda, A., y Lima, V. M. R. (2016). Estudio de caso sobre el análisis didáctico realizado en un trabajo final de un máster para profesores de matemáticas en servicio. *REDIMAT - Journal of Research in Mathematics Education*, *5*(1), 74-10. Doi: 10.4471/redimat.2016.1955

Breda, A., Font, V., & Pino-Fan, L. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. *Bolema, Rio Claro*, *32*(60), 255-278.

Breda, A., Pino-Fan, L. R., y Font, V. (2017). Meta Didactic-Mathematical Knowledge of Teachers: Criteria for The Reflection and Assessment on Teaching Practice. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 13, 1893-1918. Doi: 10.12973/eurasia.2017.01207a

Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P., Giacomone, B., y Godino, J. D. (2018). Conocimientos y competencia de futuros profesores de matemáticas en tareas de proporcionalidad. *Educação e Pesquisa, 44,* 1-22.

Calle, E., Breda, A., Font, V. (2020). ¿Qué significado atribuyen a la media aritmética profesores de matemáticas en ejercicio? *Revista Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *33*(1), 643-652.

Davis, B., & Renert, M. (2013). Profound understanding of emergent mathematics: broadening the construct of teacher‟ disciplinary knowledge. *Educational Studies in Mathematics Education*, *82*(2), pp. 245-265. doi: 10.1007/s10649-012-9424-8

Fernández, C., Llinares, S., & Valls, J. (2012). Learning to notice students‟ mathematical thinking through on-line discussions. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education Online First*. doi: 10.1007/s11858-012-0425-y.

Font, V., Breda, A., & Seckel, M. J. (2017). Algunas implicaciones didácticas derivadas de la complejidad de los objetos matemáticos cuando estos se aplican a distintos contextos. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, *10*(2), 1-23.

Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics, 82,* 97–124.

Font, V., Planas, N., y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, *33*(1), 89-105.

Font, V., Pino-Fan, L., Breda, A. (2020). Una evolución de la mirada sobre la complejidad de los objetos matemáticos. *Revista Paradigma*, *41*(1), 107-129.

Giacomone, B., Godino, J. D., y Beltrán-Pellicer, P. (2018). Developing the prospective mathematics teachers' didactical suitability analysis competence. *Educação e Pesquisa*, *44,* e172011.

Godino, J. D., Batanero, C., Font, V. (2019). El enfoque ontosemiótico: implicaciones sobre el carácter prescriptivo de la didáctica. *For the Learning of Mathematics*, *39*(1), 37-42.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema*, *31*(57), 90-113.

Leavy, A., O'Loughlin, N. (2006). Preservice teachers understanding of the mean: Moving beyond the arithmetic average. *Journal of mathematics teacher education*, *9*(1), 53-90.

Liston, M. (2015). The use of video analysis and the Knowledge Quartet in mathematics teacher education programmes. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *46*(1), 1-12. doi:10.1080/0020739X.2014.941423

Mason, J. (2002). *Researching your own practice. The discipline of noticing.* London: Routledge-Falmer.

Ministerio de Educación. (2016). Currículo vigente. Quito. Disponible en: << https://educacion.gob.ec/curriculo/>>

OCDE (2017), Marco de Evaluación y de Análisis de PISA para el Desarrollo: Lectura, matemáticas y ciencias.

Pino-Fan, L., Castro, W. F., Godino, J. D., y Font, V. (2013). Idoneidad epistémica del significado de la derivada en el currículo de bachillerato. *Paradigma*, *34*(2), 123 – 150.

Rondero, C., y Font, V. (2015). Articulación de la complejidad matemática de la media aritmética. *Enseñanza de las Ciencias*, *33*(2), 29-49.

Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A. (2005). Elementary teachers" mathematics subject knowledge: The Knowledge Quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *8*(3), 255-281. doi:10.1007/s10857-005-0853-5

Stahnke, R; Schueler, S., & Roesken-Winter, B. (2016). Teachers" perception, interpretation, and decision-making: a systematic review of empirical mathematics education research. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *48*(1), 1-27. doi:10.1007/s11858-016-0775-y

CAPÍTULO VII: ARTÍCULO CIENTÍFICO 6

7.1 Artículo publicado

Autores: Eulalia Calle, Adriana Breda y Vicenç Font.

Filiación: Universidad de Cuenca y Universidad de Barcelona.

Referencia: Calle, E., Breda, A., y Font, V. (2022). La complejidad de la noción a enseñar en la valoración de la práctica preprofesional de futuros profesores de matemáticas ecuatorianos. *Redimat-Revista de Investigacion dn Didactica de las Matematicas, 11*(3), 218-249. https://doi.org/10.17583/redimat.10986

7.2 Indexación de la revista

Artículo en revista indexada en: WoS Emerging Sources Citation Index, Education & Educational Research in ESCI Edition 64/82 Q4. Educational research abstracts (ERA), ERIC (Education Resources Information Center), DIALNET. Evaluada en: Sello de calidad FECYT ERIHPlus LATINDEX. Catálogo v1.0 (2002 - 2017) REDIB. Red Iberoamericana de Innovación y conocimiento científico. Este trabajo se desarrolló en el marco de proyectos de investigación en formación docente: PGC2018-098603-B-I00 (MINECO / FEDER, EU), PID2021-127104NB-I00 (MINECO / FEDER, EU) y Competencias y conocimientos del docente de primaria y secundaria para la enseñanza de las matemáticas en modalidad híbrida (SENACYT/FIED21-002).

7.3 Resumen del artículo científico 6

Este articulo atiende a los objetivos específicos 4 y 5 de esta tesis.

Las reflexiones sobre la complejidad de los objetos matemáticos, y la conexión de los componentes de esta complejidad, son frecuentes en muchos de los enfoques teóricos utilizados en el área de la Educación Matemática. Como consecuencia de estas reflexiones hay una tendencia a que la formación del profesorado de matemáticas contemple secuencias didácticas para que los profesores tengan en cuenta la complejidad del objeto matemático a enseñar. En esta línea, el primer objetivo del presente trabajo es determinar el papel que tienen las matemáticas enseñadas en la guía de valoración de la práctica preprofesional utilizada por los docentes tutores de la Carrera de Educación Matemática de la Universidad de Cuenca; mientras que el segundo objetivo es describir un proceso de instrucción cuyo objetivo es incorporar en esta guía la valoración de las matemáticas enseñadas, en particular la valoración de la

incorporación de la complejidad del objeto matemático a enseñar. Los resultados muestran que la guía no valora las matemáticas enseñadas y que en las secuencias didácticas implementadas por los futuros profesores siguiendo esta guía no tienen muy en cuenta dicha complejidad.

Palabras clave: Formación de profesores de matemáticas; Valoración de la práctica; Representatividad de la complejidad del objeto matemático a enseñar.

7.4 Abstract

Reflections on the complexity of mathematical objects, and the connection of the components of this complexity, are frequent in many of the theoretical approaches used in the area of Mathematics Education. As a consequence of these reflections, there is a tendency for mathematics teachers training to contemplate didactic sequences so that teachers consider the complexity of the mathematical object to be taught in the didactic sequences that they design and implement with their students. In this line, the first objective of this work is to determine the role of mathematics taught in the assessment guide of work practice used by the guidance teachers of the Mathematics Education Career at the University of Cuenca; while the second objective is to describe an instruction process whose objective is to incorporate in this guide the assessment of the mathematics taught, in particular the assessment of the incorporation of the complexity of the mathematical object to be taught. The results show that the guide does not value the mathematics taught and that in the didactic sequences implemented by future teachers according to it, they do not consider the complexity of the object to be taught.

Keywords: Mathematics teacher training; Assessment of the practice; Representativity of the complexity of the mathematical object to be taught.

7.5 Introducción

En la investigación centrada en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, se ha considerado un tema de interés el estudio de las conexiones matemáticas, dado que contribuyen a la comprensión de los conceptos matemáticos (García García, 2019; Hiebert & Carpenter, 1992; Koestler et al., 2013; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2014; Rodríguez-Nieto et al., 2021; Zengin, 2019). Los resultados de la investigación sobre las conexiones han sido considerados en currículos de diferentes países; en particular, se tuvieron en cuenta en los estándares y principios del NCTM (2000) "cuando los estudiantes conectan ideas matemáticas, su comprensión es más profunda y duradera. Pueden ver conexiones matemáticas en la rica interacción entre temas matemáticos, en contextos que relacionan las matemáticas con otras materias, y en sus propios intereses y experiencia" (p. 64). La importancia que se da al establecimiento de conexiones matemáticas, en particular las llamadas conexiones intra-matemáticas, va de la mano con la importancia que se da en la Educación Matemática a la reflexión sobre la complejidad de los objetos matemáticos.

Las reflexiones sobre la complejidad de los objetos matemáticos y la conexión de los componentes de esta complejidad, son frecuentes en muchos de los enfoques teóricos utilizados en el área de la Educación Matemática, en particular, los Criterios de Idoneidad Didáctica (CID) del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción Matemáticos (EOS) consideran la reflexión sobre la complejidad de los objetos matemáticos como uno de los componentes del conocimiento que debe tener el profesor de matemáticas en el ejercicio de su profesión (Breda et al., 2018; Godino, 2013; Godino et al., 2007, 2019). Como consecuencia de estas reflexiones hay una tendencia a que la formación del profesorado de matemáticas contemple secuencias didácticas para que los profesores tengan en cuenta la complejidad del objeto matemático a enseñar en las secuencias didácticas que diseñen e implementen con sus alumnos (Calle et al., 2021, 2023).

Las investigaciones sobre la incorporación de este componente en la formación de profesores han puesto de manifiesto los siguientes aspectos (Font et al., 2020): 1) aunque no se incorpore explícitamente la enseñanza de los componentes e indicadores de los CID, algunos de ellos, y en particular el componente <<muestra representativa de la complejidad del objeto matemático>>, están presentes de manera implícita cuando los profesores o futuros profesores hacen valoraciones de propuestas didácticas (suyas o de otros) (Breda, 2020; Breda et al., 2017; Breda & do Rosário Lima, 2016); 2) Incorporar el componente <<muestra representativa de la complejidad del objeto matemático>> para valorar la idoneidad epistémica de un proceso de enseñanza y aprendizaje, no es tarea fácil, ni para los formadores ni para sus alumnos (futuros profesores o profesores en servicio), pero se puede enseñar como parte del proceso de formación del profesorado (Calle et al., 2021, 2023; Font, Breda, & Pino Fan, 2017; Hummes, 2022; Seckel & Font, 2020). En estos dispositivos formativos, se hace hincapié en la necesidad de realizar un estudio preliminar orientado a la reconstrucción de un significado global sobre el objeto matemático que se quiere enseñar para poder ser conscientes de su complejidad (Font et al., 2020).

En esta línea, el primer objetivo del presente trabajo es determinar el papel que tienen las matemáticas enseñadas en la guía de valoración de la práctica preprofesional utilizada por los docentes tutores de la Carrera de Educación Matemática de la Universidad de Cuenca; mientras que el segundo objetivo es describir un proceso de instrucción cuyo objetivo es incorporar en esta guía la valoración de las matemáticas enseñadas, en particular la valoración de la incorporación de la complejidad del objeto matemático a enseñar.

Después de esta introducción, se presenta el referente teórico de esta investigación: Los Criterios de Idoneidad Didáctica, la metodología cualitativa utilizada para el análisis de los datos, los resultados obtenidos y su discusión, así como unas conclusiones finales.

7.6 Marco teórico: Criterios de Idoneidad Didáctica

El principal referente de esta investigación es el constructo Criterios de Idoneidad Didáctica (CID). La noción de idoneidad didáctica es una herramienta teórica para la valoración de procesos de instrucción. Fijado un tema específico en un contexto educativo determinado, la noción de idoneidad didáctica (Breda et al., 2018; Godino, 2013) lleva a poder responder preguntas del tipo: ¿Cuál es el grado de idoneidad didáctica del proceso de enseñanza-aprendizaje implementado?, ¿qué cambios se deberían introducir en el diseño e implementación del proceso de instrucción para incrementar su idoneidad didáctica en futuras implementaciones?

La idoneidad didáctica de un proceso de instrucción se define como el grado en que dicho proceso (o una parte del mismo) reúne ciertas características que permiten calificarlo como óptimo o adecuado para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes (aprendizaje) y los significados institucionales pretendidos o implementados (enseñanza), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (entorno). Un proceso de instrucción logrará un alto grado de idoneidad didáctica si es capaz de articular de forma coherente y sistémica, los seis criterios parciales de idoneidad siguientes: Idoneidad epistémica, para valorar si las matemáticas que están siendo enseñadas son "buenas matemáticas"; Idoneidad cognitiva, para valorar, antes de iniciar el proceso de instrucción, si lo que se quiere enseñar está a una distancia razonable de aquello que los alumnos saben, y, después del proceso, si los aprendizajes adquiridos están cerca de aquello que se pretendía enseñar; Idoneidad interaccional, para valorar si las interacciones resuelven dudas y dificultades de los alumnos; Idoneidad mediacional, para valorar la adecuación de los recursos materiales y temporales utilizados en el proceso de instrucción; Idoneidad afectiva, para valorar la implicación (intereses y motivaciones) de los alumnos durante el proceso de instrucción; Idoneidad ecológica, para valorar la adecuación del proceso de instrucción al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social y profesional.

En Breda y Do Rosário Lima (2016) y Breda, Pino-Fan y Font (2017) se aporta un sistema de componentes e indicadores que sirve de guía de análisis y valoración de la idoneidad didáctica, que está pensado para un proceso de instrucción en cualquier etapa educativa. En la Tabla 14 se detallan los criterios y componentes de idoneidad didáctica.

Tabla 14. Criterios y componentes de idoneidad didáctica

Criterio	Componentes
Epistémico	Errores, Ambigüedades, Riqueza de procesos, Representatividad de la complejidad de los objetos matemáticos a enseñar
Cognitivo	Conocimientos previos, Adaptación curricular a las diferencias individuales, Aprendizaje, Alta demanda cognitiva
Interaccional	Interacción docente-discente, Interacción entre discentes, Autonomía, Evaluación formativa
Mediacional	Recursos materiales, Número de estudiantes, horario y condiciones del aula, Tiempo
Afectivo	Intereses y necesidades, Actitudes, Emociones
Ecológico	Adaptación al currículo, Conexiones intra e interdisciplinares, Utilidad sociolaboral, Innovación didáctica

Fuente: Morales-López y Font (2019).

Tanto los componentes como los indicadores de los CID se han confeccionado a partir de un consenso presente en el campo de la comunidad educativa, teniendo en cuenta las tendencias actuales en la enseñanza de las matemáticas, los principios y estándares para la enseñanza de las matemáticas (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000) y los resultados de la investigación en el área de Didáctica de las Matemáticas (Breda et al., 2018).

En particular, para la idoneidad epistémica se ha tenido en cuenta un principio fundamental del EOS que, con los matices propios de cada enfoque, es (o puede ser) asumido por otros enfoques teóricos del área. Nos referimos al principio que se puede formular de la siguiente manera: los objetos matemáticos emergen de las prácticas, lo cual conlleva su complejidad (Font et al., 2013; Rondero & Font, 2015). De este principio se deriva un componente (representatividad de la complejidad de la noción a enseñar) cuyo objetivo es que se tenga en cuenta, dentro de lo posible, dicha complejidad en el diseño y rediseño de las secuencias didácticas (Font et al., 2020; Pino-Fan et al., 2013).

El componente Representatividad de la complejidad de los objetos matemáticos a enseñar (entendida como pluralidad de significados parciales), se refiere al grado de representatividad e interconexión de los significados institucionales implementados (o pretendidos) respecto de un significado de referencia (Giacomone et al., 2018b). Cada uno de estos significados permite resolver tipos de problemas diferentes, por lo cual, si se quiere enseñar una muestra representativa de significados parciales es necesario presentar una muestra variada de problemas (Font, Breda, & Seckel, 2017) y, a su vez, si se quiere conseguir que el alumno sea competente en la resolución de una variedad de problemas, donde el objeto matemático en cuestión tiene un rol determinante para su resolución, es necesario que los alumnos dispongan de una red de significados parciales bien conectados entre sí. En consecuencia, dado que se considera importante que los profesores de matemáticas tengan en cuenta la complejidad del objeto matemático que se pretende enseñar (entendida ésta como pluralidad de significados) en el diseño, implementación, valoración y rediseño de procesos de instrucción, son necesarios procesos formativos que permitan a los profesores reflexionar sobre la complejidad de los objetos matemáticos y su posible aplicación en su práctica docente con la finalidad de mejorarla.

En el siguiente cuadro (Font, Breda, & Seckel, 2017) se recogen los indicadores del componente Representatividad de la complejidad de los objetos matemáticos a enseñar del criterio de idoneidad epistémica.

Tabla 15. El componente Representatividad de la complejidad y sus indicadores

Componente de la Idoneidad Epistémica	Indicadores
Representatividad de la complejidad de los objetos matemáticos a enseñar	a) Los significados parciales (definiciones, propiedades, procedimientos, etc.) son una muestra representativa de la complejidad de la noción matemática que se quiere enseñar b) Los significados parciales definiciones, propiedades, procedimientos, etc.) son una muestra representativa de la complejidad contemplada en el currículo de la noción matemática que se quiere enseñar. c) Para uno o varios significados parciales seleccionados para su implementación, ¿se contempla una muestra representativa de problemas? d) Para uno o varios significados parciales seleccionados para su implementación, ¿se contempla el uso de diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico…), tratamientos y conversiones entre los mismos?

Fuente: Font, Breda y Seckel (2017).

En primero lugar, hay que valorar si los significados parciales (definiciones, propiedades, procedimientos, etc.) seleccionados para su implementación son una muestra representativa de la complejidad de la noción matemática que se quiere enseñar (para ello la mirada se dirige a las matemáticas). En segundo lugar, dado que el currículo contempla parte de estos significados parciales, hay que valorar si la muestra de significados presentes en el proceso de instrucción son también una muestra representativa de los contemplados en el currículo (en el currículo en general, en la etapa o ciclo o en el curso donde se realiza la implementación). Una vez seleccionados uno o varios significados parciales para su implementación, valorar como mínimo, si se contempla una muestra representativa de representaciones del objeto y de problemas en los que se aplica o emerge.

La noción de idoneidad didáctica está siendo utilizada ampliamente como herramienta para organizar la reflexión del futuro profesor (o en activo) sobre su propia práctica o sobre la práctica ajena, en programas de formación de profesores o futuros profesores (Esqué de los Ojos & Breda, 2021; Giacomone et al., 2018a; Hummes et al., 2022; Maure et al., 2019; Seckel & Font, 2020), ya que facilita la reflexión sistemática de los profesores sobre la complejidad de los objetos matemáticos que enseñan y sobre los factores implicados en su estudio.

7.7 Metodología

En esta sección explicamos el contexto institucional, los participantes y las características metodológicas para cada uno de los dos objetivos.

Contexto institucional: La práctica preprofesional en la formación inicial de profesores

En el plan de Carrera de Ciencias Experimentales de la Universidad de Cuenca, los futuros profesores realizan cuatro prácticas preprofesionales en centros de secundaria: en la primera, fundamentalmente se hacen prácticas de observación y apoyo docente; en la segunda, diseñan e implementan una secuencia de tareas de aproximadamente unas 12 horas de clase; en la tercera práctica vuelven a diseñar e implementar una secuencia de tareas de aproximadamente unas 12 horas de clase, pero ahora después de haber cursado asignaturas de didáctica de las matemáticas que les da herramientas teóricas que no se tenían en la práctica dos y; la cuarta práctica preprofesional consiste en la colaboración con proyectos de vinculación con la sociedad organizados por la universidad (por ejemplo, un proyecto de apoyo pedagógico a estudiantes adultos).

En su práctica preprofesional el futuro profesor cuenta con dos tutores, el de la universidad (Docente tutor) y el profesor de la institución donde se realiza la práctica (Docente orientador). Entre las herramientas valorativas utilizadas para guiar la práctica, están: 1. Guía de Reflexión de una sesión de aprendizaje, en donde el docente tutor pide al futuro profesor consignar las actividades realizadas durante la sesión de clases y responder a preguntas como ¿qué intenciones tenía la actividad?, ¿Qué hicieron los estudiantes durante la actividad?, ¿cómo interviene el docente durante la actividad?, además de presentar comentarios y reflexiones (ficha usada sobre todo en la práctica preprofesional uno); 2. Ficha de Apoyo a la Docencia, en donde el docente orientador de la institución de práctica evalúa si el practicante apoyó en el desarrollo del trabajo en el aula, si demostró tener creatividad y ser propositivo, si cumplió con las tareas encomendadas con responsabilidad e interés y si su interacción en el aula fue cálida y empática; 3. Matriz de Autoevaluación, en donde el practicante debe auto valorar su actividad de acuerdo a criterios como, si conoce en qué consiste la práctica preprofesional, si asistió puntualmente a la jornada de prácticas, si planificó las tareas asignadas para cumplir la labor, si todas las actividades asignadas las ha cumplido en los tiempos establecidos, si ha sido capaz de proponer espontánea y oportunamente sugerencias para el mejoramiento de los procesos, si ha aportado con creatividad para la solución viable de problemas, si ha demostrado habilidad para aprender y consolidar conocimientos a través de las prácticas, si ha demostrado responsabilidad en la ejecución de actividades y las ha aplicado dentro del tiempo establecido, si se ha adaptado a los diferentes ambientes de la práctica, si se ha involucrado en las actividades propuestas por el docente tutor, si ha demostrado afectividad con el grupo de estudiantes que ha hecho la práctica preprofesional, además de otros aspectos que el practicante puede considerar importantes; 4. Ficha de Seguimiento a la ejecución de clases, considerada como documento central de evaluación por contener 20 indicadores que sirven de referente para la evaluación de la práctica preprofesional por parte del docente tutor (ver primera columna de la tabla 3). Estas tres últimas fichas se usan, sobre todo, en la práctica 2, y lo que en cierta manera es sorprendente, también en la práctica preprofesional tres, teniendo en cuenta que los futuros profesores en la práctica tres ya tienen más conocimientos sobre Didáctica de las Matemáticas.

Los futuros profesores y sus tutores en estas cuatro guías elaboran informes o narrativas sobre la experiencia del futuro profesor durante su fase de prácticas, respondiendo a determinadas consignas (preguntas de la guía). Con el análisis detallado de las consignas propuestas se puede inferir qué parte de los conocimientos y competencias didáctico-matemáticas desarrolladas por los futuros profesores, hasta ese momento de su formación, se quieren evaluar.

En este artículo nos interesa, primero, determinar los criterios que orientan las prácticas de los futuros profesores de la Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales de la Universidad de Cuenca para que las secuencias didácticas sean cada vez mejores; razón por la cual vamos a enfocarnos en la Ficha de Seguimiento a la ejecución de clases que es el documento 4 de la evaluación de la práctica preprofesional de los futuros profesores de matemáticas de la carrera supra mencionada.

En paralelo a la práctica preprofesional 2, los futuros profesores cursan la asignatura de Didáctica de la Matemática cuyo objetivo es dar elementos teóricos que permitan desarrollar su capacidad de reflexión sobre la práctica dos que han implementado. En el segundo objetivo dos se describe un proceso de instrucción en esta asignatura en un grupo de 26 futuros profesores.

Metodología para el primer objetivo

La metodología para el primer objetivo es un análisis de contenido con categoría a priori (indicadores, componentes y criterios del constructo CID). Para el primer objetivo se consideran las preguntas orientadoras de la ficha de seguimiento (primera columna de la tabla 3) y se reinterpretan como orientaciones para que el futuro profesor realice una buena práctica docente, a continuación, estas orientaciones se reinterpretan en términos de indicadores, componentes o criterios del constructo CID. Por ejemplo, una de las preguntas de la ficha es: ¿La motivación activó los aprendizajes previos de los alumnos? Mediante un análisis de contenido inferimos que la incorporación de esta pregunta en la guía se debe a que los autores de la guía consideran que los futuros profesores deben procurar motivar a sus alumnos, (orientación para la práctica) y, además, valoran positivamente conseguir la motivación de los alumnos. Pero, también, consideran importante tener en cuenta los conocimientos previos de los alumnos en el proceso de aprendizaje, es decir que los autores de la guía consideran que los futuros profesores deben procurar tener en cuenta dichos conocimientos previos, por tanto, se está considerando que se debe diseñar la instrucción teniendo en cuenta los conocimientos previos de los alumnos (orientación para la práctica) y, además, valoran positivamente tener en cuenta los conocimientos previos de los alumnos. Una vez entendida la pregunta en estos términos, se reinterpreta en términos de indicadores, componentes y criterios del constructo CID, en particular esta orientación se relaciona con el indicador "Selección de tareas de interés para los alumnos" del componente "Intereses y necesidades" del "criterio de idoneidad afectivo", y también, se reinterpreta en términos del indicador "Los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema (bien se han estudiado anteriormente o el profesor planifica su estudio)" del componente "Conocimientos previos" del "criterio de idoneidad cognitivo".

Cada uno de los autores codificó cada pregunta de la ficha de acuerdo con el proceso acabado de explicar, siendo el porcentaje de acuerdo entre los tres investigadores del 92%. Las diferencias de codificación entre los investigadores se discutieron y se llegó a un consenso.

Metodología para el segundo objetivo

Si bien las preguntas de la ficha, en general, se podían reinterpretar en términos de indicadores, componentes y criterios del constructo CID, la pauta de indicadores y componentes de dicho constructo es mucho más completa que la ficha de seguimiento analizada. Por esta razón, se realizó un proceso de instrucción para enseñar el constructo CID con la finalidad de que los futuros profesores en el futuro (por ejemplo, en la práctica preprofesional tres) organizaran su reflexión a partir de esta herramienta de valoración, o bien a partir de la guía de seguimiento enriquecida con algunas preguntas relacionadas con componentes de los CID no contemplados en la guía actual. En particular, el énfasis se puso en la explicación de los componentes e indicadores del criterio de idoneidad epistémico ya que era el menos presente en la guía de seguimiento y, muy en especial, en el componente "representatividad de la complejidad del objeto matemático a enseñar". Para ello, se siguió la estructura básica de los ciclos formativos cuyo objetivo es la enseñanza del constructo CID (Calle et al., 2023).

En la sección de resultados se narra la implementación de la secuencia didáctica, desde la óptica del docente que imparte la asignatura. La metodología usada para realizar esta narrativa tiene aspectos de las siguientes metodologías: 1) narrativa (una mirada a una historia de uno mismo), 2) autoetnografía (una mirada a sí mismo dentro de un contexto más amplio) y autoestudio (una mirada a uno mismo en acción, generalmente dentro de contextos educativos) (Hamilton et al., 2008), en las que se privilegia el yo/nosotros.

En este caso, dado que se pretendía, en especial, enseñar a los futuros profesores la importancia de tener en cuenta, para la enseñanza y aprendizaje de un determinado objeto matemático, una muestra representativa de los diferentes significados de dicho objeto en el diseño, valoración y rediseño de secuencias de tareas, el proceso de instrucción se diseñó teniendo en cuenta el siguiente principio: para poder usar este componente en la valoración y rediseño de secuencias de tareas, el profesor, como mínimo, debe conocer los diferentes significados del objeto matemático a enseñar (significado holístico) y sus conexiones, debe conocer cuáles de estos significados están incluidos en el currículum y debe poder seleccionar y/o crear tareas en las que se tenga que usar un determinado significado del objeto matemático que se pretende enseñar.

En el diseño de la secuencia didáctica participaron los tres autores y en la implementación la primera autora. A partir de los diarios de clase y de la documentación del campus virtual, para este segundo objetivo, se ha realizado una narración, desde la perspectiva del formador, de lo que fue la enseñanza realizada. Esta implementación la consideramos como un estudio de caso múltiple que se enmarca en las investigaciones en Didáctica de las Matemáticas de tipo cualitativo-descriptivo.

7.8 Resultados

En esta sección se presentan los resultados relacionados con los dos objetivos específicos de la investigación.

Resultados relacionados con el primer objetivo específico

Se han analizado los indicadores consignados en la ficha de seguimiento a la ejecución de clases que es el documento 4 de la evaluación de la práctica preprofesional de los futuros profesores de matemáticas, de la Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales de la Universidad de Cuenca. Esta ficha de seguimiento a la ejecución de clases, ha sido elaborada para la evaluación de los futuros profesores. Por tanto, estrictamente no es una guía para que los alumnos orienten el diseño y la implementación de sus clases, pero les conviene tenerla presente ya que son evaluados con base en ella.

Como resultado de la aplicación de la metodología de análisis de contenido descrito en la sección anterior, las preguntas de la ficha de seguimiento se han podido reinterpretar en términos de criterios de idoneidad didáctica como se específica en la Tabla 16:

Tabla 16. Relación de las preguntas de la ficha de seguimiento con los CID

Preguntas de la ficha de seguimiento	CID
¿Asumió las sugerencias dadas oportunamente por el profesor de aula y/o profesor tutor?	No se aplica
¿La motivación activó los aprendizajes previos de los alumnos?	Afectiva/Cognitiva
¿Mantuvo el interés de los alumnos durante el proceso de Aprendizaje?	Afectiva

¿Facilitó el trabajo de grupo o de pares, mixtos y heterogéneos?	Interaccional
¿Su presentación externa responde a exigencias mínimas de un Educador?	No se aplica
¿Llegó a clase con anticipación?	No se aplica
¿La estrategia empleada responde a una metodología activa?	Cognitiva
¿Dosificó el desarrollo de las actividades de aprendizaje de acuerdo al tiempo disponible y al grado de desarrollo y aprendizaje en los alumnos?	Mediacional /Cognitiva
¿El material didáctico fue adecuado y oportuno para los aprendizajes esperados?	Mediacional /Cognitivo
¿Propició la confrontación de lo conocido con lo que se pretende desarrollar?	Cognitiva
¿Demostró preparación y dominio de los temas trabajados?	Epistémico
¿Las orientaciones para el trabajo individual y/o grupal fueron claras y oportunas?	Interaccional
¿Hizo un acompañamiento oportuno durante el trabajo individual y/o grupal?	Interaccional/Cognitiva
¿Facilitó y respetó la participación de las y los estudiantes?	Interaccional
¿Se mantuvo cercano a los alumnos y ejerció su función normativa?	Interaccional
¿Fue creativo para solucionar dificultades y limitaciones que se presentaron en la sesión de aprendizaje?	Interaccional/Cognitivo
¿Su voz y desplazamiento fueron adecuados dentro del aula y/o fuera de ella?	Interaccional

Las preguntas calificadas como "No se aplica" son preguntas que no se relacionan con el diseño o implementación de la secuencia de tareas". Por ejemplo, la pregunta "¿Su presentación externa responde a exigencias mínimas de un Educador?".

Tal como se había previsto, la mayoría de las preguntas de la ficha se podían reinterpretar en términos de indicadores, componentes y criterios del constructo CID. De las 20 preguntas, tres (calificadas como "No se aplica") son preguntas que no se relacionan con el diseño o implementación de la secuencia de tareas; dos se relacionan con la idoneidad afectiva; dos se relacionan con la idoneidad mediacional; tres se relacionan con la idoneidad ecológica; ocho se relacionan con la idoneidad cognitiva; siete se relacionan con la idoneidad interaccional; y una se relaciona con la epistémica.

De esta reinterpretación destaca, como resultado significativo, que las orientaciones para implementar unas buenas matemáticas (idoneidad epistémica) tienen poca relevancia en la ficha de seguimiento.

Resultados relacionados con el segundo objetivo específico

El principal resultado de este segundo objetivo es la implementación del ciclo formativo que pretende enriquecer la ficha de seguimiento de la institución incorporando indicadores y componentes de los CID, en particular, el componente representatividad de la complejidad del objeto matemático a enseñar, mediante un proceso de instrucción específico.

Breve descripción de la implementación proceso de instrucción para enseñar el constructo CID

En paralelo a la práctica preprofesional 2, los futuros profesores cursan la asignatura de Didáctica de la Matemática cuyo objetivo es dar elementos teóricos que permitan desarrollar su capacidad de reflexión sobre la práctica dos que han implementado y que puedan ser usados en el futuro (por ejemplo, en la práctica tres). La metodología usada en esta asignatura consiste en talleres, trabajos colaborativos, discusiones y análisis de textos, presentación de planificaciones y exposición de prácticas docentes. En esta asignatura se trabajaron tanto la ficha de seguimiento como los CID, de acuerdo con la siguiente secuencia.

En una primera fase se realizaron dos talleres llamados de análisis didáctico y, en el primer taller se presentó un episodio de clase como contexto de reflexión. Este primer taller tenía por objetivo que los futuros profesores de matemáticas realizaran un análisis didáctico de este episodio basado en la experiencia y conocimientos previos que tuviesen, ya que se les propusieron preguntas guías muy generales. Se propuso a los alumnos la lectura y análisis del episodio descrito en Font, Planas y Godino (2010) de la manera siguiente: 1) Lectura individual del contexto del problema y de la transcripción; 2) Formación de grupos de tres o cuatro personas; 3) Análisis didáctico del episodio de clase en grupo; 4) Elaboración de conclusiones; 5) Presentación de sus conclusiones a los otros grupos. Para el análisis didáctico del punto 3 se sugirieron las siguientes preguntas guía: a) ¿Cuáles son los personajes que aparecen en este episodio? Analice el comportamiento de cada uno de los personajes (qué dicen, qué hacen, cómo actúan, por qué actúan de esa manera); b) Identifique los objetos matemáticos presentes en esta tarea: lenguaje, conceptos-definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos.

En el segundo taller el episodio a analizar en grupos de cuatro era el video1 de una clase sobre proporcionalidad geométrica impartida por un profesor de secundaria ecuatoriano. Para realizar el análisis didáctico se les suministró la guía de la Tabla 17.

[1] Link del video: https://www.youtube.com/watch?v=60s_0Ya2-d8. Ultimo acceso 29 de agosto de 2022.

Tabla 17. Guía de reflexión didáctica

	Tarea de reflexión didáctica (guía para los futuros profesores)
Descripción ¿Qué sucede?	¿Qué contenido matemático se requiere para resolver el problema? ¿Qué significados (algebraico, geométrico, trigonométrico…), caracterizan el contenido que se está abordando? ¿Cuál es el contexto y nivel educativo en que se ubica el problema? ¿Qué hacen los participantes para resolver el problema? ¿Sobre qué discuten más? ¿Qué recursos utilizan? ¿Qué conocimientos previos deben tener los participantes para poder resolver el problema? ¿Qué dificultades/conflictos de aprendizaje se manifiestan? ¿Qué normas (regulaciones, hábitos, costumbres) hacen posible y condicionan el desarrollo de la resolución del problema?
Explicación ¿Por qué sucede?	¿Por qué se estudia ese contenido? ¿Por qué se usa un problema realista para estudiar el contenido? ¿Por qué actúan los participantes de la manera en que lo hacen?
Valoración ¿Qué se podría mejorar?	Emitir un juicio razonado sobre la forma en la que los participantes resuelven el problema, indicando las actitudes más significativas que ellos tienen para llegar a la solución del problema. ¿Hay alguna actitud negativa de ellos? ¿Podemos hablar de aprendizaje, cuando los estudiantes intentan resolver problemas del contexto? Explique.
Limitaciones de la información	¿Qué información adicional sería necesario añadir, para que la resolución del problema fuera más precisa y fundamentada?

Las consignas de la pauta se agrupan en cuatro bloques y en los tres primeros se pide describir, interpretar (explicar) y valorar y la cuarta se puede interpretar como sugerencias de mejora. Hay nueve cuestiones sobre describir, tres sobre interpretar (explicar) y dos sobre valorar y una para la mejora.

En los dos talleres se presentan casos o episodios (sin teoría, es decir no se les explican nociones específicas para realizar el análisis didáctico, en particular aún no se les había explicado el constructo CID) y se propone a los participantes la lectura y análisis de episodios de clase para que hagan un análisis individual y grupal a partir de sus conocimientos previos, creencias y valores, y dándoles pautas muy generales. La puesta en común de los análisis realizados permite observar algunas regularidades, entre otras las siguientes:

a) Los futuros profesores, cuando opinan sobre un episodio de aula, expresan comentarios en los que se pueden hallar aspectos de descripción y/o explicación y/o valoración.

b) Las opiniones de estos futuros profesores se pueden considerar evidencias de diferentes tipos de conocimientos (relacionados con las matemáticas, con aspectos cognitivos, con el entorno curricular, cultural y sociolaboral, con la gestión de la interacción, con aspectos emocionales y afectivos, con el uso de recursos, etc.).

c) Cuando las opiniones tienen un componente valorativo importante, se pueden inferir criterios que, en su opinión, deben guiar la práctica del profesor (por ejemplo, si han considerado que la gestión del profesor del primer episodio analizado no ha motivado a los alumnos, se infiere que ellos consideran importante realizar su práctica docente procurando motivar a sus alumnos y, además, que valoran positivamente conseguir la motivación de los alumnos).

El siguiente paso consistió en determinar si los valores implícitos o explícitos en sus comentarios son sus valores individuales o más bien son valores que la comunidad interesada en la Educación Matemática está trasmitiendo a sus miembros (por ejemplo, a los futuros profesores). A partir de esta pregunta se llega a la conclusión de que, sobre todo, son criterios que gozan de un cierto consenso en la comunidad y que ellos concuerdan con este consenso por su propia experiencia y formación o bien lo asumen sin casi discusión. También se concluye que lo que ellos están consensuando o asumiendo son aspectos relacionados con tendencias sobre cómo debe ser la enseñanza de las matemáticas, que se pueden encontrar en los congresos de Educación Matemática, en los currículos, en los cursos de formación de profesores inicial y permanente, etc. Dicho de otra manera, se hallan inmersos en un entorno que les envía el mensaje de que, si quieren realizar una enseñanza de matemáticas de calidad tienen que seguir estas tendencias.

El siguiente paso fue hacerles observar que en su caso se había comprobado el siguiente fenómeno* que se observa con cierta regularidad:

d) El futuro profesor de matemáticas utiliza ciertos criterios sobre cómo deben implementarse las clases para que éstas sean de calidad, cada vez mejores, etc. (criterios que orientan la práctica)

e) Estos criterios son similares, incluso cuando los profesores son de distintos países, culturas, religiones, nivel educativo, etc. (gozan de un cierto consenso en una parte importante de la comunidad de educación matemática).

f) Estos criterios están relacionados con las tendencias actuales sobre la enseñanza de las matemáticas (por tanto, tienen relación con los resultados y constructos teóricos generados en el área de la Didáctica de las Matemáticas).

Por último, se dedicó tiempo a explicitar dichas tendencias ya que su enseñanza está prevista en el programa de la asignatura. Entre otras, por ejemplo, la tendencia a la presentación de matemáticas contextualizadas y la tendencia de que saber matemáticas incluye la competencia para aplicarlas a situaciones de la vida real.

A continuación, se les hizo observar que este mismo fenómeno se podía inferir en las preguntas orientadoras de la ficha de seguimiento ya que algunas se pueden reinterpretar como orientaciones para que el futuro profesor realice una buena práctica docente. Por ejemplo, una de las preguntas de la ficha es: ¿La motivación activó los aprendizajes previos de los alumnos? Se explicó que se puede inferir que la incorporación de esta pregunta en la guía se debe a que sus autores consideran que los futuros profesores deben procurar motivar a sus alumnos, por tanto, se está considerando que se debe motivar a los alumnos (orientación para la práctica) y, además, valoran positivamente conseguir la motivación de los alumnos.

Seguidamente, después de resaltar el papel del consenso en el fenómeno*, de acuerdo con la perspectiva consensual, se propuso a los futuros profesores establecer un consenso local (en el grupo) sobre los criterios a tener en cuenta para considerar un proceso de enseñanza y aprendizaje como bueno, de calidad, idóneo, mejor, etc.

El siguiente paso fue comentar que, desde el área de la Didáctica de las Matemáticas, diferentes autores han realizados intentos por recopilar criterios para orientar la práctica del profesor para que ésta sea de calidad, óptima, etc. (Praetorius & Charalambous, 2018). Se trata de una recopilación de criterios que gozan de un amplio consenso en el área. Uno de los enfoques teóricos que ha trabajado en esta línea es el EOS, desarrollando la noción de idoneidad didáctica.

A continuación, se les explicó la noción de idoneidad didáctica y los CID (ver la sección de marco teórico) y se reflexionó sobre los criterios acordados por ellos y su relación con los CID, así como sobre las preguntas de la ficha de seguimiento y su relación con los CID. Los criterios se presentaron no como principios ya elaborados, sino que, se crearon momentos y espacios para su generación como resultado de consensos en el grupo. También se les hizo observar que el hecho de que los futuros profesores hubiesen usado implícitamente criterios que se pueden reinterpretar en términos de los CID antes de conocerlos (lo mismo con las preguntas de la guía), permite refinar el fenómeno* con una cuarta conclusión: los criterios usados por los profesores (y también las preguntas de la ficha de seguimiento) se pueden reinterpretar en término de los CID (fenómeno**).

El siguiente paso fue hacer operativos los CID mediante su desglose en componentes e indicadores. El proceso de enseñanza y aprendizaje de los CID con sus componentes e indicadores, fue la parte central del ciclo formativo que estamos describiendo y fue la que ocupó más tiempo. Mediante diferentes tareas el grupo fue acordando diferentes componentes e indicadores de los criterios, los cuales encajan fácilmente con los propuestos en Breda, Pino-Fan y Font (2017). Eso les generó una rúbrica (con criterios, componentes e indicadores) para ayudar a los futuros profesores en la valoración de su práctica y guiar su rediseño, pero que es muy diferente a las guías docentes cuyo propósito es ayudar a los maestros a dar forma a la instrucción y guiar su acción y toma de decisiones (Remillard, 2018).

Por ejemplo, para la emergencia del componente "Muestra representativa de la complejidad del objeto matemático que se quiere enseñar", primero se remarcó que actualmente hay una tendencia a considerar que saber matemáticas incluye la competencia para aplicarlas a situaciones de la vida real, y que dicha tendencia, en algunos países, se ha concretado en el diseño de currículums basados en competencias. Se hizo hincapié en que la idea de competencia en el fondo pone de relieve que las matemáticas que se enseñan han de ser útiles para resolver problemas en diferentes contextos, tomando como primer ejemplo problemas que se resuelven aplicando significados parciales diferentes del teorema de Thales (Font, Breda y Seckel, 2017). Después se reflexiona sobre la complejidad de la noción de otros objetos matemáticos, entre ellos los de función (Font et al., 2012), inecuación (Monje et al., 2018), derivada, mediatriz y pendiente, y se hizo hincapié en que cada problema exige poner en funcionamiento un tipo de significado parcial diferente del objeto matemático y que la otra cara de la moneda de la competencia en el uso de la noción del objeto matemático en la resolución de una variedad de problemas era la enseñanza de sus diferentes significados.

Se trata de que los futuros profesores pasasen de un punto de vista ingenuo y optimista, que presupone que el alumno fácilmente realizará la transferencia del conocimiento matemático generado en un solo contexto a otros contextos nuevos y diferentes, a otro punto de vista más prudente. En este último punto de vista, si bien se considera que la posibilidad de transferencia creativa se puede enseñar, se asume que, sin un trabajo sobre una muestra representativa de la complejidad del objeto matemático que se quiere enseñar y la articulación y conexión de los componentes de dicha complejidad, es difícil que se pueda aplicar el objeto matemático a diferentes contextos.

De esta manera, cada CID se fue desglosando en componentes (Tabla 1) e indicadores para cada componente, (Godino, 2013; Sánchez, Font, et al., 2021) de acuerdo con la rúbrica que se presenta en Breda, Pino-Fan y Font (2017).

Se terminó este paso resaltando que: 1) el constructo CID pretende ofrecer al profesor una pauta para orientar el diseño y rediseño de su práctica docente; 2) ellos lo pueden usar como pauta para organizar su práctica; 3) los CID se consideran como normas que son principios, en lugar de normas que son reglas que operan de la manera todo o nada (se aplican o no se aplican, se siguen o no se siguen). De esta manera, la idoneidad se puede entender como la calidad relativizada y condicionada por el contexto y el juicio del profesor.

El último paso fue que la profesora del curso ilustró el uso de los CID como pauta para el análisis y valoración de procesos de instrucción, analizando una hora grabada en video (de las 12 que aproximadamente habían implementado cada futuro profesor) confeccionando una retroalimentación específica para cada uno de los 26 futuros profesores que cursaban la asignatura Didáctica de las Matemáticas.

A continuación, sigue, a modo de ejemplo, la retroalimentación sobre la idoneidad epistémica realizada por la formadora a la futura profesora (la futura profesora A) que, en su implementación, fue la que más tuvo en cuenta, implícitamente, la idoneidad epistémica. En esta retroalimentación, la explicación de la profesora formadora pretende ilustrar cómo podían usar los futuros profesores los componentes de la idoneidad epistémica para la planificación y valoración de sus clases.

Esta futura profesora diseñó e implementó su clase sobre el tema "ecuaciones de la recta".

Esta futura profesora cometió algún error en su clase de la que no fue consciente. En particular cometió el error ilustrado en la Figura 17:

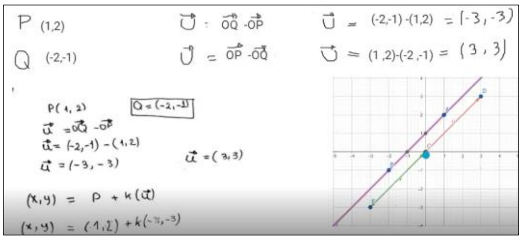


Figura 17. Error matemático cometido por la futura profesora A

La intervención de la profesora formadora consistió en hacerle observar: 1) que hay un error matemático de representación ya que un vector y su opuesto se representan con el mismo símbolo y 2) que en una futura implementación debería procurar no volver a cometer este tipo de errores.

Con relación al componente ambigüedades la futura profesora A realizó explicaciones poco precisas, de las que tampoco fue consciente, que pudieron ser causa de interpretaciones ambiguas (es decir, diferentes a las esperadas por ella) en sus alumnos. Por ejemplo, usó la notación de la Figura 18:

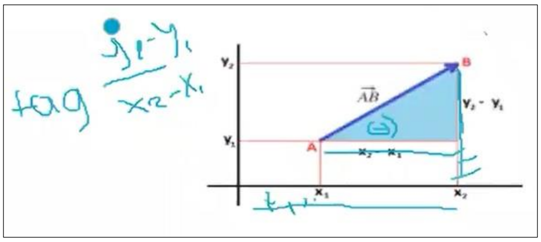


Figura 18. Notación utilizada por la futura profesora A

En este caso la profesora formadora de futuros profesores le hizo observar que esta interpretación de la pendiente como la tangente que forma la recta con la línea paralela al eje de abscisas podría resultar ambigua para sus alumnos, ya que no especificaba de qué ángulo era la tangente. Otra ambigüedad que le hizo observar la profesora formadora fue la ambigüedad derivada de la transposición de términos que realizó en una expresión algebraica para obtener otra expresión equivalente, conforme Figura 19:

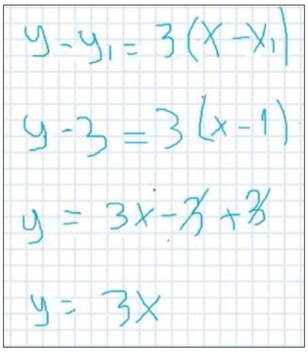


Figura 19. Expresión algebraica ambigua realizada por la futura profesora A

Se trata de una ambigüedad potencial derivada del uso de una metáfora objetual. Con las expresiones equivalentes se suelen usar expresiones como <<pasar al otro lado restando>>. En estos comentarios se usa implícitamente la metáfora de <<transposición de términos o metáfora operacional (un objeto matemático es considerado como un dispositivo donde sus elementos se pueden "pasar", "cruzar", "quitar", "colocar", ser "llevados", "transferidos", "transformados" o "trasladados" de un lugar a otro bajo ciertas reglas)>> (Abrate et al., 2008).

Con relación a la riqueza de procesos el tema "ecuaciones de la recta" no facilita el diseño e implementación de secuencias que fomenten procesos relevantes de la actividad matemática. Ahora bien, hay un proceso que tiene mucha relevancia en el tema que es el proceso de tratamiento, es decir realizar transformaciones de expresiones simbólicas dentro del mismo registro. En este caso la futura profesora A si tuvo en cuenta este proceso y también la conversión del registro simbólico al geométrico y, además, realizó procesos de conexiones intramatemáticas ya que conectó tres interpretaciones de la pendiente (trigonométrica, vectorial y funcional). Para este componente la observación de la profesora formadora fue resaltar los procesos activados y señalar que otros procesos como la resolución de problemas o la modelización no estuvieron presentes. Por último, comentó que en un rediseño quizás este tipo de procesos más transversales se podría incorporar.

Con relación al componente "Representatividad de la complejidad de la noción a enseñar" la futura profesora A presentó dos significados para la recta. 1) recta como una secuencia infinita de puntos que tiene una única inclinación y una única pendiente, 2) conjunto de puntos del plano cuyas coordenadas cumplen una ecuación. También presenta tres significados de la pendiente: trigonométrica, vectorial y funcional. Ahora bien, su foco de atención es la interpretación de la recta como el conjunto de puntos del plano cuyas coordenadas cumplen una ecuación y presenta tres formas de representar la ecuación de una recta: la vectorial, la paramétrica y la cartesiana, además de la representación geométrica (Figura 20):

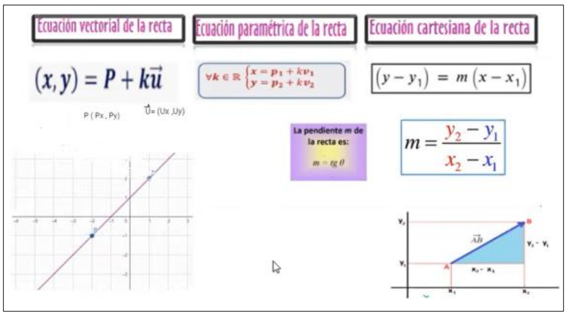


Figura 20. Representaciones de la ecuación de la recta trabajados por la futura profesora A

Para el significado de recta que prioriza para la implementación, la profesora A contempló una variedad de tipos de problemas, como, por ejemplo (Figura 21):

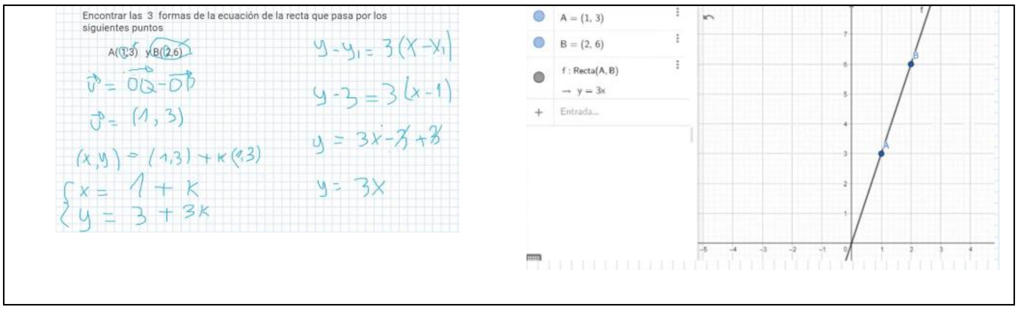


Figura 21. Ejemplo de problema trabajado por la futura profesora A para un mismo significado de la recta

Para este componente, los comentarios de la profesora formadora se limitaron a poner de manifiesto la variedad de significados interconectados presentes en la clase implementada por la futura profesora A y a señalar que, sin embargo, se requiere trabajar otros tipos de problemas para reforzar los aprendizajes. También comentó que pensar en la complejidad del objeto matemático podría dar como resultado algún significado parcial que quizás se podría incorporar en un rediseño de la clase.

7.9 Análisis y discusión de resultados

Con relación a los resultados del primer objetivo hay dos aspectos a discutir, el primero es por qué las preguntas de la ficha de seguimiento se pueden reinterpretar como indicadores, componentes o criterios del constructo CID y el otro es por qué casi no se contemplan preguntas sobre la idoneidad epistémica en la ficha.

En relación con el primer aspecto, los criterios acordados por el grupo de profesores que diseñó la ficha de seguimiento se pueden considerar una evidencia del fenómeno**, observado en otras investigaciones (Llinares et al., 2022). El motivo por el cual los CID se infieren en la ficha de seguimiento, pensada para orientar hacia la mejora la práctica del futuro docente, sin habérseles enseñado el uso de esta herramienta para guiar la reflexión sobre la práctica, se puede explicar por los orígenes del constructo ya que estos criterios, sus componentes e indicadores se han seleccionado a partir de la condición de que debían de contar con un cierto consenso en el área de la didáctica de las matemáticas, aunque fuese local. Por tanto, una explicación plausible de porqué los criterios, sus componentes e indicadores se puedan inferir en las preguntas de la ficha de seguimiento es que reflejan consensos sobre cómo debe ser una buena enseñanza de las matemáticas ampliamente asumidos en la comunidad de educadores matemáticos; y es plausible pensar que el uso implícito que hacen los diseñadores de la ficha se debe a su formación y experiencia previa, la cual les hace partícipes de dichos consensos.

En relación con el segundo aspecto, la casi total ausencia de preguntas en la ficha relacionadas con la idoneidad epistémica, una explicación plausible se halla en el tipo de formación inicial y continua actual en Ecuador que evidencia un conocimiento insuficiente en matemáticas y su didáctica en el profesorado de matemáticas ecuatoriano, tal como pone de manifiesto, el informe del Instituto Nacional de Evaluación Educativa (INEVAL) al cual se hace mención en el informe sobre la formación de profesores ecuatorianos (Martínez Jara et al., 2018).

Los resultados relacionados con el segundo objetivo son coherentes con las investigaciones previas señaladas en la introducción que han puesto de manifiesto que incorporar el componente muestra representativa de la complejidad del objeto matemático para valorar la idoneidad epistémica de un proceso de enseñanza y aprendizaje, no es tarea fácil, ni para los formadores ni para sus alumnos (futuros profesores o profesores en servicio), pero se puede enseñar como parte del proceso de formación del profesorado (Calle et al., 2021, 2023; Font, Breda, & Pino-Fan, 2017; Seckel & Font, 2020). Entre otras razones, por la necesidad de realizar un estudio preliminar orientado a la reconstrucción de un significado global sobre el objeto matemático que se quiere enseñar para poder ser conscientes de su complejidad.

En el caso de la futura profesora usada como ejemplo, se ha evidenciado que comete errores y, también, que propicia ambigüedades, aunque no es consciente de ello. Se trata de un resultado coherente con otras investigaciones (Sánchez, et al., 2021) y de los que son conscientes, los futuros profesores de matemáticas. En estas investigaciones se ha evidenciado, por ejemplo, que aquellos futuros profesores que no son conscientes de haber cometido un error, no significa que no lo hayan hecho, ya que hay ejemplos en los que el error puede ser identificado por el tutor del centro escolar, por sus alumnos, por el profesor de la universidad (como en este caso) y, en el contexto del Covid-19, a través de las clases grabadas en video.

En relación con el fomento de la riqueza de procesos se ha propiciado los procesos de tratamiento y conversión entre representaciones y también las conexiones intramatemáticas entre diferentes significados parciales y diferentes representaciones. Ahora bien, no se han propiciado otros procesos relevantes más transversales como la modelización, la resolución de problemas, la formulación de conjeturas o la argumentación.

En relación con tener en cuenta el componente representatividad de la complejidad del objeto matemático a enseñar, la futura profesora contempla dos significados para la recta y tres para la pendiente, presenta diferentes representaciones para la recta (ecuaciones vectorial, paramétrica y cartesiana y la representación gráfica) y propone una cierta variedad de tipos de problemas; por lo que se puede considerar que en cierta manera ha tenido en cuenta implícitamente la complejidad del objeto matemático a enseñar. En cambio, los otros futuros profesores la tuvieron mucho menos en cuenta.

Si bien incorporar el componente muestra representativa de la complejidad del objeto matemático para valorar la idoneidad epistémica de un proceso de enseñanza y aprendizaje, no es tarea fácil, ni para los formadores ni para sus alumnos en muchos países, en el caso del Ecuador es especialmente difícil si se tiene en cuenta la débil formación matemática y didáctica de los profesores ecuatorianos, tal como se documenta (Martínez Jara et al., 2018) en el reporte sobre Ecuador incluido en el informe, coordinado por Yamamoto y Malaspina (2018), sobre la Educación Matemática en la región andina.

7.10 Consideración final

El hecho de que la institución no considere prioritario la contemplación de los aspectos epistémicos en la evaluación de las prácticas docentes de sus estudiantes (resultados del primer objetivo), es un resultado que puede facilitar que esta institución ahora vea como problemático algo que antes no se consideraba así: porqué dan tan poca importancia a valorar la calidad matemática que imparten sus alumnos. Una vez, asumido como problemática la ficha de seguimiento que se usa para la práctica preprofesional dos y tres (sobre todo que no se contemple una pauta enriquecida con preguntas para reflexionar sobre las matemáticas enseñada en la práctica preprofesional tres), se pueden propiciar cambios en la institución ya que procesos de instrucción realizados en la asignatura de Didáctica de las Matemáticas, como el que se ha descrito aquí, pueden ser la base para generar una ficha de seguimiento enriquecida con preguntas relacionadas con la calidad de las matemáticas enseñadas (por ejemplo, la ficha de seguimiento enriquecida con componentes e indicadores de la idoneidad didáctica).

7.11 Agradecimientos

Este trabajo se desarrolló en el marco de proyectos de investigación en formación docente: PGC2018-098603-B-I00 (MINECO / FEDER, EU), PID2021-127104NB-I00 (MINECO / FEDER, EU) y Competencias y conocimientos del docente de primaria y secundaria para la enseñanza de las matemáticas en modalidad híbrida (SENACYT/FIED21-002).

7.12 Referencias

Abrate, R., Font, V., & Pochulu, M. (2008). Obstáculos y dificultades que ocasionan algunos modelos y métodos de resolución de ecuaciones. *Proyecciones*, *6*(2), 49-57. https://ria.utn.edu.ar/handle/20.500.12272/5998

Baldin, Y., & Malaspina, U. (2018). Mathematics Teacher Education in the Andean Region and Paraguay: A Comparative Analysis of Issues and Challenges. *Springer Briefs in Education*. https://eric.ed.gov/?id=ED611159

Breda, A. (2020). Características del análisis didáctico realizado por profesores para justificar la mejora en la enseñanza de las matemáticas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *34*(66), 69-88. https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a04

Breda, A., & do Rosário Lima, V. (2016). Estudio de caso sobre el anális didáctico realizado en un trabajo final de un máster para profesores de matemáticas en servicio. *Journal of Research in Mathematics Education*, *5*(1), 74-103. https://doi.org/10.17583/REDIMAT.2016.1955

Breda, A., Font, V., & Pino-Fan, L. R. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *32*(60), 255-278. https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13

Breda, A., Pino-Fan, L. R., & Font, V. (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: Criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *13*(6), 1893-1918. https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.01207a

Calle, E., Breda, A., & Font, V. (2021). Reflection on the Complexity of Mathematical Objects in the Initial Training of Teachers. *Journal of Higher Education Theory and Practice*, *21*(13), 197-214. https://doi.org/10.33423/jhetp.v21i13.4801

Calle, E., Breda, A., & Font, V. (2023). Significados parciales del teorema de Pitágoras usados por profesores en la creación de tareas en el marco de un programa de formación continua. *Uniciencia*, *35*(1).

Esqué de los Ojos, D., & Breda, A. (2021). Valoración y rediseño de una unidad sobre proporcionalidad, utilizando la herramienta Idoneidad Didáctica. *Uniciencia*, *35*(1), 38-54. https://doi.org/10.15359/ru.35-1.3

Font, V., Breda, A., & Pino Fan, L. R. (2017). Análisis didáctico en un trabajo de fin de máster de un futuro profesor. En José María Muñoz Escolano, Alberto Arnal-Bailera, Pablo Beltrán-Pellicer, María Luz Callejo de la Vega, & José Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI, 2017, ISBN 978-84-16723-42-3, págs. 247-256* (pp. 247-256). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6262024&info=resumen&idioma=SPA

Font, V., Breda, A., & Pino-Fan, L. R. (2017). Análisis didáctico en un trabajo de fin de máster de un futuro profesor. En J.M.Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, & M.L. Callejo J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 255-264). Universidad de Zaragoza: SEIEM. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6262024

Font, V., Breda, A., & Seckel, M. J. (2017). Algunas implicaciones didácticas derivadas de la complejidad de los objetos matemáticos cuando estos se aplican a distintos contextos. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, *10*(2), 1-23. https://doi.org/10.3895/rbect.v10n2.5981

Font, V., Ferreres, S., Vanegas, Y. M., Rubio, N., Adan, M., & Carvajal, S. (2012). Desarrollo de la competencia en el análisis y valoración de la idoneidad de las matemáticas enseñadas. *Revista Del Congrés Internacional de Docència Universitària i Innovació (CIDUI)*, *1*(1).

Font, V., Godino, J. D., & Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, *82*(1), 97-124.

Font, V., Pino-Fan, L. R., & Breda, A. (2020). Una evolución de la mirada sobre la complejidad de los objetos matemáticos. *Paradigma*, *XLI*, 107-129. https://doi.org/10.37618/paradigma.1011-2251.2020.p107-129.id846

Font, V., Planas, N., & Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, *33*(1), 89-105. https://redined.educacion.gob.es/xmlui/handle/11162/79270?locale-attribute=es

García García, J. (2019). Escenarios de exploración de conexiones matemáticas. *Números: Revista de Didáctica de Las Matemáticas*, *100*, 129-133. http://funes.uniandes.edu.co/14747/1/Garcia2019Escenarios.pdf

Giacomone, B., Godino, J. D., & Beltrán-Pellicer, P. (2018a). Desarrollo de la competencia de análisis de la idoneidad didáctica en futuros profesores de matemáticas. *Educação & Pesquisa*, *44*(1), e172011. https://doi.org/10.1590/S1678-4634201844172011

Giacomone, B., Godino, J. D., & Beltrán-Pellicer, P. (2018b). Developing the prospective mathematics teachers' didactical suitability analysis competence. *Educacao e Pesquisa*, *44*, e172011-e172011. https://doi.org/10.1590/S1678-4634201844172011

Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación En Educación Matemática*, *8*(11), 111-132. https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/14720

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *39*(1-2), 127-135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2019). The onto-semiotic approach: Implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics*, *39*(1), 37-42. https://www.jstor.org/stable/26742011

Hamilton, M. L., Smith, L., & Worthington, K. (2008). Fitting the methodology with the research: An exploration of narrative, self-study and auto-ethnography. *Studying Teacher Education*, *4*(1), 17-28. https://doi.org/://doi.org/10.1080/17425960801976321

Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research of mathematics teaching and learning* (pp. 65-79). Macmillan.

Hummes, V. B. (2022). *Uso combinado del Lesson Study y de los Criterios de Idoneidad Didáctica para el desarrollo de la reflexión sobre la práctica en la formación de profesores de matemáticas*. Universitat de Barcelona.

Hummes, V. B., Breda, A., Font, V., & Silva, R. S. da. (2022). Lesson study e idoneidad didáctica en la reflexión sobre la práctica del profesor de matemáticas. *Seminário Internacional de Lesson Study No Ensino de Matemática*, 417-424. https://doi.org/10.36524/9786589716907

Koestler, C., Felton-Koestler, M. D., Bieda, K., & Otten, S. (2013). *Connecting the NCTM process standards and the CCSSM practices*. National Council of Teachers of Mathematics.

Llinares, S., Breda, A., Climent, N., Fernández, C., Font, V., Lupiáñez, J. L., Moreno, M., Perez-Tyteca, P., Ruiz-Hidalgo, J. F., & Sánchez, A. (2022). Formación y desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. En Lorenzo J. Blanco Nieto, Nuria Climent Rodríguez, María Teresa González Astudillo, Antonio Moreno Verdejo, Gloria Sánchez-Matamoros García, Carlos de Castro Hernández, & Clara Jiménez Gestal (Eds.), *Aportaciones al desarrollo del currículo desde la investigación en educación matemática* (1.ª ed., Vol. 1, pp. 480-530). Editorial Universidad de Granada.

Martínez Jara, M., Castillo Domenech, P., Trelles Zambrano, C., Calle Palomeque, E., Ayala Trujillo, A., Rivadeneira Loor, F., & Auccahuallpa Fernández, R. (2018). Report on mathematics teacher preparation in Ecuador. En *Mathematics Teacher Education in the Andean Region and Paraguay* (pp. 19-45). Springer.

Maure, L., González, R., Maya, C., & Bustamante, M. (2019). Hallazgos en la formación de profesores para la enseñanza de la matemática desde la idoneidad didáctica. Experiencia en cinco regiones educativas de Panamá. *Revista Inclusiones*, *6*(2), 142-162.

Monje, Y., Seckel, M. J., & Breda, A. (2018). Tratamiento de la inecuación en el curriculum y textos escolares chilenos. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *32*(61), 480-502.

Morales-López, Y., & Font, V. (2019). Valoración realizada por una profesora de la idoneidad de su clase de matemáticas. *Educação e Pesquisa*, *45*, 1-19. https://doi.org/10.1590/S1678-4634201945189468

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). *Principles and Standards*. Reston. https://www.nctm.org/standards/

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2014). *Principles to action: Ensuring mathematical success for all*. Reston. National Council of Teachers of Mathematics. https://www.nctm.org/Store/Products/Principles-to-Actions--Ensuring-Mathematical-Success-for-All/

Pino-Fan, L. R., Castro, W. F., Godino, J. D., & Font, V. (2013). Idoneidad epistémica del significado de la derivada en el currículo de bachillerato. *Paradigma*, *34*(2), 129-150.

Praetorius, A.-K., & Charalambous, C. Y. (2018). Classroom observation frameworks for studying instructional quality: looking back and looking forward. *Zdm*, *50*(3), 535-553.

Remillard, J. T. (2018). Examining teachers' interactions with curriculum resource to uncover pedagogical design capacity. En *Research on mathematics textbooks and teachers' resources* (pp. 69-88). Springer.

Rodríguez-Nieto, C. A., Font Moll, V., Borji, V., & Rodríguez-Vásquez, F. M. (2021). Mathematical connections from a networking of theories between extended theory of mathematical connections and onto-semiotic approach. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1-27.

Rondero, C., & Font, V. (2015). Articulation of the mathematical complexity of the arithmetic mean. *Enseñanza de Las Ciencias*, *33*(2), 29-49. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1386

Sánchez, A., Breda, A., Font, V., & Sala, G. (2021). ¿ Qué errores detectan los futuros profesores en las clases de matemáticas que imparten? *Revista Del Congrés Internacional de Docència Universitària i Innovació (CIDUI)*, *5*, 1-13.

Sánchez, A., Font, V., & Breda, A. (2021). Significance of creativity and its development in mathematics classes for preservice teachers who are not trained to develop students' creativity. *Mathematics Education Research Journal*. https://doi.org/10.1007/s13394-021-00367-w

Seckel, M. J., & Font, V. (2020). Competencia reflexiva en formadores del profesorado de matemática. *Magis, Revista Internacional de Investigación En Educación*, *12*(25), 127-144. https://doi.org/10.11144/JAVERIANA.M12-25.CRFP

Zengin, Y. (2019). Development of mathematical connection skills in a dynamic learning environment. *Education and Information Technologies*, *24*(3), 2175-2194. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/s10639-019-09870-x

CAPÍTULO VIII: ARTÍCULO CIENTÍFICO 7

8.1 Capítulo de libro publicado

Autores: Eulalia Calle, Adriana Breda y Vicenç Font.

Filiación: Universidad de Cuenca y Universidad de Barcelona.

Referencia: Calle, E.; Breda, A & Font, V. (2020). la complejidad de los objetos matemáticos en la formación inicial de docentes. En Lugo-Armenta, J.; Pino-Fan, L.; Pochulu, M. & Castro, W. (Eds), *Enfoque onto-semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos: investigaciones y desarrollos en América Latina.* Osorno, Chile: Editorial Universidad de Los Lagos

8.2 Indexación del libro

Capítulo de libro que ha sido publicadas después de un proceso de revisión por pares. Publicación realizad en el marco del proyecto PGC2018-098603-B-I00 (MCIU/AEI/FEDER, UE).

8.3 Resumen del capítulo de libro

En este capítulo se hace una revisión de algunas de las publicaciones anteriores mostrando su relación y coherencia y señalando algunos de los resultados obtenidos. Se trata de una publicación que se relaciona con los 5 objetivos específicos 5 de esta tesis.

El objetivo es el desarrollo de la competencia en análisis de la idoneidad didáctica, correspondiente al componente muestra representativa de la complejidad del objeto matemático, en programas de formación de profesores de matemáticas de Ecuador. Por una parte, es una Investigación cualitativa que describe el uso competente de dicho componente y; por otra parte, tiene un componente de desarrollo al elaborar recursos didácticos para conseguirlo. Se diseñaron tareas y se analizaron las producciones de los participantes a partir de categorías a priori (los diferentes significados del objeto matemático implicado) mediante un análisis de contenido para inferir el significado parcial usado. El principal resultado es que los participantes asumen la importancia de considerar la plurisignificación de los objetos matemáticos en el proceso de instrucción; sin embargo, tienen dificultades para diseñar tareas que impliquen el uso de una diversidad de significados.

Palabras Claves: Formación de profesores de matemáticas, Reflexión sobre la práctica docente, Idoneidad didáctica, Complejidad de objetos matemáticos.

8.4 Abstract

The objective is the development of competence in the analysis of didactic suitability, corresponding to the representative sample component of the complexity of the mathematical object, in training programs for mathematics teachers in Ecuador. It is a qualitative research that describes the competent use of said component and, on the other hand, it has a development component when developing didactic resources to achieve it. Tasks were designed and the productions of the participants were analyzed from a priori categories (the different meanings of the mathematical object involved) through a content analysis to infer the partial meaning used. The main result is that participants assume the importance of considering the multiple meaning of mathematical objects in the instructional process; nevertheless, they have difficulty designing tasks that involve the use of a variety of meanings.

Keywords: Training of mathematics teachers, Reflection on teaching practice, Didactic suitability, Complexity of mathematical objects.

8.5 Introducción

El Ministerio de Educación del Ecuador, con la intención de avanzar hacia la excelencia académica, viene implementado políticas educativas que buscan conseguir una educación primaria universal, erradicar el hambre y la pobreza, corregir las desigualdades de género (Cortez, 2014), cuya consecución depende en buena medida de la educación de la sociedad en general. Con esta finalidad, a partir del 2010, se ha reformado la educación general básica (EGB) y el bachillerato general unificado (BGU) introduciendo el modelo de formación de destrezas con criterios de desempeño. Esta reforma no ha obtenido los resultados positivos esperados (según lo conocido hasta ahora), por lo que es necesario continuar profundizando en la mejora de la formación inicial, así como de la formación continua de los profesores que imparten las matemáticas en el Ecuador, en particular fomentando el desarrollo de la reflexión sobre la práctica docente.

Con relación a la reflexión sobre la práctica docente, y luego de un recorrido bibliográfico de investigaciones realizadas acerca de la formación del profesor de matemáticas en el Ecuador, se puede afirmar que muy pocas, a diferencia de lo que ha pasado en otros países, se refieren al desarrollo de la reflexión, ya que las investigaciones existentes se han centrado en la metodología de enseñanza y en desarrollo de material concreto y aplicaciones de software, como propuestas para mejorar la educación matemática (Bernal, et al, 2019).

Por otra parte, la investigación internacional sobre el conocimiento y las competencias del profesorado de matemáticas ha evidenciado que los profesores tienen dificultades para interpretar aspectos epistémicos de las tareas y para identificar su potencial educativo; y, en el caso de Ecuador, la revisión de la literatura muestra que son necesarias investigaciones sobre esta temática.

El proyecto de tesis que se presenta se sitúa en esta línea de investigar sobre la reflexión del profesor sobre su práctica en un aspecto muy concreto: la reflexión del profesor ecuatoriano sobre la importancia de tener en cuenta la complejidad de los objetos matemáticos (entendida como pluralidad de significados) en los procesos de instrucción.

8.6 Objetivo de investigación

El *objetivo general* de la investigación es desarrollar el diseño y la implementación de recursos formativos que promuevan la realización de análisis valorativos de procesos de instrucción por parte de los profesores (en formación o en servicio) utilizando la herramienta criterios de idoneidad didáctica e investigar cómo se desarrolla la competencia de análisis de la idoneidad didáctica en estos dispositivos. En particular, se hace énfasis en la enseñanza y aprendizaje del uso del componente *representatividad de la complejidad del objeto matemático* del criterio de idoneidad epistémica. Este objetivo general se concreta en seis objetivos específicos.

8.7 Marco teórico

La revisión de la literatura señala la importancia de la reflexión del profesor y la necesidad de potenciarla (Korthagen, 2010). En esta línea, una agenda emergente de investigación en el campo de la educación matemática está relacionada con la importancia de reflexionar de manera profesional acerca de la práctica docente, pasando a ser un objetivo importante en la formación de profesores, y más aún, una competencia clave para el desarrollo profesional y la mejora de la enseñanza. La constatación de la relevancia que tiene la reflexión sobre la práctica ha llevado al diseño e implementación de propuestas didácticas que favorezcan su desarrollo (p.e., Coles, 2014; Ponte, 2011; Star, & Strickland, 2008).

Entre los enfoques teóricos que se han centrado en desarrollar herramientas y promover métodos de investigación sobre la reflexión del profesor (Gellert, Becerra, & Chapman, 2013), hay que resaltar, entre otros, la investigación – acción (Eliot, 1993) que plantea una ayuda al maestro para profundizar la comprensión de su problema en una situación inicial; la práctica reflexiva (Schön, 1983) que da importancia a la reflexión sobre la acción; el Lesson Study como metodología de trabajo grupal para la reflexión (Hart, Alston y Murata, 2011); y las investigaciones sobre la competencia mirar con sentido profesional (Mason, 2002), en los cuales se trata de promover la reflexión del profesor sobre la acción, de manera individual o colectiva, identificando factores que afectan los procesos de instrucción y, así, tomar decisiones basadas en ella.

3. 1 La reflexión sobre la práctica en la formación de profesores y los criterios de idoneidad en el modelo CCDM

En el modelo teórico de competencias y conocimientos de profesor de matemáticas (CCDM) (Godino, Giacomone, Batanero y Font (2017), basado en constructos del Enfoque Ontosemiótico (Godino, Batanero y Font, 2007) se considera que las dos competencias clave son la competencia matemática y la competencia de análisis e intervención didáctica, siendo el núcleo fundamental de esta última (Breda, Pino-Fan y Font, 2017) diseñar, aplicar y valorar secuencias de aprendizaje propias y de otros, mediante técnicas de análisis didáctico y criterios de idoneidad, para establecer ciclos de planificación, implementación, valoración y plantear propuestas de mejora. Esta competencia está formada por diferentes subcompetencias: 1) subcompetencia de análisis de la actividad matemática; 2) subcompetencia de análisis y gestión de la interacción y de su efecto sobre el aprendizaje de los estudiantes; 3) subcompetencia de análisis de normas y metanormas; y 4) subcompetencia de valoración de la idoneidad didáctica de procesos de instrucción. En este trabajo nos centraremos en esta última subcompetencia, en concreto en uno de sus componentes.

La subcompetencia de valoración de la idoneidad didáctica de procesos de instrucción hace hincapié en el análisis de idoneidad didáctica. Dicha noción (Breda, Font y Pino-Fan, 2018) es una respuesta parcial de la problemática: ¿Qué criterios se deben utilizar para diseñar una secuencia de tareas, que permitan evaluar y desarrollar la competencia matemática de los alumnos y qué cambios se deben realizar en su rediseño para mejorar el desarrollo de esta competencia? Esta noción se descompone en los siguientes criterios parciales de idoneidad didáctica (Font, Planas y Godino, 2010):): *Idoneidad Epistémica*, para valorar si las matemáticas que están siendo enseñadas son "buenas matemáticas"; *Idoneidad Cognitiva*, para valorar, antes de iniciar el proceso de instrucción, si lo que se quiere enseñar está a una distancia razonable de aquello que los alumnos saben, y después del proceso, si los aprendizajes adquiridos están cerca de aquello que se pretendía enseñar; *Idoneidad Interaccional*, para valorar si las interacciones resuelven dudas y dificultades de los alumnos; *Idoneidad Mediacional*, para valorar la adecuación de los recursos materiales y temporales utilizados en el proceso de instrucción; *Idoneidad Emocional*, para valorar la implicación (intereses, motivaciones,…) de los alumnos durante el proceso de instrucción; *Idoneidad Ecológica*, para valorar la adecuación del proceso de instrucción al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social y profesional. En particular, la idoneidad epistémica se refiere al grado de representatividad e interconexión de los significados institucionales implementados (o pretendidos) respecto de un significado de referencia. En Breda, Pino-Fan y Font (2017) se aporta un sistema de componentes e indicadores para cada criterio que sirve de guía de análisis y valoración de la idoneidad didáctica, que está pensado para un proceso de instrucción en cualquier etapa educativa.

La necesidad y utilidad de estos criterios se da en dos momentos del proceso de instrucción: primero para guiarlos (los criterios de idoneidad son principios que orientan "cómo se deben hacer las cosas") y, segundo, para valorar sus implementaciones (los criterios sirven para valorar el proceso de instrucción efectivamente implementado).

La operatividad de los criterios de idoneidad exige definir un conjunto de componentes e indicadores observables, que permitan valorar el grado de idoneidad de cada uno de los criterios. Por ejemplo, todos seguramente estaremos de acuerdo en que es necesario implementar unas "buenas" matemáticas, pero podemos entender cosas muy diferentes por ello. Para algunos criterios, los descriptores son relativamente fáciles de consensuar (por ejemplo, para el criterio de idoneidad de medios), para otros, como es el caso de la idoneidad epistémica es más difícil. En Breda y Lima (2016), Seckel (2016) y Breda, Pino-Fan y Font (2017), se aporta un sistema de indicadores que sirve de guía de análisis y valoración de la idoneidad didáctica, que está pensado para un proceso de instrucción en cualquier etapa educativa. A continuación, se reproducen los componentes e indicadores del criterio de idoneidad epistémica (Breda y Lima, 2016, p. 80):

Tabla 18. Componentes e indicadores de la idoneidad epistémica

Componentes	**Indicadores**
Errores	No se observan prácticas que se consideren incorrectas desde el punto de vista matemático.

Ambigüedades	No se observan ambigüedades que puedan llevar a la confusión a los alumnos: definiciones y procedimientos clara y correctamente enunciados, adaptados al nivel educativo al que se dirigen; adecuación de las explicaciones, comprobaciones, demostraciones al nivel educativo a que se dirigen, uso controlado de metáforas, etc.
Riqueza de procesos	La secuencia de tareas contempla la realización de procesos relevantes en la actividad matemática (modelización, argumentación, resolución de problemas, conexiones, etc.).
Representatividad de la complejidad del objeto matemático	Los significados parciales (definiciones, propiedades, procedimientos, etc.) son una muestra representativa de la complejidad de la noción matemática que se quiere enseñar contemplada en el currículo. Los significados parciales (definiciones, propiedades, procedimientos, etc.) son una muestra representativa de la complejidad de la noción matemática que se quiere enseñar. Para uno o varios significados parciales, muestra representativa de problemas. Para uno o varios significados parciales, uso de diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico…), tratamientos y conversiones entre los mismos.

3.2 Idoneidad epistémica y complejidad del objeto matemático

Tanto los componentes como los indicadores de los criterios de idoneidad didáctica se han elaborado considerando los principios y los resultados de la investigación en el área de Didáctica de las Matemáticas. En particular, para la idoneidad epistémica se ha tenido en cuenta un principio fundamental del EOS que, con los matices propios de cada enfoque, es (o puede ser) asumido por otros enfoques teóricos del área. Nos referimos al principio que se puede formular de la siguiente manera: los objetos matemáticos emergen de las prácticas, lo cual conlleva su complejidad (Font, Godino y Gallardo, 2013). De este principio se deriva un componente (representatividad de la complejidad del objeto matemático) cuyo objetivo es que se tenga en cuenta, dentro de lo posible, dicha complejidad en el diseño y rediseño de las secuencias didácticas.

Este componente tiene su origen en la manera pragmática de cómo se entiende el significado de un objeto matemático en el EOS. Desde un punto de vista pragmático, el significado de un objeto matemático se entiende como el conjunto de prácticas en la que dicho objeto interviene de una manera determinante. Es decir, supone disponer de prácticas con respecto al campo de experiencia que el objeto abarca. Cuando se define el significado de un objeto matemático en términos de prácticas, tal como se propone en el pragmatismo, resulta que el significado de un objeto matemático queda ligado a otros significados y a otros objetos, puesto que en las prácticas interviene dicho objeto conjuntamente con otros objetos matemáticos. Este hecho, permite distinguir dos términos que resultan difíciles de diferenciar, nos referimos a los términos sentido y significado. En efecto, puesto que el objeto se puede relacionar con unos u otros objetos según el contexto, el tipo de notación, etc., para dar lugar a diferentes prácticas, podemos entender el sentido como un significado parcial, esto es, como un subconjunto (sentido) del sistema de prácticas en las que el objeto es determinante (significado).

El significado de un objeto matemático entendido como sistema de prácticas se puede parcelar en diferentes clases de prácticas más específicas que son utilizadas en un determinado contexto y con un determinado tipo de notación produciendo un determinado sentido. Cada contexto ayuda a generar sentido (permite generar un subconjunto de prácticas), pero no genera todos los sentidos.

Un objeto matemático, que se ha originado como un emergente del sistema de prácticas que permite resolver un determinado campo de problemas, con el paso del tiempo queda enmarcado en diferentes programas de investigación. Cada nuevo programa de investigación permite resolver nuevos tipos de problemas, aplicar nuevos procedimientos, relacionar el objeto (y por tanto definir) de una manera diferente, utilizar nuevas representaciones, etc. De esta manera, con el paso del tiempo aparecen nuevos subconjuntos de prácticas (sentidos) que amplían el significado del objeto.

Según Font, Godino y Gallardo (2013), de acuerdo con el punto de vista pragmatista, para analizar un texto matemático y, más en general, la actividad matemática, sea profesional o escolar, es necesario contemplar como mínimo los siguientes elementos: 1) notaciones, representaciones (lenguaje), 2) situaciones-problema 3) definiciones, 4) procedimientos, técnicas, 5) proposiciones, propiedades, teoremas, etc., y 6) argumentos. Estos seis tipos de elementos (llamados objetos primarios en el EOS) se articulan formando configuraciones de objetos llamadas epistémicas, y se pueden entender como un contexto intra matemático. Se trata de una herramienta que puede ser útil para describir la complejidad de los objetos matemáticos y de las prácticas de las cuales emergen. En el EOS, la introducción de la dualidad unitaria-sistémica permite reformular la visión "ingenua" de que "hay un mismo objeto matemático con distintas representaciones". Lo que hay es un sistema complejo de prácticas, que permiten resolver problemas, en las que el objeto matemático en cuestión no aparece directamente, lo que si aparece son representaciones del objeto, diferentes definiciones, proposiciones y propiedades del objeto, procedimientos que se le aplican y argumentos acerca del objeto (configuraciones de objetos primarios). Dicho de otra manera, a lo largo de la historia se han ido generando diferentes configuraciones epistémicas para el estudio del objeto en cuestión, algunas de las cuales han servido para generalizar a las preexistentes.

Desde esta perspectiva, un criterio de idoneidad de un proceso de instrucción para un objeto matemático es que el conjunto de prácticas implementadas sea un conjunto lo más representativo posible del sistema de prácticas que son el significado del objeto. Dicho en términos de contextos, hay que presentar a los alumnos una muestra de contextos intra matemáticos representativa, una muestra de contextos que permita construir una muestra representativa de los diferentes sentidos del objeto. Por otra parte, una vez seleccionada una muestra representativa de contextos intra matemáticos, hay que seleccionar los contextos extra matemáticos que permiten hacer emerger las configuraciones epistémicas en las que se concretan dichos contextos intra matemáticos.

3.3 La reflexión sobre la complejidad del objeto matemático en la formación de profesores.

En diferentes procesos de formación de profesores de matemáticas de España, México, Brasil, Ecuador, Chile, Panamá, Costa Rica, Venezuela y Argentina (Ramos, 2006; Ferreres y Vanegas, 2015; Pochulu, Font y Rodríguez, 2016; Breda y Lima, 2016; Seckel, 2016; Breda, Pino-Fan y Font, 2017), se han realizado un conjunto de investigaciones que tienen como finalidad investigar el uso del constructo criterios de idoneidad didáctica, propuestos por el EOS (Godino, Batanero y Font, 2007; Breda, Font y Lima, 2015; Breda, Font y Pino-Fan, 2018), como herramienta para organizar la reflexión del profesor a su práctica, cuando esta reflexión está orientada hacia la valoración y mejora de la práctica, con el objetivo de desarrollar en los profesores la subcompetencia de análisis de la idoneidad didáctica de un proceso de instrucción.

Estas investigaciones han puesto de manifiesto los siguientes aspectos: 1) aunque no se incorpore explícitamente la enseñanza de los componentes e indicadores de los criterios de idoneidad didáctica, algunos de ellos, y en particular el componente <<muestra representativa de la complejidad del objeto matemático>>, están presentes de manera implícita cuando los profesores o futuros profesores hacen valoraciones de propuestas didácticas (suyas o de otros) (Breda y Lima, 2016; Breda, Pino-Fan y Font, 2017). 2) Incorporar el componente <<muestra representativa de la complejidad del objeto matemático>> para valorar la idoneidad epistémica de un proceso de instrucción, no es tarea fácil, ni para los formadores ni para sus alumnos (futuros profesores o profesores en servicio), pero se puede enseñar como parte del proceso de formación del profesorado. En estos dispositivos formativos, se hace hincapié en la necesidad de realizar un estudio preliminar orientado a la reconstrucción de un significado global del objeto matemático que se quiere enseñar para poder ser conscientes de su complejidad.

8.8 Metodología

La investigación es primordialmente cualitativa, puesto que el interés es primero describir, sobre todo, el desarrollo de un aspecto parcial de la competencia de los futuros profesores (analizar y valorar la idoneidad de procesos de instrucción). Tiene además un componente de desarrollo ya que, por un lado, se proporciona conocimiento detallado acerca del estado actual de la formación de profesores de secundaria (en formación y en servicio) en Ecuador y, por otro lado, se elabora recursos didácticos específicos para mejorar la formación de estos profesores.

Tabla 19. Participantes de la investigación

1. Formación Inicial: Futuros Profesores de Matemáticas	
Participantes	Estudiantes de la Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales: Matemáticas y Física. Universidad de Cuenca.
2. Formación Continua: Profesores de Matemáticas en Ejercicio	
Participantes	95 profesores de matemáticas de instituciones públicas y privadas, de diferentes provincias y ciudades del Ecuador. Trabajan en niveles de Educación General Básica superior (EGBS) y el Bachillerato General Unificado (BGU).
Programa	Máster en Formación Continua y Profesionalización Docente: Curso de dos años dividido en tres bloques: a) Bloque general (15 créditos ECTS); b) Bloque específico (21 créditos ECTS) y c) Bloque de Prácticum y Trabajos de Fin de Máster (TFM) (24 créditos ECTS).
Asignatura Abordada	Innovación e Investigación sobre la Propia Práctica. Objetivos: Presentar propuesta de innovación y herramientas de valoración de la calidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas que permitan al profesor, la mejora de su propia práctica. Pretendía además hacer una iniciación a la investigación en Didáctica de las Matemáticas y a la difusión de sus resultados.

Fuente: Autores

Se trata de diseñar e implementar ciclos formativos que en el EOS son considerados experimentos del desarrollo de las competencias y conocimientos del profesor. Es un tipo de dispositivo que estudia el desarrollo profesional del profesor en formación o en servicio, y se fundamentan en los principios de los experimentos de enseñanza (Cobb *et al.*, 2003), lo que significa que un equipo de investigadores estudia el desarrollo del profesor a la vez que lo promueve como parte de un ciclo continuo de análisis e intervención. En este caso, dado que se pretende enseñar a los profesores participantes la importancia de tener en cuenta, para la enseñanza y aprendizaje de un determinado objeto matemático, una muestra representativa de los diferentes significados de dicho objeto en el diseño, valoración y rediseño de secuencias de tareas, el proceso de instrucción se diseñó teniendo en cuenta el siguiente principio: para poder usar este componente en la valoración y rediseño de secuencias de tareas, el profesor, como mínimo, debe conocer los diferentes significados del objeto matemático a enseñar (significado holístico) y sus conexiones, debe conocer cuáles de estos significados están incluidos en el currículum y debe poder seleccionar y/o crear tareas en las que se tenga que usar un determinado significado del objeto matemático que se pretende enseñar.

Las muestras son intencionales ya que el dispositivo formativo se ha implementado con profesores de secundaria en un máster de Formación de Profesores de Secundaria de Matemáticas de Ecuador y con futuros profesores de una Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales de la Universidad de Cuenca, si bien la muestra no es estadísticamente representativa, puede ofrecer información relevante para la formación de profesores en el Ecuador.

Se diseñaron tareas específicas y se analizaron las producciones de los participantes con categorías a priori (tipos de significados del objeto matemático implicado) mediante un análisis de contenido para inferir el significado parcial usado; después se realizó una triangulación de expertos.

8.9 Resultados

En esta sección presentamos algunos de los resultados obtenidos, los cuales se han difundido por medio de diversas publicaciones. Un primer resultado de la reflexión sobre la complejidad de los objetos matemáticos en la formación inicial de profesores documentado en Calle y Breda (2019) es que, *como resultado de la experiencia realizada, los estudiantes en formación docente, son conscientes de que, para mejorar el aprendizaje de las matemáticas, es necesario tener en cuenta la complejidad de los objetos matemáticos, entendida como las diferentes formas de comprender los significados y su aplicación en la resolución de problemas.*

Un segundo resultado de la reflexión didáctica en la formación inicial de docentes sobre la complejidad de las nociones de combinatoria (Calle, Parra y Paucar, 2020) es que los participantes tienen dificultades para realizar el análisis de la actividad matemática, en particular sus comentarios sobre las dificultades que tuvieron muestran unos análisis poco detallados.

Un tercer resultado sobre los conocimientos de futuros profesores sobre los diferentes significados del objeto matemático media aritmética (Calle, Breda y Sala 2020) es que es importante fomentar la reflexión de los futuros profesores sobre los diferentes significados de un objeto matemático, porque la presentación de una muestra representativa de esta variedad de significados permite que los estudiantes resuelven una variedad de problemas matemáticos adicionales.

Un cuarto resultado sobre qué significado atribuyen a la media aritmética profesores de matemáticas en ejercicio (Calle, Breda y Font, 2020a), es que, tener en cuenta el componente representatividad de la complejidad del objeto matemático, es elemento importante para su formación, pues, para el profesor, conocer una muestra representativa de significados de un objeto matemático, le permite trabajar con una diversidad de problemas, facilitando que los alumnos construyan una red de significados parciales, conectados entre sí, que les permita desarrollar la competencia matemática que les posibilita resolver diferentes tipos de problemas.

Un quinto resultado sobre los significados de las medidas de tendencia central contemplados por Profesores de Matemáticas en sus Trabajos de Fin de Máster (Calle, Breda y Font, 2020b), es que los profesores están de acuerdo en la importancia de considerar los diferentes significados de los objetos matemáticos en su proceso de enseñanza. Sin embargo, no saben cómo diseñar tareas con problemas de aplicación que respondan a esta diversidad de significados.

8.10 Conclusiones

Los resultados obtenidos, tanto en formación inicial como continua, muestran que los participantes, a pesar de las dificultados que tuvieron, consideran interesante la reflexión sobre la complejidad de los objetos matemáticos y su relación con el desarrollo de la competencia matemática de los alumnos. Por otra parte, los participantes presentaron, en las tareas que diseñaron, diferentes significados de los objetos matemáticos, tanto intra como extra matemáticos, enfatizando en la importancia de tener en cuenta su complejidad, manifestando que los diferentes significados se deben ir presentando de forma gradual a los alumnos.

Las dificultades observadas en los profesores ecuatorianos en su reflexión sobre la complejidad de los objetos matemáticos, es un resultado coherente con la investigación sobre la formación de los profesores en la región andina (Yamamoto y Malaspina, 2018) y, también, con la investigación internacional sobre el conocimiento y las competencias del profesorado de matemáticas, la cual ha evidenciado que los profesores tienen dificultades para interpretar aspectos epistémicos de las tareas y para identificar su potencial educativo (Stahnke, Schueler y Roesken-Winter, 2016).

8.11 Reflexiones finales

En los diferentes trabajos que se han realizado hasta la fecha, se ha presentado una situación muy similar y es que el incorporar el componente <<muestra representativa de la complejidad del objeto matemático>> para valorar la idoneidad epistémica de un proceso de enseñanza y aprendizaje, no es tarea fácil, ni para los formadores ni para sus alumnos (futuros profesores o profesores en servicio), pero se puede enseñar como parte del proceso de formación del profesorado.

8.12 Reconocimiento

Trabajo desarrollado en el marco del proyecto de investigación en formación de profesorado: PGC2018-098603-B-I00 (MCIU/AEI/FEDER, UE).

8.13 Referencias

Bernal, J., Calle, E., Mora, M., Guachún, F. (2019). *Investigación en Educación Matemática, en Ecuador y la Región: Caso Universidad de Cuenca*. En D. Aguilar, M. Cobos, L. Claudio, E. Campozano (Eds), La Investigación Educativa en un Mundo en Constante Transformación (pp. 53-65). Cuenca: ASEFIE.

Breda, A., y Lima, V. M. (2016). Estudio de caso sobre el análisis didáctico realizado en un trabajo final de un máster para profesores de matemáticas en servicio. *REDIMAT, 5*(1), 74-103.

Breda, A., Pino-Fan, L., & Font, V. (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 13*(6), 1893-1918.

Breda, A., Font, V., y Pino-Fan, L. R. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. *Bolema*, *32*(60), 255-278.

Calle, E., y Breda, A. (2019). Reflexión sobre la complejidad de los objetos matemáticos en la formación inicial de profesores. En Daniel Aguilar, Martha Cobos, Luis Claudio Cortés, Enma Campozano (Eds), *La Investigación Educativa en un Mundo en Constante Transformación* (pp. 29-50). Cuenca: ASEFIE

Calle, E., Parra, E., y Paucar, P. (2020). Reflexión didáctica en formación inicial de docentes sobre la complejidad de las nociones de combinatoria. En *IV Coloquio Binacional sobre la Enseñanza de la Matemática* (pp. 33-50). Cuenca, Ecuador: Universidad de Cuenca.

Calle, E., Breda, A. y Sala, G. (2020). Conhecimento de Futuros Professores sobre os Diferentes Significados do Objeto Matemático Media Aritmética. En XIV *Seminário Sul_Mato_Grossense de Pesquisa em Educação Matemática* (pp. 177-186). Rio Grande del Sur. Brasil: Universidade de Mato Grosso do Sul.

Calle, E. C., Breda, A., y Font, V. (2020a) ¿Qué significado atribuyen a la media aritmética profesores de matemáticas en ejercicio? *Revista Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *33*(1), 643-652

Calle, E., Breda, A., y Font, V. (2020b). Significados de las medidas de tendencia central contemplados por profesores de matemática en sus trabajos de fin de máster. En 5 Encuentro Internacional en Educación Matemática (pp. 457-462). Barranquilla. Colombia: Universidad del Atlántico.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R. y Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher, 32*(1), 9-13.

Coles, A. (2014. Mathematics teachers learning with video: the role, for the didactic, of a heightened listening. *ZDM*, 46(2), 267-278.

Cortez, D. (2014). *Genealogía del sumak kawsay y el buen vivir en Ecuador: un balance. Post-Crecimiento y Buen Vivir. Propuestas globales para la construcción de sociedades equitativas y sustentables.* Friedrich-Ebert-Stiftung (FES): Quito.

Elliott, J. (1993). El cambio educativo desde la investigación-acción. Ediciones Morata.

Ferreres, S., y Vanegas, Y. (2015). Uso de criterios de calidad en la reflexión sobre la práctica de los futuros profesores de secundaria de matemáticas. *Procedia*, 196, 219-225.

Font, V., Godino, J. D., y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, 82, 97–124.

Font, V., Planas, N., y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje, 33* (1), 89-105.

Gellert, U., Becerra, R., & Chapman, O. (2013). Research methods in mathematics teacher education. En K. M. A. Clements, A. J. Bishop, C. Keitel-Kreidt, J. Kilpatrick, & F. Leung (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (v. 27, pp. 327-360). Nueva York, NY: Springer-Verlag.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema*, *31*(57), 90-113.

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education,* 39(1), 127-135.

Hart, L. C., Alston, A., y Murata, A. (2011). Lesson study research and practice in mathematics education. *The Netherlands: Springer.*

Korthagen, F. (2010). La práctica, la teoría y la persona en la formación del profesorado. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado 68*(24), 83-101.

Mason, J. (2002). *Researching your own practice: The discipline of noticing.* Londres: Routledge-Falmer.

Morales-Maure, L., Durán-González, R., Pérez-Maya, C., y Bustamante, M. (2019). Hallazgos en la formación de profesores para la enseñanza de la matemática desde la idoneidad didáctica. Experiencia en cinco regiones educativas de Panamá. *Inclusiones*, *6*(2), 142-162.

Pochulu, M., Font, V., & Rodríguez, M. (2016). Desarrollo de la competencia en análisis didáctico de formadores de futuros profesores de matemática a través del diseño de tareas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Relime, 19*(1), 71-98.

Ponte, J. P. (2011). Using video episodes to reflect on the role of the teacher in mathematical discussions. In *Constructing Knowledge for Teaching Secondary Mathematics* (pp. 249-261). Springer, Boston, MA.

Ramos, A. B. (2006). Objetos personales, matemáticos y didácticos, del profesorado y cambios institucionales. el caso de la contextualización de las funciones en una facultad de ciencias económicas y sociales. Tesis doctoral no publicada. Universitat de Barcelona.

Schon, D. A. (1983). *The reflective practitioner: how professionals think in action* (p. 1983). New York: Basic Books.

Seckel M. J. (2016). *Competencia en análisis didáctico en la formación inicial de profesores de educación general básica con mención en matemática.* Tesis doctoral no publicada. Universitat de Barcelona.

Star, J., & Strickland, S. (2008). Learning to observe: Using video to improve pre-service mathematics teachers' ability to notice. *Journal of Mathematics Teacher Education, 11*(2), 107-125.

Stahnke, R; Schueler, S., y Roesken-Winter, B. (2016). Teachers' perception, interpretation, and decision-making: a systematic review of empirical mathematics education research. *ZDM, 48*(1), 1-27.

Yamamoto, Y., y Malaspina, U. (2018). *Mathematics Teacher Education in the Andean Region and Paraguay: A Comparative Analysis of Issues and Challenges*. Cham: Springer.

CAPÍTULO IX: RESULTADOS, DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES FINALES

Resumen

Este capítulo presenta los principales resultados y conclusiones que se han obtenido con relación a los 5 objetivos específicos propuestos. En segundo lugar, se hace una discusión general de los resultados de la investigación, Además, se muestran las limitaciones encontradas durante el proceso investigativo, los posibles trabajos futuros como ampliaciones de esta investigación y la difusión de los resultados realizada hasta el momento.

9.1 Resultados, discusión y conclusiones relacionadas con los objetivos específicos 1 y 2

Para los objetivos 1 y 2, primero se ha hecho una revisión bibliográfica selectiva y se ha concluido que una característica de la comunidad de investigadores en Didáctica de las Matemáticas es la amplia diversidad de perspectivas teóricas. Cada uno de estos enfoques privilegia alguna de las dimensiones del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas sobre las demás, pero hay un aspecto en el que muchos de estos marcos teóricos coinciden, nos referimos a que consideran que una característica de los objetos matemáticos que deben ser enseñados y aprendidos es su complejidad.

Tal como se señala en Rondero y Font (2015), la complejidad asociada a los objetos matemáticos conlleva algunas cuestiones que hay que tener en cuenta. La mirada compleja sobre los objetos matemáticos lleva a pensar no en un objeto simple sino en un sistema complejo formado por partes o componentes que deben articularse, o conectarse entre sí. Aparece pues el problema de la articulación (conexión) de los saberes asociados a un objeto matemático como la otra cara de la complejidad.

Se ha revisado la problemática de la complejidad según como la contemplan cinco enfoques teóricos: la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS), La Teoría Acción-Proceso-Objeto-Esquema (APOE), La Ciencia Cognitiva de las Matemáticas (CGM) y la Teoría de la Objetivación (TO). Por otra parte, el proceso de conexión contemplado en los principios y estándares del NCTM (2000) está relacionado con la complejidad y se ha revisado cómo se aborda este aspecto en los cinco enfoques teóricos considerados.

La posición compartida entre los directores de tesis y la doctoranda acerca de las diferentes maneras de entender la complejidad de los objetos matemáticos ha consistido en tomar como referente teórico el Enfoque Ontosemiotico (EOS).

En el EOS (Font, Godino y Gallardo, 2013) se considera que el camino por el cual los objetos matemáticos emergen a partir de las prácticas es complejo y deben ser distinguidos, al menos, dos niveles de emergencia. En un primer nivel, emergen representaciones, definiciones, proposiciones, procedimientos, problemas y argumentos (llamados objetos primarios en el EOS), que se organizan en configuraciones llamadas epistémicas. Para explicar cómo emergen los objetos primarios se usa la metáfora "subir una escalera" para resaltar que la práctica matemática se puede considerar como subir una escalera, donde el escalón en el que nos apoyamos para realizar la práctica es una configuración de objetos primarios ya conocida, mientras que el escalón superior al que accedemos, como resultado de la práctica realizada, es una nueva configuración de objetos primarios en la que alguno (o algunos) de dichos objetos no era conocido antes. Los nuevos objetos primarios aparecen como resultado de la práctica matemática y se convierten en objetos primarios institucionales gracias, entre otros procesos, a procesos de institucionalización.

En el EOS se considera un segundo nivel de emergencia, en el cual emerge un objeto matemático (por ejemplo, el objeto función), que es considerado como un objeto que se representa por diferentes representaciones, que puede tener varias definiciones equivalentes, que tiene propiedades, etc. Esta segunda emergencia es el resultado de diferentes factores. Los principales son los siguientes: 1) La objetividad de las matemáticas. 2) El éxito predictivo de las ciencias que usan las matemáticas. 3) Simplicidad, intencionalidad y reificación. 4) La metáfora del objeto en el discurso del profesor. 5) Diferenciación entre ostensivos y no ostensivos. Estos cinco factores, entre otros, generan en el aula, implícita o explícitamente, la visión descriptivo-realista de las matemáticas que considera: 1) que las proposiciones matemáticas describen propiedades de objetos matemáticos y 2) que dichos objetos tienen algún tipo de existencia independiente de las personas que los conocen y del lenguaje que se usa para conocerlos. Dicha visión resulta difícil de evitar ya que las razones que llevan a generarla están actuando constantemente y de manera muy sutil. Más que una posición filosófica asumida conscientemente, se trata de una forma de entender los objetos matemáticos que está presente de manera implícita.

Según el EOS, el objeto matemático derivada (por ejemplo) hay que situarlo en el segundo nivel de emergencia de objetos considerado en este enfoque. Se trata de la emergencia de una referencia global asociada a diferentes configuraciones de objetos primarios, las cuales permiten realizar prácticas matemáticas en diferentes contextos −en los cuales, por ejemplo, la derivada se ha interpretado como límite, como pendiente de la recta tangente o como velocidad instantánea, además como un operador que transforma una función en otra–, lo cual lleva a entender que la derivada se puede definir de diversas formas, representar de formas diferentes, etc. El resultado, según el EOS, es que se considera que hay un objeto, llamado derivada, que juega el papel de referencia global de todas las configuraciones de objetos primarios. Ahora bien, dicha referencia global, en la actividad matemática, se concreta en una configuración de objetos primarios determinada. Por tanto, lo que se puede hacer con este objeto de segundo nivel está determinado por esta configuración. En el EOS, el objeto que juega el papel de referencia global se puede considerar como único por razones de simplicidad y, a la vez, como múltiple ya que, metafóricamente, se puede decir que estalla en una multiplicidad de objetos primarios agrupados en diversas configuraciones.

La mirada sobre la complejidad de los objetos matemáticos que tiene el EOS permite reformular la visión ingenua de que hay un mismo objeto matemático con diferentes representaciones. Lo que hay es un sistema complejo de prácticas, que permiten resolver problemas, en las cuales el objeto matemático (secundario) no aparece directamente, aquello que sí aparece son representaciones del objeto (secundario), diferentes definiciones, proposiciones y propiedades del objeto, procedimientos y técnicas que se aplican al objeto y argumentos sobre el objeto matemático (configuraciones epistémicas de objetos primarios en términos del EOS). Dicho de otro modo, a lo largo de la historia se han ido generando diferentes configuraciones epistémicas de objetos primarios para el estudio del objeto matemático (secundario), algunas de las cuales han servido para generalizar a las preexistentes.

También se han tenido en cuenta diferentes investigaciones que han usado el EOS como referente teórico para profundizar en la complejidad de diferentes objetos matemáticos: números naturales (Godino, Font, Wilhelmi y Arrieche, 2009), media aritmética (Rondero y Font, 2015), límite (Contreras, García y Font, 2012), Optimización (Balcaza, Contreras y Font, 2017), Teorema de Thales (Font, Breda y Seckel, 2017), derivada (Pino-Fan, Castro, Godino y Font, 2013; Pino-Fan, Godino y Font, 2011), antiderivada (Gordillo y Pino-Fan, 2016; Gordillo, Pino-Fan, Font y Ponce-Campuzano, 2018), integral (Mateus y Font, 2021) e inecuaciones

(Monje, Seckel y Breda, 2018); así como la comprensión que tienen los estudiantes de dicha complejidad (Pino-Fan, Font, Gordillo, Larios y Breda, 2018; Pino-Fan, Godino y Font, 2018).

Con relación sobre qué criterios seguir para diseñar secuencias didácticas para la enseñanza del componente representatividad de la complejidad, el primer criterio es hacer ver su necesidad relacionándolo con la noción de competencia. Es decir, se remarca que actualmente hay una tendencia a considerar que saber matemáticas incluye la competencia para aplicarlas a situaciones de la vida real, y que dicha tendencia, en algunos países, se ha concretado en el diseño de currículums basados en competencias. Se hace hincapié en que la idea de competencia en el fondo pone de relieve que las matemáticas que se enseñan han de ser útiles para resolver problemas en diferentes contextos, tomando como primer ejemplo problemas que se resuelven aplicando significados parciales diferentes de algún objeto matemático (por ejemplo; tal como se hace con el teorema de Thales en Font, Breda y Seckel, 2017). Después se puede reflexionar sobre la complejidad de la noción de otros objetos matemáticos, entre ellos los de función (Font, Vanegas, Ferreres, Carvajal y Adán, 2012), inecuación, derivada y mediatriz. Esta reflexión incluye una mirada histórica sobre la evolución de dichos objetos matemáticos y se analizan sus deferentes significados, después se mira cuáles de ellos están incluidos en el currículo de secundaria (Font, Pino-Fan y Breda, 2020). El tercer criterio es seguir la siguiente secuencia: a) seleccionar un objeto matemático (por ejemplo la pendiente), b) preguntar a los participantes qué entienden ellos por pendiente de una recta, c) seleccionar los significados aparecidos en b que forman parte del currículo de secundaria, d) proponer diferentes problemas y pedirles que asocien cada significado con la tarea que pone en juego este significado para su resolución (y que justifiquen la asociación) y e) en la puesta en común sobre la resolución de esta tarea se hace hincapié en que cada problema exige poner en funcionamiento un tipo de significado parcial del objeto matemático en cuestión y que la otra cara de la moneda de la competencia en el uso de la noción del objeto en la resolución de una variedad de problemas era la enseñanza de sus diferentes significados. Se trata de que los participantes pasen de un punto de vista ingenuo y optimista, que presupone que el alumno fácilmente realizará la transferencia del conocimiento matemático generado en un solo contexto a otros contextos nuevos y diferentes, a otro punto de vista más prudente en el que, si bien se considera que la posibilidad de transferencia creativa se puede dar, se asume que, sin un trabajo sobre una muestra representativa de la complejidad del objeto matemático que se quiere enseñar y la articulación y conexión de los componentes de dicha complejidad, es difícil que se pueda aplicar el objeto matemático a diferentes contextos.

Los criterios acabados de comentar se sintetizan de la siguiente manera: si se pretende enseñar a profesores o futuros profesores la importancia de tener en cuenta, para la enseñanza y aprendizaje de un determinado objeto matemático, una muestra representativa de los diferentes significados de dicho objeto en el diseño, valoración y rediseño de secuencias de tareas, el proceso de instrucción se debe diseñar teniendo en cuenta el siguiente principio: para poder usar este componente en la valoración y rediseño de secuencias de tareas, el profesor, como mínimo, debe conocer los diferentes significados del objeto matemático a enseñar (significado holístico) y sus conexiones, debe conocer cuáles de estos significados están incluidos en el currículum y debe poder seleccionar y/o crear tareas en las que se tenga que usar un determinado significado del objeto matemático que se pretende enseñar.

Siguiendo estos criterios se ha se ha confeccionado un banco de tareas (algunas presentes en las fuentes consultadas y otras de diseño propio) correspondientes a bloques temáticos diferentes y que sirven para mostrar la pluralidad de significados de un objeto matemático, de sus tipos de representación y de los problemas donde se aplica.

Los resultados de los objetivos 1 y 2 están presentes en todas las publicaciones de los capítulos anteriores.

9.2 Resultados, discusión y conclusiones relacionadas con los objetivos específicos 3 y 5

Con relación al OE3 se ha diseñado e implementado un ciclo formativo en la formación continua de profesores de matemáticas de secundaria en ejercicio, acerca al uso del uso del componente "representatividad de la complejidad del objeto matemático" del criterio de idoneidad epistémica. En concreto se ha aplicado en el Máster de Formación del Profesorado de Educación Secundaria en el Ecuador en la especialización Matemáticas, impartido por la Universitat de Barcelona en la primera edición y por la Universitat de Barcelona y la Universidad Nacional de Educación de Ecuador en la segunda edición.

En el diseño del ciclo formativo el uso de los criterios de idoneidad didáctica ha tenido un papel relevante, ya que son un contenido a enseñar con el objetivo de que sean usados como pauta para organizar la propia práctica. El ciclo formativo implementado es una adaptación de otro ciclo formativo implementado por primera vez en Rubio (2012), con profesores en formación del Máster de Formación de Profesores de Secundaria de Matemáticas de la Universitat de Barcelona, y después rediseñado para la formación de futuros profesores de primaria de Chile (tal como se explica en Seckel, 2016). Dicho ciclo se distribuye en dos asignaturas: Innovación e investigación sobre la propia práctica y Trabajo Fin de Máster (TFM), de acuerdo a la siguiente secuencia:

a) Análisis de casos (sin teoría). Se propone a los alumnos la lectura y análisis de episodios de clase para que hagan un análisis a partir de sus conocimientos previos.

b) Emergencia de los niveles de análisis didácticos propuestos por el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS). La puesta en común de los análisis realizada por los diferentes grupos permite observar como el gran grupo contempla los diferentes tipos de análisis didácticos propuestos por el EOS, aunque cada grupo sólo contemple alguno de ellos.

c) Tendencias en la enseñanza de las matemáticas. El episodio analizado se ha seleccionado de manera que los asistentes apliquen de manera implícita alguna de las tendencias actuales sobre la enseñanza de las matemáticas. Seguidamente se hace observar a los asistentes que han utilizado esta tendencia de manera implícita. A continuación, el profesor hace un resumen de las principales tendencias en la enseñanza de las matemáticas.

d) Teoría (criterios de idoneidad). Se explican elementos teóricos a los alumnos, en concreto se les explican los CID propuestos en el EOS (epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, afectiva y ecológica).

e) En la asignatura de Trabajo Final de Máster los alumnos utilizarán los CID para valorar su propia práctica, en concreto la unidad que han diseñado e implementado. Tienen que hacer un rediseño y mejorar algunos de los aspectos que la valoración realizada indica que se deben y pueden mejorar.

Por otra parte, en el paso de esta secuencia se ha enseñado el uso del componente representatividad de la complejidad de acuerdo con los criterios específicos obtenidos como resultado de los OE1 y OE2. La implementación de los pasos a—d se describe en el artículo explicado en el capítulo 2 y el paso e en al artículo del capítulo 4.

Con relación al objetivo 5, las publicaciones de los capítulos 2—4 aportan resultados específicos para el objeto matemático Teorema de Pitágoras, para el objeto media aritmética y para el objeto medidas de tendencia central.

La conclusión que se obtiene es que es posible diseñar e implementar este tipo de ciclos formativos en la formación continua del profesorado ecuatoriano de matemáticas de secundaria.

Ahora bien, se observan dificultades para que los profesores ecuatorianos reflexionen sobre la complejidad de los objetos matemáticos, lo cual es un resultado coherente con la investigación sobre la formación de los profesores en la región andina (Yamamoto y Malaspina, 2018) y, también, con una amplia investigación internacional sobre el conocimiento y las competencias del profesorado de matemáticas, la cual ha evidenciado que los profesores tienen dificultades para interpretar aspectos epistémicos de las tareas y para identificar su potencial educativo (Stahnke, Schueler y Roesken-Winter, 2016).

9.3 Resultados, discusión y conclusiones relacionadas con los objetivos específicos 4 y 5

Con relación al OE4 se ha diseñado e implementado varios ciclos formativos en la asignatura de Álgebra Superior y en la asignatura Didáctica de las Matemáticas de la Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales de la Universidad de Cuenca. En el diseño del ciclo formativo el uso de los CID ha tenido un papel relevante, ya que son un contenido a enseñar con el objetivo de que sean usados como pauta para organizar la propia práctica.

El ciclo formativo implementado es una adaptación del implementado en el artículo del capítulo 2 que su vez es una adaptación de otro ciclo formativo implementado por primera vez en Rubio (2012), con profesores en formación del Máster de Formación de Profesores de Secundaria de Matemáticas de la Universitat de Barcelona, y después rediseñado para la formación de profesores de futuros profesores de primaria de Chile (tal como se explica en Seckel, 2016). La implementación completa de este ciclo se describe con mucho detalle en el artículo del capítulo 7, mientras que en el artículo del capítulo 5 se pone el énfasis, sobre todo, en la descripción de la enseñanza y el aprendizaje del componente "muestra representativa de la complejidad del objeto a enseñar" de acuerdo con los criterios elaborados en los objetivos específicos OE1 y OE2.

En concreto, se siguió la siguiente secuencia; a) los estudiantes conjuntamente con el docente seleccionaron una serie de objetos matemáticos de los cuales se estudiaría su complejidad, b) con los objetos asignados y los grupos organizados, a cada grupo se le proporcionó literatura relacionada con el objeto sobre el que debían reflexionar, c) el grupo debía hacerse preguntas como cuáles son los significados parciales del objeto matemático, cuáles se trabajan según el currículo con los alumnos de secundaria, y qué representaciones se pueden asociar a cada uno de los significados parciales de estos objetos matemáticos, d) se les pidió que propusieran problemas para cada significado, e) después, cada grupo informó de sus reflexiones al gran grupo, f) el gran grupo resolvió las tareas que se habían propuesto en cada pequeño grupo, g) Finalmente, los estudiantes discutieron los resultados obtenidos, analizando su aplicación y generalización, a través de conclusiones y recomendaciones para tener en cuenta la complejidad de los objetos matemáticos en los procesos instruccionales.

Los resultados son coherentes con los obtenidos en el OE3 y con los obtenidos en las investigaciones previas que han puesto de manifiesto que incorporar el componente muestra representativa de la complejidad del objeto matemático para valorar la idoneidad epistémica de un proceso de enseñanza y aprendizaje, no es tarea fácil, ni para los formadores ni para sus alumnos (futuros profesores o profesores en servicio), pero se puede enseñar como parte del proceso de formación del futuro profesorado ecuatoriano de matemáticas de secundaria.

Con relación al objetivo 5, las publicaciones de los capítulos 5−7 aportan resultados específicos para diversos objetos matemáticos, entre otros: media aritmética; números complejos, Teorema de Tales, ecuaciones, fracciones, funciones afines y cuadráticas. Por ejemplo, en el caso de la media aritmética, estos resultados muestran que los futuros profesores pueden resolver los problemas en los que el uso de un determinado significado parcial de un objeto matemático es determinante, sin embargo, cuando se les pide justificar sus respuestas, se infiere que tienen dificultades para relacionar el tipo de problema propuesto con el significado parcial del objeto matemático determinante para la resolución del problema y aún más para justificar dicha relación.

La conclusión general es que incorporar el componente muestra representativa de la complejidad del objeto matemático para valorar la idoneidad epistémica de un proceso de enseñanza y aprendizaje, no es tarea fácil, ni para los formadores ni para sus alumnos (futuros profesores o profesores en servicio), pero se puede enseñar y aprender como parte del proceso de formación del futuro profesorado ecuatoriano de matemáticas de secundaria. Entre otras razones, por la necesidad de realizar un estudio preliminar orientado a la reconstrucción de un significado global sobre el objeto matemático que se quiere enseñar para poder ser conscientes de su complejidad. Por otra parte, en el caso del Ecuador es especialmente difícil si se tiene en cuenta la débil formación matemática y didáctica de los profesores ecuatorianos, tal como se documenta (Martínez Jara et al., 2018) en el reporte sobre Ecuador incluido en el informe, coordinado por Yamamoto y Malaspina (2018), sobre la Educación Matemática en la región andina.

Ahora bien, a pesar de estas dificultades, un resultado de la reflexión sobre la complejidad de los objetos matemáticos en la formación inicial de profesores es que, como resultado de la experiencia realizada, los estudiantes en formación docente, son conscientes de que, para mejorar el aprendizaje de las matemáticas, es necesario tener en cuenta la complejidad de los objetos matemáticos, entendida como las diferentes formas de comprender los significados y su aplicación en la resolución de problemas. Entre otras razones porque, para el profesor, conocer una muestra representativa de significados de un objeto matemático, le permite trabajar con una diversidad de problemas, facilitando que los alumnos construyan una red de significados parciales, conectados entre sí, que les permita desarrollar la competencia matemática que les posibilita resolver diferentes tipos de problemas.

Otra conclusión para resaltar, relacionada con la investigación de artículo 7, es el papel que tienen las matemáticas enseñadas en la guía de valoración de la práctica preprofesional utilizada por los docentes tutores de la Carrera de Pedagogía en Ciencias Experimentales de la Universidad de Cuenca. Por una parte, las preguntas de la guía se pueden reinterpretar como indicadores, componentes o criterios del constructo CID y, por otra parte, casi no se contemplan preguntas sobre la idoneidad epistémica en la guía. En relación con el segundo aspecto, una explicación plausible se halla en el tipo de formación inicial y continua actual en el Ecuador que evidencia un conocimiento insuficiente en matemáticas y su didáctica en el profesorado de matemáticas ecuatoriano, tal como pone de manifiesto, el informe del Instituto Nacional de Evaluación Educativa (INEVAL) al cual se hace mención en el informe sobre la formación de profesores ecuatorianos (Martínez Jara et al., 2018). El hecho de que la institución no considere prioritario la contemplación de los aspectos epistémicos en la evaluación de las prácticas docentes de sus estudiantes es un resultado que puede facilitar que esta institución ahora vea como problemático algo que antes no se consideraba así: porqué dar tan poca importancia a valorar la calidad matemática que imparten sus alumnos. Una vez, asumido como problemática la guía que se usa para valorar la práctica preprofesional, se pueden propiciar cambios en la institución para generar una nueva guía enriquecida con preguntas relacionadas con la calidad de las matemáticas enseñadas.

9.4 Limitaciones y líneas de investigación futuras

Con relación a la realidad problemática descrita en el capítulo 1, en esta investigación se han obtenido resultados y conclusiones parciales que están limitados por el hecho de que se han obtenido en dos contextos institucionales muy específicos: a) Máster de Formación del

Profesorado de Educación Secundaria en el Ecuador en la especialización Matemáticas, impartido por la Universitat de Barcelona en la primera edición y por la Universitat de Barcelona y la Universidad Nacional de Educación de Ecuador en la segunda edición y b) Carrera de pedagogía de las ciencias experimentales: matemáticas y física de la Universidad de Cuenca.

Sin embargo, consideramos que el proceso de enseñanza y aprendizaje de la complejidad de los objetos matemáticos en la formación de profesores en el Ecuador es bastante amplio y complejo, por lo que creemos conveniente que el proceso de investigación realizado en esta tesis continúe desarrollándose en la línea ya trazada en este estudio. Así pues, se contemplan las siguientes líneas futuras de investigación:

Una primera línea de desarrollo que se ha identificado es la generalización de los resultados obtenidos, es decir, que el estudio se amplíe a otros contextos institucionales donde se desarrollen procesos de instrucción de profesores de matemáticas (en servicio o en formación). Dado que en la presente investigación se ha trabajado solamente con un grupo reducido de docentes, lo cual no es suficiente para hacer generalizaciones, creemos conveniente que en investigaciones futuras se vayan incluyendo más casos de estudio múltiple, con la finalidad de ir obteniendo resultados más generales sobre la incorporación de la complejidad de los objetos matemáticos a enseñar en la formación de profesores.

Como resultado de esta investigación hemos podido determinar unos criterios para orientar el diseño y la implementación de los ciclos formativos de los profesores participantes. Dichos criterios implican que los participantes tengan ciertos conocimientos y competencias. Por tanto, una segunda línea de desarrollo de esta investigación está relacionada con el análisis de las competencias y conocimientos didáctico-matemáticos que necesitan los docentes para contemplar la complejidad del objeto matemático a enseñar en las secuencias didáctica que diseñan e implementan. Dicho estudio, se ha iniciado de manera incipiente en las publicaciones que constituyen esta tesis, pero está previsto realizarlo con más profundidad tomando como referente teórico el Modelo CCDM del profesor propuesto por el Enfoque Ontosemiótico.

Se concluye que la investigación realizada puede llegar a poner en cuestión cierto aspectos que la institución formadora no consideraba como problemáticos. Para ello es necesario ir más allá de una investigación desarrollando una tercera línea de estudio que, en primer lugar, consiga problematizar la práctica cotidiana del formador de profesores en su institución (por ejemplo, incorporar ítems sobre la calidad de las matemáticas enseñadas en la guía de valoración de las prácticas pre profesionales de los futuros docentes) que hasta el momento no se había considerado como tal en la institución. Una vez conseguida esta problematización, tendría sentido introducir la reflexión para el posible cambio de dicha práctica problemática.

9.5 Difusión de los resultados de la investigación

Del presente trabajo de investigación se han derivado las siguientes publicaciones en revistas, participación en congresos y actas de congresos:

9.5.1 Publicaciones en revistas

- ✓ Calle, E., Breda, A., y Font, V. (2023). Significados parciales del teorema de Pitágoras usados por profesores en la creación de tareas en el marco de un programa de formación continua. *Uniciencia, 35* (1), en prensa.
- ✓ Calle, E., Breda, A., y Font, V. (2022). La complejidad de la noción a enseñar en la valoración de la práctica preprofesional de futuros profesores de matemáticas ecuatorianos. *Redimat-Revista de Investigacion dn Didactica de las Matematicas*, *11*(3), 218-249. https://doi.org/10.17583/redimat.10986
- ✓ Calle, E., Breda, A., y Font, V. (2022). Conocimientos del futuro profesor de matemáticas sobre los diferentes significados de la media aritmética. *Revista Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* en prensa.
- ✓ Calle, E., Breda, A., y Font, V. (2021). Reflection on the complexity of mathematical items in initial teacher education. *Journal of Higher Education Theory and Practice, 21*, 197-214. https://doi.org/10.33423/jhetp.v21i13.4801
- ✓ Breda, A., Seckel, M. J., Farsani, D., Silva, J. F., y Calle, E. (2021). Teaching and learning of mathematics and criteria for its improvement from the perspective of future teachers: a view from the Ontosemiotic Approach. *Mathematics Teaching Research Journal, 13*(1), 31-51
- ✓ Font, V., Breda, A., y Calle, E. (2021). La idoneidad didáctica en la formación de profesores de matemáticas. *Quintaesencia,* *12*(1), 162–167. https://doi.org/10.54943/rq.v12i1.165
- ✓ Calle, E., Mora, M., Jacome, M., y Breda, A. (2021). La enseñanza de las matemáticas en un curso de formación en contexto de pandemia: la percepción de futuros profesores de matemáticas de Ecuador. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 16*(20), 200-215.

- ✓ Calle, E. C., Breda, A., y Font, V. (2020) . ¿Qué significado atribuyen a la media aritmética profesores de matemáticas en ejercicio? *Revista Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 33*(1), 643-652.

9.5.2 Capítulo de libro

- ✓ Calle, E., Breda, A., Oyervide, M., y Álvarez, N. (2022). Análise de uma tarefa de medida de tendência central com a ferramenta adequação didática: um olhar desde a formação inicial de professores. En Cristiane Antônia Hauschild Johann & Sérgio Nunes Lopes (Org.). *Docência e ciência: [re]valorização do conhecimento* (pp. 75-84). Lajeado: Editora Univates.
- ✓ Calle, E., Breda, A., Font, V. (2022). La complejidad de los objetos matemáticos en la formación inicial de docentes. En Jesús G. Lugo-Armenta, Luis R. Pino-Fan, Marcel Pochulu & Walter F. Castro (Ed.). *Enfoque Onto-Semiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos: Investigaciones y Desarrollos en América Latina* (pp. 335-354). Osorno: Editorial Universidad de Los Lagos.
- ✓ Calle, E., Breda, A. (2019). Reflexión sobre la complejidad de los objetos matemáticos en la formación inicial de profesores. En Daniel Aguilar, Martha Cobos, Luis Claudio Cortés, Enma Campozano (Eds.). *La Investigación Educativa en un Mundo en Constante Transformación* (pp. 29-50). Cuenca: ASEFIE.

9.5.3 Publicación en Actas de Congresos

- ✓ Calle, E., Oyervide, M., Álvarez, N., y Breda, A. (2022). Análise de uma tarefa de medida de tendência central com a ferramenta adequação didática: um olhar desde a formação inicial de professores. In Cristiane Antônia Hauschild Johann & Sérgio Nunes Lopes (Org.). *Anais do IV Congresso Internacional de Ensino e Aprendizagens, VIII, Seminário Institucional do Pibid/Univates, II Seminário do Residência Pedagógica/Univates* (pp. 183-186). Lajeado: Editora Univates.
- ✓ Calle, E., Breda, A., y Font, V. (2020). Significados de las medidas de tendencia central contemplados por profesores de matemática en sus trabajos de fin de máster. In *V Encuentro Internacional en Educación Matemática* (pp. 457-462). Barranquilla: Universidad del Atlántico.
- ✓ Calle, E., Breda, A., y Sala, G. (2020). Conhecimento de futuros professores sobre os diferentes significados do objeto matemático média aritmética. In *Anais do XIV*

Seminário Sul-Mato-Grossense de Pesquisa em Educação Matemática (SESEMAT) (pp. 177-184). Mato Grosso do Sul. UFMS.

- ✓ Breda, A., Font, V., y Calle, E. (2019). La idoneidad didáctica en la formación de profesores de matemáticas. En *Actas del XV Conferencia Interamericana de Educación Matemática (XV CIAEM)* (p. 1-9). Medellín: IACME.

REFERENCIAS

Alberta Education (2006). *Alberta education cataloguing in publication data.* Alberta: InPraxis Group.

Balcaza, T., Contreras, A. y Font, V. (2017). Análisis de libros de texto sobre la optimización en el bachillerato. *Bolema*, 31(59), 1061-1081.

Breda, A., Font, V. y Lima, V. M. R. (2015). A noção de idoneidade didática e seu uso na formação de professores de matemática. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, 8(2), 1-41.

Breda, A., Font, V. y Pino-Fan, L. (2018) Criterios valorativos y normativos en la didáctica de las Matemáticas: el Caso del Constructo Idoneidad Didáctica. *Bolema*, 32(60), 255-278.

Breda, A.; Pochulu, M.; Sánchez, A.; Font, V. (2021) Simulation of Teacher Interventions in a Training Course of Mathematics Teacher Educators. *Mathematics*, 9, 3228. https://doi.org/10.3390/math9243228

Brockbank, A., y McGill, I. (2002). *Aprendizaje reflexivo en la educación superior*. Madrid, España: Morata.

CANP. (2016). *Programa y resúmenes del Capacity and Network Project - CANP5*. Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.

Llinares, S.., Breda, A., Rodríguez, N. C., Fernández, C., Font, V., Gómez, J. L. L., ... & Sánchez, A. (2022). Formación y desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. In *Aportaciones al desarrollo del currículo desde la investigación en educación matemática* (pp. 481-530). Editorial Universidad de Granada.

CES. (2015). *Currículo Genérico de las Carreras de Educación. Comisión Ocasional de Educación*. Recuperado de http://www.ces.gob.ec/doc/Talleres_Carrera_de_Educacion/Curriculo_Generico/currculo%20genrico%20de%20las%20carreras%20de%20educacin.pdf

Contreras, A., García, M., y Font, V. (2012). Análisis de un proceso de estudio sobre la enseñanza del límite de una función. *Bolema*, 26(42B), 667-690.

Cortez, D. (2014). *Genealogía del sumak kawsay y el buen vivir en Ecuador: un balance. Post-Crecimiento y Buen Vivir. Propuestas globales para la construcción de sociedades equitativas y sustentables.* Friedrich-Ebert-Stiftung (FES): QuitoDavis, B. (2008). Is 1 a prime number? developing teacher knowledge through concept study. *Mathematics Teaching in the Middle School, 14*(2), 86-91.

Dewey, J. (1989). *Cómo pensamos: nueva exposición de la relación entre pensamiento y proceso educativo*. Barcelona, España: Paidós.

Esqué, D.; Breda, A. (2021). Valoración y rediseño de una unidad sobre proporcionalidad utilizando la herramienta Idoneidad Didáctica. Uniciencia, 35(1), 38-54. Doi: http://dx.doi.org/10.15359/ru.35-1.3

Font, V., Breda, A. y Pino-Fan, L. (2017). Análisis didáctico en un trabajo de fin de máster de un futuro profesor. En J. M. Múñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 247-256). Zaragoza: SEIEM.

Font, V., Breda, A., y Seckel, M. J. (2017). Algunas implicaciones didácticas derivadas de la complejidad de los objetos matemáticos cuando estos se aplican a distintos contextos. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, 10(2), 1-23.

Font, V., Godino, J.D., y Gallardo, J. (2013). The emergence of object from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, 82(1), 97-124.

Font, V., Planas, N., y Godino, J. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje, 33*(1), 89-105.

Font, V., Pino-Fan, L., Breda, A. (2020). Una evolución de la mirada sobre la complejidad de los objetos matemáticos. *Revista Paradigma, 41*(1), 107-129.

Font, V., J., Vanegas, Y., Ferreres, S., Carvajal, S, y Adán, M. (2012). Funciones. En V. Font, J. Giménez, V. Larios y J. F. Zorrilla (Eds.), *Competencias del profesor de matemáticas de secundaria y bachillerato* (133-210). Publicaciones de la Universitat de Barcelona: Barcelona, España

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2019). The Onto-semiotic Approach: implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics, 39*(1), 37-42.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R., y Arrieche, M. (2009). ¿Alguien sabe qué es el número? *Unión*, 19, 34-46.

Gordillo, W., y Pino-Fan, L. (2016). Una propuesta de reconstrucción del significado holístico de la antiderivada. *Bolema*, 30(55), 535-558.

Gordillo, W., Pino-Fan, L., Font, V. y Ponce-Campuzano, J. (2018). Algunas tareas para evaluar la comprensión sobre el objeto matemático antiderivada. *Academia y virtualidad*, *11*(2), 1-17.

Hummes, V., Breda, A. & Font, V. (2022). Critérios de adequação didática implícitos na reflexão de professores quando planejam, implementam e redesenham uma aula em uma experiência de Lesson Study. En A. Richit, J, P. da Ponte y E. S. Gómez (Eds.), *Lesson Study na formação inicial e continuada de professores* (53-88), São Paulo: Livraria da Física.

Hummes, V, Font, V., & Breda, A. (2019). Combined Use of the Lesson Study and the Criteria of Didactical Suitability for the Development of the Reflection on the own Practice in the Training of Mathematics Teachers, *Acta Scientiae*, *21*(1), 64-82.

Isoda, M., Arcavi, A., y Lorca, A. M. (2007). *El estudio de clases japonés en matemáticas: Su importancia para el mejoramiento de los aprendizajes en el escenario global*. Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso/Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Llinares, S. (2012). Construcción de conocimiento y desarrollo de una mirada profesional para la práctica de enseñar matemáticas en entornos en línea. *Avances de investigación*

Martínez Jara, M.; Castillo, P.; Trelles, C.; Calle, E.; Ayala, A.; Rivadeneira, F. & Auccahuallpa, R. (2018) Report on Mathematics Teacher Preparation in Ecuador, in Y. Y. Baldin and Malaspina (eds.), *Mathematics Teacher Education in the Andean Region and Paraguay* (19-45), Cham: Springer.

Mateus-Nieves, E. & Font, V. (2021). Epistemic Complexity of the Mathematical Object "Integral". *Mathematics*, 9, 2453. https://doi.org/10.3390/math9192453

Monje, Y., Seckel, M.J. & Breda, A. (2018). Tratamiento de la Inecuación en el Currículum y Textos Escolares Chilenos. *Bolema, 32*(61), 480-502.

Morales-López, Y., y Araya-Román, D. (2020). Helping Preservice Teachers to Reflect. *Acta Scientiae*, 22(1), 88–111. http://doi. org/10.17648/acta.scientiae.5641

Morales-Maure, L. (2019). *Competencia de Análisis e Intervención Didáctica del Docente de Primaria en Panamá*. Tesis doctoral no publicada. Universitat de Barcelona, España.

Morales-Maure, L., Durán-González, R., Pérez-Maya, C., y Bustamante, M. (2019). Hallazgos en la formación de profesores para la enseñanza de la matemática desde la idoneidad didáctica. Experiencia en cinco regiones educativas de Panamá. *Inclusiones*, 6(2), 142-162.

Mason, J. (2002). *Researching your own practice: the discipline of noticing*. London, England: Routledge-Falmer.

MINEDUC. (2022). *Programas de cuarto nivel.* Recuperado de https://educacion.gob.ec/programas-de-cuarto-nivel/

NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM

Perrenoud, P. (2004). *Desarrollar la práctica reflexiva en el oficio de enseñar*. Barcelona, España: Graó.

Pino-Fan, L., Castro, W. F., Godino, J. D., y Font, V. (2013). Idoneidad epistémica del significado de la derivada en el currículo de bachillerato. *Paradigma*, 34(2), 123 – 150.

Pino-Fan, L., Font, V., Gordillo, W., Larios, V., y Breda (2018). Analysis of the meanings of the antiderivative used by students of the first engineering courses. *International Journal of Science and Mathematics Education*. 16(6), 1091–1113. doi: 10.1007/s10763-01.

Pino-Fan, L., Godino, J. D. y Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa*, 13(1), 141-178.

Pino-Fan, L., Godino, J. D., y Font, V. (2018). Assessing key epistemic features of didactic-mathematical knowledge of prospective teachers: the case of the derivative. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 21(1), 63-94.

Pochulu, M., Font, V. y Rodríguez, M. (2016). Desarrollo de la competencia en análisis didáctico de formadores de futuros profesores de matemática a través del diseño de tareas. *Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa-Relime*, *19*(11), 71-98.

Ramos, A. B. (2006). *Objetos personales, matemáticos y didácticos, del profesorado y cambios institucionales. El caso de la contextualización de las funciones en una Facultad de Ciencias Económicas y Sociales*. Tesis doctoral no publicada. Universitat de Barcelona, España.

Rondero, C., y Font, V. (2015). Articulación de la complejidad matemática de la media aritmética. *Enseñanza de las Ciencias*, *33*(2), 29-49. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1386

Rubio, N. (2012). *Competencia del profesorado en el análisis didáctico de prácticas, objetos y procesos matemático*. Tesis doctoral no publicada. Universitat de Barcelona, España.

Seckel, M.J. (2016). *Competencia en análisis didáctico en la formación inicial de profesores de educación básica con mención en matemática.* Tesis doctoral no publicada. Universitat de Barcelona, España.

Seckel, M., y Font, V. (2020). Competencia reflexiva en formadores del profesorado en matemáticas. *Magis*, 12(25), 127-144. https://doi.org/10.11144/Javeriana.m12-25.crfp.

SENESCYT. (2019). *Oferta académica de las instituciones de educación superior segundo semestre 2019*. Recuperado de http://admision.senescyt.gob.ec/media/2019/07/Oferta-2do-Semestre-2019_Digital_.pdf

Schön, D. A. (1992). *La formación de profesionales reflexivos: hacia un nuevo diseño de la enseñanza y el aprendizaje en las profesiones*. Barcelona: Paidós.

Stahnke, R; Schueler, S. y Roesken-Winter, B. (2016). Teachers' perception, interpretation, and decision-making: a systematic review of empirical mathematics education research. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 48(1), 1-27.

Yamamoto, Y., & Malaspina, U. (2018). *Mathematics Teacher Education in the Andean Region and Paraguay: A Comparative Analysis of Issues and Challenges*. Cham: Springer.