Máster en Ciencias Actuariales y Financieras

TRABAJO FINAL DE MÁSTER

Título: Valoración de opciones por el método de diferencias finitas

Autoría: Eduardo Sánchez Gutiérrez

Tutoría: Josep Vives Santa Eulalia & Oriol Roch Casellas

Curso académico: 2023-2024

UNIVERSITAT DE BARCELONA
Facultat d'Economia i Empresa

Màster de Ciències Actuarials i Financeres

Facultad de Economía y Empresa

Universidad de Barcelona

Trabajo Final de Máster

Máster en Ciencias Actuariales y Financieras

VALORACIÓN DE OPCIONES POR EL MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS

Autoría:

Eduardo Sánchez Gutiérrez

Tutoría:

Josep Vives Santa Eulalia & Oriol Roch Casellas

El contenido de este documento es de exclusiva responsabilidad del autor, quien declara que no ha incurrido en plagio y que la totalidad de referencias a otros autores han sido expresadas en el texto. En inglés: The content of this document is the sole responsibility of the author, who declares that he/she has not incurred plagiarism and that all references to other authors have been expressed in the text.

Resumen: Esta tesis explora el método de diferencias finitas para valorar opciones financieras. Se discuten conceptos básicos como el lema de Ito, la ecuación de Black-Scholes y las opciones sobre un activo. Se presentan métodos de diferencias finitas explícitos e implícitos para un factor. La valoración de opciones *Put* y *Call* se realiza utilizando tanto la solución exacta de Black-Scholes como los métodos de diferencias finitas, comparando los resultados obtenidos.

Palabras clave: Método de diferencias finitas, opciones financieras, ecuación de Black-Scholes, valoración de derivados, lema de Ito.

Abstract: This thesis explores the finite difference method for valuing financial options. Basic concepts such as Ito's lemma, the Black-Scholes equation, and options on one asset are discussed. Explicit and implicit finite difference methods for one factor are presented. The valuation of *Put* and *Call* options is performed using both the exact Black-Scholes solution and finite difference methods, comparing the results obtained.

Key words: Finite difference method, financial options, Black-Scholes equation, derivatives valuation, Ito's lemma.

1. Introducción 4
2. Conceptos básicos 4
2.1 Lema de Ito 4
2.2 Black-Scholes 6
2.3 Opciones *plain vainilla* 7
2.4 Diferencias finitas 9
2.5 Método implícito 10
2.6 Método explicito 11
2.7 Método de Crank-Nicolson 12
3. Valoración de una opción *plain vainilla* 14
3.1 Solución exacta 15
3.2 Solución con el método implícito 15
3.3 Solución con el método explicito 18
3.4 Solución con el método de Crank-Nicolson 20
3.5 Comparativa 21
4. Conclusiones 22
5. Referencias 24
6. Anexos 25
6.1 Anexo 1 – Código Método implícito *Put* 25
6.2 Anexo 2 – Código Método Implícito *Call* 26
6.3 Anexo 3 – Código Método Explicito *Put* 28
6.4 Anexo 4 – Código Método Explicito *Call* 29
6.5 Anexo 5 – Código Método Crank-Nicolson *Put* 30
6.6 Anexo 6 – Código Método Crank-Nicolson *Call* 31

1. Introducción

El método de diferencias finitas es una técnica numérica ampliamente utilizada para la resolución de ecuaciones diferenciales parciales (EDPs) en diversos campos de la ciencia y la ingeniería. En el ámbito de las finanzas cuantitativas, este método se aplica de manera efectiva para valorar opciones y otros derivados financieros, especialmente cuando las soluciones exactas son difíciles o imposibles de obtener. Esta tesis se centra en la aplicación del método de diferencias finitas para la valoración de opciones financieras, proporcionando una comparación detallada entre las soluciones exactas y las aproximaciones numéricas obtenidas mediante este método.

En primer lugar, es esencial establecer una base teórica sólida mediante la explicación de conceptos fundamentales. Entre estos se incluye el lema de Ito, una herramienta crucial en el cálculo estocástico que permite el análisis de procesos de difusión. A continuación, se abordará la ecuación de Black-Scholes, una EDP que modela la evolución del precio de opciones en el tiempo bajo ciertas suposiciones del mercado. La comprensión de esta ecuación es vital, ya que proporciona una solución exacta para la valoración de opciones en un contexto simplificado.

Seguidamente, se describirán las opciones sobre un activo. Para abordar la resolución numérica de estas ecuaciones, se presentarán los métodos de diferencias finitas explícito, implícito, y el método Crank-Nicolson para un factor, detallando sus respectivas ventajas y limitaciones en términos de estabilidad y precisión.

La aplicación práctica de estos métodos se ejemplificará mediante la valoración de una opción *Put* y una opción *Call* europea utilizando tanto la solución exacta de Black-Scholes como los métodos de diferencias finitas implícito, explícito, y Crank-Nicolson. Se llevará a cabo una comparación exhaustiva de los resultados obtenidos, analizando la precisión y eficiencia de cada enfoque numérico en relación con la solución exacta.

La estructura de esta tesis está diseñada para guiar al lector desde los fundamentos teóricos hasta las aplicaciones prácticas, proporcionando un entendimiento completo del método de diferencias finitas y su aplicación en la valoración de opciones. A través de esta investigación, se espera demostrar no solo la utilidad y versatilidad del método, sino también sus limitaciones y consideraciones prácticas en el contexto de las finanzas cuantitativas.

2. Conceptos básicos

2.1 Lema de Ito

El Lema de Ito es a funciones de variables aleatorias lo que el teorema de Taylor es a funciones de variables deterministas. Lo anterior en el sentido de que el Lema de Ito se refiere a un pequeño cambio en una función de variables aleatorias mientras que el teorema de Taylor a un pequeño cambio en una función de variables determinísticas.

En esta sección se explicará una aproximación heurística del Lema de Ito basada en la expansión de la serie de Taylor desarrollada por Wilmott et al. (1995).

Primeramente, se parte del siguiente resultado,

$$dX(\mathrm{t})^2 \ \rightarrow \ dt \text{ a medida que } dt \ \rightarrow \ 0. \qquad (1)$$

Donde dX se conoce como un proceso de Wiener y es la variable que agrega la aleatoriedad o incertidumbre al precio, S, de un activo. Adicionalmente, dt representara el incremento diferencial del tiempo.

Ahora, supondremos que f(S) es una función de S, precio de un activo, y olvidaremos por un momento que S es una variable estocástica. Si variamos S por un valor muy pequeño igual a dS entonces claramente f(S) también va a variar por un pequeño valor.

Reescribiendo la expansión de la serie de Taylor obtenemos

$$df(\mathrm{S}) = \frac{df(\mathrm{S})}{dS}dS + \frac{1}{2}\frac{d^2f(\mathrm{S})}{dS^2}dS^2 + \ldots \qquad (2)$$

donde los puntos al final de la ecuación representan el resto de los términos que son más pequeños que los términos incluidos.

Ahora, como trabajaremos con precios de activos sabemos que

$$dS^2 = [\sigma S dX(\mathrm{t}) + \mu S dt]^2. \qquad (3)$$

La ecuación anterior descompone el retorno dS/S de un activo S en dos partes. La primera, determinista, le otorga una contribución igual a μdt al retorno del activo. Por otro lado, la segunda parte le otorga una contribución $\sigma dX(\mathrm{t})$ al retorno del activo. Lo anterior representa un cambio aleatorio en respuesta a efectos externos tales como noticias inesperadas el cual se obtiene de una distribución normal estándar.

Ya que dS es un número, aunque aleatorio, al elevarlo al cuadrado se obtiene

$$dS^2 = \sigma^2 S^2 dX^2 + 2\sigma\mu S^2 dt dX(\mathrm{t}) + \mu^2 S^2 dt^2. \qquad (4)$$

Seguidamente, examinaremos el orden de la magnitud de cada uno de los términos en (4). Dado que

$$dX(\mathrm{t}) = O(\sqrt{dt})$$

el primer término es el más grande para pequeños dt y domina los siguientes dos términos. Así que,

$$dS^2 = \sigma^2 S^2 dX(\mathrm{t})^2.$$

Teniendo en cuenta (1) obtenemos

$$dS^2 \rightarrow \sigma^2 S^2 dt.$$

Ahora, sustituyendo lo anterior en (2), reteniendo únicamente los términos que son por lo menos igual de grandes a O(dt), y teniendo en cuenta (3) obtenemos

$$df(\mathrm{S}) = \frac{df(\mathrm{S})}{dS}[\sigma S dX(\mathrm{t}) + \mu S dt] + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{d^2f(\mathrm{S})}{dS^2}dt$$

y simplificando obtenemos

$$df(\mathrm{S}) = \sigma S(\mathrm{t})\frac{df(\mathrm{S})}{dS}dX(\mathrm{t}) + \left[\mu S\frac{df(\mathrm{S})}{dS} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{d^2f(\mathrm{S})}{dS^2}\right]dt \ . \qquad (5)$$

La ecuación (5) es el Lema de Ito la cual relaciona pequeños cambios en una función de variables aleatorias a pequeños cambios en la variable misma. Ya que el orden de magnitud de la variable dX(t) es O($\sqrt{dt}$), la segunda derivada de f con respecto a S aparece en la expresión para df en el orden dt.

También, (5) puede ser más generalizada aun si se considera una función f que dependa de una variable aleatoria S y del tiempo t. Lo anterior implica el uso de derivadas parciales dado que ahora hay dos variables independientes, S y t, precio y tiempo. Si expandimos la función f(S+dS, t+dt) en una serie de Taylor obtenemos

$$df(\mathrm{t},\mathrm{S}(\mathrm{t})) = \frac{\partial f(\mathrm{t},\mathrm{S}(\mathrm{t}))}{\partial S(\mathrm{t})} dS + \frac{\partial f(\mathrm{t},\mathrm{S}(\mathrm{t})}{\partial t} dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(\mathrm{t},\mathrm{S}(\mathrm{t}))}{\partial S(\mathrm{t})^2} dS(\mathrm{t})^2 + \ldots$$

y utilizando (3) para dS y (1) para $\mathrm{d}X(\mathrm{t})^2$ obtenemos que la nueva expresión para df(t,S(t)) es

$$df(\mathrm{t},\mathrm{S}(\mathrm{t})) = \sigma S(\mathrm{t})\frac{\partial f(\mathrm{t},\mathrm{S}(\mathrm{t}))}{\partial S(\mathrm{t})} dX(\mathrm{t}) + \left[\mu S(\mathrm{t})\frac{\partial f(\mathrm{t},\mathrm{S}(\mathrm{t}))}{\partial S(\mathrm{t})} + \frac{1}{2}\sigma^2 S(\mathrm{t})^2 \frac{\partial^2 f(\mathrm{t},\mathrm{S}(\mathrm{t}))}{\partial S(\mathrm{t})^2} + \frac{\partial f(\mathrm{t},\mathrm{S}(\mathrm{t}))}{\partial t}\right] dt. \quad (6)$$

En la siguiente sección veremos que aplicación tiene la ecuación (6) en la valoración de opciones financieras.

2.2 Black-Scholes

En esta sección se describirá la ecuación de Black-Scholes la cual es utilizada ampliamente para la valoración de opciones financieras. Esta explicación está basada principalmente en Wilmott et al. (1995). No se hará mucho énfasis en la solución de la ecuación ya que el objetivo más adelante será resolver la ecuación utilizando métodos numéricos.

Primeramente, hay que enumerar una serie de suposiciones.

- El precio de activo sigue una caminata aleatoria log normal.
- El tipo de interés libre de riesgo r y la volatilidad del activo σ son variables constantes y conocidas a lo largo de la vida de la opción.
- No hay costos de transacción.
- El activo subyacente, la acción, no paga dividendos.
- No hay posibilidades de arbitraje.
- Se permite la venta en corto del activo.

Ahora, suponemos que tenemos una opción cuyo valor es V(S,t) y depende únicamente del precio de la acción S y del tiempo t. Utilizando el Lema de Ito en (6)

$$dV = \sigma S\frac{\partial V}{\partial S} dX + \left[\mu S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t}\right] \quad (7)$$

obtenemos la caminata aleatoria que sigue el valor de la opción V. Ahora, construiremos un portafolio el cual consistirá en -Δ unidades del activo subyacente y una opción. Por lo tanto, el valor del portafolio viene dado por

$$\pi = V - \Delta S. \quad (8)$$

El salto del valor del portafolio en un paso del tiempo es

$$d\pi \;=\; dV \;-\; \Delta dS.$$

Ahora, uniendo lo obtenido en (3), (7), y (8) podemos determinar que π sigue la siguiente caminata aleatoria

$$d\pi \;=\; \sigma S\left[\frac{\partial V}{\partial S} \;-\; \Delta\right] dX \;+\; \left[\mu S\frac{\partial V}{\partial S} \;+\; \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} - \mu\Delta S\right] dt.$$

Seguidamente, si elegimos el siguiente número de acciones

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$$

obtenemos un portafolio el cual tiene un incremento netamente determinístico

$$d\pi \;=\; \left[\frac{\partial V}{\partial t} \;+\; \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right]. \tag{9}$$

Si vamos a los conceptos de arbitraje, oferta y demanda, y no existencia de costos de transacción podemos determinar que el retorno de un monto π invertido en un activo libre de riesgo será de rπdt en un tiempo dt. Si el lado derecho de (9) fuera superior al monto descrito anteriormente un inversor podría obtener un retorno garantizado sin riesgo al pedir prestado π para invertir en el portafolio. El retorno de esta estrategia libre de riesgo sería superior al costo de pedir prestado el dinero. Contrariamente, si el lado derecho de (9) fuera inferior a rπdt el inversor podría vender en corto el portafolio e invertir a una tasa libre de riesgo en el banco el monto π. En cualquiera de las dos situaciones descritas anteriormente el inversor podría obtener un retorno libre de costos e instantáneo. La existencia de estas estrategias de arbitraje y la posibilidad de comprar y vender sin costos de transacción asegura un retorno en el portafolio y en el activo libre de riesgo más o menos igual. De tal forma obtenemos

$$\mathrm{r}\pi\mathrm{dt} \;=\; \left[\frac{\partial V}{\partial t} \;+\; \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right] dt$$

y si incluimos (11) y (14) en (16) obtenemos la ecuación de Black-Scholes.

$$\frac{\partial V}{\partial t} \;+\; \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV \;=\; 0. \tag{10}$$

La ecuación anterior será utilizada en las secciones siguientes para valorar opciones financieras. Como se explicará, la ecuación cuenta con una solución exacta, sin embargo, también utilizaremos métodos de diferencias finitas para aproximar las derivadas de la función y obtener un resultado utilizando métodos numéricos.

2.3 Opciones *plain vainilla*

En esta sección describiremos que es una opción según Wilmott et al. (1994). La opción financiera más simple, una opción *Call* europea, o *Plain Vainilla*, es un contrato que sigue las siguientes condiciones; en un momento determinado del futuro, conocido como fecha de vencimiento, el dueño de la opción puede comprar el activo subyacente por un valor

determinado desde el comienzo del contrato, conocido como precio de ejercicio o *strike.* Notemos que lo importante en la oración anterior es la palabra "puede" ya que este contrato es un derecho mas no una obligación para el dueño. Por otro lado, la persona que vendió el contrato si tiene la obligación potencial de vender el activo si el dueño del contrato así lo requiere.

Ahora, una opción *Put* europea es muy similar a la opción *Call*, sin embargo, el dueño del contrato tiene el derecho, mas no la obligación, de vender un activo a un precio determinado en la fecha final del contrato.

Luego de haber descrito la ecuación de Black-Scholes en secciones anteriores debemos entonces definir las condiciones finales y de frontera para poder valorizar la opción.

Si denotamos el valor de una opción *Call* Europea C(S,t) con precio de ejercicio K y fecha de vencimiento T la condición final que debe aplicarse en el momento t = T es

$$C(S,T) \;=\; \max(S-K,0). \tag{11}$$

Por otro lado, si el precio de la acción subyacente es igual a cero entonces tenemos que

$$C(0,t) \;=\; 0.$$

Por último, tenemos que si el precio de la acción subyacente incrementa sin ningún tipo de barrera el precio de la opción se acercara cada vez más al precio mismo de la acción

$$C(S,t) \;\approx\; S \text{ a medida que } S \;\to\; \infty.$$

Si la opción es una *Put* europea tenemos que el valor en la fecha de vencimiento es

$$P(S,T) \;=\; \max(K-S,0). \tag{12}$$

Por otro lado, si el precio de la acción llega a ser 0 entonces el precio de la acción será igual al precio de ejercicio descontado a valor presente

$$P(0,t) \;=\; Ke^{-r(T-t)}.$$

Por último, si el precio de la acción tiende a infinito entonces el precio de la opción tendera a 0 ya que será cada vez menos probable que la opción sea ejercida

$$P(S,t) \;\to \infty \text{ a medida que } S \;\to \infty.$$

Como se mencionó anteriormente si existe una solución exacta para valorar opciones del tipo explicado en esta sección, sin embargo, no se demostrará en este trabajo como se obtiene tal solución a la ecuación diferencial planteada con las condiciones de frontera y finales aquí descritas. Pero si se planteara la solución ya que el objetivo más adelante será resolver la ecuación diferencial por métodos numéricos y comparar los resultados con la solución exacta.

La solución exacta de una opción *Call* europea es

$$C(S,t) \;=\; SN(d_1) \;-\; Ke^{-r(T-t)}N(d_2) \tag{13}$$

donde N(*) es la función de distribución acumulativa de una normal estándar y

$$d_1 = \frac{log(S/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad (14)$$

y,

$$d_2 = \frac{log(S/K) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}. \quad (15)$$

Por último, la solución exacta de una opción *Put* europea es

$$P(S,t) = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1). \quad (16)$$

Luego, se utilizará esta ecuación para valorar una opción *Put* y una opción *Call* europea y determinar el valor exacto para, posteriormente, comparar con la valoración obtenida con el método de diferencias finitas.

2.4 Diferencias finitas

El método de diferencias finitas es una aproximación numérica a las ecuaciones diferenciales. En general, el concepto se basa en remplazar las derivadas dentro de la ecuación diferencial por aproximaciones que detallaremos en este informe. En esta sección explicaremos el método de diferencias finitas basándonos en Bossio (2019).

Primeramente, sea f : X $\subset \mathbb{R} \rightarrow R$ y considerando que su derivada en el punto x_0 sea:

$$\frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{h \to \infty} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Ahora, no consideraremos que el incremento h no sea infinito sino finito, de aquí el nombre diferencias finitas. En este orden de ideas podremos discretizar un dominio X = [a,b] con la siguiente secuencia (a, a+dx, a+2dx, …, a+ndx = b) siendo dx lo suficientemente pequeño. En general, obtenemos que $(x_n)_n = a + ndx, n = 0,1,2,3\ldots,N$. De tal forma, la función f(x) podría aproximarse por la secuencia $(f_n)_n =$ f(x_n) y su derivada podría ser aproximada por

$$\frac{df}{dx}(x_0 = x_i) \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{dx}, \qquad i = 0,1,\ldots,N-1. \quad (17)$$

En (17) se muestra la diferencia hacia adelante, sin embargo, también puede hacerse hacia atrás ya que la existencia de la derivada implica la simetría del límite. De tal forma, la diferencia hacia atrás viene dada por:

$$\frac{df}{dx}(x_0 = x_i) \approx \frac{f_i - f_{i-1}}{dx}, \qquad i = 1,2,\ldots,N. \quad (18)$$

Adicionalmente, también se podría obtener una diferencia central, promediando (17) y (18) de la siguiente forma:

$$\frac{df}{dx}(x_0 = x_i) \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2dx}, \qquad i = 1,2,\ldots,N-1.$$

También, se podrían aproximar derivadas de mayor orden utilizando aproximaciones de las derivadas de bajo orden. Así que, una derivada de segundo orden podría aproximarse de la siguiente forma:

$$\frac{d^2f}{dx^2}(x_0 = x_i) \approx \frac{1}{dx}\left[\frac{f_{i+1} - f_i}{dx} - \frac{f_i - f_{i-1}}{dx}\right] \approx \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{dx^2}, \qquad i = 1,2,\ldots,N-1\,.$$

A simple vista parece no ser critico elegir entre estos tres métodos de diferencia, sin embargo, en las próximas secciones veremos que si es importante y dada la elección de estas aproximaciones se difiere entre método explicito e implícito. Por último, es importante aclarar que las aproximaciones en esta sección fueron hechas para derivadas, pero también puede ser aplicado a derivadas parciales.

2.5 Método implícito

Para valorar una opción europea (*Put* y *Call)* se ha tomado como referencia el proceso que se sigue en Brandimarte (2006). Como primer paso se ha de discretizar el dominio. El dominio del tiempo esta dado por [0,T], es decir desde el momento inicial hasta la fecha de vencimiento del contrato. Ahora, el dominio del precio viene dado generalmente por $[0, \infty]$ pero en este caso debemos de remplazar el infinito por un numero muy grande. En este caso asumiremos que el precio máximo que puede tomar el activo subyacente es 2 veces el precio de ejercicio, K.

$$S_{max} = 2{*}K.$$

Seguidamente, se dividirá el dominio del tiempo en N espacios iguales y el dominio del precio en M espacios iguales. Esta división de los dominios producirá una maya donde sus nodos serán coordinadas formadas por el producto cartesiano de las secuencias:

$$S = (0, ds, 2ds, \ldots, Mds = S_{max})$$

y,

$$t = (0, dt, 2dt, \ldots, Ndt = T).$$

Seguidamente, denotaremos $S_i = idS$ y $t_j = jdt$ el precio de la opción vendrá dado por

$$V_{i,j} = V(S_i, t_j).$$

Ahora, tendremos que aproximar las derivadas de la ecuación (10). Como sabemos hay tres métodos para aproximar las derivadas. El objetivo de esta sección es implementar el método implícito, por lo tanto, tendremos que aproximar hacia adelante la derivada del tiempo. De tal forma la ecuación (10) reescrita con las diferencias aproximadas quedaría de la siguiente manera:

$$\frac{V_{i,j+1} - V_{i,j}}{dt} + \frac{V_{i+1,j}V_{i-1,j}}{2dS}[ridS] + \frac{V_{i+1,j} - 2V_{i,j} + V_{i-1,j}}{dS^2}\left[\frac{1}{2}\sigma^2 i^2 dS^2\right] = rV_{i,j}.$$

Si se reorganizan la ecuación y despejamos $V_{i,j+1}$, se obtiene:

$$V_{i-1,j}\left[\frac{1}{2}ridt - \frac{1}{2}\sigma^2 i^2 dt\right] + V_{i,j}[1 + \sigma^2 i^2 dt + rdt] + V_{i+1,j}\left[-\frac{1}{2}ridt - \frac{1}{2}\sigma^2 i^2 dt\right] = V_{i,j+1}. \qquad (19)$$

Adicionalmente definimos:

$$a_i = \left[\frac{1}{2}ridt - \frac{1}{2}\sigma^2 i^2 dt\right]$$

$$b_i = [1 + \sigma^2 i^2 dt + rdt]$$

$$c_i = \left[-\frac{1}{2}ridt - \frac{1}{2}\sigma^2 i^2 dt\right].$$

Seguidamente, definimos un sistema de ecuaciones, utilizando las ecuaciones (19) y las ecuaciones (11) y (12), dependiendo si vamos a valorar una *Put* o una *Call* respectivamente, para introducir los efectos de las condiciones de frontera:

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & & \\ & & a_i & b_i & c_i & & \\ & & & & a_{M-2} & b_{M-2} & c_{M-2} \\ & & & & & a_{M-1} & b_{M-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{1,j} \\ V_{2,j} \\ V_{i,j} \\ V_{M-2,j} \\ V_{M-1,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{1,j+1} \\ V_{2,j+1} \\ V_{i,j+1} \\ V_{M-2,j+1} \\ V_{M-1,j+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1 V_{0,j} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ C_{M-1} V_{M,j} \end{bmatrix}$$

Notamos que obtenemos un sistema de ecuaciones con M-1 ecuaciones lineales y M-1 incógnitas. La primera matriz es una matriz constante, el vector en la segunda posición del sistema contiene todos los valores de la opción para todos los posibles valores de la acción en el momento t_j. El vector en la tercera posición del sistema contiene lo mismo que el anterior, pero para un periodo de tiempo más. Por último, el vector en la cuarta posición del sistema introduce los efectos de la condición de frontera.

En la siguiente figura se muestra gráficamente cómo funciona el método implícito.

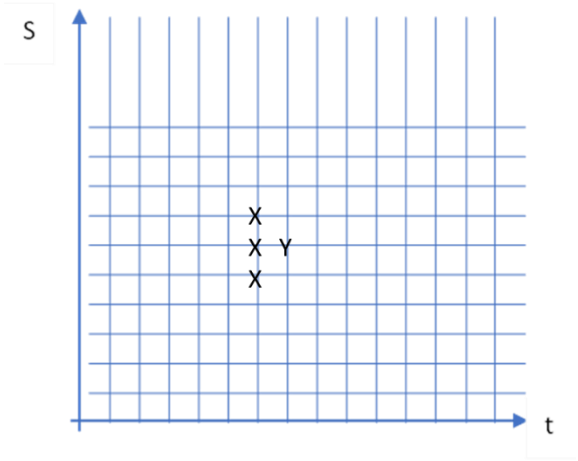

Ilustración 1 - Método implícito Fuente: elaboración propia

Como se puede ver en la ilustración anterior, el método implícito itera por toda la maya y calcula los puntos X a partir del punto Y. El algoritmo parte de la frontera e itera por todos los puntos de tiempo, t, y precio, S.

2.6 Método explicito

El método explicito es similar al método implícito descrito anteriormente pero un poco más sencillo. Primeramente, para la derivada con respecto al tiempo no la aproximaremos hacia adelante sino hacia atrás.

$$\frac{V_{i,j} - V_{i,j-1}}{dt} + \frac{V_{i+1,j}V_{i-1,j}}{2dS}[rids] + \frac{V_{i+1,j} - 2V_{i,j} + V_{i-1,j}}{dS^2}\left[\frac{1}{2}\sigma^2 i^2 dS^2\right] = rV_{i,j}.$$

Al reescribir la ecuación obtenemos:

$$V_{i-1,j+1}\left[\frac{1}{2}\sigma^2 i^2 dt - \frac{1}{2}ridt\right] + V_{i,j+1}[1 - \sigma^2 i^2 dt - rdt] + V_{i+1,j+1}\left[\frac{1}{2}\sigma^2 i^2 dt + \frac{1}{2}ridt\right] = V_{i,j} \quad (20)$$

Con la ecuación (20) podremos partir desde la condición de frontera, e iterar por cada espacio de tiempo y precio hasta encontrar el precio de la opción hoy. Es importante recordar que la diferencia entre *Put* y *Call* en este método no está en la ecuación (20) ya que esta es igual para ambas opciones. La diferencia entre *Put* y *Call* estará en la condición de frontera que introduzcamos y de donde el algoritmo comenzará a ir hacia atrás.

En la siguiente figura se muestra gráficamente cómo funciona el método explicito.

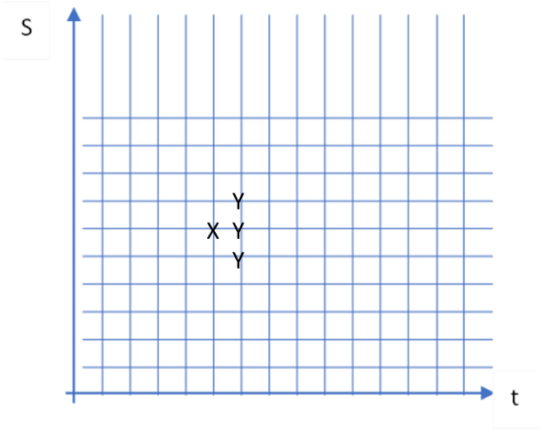

Ilustración 2 - Método Explicito Fuente: elaboración propia

En la ilustración anterior se muestra gráficamente como se calcula cada valor en la maya. El método va iterando por todos los puntos de tiempo, t, y precio, S. En este método los puntos X se calculan a partir de lo puntos Y.

2.7 Método de Crank-Nicolson

En esta sección se explicará el método de Crank-Nicolson tomando como referencia a Wilmott (2000). Este método puede ser pensado como un promedio entre el método explicito y el método implícito, descritos en secciones anteriores. Para definir el esquema escribimos la ecuación (10) de la siguiente manera:

$$\frac{V_i^k - V_i^{k+1}}{dt} + \frac{a_i^{k+1}}{2}\left[\frac{V_{i+1}^{k+1} - 2V_i^{k+1} + V_{i-1}^{k+1}}{dS^2}\right] + \frac{a_i^k}{2}\left[\frac{V_{i+1}^k - 2V_i^k + V_{i-1}^k}{dS^2}\right] + \frac{b_i^{k+1}}{2}\left[\frac{V_{i+1}^{k+1} - V_{i-1}^{k+1}}{2dS^2}\right] + \frac{b_i^k}{2}\left[\frac{V_{i+1}^k - V_{i-1}^k}{dS^2}\right] + \frac{1}{2}c_i^{k+1}V_i^{k+1} + \frac{1}{2}c_i^k V_i^k = O(dt^2, dS^2).$$

La ecuación se puede reescribir de la siguiente manera:

$$-A_i^{k+1}V_{i-1}^{k+1} + (1-B_i^{k+1})V_i^{k+1} - C_i^{k+1}V_{i+1}^{k+1} = A_i^k V_{i-1}^k + (1+B_i^k)V_i^k + C_i^k V_{i+1}^k$$

donde,

$$A_i^k = \frac{1}{2}v_1 a_i^k - \frac{1}{4}v_2 b_i^k$$

$$B_i^k = -v_1 a_i^k - \frac{1}{2}dtc_i^k$$

y,

$$C_i^k = \frac{1}{2}v_1 a_i^k + \frac{1}{4}v_2 b_i^k \ .$$

Adicionalmente, los valores de a_i^k, b_i^k, c_i^k son los mismos vectores utilizados en el método implícito. También $v_1 = \frac{dt}{dS^2}$ y $v_2 = \frac{dt}{dS}$. Por último, $O(dt^2, dS^2)$ es el error del método.

Seguidamente, definiéremos un sistema de ecuaciones de forma similar a como se hizo en el método implícito

$$\begin{bmatrix} -A_1^{k+1} & 1-B_1^{k+1} & -C_1^{k+1} & 0 & & & \\ 0 & -A_2^{k+1} & 1-B_2^{k+1} & & & & \\ & 0 & & & & & \\ & & & 1-B_{I-2}^{k+1} & -C_{I-2}^{k+1} & 0 & \\ & & & 0 & -A_{I-1}^{k+1} & 1-B_{I-1}^{k+1} & -C_{I-1}^{k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_0^{k+1} \\ V_1^{k+1} \\ \\ \\ V_{I-1}^{k+1} \\ V_I^{k+1} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -A_1^k & 1+B_1^k & C_1^k & 0 & & & \\ 0 & A_2^k & 1+B_2^k & & & & \\ & 0 & & & & & \\ & & & 1-B_{I-2}^k & C_{I-2}^k & 0 & \\ & & & 0 & A_{I-1}^k & 1+B_{I-1}^k & C_{I-1}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_0^k \\ V_1^k \\ \\ \\ V_{I-1}^k \\ V_I^k \end{bmatrix}.$$

Ambas matrices tienen I-1 filas e I+1 columnas lo cual indica que hay I-1 ecuaciones e I+1 incógnitas. Las dos ecuaciones que faltan vendrán de las condiciones de frontera, dependiendo del tipo de opción.

Por ejemplo, en el caso de la opción *Put* sabemos que $V(0,t) = Ke^{-r(T-t)}$ donde K es el precio strike y T es el vencimiento. Si llevamos lo anterior a la nomenclatura que estamos utilizando tenemos que $V_0^{k+1} = Ke^{-r(k-1)dt}$. Es importante aclarar que, a diferencia de los métodos descritos anteriormente, en este caso el subíndice I es el numero de paso del precio y el superíndice K es el numero del paso del tiempo. Dado lo anterior reescribimos

$$\begin{bmatrix} -A_1^{k+1} & 1-B_1^{k+1} & -C_1^{k+1} & 0 & & & \\ 0 & -A_2^{k+1} & 1-B_2^{k+1} & & & & \\ & 0 & & & & & \\ & & & & 1-B_{I-2}^{k+1} & -C_{I-2}^{k+1} & 0 \\ & & & 0 & -A_{I-1}^{k+1} & 1-B_{I-1}^{k+1} & -C_{I-1}^{k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_0^{k+1} \\ V_1^{k+1} \\ \\ \\ V_{I-1}^{k+1} \\ V_I^{k+1} \end{bmatrix}$$

así,

$$\begin{bmatrix} 1-B_1^{k+1} & 1-C_1^{k+1} & 0 & & & \\ -A_2^{k+1} & 1-B_2^{k+1} & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & & 1-B_{I-2}^{k+1} & -C_{I-2}^{k+1} & 0 \\ & & 0 & -A_{I-1}^{k+1} & 1-B_{I-1}^{k+1} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^{k+1} \\ \\ \\ \\ V_{I-1}^{k+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -A_1^{k+1}V_0^{k+1} \\ 0 \\ 0 \\ \\ \\ 0 \end{bmatrix} = M_L^{k+1}v^{k+1} + r^k.$$

En la operación anterior lo que se hizo fue multiplicar las fila de arriba y la fila de debajo de la matriz. De tal forma que la matriz M_L es cuadrada y de tamaño I-1, el vector r^k es de tamaño I-1 y solo tiene valores diferente a 0 en la primera y última ubicación y es totalmente conocido ya que solo depende de la función A y del valor prescrito de la opción en la frontera.

Por último, en la siguiente ilustración se muestra gráficamente cómo funciona el método de Crank Nicolson.

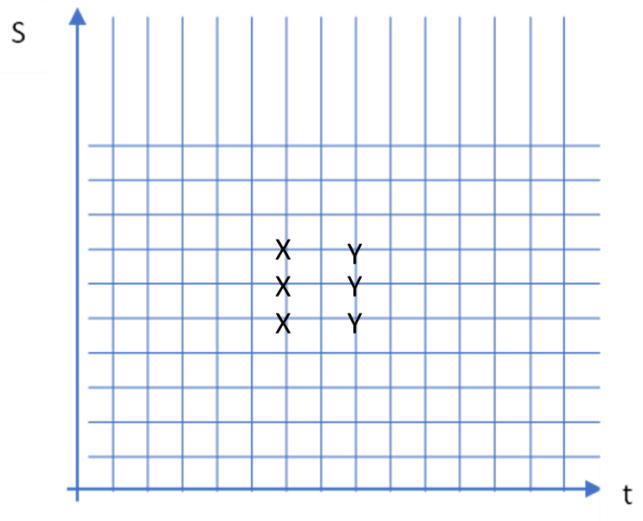

Ilustración 3 - Método Crank-Nicolson Fuente: elaboración propia

En la ilustración anterior se muestra gráficamente como se calcula cada valor en la maya. El método va iterando por todos los puntos de tiempo, t, y precio, S. En este método los puntos X se calculan a partir de lo puntos Y.

3. Valoración de una opción *plain vainilla*

En esta sección pasaremos de la parte teórica a la parte práctica. Para ello haremos valoraciones de opciones *Call* y *Put* europeas bajo cuatro metodologías diferentes. Primeramente, calcularemos la solución exacta haciendo uso de las ecuaciones (13), (14), (15), y (16). Posteriormente, valoraremos las mismas opciones, pero usando el método implícito, explicito, y el método de Crank-Nicolson.

3.1 Solución exacta

El primer ejercicio que se llevara a cabo es valorar una opción *Call* y una *Put* con las siguientes características:

$$\mathrm{r} = 9\%, \sigma = 10\%, \mathrm{T} = 9/12, \mathrm{K} = 6.$$

Estas opciones tendrán una tasa de rentabilidad libre de riesgo del 9%, una volatilidad del 10%, un vencimiento de nueve meses y un precio de ejercicio o *strike* de 6. Los resultados se harán para valores iniciales del activo subyacente equivalente al 80%, 90%, 110% y 120% del precio de ejercicio.

En la siguiente tabla se muestran los resultados obtenidos.

S_0	4,8000	5,4000	6,0000	6,6000	7,2000
Put	0,8148213	0,3121592	0,0625753	0,0061301	0,0003139
Call	0,0064550	0,1037928	0,4542090	0,9977638	1,5919476

Tabla 1 - Solución exacta Vol 10% Fuente: elaboración propia

Posteriormente, se valoró una opción *Call* y una *Put* con las siguientes características:

$$\mathrm{r} = 9\%, \sigma = 20\%, \mathrm{T} = 9/12, \mathrm{K} = 6.$$

Estas opciones tendrán una tasa de rentabilidad libre de riesgo del 9%, una volatilidad del 20%, un vencimiento de nueve meses y un precio de ejercicio o *strike* de 6. Los resultados se harán para valores iniciales del activo subyacente equivalente al 80%, 90%, 110% y 120% del precio de ejercicio.

En la siguiente tabla se muestran los resultados obtenidos.

S_0	4,8000	5,4000	6,0000	6,6000	7,2000
Put	0,8986433	0,4930559	0,2346939	0,0980696	0,0366411
Call	0,0902770	0,2846896	0,6263276	1,0897032	1,6282748

Tabla 2 - Solución exacta Vol 20% Fuente: elaboración propia

Como primera conclusión podemos observar que tanto la opción *Put* como la *Call* tienen mayor precio a medida que se incrementa la volatilidad. En las siguientes secciones valoraremos opciones con las mismas características, pero por los diferentes métodos explicados anteriormente.

3.2 Solución con el método implícito

En esta sección valoraremos opciones con las mismas características que en la sección anterior, pero empleando el método implícito de diferencias finitas. El código construido para ello se encuentra en el Anexo 1 y en el Anexo 2, para opciones *Put* y *Call* respectivamente.

Antes de pasar a la valoración es importante aclarar que se ira modificando el numero de pasos para discretizar el dominio del precio y para proporcionar estabilidad en el método se empleara la siguiente formula para escoger adecuadamente el numero de pasos del dominio del tiempo con respecto al numero de pasos que se elija para el dominio del precio, M.

$$\mathrm{dt} = \frac{0{,}9}{\sigma^2 \mathrm{M}^2}$$

Primeramente, valoraremos una opción *Call* y una opción *Put* de las siguientes características

$$\mathrm{r} = 9\%, \sigma = 10\%, \mathrm{T} = 9/12, \mathrm{K} = 6.$$

Los resultados obtenidos utilizando el método implícito discretizando el dominio del precio en 200 y el dominio del tiempo en 334 es el siguiente.

S_0	4,8000	5,4000	6,0000	6,6000	7,2000
Put	0,8151355	0,3122160	0,0621575	0,0060212	0,0003090
Call	0,0067309	0,1038115	0,4537529	0,9976166	1,5919022

Tabla 3 - Resultados método implícito Fuente: elaboración propia

Ahora, comparando contra los resultados obtenidos por la solución exacta obtenemos las siguientes diferencias porcentuales.

S_0	4,8000	5,4000	6,0000	6,6000	7,2000
Put	0,0386%	0,0182%	-0,6677%	-1,7759%	-1,5829%
Call	4,2750%	0,0179%	-0,1004%	-0,0147%	-0,0029%

Tabla 4 - Precisión método implícito Fuente: elaboración propia

Seguidamente, valoramos una opción *Call* y una *Put* de las mismas características al anterior, pero en esta ocasión discretizando el dominio del precio en 400 pasos y el dominio del tiempo en 1334 pasos.

Los resultados obtenidos son los siguientes.

S_0	4,8000	5,4000	6,0000	6,6000	7,2000
Put	0,8149003	0,3121731	0,0624711	0,0061028	0,0003127
Call	0,0065244	0,1037972	0,4540952	0,9977269	1,5919354

Tabla 5 - Resultados método implícito Fuente: elaboración propia

Ahora, comparando contra los resultados obtenidos por la solución exacta obtenemos las siguientes diferencias porcentuales.

S_0	4,8000	5,4000	6,0000	6,6000	7,2000
Put	0,0097%	0,0044%	-0,1665%	-0,4457%	-0,3985%
Call	1,0755%	0,0042%	-0,0250%	-0,0037%	-0,0008%

Tabla 6- Precisión método implícito Fuente: elaboración propia

Seguidamente, valoramos una opción *Call* y una opción *Put* con las siguientes características

$$\mathrm{r} = 9\%, \sigma = 20\%, \mathrm{T} = 9/12, \mathrm{K} = 6.$$

Los resultados obtenidos utilizando el método implícito discretizando el dominio del precio en 200 y el dominio del tiempo en 1334 es el siguiente.

S_0	4,8000	5,4000	6,0000	6,6000	7,2000
Put	0,8986546	0,4929078	0,2344863	0,0979216	0,0365746
Call	0,0902749	0,2844372	0,6249162	1,0807015	1,5849452

Tabla 7 - Resultados método implícito Fuente: elaboración propia

Ahora, comparando contra los resultados obtenidos por la solución exacta obtenemos las siguientes diferencias porcentuales.

S_0	4,8000	5,4000	6,0000	6,6000	7,2000
Put	0,0013%	-0,0300%	-0,0884%	-0,1509%	-0,1816%
Call	-0,0023%	-0,0887%	-0,2253%	-0,8261%	-2,6611%

Tabla 8 - Precisión método implícito Fuente: elaboración propia

Seguidamente, valoramos una opción *Call* y una *Put* de las mismas características al anterior, pero en esta ocasión discretizando el dominio del precio en 400 pasos y el dominio del tiempo en 5334 pasos.

Los resultados obtenidos son los siguientes.

S_0	4,8000	5,4000	6,0000	6,6000	7,2000
Put	0,8986461	0,4930189	0,2346420	0,0980326	0,0366245
Call	0,0902740	0,2845602	0,6251105	1,0809362	1,5852679

Tabla 9 - Resultados método implícito Fuente: elaboración propia

Ahora, comparando contra los resultados obtenidos por la solución exacta obtenemos las siguientes diferencias porcentuales.

S_0	4,8000	5,4000	6,0000	6,6000	7,2000
Put	0,0003%	-0,0075%	-0,0221%	-0,0377%	-0,0454%
Call	-0,0033%	-0,0455%	-0,1943%	-0,8045%	-2,6413%

Tabla 10 - Precisión método implícito Fuente: elaboración propia

Luego de haber realizado varias valoraciones con el método implícito podemos deducir una serie de conclusiones. Primeramente, como se menciono anteriormente, a mayor volatilidad mayor será el precio de la opción. Segundo, la diferencia entre el método implícito y la solución exacta es menor en las opciones *Put* a medida que el precio inicial del activo subyacente va decreciendo. Por otro lado, la diferencia entre el método implícito y la solución exacta es menor en las opciones *Call* a medida que el precio inicial del activo subyacente va creciendo. Adicionalmente, si la volatilidad crece el método es más acertado en las opciones *Put*. Contrariamente, si la volatilidad crece el método es menos acertado en las opciones *Call*. Por último, notamos que a medida que se incrementa

el numero de pasos en que se discretiza el dominio del precio y del tiempo el método incremente su calidad.

3.3 Solución con el método explicito

En esta sección valoraremos opciones con las mismas características que en la sección anterior, pero empleando el método explícito de diferencias finitas. El código construido para ello se encuentra en el Anexo 3 y en el Anexo 4, para opciones *Put* y *Call* respectivamente.

Primeramente, valoraremos una opción *Call* y una opción *Put* de las siguientes características

$$\mathrm{r} = 9\%, \sigma = 10\%, \mathrm{T} = 9/12, \mathrm{K} = 6.$$

Los resultados obtenidos que utilizan el método explicito discretizando el dominio del precio en 1000 y el dominio del tiempo en 8334 es el siguiente.

S_0	4,8000	5,4000	6,0000	6,6000	7,2000
Put	0,8148202	0,3121445	0,0625603	0,0061267	0,0003137
Call	0,0064554	0,1037797	0,4541955	0,9977619	1,5919489

Tabla 11 - Resultados método explicito Fuente: elaboración propia

Ahora, comparando contra los resultados obtenidos por la solución exacta obtenemos las siguientes diferencias porcentuales.

S_0	4,8000	5,4000	6,0000	6,6000	7,2000
Put	-0,0001%	-0,0047%	-0,0240%	-0,0549%	-0,0864%
Call	0,0064%	-0,0126%	-0,0030%	-0,0002%	0,0001%

Tabla 12 - Precisión método explicito Fuente: elaboración propia

Seguidamente, valoramos una opción *Call* y una *Put* de las mismas características al anterior, pero en esta ocasión discretizando el dominio del precio en 2000 pasos y el dominio del tiempo en 33334 pasos.

Los resultados obtenidos son los siguientes.

S_0	4,8000	5,4000	6,0000	6,6000	7,2000
Put	0,8148210	0,3121555	0,0625715	0,0061292	0,0003139
Call	0,0064551	0,1037896	0,4542056	0,9977633	1,5919479

Tabla 13 - Resultados método explicito Fuente: elaboración propia

Ahora, comparando contra los resultados obtenidos por la solución exacta obtenemos las siguientes diferencias porcentuales.

S_0	4,8000	5,4000	6,0000	6,6000	7,2000
Put	0,0000%	-0,0012%	-0,0060%	-0,0137%	-0,0216%
Call	0,0016%	-0,0032%	-0,0007%	0,0000%	0,0000%

Tabla 14 - precisión método explicito Fuente: elaboración propia

Seguidamente, valoramos una opción *Call* y una opción *Put* con las siguientes características

$$\mathrm{r} = 9\%, \sigma = 20\%, \mathrm{T} = 9/12, \mathrm{K} = 6.$$

Los resultados obtenidos que utilizan el método explicito discretizando el dominio del precio en 1000 y el dominio del tiempo en 33334 es el siguiente.

S_0	4,8000	5,4000	6,0000	6,6000	7,2000
Put	0,8986402	0,4930499	0,2346880	0,0980657	0,0366392
Call	0,0902742	0,2846840	0,6263221	1,0896998	1,6282733

Tabla 15 - Resultados método explicito Fuente: elaboración propia

Ahora, comparando contra los resultados obtenidos por la solución exacta obtenemos las siguientes diferencias porcentuales.

S_0	4,8000	5,4000	6,0000	6,6000	7,2000
Put	-0,0004%	-0,0012%	-0,0025%	-0,0039%	-0,0052%
Call	-0,0031%	-0,0020%	-0,0009%	-0,0003%	-0,0001%

Tabla 16 - Precisión método explicito Fuente: elaboración propia

Seguidamente, valoramos una opción *Call* y una *Put* de las mismas características al anterior, pero en esta ocasión discretizando el dominio del precio en 2000 pasos y el dominio del tiempo en 133334 pasos.

Los resultados obtenidos son los siguientes.

S_0	4,8000	5,4000	6,0000	6,6000	7,2000
Put	0,8986425	0,4930544	0,2346924	0,0980686	0,0366407
Call	0,0902763	0,2846882	0,6263262	1,0897024	1,6282744

Tabla 17 - Resultados método explicito Fuente: elaboración propia

Ahora, comparando contra los resultados obtenidos por la solución exacta obtenemos las siguientes diferencias porcentuales.

S_0	4,8000	5,4000	6,0000	6,6000	7,2000
Put	-0,0001%	-0,0003%	-0,0006%	-0,0010%	-0,0013%
Call	-0,0008%	-0,0005%	-0,0002%	-0,0001%	0,0000%

Tabla 18 - Precisión método explicito Fuente: elaboración propia

Luego de haber realizado varias valoraciones con el método explicito podemos deducir una serie de conclusiones. Primeramente, vemos que el método es más efectivo en las opciones *Put* a medida que el precio inicial del activo subyacente baja. Contrariamente, para las opciones *Call* el método es más efectivo a medida que el precio inicial del activo subyacente sube. Adicionalmente, al pasar de una discretización del dominio del precio de 1000 a 2000 la precisión del modelo aumenta significativamente. Por último, no hay una relación clara en la precisión del modelo cuando se aumenta la volatilidad ya que para algunos precios es mas efectivo con una volatilidad baja y en otros con una volatilidad alta, tanto en opciones *Call* como en opciones *Put*.

3.4 Solución con el método de Crank-Nicolson

En esta sección valoraremos opciones con las mismas características que en la sección anterior, pero empleando el método Crank-Nicolson de diferencias finitas. El código construido para ello se encuentra en el Anexo 5 y en el Anexo 6, para opciones *Put* y *Call* respectivamente.

Primeramente, valoraremos una opción *Call* y una opción *Put* de las siguientes características

$$\mathrm{r} = 9\%, \sigma = 10\%, \mathrm{T} = 9/12, \mathrm{K} = 6.$$

Los resultados obtenidos utilizando el método implícito discretizando el dominio del precio en 200 y el dominio del tiempo en 334 es el siguiente.

S_0	4,8000	5,4000	6,0000	6,6000	7,2000
Put	0,8149647	0,3120051	0,0621783	0,0060336	0,0003081
Call	0,0065984	0,1036387	0,4538120	0,9976673	1,5919402

Tabla 19 - Resultados método Crank-Nicolson Fuente: elaboración propia

Ahora, comparando contra los resultados obtenidos por la solución exacta obtenemos las siguientes diferencias porcentuales.

S_0	4,8000	5,4000	6,0000	6,6000	7,2000
Put	0,0176%	-0,0494%	-0,6344%	-1,5740%	-1,8617%
Call	2,2222%	-0,1485%	-0,0874%	-0,0097%	-0,0005%

Tabla 20 - Precisión método Crank-Nicolson Fuente: elaboración propia

Seguidamente, valoramos una opción *Call* y una *Put* de las mismas características al anterior, pero en esta ocasión discretizando el dominio del precio en 400 pasos y el dominio del tiempo en 1334 pasos.

Los resultados obtenidos son los siguientes.

S_0	4,8000	5,4000	6,0000	6,6000	7,2000
Put	0,8148573	0,3121204	0,0624763	0,0061059	0,0003125
Call	0,0064910	0,1037541	0,4541099	0,9977396	1,5919448

Tabla 21 - Precisión método Crank-Nicolson Fuente: elaboración propia

Ahora, comparando contra los resultados obtenidos por la solución exacta obtenemos las siguientes diferencias porcentuales.

S_0	4,8000	5,4000	6,0000	6,6000	7,2000
Put	0,0044%	-0,0124%	-0,1583%	-0,3945%	-0,4687%
Call	0,5580%	-0,0374%	-0,0218%	-0,0024%	-0,0002%

Tabla 22 - Precisión método Crank-Nicolson Fuente: elaboración propia

Seguidamente, valoramos una opción *Call* y una opción *Put* con las siguientes características

$$r = 9\%, \sigma = 20\%, T = 9/12, K = 6.$$

Los resultados obtenidos utilizando el método Crank – Nicolson de diferencias finitas discretizando el dominio del precio en 200 y el dominio del tiempo en 1334 es el siguiente.

S_0	4,8000	5,4000	6,0000	6,6000	7,2000
Put	0,8986091	0,4929070	0,2345171	0,0979479	0,0365839
Call	0,0902393	0,2844493	0,6249799	1,0808271	1,5851727

Tabla 23 - Resultados método Crank-Nicolson Fuente: elaboración propia

Ahora, comparando contra los resultados obtenidos por la solución exacta obtenemos las siguientes diferencias porcentuales.

S_0	4,8000	5,4000	6,0000	6,6000	7,2000
Put	-0,0038%	-0,0302%	-0,0753%	-0,1241%	-0,1562%
Call	-0,0418%	-0,0844%	-0,2152%	-0,8145%	-2,6471%

Tabla 24 - Precisión método Crank-Nicolson Fuente: elaboración propia

Seguidamente, valoramos una opción *Call* y una *Put* de las mismas características al anterior, pero en esta ocasión discretizando el dominio del precio en 400 pasos y el dominio del tiempo en 5334 pasos.

Los resultados obtenidos son los siguientes.

S_0	4,8000	5,4000	6,0000	6,6000	7,2000
Put	0,8986348	0,4930187	0,2346497	0,0980391	0,0366268
Call	0,0902651	0,2845632	0,6251264	1,0809676	1,5853249

Tabla 25 - Resultados método Crank-Nicolson Fuente: elaboración propia

Ahora, comparando contra los resultados obtenidos por la solución exacta obtenemos las siguientes diferencias porcentuales.

S_0	4,8000	5,4000	6,0000	6,6000	7,2000
Put	-0,0010%	-0,0076%	-0,0188%	-0,0310%	-0,0391%
Call	-0,0132%	-0,0444%	-0,1918%	-0,8017%	-2,6378%

Tabla 26 - Precisión método Crank-Nicolson Fuente: elaboración propia

Luego de haber realizado varias valoraciones con el método Crank-Nicolson podemos deducir una serie de conclusiones. Primeramente, vemos que al duplicar el numero de pasos en que se discretiza el precio se incrementa significativamente la precisión del método. Adicionalmente, vemos que a diferencia de métodos anteriores este método incrementa su precisión tanto en *Call* como en *Put* a medida que decrece el valor inicial del activo subyacente. Por otro lado, a medida en que se incrementa la volatilidad el método es más preciso para opciones *Put* y menos preciso para opciones *Call*.

3.5 Comparativa

Luego de haber trabajado los tres diferentes métodos de diferencias finitas detallados en esta tesis podemos concluir que en esta ocasión el método más preciso fue el método

explicito. Generalmente, el método explicito es el más fácil de aplicar y el mas inexacto ya que muchas veces tiene problemas de convergencia. En esta ocasión el método explicito fue muy útil ya que la ecuación diferencial a resolver no era de muchos factores. Por otro lado, el método explicito es el que menos capacidad computacional requiere, por lo tanto, fue posible una mayor discretización del dominio del tiempo y del precio. Probablemente, si se hubiera utilizado la misma discretización para los métodos implícito y Crank-Nicholson se hubiera logrado una mejor precisión que en el método explicito. Dado que el programa utilizado fue R studio no se contaba con suficiente capacidad computacional y al ingresar una discretización mayor en los métodos implícito y Crank-Nicolson no se ejecutaba correctamente el programa. En futuros estudios se recomienda probar diferentes herramientas y programas informáticos para obtener mejores resultados. Por último, el método de Crank-Nicolson demostró ser una muy buena alternativa ya que contiene lo mejor de ambos métodos. En esta ocasión pudimos observar como utilizando la misma discretización para el método implícito y el método de Crank-Nicolson se obtuvo resultados significativamente mejores en el método de Crank-Nicolson.

4. Conclusiones

Esta tesis ha explorado en profundidad la aplicación del método de diferencias finitas en la valoración de opciones financieras, comparando los resultados obtenidos con la solución exacta proporcionada por la ecuación de Black-Scholes. A través de un análisis detallado, se ha demostrado que los métodos explícitos, implícito y Crank-Nicolson son herramientas valiosas para la valoración de derivados, aunque presentan diferencias en términos de precisión y estabilidad.

El método explícito ha demostrado ser muy preciso al aumentar el número de pasos de discretización tanto en el tiempo como en el precio del activo subyacente. En concreto, con una alta discretización, las diferencias con respecto a la solución exacta de Black-Scholes son prácticamente insignificantes, evidenciando una excelente convergencia y precisión del método. Sin embargo, este método puede ser menos estable para periodos de tiempo más largos, lo cual es un factor para considerar dependiendo de la volatilidad del activo.

Por otro lado, el método implícito presentó mayores diferencias iniciales en comparación con el método explícito, especialmente para valores extremos del precio del activo subyacente. A medida que aumenta la discretización, la precisión mejora significativamente, aunque persisten diferencias, particularmente en las opciones de compra. Este método ofrece mayor estabilidad y es menos susceptible a la inestabilidad numérica, pero requiere una mayor discretización para lograr un nivel de precisión comparable al método explícito.

El método Crank-Nicolson se posiciona como un equilibrio entre los métodos explícito e implícito. Proporciona una buena combinación de estabilidad y precisión, mejorando significativamente con el aumento del número de pasos. Aunque no logra la precisión del método explícito con alta discretización, las diferencias observadas son menores que en el método implícito, lo que lo convierte en una opción robusta para situaciones que requieren un equilibrio entre precisión y estabilidad.

En resumen, esta tesis ha demostrado que los métodos explícitos, implícito y de Crank-Nicolson son herramientas efectivas para la valoración de opciones financieras, aunque es crucial considerar sus limitaciones y posibles áreas de mejora. La comparación entre estos métodos y la solución exacta de Black-Scholes ha identificado áreas donde se pueden realizar ajustes para aumentar la precisión y estabilidad de las valoraciones. En el contexto de las finanzas cuantitativas, estos métodos siguen siendo fundamentales para la modelización y valoración de derivados en mercados complejos y en evolución.

5. Referencias

Bossio, A. M. (2019). Option pricing by finite difference methods: Implicit method. Academia.edu. https://www.academia.edu/38098394/Pricing_of_a_vanilla_European_option_by_implicit_finite_difference_method

Brandimarte, Paolo (2006). Numerical Methods in Finance and Economics:A MATLAB-Based Introduction. John Wiley & Sons; Hoboken, NJ.

Douglas Bates, Martin Maechler and Mikael Jagan (2022). Matrix: Sparse and Dense Matrix Classes and Methods. R package version 1.5-3. https://CRAN.R-project.org/package=Matrix

Duffy, D. J. (2006). Finite difference methods in financial engineering : a partial differential equation approach. John Wiley.

Figlewski, S., Silber, W. L., & Subrahmanyam, M. G. (1990). Financial options : from theory to practice. Business One Irwin.

Hans W. Borchers (2019). pracma: Practical Numerical Math Functions. R package version 2.2.9.https://CRAN.R-project.org/package=pracma

Wilmott, P. (2000). Paul Wilmott on quantitative finance. John Wiley.

Wilmott, P. (2001) Paul Wilmott introduces quantitative finance. (CD-ROM included). (2001). Reference and Research Book News, 16(4). Copyright Clearance Center.

Wilmott, P., Dewynne, J., & Howison, S. (1994). Option pricing : mathematical models and computation (Repr. with corrections). Oxford Financial Press.

Wilmott, P., Howison, S., & Dewynne, J. (1995). The Mathematics of financial derivatives : a student introduction. Cambridge University Press.

Zhu, Y., Chern, I.-L., & Wu, X. (2004). Derivative securities and difference methods. Springer.

6. Anexos

6.1 Anexo 1 – Código Método implícito *Put*

```
install.packages("Matrix")
library(Matrix)
install.packages("pracma")
library(pracma)
rm(list = ls())
#In Puts
k <- 6
r <- 0.09
sigma <- 0.10
vencimiento <- 9/12
smax <- 2*k #Se asume precio maximo 2*k
m <- 400 #Numero pasos precio
#n <- 60 #Numero pasos tiempo


ds <- smax/m
dt <- 0.9/(sigma^2*m^2) #Estabilidad
n <- floor(vencimiento/dt)+1 #Estabilidad
dt <- vencimiento/n #Estabilidad
v <- matrix(0, m+1, n+1)
s <- seq(0, smax, by = ds)
t <- seq(0,vencimiento, by = dt)
i <- 0:m
j <- 0:n
v[,n+1] <- pmax((k-s),0) #Condicion de frontera Put
v[1,] <- k*exp(-r*dt*(n-j)) #Condicion de frontera Put
v[m+1,] <- 0
a <- 0.5*((r)*dt*i-sigma^2*dt*i^2)
b <- 1+sigma^2*dt*i^2+r*dt
```

```
c <- -0.5*((r)*dt*i+sigma^2*dt*i^2)
matb <- matrix(0, length(b)-2, length(b)-2)
matb[row(matb)-col(matb)==0] <- b[2:m]
mata <- matrix(0, length(a)-2,length(a)-2)
mata[row(mata)-col(mata)==1] <- a[3:m]
matc <- matrix(0, length(c)-2, length(c)-2)
matc[row(matc)-col(matc) == -1] <- c[2:(m-1)]
A <- matb + mata + matc #Matriz A
lu_decomp <- lu(A, scheme = "ijk")
L <- lu_decomp$L
U <- lu_decomp$U
aux <- rep(0, m-1)
for (j in n:1){
  aux[1] <- -a[2]*v[1,j]
  v[(2:m), j] <- solve(U, solve(L,(v[(2:m),(j+1)]+aux)))
}
approx(s,v[,1],c(0.80*k,0.90*k,k,1.1*k,1.2*k))
n
```

6.2 Anexo 2 – Código Método Implícito *Call*

```
install.packages("Matrix")
library(Matrix)
install.packages("pracma")
library(pracma)
rm(list = ls())
#In*Put*s
k <- 6
r <- 0.09
sigma <- 0.10
vencimiento <- 9/12
smax <- 2*k #Se asume precio maximo 2*k
m <- 400 #Numero pasos precio
#n <- 300 #Numero pasos tiempo
```

```
ds <- smax/m
dt <- 0.9/sigma^2/m^2 #Estabilidad
n <- floor(vencimiento/dt)+1 #Estabilidad
dt <- vencimiento/n #Estabilidad
v <- matrix(0, m+1, n+1)
s <- seq(0, smax, by = ds)
t <- seq(0,vencimiento, by = dt)
i <- 0:m
j <- 0:n
v[,n+1] <- pmax(s-k,0)
v[1,] <- 0
v[m+1,] <- smax-k*exp(-r*dt*(n-j))
a <- 0.5*((r)*dt*i-sigma^2*dt*i^2)
b <- 1+sigma^2*dt*i^2+r*dt
c <- -0.5*((r)*dt*i+sigma^2*dt*i^2)
matb <- matrix(0, length(b)-2, length(b)-2)
matb[row(matb)-col(matb)==0] <- b[2:m]
mata <- matrix(0, length(a)-2,length(a)-2)
mata[row(mata)-col(mata)==1] <- a[3:m]
matc <- matrix(0, length(c)-2, length(c)-2)
matc[row(matc)-col(matc) == -1] <- c[2:(m-1)]
A <- matb + mata + matc #Matriz A
lu_decomp <- lu(A, scheme = "ijk")
L <- lu_decomp$L
U <- lu_decomp$U
aux <- rep(0, m-1)
for (j in n:1){
  aux[1] <- -a[2]*v[1,j]
  v[(2:m), j] <- solve(U, solve(L,(v[(2:m),(j+1)]+aux)))
}
```

```
approx(s,v[,1],c(0.80*k,0.90*k,k,1.1*k,1.2*k))
n
```

6.3 Anexo 3 – Código Método Explicito *Put*

```
rm(list = ls())
#In Puts
k <- 6
r <- 0.09
vencimiento <- 9/12
sigma <- 0.20
smax <- 2*k
m <- 2000 #Numero de pasos precio
#n <- 100 #Numero de pasos tiempo

ds <- smax/m
dt <- 0.9/sigma^2/m^2 #Estabilidad
n <- floor(vencimiento/dt)+1 #Estabilidad
dt <- vencimiento/n #Estabilidad
v <- matrix(0, m+1, n+1)
s <- seq(0, smax, by = ds)
i <- 0:m
j <- 0:n
v[,n+1] <- pmax(k-s,0)
v[1,] <- k*exp(-r*dt*(n-j))
v[m+1,] <- 0
a <- 0.5*dt*((sigma^2)*i-r)*i
b <- 1-dt*((sigma^2)*(i^2)+r)
c <- 0.5*dt*((sigma^2)*i+r)*i
for (j in n:1){
  for (i in 2:m){
    v[i,j] = a[i]*v[i-1,j+1]+b[i]*v[i,j+1]+c[i]*v[i+1,j+1]
  }
}
```

```
approx(s,v[,1],c(0.80*k,0.90*k,k,1.1*k,1.2*k))
n
```

6.4 Anexo 4 – Código Método Explicito *Call*

```
rm(list = ls())
#In Puts
k <- 6
r <- 0.09
vencimiento <- 9/12
sigma <- 0.20
smax <- 2*k
m <- 2000 #Numero de pasos precio
#n <- 100 #Numero de pasos tiempo

ds <- smax/m
dt <- 0.9/sigma^2/m^2 #Estabilidad
n <- floor(vencimiento/dt)+1 #Estabilidad
dt <- vencimiento/n #Estabilidad
v <- matrix(0, m+1, n+1)
s <- seq(0, smax, by = ds)
i <- 0:m
j <- 0:n
v[,n+1] <- pmax(s-k,0)
v[1,] <- 0
v[m+1,] <- smax-k*exp(-r*dt*(n-j))
a <- 0.5*dt*((sigma^2)*i-r)*i
b <- 1-dt*((sigma^2)*(i^2)+r)
c <- 0.5*dt*((sigma^2)*i+r)*i
for (j in n:1){
  for (i in 2:m){
    v[i,j] = a[i]*v[i-1,j+1]+b[i]*v[i,j+1]+c[i]*v[i+1,j+1]
  }
}
```

```
approx(s,v[,1],c(0.80*k,0.90*k,k,1.1*k,1.2*k))
n
```

6.5 Anexo 5 – Código Método Crank-Nicolson *Put*

```
rm(list = ls())
#In Putes
k <- 6
r <- 0.09
sigma <- 0.10
vencimiento <- 9/12
smax <- 2*k #Se asume precio maximo 2*k
m <- 400 #Numero pasos precio

ds <- smax/m
dt <- 0.9/sigma^2/m^2 #Estabilidad
n <- floor(vencimiento/dt)+1 #Estabilidad
dt <- vencimiento/n #Estabilidad
v <- matrix(0, m+1, n+1)
s <- seq(0, smax, by = ds)
t <- seq(0,vencimiento, by = dt)
i <- 0:m
j <- 0:n
v[,n+1] <- pmax((k-s),0) #Condicion de frontera Put
v[1,] <- k*exp(-r*dt*(n-j)) #Condicion de frontera Put
v[m+1,] <- 0
a <- 0.25*dt*((sigma^2)*(i^2)-r*i)
b <- -dt*0.5*((sigma^2)*(i^2)+r)
c <- 0.25*dt*((sigma^2)*(i^2)+r*i)
matb <- matrix(0, length(b)-2, length(b)-2)
matb[row(matb)-col(matb)==0] <- 1-b[2:m]
mata <- matrix(0, length(a)-2,length(a)-2)
mata[row(mata)-col(mata)==1] <- a[3:m]
matc <- matrix(0, length(c)-2, length(c)-2)
```

```
matc[row(matc)-col(matc) == -1] <- c[2:(m-1)]
A1 <- -mata + matb -  matc #Matriz A
lu_decomp <- lu(A1, scheme = "ijk")
L <- lu_decomp$L
U <- lu_decomp$U
matb[row(matb)-col(matb)==0] <- 1+b[2:m]
A2 <- mata + matb + matc
for (j in n:1){
  v[(2:m), j] <- solve(U, solve(L,A2%*%v[(2:m),j+1]))
}
approx(s,v[,1],c(0.80*k,0.90*k,k,1.1*k,1.2*k))
n
```

6.6 Anexo 6 – Código Método Crank-Nicolson *Call*

```
rm(list = ls())
#In Puts
k <- 6
r <- 0.09
sigma <- 0.10
vencimiento <- 9/12
smax <- 2*k #Se asume precio maximo 2*k
m <- 400 #Numero pasos precio

ds <- smax/m
dt <- 0.9/sigma^2/m^2 #Estabilidad
n <- floor(vencimiento/dt)+1 #Estabilidad
dt <- vencimiento/n #Estabilidad
v <- matrix(0, m+1, n+1)
s <- seq(0, smax, by = ds)
t <- seq(0,vencimiento, by = dt)
i <- 0:m
j <- 0:n
v[,n+1] <- pmax(s-k,0)
```

```
v[1,] <- 0
v[m+1,] <- smax-k*exp(-r*dt*(n-j))
a <- 0.25*dt*((sigma^2)*(i^2)-r*i)
b <- -dt*0.5*((sigma^2)*(i^2)+r)
c <- 0.25*dt*((sigma^2)*(i^2)+r*i)
matb <- matrix(0, length(b)-2, length(b)-2)
matb[row(matb)-col(matb)==0] <- 1-b[2:m]
mata <- matrix(0, length(a)-2,length(a)-2)
mata[row(mata)-col(mata)==1] <- a[3:m]
matc <- matrix(0, length(c)-2, length(c)-2)
matc[row(matc)-col(matc) == -1] <- c[2:(m-1)]
A1 <- -mata + matb -  matc #Matriz A
lu_decomp <- lu(A1, scheme = "ijk")
L <- lu_decomp$L
U <- lu_decomp$U
matb[row(matb)-col(matb)==0] <- 1+b[2:m]
A2 <- mata + matb + matc
for (j in n:1){
  v[(2:m), j] <- solve(U, solve(L,A2%*%v[(2:m),j+1]))
}
approx(s,v[,1],c(0.80*k,0.90*k,k,1.1*k,1.2*k))
n
```