Acte solemne d'investidura com a doctor honoris causa
del professor

Kristian Seip

Discurs de presentació del professor
Joaquim Ortega Cerdà

Textos en català
Texts in English

ABRIL DEL 2024

UNIVERSITAT DE BARCELONA

Acte solemne d'investidura com a doctor honoris causa
del professor

Kristian Seip

UNIVERSITAT DE BARCELONA

Acte solemne d'investidura com a doctor honoris causa
del professor

Kristian Seip

Discurs de presentació del professor

Joaquim Ortega Cerdà

ABRIL DEL 2024

Rector
Joan Guàrdia Olmos

President del Consell Social
Joan Corominas Guerin

Adolf Florensa, s/n, 08028 Barcelona, tel.: 934 035 430
comercial.edicions@ub.edu, www.edicions.ub.edu

Fotografia de la coberta: Escala d'Honor de l'Edifici Històric de la Universitat de Barcelona.

Dipòsit digital: http://hdl.handle.net/2445/214588.

Sumari

Protocol de l’acte

Acte solemne d'investidura com a doctor honoris causa del professor Kristian Seip

1. S'entra en processó mentre el Cor UB interpreta el cant d'entrada.
2. El rector, Joan Guàrdia Olmos, explica l'objectiu de la sessió acadèmica.
3. El rector dona la paraula a la secretària general, Marina Solé Català, la qual llegeix l'acta del nomenament com a doctor honoris causa del professor Kristian Seip.
4. El rector invita el degà de la Facultat de Matemàtiques i Informàtica, Oriol Pujol Vila, i el padrí, Joaquim Ortega Cerdà, a anar a cercar el doctorand i a acompanyar-lo fins al Paranimf mentre intervé el Cor UB.
5. El rector dona la benvinguda al professor Kristian Seip, el qual s'asseu al lloc que li ha estat reservat.
6. El padrí llegeix el seu discurs, en el qual presenta els mèrits del seu patrocinat.
7. El rector demana al padrí i al degà de la Facultat de Matemàtiques i Informàtica que acompanyin el doctorand a la presidència.
8. El rector pronuncia les paraules d'investidura:

Pel Consell de Govern de la Universitat de Barcelona, a proposta de la Facultat de Matemàtiques i Informàtica, heu estat nomenat doctor honoris causa en testimoniatge i reconeixença dels vostres rellevants mèrits.

En virtut de l'autoritat que m'ha estat conferida, us faig lliurament d'aquest títol i —com a símbol— del birret llorejat, antiquíssim i venerat distintiu del magisteri. Porteu-lo com a corona dels vostres mereixements i estudis.

Rebeu l'anell que en l'antiguitat es tenia el costum de lliurar, en aquesta venerada cerimònia, com a emblema del privilegi de signar i segellar els dictàmens, les consultes i les censures escaients a la vostra ciència i professió.

Rebeu també aquests guants blancs, símbol de la puresa, que han de servar les vostres mans, signes de la distinció de la vostra categoria.

Perquè us heu incorporat a aquesta universitat, rebeu ara, en nom del seu Claustre, l'abraçada de fraternitat dels qui s'honoren i es congratulen d'ésser els vostres germans i companys.

9. El rector dona la paraula al nou doctor, Kristian Seip, el qual és acompanyat al púlpit pel padrí i el degà de la Facultat de Matemàtiques i Informàtica.
10. Intervé el doctor Kristian Seip.
11. El padrí i el degà de la Facultat de Matemàtiques i Informàtica acompanyen el doctor Kristian Seip al lloc reservat.
12. Intervé el Cor UB.
13. El rector procedeix al lliurament dels diplomes dels Premis Extraordinaris de Màster del curs 2021-2022.
14. Intervé el Cor UB.
15. El president del Consell Social de la Universitat de Barcelona, Joan Corominas Guerin, fa el seu discurs.
16. El rector fa el seu discurs.
17. Tots els assistents a l'acte canten l'himne *Gaudeamus igitur*.

Gavdeamvs igitvr

Gaudeamus igitur,
iuuenes dum sumus. [bis]
Post iucundam iuuentutem,
post molestam senectutem,
nos habebit humus. [bis]

Vbi sunt qui ante nos
in mundo fuere? [bis]
Adeas ad inferos,
transeas ad superos,
hos si uis uidere. [bis]
Viuat Academia,
uiuant professores. [bis]

Viuat membrum quodlibet,
uiuant membra quaelibet,
semper sint in flore. [bis]

18. El rector aixeca la sessió.
19. Se surt en processó mentre el Cor UB interpreta el cant de sortida.

Discurs de presentació del professor Joaquim Ortega Cerdà

Rector Magnífic,
degà de la Facultat de Matemàtiques i Informàtica,
autoritats acadèmiques,
professor Kristian Seip,
professores i professors, amigues i amics,

És un honor per a mi presentar els mèrits que concorren en el professor Kristian Seip perquè esdevingui membre del Claustre de Doctors de la nostra universitat. També és un orgull fer-ho perquè el considero, més enllà d'una de les figures més destacades de l'anàlisi matemàtica, un amic i un mestre.

El professor Kristian Seip és un dels investigadors líders mundials en anàlisi matemàtica. El seu camp d'expertesa inclou l'anàlisi real i complexa i les seves interaccions amb altres camps, tant en un vessant teòric, com ara la teoria d'operadors i la teoria de nombres, com en àrees més aplicades, entre les quals destaca la teoria del senyal.

Les fonamentals contribucions del professor Seip en les darreres dècades han estat extremament influents i han esdevingut resultats clàssics dins de la recerca en l'àrea de l'anàlisi matemàtica.

Kristian Seip, matemàtic noruec nascut el 1962, va dur a terme el seu doctorat en el que aleshores era l'Institut Noruec de Tecnologia sota la supervisió de Henrik Martens, un especialista en teoria de funcions format als Estats Units, amb estudis d'enginyeria elèctrica i que havia fet la tesi amb Lipman Bers.

Això és rellevant per entendre bé els seus primers resultats, obtinguts poc després de doctorar-se el 1988 amb una tesi guardonada amb el Premi ESSO al millor treball de recerca fonamental en matemàtiques. Aquests treballs inicials del professor Kristian Seip van constituir un gran avenç.

Va aconseguir transportar tècniques que tenien el seu origen en resultats de Beurling en la dècada dels seixanta i que havien tornat a esdevenir rellevants en el món tecnològic amb el desenvolupament de les ondetes, a problemes de teoria de funcions actuals. Són problemes que tenen una traducció directa en problemes de teoria del senyal i en problemes de digitalització de senyals analògics.

L'anàlisi matemàtica, com el seu nom indica, analitza les funcions, és a dir les descompon en una superposició de funcions més elementals. A començament dels noranta, la transformada de Fourier amb finestra i les ondetes estaven revolucionant el món de l'anàlisi harmònica. Ingrid Daubechies, una de les pioneres de les ondetes, va conjecturar que una funció arbitrària de quadrat integrable es podia representar en ondetes de Gabor si i només si la densitat de la representació era prou gran.

El professor Kristian Seip, en una sèrie de treballs, va resoldre aquesta qüestió de forma espectacular anant més enllà de la conjectura proposada: va connectar aquest problema amb uns altres de teoria de funcions holomorfes i va trobar una solució completa.

D'aquesta manera va resoldre una qüestió de teoria del senyal, un problema d'origen de l'enginyeria, amb eines potents d'anàlisi complexa que, com deia, es remunten als treballs de Beurling, no publicats al seu dia.

Després, en un gir que no és infreqüent en el món de les matemàtiques, la interacció entre les matemàtiques i els problemes d'origen «físic» va canviar de direcció i va aconseguir resoldre un problema clàssic d'interpolació de funcions holomorfes en l'espai de Bergman del disc, que estava obert des dels anys seixanta.

En aquell moment Lennart Carleson havia descrit les successions que permetien interpolar per funcions holomorfes acotades i de seguida es va plantejar resoldre el problema anàleg en funcions de quadrat integrable.

Els seus mèrits el van fer destacar ben aviat. Va ser nomenat catedràtic del Departament de Ciències Matemàtiques de la Universitat de Ciències i Tecnologia de Noruega (NTNU) a Trondheim el 1993 i va ser conferenciant convidat al Congrés Internacional de Matemàtics el 1998 a Berlín, distinció molt especial en el món de les matemàtiques. Els reconeixements es van acumulant: és membre electe de l'Acadèmia Noruega de Ciències Tecnològiques (NTVA) des del 1999, de la Reial Societat Noruega de Ciències i Lletres (DKNVS) des del 2001, de l'Acadèmia Noruega de Ciències i Lletres (DNVA) des del 2005, i membre fundador dels *fellows* de la Societat Americana de Matemàtiques. L'any 2012 va ser nomenat *European Mathematical Society Lecturer*.

Els seus principals treballs inclouen una llarga sèrie de línies de recerca, com ara la interpolació i el mostreig en diversos espais de funcions, el comportament de sèries de Dirichlet i la geometria d'espais de sèries de Dirichlet, els operadors de Hankel i de Toeplitz, les sumes MCD i la funció zeta de Riemann. Com altres grans matemàtics, la recerca del professor Seip combina nous punts de vista extremament originals, idees profundes i una impressionant destresa tècnica.

Entre tots aquells treballs vull destacar-ne un, més enllà dels esmentats anteriorment. Es tracta d'un treball publicat al *Duke Mathematical Journal* amb el títol «A Hilbert space of Dirichlet series and systems of dilated functions in L^2 (0,1)» el 1997.

Hi completa el programa de Helson d'abordar amb eines modernes d'anàlisi funcional l'estudi de les sèries de Dirichlet: «A modern reader, familiar with the methods of functional analysis, is struck with the conviction that the classical theory of Dirichlet series must have content expressible in more congenial language».

Les sèries de Dirichlet són un objecte molt clàssic de les matemàtiques, central en l'estudi de la teoria de nombres analítica.

En aquest article, motivat aparentment pel problema de saber si les combinacions lineals de les dilatades d'una única funció són denses en L^2, s'introdueix una munió de nous objectes, entre ells un espai de funcions amb nucli reproductor: la famosa zeta de Riemann. Es revifa la connexió que havia fet Bohr (el germà del famós físic) entre sèries de Dirichlet i sèries de potències en el polidisc de dimensió infinita, etc.

Aquest treball va resultar un catalític que va obrir nous problemes i noves tècniques per abordar problemes més antics. Va acostar la recerca del professor Kristian Seip al que s'anomena familiarment «la bèstia», l'estudi de la funció zeta de Riemann. És un ball delicat al voltant de problemes insolubles. Amb la col·laboració d'Andrei Bondarenko, ha obtingut resultats molt fins sobre valors extremals de la funció zeta de Riemann sobre la recta crítica i aplicacions a problemes aritmètics d'enunciat elemental. Els seus últims treballs sobre la connexió dels zeros de la funció zeta de Riemann i sobre fórmules de quasicristalls són de nou sorprenents en extrem i encara han de ser païts per la comunitat matemàtica.

El seu lideratge científic ha tingut un gran reconeixement. Ha estat president de la Comissió dels Premis Abel en el període 2006-2010, el guardó més prestigiós en matemàtiques, equivalent al Premi Nobel en altres disciplines. També és o ha estat editor d'algunes de les revistes matemàtiques més prestigioses, com *Acta Mathematica*, *Journal of Functional Analysis*, *Constructive Approximation*, *Expositiones Mathematicae*, *Encyclopedia of Mathematics* i d'altres. Cal remarcar que des del 2005 també és editor de la revista *Collectanea Mathematica*, que publica l'Institut de Matemàtiques de la Universitat de Barcelona (IMUB). També va formar part del comitè científic del Congrés Europeu de Matemàtiques de Berlín l'any 2016.

El professor Seip ha compaginat la recerca amb tasques de gestió. Ha estat director del Departament de Matemàtiques (1997-2001) i vicedegà d'Educació a la Facultat de Tecnologia de la Informació, Matemàtiques i Enginyeria Elèctrica (2006-2012) de la Universitat de Ciències i Tecnologia de Noruega. També ha estat president de la Societat Matemàtica Noruega del 2003 al 2007.

Com a formador, ha dirigit nou tesis doctorals a la Universitat de Ciències i Tecnologia de Noruega i ha supervisat nombrosos joves investigadors postdoctorals, entre ells Jordi Marzo, que actualment és professor de la Universitat de Barcelona.

L'empremta del professor Seip ha estat fonamental en la creació, el desenvolupament i el reconeixement internacional del Grup de Recerca en Anàlisi Matemàtica a Catalunya i molt especialment del Grup de Recerca d'Anàlisi Complexa de la Universitat de Barcelona. La seva vinculació es plasma en els freqüents intercanvis i estades de recerca a Barcelona i Trondheim que s'han succeït al llarg dels darrers trenta anys. S'han dut a terme estades postdoctorals i predoctorals d'estudiants de Kristian Seip a Barcelona, així com estades a Noruega de joves doctors del nostre grup de recerca.

La generositat de Kristian Seip en compartir les seves brillants idees per a resoldre problemes de gran interès per a la nostra comunitat científica ha permès una llarga producció en revistes científiques de màxima qualitat i prestigi internacional. A part de les seves col·laboracions directes amb matemàtics catalans, molts dels seus antics alumnes han publicat articles conjunts amb investigadors de la comunitat catalana. D'aquesta manera, el professor Seip ha tingut un gran impacte en els investigadors interessats en l'anàlisi matemàtica a Catalunya.

La disponibilitat del professor en les seves freqüents estades a Barcelona s'ha palesat també, a banda de les col·laboracions científiques, en la impartició de seminaris de recerca, minicursos i col·loquis. Molts dels nostres col·legues s'han beneficiat de converses matemàtiques amb ell. Hem organitzat conjuntament conferències i jornades, com, per exemple, l'Abel Symposium «Operator-Related Function Theory and Time-Frequency Analysis» a Oslo el 2012 i el *workshop* «Analysis Near the Pole» a Longyearbyen a les illes Svalbard el 2017. En conclusió, el professor Seip ha estat un dels visitants més destacats en l'àmbit de les matemàtiques a Catalunya.

Més enllà de la seva col·laboració científica directa, la seva vinculació i el seu compromís han permès reforçar les estructures científiques de matemàtiques a Catalunya. És, per exemple, editor de *Collectanea Mathematica*, la revista de matemàtiques de la Universitat de Barcelona, des del 2005. Forma part del comitè científic del Premi Ferran Sunyer i Balaguer, que atorga la fundació que té el mateix nom, i també ha estat membre del Consell Assessor Científic del Centre de Recerca Matemàtica.

És per tot això que vull donar-li la més cordial benvinguda al Claustre de Doctors de la Universitat de Barcelona, al qual honora amb la seva presència.

Sponsor's speech
by Professor Joaquim Ortega Cerdà

Honourable Rector,
Dean of the Faculty of Mathematics and Computer Science,
Academic authorities,
Professor Kristian Seip,
Colleagues and Friends,

It is an honour for me to celebrate the achievements of a man who our university's Doctors' Senate has recognized as one of its own; but it is also a special privilege to do this for Professor Kristian Seip, who I consider not only as one of the most important figures in mathematical analysis but also as a friend and teacher.

Professor Seip is a leading researcher in mathematical analysis, a champion of the interactions of real and complex analysis in branches of pure mathematics like number theory or operator theory, and in more applied areas like signal theory.

In recent decades, his basic contributions to mathematics have been ground-breaking, culminating in what have become classical research findings in the area of mathematical analysis.

Born in 1962, the Norwegian Seip obtained his doctor's degree in Trondheim at the Norwegian Institute of Technology (today the Norwegian University of Science and Technology) under the supervision of the US-trained function theorist Henrik Martens, who had a background in electrical engineering and had written his own thesis under Lipman Bers.

This helps explain the importance of Seip's first, already impressive results just after receiving his PhD in 1988, which received the Esso Prize for Best Doctoral Thesis on Basic Research in Mathematics. This early research by Seip constituted a major advance.

Seip was able to build on techniques originating in the work of mathematician Arne Beurling during the 1960s, using them to address problems of function theory that had regained importance in the technological world with the development of wavelets. These problems have a direct translation in signal theory problems, specifically in digitizing analogue signals.

As its name indicates, mathematical analysis analyses functions, meaning that it breaks them down into more elementary functions. At the beginning of the 1990s, the short-time Fourier transform and wavelets were revolutionizing the world of harmonic analysis. In her pioneering work on wavelets, Ingrid Daubechies formulated the conjecture that an arbitrary square-integrable function could be represented in Gabor wavelets if and only if the density of the representation was sufficiently great.

In a series of papers, Professor Seip provided this problem with a spectacular solution, going beyond Daubechies' original conjecture by connecting this problem with others associated with the theory of holomorphic functions and finding a complete solution.

In this way, he solved a question in signal theory, a problem whose origins were in engineering, with powerful tools for complex analysis which, as observed above, were first used in works of Beurling that were unpublished in their day.

After this, in an about-turn not uncommon in the world of mathematics, the interaction between mathematics and problems of a "physical" origin changed direction and Seip was able to solve a classic problem, the interpolation by holomorphic functions in the Bergman space on the unit disk, which had remained unsolved since the 1960s.

Then, Lennart Carleson had described the sequences that allow interpolation by bounded holomorphic functions and Seip very quickly decided to solve the analogous problem in square-integrable functions.

Professor Seip's excellence in his area of science became evident very early in his career. He was appointed professor at the Norwegian University of Science and Technology's Department of Mathematical Sciences in 1993 and attended the International Congress of Mathematicians' 1998 event in Berlin as an Invited Speaker, an extraordinary distinction in the world of mathematics. And he continues to receive accolades from many quarters: he has been an elected member of the Norwegian Academy of Technological Sciences since 1999, of the Royal Norwegian Society of Sciences and Letters since 2001 and of the Norwegian Academy of Science and Letters since 2005; he is also a founding member of the fellows of the American Mathematical Society and, in 2012, he was appointed European Mathematical Society Lecturer.

His main works cover numerous lines of research including interpolation and sampling in spaces of analytic functions, the behaviour of Dirichlet series and the geometry of Dirichlet series spaces, Hankel and Toeplitz operators, GDR sums and the Riemann zeta function. Like other great mathematicians, Professor Seip's work is characterized by his highly original perspective, the depth of his ideas and his impressive technical skill.

From all this research and apart from the work already referred to above, I would highlight the paper "A Hilbert space of Dirichlet series and systems of dilated functions in L^2 (0,1)", co-authored by Seip and published in 1997 in *Duke Mathematical Journal*. That paper effectively delivered the goods on mathematician Henry Helson's proposal in the 1960s that the classical theory of ordinary Dirichlet series would be better addressed by being combined with the modern tools of functional analysis: "A modern reader, familiar with the methods of functional analysis, is struck with the conviction that the classical theory of Dirichlet series must have content expressible in more congenial language".

Dirichlet series are a classical object of investigation in mathematics, a central piece in the study of analytic number theory.

In this paper, which on the surface seems mainly concerned with establishing whether the linear combinations of the dilations of a single function are dense in L^2, there emerge a multitude of new subjects, among which we find a space of functions with a reproducing kernel: the famous Riemann zeta. Amongst other things, for example, the paper resuscitates the deep connection discovered by Harald Bohr (brother of Niels Bohr) between Dirichlet series and power series in the infinite-dimensional polydisk.

In many ways, "A Hilbert space of Dirichlet series and systems of dilated functions in L^2 (0,1)" was a shape changer that opened the way for examining new problems and using new techniques to approach older challenges. It took Kristian Seip's research closer to the study of the Riemann zeta function – a perilous dance with an inscrutable partner that is sometimes familiarly referred to as "the beast". Together with Andriy Bondarenko, Seip has obtained very fine results about extreme values of the Riemann zeta function on the critical line and applications to arithmetic problems of elementary formulation. And the mathematics community is still understanding the major significance of Seip's most recent papers on the connection between the zeros of the Riemann zeta function and formulae for representing quasicrystals.

Kristian Seip's scientific leadership has also been widely recognized. During the period 2006–2010, he served as chair of the Abel Committee, the body that confers the prize in mathematics that is most equivalent to the Nobel Prizes in other disciplines. He has also worked and continues to work as editor of some of the most highly-regarded mathematical journals, including *Acta Mathematica*, *Journal of Functional Analysis*, *Constructive Approximation*, *Expositiones Mathematicae* and *Encyclopedia of Mathematics*. Since 2005, he has been the editor of *Collectanea Mathematica*, published by the University of Barcelona's Institute of Mathematics. And finally, he also sat on the Scientific Committee of the 7th European Congress of Mathematics in Berlin, in 2016.

Professor Seip has combined his research with tasks of management. He was department chair at the Norwegian University of Science and Technology's Department of Mathematics in the period 1997–2001, and vice-dean of Education at that university's Faculty of Information Technology, Mathematics and Electrical Engineering between 2006 and 2012. He also served as president of the Norwegian Mathematical Society between 2003 and 2007.

As a mentor and tutor, Seip has supervised nine doctoral theses at the Norwegian University of Science and Technology and provided academic guidance for innumerable postdoctoral researchers, including UB lecturer Jordi Marzo.

Professor Seip has left his mark on the creation, development and international recognition of institutional research groups, including the research group Anàlisi Matemàtica in Catalonia and, especially, the University of Barcelona's research group Complex Analysis. In the last 30 years he has been instrumental in organizing the frequent exchanges conducted between Barcelona and Trondheim to the benefit of young doctors from our research group and Seip's own pre- and postdoctoral students.

Kristian Seip's willingness to share his brilliant ideas about solving problems of interest has also given impetus to numerous publications in internationally prestigious scientific journals. Apart from his direct collaborations with Catalan mathematicians, many of his former students have co-authored articles with members of the Catalan research community. In this way, he has had a major influence on Catalan researchers interested in mathematical analysis.

As well as his scientific collaborations, Professor Seip's commitment to being involved in academia during his frequent stays in Barcelona has led to his delivery of research seminars, minicourses and roundtables. Many of our colleagues have benefitted from mathematical conversations with him. Together, we have organized events like the 2012 Abel Symposium "Operator-Related Function Theory and Time-Frequency Analysis", held in Oslo, and the workshop "Analysis Near the Pole" held in 2017 in Longyearbyen, Svalbard. In conclusion, Professor Seip has been one of our Catalan mathematics community's most noteworthy visitors.

Beyond his direct scientific collaborations, his ties with various institutions and his personal commitment have also strengthened the scientific structure of mathematics research in Catalonia. For example, he has worked as the editor of this university's mathematics journal *Collectanea Mathematica* since 2005, he sits on the Scientific Committee of the Ferran Sunyer i Balaguer Prize awarded by the foundation of the same name, and he is also a one-time member of the Scientific Advisory Board for the Centre de Recerca Matemàtica.

For all these reasons I would like to extend Professor Seip our warmest welcome to the University of Barcelona's Doctors' Senate, whose community he honours with his presence.

Discurs del professor Kristian Seip

Rector Magnífic,
degà de la Facultat de Matemàtiques i Informàtica,
senyores i senyors,
col·legues, amigues i amics,

Per a mi és tot un honor ser avui aquí per rebre el títol de doctor honoris causa de la Universitat de Barcelona.

La ciutat de Barcelona, la seva comunitat matemàtica i aquesta universitat tenen un lloc especial al meu cor. Guardo molts bons records de nombroses visites, tant llargues com curtes, que hi he fet els darrers trenta anys, incloses estades de diversos mesos amb la meva família. La meva col·laboració amb Joaquim Ortega Cerdà és profunda i inclou molts temes diferents. D'altra banda, comparteixo interessos científics amb una sèrie d'amics, aquí: vaig formar part del Consell Científic Assessor del Centre de Recerca Matemàtica i encara soc membre del Consell de Redacció de *Collectanea Mathematica* i del Comitè Científic del Premi Ferran Sunyer i Balaguer. Ha estat realment inspirador, un privilegi i un gran plaer participar tan activament en la vívida i pròspera vida matemàtica de Barcelona durant tots aquests anys.

William Thurston, guardonat amb la Medalla Fields, va dir una vegada que les matemàtiques eren «una de les activitats humanes més gratificants intel·lectualment», i no hi puc estar més d'acord, ja que tinc la sort de dedicar-m'hi. De fet, pocs matemàtics hi estarien en desacord. Però si els preguntéssiu *què* troben important i *què* els encanta, les respostes serien diferents. En l'aclamada conferència AMS Einstein del 2008, Freeman Dyson va diferenciar poèticament dos tipus de matemàtics:

> Alguns matemàtics són ocells, i altres són granotes. Els ocells volen molt amunt i tenen una perspectiva més àmplia de les matemàtiques, fins a l'horitzó llunyà. Es delecten en conceptes que unifiquen el nostre pensament i reuneixen problemes diversos de diferents parts del paisatge. Les granotes

viuen al fang i només veuen les flors que creixen a prop seu. Es delecten amb els detalls d'objectes concrets i resolen els problemes d'un en un. Jo soc una granota, però molts dels meus millors amics són ocells. [...] Les matemàtiques necessiten tant ocells com granotes. La riquesa i la bellesa de les matemàtiques rauen en el fet que els ocells els aporten una visió àmplia i les granotes els aporten detalls complexos. Alhora, les matemàtiques són un gran art i una ciència important, perquè combinen la generalitat dels conceptes amb la profunditat de les estructures. Seria absurd afirmar que els ocells són millors que les granotes perquè tenen una visió més àmplia, o que les granotes són millors que els ocells perquè tenen una visió més detallada. El món de les matemàtiques és alhora ampli i profund, i necessitem que els ocells i les granotes treballin junts per explorar-lo. [La traducció és nostra]

Jo em classificaria com una granota, però també puc gaudir de la perspectiva de l'ocell. Les granotes som ben conscients que tenim obert tot el paisatge de les matemàtiques, i de vegades ens emociona poder saltar del fang a un estany proper, i fins i tot més enllà, per veure una part més àmplia del nostre univers.

Des dels temps de Galileu i Newton, l'univers de les matemàtiques ha estat íntimament lligat al progrés de les ciències naturals, amb idees que flueixen en ambdues direccions. D'una banda, tenim el miracle de ser capaços de revelar lleis de la natura utilitzant el llenguatge de les matemàtiques. El Premi Nobel Eugene Wigner parlava de l'«eficàcia irracional de les matemàtiques» en aquest sentit com «un regal meravellós que ni entenem ni mereixem». D'altra banda, nosaltres, els matemàtics, podem apreciar aquest miracle com un regal meravellós. El nostre món està profundament influenciat per la necessitat de matemàtiques cada cop més sofisticades per a la ciència i la tecnologia. A més, és possible que descobrim que un problema que sembla pertànyer únicament a les matemàtiques té un vincle inesperat amb la natura: trobem que la natura hi era abans!

Il·lustraré aquests punts parlant de dues publicacions del segle xix que van fer època, ambdues d'una importància fonamental per a la major part de la meva recerca.

La primera és el tractat del 1822 de Jean-Baptiste Joseph Fourier sobre la teoria analítica de la calor. A part de la seva importància en física, m'agradaria subratllar una idea purament matemàtica que contenia. Fourier va afirmar que qualsevol funció d'una variable real es podia expandir en una sèrie de funcions d'ona sinusoidals els arguments de les quals eren múltiples adequats de la variable, anomenades *freqüències*. Expressada en termes físics, aquesta afirmació sostenia que qualsevol so possible, des de les paraules de la parla fins a una peça musical, es podia descompondre en una combinació de tons purs. Malgrat que no es van obtenir resultats correctes sense aplicar-hi condicions addicionals, així va ser com va néixer una idea de gran abast i una nova manera de pensar sobre les funcions.

És difícil sobreestimar la importància del treball de Fourier per al desenvolupament de les matemàtiques i, al seu torn, per a la física i les tecnologies modernes de la informació i la comunicació. S'han concedit dos premis Abel a treballs que eren més o menys una conseqüència directa del tractat de Fourier. Un va ser per al resultat més important de Lennart Carleson, que va rebre el Premi Abel l'any 2006 per la resolució del problema de fer correcta l'afirmació de Fourier, tal com la va formular Nikolai Luzin el 1913. El resultat de Carleson del 1966 va ser el punt culminant d'un gran esforç de recerca d'un període de més d'un segle i mig. L'altre va ser per a Yves Meyer, guardonat amb el Premi Abel el 2017 pel seu paper fonamental en el desenvolupament de la teoria matemàtica de les ondetes. Es tractava en gran part d'una interacció notable entre idees matemàtiques sofisticades i les tecnologies de la informació i la comunicació modernes.

Una altra fita important són les memòries de Bernhard Riemann, del 1859, sobre la teoria dels nombres. En aquest breu article, que va ser l'única contribució que el matemàtic va fer sobre el tema, Riemann va introduir idees radicalment noves en l'estudi dels nombres primers, és a dir, els nombres enters positius més grans que 1 que només es poden dividir per 1 i per ells mateixos (el 2 i el 3 són nombres primers, però el 4 no, perquè es pot dividir per 2). Els nombres primers van ser estudiats pels grecs antics, i la demostració d'Euclides que n'hi ha una infinitat és un exemple brillant de la solidesa d'un assoliment matemàtic. Riemann estava preocupat per aquesta pregunta de seguiment: quants nombres primers hi ha fins a un nombre gran donat?

Per obrir la vostra ment als misteris dels nombres primers citaré un paràgraf de l'assaig de Don Zagier «Els primers 50 milions de nombres primers»:

> Hi ha dos fets sobre la distribució dels nombres primers dels quals espero convèncer-vos de manera tan aclaparadora que us quedaran permanentment gravats al cor. El primer és que [...] els nombres primers pertanyen als objectes més arbitraris i incontrolables estudiats pels matemàtics: creixen com males herbes entre els nombres naturals, sembla que no obeeixen cap altra llei que la de l'atzar i ningú no pot predir on en brotarà un altre. El segon fet és encara més sorprenent perquè afirma tot el contrari: que els nombres primers presenten una regularitat impressionant, que hi ha lleis que regeixen el seu comportament i que obeeixen aquestes lleis amb una precisió gairebé militar. [La traducció és nostra]

L'article de Riemann tractava d'aquesta regularitat. Va fer una conjectura precisa perquè va dir que el nombre de nombres primers fins a un nombre gran donat x és una bona funció explícita de x més un terme residual erràtic que no és gaire més gran que l'arrel quadrada del terme principal. El terme residual, que explica l'aleatorietat, és, segons la conjectura de Riemann —la famosa hipòtesi de Riemann—, tan petit com podríem esperar que fos. Així doncs, la hipòtesi de Riemann afirma que vivim en el millor de tots els mons possibles pel que fa a la regularitat de la distribució dels nombres primers.

Les memòries de Riemann van iniciar un programa de recerca que encara continua sent molt vàlid. El 1896, independentment l'un de l'altre, Hadamard i De la Vallée Poussin van demostrar una versió feble de la fórmula proposada per Riemann, coneguda com el *teorema dels nombres primers*, un resultat que havia estat predit pel gran Gauss en la seva joventut. No obstant això i malgrat un esforç massiu de moltes ments brillants, des d'aleshores s'ha avançat molt poc pel que fa a la conjectura de Riemann i, de fet, des del 1956 no hi ha hagut cap millora en l'ordre de magnitud del terme residual erràtic. Molts consideren la hipòtesi de Riemann el problema obert més destacat de les matemàtiques.

Quina és la millor manera d'entendre la idea de Riemann? Retrospectivament, trobem que encaixa d'una manera notable en la teoria matemàtica que va sorgir del treball de Fourier, ara anomenada *anàlisi de Fourier*. El que va fer Riemann va ser relacionar quantitativament els nombres primers amb una altra seqüència de nombres: els zeros no trivials de la funció zeta de Riemann. En el marc de l'anàlisi de Fourier, aquesta es pot entendre com una relació de dualitat, anàloga a la relació entre una peça musical i la col·lecció de tons purs que pot tenir presents. Pel que fa a aquesta altra seqüència, que se sap que es troba en una franja bidimensional, la hipòtesi de Riemann afirma que en realitat es troba en una única línia recta. Això s'ha confirmat per a tots els zeros que hem pogut calcular, que són poc més de dotze bilions. Així doncs, tenim proves a favor de la hipòtesi de Riemann, però mai podríem demostrar-la calculant cada cop més zeros, ja que n'hi ha una infinitat.

Molt més tard, l'any 1940, en la seva *Apologia d'un matemàtic*, G. H. Hardy encara podia proclamar amb satisfacció que la teoria dels nombres no tenia cap utilitat pràctica. Però això ha canviat radicalment: els nombres primers són ara vitals per a la criptografia i, per tant, per al comerç i la seguretat en línia. En altres paraules, confiem de manera crucial en les propietats dels nombres primers en la nostra vida quotidiana. I després, associat amb la hipòtesi de Riemann i més enllà, tenim un altre misteri: quina relació hi ha entre els zeros de la funció zeta de Riemann i la física quàntica? Durant les últimes dècades, moltes matemàtiques interessants han evolucionat al voltant d'aquesta qüestió.

Mirant gairebé quatre dècades enrere —que és el temps que fa que soc matemàtic—, puc assenyalar desenvolupaments contemporanis relacionats amb els que acabo de descriure que han inspirat la meva recerca i hi han influït. Una bona part de les tasques en què he participat són encarnacions del que anomenem el *principi d'incertesa*, un terme que es va encunyar fa un segle en mecànica quàntica, en el treball del Premi Nobel Werner Heisenberg. Segons aquest principi, no podem conèixer ni la posició ni la velocitat d'un fotó o un electró amb una precisió perfecta; com més ajustem la posició de la partícula, menys coses podem saber sobre la seva velocitat, i viceversa.

El principi de Heisenberg es pot formular com un teorema en l'anàlisi de Fourier, donant una limitació quantitativa a la curta durada d'un senyal quan també està restringit principalment a freqüències baixes. Avui en dia no utilitzem el terme per referir-nos a un teorema en particular, sinó més aviat a una restricció fonamental que sosté l'anàlisi de Fourier, es manifesta en molts aspectes i contextos diferents, i té un paper important en una gran varietat d'aplicacions.

La revolució de les ondetes que va ser reconeguda amb l'atorgament del Premi Abel a Yves Meyer va impulsar les exploracions de noves encarnacions del principi d'incertesa. Em vaig implicar en aquest tipus de treballs a principis dels anys noranta, i també ho va fer el grup d'analistes de Barcelona liderat per Joaquim Bruna. Aquest interès científic comú va motivar la meva interacció perdurable amb els membres del grup, especialment amb Joaquim Ortega Cerdà, que acabava de doctorar-se quan ens vam conèixer l'any 1995.

El principi d'incertesa és una mena de corn de l'abundància per als matemàtics, ple d'aplicacions al món real i de problemes matemàtics intrínsecs. Un fet recent i notable que ho il·lustra és el descobriment que van fer Danylo Radchenko i Maryna Viazovska d'una manera de recuperar una funció a partir dels valors presos per aquesta i la seva transformada de Fourier al llarg d'una seqüència particular de punts. La seva fórmula és una altra formulació sorprenent del principi d'incertesa. L'impuls directe d'aquest treball pot semblar sorprenent: va sorgir de la solució de Viazovska per al problema de l'empaquetament d'esferes en vuit dimensions, per la qual va rebre la Medalla Fields el 2022.

Aquesta fórmula també està connectada amb quasicristalls unidimensionals, que han estat objecte d'escrutini en els últims anys. L'estudi dels quasicristalls va sorgir de la sorprenent verificació experimental que va fer Dan Schechtman l'any 1982 de l'existència d'àtoms que formen un patró quasi cristal·lí complex en lloc d'una disposició cristal·lina que es repeteix regularment. Gràcies a aquest descobriment, Schechtman va ser guardonat amb el Premi Nobel de Química l'any 2011. En matemàtiques, Yves Meyer havia trobat anteriorment patrons aperiòdics similars el 1970, i quatre anys més tard ho va fer Roger Penrose, que va detectar la seva famosa tessel·lació. Notablement, l'any 2007 Pete Lu i Paul Steinhardt van descobrir que es poden trobar patrons de Penrose quasi perfectes en l'arquitectura islàmica medieval. Tanmateix, tenint en compte l'obra de Schechtman, podríem dir que la natura hi va arribar primer!

L'anàlisi de Fourier proporciona una definició precisa dels quasicristalls. En conseqüència, la fórmula de Radchenko i Viazovska ofereix una col·lecció infinita de quasicristalls unidimensionals. Resulta que es pot obtenir una fórmula similar que inclogui els zeros no trivials de la funció zeta de Riemann, tal com es mostra en investigacions recents que hem dut a terme Andrei Bondarenko, Radchenko i jo mateix. Això em porta a la idea agosarada de Dyson tal com es presenta en la seva conferència «Ocells i granotes»: demostrar la hipòtesi de Riemann assolint una enumeració i una classificació completa de quasicristalls unidimensionals! La mala notícia és que, per molt que s'aconseguís exceutar amb èxit aquest pla precís, el nostre article indica que hi ha poques esperances que l'enfocament de Dyson pugui funcionar. Això és típic de la situació en què ens trobem: és més fàcil refutar una idea per demostrar la hipòtesi de Riemann que no pas trobar-hi una alternativa més prometedora.

Potser creieu que les matemàtiques són fora del nostre control o, fins i tot, que són intrínseques a la natura, però sigui quin sigui el punt de vista que adopteu, podem estar d'acord que són una activitat humana. En la conferència, Dyson posa èmfasi en l'element sorpresa de les matemàtiques i diu: «Quan miro la història de les matemàtiques, veig una successió de salts il·lògics, coincidències improbables, acudits de la natura». Les sorpreses, els salts il·lògics i les coincidències improbables reflecteixen en gran mesura que estem implicats en una empresa humana i social.

L'*Apologia* de Hardy argumenta que hi ha tres incentius dominants per fer recerca científica: curiositat intel·lectual, ambició i orgull professional. Podem reconèixer la curiositat intel·lectual com una motivació intrínseca, mentre que l'ambició i l'orgull professional requereixen clarament un context social; o, per dir-ho més clar, tenen a veure amb l'ordre jeràrquic entre els científics. William Thurston, d'altra banda, adopta un punt de vista més altruista en el seu brillant assaig «Sobre la demostració i el progrés en matemàtiques» quan parla de la importància de les matemàtiques com a activitat social: «La veritable satisfacció de les matemàtiques és aprendre dels altres i compartir». Hardy parla de la nostra motivació i Thurston del que ens aporta una autèntica satisfacció, de manera que aquí no hi ha cap conflicte real. Segurament, els seus pensaments s'apliquen a la vida humana en general.

Permeteu-me que aprofundeixi una mica en la importància d'aprendre dels altres i compartir. Per explicar el que tinc al cap, voldria començar amb aquestes paraules de John Edensor Littlewood: «Intenta resoldre un problema difícil. Pot ser que no te'n surtis, però demostraràs una altra cosa». El Premi Abel Lennart Carleson va expressar una idea semblant de manera més categòrica: *només* els problemes difícils importen. Per solucionar aquests problemes, cal ser tossut i estar disposat a pensar-hi durant molt de temps, possiblement diversos anys. Tanmateix, Carleson va afegir en una entrevista: «Si vols sobreviure com a matemàtic, també has de saber quan has de renunciar».

Tot i així, hi ha problemes difícils que requereixen més que enginy i tossuderia. Difícilment podria il·lustrar-ho millor que amb la hipòtesi de Riemann, la més notòria de totes. Gairebé tots els teòrics dels nombres creuen que la hipòtesi de Riemann és només una d'entre una gran col·lecció d'afirmacions aritmètiques anàlogues, de manera que la seva veritat hauria de ser l'encarnació d'un principi general d'algun tipus. La majoria d'experts descarten una aproximació directa dins de l'entorn clàssic en què es va formular. El que podríem esperar veure algun dia és una nova visió revolucionària, un desviament cap a un paisatge matemàtic inexplorat o encara desconegut per poder desbloquejar el seu misteri.

No obstant això, l'àmbit de les matemàtiques és tan extens que cadascun de nosaltres només en coneix una petita part, de manera que no és fàcil que un sol ocell o una única granota endevini quina hauria de ser aquesta nova visió desconeguda, com va fer Dyson amb tanta valentia. Una cosa meravellosa, que he viscut en algunes ocasions a menor escala, és quan t'adones que la clau per desbloquejar el misteri prové d'una part de l'escenari matemàtic per on no estàs acostumat a moure't. Això pot ser degut a una de les coincidències improbables de què parla Dyson: és possible que per accident hàgiu llegit alguna cosa, que hàgiu rebut un correu electrònic inesperat o que hàgiu conversat amb algú que ve d'un altre subcamp. En aquest sentit, una de les serendipitats més famoses va tenir lloc entre el mateix Dyson i Hugh Montgomery mentre prenien un te l'any 1973. La seva trobada accidental va portar més tard a la idea que els zeros de Riemann podrien tenir alguna cosa a veure amb els nivells d'energia dels sistemes caòtics quàntics. Algunes persones fins i tot pensen que aquest vincle, al qual he al·ludit abans, pot obrir el camí correcte a la hipòtesi de Riemann.

He parlat de l'aprenentatge dels altres més espectacular i innovador, i de compartir, però m'agradaria subratllar que tota mena de col·laboració, tant si és entre col·laboradors propers com si travessa subcamps, és inestimable per al progrés de la ciència: sabem coses diferents, les nostres perspectives varien i, per tant, treballar junts gairebé sempre és productiu i gratificant. Col·laborem àmpliament i més que mai, a través de fronteres i continents, fent constantment noves connexions i amics; gaudim de la vida social de les matemàtiques com a moviment global. Aquest segell distintiu de les matemàtiques és un altre regal meravellós. Recordo amb satisfacció i agraïment totes les meves col·laboracions, moltes amb persones que avui són aquí.

Sens dubte, les comunicacions digitals modernes fan que la col·laboració i la interacció siguin més fluides i ràpides que abans, tot i que no poden substituir mai les reunions presencials. És per això que els centres de recerca que tenen com a missió fomentar els esforços col·laboratius entre matemàtics tenen i continuaran tenint un paper fonamental en el progrés real. Un gran exemple d'això és el Centre de Recerca Matemàtica que hi ha aquí, a Barcelona, que, juntament amb la UB, ha estat especialment important per a la meva carrera. Tinc molt bon record de les nombroses col·laboracions que he dut a terme en aquestes institucions. Espero que, en els pròxims anys, hi continuïn tenint lloc treballs innovadors i coincidències improbables amb grans implicacions.

Acabo tal com he començat, parlant de bons records i de Barcelona com a centre matemàtic. Estic profundament emocionat de rebre la distinció de doctor honoris causa de la Universitat de Barcelona i de tenir el suport d'una comunitat matemàtica a la qual estic vinculat tant professionalment com emocionalment. Moltes gràcies per concedir-me aquest honor.

Speech by Professor Kristian Seip

Honorable Rector,
Dean of the Faculty of Mathematics and Computer Science,
Ladies and Gentlemen,
Colleagues and Friends,

I am deeply honored and humbled to receive this distinction of *Doctor Honoris Causa* from the University of Barcelona.

The city of Barcelona, its mathematical community and this university hold a special place in my heart. I have fond memories of numerous longer and shorter visits here during the past thirty years, including several months' worth of stays with my family. My collaboration with Joaquim Ortega Cerdà runs deep and covers many different topics. I share scientific interests with a number of friends here; I served on the Scientific Advisory Board for Centre de Recerca Matemàtica, and I still sit on the editorial board of *Collectanea Mathematica* and the scientific committee of the Ferran Sunyer i Balaguer Prize. It has been truly inspiring, a privilege and a great pleasure to take such an active part in the intense life of Barcelona's flourishing mathematical community over all these years.

Fields medalist William Thurston once said that Mathematics was "one of the most intellectually gratifying of human activities", and I can hardly disagree, being fortunate enough to do it for a living. Indeed, few mathematicians would disagree, but if you asked them *what* was important and *what* delighted them, their answers would differ. In his acclaimed AMS Einstein Public Lecture in Mathematics in 2008, Freeman Dyson spoke in the following poetic terms of there being two different kinds of mathematician:

> Some mathematicians are birds, others are frogs. Birds fly high in the air and survey broad vistas of mathematics out to the far horizon. They delight in concepts that unify our thinking and bring together diverse problems from different parts of the landscape. Frogs live in the mud below and see only the

> flowers that grow nearby. They delight in the details of particular objects, and they solve problems one at a time. I happen to be a frog, but many of my best friends are birds. [...] Mathematics needs both birds and frogs. Mathematics is rich and beautiful because birds give it broad visions and frogs give it intricate details. Mathematics is both great art and important science, because it combines generality of concepts with depth of structures. It is stupid to claim that birds are better than frogs because they see farther, or that frogs are better than birds because they see deeper. The world of mathematics is both broad and deep, and we need birds and frogs working together to explore it.

I would classify myself as a frog too, but I can also take delight in the bird's perspective. All frogs are well aware that the entire landscape of mathematics is also open to them, and it excites us sometimes to be able to move from the mud to a nearby pond and even beyond, to see a wider part of our universe.

Since the days of Galileo and Newton, this universe of mathematics has been intimately linked to progress in the natural sciences, with ideas flowing in both directions. On the one hand, we have the miracle that there are laws of nature we are able to reveal using the language of mathematics. Nobel Laureate Eugene Wigner refers to the "unreasonable effectiveness of mathematics" in this respect as "a wonderful gift which we neither understand nor deserve". On the other hand, we, the mathematicians, may appreciate this miracle as a wonderful gift to us. Our world is profoundly influenced by the needs for ever more sophisticated mathematics in science and technology. And we may discover that a problem thought to belong solely to mathematics, has an unexpected link to nature – we find that nature was there first!

I will illustrate these points by discussing two epoch-making publications from the 19th century, both of fundamental importance for most of the work I have been involved in.

The first is Jean-Baptiste Joseph Fourier's 1822 treatise on the analytical theory of heat. Its significance in physics aside, I would like to stress a purely mathematical idea that it contained. Fourier claimed that any function of a real variable could be expanded in a series of sinusoidal wave functions whose arguments were suitable multiples of the variable, called frequencies. Phrased in physical terms, the assertion was that any possible sound, from words in speech to a piece of music, could be broken down into a combination of pure tones. The result was not correct without additional conditions, but it saw the birth of a far-reaching idea and a new way of thinking about functions.

It is hard to overestimate the importance of Fourier's work for the development of mathematics and, in turn, for physics and modern information and communication technology. Two Abel prizes have been awarded for work that was more or less a direct outgrowth of Fourier's treatise. The single-most important result of Lennart Carleson, who received the Abel Prize in 2006, was his resolution of the problem of making Fourier's claim correct, as formulated by Nikolai Luzin in 1913. Carleson's result from 1966 was the crowning achievement of a huge research effort straddling a period of over one and a half centuries. Yves Meyer received the Abel Prize in 2017 for his pivotal role in the development of the mathematical theory of wavelets. This was largely about a remarkable interaction between sophisticated mathematical ideas and modern information and communication technology.

The second milestone is Bernhard Riemann's 1859 memoir on number theory. In this short paper, his only contribution on the subject, Riemann introduced radical new ideas in the study of prime numbers, that is, those positive integers greater than 1 that can be divided only by 1 and themselves; 2 and 3 are prime numbers but not 4 because it can be divided by 2. Prime numbers were studied by the ancient Greeks, and Euclid's proof that there are infinitely many of them is a shining example of the endurance of a mathematical achievement. Riemann was concerned with the follow-up question: how many prime numbers are there up to a given large number?

To open your mind to the mysteries of prime numbers, I quote a paragraph from Don Zagier's essay "The First 50 Million Prime Numbers":

> There are two facts about the distribution of prime numbers of which I hope to convince you so overwhelmingly that they will be permanently engraved in your hearts. The first is that [...] the prime numbers belong to the most arbitrary and ornery objects studied by mathematicians: they grow like weeds among the natural numbers, seeming to obey no other law than that of

> chance, and nobody can predict where the next will sprout. The second fact is even more astonishing, for it states just the opposite: that the prime numbers exhibit stunning regularity, that there are laws governing their behavior, and that they obey these laws with almost military precision.

Riemann's paper was about this regularity. He made a precise conjecture, saying that the number of prime numbers up to a given large number x is a nice explicit function of x plus an erratic remainder term that is not much greater than the square-root of the main term. The remainder term is, accounting for "randomness", according to Riemann's conjecture – the famous Riemann hypothesis – as small as we could ever hope for it to be. So the Riemann hypothesis claims that we live in the best of all possible worlds as far as the regularity of the distribution of prime numbers is concerned.

Riemann's memoir began a research program that is still very much alive. In 1896, independently from each other, Hadamard and de la Vallée Poussin proved a weak version of Riemann's proposed formula, known as the prime number theorem, a result which had been predicted by the great Gauss in his younger days. However, despite a massive effort by many brilliant minds, there has been very little progress towards Riemann's conjecture since then, and in fact no improvement since 1956 on the order of magnitude of the erratic remainder term. Many consider the Riemann hypothesis the most outstanding open problem in mathematics.

What is the best way to understand Riemann's idea? In hindsight, we find, it fits in a remarkable way into the mathematical theory that grew out of Fourier's work, now called Fourier analysis. What Riemann did was to relate the prime numbers quantitatively to another sequence of numbers, the nontrivial zeros of the Riemann zeta function. Within the framework of Fourier analysis, this can be understood as a duality relation, analogous to the relationship between a piece of music and the collection of pure tones present in it. In terms of this other sequence, which is known to lie in a two-dimensional strip, the Riemann hypothesis asserts that it actually lies on a single straight line. This has been confirmed for all the zeros we have been able to compute, which number just over 12 trillion. So we have evidence in favor of the Riemann hypothesis, but we could never prove it by computing ever more zeros, since there are infinitely many of them.

As late as 1940, in his “A Mathematician’s Apology”, G. H. Hardy could still proclaim with satisfaction that number theory was of no practical use. But this has changed dramatically: prime numbers are now vital to cryptography and therefore to online commerce and security. In other words, our everyday life relies totally on the properties of prime numbers. And then, associated with and beyond the Riemann hypothesis, we have another mystery: what is the relationship between the zeros of the Riemann zeta function and quantum physics? A lot of interesting mathematics has evolved around this question over recent decades.

Looking back over the almost four decades I have been a mathematician, I can point at contemporary developments related to those I have just described that have inspired and influenced my work. A fair amount of what I have been involved in are embodiments of what we call the “uncertainty principle” — a term that was coined a century ago in quantum mechanics, in the work of Nobel laureate Werner Heisenberg. His principle says we cannot know both the position and speed of a photon or electron with perfect accuracy; the more we nail down the particle’s position, the less we are able to say about its speed, and vice versa.

Heisenberg’s principle can be formulated as a theorem in Fourier analysis, giving a quantitative limitation on how short-lived a signal can be when it is also restricted mainly to low frequencies. Nowadays, we do not use the term to refer to a particular theorem but rather to a fundamental restriction that underpins Fourier analysis, manifests itself in many different guises and contexts and plays a significant role in a wide variety of applications.

The wavelet revolution that was recognized by the award of the Abel Prize to Yves Meyer gave impetus to explorations of new incarnations of the uncertainty principle. I became involved in such work in the early 1990s, and so did the group of analysts in Barcelona led by Joaquim Bruna. This common scientific interest prompted my enduring interaction with the group members, particularly with Joaquim Ortega Cerdà, who had just received his PhD when we first met in 1995.

The uncertainty principle is something of a horn of plenty for mathematicians, filled with real world applications and intrinsic mathematical problems. A recent and remarkable event illustrating this was the discovery by Danylo Radchenko and Maryna Viazovska of a way to recover a function from the values taken by it and its Fourier transform along a particular sequence of points. Their formula is yet another striking formulation of the uncertainty principle. The direct impetus for this work may seem surprising: it grew out of Viazovska's solution for the sphere packing problem in dimension 8, for which she was awarded the Fields Medal in 2022.

This formula is also connected to one-dimensional quasicrystals, which have come under scrutiny in recent years. The study of quasicrystals arose from the stunning experimental verification by Dan Schechtman in 1982 of the existence of atoms forming a complex quasi-crystalline pattern rather than a regularly repeating crystal arrangement. This discovery earned Schechtman the Nobel Prize in Chemistry in 2011. In mathematics, similar aperiodic patterns had been previously found by Yves Meyer in 1970 and then four years later by Roger Penrose, who detected his famous tiling. Remarkably, in 2007, Pete Lu and Paul Steinhardt found that nearly perfect quasi-crystalline Penrose patterns can be found in medieval Islamic architecture. However, in view of Schechtman's work, we might say that nature got there first!

Fourier analysis yields a precise definition of quasicrystals. Accordingly, Radchenko and Viazovska's formula gives an infinite collection of one-dimensional quasicrystals. It turns out that you can obtain a similar formula involving the nontrivial zeros of the Riemann zeta function, as shown in recent research by Andriy Bondarenko, Radchenko, and myself. This brings me to Dyson's daring idea, as presented in his "Birds and Frogs" lecture: to prove the Riemann hypothesis by obtaining a full enumeration and classification of one-dimensional quasicrystals! The bad news is that, however you succeed in making this plan precise, our paper indicates that there is little hope that Dyson's approach could work. This is typical for the situation we are in: it is easier to refute an idea for proving the Riemann hypothesis than it is to come up with a more promising alternative.

You may believe mathematics lies outside us or that it is even intrinsic to nature, but whatever viewpoint you take, we may agree that it is a human activity. Dyson emphasizes the element of surprise in mathematics and says in his lecture: "When I look at the history of mathematics, I see a succession of illogical jumps, improbable coincidences, jokes of nature". The surprises, the illogical jumps and the improbable coincidences reflect very much that we are involved in a human and social enterprise.

Hardy's "Apology" argues that there are three dominant incentives for doing scientific research: intellectual curiosity, ambition, and professional pride. We may recognize intellectual curiosity as an intrinsic motivation, while ambition and professional pride clearly require a social context; or, to put it more bluntly, they have to do with the pecking order among scientists. William Thurston, on the other hand, takes a more altruistic point of view in his brilliant essay "On proof and progress in mathematics" when discussing the importance of mathematics as a social activity: "The real satisfaction from mathematics is in learning from others and sharing with others". Hardy speaks about our motivation and Thurston about what gives us real satisfaction, so there is no real conflict here. Surely, their thoughts apply to human life quite generally.

Let me elaborate a little further on the importance of learning from others and sharing with others. To explain what I have in mind, let me start with the following words of John Edensor Littlewood: "Try a hard problem. You may not solve it, but you will prove something else". Abel laureate Lennart Carleson expressed a similar thought more categorically, namely that *only* hard problems matter. To conquer such problems, you must be both willing and stubborn enough to think about the same thing for a long time, possibly several years. However, Carleson added in an interview: "If you want to survive as a mathematician, you have to know when to give up also".

But there are hard problems that seem to require more than ingenuity and stubbornness. I can hardly do better than illustrate this by the Riemann hypothesis, the most notorious of them all. Most number theorists believe that the Riemann hypothesis is just one of a vast collection of analogous arithmetic assertions, so that the truth of it should be the incarnation of a general principle of some kind. A direct approach within the classical setting in which it was formulated is ruled out by most experts. Some revolutionary new insight, a detour into a mathematical landscape that is unexplored or still unknown to have the power to unlock the mystery – it is something of this sort we could hope to see one day.

But mathematics is so vast that each of us only knows a tiny part of it, so it is not easy for a single bird or frog to guess what that new unknown insight should be, as Dyson so boldly did. It is a wonderful thing, which I have experienced on some occasions on a lesser scale, when you realize that the key to unlocking the mystery comes from a part of the mathematical scenery you are not used to moving around in. This may be due to one of the improbable coincidences that Dyson speaks about: you may by accident have read something, you may have received an unexpected email, or you may have had a chat with someone coming from another subfield. One of the most famous of such serendipities took place between Dyson himself and Hugh Montgomery over tea in 1973. Their accidental meeting led later to the idea that the Riemann zeros could have something to do with the energy levels of quantum chaotic systems; some people even think this link, which I alluded to earlier, may open the right route to the Riemann hypothesis.

I have spoken of the most spectacular and groundbreaking learning from others and sharing with others, but I should like to stress that all kinds of collaboration, be it between close associates or crossing subfields, is invaluable for the advancement of our science. We know different things, our perspectives vary, and therefore working together is almost always productive and rewarding. We collaborate widely and more than ever before, across borders and continents, constantly making new connections and friends; we enjoy the social life of mathematics as a global movement. This hallmark of our field is another wonderful gift: I remember with pleasure and gratitude all my collaborations, many with people who are here today.

Modern digital communication certainly makes collaboration and interaction smoother and faster than before, but it can never replace in-person meetings. This is why research centers whose mission is to foster collaborative efforts between mathematicians play and will continue to play a vital role in making real progress. A great example of this is the Centre de Recerca Matemàtica here in Barcelona which, along with the University of Barcelona, has been particularly important for my career – I am happy to look back at the many enjoyable collaborations undertaken at these institutions. May there be groundbreaking work and improbable coincidences with major implications taking place here in the years to come!

I am back where I started, speaking of fond memories and Barcelona as a mathematical center. I am deeply touched to receive the distinction of *Doctor Honoris Causa* from the University of Barcelona, supported by a mathematical community that I am professionally and emotionally attached to. Thank you very much for bestowing this honor on me!

UNIVERSITAT DE BARCELONA
Edicions