Matemáticas y educación

Retos y cambios desde una perspectiva internacional

N. Gorgorió, J. Deulofeu, A. Bishop (coords.),
G. de Abreu, N. Balacheff, K. Clements,
T. Dreyfus, F. Goffree, P. Hilton, P. Nesher,
K. Ruthven

14 *Materiales para la innovación educativa*

GRAÓ

154

Director de la colección: Serafín Antúnez
Comité editorial: Maite Colén
Javier Fraile
Cinta Vidal

La colección MIE, Materiales para la Innovación Educativa, es una iniciativa conjunta del ICE de la Universitat de Barcelona y Editorial GRAÓ de IRIF, S.L.

Serie Matemáticas

C/ Francesc Tàrrega, 32-34. 08027 Barcelona
1ª edición: diciembre 2000
ISBN: 84-7827-246-1
D.L.: B-46.928-2000
Diseño: Xavier Aguiló
Impresión: Imprimeix
Impreso en España

Índice

Preámbulo: Clarificando la complejidad

Alan Bishop
Monash University. Victoria (Australia)

Seguramente enseñar matemáticas es algo sencillo, ¿o no lo es? Alguien, a quien llamamos profesor de matemáticas, utiliza un texto adecuado para enseñar matemáticas a un grupo de alumnos y alumnas a quienes la ley prescribe que las aprendan. Y la formación del profesorado es también tarea sencilla, basta con enseñar a los profesores y profesoras cómo enseñar matemáticas. Pero no es tan sencillo. Son muchas las variables que se combinan y que hacen que la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas sea algo mucho más complejo. La complejidad a la que nos enfrentamos en el momento actual representa un reto mucho mayor que el que vivieron los educadores en el pasado y puede generar sentimientos negativos y desasosiego entre el profesorado y sus formadores.

En particular, la nueva complejidad está en relación con:

- La diversidad del alumnado, de sus aspiraciones y de sus expectativas.
- Las presiones económicas sobre la educación, especialmente para que se forme a los jóvenes para el trabajo y para los estudios universitarios.
- Los aspectos políticos en torno al currículum de matemáticas y a la decisión de a quién va a corresponder la responsabilidad de establecerlo.
- Las presiones de otros campos de conocimiento para que las matemáticas sean más relevantes según sus necesidades.
- Las presiones de las nuevas tecnologías de la comunicación y de la información.
- La necesidad de relacionar la educación con el nuevo contexto educativo global.

El objetivo de este libro es considerar la complejidad actual con seriedad, sin trivializarla; tratar de clarificarla y analizarla de tal forma que permita al profesorado y a sus formadores afrontarla de forma positiva y constructiva.

Todos los autores y autoras que escriben en este libro no son únicamente educadores competentes y experimentados, sino también educadores que reconocen y abogan por el valor y la importancia de la investigación. Investigación y análisis son las características que hacen que este libro sea significativo en la situación presente, cambiante, desafiante y estimulante.

Es relativamente fácil escribir en términos exhortativos acerca de la complejidad de enseñar matemáticas: debería llevarse a cabo una determinada acción, deberían ignorarse ciertas ideas... Sin embargo, hoy en día, las recomendaciones raramente consiguen cambiar algo, ya que la politización en aumento de la educación hace sospechosas las sentencias de este estilo y porque en nuestras sociedades democráticas cualquiera puede utilizar el discurso exhortativo.

En este momento es necesario un análisis inteligente, y los autores y autoras de este libro pueden ofrecerlo: un análisis inteligente y unos consejos basados en sus conocimientos y en su comprensión de la investigación. Se están desarrollando numerosas investigaciones en el campo de la educación matemática alrededor de cuatro aspectos: las matemáticas y el currículum; el que aprende y el aprendizaje; el profesorado y la enseñanza; y el contexto cultural y social de la enseñanza de las matemáticas.

Todos los involucrados en actividades educativas deberían darse cuenta de que la investigación es la base sobre la que puede construirse una mejor enseñanza de las matemáticas y una mejor formación de los profesores y profesoras.

Sin embargo, éste no es un libro árido sobre investigación en el campo de la enseñanza de las matemáticas. Los capítulos están basados en ideas procedentes de la investigación, pero sus autores analizan la complejidad actual y distintos aspectos con relación a la enseñanza de las matemáticas y la formación del profesorado. La investigación permite encontrar modelos, pautas y similitudes en situaciones que, de otra forma, podrían interpretarse como dispares e inconexas. Permite además destacar los aspectos significativos sobre aquellos que lo son menos.

Al enfrentarse con seriedad a la complejidad, el objetivo de los autores no es dar respuestas ya listas, ya que es en los contextos reales donde el profesorado y sus formadores deberán crear sus propias soluciones. Por el contrario, pretenden clarificar la complejidad, revelando sus aspectos claves, y permitir que los profesores puedan manejarla de una forma positiva y constructiva.

En cierta forma, los procesos de análisis y de clarificación de la complejidad consiguen lo que Antoine de Saint Exupéry llamaría *amansarla*. En su magnífico libro *El principito* ensalza la importancia del hecho de amansar para conseguir amigos. Amansar la nueva complejidad para los profesores, de tal forma que puedan verla como algo favorable y no intimidatorio, es el primer paso para ayudarles, a ellos y a sus formadores, a hacer avanzar la educación matemática en el nuevo milenio. Este libro representa una importante contribución a este avance.

Perfil de los autores y autoras

Núria Gorgorió

Núria Gorgorió es en la actualidad profesora del Departamento de Didáctica de las Matemáticas y las Ciencias Experimentales en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universitat Autònoma de Barcelona. Inició su carrera profesional como profesora de matemáticas en un instituto de formación profesional. Es autora de distintas publicaciones en el campo de la educación matemática tanto relativas a investigación como a innovación en el aula. Participa también en los programas de formación permanente institucional. Es directora del programa de investigación *Multiculturalitat i matemàtiques: estudi per a un projecte cooperatiu*, patrocinado por la Fundació Propedagògic y del proyecto de investigación *Educació matemàtica i context*, patrocinado por la UAB.

Sus intereses en el campo de la educación matemática son los siguientes:

- Situaciones de aprendizaje matemático en la educación infantil.
- Procesos de visualización y la enseñanza-aprendizaje de la geometría.
- Transición entre contextos de aprendizaje matemático, educación formal y práctica matemática situada.
- La educación matemática en situaciones multiculturales.
- Gestión del conflicto cultural en el aula de matemáticas.
- Gestión del aula de matemáticas multilingüe.

Jordi Deulofeu

Jordi Deulofeu Piquet es profesor del Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universitat Autònoma de Barcelona. En el campo de la investigación en educación matemática se dedica a la didáctica de las funciones en secundaria y también a la resolución de problemas, tema que se enmarca dentro de la actividad matemática. Además, está especialmente interesado en la formación del profesorado y en la divulgación de las matemáticas para el público en general.

Alan Bishop

Alan Bishop es *professor* de la Facultad de Educación de la Monash University en Victoria, Australia. Participa en la dirección de numerosos proyectos de investigación y de innovación educativa, tanto nacionales como internacionales. Ha publicado numerosos artículos y libros en relación con la educación matemática, entre los que cabe destacar *Enculturación matemática*. Es editor consejero de la revista *Educational Studies in Mathematics* y editor de una prestigiosa serie de libros de educación matemática (*Mathematics Education Library* de la editorial Kluwer). Sus intereses actuales en el campo de la investigación son los siguientes:

- Aspectos sociales y culturales de la educación matemática.
- Educación matemática en contextos multilingües.
- Educación matemática y valores.
- Educación matemática y diversidad cultural.
- Transición entre distintos contextos de aprendizaje matemático.

Guida de Abreu

Guida de Abreu es *senior lecturer* de psicología en la Facultad de Estudios Sociales de la University of Luton, Gran Bretaña. Ha publicado numerosos artículos en relación con la psicología del aprendizaje de las matemáticas y ha participado en un gran número de congresos y reuniones internacionales. Sus intereses actuales en relación con la investigación en el campo del aprendizaje de las matemáticas son los siguientes:

- Relaciones entre los aspectos cognitivos, sociales y culturales del aprendizaje de las matemáticas.
- Relaciones entre las prácticas matemáticas en contextos cotidianos y el aprendizaje matemático en la escuela.
- Relación entre prácticas culturales, valores y aprendizaje matemático.
- El aprendizaje de las matemáticas como construcción de identidades sociales.
- La mediación de la cultura en el aprendizaje matemático.
- Transición entre distintos contextos de aprendizaje matemático.

Nicolas Balacheff

Nicolas Balacheff es director de investigación en el CNRS (Centre National de Recherche Scientifique) y desarrolla su actividad profesional en el Laboratoire des Structures Discrètes et de Didactique en el Instituto IMAG y en la Université Joseph Fourier de Grénoble, donde es el responsable del equipo EIAH (Environements Informatiques d'Apprentissage Humain). Actualmente dirige el proyecto *TéléCabri* para el aprendizaje a distancia de las matemáticas con interacción profesor-alumno, en el contexto del proyecto IMAG *Cabri-géomètre*. Sus intereses actuales en relación con la investigación en educación matemática giran básicamente alrededor de dos aspectos: estudio de los procesos de demostración de los alumnos en el marco de la resolución de problemas, problemas de enseñanza de la demostración, y problemas de modelización informática y cognitiva de los procesos didácticos para el desarrollo de entornos informáticos para el aprendizaje de las matemáticas.

Ken Clements

Ken Clements es en la actualidad *professor* del Institute of Education de la University of Brunei Darussalam, Brunei. Inició su carrera profesional como profesor de secundaria y posteriormente fue profesor en distintas universidades australianas, de donde es originario. Es miembro del consejo editorial de varias revistas de educación matemática, entre las cuales cabe citar *Educational Studies in Mathematics*. Ha sido consultor de la UNESCO para temas de educación, ha trabajado como responsable de proyectos de investigación y desarrollo en distintos países de Asia y ha participado en numerosos congresos internacionales. Sus intereses actuales en el campo de la educación matemática tienen un fuerte componente sociocultural, preocupándose por temas como la adecuación de la enseñanza de las matemáticas y de la investigación en educación matemática a los cambios sociales, a las situaciones multilingües, a los contextos multiculturales y a las situaciones de desventaja social. Ha trabajado también en aspectos relacionados con la visualización, el lenguaje, la evaluación, las dificultades de aprendizaje y la formación del profesorado.

Tommy Dreyfus

Tommy Dreyfus es *professor* y consultor de investigación en educación matemática en el Departamento de Enseñanza de las Ciencias del Weizmann Institute of Science en Rehovot, Israel. Es autor de numerosas publicaciones y de *software* educativo para la enseñanza de las matemáticas y ha participado en múltiples congresos internacionales de educación matemática. Es miembro del consejo editorial de las revistas *Educational Studies in Mathematics* y *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Algunos de sus intereses en el campo de la investigación y la innovación en educación matemática son los siguientes:

- Visualización espacial y educación matemática.
- Pensamiento matemático avanzado.
- Estrategias visuales y algebraicas en la resolución de problemas.
- Concepto, imagen y definición de función.
- La demostración en matemáticas.
- Desarrollo didáctico de entornos de aprendizaje informático.
- Entornos informáticos como soporte a la resolución de problemas.

Fred Goffree

Fred Goffree fue, hasta su jubilación, profesor de la Universitait Utrecht y del Freudenthal Instituut. Su actividad profesional se desarrolla en el ámbito de la formación de profesores de matemáticas de educación primaria y del desarrollo del currículum. Entre sus cargos recientes cabe destacar su papel relevante en el IOWO (Instituto Holandés para el Desarrollo de la Educación Matemática), en la organización de los cinco últimos ICME (International Conference for Mathematics Education) y en los consejos editoriales de las revistas *Euclides* y *Educational Studies in Mathematics*, además de su participación en el proyecto UNESCO *Mathematics and Science for Primary Teacher Education* (Matemáticas y Ciencias para la Formación del Profesorado de Primaria) y su participación en el proyecto MILE (creación de entornos multimedia de aprendizaje interactivo para la formación del profesorado de primaria). Su experiencia en el campo de la educación matemática gira en torno a:

- La educación matemática realista en Holanda.
- La formación de profesorado en el ámbito de la educación matemática realista.
- El desarrollo de materiales para la formación de profesorado de primaria.

Peter Hilton

Peter Hilton es uno de los matemáticos más importantes de la segunda mitad del siglo XX, con el reconocimiento de doctor *honoris causa*, por tres universidades: Michigan University, Estados Unidos (1977), Memorial University of Newfoundland, Canadá (1983) y por la Universitat Autònoma de Barcelona (1989). En la actualidad es *distinguished professor* de matemáticas en la State University of New York en Binghamton, Estados Unidos. Su enorme potencial académico se refleja en cerca de 400 publicaciones, tanto libros como artículos. Peter Hilton, además de ser un destacado matemático en el dominio de la topología, ha tenido un papel muy relevante en el campo de la educación matemática. En particular, entre sus publicaciones, se cuentan alrededor de 90 relacionadas con la educación matemática; además ha sido editor de la prestigiosa revista *Educational Studies in Mathematics* y presidente del United States Commission on Mathematical Instruction, del National Research Council.

Pearla Nesher

Pearla Nesher es *full professor* de psicología cognitiva y de enseñanza de las matemáticas en la Facultad de Educación de la University of Haifa, Israel. Entre sus cargos recientes hay que destacar el de directora general de investigaciones científicas en el Ministerio de Educación de Israel y miembro del Consejo Nacional de Investigación y Desarrollo. Ha participado activamente en la investigación, desarrollo e implementación de materiales curriculares y proyectos educativos en el área de las matemáticas y en programas de innovación en el uso de entornos informáticos. Ha publicado numerosos artículos y libros relativos a los procesos cognitivos en la resolución de problemas de enunciado verbal en edades tempranas y al análisis de la relación entre el lenguaje natural y el lenguaje matemático.

Sus intereses actuales en el campo de la investigación giran en torno a los aspectos cognitivos del aprendizaje de la aritmética, a los aspectos lingüísticos de la resolución de problemas y al análisis de los sistemas educativos y a la implementación de métodos innovadores en las escuelas.

Kenneth Ruthven

Kenneth Ruthven inició su carrera profesional como profesor de matemáticas e informática en diferentes prestigiosas *high school* en Gran Bretaña. En la actualidad es *lecturer in education* en la Cambridge University, en la que es responsable del programa de formación inicial del profesorado y del programa de doctorado en educación. Es editor jefe de la prestigiosa revista de investigación en educación matemática *Educational Studies in Mathematics*, ha publicado numerosos libros y artículos relacionados tanto con la investigación como con la innovación en el aula y es patrón del *School Mathematics Project* (SMP). Sus intereses actuales en relación con la educación matemática son la evaluación, el desarrollo curricular y los aspectos relacionados con la tecnología, en particular la calculadora, y la enseñanza de las matemáticas.

Introducción

1

Planteamientos para el cambio

Jordi Deulofeu
Núria Gorgorió
Universitat Autònoma de Barcelona (España)

Presentación

La enseñanza de las matemáticas que se desarrolla en las aulas, al igual que ocurre con la de cualquier otra disciplina, depende de un gran número de factores. Desde la formulación de un currículum general hasta la enseñanza efectiva de cada profesor o profesora se han tomado un gran número de decisiones y se han realizado múltiples actuaciones a distintos niveles. Las decisiones corresponden a la sociedad y a las diversas instituciones y personas implicadas en el proceso. Decisiones y actuaciones están enmarcadas en un contexto cultural, y tienen lugar a nivel social, institucional y pedagógico. Todas y cada una de estas decisiones y actuaciones tienen influencia en el resultado final del aprendizaje del alumnado, que viene también determinado por sus características individuales, su contexto sociocultural y sus expectativas y creencias acerca de las matemáticas.

En el año 2000, decretado por la UNESCO, a petición de la UMI (Unión Matemática Internacional), *Año Mundial de las Matemáticas*, el presente libro pretende contribuir a la reflexión sobre la enseñanza de las matemáticas en nuestro país a través de un conjunto de aportaciones diversas, tanto por su ámbito como por su procedencia. Las contribuciones de los distintos autores inciden de forma diversa y con intensidad diferente en cada uno de los niveles anteriormente mencionados: cultural, social, institucional, pedagógico e individual. La riqueza y diversidad de opiniones y puntos de vista de los autores contribuye a la finalidad común de aportar ideas, interrogantes y posibles soluciones a la problemática de la educación matemática. El objetivo del libro es conducir al lector a reflexionar sobre la situación actual de la educación matemática en nuestro país, a la vez que anticipa una visión de los retos planteados para el futuro, establecida desde una óptica internacional gracias a las distintas procedencias de los autores de los diferentes capítulos. Todos y cada uno de los autores tiene, como experto en el campo de la educación matemática, sus experiencias, creencias y expectativas que se reflejan en los temas abordados y en sus planteamientos. Este hecho permitirá al lector contrastar puntos de vista a menudo complementarios y, en algunos casos, también opuestos o al menos controvertidos. Es intención de este libro, y de sus editores, que la controversia y el contraste contribuyan a la reflexión.

El núcleo principal de esta publicación tiene sus orígenes en el primer trimestre del año 1998, durante el cual se desarrolló el proyecto TIEM[1] (Trimestre Intensiu en Educació Matemàtica) en el Centre de Recerca Matemàtica de l'Institut d'Estudis Catalans. Con el apoyo de ésta y otras instituciones[2], organizado desde el Departament de Didàctica de les Matemàtiques i les Ciències Experimentals de la Universitat Autònoma de Barcelona, el proyecto TIEM tenía como objetivo facilitar un marco de reflexión para contribuir a la clarificación de los problemas planteados en relación con la situación presente y futura de la educación matemática en nuestro país, o cuanto menos, a la discusión de ideas para su profundización. Centrado en la enseñanza de las matemáticas en los distintos niveles educativos, los objetivos del proyecto eran impulsar la investigación en educación matemática en nuestro país y promover actividades relacionadas con la innovación en las aulas.

Invitado por el Centre de Recerca Matemàtica, un importante grupo, tanto cuantitativa como cualitativamente, de expertos extranjeros (provenientes de distintos países, entre ellos Australia, Francia, Holanda, Gran Bretaña, Israel y Estados Unidos) participó en el proyecto con la finalidad de compartir con docentes e investigadores locales sus ideas y su experiencia. Con el objetivo de divulgar sus ideas en relación con la innovación en el aula y promover la reflexión en torno a la situación presente y futura de la educación matemática, se desarrolló, entre otras muchas actividades, un ciclo de conferencias plenarias.

En el marco del año 2000, *Año Mundial de las Matemáticas*, creemos que las aportaciones de los profesores y profesoras invitados al proyecto TIEM pueden contribuir a la reflexión y al debate necesarios para que se produzcan cambios en la educación matemática de nuestros jóvenes. Desde la perspectiva de los cambios necesarios para que la educación matemática responda a las necesidades sociales, el presente libro recoge una selección de las conferencias plenarias impartidas durante el proyecto TIEM, junto con una revisión de la situación actual de la educación matemática en nuestro país y una visión de futuro en la que se analizan los retos planteados para el cambio y se recogen las reflexiones de los distintos seminarios desarrollados durante el TIEM.

---

1. Un comité organizador, constituido por los profesores Jordi Deulofeu, Núria Gorgorió y Antoni Vila, bajo la dirección de los profesores Alan Bishop y Núria Gorgorió, fue el responsable del diseño, organización y desarrollo de este evento.
2. Entre las instituciones que apoyaron el proyecto TIEM, además del Centre de Recerca Matemàtica, Institut d'Estudis Catalans, se cuentan la Universitat Autònoma de Barcelona, los Institut de Ciències de l'Educació de la Universitat de Barcelona, Autònoma de Barcelona, Rovira i Virgili, de Girona y de Lleida, el Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya y el Ministerio de Educación y Cultura.

La educación matemática en nuestro país: estado de la cuestión

No pretendemos hacer una historia detallada de la educación matemática en nuestro país sino, simplemente, exponer unas breves consideraciones que nos permitan tener un conocimiento general sobre la situación actual para situar el contexto en el cual se desarrolló el TIEM y enmarcar el presente libro. La discusión global de la situación deberá, por una parte, permitir que se comprendan mejor los objetivos del proyecto y, en particular, la función del ciclo de conferencias abierto a todo el profesorado que constituye el núcleo central de esta publicación. Por otra, permitirá establecer el contexto para el debate social centrado en la discusión de los cambios necesarios en la educación matemática en el marco de una sociedad cuyos planteamientos democráticos exigen que los conocimientos matemáticos básicos puedan llegar a todos nuestros jóvenes.

Una breve mirada al pasado

Empezaremos con unas breves consideraciones sobre la educación matemática en nuestro país desde los años setenta hasta principios de los noventa, es decir, entre la promulgación de la Ley General de Educación que introdujo la enseñanza general básica y la actual Ley de Reforma del Sistema Educativo[3].

Ante cualquier reforma del sistema educativo debemos plantearnos, en primer lugar, cuáles son los aspectos que la hacen necesaria. A nuestro entender, a finales de los años ochenta, hubo bastante unanimidad en considerar la necesidad de una reforma de la educación en general y de los currículos de las distintas disciplinas en particular. Los cambios sociales y políticos vividos en nuestro país eran una causa más que suficiente para este cambio. Además, los avances de otros países de nuestro entorno, por un lado, y la situación de la escuela en nuestro país, por otro, reforzaban todavía más la necesidad de este cambio.

El sistema educativo vigente hasta entonces provenía de una ley de principios de los setenta, todavía en tiempos de la dictadura. Esta ley, que en su momento planteó algunos aspectos positivos, tuvo una implantación muy discutible debido, entre otros aspectos, al retraso de nuestro país en materia educativa, especialmente en el campo de la escuela pública, y a la falta de recursos dedicados a la educación. Así, mientras una parte del sistema se consolidó, aunque de forma discutible (enseñanza general básica, bachillerato unificado polivalente, curso de orientación universitaria y universidad), otras, especialmente la formación profesional, quedaron claramente relegadas.

En relación con la formación inicial del profesorado, la ley de 1970 convirtió los estudios de magisterio en estudios universitarios (diplomaturas de tres cursos que capacitaban para enseñar en la EGB). Entre estas diplomaturas se contemplaba una es-

3. Estas notas se han extraído de un documento interno del TIEM, elaborado para proporcionar información a los profesores extranjeros participantes en el proyecto, sobre el sistema educativo y sobre la situación actual de la enseñanza de las matemáticas en nuestro país.

pecialidad en ciencias y matemáticas, especialmente dirigida a aquellos maestros y maestras que trabajarían en el ciclo superior de la EGB (11-14 años). Por otro lado, el profesorado de secundaria se formaba con una licenciatura y un curso complementario, CAP (Curso de Aptitud Pedagógica), todavía vigente, impartido por los Institutos de Ciencias de la Educación de las diferentes universidades.

Sin embargo, entendemos que no puede hablarse de formación permanente del profesorado, por lo menos de manera organizada desde la administración. Existen interesantes ejemplos, a los que nos referiremos más adelante, pero todos ellos surgen de los propios profesionales de la enseñanza y de los problemas a los que debían enfrentarse para el desarrollo de su actividad profesional. No es hasta la mitad de los ochenta que en Cataluña se inician los primeros planes de formación, entre los que cabría destacar los llamados FOPI (Formación Permanente Institucional), restringidos, en general, a la entonces vigente enseñanza general básica, así como el inicio de algunos planes de formación organizados por entidades locales, que también incluyeron una parte de la educación secundaria.

En relación con la enseñanza de las matemáticas y, en concreto, con los currículos para las diferentes etapas, la reforma de los años setenta estuvo claramente marcada por la introducción de la llamada matemática moderna que tuvo un fuerte impacto tanto en la educación primaria como en la secundaria, especialmente en el tramo 11-14 años, el ciclo superior de la EGB, aunque también en los otros niveles. En síntesis, en relación con los contenidos, estos currículos redujeron drásticamente los temas relacionados con la geometría, introdujeron el lenguaje conjuntista, así como el tratamiento de las estructuras y la construcción formal de los conjuntos numéricos, y también trataron la introducción de las funciones a partir del concepto de correspondencia y de ejemplos poco relevantes, en niveles bajos, y de manera alejada de los problemas que dan significado a este concepto.

La parte correspondiente al aprendizaje de algoritmos de cálculo, así como la introducción al álgebra, siguió desarrollándose de manera parecida a como se hacía anteriormente, a pesar de los intentos por racionalizar estos contenidos, con la consiguiente discusión sobre el nivel de comprensión necesario para entender tanto el significado de la operación como el funcionamiento del propio algoritmo. Por otra parte, otros temas como la estadística, la probabilidad o el tratamiento gráfico de las funciones quedaban también relegados. En los aspectos de geometría, aunque se pretendía relacionar los conceptos con situaciones reales que los hiciesen significativos, difícilmente se lograba. Ante la dificultad de enseñar conceptos geométricos abstractos, los docentes tenían como alternativas la reducción de la geometría a los aspectos de cuantificación (cálculo de superficies y volúmenes o medida de ángulos) o relegar los temas de geometría, perpetuando el círculo vicioso. Difícilmente se veía la geometría como instrumento para la visualización y la representación, tanto del mundo real de tres dimensiones como de conceptos matemáticos de origen no visual. La resolución de problemas era considerada como una cuestión menor, reducida a los problemas estándar y trabajada como una simple aplicación de las técnicas enseñadas (ya sea las aritméticas o las algebraicas). Básicamente, se pretendía que el alumnado clasificara el problema y posteriormente aplicara la técnica de resolución correspondiente.

En líneas generales, y a pesar de algunas buenas intenciones iniciales que pretendían introducir elementos de racionalidad, por encima de un aprendizaje fundamentalmente memorístico, la enseñanza de las matemáticas siguió un modelo tradicional basado en la exposición y ejemplificación de los conceptos y las técnicas por parte del profesorado y una práctica, a menudo rutinaria, por parte de los alumnos y alumnas que consistía en la realización de ejercicios y problemas estándar. La implementación de estos currículos se hizo, en la inmensa mayoría de los casos (con unas pocas excepciones cualitativamente significativas) siguiendo libros de texto que fueron los auténticos intérpretes de los currículos y que, en muchos casos, incrementaron los niveles de formalismo, más allá de lo que indicaban los propios documentos oficiales.

Los intentos por incrementar la actividad y fomentar la autonomía del alumnado, a partir de la realización de fichas de trabajo individual, no tuvieron, a nuestro entender, el éxito que se buscaba, por diversas razones, entre las cuales cabría destacar la falta de motivación y de comprensión real por parte de los alumnos frente a gran parte de las actividades propuestas, unos niveles de rigor y de abstracción demasiado elevados y, en general, un exceso de formalización, así como una falta total de conexión con la realidad. Esta situación llevó a la mayoría de los alumnos a buscar técnicas estandarizadas para resolver las fichas de trabajo propuestas, que se alejaban de los procesos de comprensión y que no facilitaban una reflexión sobre las acciones realizadas.

Este panorama general, que caracterizó la década de los setenta y que en muchos casos se extendió durante la primera mitad de los ochenta, tuvo, como ya se ha mencionado, algunas excepciones significativas, especialmente en relación con la insatisfacción que provocaba la situación de aquellos tiempos en algunos profesores y profesoras de matemáticas de distintos niveles y la necesidad que tenían de ensayar cambios radicales en las formas de trabajar comúnmente establecidas. Coincidiendo con la llegada de la democracia, surgieron movimientos asociativos de maestros que trataban de cambiar las cosas; en particular, en el campo de la enseñanza de las matemáticas, a mediados de los setenta aparecieron algunos grupos de profesores, los cuales, insatisfechos con los materiales existentes y atentos a lo que, de forma parecida, estaba sucediendo en otros países (Italia, Inglaterra, Holanda y Canadá, entre otros) llevaron a cabo una tarea importante de elaboración de nuevos materiales para los alumnos y de difusión de sus ideas a través de seminarios de profesores, de cursos en las escuelas de verano y de artículos en revistas generales sobre educación.

Entre los grupos más activos destacaron en aquellos momentos el Grup Zero de Valencia, el Grup Zero de Barcelona, Almosta, Aresta, Azarquiel, Granada-Maths, Matema, Periódica Pura, Puig Adam y el Grupo Beta entre otros. Nos atrevemos a decir que buena parte de la formación permanente del profesorado de matemáticas en la década de los ochenta estuvo relacionada con el trabajo de estos grupos, al que cabría añadir el esfuerzo dedicado por otros profesionales a un nivel más individual.

Durante este periodo de tiempo se inició la constitución de sociedades de profesores de matemáticas que tenían la finalidad de aglutinar esfuerzos, recursos humanos y económicos, promover la formación permanente del profesorado y establecer relaciones con profesores de matemáticas de otros países. Algunas de las pioneras fueron la *Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas Isaac Newton*, la *Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas Pedro Ciruelo* y la *Sociedad Andaluza de Profesores de Matemáticas Thales*. Las nuevas asociaciones, distribuidas a lo largo de toda la geografía española, toman la iniciativa convocando numerosos encuentros y jornadas sobre la educación matemática. En 1987, se inicia un proceso de federación de las distintas asociaciones que culmina en la constitución de la *Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas* (FESPM) que agrupa actualmente a 14 sociedades de profesores distribuidas en las distintas comunidades autónomas.

Hacia la reforma y la situación actual

A finales de los ochenta, la administración, tanto a nivel estatal como de las comunidades autónomas con competencias en educación, inició un proceso para realizar una amplia reforma del sistema educativo, que desembocó en la promulgación de la LOGSE (Ley de Ordenación General del Sistema Educativo). Esta reforma supone, en primer lugar, cambios estructurales importantes en las etapas del sistema educativo: educación infantil, de 3-6 años con carácter general; educación primaria, de 6 a12 años y educación secundaria obligatoria, de 12 a 16 años, con carácter obligatorio; educación secundaria postobligatoria, de 16 a 18 años, con dos ramas, el bachillerato —estructurado en diversas modalidades, entre ellas el bachillerato científico y tecnológico—, y la formación profesional.

Además, la reforma implantada supone también cambios curriculares en profundidad en cada una de las áreas en que se estructura la educación de las distintas etapas educativas.

Podemos afirmar que la necesidad de la reforma era ampliamente compartida, y que las expectativas iniciales eran muchas; también es cierto que, a nivel general y a pesar de algunas opiniones discrepantes, el nuevo sistema es teóricamente mucho más adecuado a la realidad actual. Sin embargo, la lentitud en su implantación, argumentada inicialmente en términos de racionalidad, pero debida, a nuestro entender, en gran parte a problemas económicos y logísticos, la falta de recursos necesarios y la insuficiente e inadecuada dedicación a la formación del profesorado en activo que debería ser el auténtico artífice de la reforma, han hecho que el entusiasmo inicial de buena parte del profesorado se haya reducido mucho, hasta el punto que, para muchos, los problemas actuales pueden llegar a superar las expectativas creadas, aumentando de manera alarmante las dificultades para que la implantación de la reforma pueda llegar a tener éxito y se eviten errores ya cometidos en el pasado.

Algunos de los cambios más significativos de la reforma actual se centran en la educación secundaria, pero también en la modificación del currículum en todas las etapas. Ambos aspectos afectan directamente a la enseñanza de las matemáticas. Así, por ejemplo, en la educación secundaria obligatoria, el área de matemáticas tiene una parte común para todos los alumnos, cuyo cómputo global en número de horas supone una reducción significativa respecto a la situación anterior, y una parte optativa que debería servir para atender, en parte, la diversidad de intereses y de capacidades de los alumnos y que es cuantitativamente más importante en el segundo ciclo. Esta diferenciación, que es nueva en nuestro sistema, obliga a tomar un conjunto de decisiones de gran importancia, tanto para la parte llamada común como para la opcional, que permitan asegurar una coherencia del currículum cursado por cada alumno. Se plantean interrogantes como los siguientes: ¿Cómo viven los alumnos y alumnas estos dos tipos de cursos de matemáticas que reciben? ¿Existe una coherencia y una continuidad entre ellos? ¿La metodología utilizada, los niveles de exigencia y los criterios de evaluación siguen unas pautas coherentes entre sí y de acuerdo con el espíritu de la reforma? La respuesta negativa a alguna de estas cuestiones podría plantear un grave problema para el alumnado y distorsionar ciertos planteamientos de la reforma.

En relación con el currículum oficial cabe destacar, por una parte, su estructura, común a todas las áreas, que contempla para cada etapa unos objetivos generales globales y luego, para cada área, unos objetivos generales del área, unos objetivos terminales de etapa, unos contenidos, organizados en contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales, y unas orientaciones didácticas. El carácter genérico de la normativa oficial, que no entra a diseñar los contenidos a impartir en cada nivel, permite a cada centro la organización de su currículum adaptándolo a las características de su propia realidad. Este aspecto, a priori muy interesante, constituye al mismo tiempo uno de los problemas principales de la reforma actual, puesto que, para poder realizar esta tarea de manera satisfactoria, es necesario un trabajo coordinado de todos los profesores de un centro y, al mismo tiempo, la posibilidad de recibir una formación permanente adecuada.

El punto anterior nos lleva al tema de la formación permanente del profesorado en activo. Los cursos de carácter general realizados por la administración en relación con la reforma representan una primera fase de la formación necesaria, pero resultan claramente insuficientes. Es fundamental la oferta de actividades de formación permanente más específicas que ayuden al profesorado de los centros en todas aquellas tareas que deberá desarrollar y que van desde la interpretación del currículum del área hasta los cambios metodológicos necesarios para su implantación real en las aulas de cada centro. El conjunto de decisiones que hay que tomar es muy elevado y su importancia para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje es decisiva. La limitación de la formación permanente genera el riesgo de desvirtuar las posibilidades de adecuación del currículum a las características de cada centro ya que en la práctica podría suceder que, una vez más, los principales intérpretes del currículum oficial fueran los libros de texto .

Con referencia a aspectos concretos de las matemáticas, debemos destacar que el nuevo currículum introduce elementos innovadores positivos. Algunos ejemplos, de carácter diverso, los encontramos en el tratamiento del cálculo en la educación primaria, donde se pretende encontrar un equilibrio entre las diferentes representaciones del número, trabajando el cálculo mental, escrito o con la calculadora; se especifica que en ocasiones lo importante es hallar resultados aproximados y se destaca también la importancia de la estimación; la reintroducción de la geometría, tanto en primaria como en secundaria, con un carácter constructivo y en el cual la visualización ocupa un lugar importante; el tratamiento de las funciones en la secundaria obligatoria, priorizando el lenguaje gráfico y analizando las características de las funciones de manera cualitativa, y no sólo cuantitativa y analítica como hasta ahora; la introducción de la estadística y la probabilidad, tanto en primaria como en secundaria, así como la consideración de la importancia de la resolución de problemas, aunque de manera demasiado genérica y sin especificar suficientemente cuál debería ser el enfoque que debería darse a esta actividad.

Al lado de lo positivo se mantienen viejas ideas, que quizá hubiese sido necesario revisar. Entre ellas destacaríamos, en primer lugar, una interpretación de los procedimientos excesivamente decantada hacia la adquisición de técnicas y algoritmos, mucho más que hacia las estrategias, o hacia algunos de aquellos procesos que caracterizan las matemáticas, como probar —en el sentido de experimentar—, estimar, conjeturar, particularizar, generalizar, inducir —en el sentido de las ciencias experimentales— o deducir, para citar algunos que consideramos relevantes. Así mismo, se mantiene el énfasis en determinados conceptos tradicionales, como por ejemplo, el tratamiento de las fracciones, a un mismo nivel o quizás superior que el dado a los números decimales.

Por otra parte, la reforma pretende introducir cambios en la implementación del currículum al referirse a determinados aspectos del proceso de enseñanza-aprendizaje, en particular a la evaluación y la atención a la diversidad, pero también al papel del profesor en general, como mediador del proceso de aprendizaje y no como transmisor del conocimiento. Ya hemos comentado que, por primera vez, se presenta un currículum no igual para todos durante la educación secundaria obligatoria. No obstante, también en este aspecto, los cambios principales deben darse en el ámbito de los centros, es decir, deben recaer en el conjunto del profesorado y, dado que se plantean cambios en profundidad, una vez más la formación en cada uno de estos aspectos resultará fundamental. Por todo ello, queremos destacar que además de los esfuerzos que se realizan en el campo de la formación permanente al tratar aspectos relacionados con los cambios relativos a los contenidos y a la organización del currículum, es preciso incidir en las teorías sobre el aprendizaje y su posible aplicación a la enseñanza, como vía para capacitar a los docentes para abordar estos temas en su realidad cotidiana.

Hasta aquí hemos tratado de dar una visión teórica de algunos de los cambios del sistema educativo en general y de su repercusión en la enseñanza de las matemáticas. Pero, ¿qué es realmente lo que sucede en los distintos centros educativos y cómo está incidiendo en ellos la reforma?, ¿cómo está viviendo el conjunto del profesorado el proceso actual? Es todavía prematuro responder a estas cuestiones, por falta de tiempo y de datos globales, pero podemos avanzar algunas consideraciones, necesariamente subjetivas.

En el ámbito de la escuela primaria, los cambios estructurales han sido poco importantes y en cualquier caso han simplificado la situación, al finalizar esta etapa a los 12 años, por lo que es razonable pensar que el nuevo currículum se asimilará poco a poco y se podrá alcanzar una mejora del proceso de enseñanza-aprendizaje a medio plazo. Pensamos que uno de los problemas en esta etapa es la falta de especialistas de las distintas áreas, entre ellas la de matemáticas, debido tanto al paso de algunos maestros con experiencia en la materia al primer ciclo de la secundaria como a la nueva formación inicial de los maestros, que no contempla la especialización en matemáticas. Otro problema, ya mencionado, es la falta de una formación permanente que permita que los cambios introducidos en el ámbito del currículum incidan realmente en las aulas. Desgraciadamente, la información de la que disponemos a través de nuestra participación en tareas de formación del profesorado no nos permite afirmar que los cambios metodológicos necesarios para una correcta implementación del currículum se estén produciendo de manera generalizada, puesto que persisten en una parte significativa del profesorado prácticas didácticas que un enfoque actual debería considerar como totalmente obsoletas.

En el ámbito de la enseñanza secundaria la problemática es más compleja, debido a que en esta etapa los cambios han sido más profundos. El antiguo profesorado, especialmente el que impartía el BUP, debe adaptarse a unas condiciones diferentes; por un lado, debe enseñar a alumnos más jóvenes, a partir de los 12 años, y por otro, ahora tiene a todos los alumnos, incluidos aquellos que antes abandonaban la escolarización al terminar la enseñanza general básica. Además, en el caso de las matemáticas, se trata de una área donde ya en el sistema anterior se daba un índice de fracaso elevado y con la reforma, el número de horas dedicadas a esta materia se ha reducido. Este conjunto de circunstancias puede dificultar una buena implementación del nuevo currículum y dar la sensación de que lo único que va a suceder es que el nivel de los contenidos conceptuales va a disminuir drásticamente respecto a la situación anterior, interpretación que puede comprometer aún más el éxito de la reforma.

Por otra parte, en relación con la formación inicial del profesorado, debemos decir que los cambios de los últimos tiempos son claramente insatisfactorios con relación a la enseñanza de las matemáticas. A nivel de la educación primaria, resulta bastante claro que unos estudios universitarios de tres años como los actuales difícilmente pueden capacitar para enseñar las cinco áreas del currículum (matemáticas, lengua, ciencias, ciencias sociales y plástica) que deben impartir los llamados *maestros generalistas*, que son aquellos que se ocupan de enseñar matemáticas, entre otras materias, a los alumnos de 6 a 12 años. Por otra parte, los requisitos para enseñar en la educación secundaria no han variado, si bien parece que el nuevo curso de calificación pedagógica va a implantarse de manera experimental aunque, de momento, coexistirá con el CAP (Curso de Adaptación Pedagógica).

Ya hemos comentado anteriormente los déficits de la formación permanente y la necesidad de que la administración cree estructuras que permitan su desarrollo en cada una de las áreas, algo que hasta el momento presente no se ha hecho con suficiente profundidad. En cambio, un aspecto que nos parece altamente positivo en lo que respecta a la organización del propio profesorado es el ya mencionado desarrollo que han experimentado en la última década las asociaciones de profesores de matemáticas. Estas asociaciones llevan a cabo la gestión y organización de un importante número de actividades, que van desde la publicación de boletines y revistas sobre la enseñanza de las matemáticas a la organización periódica de conferencias, congresos y jornadas, entre ellas las JAEM (Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas), pasando por la celebración de las olimpiadas matemáticas y otros concursos similares dirigidos al alumnado de distintos niveles. A pesar de que se trata de un movimiento de dimensiones todavía reducidas, el conjunto de actividades realizadas constituyen, en estos momentos, una referencia importante en relación con la innovación dentro de la enseñanza de las matemáticas en nuestro país.

Finalmente debemos referirnos a la investigación en didáctica de las matemáticas. En el sentido formal del término hay que decir que ésta tiene una historia bastante corta en nuestro país. En efecto, la consideración de la didáctica de las matemáticas como área de conocimiento universitario tiene poco más de diez años. No obstante, en este corto periodo de tiempo se ha avanzado mucho, especialmente con la puesta en marcha de programas de doctorado específicos y la realización de trabajos de investigación, tanto tesinas o trabajos de investigación para la obtención del título de Master, como, más recientemente, con la presentación de las primeras tesis de doctorado, todas ellas leídas en los años noventa. A pesar de esta situación, nuestros investigadores han empezado a participar de manera significativa tanto en distintas publicaciones de carácter internacional como en los principales eventos internacionales, algunos de los cuales se han realizado en España (*PME20, Conference of the International Study Group for the Psychology of Mathematics Education, en Valencia; ICME8, International Conference on Mathematics Education*, en Sevilla, en 1996 y *1ISGEm, Conference of the International Study Group on Ethnomathematics*, en Granada en 1998).

Para terminar este apartado, queremos dejar patente que son muchos los profesionales capacitados para llevar adelante la reforma, con una gran dedicación e interés por la labor docente, y convencidos de la posibilidad real de proporcionar a los futuros adultos las bases matemáticas necesarias para desenvolverse con éxito como individuos y como profesionales. Sin embargo, el éxito de la reforma no puede depender únicamente de intenciones y acciones individuales. Corresponde pues, a las distintas instituciones educativas analizar las demandas sociales reales en relación con la educación, en general, y con la educación matemática en particular; establecer políticas educativas bien fundamentadas y coherentes para atenderlas, y poner los medios para que éstas se desarrollen de manera efectiva. De no ser así, estamos convencidos de que existe el riesgo de desaprovechar la oportunidad de proporcionar una buena formación matemática a nuestros alumnos, de generar desánimo entre los profesionales de la educación y de desatender las necesidades que la sociedad actual demanda.

Planteamientos para el cambio

En los siguientes capítulos de este libro se abordan algunos de los problemas, cuestiones y retos a los que debemos y deberemos enfrentarnos con relación a la enseñanza de las matemáticas en los distintos niveles educativos. La perspectiva internacional que nos ofrecen sus autores permite beneficiarnos de experiencias vividas en otros contextos. Este hecho, junto al conocimiento que los distintos autores poseen de nuestro contexto educativo, permite tener una visión general sobre una situación particular. El objetivo de este libro es el de contribuir a la clarificación de los problemas planteados en relación con la educación matemática de los jóvenes, en el momento actual y con una visión de futuro, o cuanto menos, a la discusión de ideas para su profundización.

Para posibilitar una contextualización de cada una de las aportaciones y facilitar, de este modo, una interpretación de las mismas que pueda ser útil para una reflexión en nuestro ámbito se han estructurado los capítulos en tres bloques, cada uno de los cuales aborda la problemática desde una óptica distinta. Los criterios utilizados para su organización son los mismos que condujeron a la selección de las conferencias y van desde el análisis de las cuestiones relacionadas con el establecimiento del currículum intencional, contextualizado desde el punto de vista social, hasta el análisis del currículum efectivamente aprendido, contextualizado a nivel individual, pasando por el análisis del currículum implementado desde la perspectiva de la disciplina.

En el primer bloque, «Currículum intencional desde una perspectiva social» (pp. 33-90) Alan Bishop, Ken Clements y Peter Hilton presentan la problemática centrada en el momento del diseño del currículum antes de su implementación. Estos tres autores abordan aspectos como las razones para una reforma de la enseñanza de las matemáticas o la necesidad de que las matemáticas formen realmente a todos los ciudadanos. Sin embargo, las propuestas son distintas, como también lo es el énfasis de cada uno de los autores en determinados grupos sociales. De esta forma, mientras Bishop plantea cómo formar a todos los alumnos y alumnas, sea cual sea su realidad social o futuro profesional, Clements centra especialmente su atención en aquellos alumnos excluidos, de una forma u otra, de los grupos con éxito y Hilton manifiesta su preocupación por garantizar la formación de especialistas o expertos y, en particular, por la formación del profesorado.

En el capítulo 2, «Enseñanza de las matemáticas: ¿cómo beneficiar a todos los alumnos?» (pp. 35-56), el profesor Bishop, parte de que los intentos para aproximar las matemáticas a todos los alumnos no han ido acompañados de cambios importantes ni en el currículum ni en los enfoques didácticos. A continuación, revisa dos de las tendencias en el campo de la educación matemática que pueden contribuir a que las ideas matemáticas sean más comprensibles para todos los alumnos: la etnomatemática y la alfabetización numérica. Este autor considera de gran actualidad e interés las investigaciones en etnomatemática, en particular, las centradas en el estudio de las actividades matemáticas desarrolladas por el alumnado fuera del contexto escolar. Considera un reto para los profesionales de la educación matemática llegar a superar las consecuencias negativas de los conflictos entre lo que los alumnos aprenden dentro y fuera de la escuela. En relación con la alfabetización numérica, entendida como el aprendizaje de las matemáticas necesarias para vivir en sociedad como individuo funcional, propone la revisión de las seis actividades matemáticas universales —contar, localizar, medir, diseñar, jugar y explicar— para que el desarrollo del nuevo currículum no sea únicamente la asignación de nuevos nombres, sino el resultado de una reconceptualización didáctica. En relación con la aplicación de esta revisión del currículum, propone tres tipos de situaciones de aula: las actividades conceptuales, las investigaciones y los proyectos, y establece los criterios que deberían satisfacer cada una de ellas para contribuir a la alfabetización numérica de todos los alumnos.

El profesor Clements, en el capítulo 3, «Matemáticas en la escuela: cuestiones de equidad y justicia» (pp. 57-77), centra especialmente la atención en la discusión sobre si un currículum establecido de forma externa y global, sin considerar las necesidades particulares de las escuelas concretas, genera equidad en la educación matemática del alumnado. El autor parte de la afirmación que está suficientemente probado que, en muchos países, las matemáticas escolares no contribuyen a que los alumnos adquieran las habilidades básicas necesarias para vivir dignamente, ni tan siquiera en sus entornos inmediatos. Ejemplifica su afirmación primero en situaciones que podrían parecer remotas al lector, para aproximarlas después a situaciones hipotéticas pero similares a muchas realidades de nuestro país. Entre los obstáculos que hacen que, incluso en las naciones tecnológicamente avanzadas, haya muchas situaciones que limitan las oportunidades de los alumnos y alumnas para recibir una educación adecuada, incluye factores como la distancia lingüística y la distancia cultural entre los alumnos, sus profesores y el currículum desarrollado por éstos. Al analizar dichos obstáculos, establece que la mejor solución en relación con la equidad sería una solución local, no dictada por instituciones centralizadas dirigidas por burócratas o políticos. Cuando analiza los distintos intentos desarrollados a lo largo de la historia para hacer que las matemáticas fuesen comprensibles para todos los alumnos, desde la matemática moderna, pasando por la propuesta de los estándares del NCTM (National Council of Teachers of Mathematics), hasta el constructivismo, sugiere que ninguno de ellos ha tenido éxito en relación con la equidad. El profesor Clements concluye su contribución afirmando que la equidad en relación con la educación matemática debe pasar por aceptar el reto de democratizar realmente las matemáticas escolares.

En el capítulo 4, «Necesidad de una reforma» (pp. 79-90), el profesor Hilton parte de la idea de que el pensamiento matemático es de vital importancia para los adultos de las sociedades actuales, como profesionales y como ciudadanos, y afirma que la enseñanza de las matemáticas no es suficientemente satisfactoria. A partir de estas afirmaciones, propone que los esfuerzos deben dirigirse no tanto a cambiar el contenido de los cursos de matemáticas como a conseguir que la enseñanza y el aprendizaje conduzcan a resultados satisfactorios. Afirma que no se conseguirá una buena educación matemática de los alumnos a menos que sus profesores tengan amplios conocimientos de la materia que enseñan. Para ello, establece las condiciones básicas que debería requerir la formación inicial del futuro profesorado de matemáticas. Una formación que permitiese al profesor conocer más de lo que debe enseñar, siendo capaz de establecer conexiones dentro de las matemáticas y con las situaciones del mundo real, que fuese similar a la de cualquier matemático, sin extenderse necesariamente en profundizaciones pedagógicas, y que generase en el profesor una buena actitud hacia la materia son algunas de las propuestas de Hilton en relación con la formación inicial del profesorado. En relación con el contenido curricular, cree poco razonable anticipar un cambio revolucionario en el contenido matemático a nivel intencional, y propone y desarrolla los que considera contenidos básicos para la enseñanza secundaria: aplicaciones de las matemáticas, álgebra, geometría, sistemas numéricos y funciones y razón de variabilidad, sin olvidar la importancia de no perder de vista la unidad de las matemáticas.

En el segundo bloque, «Matemáticas y desarrollo del currículum» (pp. 91-134), se abordan algunas de las problemáticas de la implementación de los programas de enseñanza, desde la perspectiva de la materia. Nicolas Balacheff, Pearla Nesher y Tommy Dreyfus presentan distintos puntos de vista relacionados con el desarrollo del currículum en el aula. Estos autores parten de la idea de que las matemáticas son un poderoso instrumento de análisis y modelización de la realidad. Balacheff analiza un problema relacionado con la modelización, interpretando la problemática de un caso particular, el del aprendizaje en entornos informáticos. Nesher y Dreyfus tratan dos aspectos claves para la enseñanza de las matemáticas: las relaciones e interacciones entre lenguaje natural y lenguaje matemático, y el papel de la demostración como contenido curricular específico, respectivamente.

En el primer capítulo de este bloque, capítulo 5, «Entornos informáticos para la enseñanza de las matemáticas: complejidad didáctica y expectativas» (pp. 93-108), el profesor Balacheff, analiza los nuevos problemas derivados del hecho de que los profesores deben compartir su actividad profesional con los ordenadores. El autor expone las características de los entornos informáticos y, al mismo tiempo, nos previene sobre algunas de las dificultades que presenta su utilización. Si bien, por una parte, las nuevas tecnologías ofrecen la posibilidad de plantear en el aula nuevos problemas y experimentar nuevas situaciones, no accesibles anteriormente, por otra, su utilización requiere una aproximación experimental a las matemáticas que cambia la naturaleza de su aprendizaje. Este motivo explicaría, según el autor, las reticencias de muchos profesores en el momento de implementar estas nuevas situaciones, reticencias que no pueden ser justificadas únicamente por la falta de máquinas en las escuelas. Frente a los posibles problemas, debidos a las limitaciones tecnológicas, sugiere que, dado que cualquier modelización las tiene, debemos ser capaces de determinar, con tanta precisión como sea posible, cuáles son dichas limitaciones y evaluar las representaciones utilizadas en función de los objetivos planteados, estableciendo en qué situaciones las modelizaciones son válidas. Según el profesor Balacheff, la utilización de las nuevas tecnologías para la enseñanza de las matemáticas genera, además, dos problemáticas esenciales. Por una parte, los entornos informáticos generan en los alumnos nuevas conceptualizaciones de los objetos matemáticos, conceptualizaciones para las cuales a menudo no estamos preparados. Por otra, plantean al profesorado la necesidad de disponer de nuevos instrumentos para analizar la comprensión y las producciones de sus alumnos y alumnas, para lo cual es necesario conocer los procesos y la estructura del conocimiento subyacentes.

La profesora Nesher, en el capítulo 6, «Posibles relaciones entre lenguaje natural y lenguaje matemático» (pp. 109-123), centra su contribución en la educación primaria y analiza las relaciones y las interferencias entre dos de los lenguajes utilizados en el discurso en el aula de matemáticas. Para comprender las dificultades del alumnado, propone analizar las relaciones entre el lenguaje natural y el lenguaje matemático desde tres puntos de vista: las semejanzas y diferencias entre los dos, la aplicación del lenguaje matemático en los problemas formulados verbalmente y el discurso utilizado durante el aprendizaje. En relación con el primer aspecto afirma que, a pesar de que ambos lenguajes están íntimamente relacionados por el hecho de ser sistemas simbólicos, existen objetos matemáticos y formas de pensamiento que únicamente pueden ser descritos y construidos a través del lenguaje matemático y que tanto la sintaxis como la semántica de ambos lenguajes son distintas. Sin embargo, la aplicación de expresiones matemáticas como modelización de situaciones reales y, en particular, los problemas aritméticos verbales tal como se utilizan en clase, hace necesario ayudar a los alumnos a establecer conexiones entre las semánticas de los dos lenguajes. Desde esta perspectiva, la profesora Nesher presenta ejemplos ilustrativos de que, aunque por una parte la comprensión del lenguaje natural es una condición necesaria para la resolución de los problemas verbales, la interpretación de sus enunciados exige una utilización del lenguaje natural distinta de la que podría hacerse directamente. En relación con el discurso en el aula de matemáticas, afirma que el contenido de la conversación se hace explícito, la mayor parte del tiempo, a través del lenguaje matemático y que, por lo tanto, durante las clases, incluso el lenguaje natural es un tipo de lenguaje mixto, sugiriendo que el discurso matemático podría ser el contenido básico de la enseñanza de las matemáticas en un futuro en el que la tecnología se ocuparía de los aspectos algorítmicos.

En el último capítulo de este bloque, el capítulo 7, «La demostración como contenido a lo largo del currículum» (pp. 125-134), el profesor Dreyfus analiza el papel de la demostración, como contenido específico, especialmente en el currículum de la enseñanza secundaria y niveles superiores. Sugiere que la demostración debería condicionar el tratamiento de todos y cada uno de los temas, determinando, de esta forma, lo que sucedería en el aula de matemáticas. El autor afirma que las argumentaciones utilizadas por el alumnado, aunque lejos de ser demostraciones satisfactorias, deberían ser tomadas como punto de partida para la construcción de argumentaciones más elaboradas, ya que el problema básico en relación con la demostración es que los alumnos no sienten la necesidad de justificar las afirmaciones matemáticas y no se dan cuenta de que gran parte de la significatividad de las matemáticas surge en dichas justificaciones. Según el profesor Dreyfus, comprender por qué funciona un determinado procedimiento es lo que hace que el procedimiento, su utilización y su aplicación sean realmente matemáticas. El autor, después de revisar las investigaciones acerca de las concepciones de los alumnos en relación con la demostración en matemáticas, establece los requisitos básicos para que los alumnos puedan alcanzar un concepto adecuado de demostración. En la segunda parte de su escrito, analiza algunas de las distintas formas de demostración en matemáticas, desde las demostraciones de existencia hasta las demostraciones probabilísticas, recordando al lector que el debate de la comunidad matemática alrededor de la demostración pone de manifiesto la importancia de tratar en el currículum este contenido en profundidad, poniendo el énfasis no en cuestiones de rigor y formalización, ya que su relevancia es limitada, sino en el hecho de plantear la necesidad de la demostración en contextos significativos y relevantes, donde los alumnos puedan razonar, argumentar y justificar afirmaciones matemáticas.

El tercer bloque del libro, «Currículum alcanzado y contextos de aprendizaje» (pp. 135-185), recoge las contribuciones de Guida de Abreu, Fred Goffree y Kenneth Ruthven, centrándose en problemas de aprendizaje y en cómo el conocimiento de los mismos influye en la eficacia de la enseñanza de las matemáticas. Entre otros aspectos, las tres contribuciones tienen en común el importante papel del contexto como factor que influye en los aprendizajes individuales, y por tanto, en el currículum alcanzado. A lo largo de las tres aportaciones, el término contexto es utilizado con distintos significados, desde contexto entendido como marco o situación de una tarea hasta contexto entendido globalmente como marco sociocultural donde se produce el aprendizaje. La profesora de Abreu toma como eje la resolución de problemas para analizar la importancia y la influencia del contexto, no únicamente el referido al contenido del problema, sino también aquel en el cual se desarrolla la acción, que puede ser escolar o del ámbito externo a la escuela. Por otro lado, el profesor Goffree, nos presenta los paradigmas de la educación matemática realista en su país, Holanda, el primero de los cuales se refiere a la contextualización de la situación de aprendizaje como primer paso para que los alumnos puedan otorgar significado a las tareas matemáticas. La contribución del profesor Ruthven, la última de este bloque, analiza la reforma de los modelos de evaluación desarrollada en Inglaterra, presentando alternativas a los métodos tradicionales en las que el contexto juega un importante papel, poniendo énfasis en el valor formativo de la evaluación.

En el primer capítulo de este bloque, el capítulo 8, «El papel del contexto en la resolución de problemas matemáticos» (pp. 137-149), la profesora de Abreu analiza cómo el contexto en que se utilizan las matemáticas tiene importantes implicaciones con relación a su aprendizaje. El análisis que presenta se desarrolla desde una perspectiva psicológica en la cual el centro de atención es la actividad matemática del individuo en el contexto sociocultural en que ésta se desarrolla. Analiza distintos factores que median en los procesos cognitivos del alumnado; desde la óptica cultural, pone el énfasis en cómo determinadas herramientas culturales, y su forma de utilización, influyen en la cognición individual; desde la óptica social, plantea que las acciones y relaciones específicas entre personas, dentro de un grupo, influyen también en los procesos cognitivos. El estudio de la resolución de problemas mediada por herramientas culturales, desde signos y símbolos utilizados para representar ideas matemáticas hasta artefactos como calculadoras o calendarios, es de gran interés en un momento de cambio en el que se hace necesaria una adaptación a tecnologías nuevas, y en el que el individuo debe enfrentarse a la coexistencia de diferentes herramientas culturales. Desde este punto de vista, la autora sugiere que, mientras que en contextos no escolares parece resultar bastante fácil el establecimiento de conexiones entre las herramientas coexistentes, en el contexto escolar, a menudo, los alumnos tratan las distintas herramientas como independientes, y observa que el establecimiento de conexiones puede ser una expresión de tipos de comportamiento asociados a determinadas prácticas sociales. Algo parecido al establecimiento de conexiones ocurre con la utilización de consideraciones del mundo real como mediadores claves en la resolución de problemas.

El profesor Goffree, en el capitulo 9, «Principios y paradigmas de una "educación matemática realista"» (pp. 151-167), expone, a través del ejemplo de la enseñanza de los porcentajes, los cinco criterios básicos que rigen la educación matemática realista desarrollada en Holanda durante los últimos 25 años. El paradigma teórico de la educación matemática realista considera que las teorías sobre la enseñanza deben derivarse de las teorías sobre el aprendizaje. El primer principio básico, por ejemplo, parte de la afirmación de que el alumnado se apropia de las ideas únicamente cuando éstas tienen significado para él y, por lo tanto, para contribuir desde la educación a que el alumno pueda establecer significados, las matemáticas deben hacerse concretas. El segundo y tercer principio, la evolución del proceso de aprendizaje y la reflexión como motor para esta evolución, implican para la enseñanza la necesidad de utilizar *modelos*; modelos de que han de convertirse en *modelos para*, así como la necesidad de garantizar momentos de reflexión. El cuarto principio propone la enseñanza de las matemáticas en contextos interactivos, y el último propone distintas formas que pueden contribuir a estructurar los aprendizajes. Enunciados y explicados los principios, establece los que serían indicadores de la enseñanza de las matemáticas realistas y propone un modelo de arquitectura realista para un curso, a través del ejemplo de los porcentajes. Termina su aportación afirmando que una educación matemática realista necesita un gran nivel de compromiso profesional por parte del profesorado pero también la implicación activa del alumnado.

En el capítulo 10, «Alternativas a la evaluación con exámenes: expectativas y dificultades» (pp. 169-185), el profesor Ruthven nos habla de la evaluación, tema imprescindible en cualquier recopilación de tópicos sobre la educación matemática, presentando alternativas a los exámenes para la valoración de los aprendizajes de los alumnos. Partiendo de que hay un considerable consenso acerca de que la evaluación a través de exámenes es una forma de evaluación externa que en muchos casos obstruye o hace más lentos los procesos de reforma, afirma que es necesario encontrar nuevos métodos de evaluación que nos den información de carácter mucho más cualitativo y que permitan integrar los procesos de enseñanza, de aprendizaje y de evaluación. El autor presenta y discute los principios que rigen el nuevo sistema de evaluación nacional en Inglaterra, evaluación regida por criterios referenciales, formativa, calibrada y relacionada con la progresión, describiendo cómo funciona el sistema en la práctica. En particular, analiza la evaluación de los alumnos a través de investigaciones de carácter abierto, enfatizando la importancia de que los criterios a utilizar para valorarlas sean explicitados al alumnado, al tiempo que reconoce que estas situaciones didácticas pueden convertirse en actividades matemáticas rutinarias. En relación con la evaluación a través de la resolución de problemas y al establecimiento de criterios referenciales, analiza la importancia del equilibrio entre el diagnóstico de los conocimientos matemáticos de los alumnos y la equidad del proceso. Concluye con algunas lecciones que pueden aprenderse a partir de la experiencia en Inglaterra, donde la función sumativa de la evaluación ha triunfado, en la práctica, sobre la función formativa. A pesar de ello, el profesor Ruthven afirma que esta experiencia aporta modelos ricos y evidencia que desarrollar modelos de actividades para evaluar al alumnado que sigan los criterios establecidos es un reto alcanzable, reconociendo la dificultad existente para encontrar un equilibrio entre su aplicabilidad en el aula y la atención que debe prestarse a las expectativas sociales.

Por último, en el bloque que cierra el libro «Visión de futuro» (pp. 187-212), el capítulo 11 «Implicaciones para el cambio» (pp. 189-212) recoge los retos planteados y las propuestas para el cambio que se derivan de las contribuciones de los distintos autores, a la vez que presenta una perspectiva global del debate mantenido en los distintos seminarios desarrollados durante el proyecto TIEM en los que participaron profesionales nacionales y extranjeros. El objetivo del capítulo es que las reflexiones que recoge puedan ser utilizadas como base para analizar de qué forma la educación matemática puede y debería responder a las necesidades de una sociedad cambiante. Llevar a cabo dicho análisis con profundidad es urgente e imprescindible y creemos que el *Año Mundial de las Matemáticas*, puede ser un buen marco para promoverlo.

En el primer apartado de este capítulo sus autores, Núria Gorgorió y Alan Bishop, toman como punto de partida la idea de la democratización de la educación matemática, uno de los objetivos de la UNESCO, y analizan su significado en una sociedad tecnológicamente cambiante y progresivamente más diversa. Conseguir la democratización de la educación matemática requiere la revisión de algunos mitos. Los autores revisan el mito generado por la cultura del utilitarismo de las matemáticas que junto con la invisibilidad de su presencia en las prácticas de la vida adulta, conduce al establecimiento de un currículum poco significativo y compartimentado. Revisan también el mito del déficit cognitivo, idea implícita en la actuación de profesores, padres y alumnos y de la administración educativa, que interfiere en gran medida con la posibilidad de alcanzar la democratización de la educación matemática.

La democratización implica la necesidad de actuar a distintos niveles. Actuar desde el establecimiento del currículum y su implementación, que conduciría a un replanteamiento del propio significado de la educación matemática, pero también desde el campo de la investigación, donde deberían revisarse los problemas estudiados y la forma de abordarlos. Desde el establecimiento del currículum se analiza la necesidad y posibilidad de implementar un currículum no compartimentado que contemple los distintos ritmos de aprendizaje y los distintos intereses, motivaciones y expectativas, establecido localmente, partiendo del contexto sociocultural en que se desarrolla la enseñanza y teniendo en cuenta los aprendizajes no escolares. Los autores consideran que el profesor es el principal agente del cambio en la implementación de dicho currículum. Sin embargo, la responsabilidad que éste tiene como impulsor del cambio no recae únicamente en él como individuo, sino que es una responsabilidad compartida que corresponde, en primer lugar, a los responsables del proceso de su formación profesional, tanto inicial como permanente. Desde este punto de vista, se sugieren ideas para promover el cambio desde las instituciones responsables de la formación de los docentes, enfatizando la importancia de apoyar a las asociaciones de profesores y los grupos de innovación.

La investigación en educación matemática como instrumento de cambio plantea, en primer lugar, la necesidad de fomentar en nuestro país los estudios en este área, para evitar los riesgos de aplicar modelos directamente importados de otros contextos. Los autores discuten también cuáles son las cuestiones relevantes que se deben investigar y destacan el interés de los estudios directamente relacionados con el aula, desarrollados bajo modelos de investigación en colaboración con el profesor como conocedor de las limitaciones y posibilidades del sistema y como experto con puntos de vista distintos y complementarios de los del investigador universitario.

Gorgorió y Bishop afirman que las responsabilidades en el proceso de cambio son responsabilidades compartidas. En particular, afirman que los profesionales implicados en la educación matemática de nuestros jóvenes tenemos la responsabilidad de influir en las políticas educativas, reclamando, en particular, que se promuevan y faciliten programas de formación permanente que partan de las necesidades reales de los profesores y profesoras en activo, permitan trabajar a partir de experiencias con éxito y reconozcan la profesionalidad de los docentes. La administración educativa debería además reconocer y promover las asociaciones de profesores y los grupos de trabajo estables, atendiendo a sus opiniones en los procesos de cambio.

Bloque 1:

Currículum intencional desde una perspectiva social

2

Enseñanza de las matemáticas: ¿cómo beneficiar a todos los alumnos?

Alan Bishop
Monash University. Victoria (Australia)

Introducción

En este capítulo abordaré la cuestión crucial de cómo educar a todo tipo de alumnos desde el área de matemáticas; al mismo tiempo, analizaré cómo los resultados de la investigación en educación matemática amplían las posibilidades de acción para conseguir este objetivo. Agruparé las ideas e implicaciones de dicha investigación bajo tres títulos que introduciré en el apartado «La tríada de la educación matemática» (véase página siguiente).

Pero en primer lugar, ¿por qué es importante este tema? ¿Enseñar matemáticas consiste simplemente en presentar al alumnado varias ideas y reglas matemáticas y explicarles lo que deben hacer con ellas? Sabemos cómo conseguirlo puesto que hay alumnos que prosiguen sus estudios y llegan a la universidad, se licencian y se convierten en matemáticos. Por supuesto, también sabemos que hay alumnos que nunca alcanzan esa meta, pero claro, no todo el mundo puede hacerlo todo bien ¿cierto?

Pues *sí* y *no*. Es cierto que sabemos cómo enseñar con acierto algo de matemáticas a algunos alumnos. El problema radica en que las matemáticas se han convertido en algo tan importante en todos los países desarrollados del mundo que la sociedad actual espera, en general, que a todos los alumnos se les enseñe muchas matemáticas.

Coombs (1985), al intentar interpretar las tendencias educativas mundiales, nos ha permitido establecer una importante distinción entre tres tipos de educación matemática: la formal, la no formal y la informal.

La educación matemática formal es el tema de este escrito, dado que todos los países tienen sus requisitos educativos formales. La educación matemática no formal consiste en cursos optativos y clases que no forman parte de los requisitos educativos formales, y que, a menudo, se desarrollan en horario extraescolar. En esta categoría también se incluirían la mayoría de ofertas de educación matemática para adultos. Finalmente, la educación matemática informal es aquella que se da a través de diferentes medios, como la televisión y los periódicos, y en cierto sentido, se considera educación accidental (Bishop, 1993, desarrolla esta distinción).

Coombs señala que, como resultado de las enormes demandas que la sociedad plantea al currículum educativo formal, aparecen dos tendencias. La primera implica que no puede esperarse que ninguna asignatura pueda disponer de mucho tiempo dentro del sistema de escolarización formal. La segunda implica que tanto la educación no formal como la informal se están extendiendo a un ritmo muy rápido. La expansión de Internet es sólo un ejemplo de la creciente importancia de la educación informal.

Este es un momento muy importante para la enseñanza de las matemáticas, tal y como se ha descrito en el capítulo introductorio. En nuestro país, se experimenta un gran cambio respecto a la situación de hace unos años, cuando, en general, lo único que se enseñaba a todos los alumnos y alumnas era aritmética, y si alguna vez se llegaba a enseñar matemáticas como una materia unitaria sólo se hacía a los pocos elegidos que seguramente continuarían estudiando matemáticas en la universidad. Ahora, en España, al igual que en muchos otros países, se espera que las matemáticas se enseñen como asignatura unificada a todos los alumnos menores de 16 años, incluyendo aquellos con discapacidades físicas. La única excepción puede que sea el alumnado con discapacidades psíquicas, para quienes las matemáticas representarían demasiados problemas de abstracción y simbolización.

Sin embargo, el deseo y la presión para que se enseñen matemáticas a todos los alumnos no ha ido acompañado de forma sistemática de progresos en el currículum ni en los enfoques didácticos (véase Bishop, 1991*b*, Bishop, 1993; Grouws, 1992; Usiskin, 1994). Cuando nos hemos dado cuenta, a partir de las aportaciones de investigaciones recientes, de que hay muchos alumnos luchando por aprender matemáticas, hemos visto que era necesario desarrollar estructuras curriculares y enfoques pedagógicos más apropiados.

Por lo tanto, subrayaré algunos de los avances, a los que la investigación ha contribuido, que facilitan que las ideas matemáticas sean más comprensibles para todos los alumnos y alumnas.

La tríada de la educación matemática

Como campo de estudio, la educación matemática puede definirse de una forma simple como el conjunto de relaciones entre una tríada de grupos de constructos que incluyen *el contenido matemático, el profesorado de matemáticas* y *el alumnado de matemáticas.*

El grupo *contenido matemático* se refiere al espacio de conocimiento, o entorno, en el que profesores y alumnos de matemáticas desarrollan e intercambian sus ideas. A menudo, se interpretaba como el currículum de matemáticas, pero hoy se sabe que podemos interpretar el constructo del currículum desde más de un nivel, y que es útil e importante hacerlo así. Dentro del contenido matemático, por ejemplo, se desarrolla el curriculum *intencional* de matemáticas, que relaciona la historia y la cultura de las matemáticas con temas actuales ligados a la tecnología de la información y las matemáticas. También se ocupa de la selección de las ideas matemáticas y de su *transposición didáctica* al contexto educativo.

El grupo *profesorado de matemáticas* se refiere tanto al profesorado como al enfoque didáctico. Al aumentar la investigación en educación, han aparecido muchas ideas nuevas acerca de los enfoques didácticos, acerca de la formación inicial del profesorado y de la mejora profesional de los profesores en activo. Este grupo también se refiere al contexto social en el que operan los profesores, que influye en la interpretación que éstos hacen de su propio rol y de las limitaciones, dentro del sistema educativo, generadas por otros.

Finalmente, el grupo *alumnado de matemáticas* se refiere tanto al alumnado como al aprendizaje. En el ámbito de la psicología se han desarrollado, ciertamente, gran número de investigaciones sobre los alumnos que nos han ayudado a comprender tanto sus dificultades para aprender matemáticas como las estrategias que utilizan para llegar a conseguirlo. Dado que el centro de atención se ha trasladado a *todos* los alumnos, ha aparecido una preocupación especial por los llamados *alumnos de riesgo*, es decir, aquellos susceptibles, según sugieren las investigaciones, de tener dificultades especiales, por ejemplo, alumnos discapacitados, niños pertenecientes a familias desfavorecidas, alumnos que experimentan conflictos culturales y lingüísticos, etc.

Los tres grupos que se acaban de definir así como su interrelación constituyen los focos de investigación del campo de la educación matemática. Los tres son importantes, los tres interaccionan y todos ellos existen dentro de un contexto lingüístico, cultural, histórico y social concreto. No obstante, lo que puede ser apropiado en el contexto de un país puede que no lo sea en otro; aún así, siempre es posible aprender de otras situaciones, con tal que se sea consciente de las diferencias entre contextos.

El valor del proyecto TIEM reside en que ha unido a investigadores importantes, procedentes de distintos países, con una gran experiencia en el campo de la educación matemática, aportando cada uno de ellos resultados de investigaciones y experiencias concretas que, en su opinión, serán de utilidad para los investigadores y profesores de España.

El currículum de matemáticas: etnomatemática y alfabetización numérica[1]

En primer lugar, ¿qué criterios debería cumplir, en la actualidad, la enseñanza formal de matemáticas para satisfacer las necesidades de los alumnos menores de 16 años? Según mi punto de vista, debería ofrecerles:

1. A lo largo de todo el capítulo se utiliza *alfabetización numérica* como traducción del término *numeracy*, prefiriéndolo al término *numerización*, debido a la riqueza de significados que nos sugiere la analogía.

- Algo distinto a lo que les aporta la enseñanza de las matemáticas no formal e informal, pero que esté relacionado con ello.
- Algo básico, fundamental y generalizable, pero que incluya conocimientos matemáticos que ellos hayan adquirido fuera de la situación formal.
- Algo profundo y bien estructurado, tanto desde un punto de vista matemático como desde un punto de vista psicológico.
- Algo motivador, enriquecedor y estimulante.
- Algo relevante para sus vidas presentes, que para ellos tenga significado aprenderlo y sea útil para sus vidas futuras.

Estos criterios son muy exigentes, pero si la enseñanza de las matemáticas es tan importante como creemos, entonces, en la actual competición en las escuelas por el espacio curricular, no deberíamos contentarnos con otros menos exigentes. Por tanto, si deben satisfacerse estos criterios, ¿cómo podemos construir un currículum matemático apropiado a la nueva situación para que el profesorado pueda usarlo en sus clases? ¿Bastará con añadir algunos temas para actualizar el currículum? ¿Deberíamos simplemente potenciar el uso de calculadoras y ordenadores que son un elemento de motivación para nuestros alumnos? ¿Cómo debemos afrontar este problema?

Si tenemos en cuenta las investigaciones desarrolladas en este campo, vemos que ha habido varios cambios en la concepción de currículum como respuesta a la idea de enseñar matemáticas a todos los alumnos. En concreto, la mayor preocupación se ha centrado en la reconceptualización de las matemáticas como campo de conocimiento, con la finalidad de que las ideas sean comprensibles para todos los alumnos.

De la investigación y de los debates han surgido dos constructos muy importantes: *etnomatemática* y *alfabetización numérica*.

La *etnomatemática* tiene sus orígenes en las actividades matemáticas llevadas a cabo por las personas en cualquier parte del mundo. A Ubiritan d'Ambrosio (1984), matemático y educador brasileño, le corresponde la fama de haber popularizado esta idea en la conferencia que ofreció en el 5º International Congress of Mathematics Education en Adelaide, Australia. Además, las investigaciones relevantes en esta área son muy recientes y sólo en los últimos diez años, aproximadamente, han aparecido resultados interesantes (véase Barton, 1996 y Gerdes 1996, donde se resumen las últimas investigaciones). Hay numerosos debates en torno a lo que es la etnomatemática, sin embargo, hay pleno acuerdo sobre su potencial contribución al cambio de nuestras ideas sobre la naturaleza de las matemáticas.

De hecho, podemos distinguir tres corrientes en el campo de la investigación en etnomatemática, ofreciéndonos todas ellas interesantes ideas para la enseñanza. En primer lugar, encontramos el estudio de formas de conocimiento matemático desarrollado en sociedades tradicionales, entendiendo por *sociedad tradicional* aquella aparentemente poco afectada por los progresos tecnológicos. Este tipo de conocimiento matemático ha sido estudiado por investigadores que trabajan en el marco de la tradición antropológica en, por ejemplo, Papua Nueva Guinea (Lean, 1992), Mozambique (Gerdes, 1995), Nueva Zelanda (Barton y Fairhall, 1995) y América del Norte, con los Navajos (Pinxten y otros, 1983).

Esta corriente de investigación es, por supuesto, muy importante en los países del tercer mundo, pero también puede tener relevancia para el profesorado de España que trabaja con alumnos que han emigrado de países cuyo nivel de desarrollo tecnológico es notablemente distinto al de una zona desarrollada.

La segunda corriente que podemos distinguir en el ámbito de la investigación en etnomatemática proviene de la tradición de la investigación histórica, mucho más arraigada y conocida en el campo de la educación matemática. Darse cuenta de que los análisis históricos anteriores habían sido restringidos, en su mayor parte, a las tradiciones europeas y occidentales ha significado un estímulo para el desarrollo de esta tendencia dentro de la etnomatemática.

El interés de las investigaciones actuales se centra en documentar e interpretar otras historias de las matemáticas en otras zonas del mundo. Un ejemplo típico de estos nuevos análisis es el libro de Joseph (1991), *The crest of peacock: non-European roots of mathematics*, escrito para invertir el desequilibrio de los estudios anteriores, y también para celebrar la diversidad de culturas que han contribuido a la rica reserva global de ideas matemáticas.

Esta corriente de investigación podría tener notables implicaciones en España, donde muchos de los alumnos y alumnas inmigrantes provienen de países con una fuerte cultura musulmana. La historia cultural del mundo musulmán es fértil en ideas matemáticas y, aunque gran parte de esta tradición es conocida entre los estudiosos musulmanes, lo es poco entre los educadores matemáticos occidentales, a pesar de que empieza a divulgarse a través de las publicaciones de Joseph, entre otros.

Por ejemplo, hemos aprendido que en la historia de las matemáticas en el mundo musulmán tienen mucha importancia:

- Las leyes de la herencia de las sociedades árabes.
- El diseño de las mezquitas y sus superficies alicatadas.
- La localización de la dirección de La Meca en distintas partes del mundo.
- La astronomía.
- El desarrollo de demostraciones geométricas para teoremas algebraicos.
- El trabajo de matemáticos como Al-Khwarizmi, Thabit ibn Qurra, Al-Kashi, y Omar Khayyam.

Existe una rica tradición de ideas matemáticas que pueden conectarse con el currículum matemático actual y que podrían transformarse en actividades y proyectos motivadores en los centros y las aulas donde estudian alumnos musulmanes.

La tercera, y más reciente, corriente dentro de la investigación en etnomatemática está relacionada con las actividades matemáticas que lleva a cabo el alumnado fuera del contexto escolar, es decir, en sus casas y en sus respectivas comunidades. La mayoría de estas investigaciones se han desarrollado en Brasil, donde las ideas educativas de Paulo Freire han tenido una gran acogida.

Esta última corriente, que ha sido muy bien resumida por Nunes (1992), posee un claro exponente en la tesis doctoral de Guida de Abreu (1993). Después de haber documentado la etnomatemática de los agricultores de caña de azúcar de Recife (Abreu y Carraher, 1989), de Abreu siguió su investigación analizando cómo conceptualizaban los niños la relación entre el conocimiento matemático aprendido en la escuela y el conocimiento matemático «doméstico». Los resultados pusieron de manifiesto los efectos negativos de los conflictos entre las matemáticas aprendidas dentro y fuera de la escuela de cara a la consecución de aprendizajes.

En mi opinión, para los centros de España, ésta es la más importante de las tres corrientes de la etnomatemática. Las investigaciones acerca de lo que se conoce como *cognición situada* son también relevantes en este campo. Esta idea parte de que el aprendizaje de algo nuevo siempre se produce en una situación concreta. Por lo tanto, la *cognición* de este conocimiento incluye, en cierto modo, aspectos de esta situación, en particular, aspectos sociales de la situación. La educación matemática tiene planteado el reto de llegar a superar las consecuencias negativas de los conflictos entre lo que los alumnos aprenden en la escuela y lo que aprenden fuera de ella. Esta es una cuestión que abordaré de nuevo más adelante.

Algunos ejemplos de investigaciones en etnomatemáticas ponen de manifiesto la naturaleza sorprendente, y a veces exótica, de las ideas que de ellas emergen. No obstante, también evidencian cuáles son las aportaciones de la investigación que podrían utilizarse para influir en la selección y las decisiones con relación al currículum. Así:

- En Papua Nueva Guinea y Oceanía existen más de 2.000 sistemas para contar.
- En el mundo existen diversas maneras de sumar, restar, multiplicar y dividir.
- Existen muchas formas de calcular y valorar terrenos: la calidad de la tierra, el drenaje y el régimen de uso deben tomarse en consideración.
- Existen numerosos juegos, rompecabezas, deportes y bailes que tienen conexiones matemáticas.
- Carpinteros, navegantes, corredores de apuestas y vendedores tienen sus propios procedimientos matemáticos que, a menudo, se asemejan poco a las matemáticas escolares.

Hay otros muchos ejemplos que podrían analizarse, pero quizás el aspecto más interesante de la etnomatemática, con relación al contenido de mi aportación, es que conecta muy bien con las ideas relacionadas con el segundo constructo, la *alfabetización numérica*. Esto se debe a que, como ya hemos visto, la etnomatemática se refiere tanto al estudio de las relaciones entre las matemáticas y la cultura como a las prácticas matemáticas concretas que se llevan a cabo dentro de las comunidades donde se halla ubicada la escuela.

La *alfabetización numérica* ha tenido muchas definiciones a lo largo de los años, pero básicamente se refiere al conocimiento de las matemáticas necesarias para vivir en sociedad como individuo plenamente funcional.

Hubo una época en que la alfabetización numérica sólo implicaba las cuatro reglas aritméticas de sumar, restar, multiplicar y dividir. En opinión de muchos, sigue siendo así. Sin embargo, actualmente reconocemos que, debido a que las sociedades se vuelven más complejas y dependen en mayor medida de ideas y procesos matemáticos sofisticados, el nivel de alfabetización numérica necesario para funcionar en ellas y contribuir a su desarrollo es también más exigente.

La alfabetización numérica nos lleva además a reflexionar sobre el nivel de conocimiento matemático y las habilidades que todo alumno deberá adquirir para ser completamente funcional dentro de la sociedad. La alfabetización numérica es un objetivo importante para la educación matemática: no es el único, pero es un objetivo para todos los alumnos.

Otro aspecto significativo de la alfabetización numérica es que nos permite conectar nuestras ideas con las de Coombs (1985) citadas anteriormente, ya que se refiere no únicamente al conocimiento necesario para ser parte de la sociedad, sino también a cómo se adquiere dicho conocimiento. Las investigaciones nos recuerdan que gran parte de este conocimiento se adquiere fuera del aula y fuera de la escuela. De hecho, algunos argumentarían que, por lo tanto, no es necesario enseñar las habilidades y los conocimientos básicos relacionados con la alfabetización numérica en clase de matemáticas. Pero este es un supuesto peligroso. El hecho de que gran parte del conocimiento matemático básico del alumnado proceda de un aprendizaje no escolar no significa que todos los alumnos adquirirán el mismo conocimiento fuera de la escuela.

Esta es una idea importante para aquellos países donde debe enseñarse un currículum matemático común a todos los alumnos. Los supuestos que podían establecerse en el contexto educativo anterior en relación con el bagaje de conocimientos y experiencias del alumnado puede que ya no sean válidos en un momento en que debemos educar a grupos de alumnos distintos de los que había anteriormente en las aulas. Por ejemplo, las primeras investigaciones desarrolladas sobre las causas del mayor fracaso escolar de las alumnas en matemáticas pusieron de manifiesto que algunos profesores y libros de texto no tenían suficientemente en cuenta los distintos conocimientos y las distintas experiencias de las alumnas en comparación con los de los alumnos. A partir de investigaciones que incluían alumnos no contemplados en estudios anteriores, como por ejemplo, alumnos inmigrantes, discapacitados, de clase trabajadora, de zonas rurales, etnia gitana, etc., deducimos que también en estos casos es importante tener en cuenta las diferentes experiencias en grupos de alumnos diversos.

Sin embargo, las investigaciones han revelado la presencia de una amplia gama de prácticas matemáticas en todas las sociedades y, por tanto, se ha puesto de manifiesto la existencia de una base matemática en todas las comunidades, a partir de la cual puede construirse una educación eficaz en el ámbito de la alfabetización numérica. Normalmente, este conocimiento y estas prácticas no son reconocidas como matemáticas. Por ejemplo, los carpinteros hacen una estimación de la cantidad de madera que necesitan para hacer un mueble, los pescadores se orientan gracias a complicadas cartas de navegación y las enfermeras necesitan encontrar cantidades proporcionales de los medicamentos que suministran a sus pacientes. En todos estos casos, los profesionales de la educación matemática encontramos numerosas ideas matemáticas subyacentes en dichas prácticas, pero las personas que las utilizan no las reconocen como matemáticas.

Por lo tanto, parte de la tarea de los investigadores en el campo de la alfabetización numérica consiste en descubrir la naturaleza matemática de las prácticas relevantes (véase Noss, 1997, que presenta las últimas reflexiones sobre lo que él llama *alfabetizaciones numéricas* e incluye muchas de las prácticas y conocimientos que acompañan la introducción de calculadoras y ordenadores en la sociedad).

Como consecuencia de lo que se acaba de decir, sabemos ahora que podemos conceptualizar el contenido matemático y el currículum de una nueva forma.

En concreto, esta nueva visión se ocupa de:

- Revelar la naturaleza matemática de prácticas relevantes en comunidades y sociedades.
- Desarrollar la comprensión del conocimiento matemático subyacente en dichas prácticas.
- Desarrollar la aplicabilidad, la efectividad y la eficiencia de dichas prácticas.
- Desarrollar conocimiento matemático generalizable a partir del conocimiento matemático local.

Es obvio que este enfoque requiere que cualquier nueva descripción no sólo aporte ideas interesantes procedentes del entorno, sino que incluya también aquellos aspectos que se considerarían necesarios en una educación matemática global. A partir de mis propias investigaciones he desarrollado seis categorías de prácticas matemáticas que he llamado *contar, localizar, medir, diseñar, jugar* y *explicar* (Bishop, 1991*a*). A raíz de las investigaciones disponibles, sabemos que estas actividades se dan en todas las sociedades, alcanzando distintos niveles, y juntas constituyen una base para la cobertura del campo de los conocimientos matemáticos. Por lo tanto, nos sirven de punto de partida para reflexionar sobre la alfabetización en educación matemática. Veamos cada una de ellas:

- *Contar.* Esta actividad se refiere a las muchas maneras de representar los números y de hacer cálculos numéricos. Hoy en día, los periódicos y otros medios de comunicación están llenos de información numérica y estadística, y cualquier ciudadano plenamente competente necesita estar familiarizado con estas representaciones y estos cómputos.

  El reconocimiento de pautas y modelos en las distintas actividades y representaciones numéricas permite posteriormente el acceso a ideas algebraicas, aunque no esté claro cuál es el nivel de conocimiento algebraico necesario actualmente para los ciudadanos.
- *Localizar.* Esta actividad de la alfabetización numérica se ocupa de los aspectos geográficos de la geometría. Incluye: encontrar la ruta en el entorno espacial y en la navegación, orientarse y orientar otros objetos; describir dónde están los objetos en relación con otros; utilizar distintas formas de representación, tales como mapas, diagramas y sistemas de coordenadas. En esta actividad también se producen representaciones gráficas.
- *Medir.* Medir es una actividad de alfabetización numérica necesaria para todo miembro de cualquier comunidad y lo que se mide y valora está relacionado con las prendas de vestir, la alimentación, la tierra, el dinero, etc. Es una parte importante del comercio, tanto si uno es el cliente como el comerciante, y está muy relacionada con numerosos oficios.

  Las técnicas de medida, junto con todas las unidades utilizadas, se vuelven más complejas al aumentar la complejidad de la sociedad: se dedica mucho tiempo a la conversión de unidades o tratando con multiplicidad de ellas como es el caso de las usadas para medir la velocidad, el tiempo y la distancia.
- *Diseñar.* La forma es muy importante en cualquier comunidad, tanto en objetos de gran tamaño, como pueden ser las casas o edificios religiosos y pú-

blicos, como en objetos de pequeño tamaño, como contenedores caseros, herramientas, ropas u ornamentos.

En este nuevo aspecto geométrico de la alfabetización numérica, estamos especialmente interesados en la construcción de formas diversas, en el análisis de sus distintas propiedades y en la relación de las unas con las otras.

- *Jugar.* Todo el mundo juega y todo el mundo se toma en serio el juego, lo que significa que incluso la educación para la alfabetización numérica puede ser divertida.

  No todas las formas de juego son interesantes desde el punto de vista de la alfabetización numérica, pero los juegos, los rompecabezas, las paradojas lógicas y la probabilidad forman parte de la sociedad moderna. Todos los juegos tienen reglas y estas reglas potencian el desarrollo de estrategias.

- *Explicar.* Entender por qué las cosas ocurren del modo que ocurren y explicárselo a uno mismo y a los demás es una actividad humana universal.

  La explicación lógica es un tipo de alfabetización numérica más desarrollado que los anteriores, y a menudo ignorado en las discusiones acerca de la alfabetización numérica. Pero las infraestructuras gubernamentales e institucionales de las sociedades tecnológicas modernas se basan en el sistema de argumentación racional. Por lo tanto, los ciudadanos que no son competentes en este tipo de actividad (o en el lenguaje dominante de la comunidad) se encuentran en una situación de desventaja cuando tratan con dichas instituciones.

Dentro de las propias matemáticas, y a un nivel superior, explicar significa demostrar teoremas. Sin embargo, la explicación matemática es mucho más importante para la alfabetización numérica, en el sentido de que es capaz de explicar los fenómenos que ocurren dentro de la sociedad. Las matemáticas ponen de manifiesto las estructuras y los conceptos subyacentes de muchos aspectos científicos y tecnológicos de la sociedad. Por ello, la alfabetización científica y tecnológica requiere de ideas matemáticas que pongan de manifiesto las estructuras de conocimiento existentes tras los aspectos científicos y tecnológicos de las sociedades industriales modernas.

A continuación, presentamos ejemplos de una aproximación al currículum matemático, para todos los alumnos y alumnas, basada en la idea de alfabetización. Tal y como puede imaginarse a partir de los planteamientos anteriores, los módulos del currículum están basados en estructuras de alfabetización numérica y, a partir de ellas, se desarrollan actividades matemáticas apropiadas para todo el alumnado (en el apartado «Los profesores de matemáticas y la enseñanza de las matemáticas...», en este mismo capítulo, se proporcionan ejemplos de actividades).

Por ejemplo, en el estado australiano de Victoria, el marco curricular y los estándares para el currículum obligatorio del área de matemáticas para todos los alumnos contiene seis líneas. El cuadro 1 de la página siguiente ilustra cómo se relacionan estas líneas con las seis actividades universales descritas anteriormente (contar, localizar, medir, diseñar, jugar y explicar).

Cuadro 1. Actividades universales relacionadas con las líneas matemáticas del marco curricular y los estándares

	LÍNEAS CURRICULARES					
	Espacio	Número	Medida	Probabilidad y datos	Álgebra	Herramientas matemáticas
Contar		x	x	x	x	x
Localizar	x		x			x
Medir	x		x			x
Diseñar	x					x
Jugar				x		x
Explicar	x	x	x	x	x	x

El siguiente ejemplo (cuadro 2) ilustra el segundo aspecto importante acerca de la idea de alfabetización numérica. Representa una nueva forma de interpretar los contenidos matemáticos, incluso para los alumnos más brillantes (véase, por ejemplo, Steen, 1990). Steen postula a favor de cinco categorías en un nuevo currículum matemático: *dimensión, cantidad, incertidumbre, forma* y *cambio.* En estos constructos podemos reconocer ideas matemáticas básicas, aunque no en los términos tradicionales de geometría, aritmética, álgebra, probabilidad, cálculo, etc. Steen también presenta cuatro dimensiones de similitud y conexión entre las cinco categorías. En sus textos surge otro tipo de conexiones y representan un reto para aquellos que creen (matemáticos

Cuadro 2. Términos relacionados con la alfabetización numérica (Steen, 1990)

	MEDIDA	SIMETRÍA	VISUALIZACIÓN	ALGORITMOS
Dimensión				
Cantidad				
Incertidumbre				
Forma				
Cambio				

incluidos) que la alfabetización numérica es un concepto para describir únicamente actividades matemáticas de bajo nivel. Relacionar la matemática con la ciencia, clasificar como procedimiento para facilitar la comprensión, inferir a partir de axiomas y datos, y el papel de la indagación en el aprendizaje de las matemáticas serían algunas de estas conexiones. Por lo tanto, cada una de las celdas del cuadro 2 de la página anterior representa un tipo concreto de actividades matemáticas, estando cada una de las cuatro columnas relacionada con cada una de las categorías de la izquierda.

Es extremadamente importante darse cuenta de que el desarrollo de este currículum y la aplicación de las ideas de la alfabetización numérica no es únicamente una actividad de asignación de nuevos nombres. Es el resultado de una reconceptualización didáctica: ejemplos como los anteriores nos plantean el reto de reflexionar, de forma nueva, acerca de cuáles son los constructos matemáticos útiles para la educación y acerca de cuáles son las conexiones significativas existentes entre constructos matemáticos y el currículum de matemáticas. Los ejemplos y términos usados anteriormente puede que no sean los más apropiados para las escuelas de España, y quizás sería necesario crear otros. Sin embargo, creo que dichos ejemplos sirven para mostrar que es posible crear alternativas a las descripciones curriculares tradicionales.

También es importante el hecho de que tanto la etnomatemática como la alfabetización numérica nos centran la atención en nuestra forma de entender las relaciones entre las ideas y las prácticas matemáticas en el mundo exterior a la escuela y al aula. Para algunos, puede que esto signifique que deberíamos centrarnos más en lo que, con anterioridad hemos llamado, *matemáticas aplicadas*. No obstante, ahora somos mucho más conscientes de que antes que denominarlas *aplicadas* es preciso señalar una dirección *desde* las matemáticas puras *a* las matemáticas aplicadas, *desde* la teoría *a* la práctica, *desde* la matemática *a* su aplicación.

Como contraste, lo que la nueva conceptualización nos propone es que pensemos más acerca de las prácticas matemáticas que se dan fuera de la escuela, en una gran variedad de contextos sociales y económicos, y que encontremos la forma de deconstruir[2] dichas prácticas. Como resultado del proceso de deconstrucción deberíamos ser capaces de investigar el conocimiento matemático subyacente en esas prácticas, y luego deberíamos reflexionar acerca de cómo se podría transponer didácticamente ese conocimiento *dentro* del currículum y en el aula.

Nos enfrentamos al reto de cambiar la dirección de nuestra forma de pensar acerca de las matemáticas y su práctica. Retomaremos este tema más adelante.

El alumno y el aprendizaje de las matemáticas: significados y habilidades

Otro de los componentes de la tríada de la educación matemática es el grupo de constructos referidos al alumnado y al aprendizaje de la materia. Las investiga-

2. En el original, en inglés, *deconstruct*.

ciones llevadas a cabo en esta área han puesto de manifiesto que existen dos conjuntos básicos de constructos. Un conjunto estaría formado por conceptos y significados, mientras que el otro estaría formado por habilidades y procesos.

En cuanto al primero, la idea más importante extraída de la investigación es la necesidad de la búsqueda de un aprendizaje significativo. El significado, según Ausubel (1963), uno de los primeros investigadores en este campo, viene determinado por el número y riqueza de conexiones significativas que el alumno establece entre una nueva idea y sus esquemas y conocimientos previos. Si la nueva idea no conecta, o sólo conecta parcialmente, con los conocimientos previos del alumno, entonces la nueva idea puede ser aprendida, pero no de forma significativa. Esto quiere decir que, aunque se memorice, no podrá adaptarse ni será una buena base para la adquisición de un aprendizaje significativo. Se cree que sólo el aprendizaje significativo conduce a la adquisición de conocimiento.

Las investigaciones más recientes evidencian que el profesorado debe tener en cuenta dos aspectos importantes:

- En primer lugar, debe intentar descubrir en qué estado de conocimiento matemático se hallan sus alumnos y alumnas antes de enseñarles nuevas ideas, o prepararlos para recibir e interaccionar con el nuevo conocimiento. Tal como se vio en el apartado «El currículum de matemáticas: etnomatemática y alfabetización numérica», el profesorado debe reconocer que gran parte del conocimiento matemático previo de sus alumnos proviene de fuera del aula y que, de hecho, puede serle desconocido.
- En segundo lugar, y como consecuencia de lo mencionado anteriormente, el profesor debe escoger tareas matemáticas que estén situadas en contextos que permitan a los alumnos utilizar sus esquemas y conocimientos previos de manera significativa.

En cuanto al segundo grupo de constructos citado más arriba, es decir, habilidades y procesos, una de las causas que explican el fracaso de gran parte de la enseñanza de las matemáticas es partir del supuesto de que los alumnos poseen una habilidad matemática innata. Parece que muchos profesores todavía piensan que la habilidad matemática es un constructo unitario, y que los alumnos nacen, o no, con dicha habilidad. Esto puede tener cierto valor si estamos refiriéndonos a genialidad matemática, pero no cuando se trata de reflexionar sobre cómo conseguir una educación matemática que beneficie a todos los alumnos.

La investigación ha evidenciado que es mucho más productivo considerar que son varias y distintas las *habilidades* matemáticas que contribuyen al logro matemático. Hay muchas maneras de entender las ideas matemáticas, muchas aproximaciones para adquirir conocimientos matemáticos y muchas bases para desarrollar actividades matemáticas. Como seres humanos todos somos distintos, debido a nuestros genes, nuestras familias, nuestras historias culturales y nuestras preferencias y aspiraciones. La enseñanza que presupone que todos somos iguales está destinada al fracaso desde el principio. Pero esto es precisamente lo que se asume a menudo, con el predecible resultado del fracaso de muchos alumnos.

Hay diferentes maneras de agrupar las habilidades matemáticas, pero si usamos la clasificación de las seis actividades utilizada anteriormente, podemos identificar los siguientes grupos de habilidades:

- *Contar:* razonamiento numérico, cálculo mental y razonamiento cuantitativo (véase, por ejemplo, Reys, 1993; Starkey, 1992). Esta actividad también incluye la habilidad para la manipulación de cantidades grandes y para la estimación. En un nivel superior, el razonamiento algebraico también forma parte de este grupo.
- *Localizar.* Encontrar la ruta, orientarse y localizar objetos está relacionado con las habilidades mentales de orientación y coordinación espacial. El uso de la imagen cinestésica y de otro tipo de imágenes es sumamente importante (véase, por ejemplo, Tartre, 1990).
- *Medir.* Medir conlleva alguna de las habilidades mentales incluidas en contar, pero también desarrolla las habilidades de estimación, aproximación, evaluación (véase, por ejemplo, Silver, 1994; Shimizu y Ishida, 1994) y también visualización.
- *Diseñar.* Diseñar desarrolla habilidades que incluyen visualizar e imaginar, interpretar información figurativa, dibujar y otras formas de representar (véase, por ejemplo, Presmeg, 1986; Bishop, 1989). Incluye también la memoria visual y la figurativa.
- *Jugar.* Algunas de las habilidades mentales anteriores son también muy importantes en relación con esta actividad, pero jugar parece que desarrolla habilidades particulares como el pensamiento estratégico, conjeturar, y planificar (véase, por ejemplo, Brady, 1978; Mori y otros, 1991). Muchas situaciones de juego desarrollan también distintas habilidades sociales e interpersonales.
- *Explicar.* La actividad de explicar incluye muchas de las habilidades mentales anteriores, pero, particularmente, desarrolla el razonamiento lógico y también el razonamiento verbal (véase, por ejemplo, Whimbey y Lochhead, 1980; Hersh, 1993). Es una habilidad clave para facilitar la toma de decisiones en una sociedad tan compleja como la actual.

Actualmente, parece probable que enfatizar estas seis actividades facilite el desarrollo de las habilidades particulares citadas, que son una especie de versión matemática de las *inteligencias múltiples* (véase Gardner, 1983). Al igual que el mensaje de Gardner, que establece que la mejor estrategia educativa es la que utiliza el abanico de inteligencias que los humanos tenemos a nuestra disposición, la estrategia subyacente en el enfoque sobre la alfabetización numérica que acabamos de sugerir es enfatizar, en el currículum y en la enseñanza, la naturaleza amplia y fundamental de estos seis grupos de habilidades.

El cuadro 3 de la página siguiente muestra las relaciones entre las actividades matemáticas propuestas por Bishop, las habilidades matemáticas desarrolladas a través de dichas actividades y las inteligencias múltiples propuestas por Gardner.

La anterior descripción de habilidades e inteligencias nos anima a enfatizar un currículum y una estrategia de enseñanza que sea constructiva, en el sentido que es-

Cuadro 3. Actividades matemáticas, habilidades matemáticas e inteligencias múltiples de Gardner

ACTIVIDADES	HABILIDADES	INTELIGENCIAS MÚLTIPLES
Contar	razonamiento numérico cálculo mental razonamiento cuantitativo	inteligencia lógica-matemática
Localizar	orientación espacial, coordinación, imagería cinestésica	inteligencia espacial/cinestésica
Medir	habilidades numéricas estimación aproximación	inteligencia matemática/espacial
Diseñar	visualización interpretación figurativa dibujo, representación memoria visual	inteligencia espacial
Jugar	pensamiento estratégico, planificación, habilidades sociales/interpersonales	inteligencia interpersonal
Explicar	razonamiento lógico razonamiento verbal	inteligencia lógica/lingüística

timule a los alumnos a desarrollar habilidades, que quizás ellos no sabían que tuviesen, mediante actividades de aula que a primera vista no parecen matemáticas. La tarea del profesorado es enfatizar dichas habilidades siempre que sea apropiado y con todos los alumnos, no sólo con aquellos que ya parecen poseerlas.

Una última reflexión en relación con la preocupación de algunos profesores por la enseñanza a grupos con habilidades heterogéneas. Esta preocupación está basada en el viejo constructo de habilidad matemática unitaria. Lo que el nuevo constructo establece es la heterogeneidad de habilidades en *todas* las clases, cualquier aula es un aula heterogénea. Lo que los educadores matemáticos deben hacer es ayudar a los profesores a usar constructivamente este nuevo constructo en sus clases, para que la riqueza y la variedad de habilidades matemáticas sean valoradas, comprendidas por todos y usadas para facilitar, a todo el alumnado, el acceso al conocimiento matemático.

El profesor de matemáticas y la enseñanza de las matemáticas: actividades matemáticas, métodos con pequeños grupos y trabajo por proyectos

Algunos de los aspectos más importantes de la enseñanza de las matemáticas ya han sido citados en este capítulo. Esto resulta inevitable ya que, dentro de la tríada de la que partíamos inicialmente, existen numerosas interconexiones y ninguno de sus componentes puede considerarse de forma aislada. Pero, ¿cuáles son las ideas más importantes, provenientes de la investigación, acerca del profesorado y de la enseñanza de las matemáticas?

En este apartado consideramos tres ideas:

- Actividades matemáticas.
- Métodos con grupos pequeños.
- Trabajo por proyectos.

Ninguna de ellas es particularmente nueva, pero pueden tomar un nuevo significado en la situación en España, en proceso de desarrollo.

Actividades matemáticas

En primer lugar, las actividades matemáticas son actividades que el profesorado selecciona para ser realizadas en clase por los alumnos. Pueden interpretarse como tareas matemáticas propuestas en contextos concretos. Los profesores deben ser conscientes de que el abanico de posibles tareas está creciendo constantemente, y de que, actualmente, es necesario que conozcan mejor el contexto no escolar de su alumnado y que lo utilicen más en el desarrollo de actividades apropiadas para un grupo concreto de alumnos.

El abanico de posibles actividades susceptibles de ser realizadas en el aula es, actualmente, enorme. Tareas aritméticas, estadísticas y probabilísticas pueden situarse fácilmente en contextos reales para los alumnos, y las áreas de orientación espacial y de diseño pueden conectarse fácilmente con el mundo de éstos.

Cualquiera de estas actividades debería satisfacer los siguientes criterios:

- Ser relevante para la mayoría de alumnos.
- Ser significativa y tener sentido para el alumnado.
- Estar situadas en, o provenir de, un contexto familiar.
- Ser susceptible de ser extendida matemáticamente para satisfacer, incluso, las necesidades de los alumnos más aventajados.
- Estar bien conectadas con otros temas matemáticos.

Como consecuencia, el principal papel del profesorado, en el momento de seleccionar actividades matemáticas para sus alumnos, es el de establecer un puente entre las estructuras conceptuales básicas de las matemáticas y el mundo de conocimientos de sus alumnos. En términos prácticos, esto significa conectar el contexto y el conocimiento previo de los alumnos con los temas del currículum oficial. En cierto modo, el profesor es el legitimador del conocimiento matemático en el aula, decidiendo qué parte del conocimiento matemático del alumno, adquirido informalmente fuera del aula, es aceptable e importante dentro de ella, y buscando cómo puede relacionarse con el conocimiento matemático formal descrito en los documentos curriculares. La investigación etnomatemática ha evidenciado la importancia de este papel.

Es, pues, necesario que el profesor actúe como antropólogo social, aprendiendo más sobre las vidas de sus alumnos y alumnas fuera de la escuela. Esto es importante para seleccionar, o crear, actividades relevantes y significativas que permitan a los alumnos poner de manifiesto y usar el conocimiento que ya poseen. Por supuesto, son los alumnos los que deben asimilar, en sus esquemas, el nuevo conocimiento o acomodar los esquemas existentes, pero el profesor tiene un papel esencial como ayuda en el proceso.

Ya hemos visto cómo una aproximación distinta a los contenidos, desde la alfabetización numérica, puede facilitar este proceso, pero la lista de ideas para actividades que se propone a continuación puede también sugerir a los profesores de matemáticas situaciones de enseñanza-aprendizaje apropiadas. La lista está diseñada, a modo de ejemplo, para mostrar la gran variedad de posibilidades, y poner de relieve que deben cubrirse, necesariamente, todas las actividades/habilidades de la muestra descrita anteriormente. Es necesario que el profesorado utilice siempre sus propios conocimientos para deconstruir la idea particular y encontrar así su potencial matemático, para reconstruirlo posteriormente como parte de una actividad de enseñanza y aprendizaje apropiada para sus alumnos.

Ideas para actividades matemáticas

- ¿Cuál es la demografía de la población de tu escuela?
- Investigar la información de los periódicos acerca de los resultados deportivos.
- ¿Cuál es el mejor modo de pagar una motocicleta?
- ¿Qué determina el coste de los cigarrillos?
- ¿Es más cara la comida sana que otro tipo de comida?
- ¿Cuál es el modo más rápido de llegar al aeropuerto desde la escuela?
- Diseñar un embalaje para una colección de discos compactos.
- ¿Qué proporción del peso de un paquete corresponde al envoltorio?
- Describir las reglas de un juego, por ejemplo, el voleibol.
- ¿Cuánto espacio dedican los periódicos a las noticias?
- ¿Siempre obtienes buenas gangas en las rebajas?

Es necesario, por supuesto, relacionar estas actividades con las matemáticas formales de la estructura curricular, pero si ésta ya ha sido reestructurada bajo la forma de alfabetización numérica entonces será mucho más fácil encontrar actividades adecuadas. Será también necesario tener en cuenta la secuenciación de actividades y su evaluación, aunque no podemos tratar aquí estos aspectos.

Métodos con grupos pequeños

En cuanto a la segunda idea importante proveniente de la investigación, hay que señalar que el profesorado de matemáticas que intenta crear para sus alumnos situaciones de aprendizaje con éxito usa cada vez más métodos de trabajo en grupos pequeños. Construir más y más actividades de aprendizaje a partir de los conocimientos que poseen los alumnos significa que los alumnos deberían, y pueden, aceptar más responsabilidades sobre su propio aprendizaje. Por ello, se usan cada vez más los métodos de enseñanza a partir del trabajo en grupos pequeños (véase, por ejemplo, Laborde, 1994). Esto se debe a que los grupos pequeños permiten a los estudiantes colaborar y trabajar juntos en un problema, facilitando así que puedan compartir conocimientos previos y estrategias. Los grupos pequeños también crean un contexto de aprendizaje de apoyo, no amenazador, para aquellos alumnos que quizás no son tan brillantes en matemáticas y que se sienten puestos a prueba al estar en la misma clase que aquellos que tienen un nivel más alto.

Según mi experiencia, algunos profesores de matemáticas no están suficientemente familiarizados con los métodos de trabajo en grupos pequeños. Parece que se teme dejar que los alumnos discutan, colaboren, comparen ideas y elaboren productos conjuntamente. No obstante, cuando los profesores participan en cursos de formación permanente es así como prefieren trabajar. Parte del problema está relacionado con el temor a perder el control de la clase que sienten los profesores si los alumnos están trabajando en pequeños grupos. Por supuesto, éste puede ser un gran problema en clases en las que la disciplina sea una dificultad para el profesor, o si los alumnos no están acostumbrados a trabajar en grupos pequeños. Por ello, es necesario que los profesores que no han utilizado este método con anterioridad lo introduzcan gradualmente en la clase, primero con actividades sencillas, explicando las reglas de funcionamiento, poniendo énfasis en el tiempo de que se dispone para trabajar y explicitando cuáles son los objetivos del enfoque por grupos pequeños.

Al usar métodos de trabajo en grupos pequeños se plantearán otros problemas y habrá que tomar decisiones. Esto es lo que vamos a discutir a continuación. En primer lugar, ¿cómo deberemos formar los grupos? En principio, parece que es mejor dejar que los amigos trabajen juntos. Esto les facilitará acostumbrarse a la nueva forma de trabajo. Pero además, parece necesario cambiar los miembros del grupo de vez en cuando. La clave está en que todos aprendemos al experimentar contrastes, y puede llegar un momento en que los miembros del grupo estén tan familiarizados con las ideas y la forma de trabajar de los demás que se pierda el valor de cualquier contraste. Este es el momento en que deben reorganizarse los grupos. Quizás el cambio debería hacerse cada mes para que los aspectos positivos del nuevo grupo tengan efecto; en un mes todavía no se llega al aburrimiento y, además, si el cambio se hace regularmente, no se verá como algo tan extraño como cambiar únicamente los componentes de algunos grupos.

En segundo lugar, ¿debemos usar el método de pequeños grupos continuamente? En mi opinión, no, porque cualquier forma de agrupación creará una cierta situación social que hará que los participantes adopten unos roles concretos. Los alumnos necesitan variar los contextos sociales de aprendizaje para aprender a maximizar sus habilidades, razón por la cual trabajar continuamente con todo el grupo clase tampoco es una buena idea. Para conseguir distintos objetivos es importante trabajar bajo distintas organizaciones grupales. Por ejemplo, las situaciones de aprendizaje individual facilitan el desarrollo de las habilidades individuales potenciales, los grupos pequeños permiten compartir y contrastar ideas, y trabajar con todo el grupo-clase es bueno para asegurar que todos comparten las mismas reglas, para revisar algunos temas, para plantear las tareas de trabajo fuera del aula, para realizar exámenes, etc. A algunos profesores les gusta utilizar el trabajo en grupos pequeños una o dos veces por semana, otros prefieren hacerlo cuando creen que es apropiado para el tema que se trabaja.

En tercer lugar, ¿qué puede hacerse si hay algún alumno o alumna a quien no le apetece trabajar en grupo? A menudo, este es un problema que aparece cuando los alumnos no están familiarizados con el trabajo en grupo o con sus objetivos. También puede suceder que los alumnos hayan tenido algún problema concreto en un grupo. En la enseñanza siempre hay retos relativos a la organización. En estas situaciones, puede ser útil la estrategia de cambiar regularmente los miembros de los grupos. Un maestro de primaria me contó la estrategia que utiliza cuando surge este problema en su clase: forma un grupo a partir del alumno reacio a trabajar de esta forma, solicitando voluntarios para que se unan a él. Otros profesores creen que cuando un alumno parece no estar dispuesto a trabajar en grupo, a pesar de ello, debe hacérsele participar en uno de ellos, debiendo entonces el profesor intentar que la dinámica de trabajo en ese grupo funcione positivamente para acoger al alumno solitario.

Trabajos por proyectos

Volviendo a la tercera idea que está ganando importancia en la discusión acerca de cómo enseñar matemáticas a todos los alumnos, debemos hablar del *trabajo por proyectos*. En cierto sentido, esta idea tampoco es nueva, pero quizás su utilidad en la enseñanza de las matemáticas no ha sido suficientemente reconocida. Hoy en día, se utiliza el método por proyectos en todos los niveles educativos (véase ATM, 1987).

Tres aspectos distintos tienen especial importancia y hacen que una buena propuesta pueda considerarse un buen proyecto. Un buen proyecto es aquel que:

- Proporciona a los alumnos la oportunidad de desarrollar un tema, de formas distintas, hasta el nivel que puedan alcanzar, ofreciendo así un modelo de enseñanza individualizada y personalizada, que permite equilibrar la educación general con la formación especializada.
- Promueve el uso de una gran variedad de recursos y materiales, incluyendo aquellos a los que se puede acceder mediante el ordenador. La escuela no debe ser necesariamente siempre la que proporcione dichos recursos materiales, los alumnos pueden tener acceso a ellos a través de bibliotecas o, según el proyecto, a través de otras fuentes, como podrían ser empresas o Internet.
- Promueve actividad en un nivel reflexivo, lo que significa que también se discuten, deben discutirse, valores y opiniones.

El trabajo por proyectos tiene el poder de conseguir que todos los alumnos puedan beneficiarse de la enseñanza, y no únicamente los que lo hacían hasta el momento. Los resultados de una investigación desarrollada en Brasil, donde Pompeu (1992) implicó a maestros en el desarrollo del trabajo por proyectos, basado en el conocimiento no-escolar de sus alumnos, fueron muy alentadores. Los temas utilizados fueron los siguientes:

- *La comba:* proyecto de cálculo basado en actividades centradas en juegos con cuerdas de saltar, con alumnos de 6 a 10 años.
- *El juego del infernáculo:* proyecto de localización en el que exploraban el diseño y la organización de distintos esquemas del juego de la pata ciega, desarrollado con alumnos de 9 a 13 años.
- *Molinillos de papel:* proyecto de medida en el cual se usaron distintas figuras geométricas para fabricar molinillos de papel, llevado a cabo con alumnos de 9 a 15 años.
- *El globo aerostático:* proyecto de diseño en el cual alumnos, de edades comprendidas entre los 11 y los 16 años, debían diseñar y construir distintos globos de papel con unas dimensiones concretas prefijadas.
- *El juego de la Queimada:* proyecto de juego basado en un popular juego infantil en equipo, en el cual los alumnos, de edades comprendidas entre los 10 y los 15 años, debían experimentar con las reglas y la forma de la zona de juego.
- *El plan económico brasileño:* proyecto cuya actividad básica era explicar, en el cual los alumnos, de edades comprendidas entre los 13 y los 16 años, estudiaban y exploraban el significado y las implicaciones de distintos aspectos del plan económico.

En un informe de la investigación, Bishop y Pompeu (1991) afirmaron:

> *[...] hasta hoy, los resultados del cuestionario han sido impresionantes [...] Todos los maestros han realizado cambios significativos en su modo de ver la enseñanza de las matemáticas, en todos los niveles, y los alumnos se han involucrado con entusiasmo en todas las actividades [...] En lugar de la pasividad, memorización y la repetición asociadas con la escolarización tradicional, han aparecido numerosas manifestaciones, por parte de los alumnos, de compromiso en la actividad, de contribuciones hechas con confianza, aportando conocimientos específicos y concretos, y de discusiones y debates sobre ideas matemáticas significativas.* (p. 181)

También queda claro, a partir de investigaciones de este tipo, que el trabajo por proyectos posee gran potencial en situaciones de enseñanza en las que hay grupos heterogéneos, con alumnos con habilidades diferentes, con bagajes sociales y culturales diversos y con distintas aspiraciones en relación con las matemáticas. Todos los estudiantes se pueden beneficiar de proyectos bien escogidos, planteados en contextos apropiados.

Conclusión

En la actualidad, no hay duda de que es realmente posible enseñar a todos los alumnos las ideas y las habilidades significativas del conocimiento matemático. Sin embargo, la investigación ha puesto de manifiesto que es importante y esencial que el profesorado, y los educadores matemáticos en general, cambien algunas de sus ideas acerca de la educación matemática. Nuestra interpretación del significado de la educación matemática determina, en gran medida, lo que creemos posible y deseable. Puede que nuestras prácticas actuales estén inhibiendo el progreso, pero si somos capaces de empezar a reflexionar, de forma distinta, sobre dichas prácticas, seremos capaces de ver que causan dificultades a muchos alumnos y estaremos en condición de descubrir cómo podemos cambiarlas (Thompson, 1992).

En este capítulo he postulado a favor de que los constructos curriculares *etnomatemática* y *alfabetización numérica*, así como el constructo de aprendizaje *habilidades matemáticas* y los constructos de enseñanza *actividades matemáticas, métodos en grupos pequeños* y *trabajo por proyectos* son algunas de las ideas claves que contribuyen a mejorar tanto nuestra forma de pensar como nuestra práctica. Es necesario, todavía, ampliar y profundizar en las investigaciones, pero tenemos ya posibles estrategias para conseguir que todos los alumnos y alumnas se beneficien de la educación matemática.

Referencias bibliográficas

ABREU, G. de (1993): *The relationship between home and school mathematics in a farming community in rural Brazil.* Tesis doctoral no publicada. Cambridge. Cambridge University.

ABREU, G. de; CARRAHER, D.W. (1989): «The mathematics of Brazilian sugar-cane farmers», en KEITEL, C; DAMEROW, P.; BISHOP, A.; GERDES, P. (eds.): *Mathematics, Education and Society.* París. UNESCO, pp. 68-70.

ATM (1987): *Getting Started with Coursework.* Derby, UK. Association of Teachers of Mathematics.

AUSUBEL, D.P. (1963): *The Psychology of Meaningful Verbal Learning.* Nueva York. Grune and Stratton.

BARTON, B. (1996): «Anthropological Perspectives on Mathematics and Mathematics Education», en BISHOP, A.J. y otros (eds.): *International Handbook of Mathematics Education.* Dordrecht. Kluwer Academic Publishers, pp. 1035-1053.

BARTON, B.; FAIRHALL, U. (1995): «Is mathematics a Trojan horse? Mathematics and Maori education». Documento presentado en la *History and Pedagogy of Mathematics Conference.* Cairns. Australia, julio.

BISHOP, A.J. (1989): «Review of Research on Visualisation in Mathematics Education». *Focus on Learning Problems in Mathematics,* n. 11(1&2), pp. 7-16.

— (1991*a*): *Mathematical Enculturation: a Cultural Perspective on Mathematics Education.* Dordrecht. Kluwer Academic Publishers.

— (1991*b*): «Teaching Mathematics to Ethnic Minority Pupils in Secondary Schools», en PIMM, D.; LOVE, E. (eds.): *Teaching and Learning School Mathematics.* Londres. Hodder and Stoughton.

— (1993): «Influences from Society», en BISHOP, A.J.; HART, K.; LERMAN, S.; NUNES, T. (eds.): *Significant Influences on Children's Learning of Mathematics.* París. UNESCO.

BISHOP, A.J.; POMPEU, G. (1995): «Influences of an ethnomathematical approach on teacher attidudes to mathematics education», en FURINGHETTI, F. (ed.): *Proceedings of the Fifteenth PME Conference* (Vol. 1). Italia. PME, pp. 136-143.

BRADY, J.M. (1978): «An Experiment in Teaching Strategic Thinking». *Creative Computing*, n. 4(6), pp.106-109.

COOMBS, P.H. (1985): *The world crisis in education: the view from the eighties*. Oxford. Oxford University Press.

GARDNER, H. (1983): *Frames of Mind*. Nueva York. Basic Books.

GERDES, P. (1995): *Une Traditions Géometrique en Afrique-Les Dessins sur le Sable*. (3 vols.). París. L'Harmattan.

GERDES, P. (1996): «Ethnomatematics and Mathematics Education», en BISHOP, A.J. y otros (eds.): *International Handbook on Mathematics Education*. Dordrecht. Kluwer Academic Publishers.

GROUWS, D.A. (ed.) (1992): *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Nueva York. MacMillan.

HERSH, R. (1993): «Proving is Convincing and Explaining». *Educational Studies in Mathematics*, n. 24(4), pp. 389-399.

JOSEPH, G.G. (1991): *The crest of the peacock: non-European roots of mathematics*. Londres. I.B. Tauris.

LABORDE, C. (1994): «Working in Small Groups: a Learning Situation?», en BIEHLER, R. y otros.: *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*. Dordrecht. Kluwer Academic Publishers, pp. 147-158.

LEAN, G.A. (1992): *Counting systems of Papua New Guinea and Oceania*. Tesis doctoral no publicada. Papua Nueva Guinea. Univesity of Technology.

MORI, E.; TAKEUCHI, A.; OTSUKI, S. (1991): «Thinking Tool: Improving Students' Reasoning Abilities», en LEWIS, R.; OTSUKI, S. (eds.): *Advanced Research on Computers in Education*. Amsterdam. North-Holland. pp. 129-136.

NOSS, R. (1997): *New Cultures, New Numeracies. Inaugural lecture*. Institute of Education. University of London.

NUNES, T. (1993): «The socio-cultural context of mathematical thinking: research findings and educational implications», en BISHOP, A.J.; HART, K.; LERMAN, S.; NUNES, T. (eds): *Significant influences on children's learning of mathematics*. París. UNESCO, pp. 27-42.

PINXTEN, R.; van DOOREN, I; HARVEY, F. (1983): *The anthropology of space*. Philadelphia. University of Pennsylvania Press.

POMPEU, G. (1992): *Bringing Ethnomatematics into the School Curriculum: an Investigation of Teachers' Attitudes and Pupils' Learning*. Tesis doctoral no publicada. Cambridge. Cambridge University.

PRESMEG, N.C. (1986): «Visualisation in High School Mathematics». *For the Learning of Mathematics*, n. 6(3), pp. 42-46.

REUMAN, D.A. (1989): «How Social Comparison Mediates the Relation between Ability-grouping Practices and Students' Achievement Expectancies in Mathematics». *Journal of Educational Psychology*, n. 81(2), pp. 178-189.

REYS, B.J. (1993:) «Mental Computation: a Snapshot of Second, Fifth and Seventh Grade Student Performance». *School Science and Mathematics*, n. 93(6), pp. 306-315.

SHIMIZU, K.; ISHI DA, J. (1994): «The Cognitive Processes and Use of Strategies of Good Japanese Estimators», en REYS, R.E.; NOHDA, N. (eds.): *Computational Alternatives for the Twenty-first Century.* Reston, VA. National Council of Teachers of Mathematics, pp. 161-178.

SILVER, E.A. (1994): «Treating Estimation and Mental Computation as Situated Mathematics Processes», en REYS, R.E.; NOHDA, N. (eds.): *Computational Alternatives for the Twenty-first Century.* Reston, VA. National Council of Teachers of Mathematics, pp. 147-160.

STARKEY, P. (1992): «The Early Development of Numerical Reasoning». *Cognition, n.* 43(2), pp. 93-126.

STEEN, L.A. (ed.) (1990): *On the Shoulders of Giants: New Approaches to Numeracy.* Washington, D.C. National Academy Press.

TARTRE, L.A. (1990): «Spatial Orientation Skill and Mathematical Problem-solving». *Journal of Research in Mathematics Education,* n. 21 (3), pp. 216-229.

THOMPSON, A.G. (1992): «Teachers' Beliefs and Conceptions: A Synthesis of Research», en GROUWS, D.A. (ed.): *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* Nueva York. MacMillan, pp.127-146.

USISKIN, Z. (1994): «From "Mathematics for Some to Mathematics for all"», en BIEHLER, R. y otros (eds.): *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline.* Dordrecht. Kluwer Academic Publishers, pp. 135-326.

WHIMBEY, A.; LOCHHEAD, J. (1980): *Problem-solving and Comprehension. A Short Course in Analytical Reasoning.* Philadelphia, PA. Franklin Inst. Press.

3

Matemáticas en la escuela: cuestiones de equidad y justicia

Ken Clements
University of Brunei Darussalam (Brunei)

Introducción

En este capítulo se analiza el concepto de *equidad* en educación matemática, centrando la atención en la cuestión de si puede generarse equidad a partir de un currículum escolar diseñado exteriormente.

Se argumenta que la noción *igualdad de oportunidades educativas* es un concepto extraordinariamente resbaladizo en el terreno teórico, y muy difícil, si no imposible, de alcanzar en la práctica. No obstante, en este capítulo, se enfatiza la necesidad de que la administración educativa, los diseñadores de currículos y el profesorado tomen en consideración los bagajes culturales, lingüísticos, sociales y educativos de los alumnos en el momento de tomar decisiones que afectan al aprendizaje en general, y a los contextos de enseñanza de las matemáticas en particular.

Así mismo introducen las nociones de *distancia cultural* y *lingüística*, y su relación con el concepto de *equidad* en la enseñanza de las matemáticas. El autor concluye que uno de los mayores retos que deberán afrontar los educadores en el siglo XXI es el de cambiar tanto las prácticas como los supuestos relativos a la educación matemática, para generar entornos de aprendizaje y currículos más equitativos.

Equidad en el contexto de la educación matemática

El panorama internacional

En un informe de la UNESCO (1989) se propuso la siguiente interpretación del término *equidad* en educación:

Equidad. Equidad en el acceso, equidad en el trato y equidad en los resultados. La esencia primordial de la equidad en el acceso es llegar a grupos desfavorecidos, por ejemplo a las chicas, a aquellos que viven en zonas rurales o en suburbios urbanos. La equidad en el trato se centra en estudios que revelan que muchos profesores no tratan de igual modo a todos los alumnos y alumnas en el aula. También se observa que el currículum no es siempre suficientemente sensible a la diversidad cultural. Con el tiempo, los valores de las clases medias se han convertido en la norma del sistema educativo. Los obstáculos que impiden alcanzar la equidad en la obtención de resultados académicos son causados por desigualdades de acceso y trato. (p. 2)

Esta descripción centra nuestra atención en las dimensiones socioeconómicas, políticas, curriculares, pedagógicas y de evaluación de la equidad en la educación matemática. Sin embargo, no será posible profundizar en todas ellas en este capítulo.

En algunos países, las distintas dimensiones de equidad están tan íntimamente relacionadas que es imposible aislar los aspectos que se manifiestan como peculiares en cada uno de los dominios. De hecho, está comprobado que, en muchos países, la educación matemática no contribuye a que los niños adquirieran las habilidades matemáticas que necesitan en el momento actual, o necesitarán en el futuro, para sobrevivir con dignidad en su entorno inmediato y en entornos más amplios. Según Promkasetrin (1991-1992), una parte significativa de los niños en edad escolar en las regiones del Lejano Oriente no asisten a la escuela, y si lo hacen, la abandonan al cabo de pocos años, sin haber adquirido unas mínimas habilidades numéricas y de alfabetización. Muchos adultos son analfabetos y anuméricos funcionales, pero los programas no formales de enseñanza de las matemáticas son probablemente demasiado abstractos para que puedan ser útiles. En muchas regiones del Lejano Oriente, las chicas están muy poco representadas en cualquiera de los niveles educativos y hay un mayor número de hombres que de mujeres con estudios matemáticos de nivel secundario y universitario.

En Bangladesh, por ejemplo, aproximadamente una cuarta parte de los niños en edad escolar no han asistido nunca a la escuela. De los que sí lo han hecho, cerca de una cuarta parte abandonaron la escuela durante el primer curso, alrededor de un 60% nunca llegaron al cuarto y el 88% dejaron la escuela al finalizar el quinto curso. Si tomamos como referencia el número de varones, en 1997 el índice de mujeres era del 86% en la enseñanza primaria, del 46% en la enseñanza secundaria y del 19% en la enseñanza terciaria (Nath y otros, 1997). Se constata también que hay una proporción mayor de alumnado de zonas urbanas que de zonas rurales. En estas circunstancias, es casi inevitable que muchos niños no logren aprender suficientes matemáticas para ser capaces de sobrevivir con dignidad en su entorno local. Incluso hay niños de 11 y 12 años que no pueden responder a preguntas orales tan básicas como: Si divides 40 pesetas entre cuatro personas, ¿cuánto recibirá cada persona? y Si un lápiz vale 30 pesetas, ¿cuánto valdrán cuatro lápices? (Nath y otros, 1997). Ante el estado de la cuestión, no sorprende saber que la mayoría de jóvenes que no asisten a la escuela en las naciones en proceso de desarrollo de las regiones del Lejano Oriente son mujeres o proceden de zonas rurales (Promkasetrin, 1991-1992).

Definiciones de equidad como la citada anteriormente, propuesta por la UNESCO, pierden, en cierto modo, sentido cuando uno se encuentra con un chico de una familia pobre que no posee las habilidades numéricas y de lectura y escritura necesarias para salir adelante. A menudo, la escuela pretende enseñar un cuerpo de conocimientos y habilidades que no se corresponden con las necesidades inmediatas de los alumnos. La situación es realmente preocupante si, además, se hace saber repetidamente a los alumnos, a partir de evaluaciones sobre sus logros en matemáticas, que no consiguen aprender adecuadamente. Los responsables de establecer los currículos escolares y las prácticas de evaluación no se dan cuenta, a menudo, de que para muchos niños lo que acontence en el aula debe ser totalmente relevante en el *momento en que se produce.*

Los que analizan las recientes tendencias internacionales hacia cambios en la estructura y en la regulación de las escuelas constatan que se tiende a separar los responsables de auditar las prácticas y los logros escolares de los responsables del diseño curricular (Beare, 1995; Gewirtz y otros, 1995). Como consecuencia, las escuelas son, a menudo, víctimas de discursos antagónicos acerca de cómo deberían actuar (Gordon y Whitty, 1997). Puede que el término equidad aparezca de forma retórica en folletos e informes escolares, pero lo que mueve a profesorado y a responsables de los centros es probable que sea los resultados en tests externos y el interés en finalizar el currículum. Cuando esto ocurre, se ignora con facilidad la triste situación de aquellos niños que, sin merecerlo, tienen grandes dificultades para alcanzar los resultados que especifica el currículum.

Más cerca de casa: el escenario local

El apartado anterior presenta una definición de equidad propuesta por la UNESCO y proporciona datos de naciones del Lejano Oriente para poner de manifiesto que la educación matemática es un fracaso frente muchos niños. Expresándome crudamente, puede decirse que hay pruebas abundantes de que muchos niños no aprenden, a través de lo que se les enseña en la escuela, las habilidades matemáticas que necesitarán para vivir con dignidad.

Empezar un artículo como éste con una cita extraída de un documento de la UNESCO y después aportar datos de las regiones del Lejano Oriente tiene el riesgo de que los educadores y burócratas de las naciones de la Europa Occidental piensen que alcanzar la equidad en educación matemática es un asunto que no les concierne. Es fácil también creer que la UNESCO, y otras organizaciones similares, atenderán cualquier problema que pueda surgir. No obstante, hay evidencias de que prácticamente en todos los países, incluyendo las llamadas naciones tecnológicamente avanzadas, existen obstáculos que reducen las oportunidades de los estudiantes para recibir una educación adecuada. Según Darling-Hammond (1996) y Fradd y Lee (1997) recursos pedagógicos insuficientes, actitudes inapropiadas del profesorado, prácticas docentes cuestionables, falta de preparación y de orientación en la implementación de programas efectivos y relevantes serían algunos de estos obstáculos. Confeccionar listas de obstáculos similares es fácil. Sin embargo, *la interpretación* de los obstáculos percibidos, que podríamos llamar *desembalaje local,* es lo que determina hasta qué punto dichos obstáculos son tratados adecuadamente en el escenario concreto de la clase. Las acciones que se emprenden para superar los obstáculos en las escuelas o en el sistema escolar adquieren, por lo tanto, una gran importancia.

Imaginemos, por ejemplo, el caso ficticio de una escuela en Barcelona en la que se acaban de incorporar cerca de 25 alumnos, de entre 12 y 15 años, procedentes de Marruecos, Nigeria y otros países africanos. Imaginemos también que ninguno de estos alumnos habla castellano ni catalán y que el profesor que les ha sido asignado no habla tampoco las lenguas de sus alumnos. ¿Qué debería hacer el profesor? ¿Qué matemáticas debería intentar enseñar y qué metodología debería usar?

El escenario descrito en el párrafo anterior se percibe como un poco más urgente, algo más cercano a la realidad del posible lector que las afirmaciones de la UNESCO. Sin embargo, aún no he mencionado todas las tensiones que inevitablemente esta situación conlleva. Aunque se presupone que la mayoría de los jóvenes dejarán la escuela dentro de pocos años, algunos de ellos demuestran tener considerables *habilidades* académicas. ¿Debería esto afectar a las decisiones sobre qué matemáticas debería enseñárseles? ¿Debería el profesor seguir el currículum matemático básico oficial, cuando parece obvio que muchos de los jóvenes no están preparados para aprender lo prescrito? Es probable que aparezcan problemas de disciplina en el aula debido a que los jóvenes no pueden entender la mayor parte del lenguaje que usan el profesor o muchos de sus compañeros de clase. ¿Qué puede hacer el profesor? ¿Qué tipo de ayuda debería ofrecerse a los alumnos para superar los problemas de lenguaje? La pregunta no tiene fácil respuesta, especialmente cuando la escuela no está bien dotada, y son muchos los alumnos y los profesores de otras clases con problemas similares.

Imaginemos ahora otra escuela en Barcelona. Es una escuela de secundaria en un barrio rico. La mayoría de los estudiantes provienen de familias acomodadas y son hijos de profesionales. La escuela, que se enorgullece de su nivel de matemáticas, adopta procedimientos de agrupación muy rígidos, concentrando los mejores estudiantes en matemáticas en grupos avanzados y el resto en grupos medios o bajos. Sin embargo, debido a la política educativa, se sigue un currículum común, de modo que a los alumnos de los grupos bajos se les enseña, más o menos, los mismos contenidos, y en el mismo tiempo, que a los de los grupos avanzados. Todo esto se hace en nombre de la *individualización*, la *equidad* y *la igualdad de oportunidades educativas*. Se argumenta que se distribuye a los alumnos en grupos para que puedan satisfacerse sus necesidades individuales. Los profesores son capaces de adecuar su nivel de enseñanza a las habilidades y al rendimiento mostrado por sus alumnos; a pesar de ello, al seguir un mismo currículum se da a todos los estudiantes la misma oportunidad para proseguir con las matemáticas que necesitarán para progresar hacia niveles de estudio superiores.

Supongamos también que, en los informes escolares, hay pruebas que apoyan la política de agrupación de los alumnos. Las estadísticas demuestran que, en el pasado, gran cantidad de alumnos de los grupos avanzados de matemáticas de esta escuela, prosiguieron estudios superiores de matemáticas o ciencias, entraron en prestigiosos programas de medicina, ingeniería u odontología, etc. No obstante, debido a que algunos de los estudiantes de los grupos medios accedieron también a estudios superiores, los responsables del centro defienden que su programa de matemáticas proporciona a los alumnos *igualdad de oportunidades educativas*. En cualquier caso, tal y como defiende el director, los procedimientos que sigue la escuela en cuanto a formación de grupos no son totalmente rígidos. Hubo incluso el caso notable de un chico que había empezado en un grupo de matemáticas de nivel bajo que pasó al grupo de nivel medio y posteriormente al grupo avanzado.

Algunos padres de alumnos de los grupos de matemáticas bajo y medio se han quejado de que la política de agrupación que sigue la escuela, en relación con las matemáticas, cierra a sus hijos la posibilidad de tener acceso a ciertas carreras muy bien remuneradas. Se quejan, especialmente, de que el método empleado para la asignación de grupos esté basado en los resultados obtenidos en pruebas estandarizadas diseñadas por gente ajena a la escuela. A menudo, los padres protestan afirmando que sus hijos no dieron lo mejor de sí mismos en dichas pruebas, pero los responsables del centro argumentan que éste es el procedimiento más justo.

Posiblemente esta situación sea ya más similar a las que conocemos. En mi opinión, en el escenario del segundo centro no aparecen los principios de justicia y equidad. Siento también empatía por el profesorado, alumnado y padres del primer centro, pero no puedo ofrecer una solución definitiva a sus problemas de equidad, una solución que proporcione a los alumnos una *oportunidad justa*. Sugiero, no obstante, que en casos como éste, probablemente la mejor solución sería una solución establecida y desarrollada a nivel local, no dictaminada por burócratas centralistas de ideologías fijas. Quiero también afirmar que la mejor prueba para determinar la efectividad de un currículum es comprobar si, en general, los alumnos están aprendiendo algo que les es de utilidad. Los mejor cualificados para tomar este tipo de decisiones son los padres, los profesores y los jóvenes.

Intentando hacer llegar las matemáticas a todos los alumnos

Obsérvese el valor metafórico del verbo *llegar* en la segunda frase de la cita de la UNESCO con la que he empezado este escrito. La metáfora sugiere que los educadores deberían intentar crear las condiciones para que los actuales currículos y sistemas de escolarización fueran mucho más accesibles y atractivos para los alumnos que actualmente no pueden asistir a la escuela (o deciden no asistir) de manera regular. De la metáfora *llegar* se infiere que los sistemas de escolarización, y particularmente sus currículos, deberían ser modificados para adaptarse a las necesidades y contextos de aquellos que no se sienten inclinados a asistir a la escuela, y que cuando lo hacen, no se benefician de ello.

En 1993, el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) publicó en Estados Unidos un manual complementario de los *NCTM's Standards* con el evocativo título de *Reaching all Students with Mathematics*[1] (Cuevas y Driscoll, 1993). En el prólogo de este manual, los editores manifestaban que, a pesar de que el libro había

1. *Reaching all Students with Mathematics* podría traducirse por 'Hacer llegar las matemáticas a todos los alumnos'. (N. de la T.)

nacido de la convicción de que todos los alumnos pueden aprender un importante núcleo de matemáticas de alta calidad, la tarea de llegar a todos los alumnos es difícil, y requiere esfuerzos extraordinarios y no sencillamente la mera adaptación de los actuales esfuerzos (p.vii).

«Equidad en la educación matemática» es una expresión del tipo de las que exigen una respuesta emocional positiva. *Por supuesto, todos* los educadores y profesores de matemáticas quieren desarrollar sistemas de educación que sean razonables y justos para *todos* los alumnos. En otro trabajo, junto a mi colega Nerida Ellerton (Clements y Ellerton, 1996), argumento que durante la segunda mitad del siglo xx, los educadores matemáticos han sido seducidos por argumentos retóricos planteados en términos emotivos. La importancia de las cuestiones de equidad en la educación matemática exige algo más que asentir sumisamente a retóricas persuasivas. No basta tampoco con aceptar, simplemente, que es imposible evitar las directrices, bien fundamentadas, establecidas por burócratas, con buenas intenciones, que controlan los fondos, pero desconocen los trabajos pertinentes en relación con la educación matemática (Ellerton y Clements, 1994).

Los educadores matemáticos deben reflexionar atentamente antes de tomar partido por propuestas que establecen cómo deben tratarse los importantes dilemas de equidad. Si hemos aprendido algo de la historia de la educación matemática, deberemos reconocer que muchos matemáticos de alto nivel, la mayoría de matemáticos respetables, de educadores matemáticos y educadores en general se han equivocado en la formulación de métodos para conseguir el importante objetivo de equidad en la educación matemática.

En los años sesenta se nos dijo que la(s) Matemática(s) Moderna(s) conseguirían que los estudiantes llegasen a comprender las matemáticas. Cuando en los años setenta se vio que dichas promesas no se habían cumplido, algunos países volvieron a enfoques basados en el aprendizaje individualizado por dominio[2], que —según confiaban los teóricos— permitiría a todos los alumnos llegar a dominar las matemáticas. En 1980, el NCTM prometió que en la década de los ochenta las matemáticas escolares se caracterizarían por el trabajo en entornos de resolución de problemas genuinos. Se encontrarían formas y medios para que, en las escuelas, las clases de matemáticas dejaran de ser los áridos entornos de vuelta a lo básico que habían surgido después de la era de la(s) Matemática(s) Moderna(s), para convertirse en lugares donde los alumnos se enfrentarían al reto de solucionar problemas del mundo real. Sin embargo, cuando a mediados de los ochenta se vio que el movimiento de resolución de problemas había fallado en el cumplimiento de sus promesas, se impuso la era del constructivismo.

Esta vez el mensaje asegura, a todos aquellos que quieran oírlo, que por fin los profesores podrán enseñar matemáticas de tal forma que puedan satisfacerse las necesidades de todos los alumnos. A partir de las perspectivas constructivistas, que acaban de adquirir, los profesores crearán para sus alumnos entornos de aprendizaje rico. Se posibilitará que los alumnos construyan conocimientos importantes y desa-

2. *Individualised mastery learning*, en el original. (N. de la T.)

rrollen su comprensión matemática. Los nuevos enfoques en la formación del profesorado y el desarrollo profesional conseguirán que los profesores sintonicen cada vez más con la forma de pensamiento de todos y cada uno de sus alumnos, y esto les facilitará la búsqueda de fórmulas para hacer participar a sus alumnos en un discurso matemático rico.

Estos eran los argumentos retóricos a partir de los cuales los educadores matemáticos empezaron a hablar de aplicar las perspectivas constructivistas al diseño del currículum de matemáticas (Steffe, 1990) y a afirmar que estaba emergiendo un nuevo paradigma para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas centrado en enfoques constructivistas (Pateman, 1993, p. 70). No obstante, al cabo de pocos años empezaron a oírse comentarios que sugerían que el constructivismo no cumplía sus promesas. Por ejemplo, la prestigiosa revista de educación matemática *Educational Studies in Mathematics* publicó en 1996 un artículo de Zevenbergen (1996) con el provocativo título de «El constructivismo como discurso burgués liberal».

Los NCTM Standards, vistos desde una posición estratégica de equidad

Durante la década de los ochenta, los educadores de los Estados Unidos decidieron implicarse seriamente en la reforma del currículum. Esta decisión culminó con los tres documentos *Standards* que el NCTM publicó (1989, 1991, 1995) junto con una gran variedad de documentos de soporte e investigaciones. El primero de estos documentos, *Curriculum and Evaluation Standards*, con 258 páginas, propuso nuevos objetivos para la educación matemática en la era de la información (NCTM, 1989). Se especificaban trece estándares desde preescolar hasta el grado 4 (de 5 a 9 años), trece estándares para los grados 5-8 (de 10 a 13 años) y catorce para los grados 9-12 (de 14 a 16 años). Para cada uno de estos tres niveles, los cuatro primeros estándares están relacionados con la resolución de problemas, la comunicación, el razonamiento y el establecimiento de conexiones. Los otros estándares especificaban varias áreas de las matemáticas como el álgebra, la geometría y el sentido numérico. Todos los estándares se presentaban del mismo modo, con una especificación concisa acerca de los resultados del aprendizaje de los alumnos, expresados en términos conductistas (por ejemplo, «en los grados 5-8, el currículum de matemáticas se debe incluir la exploración de estadísticas en situaciones del mundo real de tal forma que los estudiantes puedan recoger, organizar y describir datos sistemáticamente», NCTM, 1989, p. 105).

McLeod, Stake, Schappelle, Mellissinos y Gieri (1996) mostraron que algunas de las personas influyentes del NCTM, responsables de supervisar el desarrollo de los *Standards*, se movían condicionadas por el requisito de que los estándares permitiesen medir el rendimiento. Para ellas, un estándar era una especificación que debía servir para medir o comprobar algo. A pesar de que la idea de estándar fue posteriormente suavizada hasta llegar a definirse como «una frase que puede usarse para juzgar la calidad de un currículum de matemáticas», a lo largo de los documentos puede verse reflejada una interpretación neoconductista del aprendizaje, basada en la obtención en resultados.

Los *Standards* propusieron que todos los alumnos debían estudiar un núcleo común de matemáticas. Recientemente, este punto de vista se ha puesto de manifiesto en el impulso dado al *Álgebra para todos* del NCTM, mediante el cual se espera que todos los estudiantes de secundaria de Estados Unidos cursen *Álgebra 1.* Stiff (1993) expuso el objetivo del NCTM de llegar a todos los niños en los siguientes términos:

Al decir *todos los niños* nos referimos a:

- *Alumnos a los que, de algún modo, se ha negado el acceso a oportunidades educativas al igual que a aquellos a los que no se les ha negado.*
- *Los afroamericanos, los hispanos, los indios americanos y otras minorías al igual que a los alumnos considerados parte de la mayoría.*
- *Las alumnas al igual que a los alumnos.*
- *Los alumnos que han fracasado en las matemáticas escolares y a los que no. (p. 3)*

Los educadores de todo el mundo deberían considerar este objetivo no sólo como algo loable, sino también como algo digno de emular en cualquier lugar en que se enseñen matemáticas.

A pesar de lo desagradable que resulta formular la pregunta, los educadores matemáticos deben afrontar directamente una cuestión: ¿Es sensato, *realmente*, esperar que todos los alumnos sigan el *mismo* currículum básico? Con anterioridad (Clements i Ellerton, 1996), me he referido a este enfoque con el término *corderos para el sacrificio* (Clements y Ellerton, 1996). Bajo este enfoque, «intrusos» bien educados y repletos de buenas intenciones imponen currículos básicos a estudiantes de culturas distintas, dando como resultado lo siguiente:

La mayoría de estudiantes a los que se exige aprender matemáticas se convierten en corderos para el sacrificio en los altares mellizos de la eficiencia educativa y el racionalismo económico. (Clements y Ellerton, 1996, p. 36)

Esto es especialmente cierto cuando las iniciativas de un currículum básico van acompañadas de programas de evaluación nacionales y estatales, tal como ocurre en muchos de los estados de Estados Unidos (American Education Research Association, 1995), en el Reino Unido (Noss, 1990), en Australia (Ellerton y Clements, 1994) y progresivamente en muchas otras naciones (Gordon y Whitty, 1997).

Otras soluciones al problema de la equidad en la educación matemática basadas en resultados

Hay muchos países cuyos sistemas educativos han adoptado un currículum de matemáticas común, apoyado por un sistema bastante rígido de evaluación de su efectividad. En noviembre de 1997, finalicé un trabajo como supervisor de un proyecto educativo para la formación de profesores (Asian Development Bank Teacher Education Project) en Vietnam, donde encontré un sistema educativo extremadamente centralizado. En Vietnam, la política curricular exige que se enseñe, en todo el país, una misma lección de matemáticas el mismo día, a la misma hora, con los mismos libros de texto y de modo acorde a la metodología propuesta en las guías didácticas, redactadas también centralizadamente. Los contenidos de los libros de texto, escritos mayoritariamente por profesores de matemáticas universitarios, son variedades muy formales de la(s) matemática(s) moderna(s) de los años 70. Se pretende que los estudiantes de todo el país hagan los mismos ejercicios en clase y los mismos deberes, y la promoción de un curso a otro se rige por exámenes nacionales. Todo esto ocurre en nombre de la *igualdad de oportunidades en la educación*. No obstante, los miembros del Partido Comunista están realmente preocupados ya que la mayoría de los niños que habitan remotas zonas de montaña casi nunca van a la escuela, ni tan siquiera a la escuela primaria. Este hecho es particularmente relevante entre los niños que provienen de grupos étnicos minoritarios (*Vietnam News*, January 8, 1997, p. 5).

Durante la última década, los imperativos económicos han provocado que muchas naciones interpretaran el currículum y la escolarización bajo el enfoque de la educación basada en los resultados (OBE, Outcomes-based education). Los responsables de la política educativa han entrado en un vórtice de racionalismo económico, originado por el hecho de que determinadas posiciones clave dentro de los ministerios de educación regionales y nacionales están ocupadas por celosos defensores de la gestión y el control de la calidad total (TQM, Total Quality Manegement). Durante la última década, los enfoques OBE han sido impuestos en muchos estados de los Estados Unidos (Kraus International Publications, 1993) y en los sistemas educativos de muchas otras naciones. Por ejemplo, los sistemas OBE se han impuesto en todos los estados del territorio australiano (Ellerton y Clements, 1994), en las provincias canadienses (Barlow y Robertson, 1994), en Sudáfrica (*Sunday Times Metro*, Johannesburg, 23 February 1997, Education Supplement) y en el Reino Unido (Noss, 1990; Davies, 1998). En estas naciones se ha pedido al profesorado y a los centros que cumplan con la documentación del currículum y den respuesta a las demandas de evaluación de rendimientos de las reformas OBE. Estas reformas han obligado a que los profesores centren su atención en la exigencia de rendimiento con menor tiempo disponible para atender a las necesidades individuales de los alumnos. A pesar de que los burócratas y reformadores proclaman que hay una cierta tendencia hacia una mayor *equidad*, los profesores se enfrentan al incremento de papeleo que exige la aplicación de la OBE. Además, hay pocas evidencias de que de los enfoques OBE hayan dado lugar a una mejora en los resultados de los alumnos (Davies, 1998).

El panorama general de lo que ha estado sucediendo a raíz de las iniciativas OBE queda patente en la siguiente observación que resume los efectos de dichas iniciativas en algunos de los centros más duros de Chicago (Stake y otros, 1994):

> *Los planes de reforma del Estado y del Distrito exigían la formalización de una enseñanza excesivamente intuitiva. Había que marcar objetivos. Había que planificar las lecciones. El aprendizaje debía medirse objetivamente. Todo debía estar codificado, por escrito. Se suponía que el hecho de escribirlo todo y la disponibilidad del texto escrito facilitaría la acción. Para muchos profesionales de Chicago, al igual que de otras partes, escribir resultaba artificial, exigía una excesiva simplificación, invitaba al engaño y consumía gran cantidad de tiempo. Rara vez se hacía referencia a los documentos producidos, en parte porque no contemplaban demasiado sus propias concepciones de enseñanza, en parte también porque fueron pocos los profesores y directores que desarrollaron el hábito de trabajar a partir de reglas formales y documentos. Muchos reformadores siguieron creyendo que los documentos se convertirían progresivamente*

en rutinas y que, en algún momento, reemplazarían el estilo intuitivo y que, en definitiva, la instrucción sería más eficaz. Pero la transformación era un cambio mucho mayor de lo que creía la mayoría. (p. 119)

Ellerton y Clements (1994) y Groundwater-Smith (1993) han proporcionado evidencia de casos similares en Australia y el Reino Unido, respectivamente, donde las expectativas de una formalización semejante han tenido los mismos efectos devastadores.

En relación con el celo misionero de los burócratas especializados en el control de la calidad total (TQM) y de los profesores partidarios de la educación basada en los resultados (OBE) que pretenden llegar a *todos* los niños a través de un currículum matemático común, tal vez la primera pregunta que deberíamos plantearnos es la siguiente: ¿Debe la sociedad insistir en que *todos* los niños estudien el núcleo común básico de conocimientos y habilidades constituido por las Matemáticas, con *M* mayúscula, internacionalizadas (Bishop, 1988)? Si la respuesta a esta pregunta es afirmativa, entonces las preguntas siguientes son: ¿Qué partes de las Matemáticas, *M* mayúscula, son suficientemente «básicas» y «comunes» para que todos los niños, de cualquier parte del mundo, necesiten conocerlas? ¿Sobre qué argumentos se fundamenta la afirmación de que ese conocimiento es básico para todos los niños?

Otra pregunta que los educadores matemáticos deberían plantearse antes de decidir seguir el camino marcado por la TQM/OBE para alcanzar la equidad en la educación matemática es: ¿Desde la investigación en educación matemática, puede sostenerse que los enfoques neoconductistas de la OBE (que especifican los resultados de los alumnos y los indicadores en términos conductistas), conducirán a la mejora de los programas escolares? En otro artículo, junto con Nerida Ellerton (Clements y Ellerton, 1996), Nerida Ellerton y yo nos hicimos eco de los resultados de una serie de investigaciones para argumentar que la tendencia hacia el reduccionismo de la OBE no ha mejorado, y de hecho no es probable que mejore, la calidad global de la enseñanza y del aprendizaje de las matemáticas.

¿Qué es el conocimiento matemático básico? Estudio de casos en Australia

Como ya hemos visto, son muchos los que creen que la equidad en la educación matemática requiere que todos los alumnos estudien un núcleo común básico de matemáticas. Pero hay varios educadores de prestigio que cuestionan si existe, o debería existir, tal núcleo básico común. Stephen Harris (1990), un educador con amplia experiencia con grupos de aborígenes australianos ha afirmado:

La naturaleza y la magnitud de las diferencias entre las culturas aborígenes y las europeas es tan grande que la única conclusión honesta que podemos establecer es que son notablemente incompatibles. Las dos culturas son antagónicas, contienen más extremos en conflicto que similitudes. Están enfrentadas la una con la otra desde sus cimientos. Reconocer y aceptar la verdad del término incompatible fue para mi [...] el punto de liberación teórica y el comienzo de una teoría educativa mas efectiva que pudiese aplicarse a las escuelas aborígenes. Este grado de diferenciación es tan grande que es más difícil encontrar lo que tienen en común en términos culturales que ver sus diferencias. Incluso rasgos humanos universales como el amor, el odio, el miedo, el *hambre, el dolor y la risa pueden estar condicionados o contextualizados culturalmente, contribuyendo a reafirmar el significado de la incompatibilidad.* (p. 9)

Como era de esperar, el punto de vista de Stephen Harris ha sido ampliamente rebatido incluso dentro de las sociedades aborígenes (Jones y otros, 1995). Siguiendo una línea de razonamiento similar (aunque no idéntica), Bishop (1990) ha descrito las Matemáticas Occidentales como el arma secreta del imperialismo cultural.

Pam Harris (1991) —que no tiene ningún parentesco con Stephen— documentó la experiencia de su trabajo durante más de 20 años intentando enseñar matemáticas occidentales a niños aborígenes. A diferencia de Harris, esta autora cree importante que el profesorado de alumnos aborígenes intente establecer vínculos entre las formas de conocimiento aborígenes y las matemáticas occidentales. Estableció que es necesario que aquellos que enseñan matemáticas a alumnos aborígenes sean mucho más sensibles a las diferencias existentes entre el modo de ver el mundo de los aborígenes y los no aborígenes. Su libro, *Mathematics in a Cultural Context: Aboriginal Perspectives on Space, Time and Money*, es un intento de transmitir a otros profesores, aborígenes y no aborígenes, el conocimiento y la sensibilidad que adquirió como maestra no aborigen.

No cabe duda de que los controvertidos aspectos aquí en discusión son de suma importancia. En 1975, los *Australian Studies in School Performace* (Bourke y Parkin, 1977), pusieron de manifiesto que los alumnos de los últimos cursos de primaria y de principios de secundaria de escuelas aborígenes que habian seguido un currículum occidental no eran capaces de leer la hora en un reloj analógico. Sólo el 2% de niños de 10 años y el 3% de los de 14 años fueron capaces de hacerlo. Al presentar estos resultados, Bourke y Parkin (1977) hicieron notar que la tarea estaba «casi con seguridad fuera de la experiencia» de muchos de los alumnos aborígenes (p. 149).

A pesar de que serían pocos los que discutirían que decir la hora es realmente una habilidad básica para un niño de 14 años, debemos enfrentarnos a la posibilidad de que, a pesar de la buena retórica de los que predican las teorías de la OBE y de los que legislan su práctica, las realidades de la OBE suponen, a menudo, un obstáculo para que los niños puedan aprender las habilidades básicas que necesitan y desean conocer. La política de la OBE, que establece un currículum común, insiste raramente en la importancia de que los profesores identifiquen y atiendan sistemáticamente las necesidades individuales de los alumnos. Los defensores de un curriculum básico común piensan en términos de cómo ayudar a un alumno de 14 años a solucionar ecuaciones cuadráticas, hecho sin demasiado sentido para un chico que no sabe leer la hora en un reloj. Además, la extraordinaria presión de los sistemas OBE sobre maestros y profesores, para que se ciñan a los libros de texto, conlleva que éstos no tengan tiempo para intentar averiguar si sus alumnos saben leer la hora, o si saben realizar las cuatro operaciones con números naturales. El profesorado sufre demasiada presión, al deber preparar a sus alumnos para el siguiente test de trigonometría o de funciones algebraicas, como para que pueda contemplar la posibilidad de comprobar si sus alumnos saben algo que no esté en el currículum básico de ese año (Swann y Brown, 1997).

Los defensores de la noción de currículum común básico preguntan a menudo en qué fundamentos se basan tutores y consejeros al tomar decisiones que conducen a que unos alumnos sigan un currículum y otros alumnos sigan otro. Se acusa, a menudo, a los que defienden la diferenciación del currículum no sólo de prejuzgar las necesidades y capacidades de los alumnos, sino también de estar dispuestos a excluir de una futura participación en programas académicos de prestigio, que conducen a carreras bien pagadas y satisfactorias, a aquellos alumnos que ellos colocan en líneas no académicas, o menos académicas.

Presentar aquí esta controversia tiene como objetivo conseguir que el lector reflexione acerca de lo que constituye *equidad* y *justicia* en las matemáticas escolares. Si el lector enseña matemáticas, piense en los alumnos que ha tenido ¿Cree que aprender matemáticas en la escuela ha resultado de provecho para todos ellos?

Factores de lenguaje y equidad en la educación matemática

John Harris (1990), que no tiene ningún tipo de relación con Stephen o Pam, hizo notar que muchos niños aborígenes australianos crecían en hogares donde no se hablaba inglés. Sin embargo, en la escuela primaria, se espera que los niños aborígenes aprendan matemáticas con profesores que enseñan en inglés y con libros de texto escritos en inglés. Su comprensión matemática se evalúa a través de exámenes escritos en inglés. La necesidad de traducir puede resultar una gran carga cognitiva adicional para aquellos alumnos que están luchando para llegar a comprender conceptos que son culturalmente distantes a los de sus culturas tradicionales. Sin embargo, los que argumentan a favor de un currículum básico común se manifiestan reticentes a conceder concesiones basándose en factores lingüísticos; normalmente defienden la evaluación a través de cuestionarios escritos, por supuesto, en una lengua que algunos niños deben traducir. Este tipo de creencias son, a menudo, el resultado de lo que John Harris (1990) ha denominado «los escritos inexactos, erróneos y racistas de mitades del siglo XIX» (p. 34). Aquellos profesores y responsables de centros, con poca empatía hacia culturas o lenguajes tradicionales, a los que consideran *primitivos*, contribuyen a empeorar la situación.

Pam Harris (1987), que realizó un provocativo análisis del lenguaje y las prácticas de medida en comunidades aborígenes australianas, argumentó que, en dichas comunidades, las matemáticas escolares no guardan relación alguna con la cultura y la lengua. Concluyó que cualquier programa de numeración aplicada, escrito para niños australianos de habla inglesa que vivan mayoritariamente en zonas urbanas, es probablemente inapropiado e inadecuado para ser usado con niños aborígenes que hablan la lengua vernácula y viven en comunidades tribales remotas.

Defendía su punto de vista con los siguientes argumentos:

- Muchos de los conceptos presentados resultarán extraños para los alumnos aborígenes, y entrarán en conflicto con su visión tradicional del mundo.
- En muchos casos, la forma de expresar conceptos en la lengua materna de los niños diferirá de la forma de expresarlos en inglés, causando, por lo tanto, confusión en cuanto al vocabulario y a la terminología.
- En algunos casos, cuando los conceptos sean totalmente ajenos a las culturas de los niños, no será posible explicarlos de forma concisa en su propia lengua. Por lo tanto, los niños deberán aprender simultáneamente nuevo

vocabulario y nuevos conceptos y, a menudo, se esperará que los aprendan siendo la lengua de instrucción distinta de su lengua materna.

- Muchos de los conceptos introducidos no serán reforzados fuera de la escuela, ya que no se usan en las comunidades aborígenes (y a menudo se hallan en conflicto con las tradiciones establecidas).
- Los conceptos presentados, a menudo, dan por supuesto conocimientos y experiencias previas que los niños aborígenes no poseen e ignoran, en cambio, los distintos tipos de conocimiento y experiencia que éstos poseen realmente.
- Los programas no tienen en cuenta las distintas culturas de los niños aborígenes, y, por tanto, no respetan el principio pedagógico fundamental de que la enseñanza debería empezar por lo conocido antes de proceder hacia lo desconocido.

Cuando la lengua de instrucción no es la lengua materna del alumno

Los argumentos establecidos por Pam Harris deben interpretarse teniendo en cuenta la afirmación de Secada (1988), que mantiene que, a menudo, en las investigaciones en educación matemática en los países desarrollados, se ha considerado, tácitamente, a los alumnos de las minorías culturales como casos marginales y alejados de la norma. Secada (1988) señaló que en muchas partes del mundo ser bilingüe es normal y que, a pesar de ello, la mayoría de investigaciones en educación matemática desarrolladas hasta el momento estaban centradas en niños monolingües creyendo que no hacía falta prestar ninguna atención especial a los niños bilingües. Investigaciones como las desarrolladas por Clements y Jones (1983) han puesto de manifiesto los efectos devastadores sobre la psique, y sobre el desarrollo matemático de los niños que, durante años, se ven obligados a seguir clases de matemáticas en las que sus profesores hablan una lengua que ellos ni entienden ni hablan.

No obstante, me apresuro a añadir que, a menudo, es difícil decidir cuál debe ser la política que se debe seguir en cuanto a la lengua de instrucción en la clase de matemáticas. Consideremos, por ejemplo, la situación de Brunei Darussalam, una pequeña nación de 300.000 habitantes en la que trabajo actualmente. El gobierno ha decidido que, en las clases de matemáticas, el bahasa va a ser la lengua de instrucción durante los tres primeros años de escolarización para cambiar posteriormente al inglés. De hecho, el bahasa es la lengua hablada en la mayoría de los hogares, y por consiguiente, cuando los niños llegan al cuarto grado (9 años) se espera que aprendan matemáticas con un profesor que habla una lengua que ellos apenas entienden. El currículum de matemáticas para los grados 4-6 (9-11 años) no tiene en cuenta el cambio en la lengua de instrucción, siendo Brunei una nación en la que se espera que los niños de primaria aprendan más matemáticas que los niños de primaria de muchas otras naciones.

Algunas de las cuestiones ligadas a la situación descrita en el párrafo anterior casi desafían cualquier intento de solución. El gobierno de Brunei Darussalam ha decidido que quiere que sus alumnos hablen inglés fluidamente al graduarse y, por tanto, debe haber un momento en que la lengua de instrucción pase a ser el inglés.

Hay algunos que creen que el inglés debería ser la lengua de instrucción en todos los cursos de primaria. Sin embargo, el motivo por el cual he citado este caso es remarcar los aspectos de equidad relacionados con dicho planteamiento. ¿Es *justo* esperar que un niño de 9 años aprenda las mismas matemáticas que, por ejemplo, un niño de Singapur o China, cuando en realidad no entiende lo que le dice su profesor? No tengo una respuesta definitiva a esta pregunta, sin embargo considero los aspectos de equidad como de mayor importancia, especialmente si se tiene en cuenta que en algunos de los hogares de Brunei se habla mucho más el inglés que en otros. Debe reconocerse en su favor que el Ministerio de Educación de Brunei es consciente del dilema de equidad, y está investigando si sería preferible seguir otras directrices políticas en cuanto a la lengua de instrucción.

Distancia cultural y lingüística y equidad en educación matemática

A partir de este punto utilizaré los conceptos de distancia cultural y lingüística, aunque de forma bastante intuitiva, para centrar la atención en ciertos factores que deben tener en cuenta todos aquellos que sienten la necesidad de generar entornos de educación matemática más equitativos.

No pretendo definir formalmente los conceptos de distancia lingüística y cultural, pero los ilustraré con ejemplos. Intenté utilizar los diagramas de Venn para mostrar cómo la distancia (o *no*) entre normas matemáticas, culturales y sociales, dentro de las distintas sociedades en las que he vivido y trabajado, ha afectado de una manera crucial las iniciativas encaminadas a la formación matemática de esas sociedades. Pero, pronto me di cuenta de que los diagramas de Venn, esencialmente representaciones no métricas, no serían de ayuda en una discusión en la que se utiliza una *metáfora de distancia* para centrar la atención en consideraciones de equidad en la educación matemática.

Reflexionando acerca de distintos sistemas culturales y de valores y la educación matemática

En Papua Nueva Guinea

En 1980, pasé una semana en las montañas del Eastern Highlands, en Papua Nueva Guinea (PNG), donde viví con los baruya en un pueblo llamado Wonenara y sus alrededores (véase Clements y Jones, 1983). En aquella época, los baruya no tenían nombres para referirse a los números, pero representaban la cardinalidad de un grupo de objetos señalando distintas posiciones en la parte superior del cuerpo. Un distinguido antropólogo marxista, Maurice Godelier (1977), documentó algunas de las concepciones que los baruya tienen del mundo, radicalmente opuestas a las anglosajonas. Richard Lloyd (1969), del Summer Institute of Linguistics, documentó la lengua baruya, altamente compleja. Conviví con Lloyd durante gran parte de mi estancia en Wonenara, y de él aprendí que muchas de las estructuras y formas de la lengua baruya no aparecen en la lengua inglesa. Aunque, en general, el significado de cualquier frase en inglés podía trasladarse al baruya y viceversa, los sistemas de recuento, clasificación y razonamiento, y las estructuras semánticas del inglés y del baruya presentaban muchas diferencias notables. Esto hacía que la tarea de enseñar a los niños los conceptos básicos de las matemáticas escolares fuera un reto para el único maestro de la escuela local, que además desconocía la lengua baruya.

En 1980, en la escuela local, las clases se daban en inglés. No obstante, el aula era el único lugar en que los 120 alumnos de la escuela oían hablar en inglés, y como la escuela no llevaba más de un año funcionando, las oportunidades que los niños habían tenido de oír, hablar y escribir en inglés habían sido realmente limitadas. Tuve claro que los niños no entendían prácticamente nada de lo que el maestro decía. Tenían muy pocas oportunidades de aprender y tener éxito con las matemáticas occidentales. De hecho, la pregunta que deberíamos hacernos es por qué se les exigía que las aprendieran.

Bishop (1988) ha argumentado que existen seis similitudes (o *universales*) en las diferentes manifestaciones de las matemáticas encontradas en el mundo. Estos universales son *contar, localizar, medir, diseñar, jugar* y *explicar.* Ciertamente, había pruebas de que en los pueblos cercanos a Wonenara todos los adultos contaban, localizaban, diseñaban... No obstante, el modo en que lo hacían guardaba poco parecido con lo que se enseñaba en las clases de matemáticas en la escuela de Wonenara.

Los baruya adultos nunca habían usado, ni habían sentido la necesidad de hacerlo, libros o lápices, y de hecho, tradicionalmente sólo habían dibujado dos imágenes básicas (una zarigüeya y un jardín de taros), trazados en el suelo con un palo. Sus diseños aparecían en formas autóctonas. Las cabañas tenían una apariencia característica y la población llevaba adornos de hueso y otros materiales en el cuello, en la nariz y en la cintura. Los conceptos autóctonos de *área* y *capacidad* no guardaban ninguna relación evidente con los conceptos de medida presentes en el currículum escolar (Clements y Jones, 1983).

Explicar se hacía en la compleja lengua baruya (véase Lloyd, 1969) y tenía su propia estructura y su propia lógica. Los valores y la lógica baruya estaban implícitamente definidos por la semántica de la lengua baruya. En particular, aunque las relaciones entre personas eran de gran importancia para ellos, estas relaciones estaban lingüísticamente ligadas a los valores, las creencias y las costumbres baruyas. Dado que, según los baruya, la mujer embarazada es únicamente el jardín en el que germinan las semillas del padre, creían que los hijos de una misma madre pero de distintos padres no guardaban parentesco alguno (a no ser, claro, que los padres descendieran a su vez de un mismo padre).

Existía claramente una considerable distancia cultural y lingüística entre las matemáticas desarrolladas autóctonamente por los baruya en Wonenara y el tipo de matemáticas que el gobierno de Papua Nueva Guinea pretendía que el joven maestro enseñara a los niños. Se pretendía que los niños de la escuela de Wonenara aprendieran las matemáticas escolares, enseñadas en una lengua que no comprendían y por alguien que no conocía su lengua y que únicamente poseía un conocimiento limitado de su cultura. Todo esto sucedía en nombre de la igualdad de oportunidades en la educación.

La Universidad del Desierto

Con un énfasis semejante al que acabo de utilizar para referirme al caso de los niños baruya, Pam Harris (1987) parodiaba este tipo de situaciones con un *cuestionario aborigen* diseñado por ciudadanos-líderes de una mítica *Universidad del Desierto*. Este cuestionario se empleaba para determinar la inteligencia de forasteros tales como los australianos blancos. A continuación mostramos la traducción de la pregunta K3 en la sección dedicada al parentesco:

> *¿Existe un modo conciso de expresar la relación entre el hermano de la madre y el hermano del padre uno de los cuales está en la subsección del Ego de la madre y el otro en la del padre de su madre? ¿Cómo se expresaría esta relación en tu lengua?* (p. 136)

Imaginémonos cómo se sentirían los chicos australianos blancos si se les obligara a asistir a una escuela en la que todas las clases se impartieran en una lengua aborigen que no entendieran. Además, imaginemos que investigadores aborígenes fueran a esa escuela y los entrevistaran (la entrevista se realizaría en la misma lengua aborigen utilizada en clase). En las entrevistas se pediría a estos chicos que respondieran a la pregunta anterior referida al parentesco y a preguntas similares de un cuestionario que se les presentaría verbalmente. Después se juzgaría su inteligencia según la puntuación obtenida en las respuestas para cada ítem del cuestionario. Además, el profesor recordaría con frecuencia a sus alumnos que las ideas y prácticas de sus padres eran *primitivas*.

Cataluña y Australia

La distancia entre las lenguas y culturas de Australia (europea) y Cataluña, y en concreto entre sus formas matemáticas, es claramente menor que la existente entre los australianos europeos y los aborígenes, o entre personas que hablan lenguas de origen europeo y los que hablan baruya. De hecho, la distancia cultural y lingüística puede que esté poco relacionada con la distancia geográfica. El inglés australiano y el catalán comparten una herencia occidental común y el currículum intencional en Cataluña y Australia tienen notables similitudes.

Vietnam

Vietnam tiene una herencia occidental extraordinariamente rica por lo que se refiere a las matemáticas, y a pesar de que existen grandes diferencias culturales y lingüísticas entre las sociedades vietnamitas y las europeas occidentales (o las australianas no aborígenes), las actitudes hacia las matemáticas occidentales y el valor que se les otorga son bastante semejantes en las distintas naciones mencionadas (aunque es probable que, comparativamente, haya muchos más vietnamitas que australianos que tengan una visión altamente positiva de las matemáticas).

Cuando en noviembre de 1997 me hice cargo en Vietnam de un proyecto sobre desarrollo educativo (Asian Development Bank Education Project), visité escuelas rurales en zonas montañosas remotas. En esas escuelas, la distancia cultural y lingüística entre los alumnos y los que habían diseñado el currículum matemático, procedentes principalmente de Hanoi, era tan grande como la existente entre los australianos europeos y los australianos aborígenes. Los niños de las remotas escuelas rurales de Vietnam no lograban tener éxito en el currículum matemático básico prescrito. En Hanoi se preguntaban qué era lo que debía hacerse, al igual que se lo preguntaban los asesores del proyecto del Asian Development Bank.

Diferencias internas en un mismo grupo

Aunque la discusión anterior es provocativa y sugerente, no hace justicia al hecho de que en algunos de los países y grupos citados, si bien no en todos, existen grandes diferencias dentro de un mismo grupo, diferencias que a menudo reciben menor atención de la necesaria por parte de los educadores matemáticos.

Por ejemplo, los niños de familias de clase trabajadora en Australia tienden a ver las matemáticas bajo un punto de vista muy distinto del de los niños de familias de clase media. Los historiadores de la educación y los expertos en educación comparada saben que en todo el mundo los currículos de matemáticas para la enseñanza secundaria, y parte de los de primaria, se formularon en el siglo XIX, en un tiempo en que los alumnos de clase media eran los únicos que asistían a la escuela secundaria. En aquella época, eran los matemáticos de las universidades, a veces de acuerdo con los líderes de la burocracia educativa y los políticos, quienes definían las matemáticas escolares, y desarrollaban sistemas de evaluación externos basados en pruebas escritas (Clements y otros, 1989). Estos grupos todavía conservan parte de su estatus y de su poder, y muchos son partidarios enérgicos de que se mantengan los estándares básicos y los currículos tradicionales.

Algunos comentarios finales

Los aspectos citados anteriormente tienen como objetivo centrar la atención en la necesidad de considerar de suma importancia las diferencias dentro de las sociedades si se pretende tratar rigurosamente las cuestiones de equidad en educación matemática.

Sin tener que esperar a que el siglo XXI esté muy avanzado, es posible que el mundo esté cerca de conseguir una educación primaria y secundaria para todos. Esto significaría que existiría una forma de *matemáticas para todos*, aunque las matemáticas en un lugar no fueran las mismas que en otro. Si la educación matemática formal ofrecida en todas partes debe *valer la pena* para los alumnos, entonces cuestiones como las que emergen de los datos proporcionados por escritores como Howson (1993) y Ridaway y Passey (1993) deberían tratarse de modo más creativo que el de los planteamientos de la educación basada en el rendimiento (OBE) y su simple dictamen de currículos matemáticos básicos.

Howson (1993) señaló que de una lista de 1627 nombres de candidatos a las olimpiadas matemáticas de Corea, durante un periodo de 400 años, entre 1400 y 1800, las profesiones ejercidas por los padres eran las siguientes: 124 herbolarios, 75 traductores, 6 astrónomos y 1422 matemáticos. Howson (1993) señaló también que en Inglaterra, a pesar de los intentos de los últimos 150 años de usar exámenes para establecer una sociedad más meritocrática, las Universidades de Oxford y Cambridge todavía reciben muchos más alumnos de centros privados que de los numerosos centros públicos.

Hay algo de lo que podemos estar seguros. No se conseguirá mayor equidad a partir de la expansión de los actuales sistemas de validación por rendimiento, a través de exámenes escritos impuestos externamente. Volmink (1994), escribiendo con pasión desde un punto de vista sudafricano, afirma categóricamente que los tests basados en enfoques atomistas de los currículos de matemáticas, en los que se valoran los aprendizajes de los alumnos a través de respuestas cortas o respuestas múltiples, han tenido «un efecto pernicioso en la educación matemática puesto que han tendido a devaluar, desinteresar y alejar a la gente» (p. 63). Volmink, además, afirma que aquellos que se toman en serio la lucha por la justicia social y por la igualdad deberían buscar formas no discriminatorias de evaluar el aprendizaje matemático. La evaluación debería «celebrar el valor de cada persona y ser iluminadora en lugar de discriminadora, debería revelar valores más que señalar meramente deficiencias» (p. 63).

Este capítulo ha puesto en entredicho algunas características de las culturas de la educación matemática, ampliamente consolidadas y cuidadosamente fomentadas en todo el mundo. Pero es fácil hacer discursos y retórica. Cambiar los implícitos, las intenciones y las prácticas matemáticas que en todo el mundo se han dado por sentadas durante más de 200 años representa uno de los mayores retos para los educadores matemáticos del nuevo siglo.

No se alcanzará nunca equidad en la educación matemática si los educadores y los burócratas de la educación no aceptan el reto de democratizar las matemáticas escolares. No podemos permitirnos el lujo de mantener las matemáticas escolares como una forma elitista de conocimiento, conocimientos que esperamos que todos los alumnos estudien, independientemente de si los comprenden o no. Como he afirmado con anterioridad, las matemáticas escolares deberían tener sentido de forma inmediata para los alumnos. Paulo Freire, un educador, aunque no educador matemático, expresó del modo siguiente lo que estoy intentando decir:

> *Creo que en el momento en que la naturalidad de las matemáticas se convierte en una condición para existir en el mundo, se está trabajando en contra de cierto elitismo que poseen los estudios de matemáticas, incluso a pesar de que los matemáticos deseen lo contrario. Esto significa democratizar la posibilidad de la naturalidad de las matemáticas, y esto es ciudadanía. Y cuando se hace posible una mayor convivencia con las matemáticas, no hay duda de que se contribuye a solucionar un gran número de cuestiones planteadas a nuestro alrededor, algunas veces existentes precisamente debido a una falta de competencia, incluso mínima, en la materia. ¿Y por qué no se da esta democratización? Porque se ha aceptado que comprender las matemáticas es algo profundamente refinado cuando, de hecho, no lo es ni debería serlo.* (De Freire y otros, 1997, p. 8)

Woodrow (1997) ha escrito recientemente un artículo con un provocativo título «La Educación Democrática: ¿Existe verdaderamente y, en especial, en la educación matemática?» y quiero darle la última palabra en este capítulo sobre equidad:

> *Al fin y al cabo, comúnmente enseñamos matemáticas en la escuela para educar a los alumnos; comúnmente no educamos a los alumnos para enseñarles matemáticas.*

Referencias bibliográficas

AMERICAN EDUCATIONAL RESEARCH ASSOCIATION (1995): *The Hidden Consequences of a National Curriculum.* Washington, DC. Author.

BARLOW, M.; ROBERTSON, H. (1994): *Class Warfare: The Assault on Canada's Schools.* Toronto. Key Porter Books.

BEARE, H. (1995): «New Patterns for Managing Schools and School Systems», en EVERS, C.; CHAPMAN, J. (eds.): *Educational Administration: An Australian Perspective.* Sydney. Allen & Unwin, pp. 144-160.

BISHOP, A.J. (1988): *Mathematical Enculturation: A cultural Perspective on Mathematics Education.* Dordrecht. Kluwer Academic Publishers.

BISHOP, A.J. (1990): «Western Mathematics: The Secret Weapon of Cultural Imperialism». *Race & Class*, n. 32(2), pp. 51-65.

BOURKE, S. F.; PARKIN, B. (1977): «The Performance of Aboriginal Children», en BOURKE, S.F.; KEEVES, J.P. (eds.): *Australian Studies in School Performance. The Mastery of Literacy and Numeracy: Final report,* Vol. 3. Canberra. Australian Government Printing Service, pp. 131-155.

CLEMENTS, M.A.; GRIMISON, L.A.; ELLERTON, N.F. (1989): «Colonialism and School Mathematics in Australia: 1788-1988», en ELLERTON, N. F.; CLEMENTS, M.A. (eds.): *School Mathematics: The Challenge to Change.* Geelong, Victoria. Deakin University, pp. 50-78.

CLEMENTS, M A.; ELLERTON, N.F. (1996): *Mathematics Education Research: Past, Present and Future.* Bangkok. UNESCO-Asia-Pacific Centre of Educational Innovation for Development.

CLEMENTS, M.A.; JONES, P. (1983): «The Education of Atawe», en PALMER, I. (ed.): *Melbourne Studies in Education,* 1983. Melbourne. Melbourne University Press, pp. 112-144.

CUEVAS, G.; DRISCOLL, M. (eds.) (1993): *Reaching All Students with Mathematics.* Reston, VA. National Council of Teachers of Mathematics.

DARLING-HAMMOND, L. (1996): «The Right to Learn and the Advancement of Teaching: Research, Policy and Practice for Democratic Education». *Educational Researcher,* n. 25, pp. 5-17.

DAVIES, J. (1998): «Counting the Cost-monitoring Standards in Mathematics in Year 6: An Eight-year Cross Sectional Study». *Educational Studies,* n. 24(1), pp. 61-68.

ELLERTON, N.F.; CLEMENTS, M.A. (1994): *The National Curriculum Debacle.* Perth. Meridian Press.

FRADD, S.H.; LEE, O. (1997): «Teachers' Voices in Program Evaluation and Improvement: A Case Study of a TESOL Program». *Teaching and Teacher Education, n.* 13(6), pp. 563-577.

FREIRE, P.; D'AMBROSIO, U.; MENDONCA, M. (1997): «A Conversation with Paulo Freire». *For the Learning of Mathematics,* n. 17(3), pp. 7-10.

GEWIRTZ, S.; BALL, S.J.; BOWE, R. (1995): *Markets, Choice and Equity in Education.* Buckingham, UK. Open University Press.

GODELIER, M. (1977): *Perspectives in Marxist Anthropology.* Cambridge, UK. Cambridge University Press.

GORDON, L.; WHITTY, G. (1997): «Giving the "Hidden Hand" a Helping Hand? The Rhetoric and Reality of Neoliberal Education Reform in England and New Zealand». *Comparative Education*, n. 33(3), pp. 453-467.

GROUNDWATER-SMITH, S. (1993): «Why can't we do that today, Maria?». *Education*, n. 74(14), p. 11 y n. 74(15), p. 6.

HARRIS, J. (1990): «What we can learn from white myths about Aboriginal numbers». *Australian Journal of Early Childhood*, n. 15(1), pp. 30-36

HARRIS, P. (1987): *Measurement in Tribal Aboriginal Communities*. 2ª edición. Darwin Northern Territory Department of Education.

HARRIS, P. (1990): *Two-way Aboriginal schooling*. Canberra. Aboriginal Studies Press.

HARRIS, P. (1991): *Mathematics in a cultural context: Aboriginal perspectives on space, time and money*. Geelong. Dakin University.

HOWSON, G. (1993): «The relationship between assessment, curriculum and society», en NISS, M. (ed.): *Investigations into Assessment in Mathematics Education: An ICMI study*. Dordrecht. Kluwer Academic Publishers, pp. 47-56.

JONES, K.; KERSHAW, L.; SPARROW, L. (1995): *Aboriginal Children Learning Mathematics*. Perth. Edith Cowan University.

KRAUS INTERNATIONAL PUBLICATIONS (1993): *Mathematics Teacher Resource Handbook: A practical guide for K-12 mathematics curriculum*. Millwood, Nueva York. Autor.

LLOYD, R.G. (1969): «Gender in a New Guinea language». *Pacific Linguistics*, A22, pp. 25-67.

McLEOD, D.B.; STAKE, R.E.; SCHAPPELLE, B.P.; MELLISSINOS, M.; GIERI, M.J. (1996): *Setting the Standards: NCTM's role in the reform of mathematics education*. Dordrecht. Kluwer Academic Publishers.

NATH, S.R.; MOHSIN, M.; CHOWDHURY, M.R. (1997): «Gender differences in the arithmetical knowledge of children in Bangladesh». *Research in Education*, n. 58, pp. 35-45.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (1989): *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA. Autor.

— (1991): *Professional Standards for Teaching Mathematics*. Reston, VA. Autor.

— (1995): *Assessment Standards for School Mathematics*. Reston, VA. Autor.

NOSS, R. (1990): «The national curriculum and mathematics. A case of divide and rule», en DOWLING, P.; NOSS, R. (eds.): *Mathematics versus the National Curriculum*. Basingstoke, Hampshire. The Falmer Press, pp. 13-32.

PATEMAN, N. (1993): «Can constructivism underpin a new paradigm in mathematics education», en MALONE, J.A.; TAYLOR, P.C.S. (eds.): *Constructivist Interpretations of Teaching and Learning Mathematics*. Perth. Curtin University of Technology, pp. 69-79.

PROMKASETRIN, P. (1991-1992): «World education development. Recent trends. Education in Asia and the Pacific». *Reviews, Reports and Notes*, n. 27, pp. 20-29.

RIDGWAY, J.Y.; PASSEY, D. (1993): «An international view of mathematics assessment through a class darkly», en NISS, M. (ed.): *Investigations into Assessment in Mathematics Education: An ICMI study*. Dordrecht. Kluwer Academic Publishers, pp. 57-72.

SECADA, W.G. (1988): «Diversity, equity and cognitivist research», en. FENNEMA, E.; CARPENTER, T.P.; LAMON, S. J. (eds.): *Integrating Research on Teaching and Learning Mathematics.* Madison. University of Madison at Wisconsin, pp. 20-58.

STAKE, R.; COLE, C.; SLOANE, F.; MIGOTSKY, C.; FLORES, C,; MERCHANT, B.; MIRON, M.; MEDLEY, C. (1994): *The Burden.* Urbana-Champaign, IL. Center for Instructional Research and Curriculum Evaluation. University of Illinois.

STEFFE, L.P. (1990): «Mathematics curriculum design: A constructivist's perspective», en STEFFE, L.P.; WOOD, T. (eds.): *Transforming Children's Mathematics Education: International Perspectives.* Hillsdale, N.J. Lawrence Erlbaum Associates, pp. 389-398.

STIFF, L.V. (1993): «Reaching all students: A vision of learning mathematics», en CUEVAS, G.; DRISCOLL, M. (eds.): *Reaching All Students with Mathematics.* Reston, VA. National Council of Teachers of Mathematics, pp. 3-6.

SWAN, J.; BROWN, S. (1997): «The implementation of a national curriculum and teachers' classroom thinking». *Research Papers in Education Policy and Practice,* 12(1), pp. 91-114.

UNESCO (1989): *Reorientation and Reform of Secondary Education in Asia and the Pacific Region.* Bangkok. UNESCO Principal Regional Office for Asia and the Pacific.

VOLMINK, J.D. (1994): «Mathematics for all», en LERMAN, S. (ed.): *Cultural Perspectives on the Mathematics Classroom.* Dordrecht. Kluwer Academic Publishers, pp. 51-67.

WOODROW, D. (1997): «Democratic education: Does it exist, especially for mathematics education?». *For the Learning of Mathematics,* n. 17(3), pp. 11-16.

ZEVENBERGEN, R. (1996): «Constructivism as a liberal bourgeois discourse». *Educational Studies in Mathematics,* n. 31(1-2), pp. 95-113.

4

Necesidad de una reforma

Peter Hilton
State University of New York. Binghamton (Estados Unidos)

Introducción

La necesidad de una reforma en la enseñanza de las matemáticas a nivel preuniversitario puede basarse en tres consideraciones fundamentales. La primera y más importante es que, en el mundo actual, el pensamiento matemático es de vital importancia para el adulto, tanto como ciudadano como desde la perspectiva profesional, y todos los datos de los que disponemos sugieren que esta importancia será incluso mayor en el futuro. Por tanto, las matemáticas ya no pueden enseñarse y aprenderse simplemente con la finalidad de desarrollar las técnicas necesarias para superar exámenes diseñados con una intencionalidad fijada, de tal forma que las matemáticas actúen como un filtro negativo bloqueando el progreso en la vida de aquellos que no aprueben el examen. En lugar de eso, las matemáticas deben enseñarse, y aprenderse, de tal forma que los estudiantes realmente entiendan lo que se les está enseñando y tengan la habilidad y las ganas de usar las matemáticas para ayudar a solucionar los problemas que puedan encontrar como adultos y para que puedan interpretar los datos que se les presenten. Debido a este papel crucial de las matemáticas en la vida de cualquier adulto, llamaremos *futuro adulto funcional* a aquel estudiante que se beneficia de un currículum reformado.

En segundo lugar, debemos admitir que la enseñanza actual de las matemáticas no es una empresa con éxitos manifiestos. Por lo general, una dosis substancial de la (llamada) educación matemática conduce con demasiada frecuencia al desagrado por la materia y a la incompetencia en la misma, de modo que una gran parte de los adultos, después de 12 años enfrentándose a la asignatura, sólo se sienten cómodos con las operaciones básicas de la aritmética elemental con números naturales. Además, el desagrado y la incompetencia a los que me he referido anteriormente, a menudo, aquejan a personas sensibles e inteligentes. Estas personas son propensas a hacer pública su falta de conocimiento matemático como si fuera una virtud positiva, creando así la absurda leyenda de que ser matemáticamente analfabeto es incluso encomiable. No es necesario entrar en detalles sobre las desafortunadas consecuencias de dicha actitud, tanto para el individuo como para la sociedad. Es obvio que cualquier persona de razonable inteligencia puede y debería alcanzar la alfabetización matemática —ya que consiste fundamentalmente en un pensamiento sistemático— por lo que resulta evidente que se necesita reformar la manera y el estilo, y quizás también el contenido, de los cursos de matemáticas.

En tercer lugar, la disponibilidad del ordenador y de su hermana la calculadora, especialmente la calculadora gráfica, debería tener una influencia significativa sobre lo que enseñamos y cómo lo enseñamos. Ahora podemos eliminar gran parte de la monotonía de la aritmética elemental y de las manipulaciones simbólicas del álgebra y el cálculo infinitesimal, por lo cual, debería haber una fuerte tendencia a restar importancia a estos temas. Lamentablemente, esta tendencia es todavía escasamente visible y los motivos que explican este fenómeno, que son de naturaleza social, deberían estar claros para el observador informado. Por cuestiones de extensión no podemos analizar con detalle estas razones —el populismo y el efecto de inercia de los exámenes estándares y del conservadurismo de algunos profesores son claramente factores cruciales— pero procederemos a exponer cuáles *deberían* ser los efectos de la disponibilidad de ordenadores y de calculadoras.

Los ordenadores y las calculadoras han convertido en obsoletos ciertos *temas*, pero no han afectado en lo sustancial ninguna de *las áreas de contenido significativas*. Por tanto, es en las recomendaciones sobre *cómo tratar* las áreas de conocimiento donde uno esperaría ver emerger ideas modernas y originales. Estas ideas se basarían, pues, en las mismas tres consideraciones que hemos discutido. Por tanto, no estoy de acuerdo con la idea de que uno de los objetivos principales de una reforma sea cambiar los contenidos esenciales de los cursos de matemáticas. Los cambios deben realizarse para que la enseñanza y el aprendizaje sean más provechosos, puesto que es realmente necesario para el futuro adulto tener éxito, y más interesantes y más motivadores para que atraigan a los estudiantes hacia las matemáticas. Afortunadamente, los cálculos con máquinas contribuyen a la consecución de estos objetivos, ya que su disponibilidad permite obviar la necesidad (aparente) de destinar horas tediosas a hacer un trabajo monótono y pesado, de naturaleza puramente mecánica.

No obstante, aquellas partes de las matemáticas que no son pesadas, ni aburridas, ni mecánicas no pueden enseñarse correctamente a no ser que el profesorado posea un amplio conocimiento de las matemáticas y comprenda profundamente los temas que se traten. Sin poseer dicho conocimiento y comprensión, se puede enseñar únicamente técnicas enseñando meramente cómo hacer y esforzándose, mediante la repetición y la imposición de ejercicios estándares, en fijar esas destrezas en el repertorio del estudiante. Es decir, tratando al estudiante como si éste fuese una máquina. Ya sabemos que esto no funciona, primero porque el estudiante no es una máquina y, segundo, porque en cualquier caso las técnicas de las máquinas no pueden sustituir la habilidad (humana) de pensar.

Llegamos pues a la importante conclusión de que, en matemáticas, es imposible educar con éxito si el profesor no está adecuadamente formado, si no posee un conocimiento que va más allá del nivel que enseñará o si no posee una comprensión que, como mínimo, se asemeje a aquella de sus mejores alumnos[1]. Por ello, nos vemos obligados a dedicar el siguiente apartado, «Principios de la educación de futuros profesores», a enumerar algunos principios relacionados con la educación de los futuros enseñantes. He seleccionado estos principios a partir de mi propia experiencia en Estados Unidos. No obstante, no creo que la situación sea muy distinta en cualquiera de las democracias avanzadas de hoy en día. Está claro que cualquier recomendación para mejorar la calidad de la educación matemática fracasará si falta una enseñanza que sea reveladora de conocimientos. Es obvio que el futuro enseñante debe tener una buena educación. También es cierto, no obstante, que debemos asegurar la entrada en la profesión educativa de personas de notable calidad y con gran dedicación. Por desgracia, en la mayoría de democracias avanzadas, la profesión goza de poco prestigio social. Seamos francos, el capitalismo tiende a glorificar la adquisición de riquezas, y está claro que la profesión de enseñante no es la mejor para llegar a la riqueza en una economía capitalista. Aquí estamos planteando un problema muy serio al que actualmente se enfrenta la educación en muchos países. No podemos profundizar en él ahora, pero hubiera sido un error no mencionarlo.

En este segundo apartado hemos acompañado cada principio con una razón para su adopción. Los argumentos que se dan deberían analizarse como bases para la discusión, pero no pretenden ser prescriptivos.

En el apartado «Las áreas de contenidos claves del currículum» discutiré las cinco áreas básicas de contenidos que cualquier currículum matemático respetable debería incluir y explicaré cómo creo que deberían tratarse, si se quiere que la educación tenga éxito de acuerdo con los criterios que he adoptado. Sin embargo antes debo explicar dos puntos.

En primer lugar, en el espacio disponible no se puede especificar el contenido de un curso refiriéndome tanto a primaria como a secundaria, por tanto, me veo obligado a centrarme, muy a mi pesar, en la discusión de los contenidos de secundaria. En segundo lugar, no pretendo decir que trataré *todos* los contenidos de secundaria, aunque el lector probablemente deducirá cuál es mi visión acerca de los contenidos *obligatorios*. Seguramente me gustaría ver incluidos en el currículum aspectos relacionados con las teorías de probabilidad y estadística, ya que son los principales vehículos para la aplicación de las matemáticas a problemas del mundo real. También me gustaría ver incluida parte de la aritmética modular, ya que es una asignatura muy hermosa que permite a los estudiantes dominar la idea clave de *demostración matemática* en un sistema relativamente simple cuyos axiomas son más familiares y mucho menos complejos que los de la geometría euclidiana. El lector puede consultar a Hilton y otros (1997), para un

1. En los Estados Unidos, en la enseñanza primaria, a menudo encontramos a maestras que adoran a los niños pero que temen a las matemáticas en su práctica docente. Los resultados son desastrosos, ya que esas maestras, de forma muy sutil, transmiten a los niños su propia actitud hacia las matemáticas. Cínicamente, he llegado a pensar que hasta que no podamos producir maestros que amen tanto a los niños como a las matemáticas, sería mucho menos perjudicial para la educación tener maestros que aborrecieran tanto a los niños como a las matemáticas.

tratamiento de este tema fascinante en el nivel aquí discutido, junto con una introducción a las aplicaciones a la criptografía.

No obstante, aún debo esclarecer otro punto, y aquí debo admitir francamente que algunos creerán que mis recomendaciones son utópicas. Un buen profesor debería siempre tener la oportunidad de enseñar lo que le gusta más, ya que entonces, la enseñanza estará imbuida de una calidad muy especial, y el estudiante inmediatamente experimentará ese amor por el aprendizaje sin el cual la educación es inevitablemente siempre incompleta y tiene un éxito muy parcial. Por ello, en la enseñanza secundaria, en el mejor de los mundos posibles, debería reservarse un espacio en el currículum para las preferencias especiales de cada profesor. ¿Llegaremos a ver esto algún día?

Principios de la educación de futuros profesores

Proposición 1: Las necesidades específicas futuras del profesorado de secundaria en formación no deberían reflejarse en su currículum preuniversitario, ni tampoco en el currículum de su licenciatura

Razón: La primera parte de esta oración es obviamente cierta, ya que es un caso particular del principio universal de que las necesidades profesionales futuras no deberían influenciar el currículum preuniversitario de ningún estudiante. En cuanto a la segunda parte, me estoy refiriendo al contenido y no a cómo éste se trata, puesto que discutiré este punto en la segunda proposición. El que un estudiante más tarde esté enseñando matemáticas en secundaria no debería influenciar el contenido de los cursos de matemáticas que estudia en su licenciatura; los contenidos deberían ofrecer una formación de calidad como los que en la actualidad permiten la obtención del graduado superior en matemáticas. Este argumento se basa en dos afirmaciones relacionadas. En primer lugar, el profesor necesita entender la significatividad —matemática y en relación con el mundo real— de las matemáticas que enseña y esta comprensión proviene de la naturaleza de la dinámica de una buena formación matemática y de las implicaciones de estos estudios; en consecuencia, el profesor de secundaria obtiene esta comprensión al estudiar matemáticas en la licenciatura, especialmente los contenidos básicos del currículum para la graduación. En segundo lugar, la comprensión matemática del profesor siempre debe ir más allá del nivel que enseña, para que se sienta seguro al presentar nuevos temas, al potenciar la formulación de preguntas y al fomentar la experimentación. Un buen profesor es aquel que acoge las tendencias divergentes que existen entre los estudiantes; la convergencia, que conduce a una clase llevadera y a una atmósfera estéril, es el refugio del profesor tímido, temeroso de encontrase frente a algo que le sobrepasa.

Lamentablemente, en los Estados Unidos actualmente es necesario violar este principio debido a la presencia, en el currículum tradicional, de elementos anacrónicos que no aparecen en ningún otro lugar en la vida contemporánea. La presencia de estos elementos en el nivel de primaria es notoria. En secundaria, el anacronismo más visible es la geometría formal, que se presenta como una especie de religión misteriosa con sus símbolos, rituales y mandamientos sagrados. Los futuros profesores de secundaria son los únicos que deben dominar esta obscura teología disfrazada de matemáticas. Una educación sana para los futuros profesores de secundaria presupone, naturalmente, un currículum sano para secundaria, y todavía no tenemos dicho currículum.

Proposición 2: La formación de los futuros profesores de matemáticas de secundaria, en la universidad, debería alejarse muy poco de la impartida para la especialización como matemático

Razón: El argumento contrario se basa en la afirmación de que los futuros profesores de matemáticas deberían tener la oportunidad de comprobar su capacidad para explicar ideas matemáticas, para ilustrarlas y aplicarlas y motivar a los alumnos. Pero todos los licenciados deberían, de hecho, tener esta oportunidad. Como regla general, no sabemos si hemos entendido algo a menos, o hasta, que no lo hemos explicado satisfactoriamente a otra persona. Además, las respuestas de aquellos a quienes intentamos enseñar algo pueden muy bien enriquecer y orientar nuestra propia comprensión.

Hay también quienes mantienen que los futuros profesores necesitan un gran número de cursos de naturaleza pedagógica. Dudo que éstos sean cruciales en la formación inicial de los futuros profesores, aunque estoy seguro de que juegan un papel decisivo en su formación permanente. En consecuencia, no puede haber ninguna justificación para restar tiempo al estudio de contenidos para dedicarlo a cursos de pedagogía. Los cursos de pedagogía deberían estar cuidadosamente coordinados con los cursos de contenidos y no se debería impedir a ningún estudiante ser profesor ni negársele un certificado provisional por el mero hecho de que le falten créditos de cursos de pedagogía.

Proposición 3: El atributo más importante de un profesor de matemáticas es una actitud positiva hacia las matemáticas. El conocimiento esencial de las matemáticas está relacionado con la misma naturaleza de las matemáticas: con su unidad y su esencia como disciplina

Razón: Esta propuesta es válida para el profesorado de matemáticas de cualquier nivel y es absolutamente crucial si se aplica al maestro de primaria. Para éste, sería la proposición principal. El maestro debe entender lo que son y lo que no son las matemáticas. Las matemáticas son un sistema de pensamiento que incorpora y, aun más, transciende un lenguaje extraordinariamente bien adaptado. No es un conjunto de técnicas, aunque su práctica requiera e inculque técnicas. No es un conjunto de disciplinas separadas, es una única unidad compuesta por muchas áreas de estudio interrelacionadas.

Así, lo que importa es que el alumno, y el maestro en formación, aprendan a pensar matemáticamente; cualquier parte significativa de las matemáticas puede usarse para proporcionarles la oportunidad de alcanzar la comprensión necesaria y la habilidad para pensar. Por el contrario, ninguna parte aislada de las matemáticas, aunque parezca apropiada, puede preparar al estudiante para entender realmente las matemáticas, y en consecuencia, no le prepara para hallarse en una posición efectiva para su enseñanza; tampoco se alcanza esta posición si el estudiante aprende matemáticas como un conjunto de habilidades que deben retenerse mediante el ejercicio de la memoria no discriminadora.

Es triste, pero hemos de admitir que la visión contraria es la que parece prevalecer mayoritariamente en los Estados Unidos. Citaré un ejemplo particularmente notable: Saxon (1986) se lamenta de la fácil disponibilidad de calculadoras de bolsillo en las clases de primaria, argumentando que su uso conduce al analfabetismo matemático. Saxon y sus discípulos llevaron a cabo una enérgica y exitosa cruzada para volver al siglo XIX, argumentando que deberíamos enseñar y obligar a los alumnos a aprender memorizando. El éxito de los libros de Saxon testifica la plausibilidad de este mensaje. Esta deplorable filosofía, que no sorprende en alguien con fuertes antecedentes militares, puede que tenga éxito a corto plazo, pero con toda seguridad no conduce a la habilidad para comprender y aplicar ideas matemáticas. Incluso si hacemos previsiones muy optimistas, podemos decir que seguirá proporcionando al alumno la ilusión de éxito durante los dos primeros años universitarios. Luego llega el crudo despertar del alumno a la realidad de que no ha aprendido realmente matemáticas, y por ello, no sabe usarlas. Entonces es casi demasiado tarde para cambiar, y el alumno, que se siente desilusionado y traicionado, normalmente quedará resentido.

Proposición 4: Es vital que el futuro profesor entienda la distinción entre educación y formación

Razón: Esta proposición, aunque es más amplia que la anterior, está íntimamente relacionada con ella. Una formación en técnicas que son por naturaleza efímeras puede satisfacer únicamente los intereses a corto plazo de quien está siendo formado y sólo le proporciona el dominio temporal de algunos aspectos de su profesión. La educación beneficiará a toda la persona, y a todos los aspectos de la vida de esa persona. Una educación matemática, si tiene éxito, conduce inevitablemente a la adquisición de habilidades (las matemáticas deberían ser algo que uno hace y no simplemente algo que uno aprende); pero una formación en técnicas no necesita ningún tipo de educación matemática genuina.

La tendencia a deplorar la pérdida de capacidades técnicas de los jóvenes de hoy en día es una prueba de la falacia inherente a confundir la educación con la formación. Seguramente, un fallo en su educación es siempre lamentable; pero la pérdida de una técnica puede ser signo de progreso. En la Gran Bretaña del siglo XIX, muchas mujeres y niños tenían considerables capacidades técnicas mineras; ¿deberíamos lamentar el hecho de que ninguna mujer o niño las posea actualmente? El lavavajillas, la lavadora, el coche y muchos otros artilugios han hecho que ciertas habilidades técnicas sean hoy obsoletas. Permitamos que aquellos que todavía abogan por un énfasis en la exactitud en la ejecución de los deprimentes algoritmos de la aritmética elemental, argumentando que las pilas de la calculadora pueden agotarse, sean, como mínimo, suficientemente consecuentes como para tener un caballo listo para cuando la batería del coche esté descargada. De hecho, esto último es mucho más razonable ya que uno puede necesitar urgentemente un medio de transporte, mientras que una división larga sólo es urgente si el maestro estipula artificialmente que sea así.

Es lamentable que muchos padres, en su bienintencionada preocupación por el futuro bienestar de sus hijos, contribuyan a la confusión entre educación y formación al buscar una conexión inmediata entre lo que los alumnos aprenden en la escuela y la forma en que posteriormente esos alumnos se ganarán su vida. Podemos comprender los motivos de estos padres; no obstante, no deberíamos hacer otra cosa que burlarnos y despreciar a esos educadores que ceden ante la preocupación de los padres y conspiran para robar a los niños sus propios derechos.

Proposición 5: Se debería hacer el menor número posible de exámenes. Además los exámenes deberían reflejar el currículum sin condicionarlo

Razón: Actualmente en muchos países, los exámenes distorsionan el currículum en todos los niveles. En general, los estudiantes sólo se preocupan por hacer bien el examen y sacar buenas notas, y los profesores sólo se preocupan de enseñar a superar con éxito los exámenes[2]. Por supuesto que es necesario algún tipo de prueba para que el profesorado y, mucho más importante, el alumnado pueda seguir el progreso hecho. Pero el profesor debe también encontrar formas de hacer un seguimiento continuo del progreso del estudiante, y esto requiere una sensibilidad que no puede conseguirse sin un buen dominio del material matemático en estudio.

La influencia de los tests estandarizados es especialmente perniciosa en el currículum matemático realmente enseñado, que es distinto del oficial. Estos tests, por norma general, no tienen nada que ver con las matemáticas genuinas y ponen un énfasis excesivo en la adquisición de técnicas. Las preguntas de respuesta múltiple son completamente ridículas, a no ser, quizás, que se esté evaluando la competencia en teoría de grupos finitos, para la cual el método de solución por eliminación es, a menudo, apropiado. Cuando hacemos matemáticas para solucionar problemas del mundo real, la realidad no nos informa de que la solución es una entre cinco posibilidades. Además, si nos dan una lista finita de posibles respuestas, entonces disponemos de un método que probablemente será más rápido y fácil de aplicar que el método que presumiblemente se está evaluando.

No es ninguna coincidencia que la enseñanza de la geometría esté en un estado lamentable en mi país, ya que no se presta a la evaluación mecánica. De hecho, las verdaderas matemáticas tampoco se prestan a ello. Deberíamos declararnos inexorablemente opuestos a cualquier forma de evaluación que únicamente dé crédito a lo que se llama respuesta y que no preste atención al razonamiento del estudiante o a la explicación acerca de la elección de método.

La tiranía de los exámenes (véase Hilton, 1993) y la hegemonía de los examinadores sólo puede romperse mediante la determinación de profesores que estén seguros de ellos mismos y que tengan una buena formación a todos los niveles. Durante su propia educación, los futuros profesores deben adquirir conciencia sobre la inmensidad de este problema.

---

2. La publicación en el Reino Unido de las «clasificaciones en la liga» de los centros escolares a partir de los resultados en los exámenes es especialmente deplorable.

Las áreas de contenidos claves del currículum

Podemos señalar algunas especificaciones bastante precisas en cuanto al contenido matemático necesario en la educación secundaria de un futuro adulto funcional. El lector puede haber llegado a suponer, a partir de la discusión previa, que tal especificidad estaría fuera de lugar, ¿no hemos dicho que las matemáticas son una unidad, que cualquier parte significativa de las matemáticas puede servir de vehículo para transmitir la naturaleza esencial del pensamiento matemático y que esa actitud hacia las matemáticas tiene una importancia suprema? Pero debemos elegir, y afirmamos que hay características comunes a las distintas partes de las matemáticas que tienen valor en el ámbito universitario y que deberíamos señalar. Además, también creemos que no tiene sentido anticipar un cambio revolucionario del contenido matemático —o mejor, del contenido matemático intencional— en el nivel de secundaria. Para fijar nuestras ideas, deberíamos asumir, no obstante, que el currículum de secundaria tiene en cuenta que estamos viviendo en la era de los ordenadores.

Presento los contenidos cruciales bajo cinco encabezamientos:

- Aplicaciones.
- Álgebra
- Geometría.
- Sistemas numéricos.
- Funciones y tasa de variación.

De nuevo, estos títulos no deben interpretarse como descriptores de cursos separados, sino como identificadores de las características esenciales de una educación matemática desarrollada globalmente.

Aplicaciones[3]

El futuro adulto debe comprender el papel de las aplicaciones como un estímulo para la actividad matemática y la relación que existe entre el uso funcional de las matemáticas y la motivación para su estudio. No obstante, ambas relaciones son sutiles. Son contadas las ocasiones en que se descubren nuevas matemáticas (o se crean, según la filosofía del lector) como respuesta a un problema del mundo real. Por el contrario, se añaden nuevos significados a aspectos matemáticos ya conocidos cuando estudiamos y comprendemos su conexión con una situación del mundo real. Hoy en día abundan ejemplos de nuevas y excitantes conexiones entre la física teórica moderna y áreas activas de las matemáticas, tales como la teoría de fibrados, las álgebras de Lie de dimensión infinita y la teoría de representaciones. Es un hecho remarcable que, mientras que se puede afirmar que el estudio de las ecuaciones en derivadas parciales se originó con la intención de modelizar la naturaleza del flujo en

3. Se entiende por *aplicaciones* el uso funcional de las matemáticas en otros contextos ya sean matemáticos, pertenecientes a otras materias del currículum o a problemas del mundo real.

el mundo real, estas otras áreas de las matemáticas se inventaron por razones puramente matemáticas.

No obstante se debe ser cauteloso al pretender motivar el estudio de las matemáticas a través de sus aplicaciones. En primer lugar, las aplicaciones deben de tener un interés genuino para los estudiantes; no es suficiente el hecho de que sean importantes. Demasiado a menudo el profesorado, con un optimismo ingenuo, esperan que mostrando una conexión entre una parte pesada de las matemáticas y una aplicación poco interesante conseguirán simultáneamente despertar el interés por ambas. Por supuesto, esto no funciona.

En segundo lugar, normalmente es necesario simplificar los modelos matemáticos surgidos de los problemas del mundo real para que puedan ser tratados con las herramientas matemáticas de que disponen los estudiantes. Es crucial que emprendamos dichas «falsificaciones» abierta y honestamente; a menudo es mejor describir estos crudos modelos como ejemplos más que como aplicaciones.

En tercer lugar, es un error querer motivar cada nuevo contenido matemático relacionándolo con un problema externo a las matemáticas. En la mayoría de las situaciones, el progreso en matemáticas depende de la dinámica autónoma de la propia materia, y buscar siempre una motivación externa sería artificial y engañoso.

En cuarto lugar, el espíritu de las matemáticas aplicadas se encuentra también en las buenas matemáticas puras; en consecuencia, la generalización y la abstracción se dan dentro de las propias matemáticas y el progreso matemático, a menudo, consiste en revelar conexiones que anteriormente se hallaban escondidas entre las diferentes partes de las matemáticas (en secundaria, habitualmente entre el álgebra y la geometría).

Álgebra

En primer lugar, y principalmente, el futuro adulto debe entender que el álgebra, en secundaria (es decir, hasta que se encuentra el álgebra abstracta), es simplemente aritmética hecha matemática, aritmética expresada en un lenguaje matemático apropiado. Este lenguaje conduce a procedimientos sistemáticos para la obtención de respuestas a preguntas matemáticas, pero raramente conducirá, por sí mismo, a la formulación de preguntas interesantes y naturales. Dichas preguntas surgen de la modelización del mundo real, a menudo mediado por la presentación geométrica.

Por ello, enseñar álgebra o geometría aisladamente es un grave error pedagógico. Una dieta exclusiva de procedimientos algebraicos produce aburrimiento y una exclusiva de procedimientos geométricos genera frustración.

El futuro adulto no sólo debería ser capaz de ejecutar manipulaciones algebraicas significativas, sino que también debería comprender por qué son significativas. Por ejemplo, debería estar familiarizado con el comportamiento de los polinomios cuadráticos con una o dos indeterminadas. La familiaridad con una fórmula para solucionar una ecuación de segundo grado es insuficiente. La relación con las propiedades de las cónicas y las cuádricas debería formar parte del currículum, junto con los aspectos relacionados con los máximos o mínimos de los polinomios cuadráticos. De esta forma, la geometría y el álgebra están unidas.

Geometría

Como ya se ha recalcado, en secundaria la geometría no debería estudiarse como una disciplina separada; en lugar de ello, el punto de vista geométrico debería penetrar cualquier experiencia matemática. No estamos recomendando el estudio de la axiomática, ni una fuerte dosis de geometría Euclidiana como la que se está administrando actualmente. El futuro adulto debería ser capaz de pensar geométricamente (en dos y tres dimensiones) y debería saber cómo probar las afirmaciones geométricas tanto sintética como analíticamente.

El concepto de figuras geométricas semejantes, base de la trigonometría, y la geometría analítica de la recta y la circunferencia en el plano son de suma importancia. Tal y como hemos afirmado, el profesorado debería entender claramente el papel del álgebra como procedimiento para responder preguntas geométricas y transmitirlo de esta forma al estudiante, y debería diferenciarlo claramente del papel actual de la geometría cartesiana, usada como frágil excusa para justificar el trabajo de aspectos pesados de álgebra.

Creemos que es dentro de la geometría, y especialmente en el paso de las líneas poligonales a las curvas, donde se forja el vínculo que eventualmente permitirá al alumno estudiar tanto matemáticas discretas como continuas y comprender sus similitudes y sus diferencias. Desgraciadamente, hoy se pasa de la geometría de los triángulos, y de otros polígonos más generales, a la geometría de la circunferencia, como si no se hubiera introducido ninguna nueva idea matemática esencial. Nociones como longitud del arco, área encerrada por una curva diferenciable cerrada, y tangente a una curva, implican conceptos sofisticados de las matemáticas continuas y no pueden derivarse de una manera elemental de la geometría lineal. No existe ninguna transición *diferenciable* hacia la geometría diferencial.

Sistemas numéricos

Es sumamente importante que el estudiante que debe iniciarse en cálculo comprenda el sistema de números reales con sus distintas estructuras interrelacionadas, es decir, sus estructuras algebraica, topológica, diferenciable y de orden. (Con anterioridad he afirmado que estaria gratamente dispuesto a enseñar cálculo a cualquier estudiante que comprendiera realmente las matemáticas del sistema de números racionales y que tuviera algo de intuición geométrica.)

El futuro adulto debe comprender cómo, por qué y con qué consecuencias está construido el sistema numérico, empezando por los números naturales. Por ejemplo, la naturaleza de la relación de orden cambia sustancialmente cuando se pasa de los números naturales N a los enteros Z (ya no existe un primer elemento, y por tanto, ningún principio de inducción inmediato) y después de los enteros Z a los números racionales Q (ya no existe el elemento *siguiente*). La inadecuación —más técnicamente la incompletitud— de Q debería entenderse geométricamente y el conjunto de los números reales R debería construirse a partir de los decimales infinitos. Esto, por supuesto, hace necesario que el profesor entienda la noción de límite de una serie convergente y sea capaz de proporcionar a los estudiantes una conceptualización intuitiva y convincente de esta idea. Esto es especialmente necesario para comprender las operaciones aritméticas en R.

Es muy importante desmitificar la naturaleza de los números reales y, preferiblemente, también la de los números complejos antes de que el estudiante se embarque en el cálculo. Esta desmitificación seguramente tendrá sabor geométrico; con todo, un elemento crucial entra a formar parte del proceso a través de la accesibilidad a calculadoras y ordenadores. El profesorado debe entender que la aritmética de la calculadora no es la misma que la aritmética humana. Consideremos el cuerpo de los números reales *R*; es un cuerpo en sentido estricto, dado que las operaciones de adición y multiplicación en *R* satisfacen ciertos axiomas. Por otro lado, ¡los números reales son ciertamente *no reales*! Los números irracionales no son significativos en el mundo real, y los números complejos, incluyendo los imaginarios puros, son casi tan reales como los números reales y sustancialmente menos complejos si tenemos en cuenta su álgebra y su teoría de funciones. Por ello, los números reales forman un bello sistema matemático que el ordenador rechaza. No obstante, al rehusar los números irracionales, la aritmética de los ordenadores está obligada a incorporar en su sistema numérico simplificado muchas características toscas y desagradables. El futuro adulto debe comprender los principios de la aritmética aproximada (Hilton y Pedersen, 1986), y en particular, los de los errores de redondeo y debe ser consciente de los cambios que se producen en el paso entre el mundo de la mente y el mundo de la máquina.

Funciones y tasa de variación

Todos los estudiantes de secundaria necesitan una noción clara, aunque sea esencialmente intuitiva, del significado de tasa de variación. Deben comprender que el estado de cambio, o flujo, es el estado natural del universo y que el principal papel de las matemáticas en el mundo real es el de modelizar ese estado de flujo, simplemente porque el principal papel de la ciencia es el de explicar, predecir y, en definitiva, influenciar ese flujo.

En primer lugar, la idea de variación requiere que la noción de función se haya comprendido claramente. No defendemos el estudio de las funciones no numéricas en secundaria, pero es importante dominar la noción de función definida en *N*, *Z* y *Q*, o en sus subconjuntos, y también en los subconjuntos *de R*. Por ejemplo, una serie de números reales es una función definida en *N* con valores en *R*.

También es importante para el futuro adulto distinguir claramente entre una variable genuina y las *x* e *y* del álgebra elemental, que casi siempre son simplemente números que todavía no se pueden especificar, incógnitas, o que no necesitan especificarse, indeterminadas. La distinción debe transmitirse a los estudiantes para evitar el pensamiento estereotipado que considera que una ecuación siempre representa algo que debe solucionarse, en lugar de algo que describe un lugar geométrico o un proceso. Naturalmente, las desigualdades también deberían contemplarse bajo esta luz multicolor.

Finalmente, es esencial que el profesor sea capaz de presentar a sus estudiantes la noción matemática de tasa de variación y motivarlos para su estudio. Esta idea, de enorme importancia en la historia del pensamiento matemático, no ha visto reducida su significatividad ni debido a la actual accesibilidad a programas informáticos para la manipulación de símbolos ni a pesar de que el ordenador reemplace a menudo las ecuaciones diferenciales por ecuaciones en diferencias finitas. Empezando con la idea de coeficiente diferencial, la tasa de variación de una función en un punto interior de su dominio, se llega a la derivada como función. Sería especialmente satisfactorio poder también transmitir a los alumnos la interpretación de la tangente a una curva como la mejor aproximación lineal posible; entonces la regla de la cadena aparecería con su auténtico significado como la manifestación de la compatibilidad de la aproximación lineal con la composición de funciones, en lugar de aparecer truculentamente como un medio para derivar funciones, más o menos artificiosas, interpretación muy familiar a los estudiantes de hoy en día.

Me gustaría añadir, entre paréntesis, la sugerencia de que una buena introducción a la idea de tasa de variación podría hacerse a través de la discusión de velocidad y velocidad media. El lenguaje cotidiano nos sugiere que para comprender la noción de velocidad media debe comprenderse el sustantivo *velocidad* y el adjetivo *media*. De hecho, esto es bastante erróneo ya que el concepto de velocidad media, en un intervalo de tiempo dado, es relativamente fácil, siendo el cociente entre la distancia recorrida y el tiempo empleado para recorrerla. Obviamente este concepto es mucho más fácil de comprender que las nociones de media o de velocidad. De hecho, la velocidad media puede presentarse como un caso especial o como una extensión de la noción usual de media y entonces se puede presentar la velocidad como un caso límite de velocidad media. Entonces se ven, de forma distinta, el significado y la importancia de la afirmación de que, por ejemplo, la edad media no es una edad, y la familia media no es una familia y que debería hablarse, más correctamente, de la media de las edades y la media de las familias, para que tanto la edad media como la familia media sean medias.

Referencias bibliográficas

HILTON, P. (1993): «The Tyrany of Tests». *American Mathematical Monthly* 100, n. 4, pp. 365-369.

HILTON, P.; HOLTON, D.; PEDERSEN, J. (1986): *Mathematical Reflections: In a Room with Many Mirrors.* Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-New York.

HILTON, P.; PEDERSEN, J. (1986): «Approximation as an Arithmetic Process», en SCHOEN, H.L. (ed.): *Estimation and Mental Computation.* Reston, Va. National Council of Teachers of Mathematics.

SAXON, J. (1986): «Classroom Calculators Add to Math Illiteracy». *Wall Street Journal,* mayo, n. 16, p. 22.

Bloque 2:

Matemáticas y desarrollo del currículum

5

Entornos informáticos para la enseñanza de las matemáticas: complejidad didáctica y expectativas

Nicolas Balacheff
Centre National de Recherche Scientifique. IMAG Grénoble (Francia)

Introducción

Los entornos de aprendizaje informáticos se han desarrollado hasta tal punto que ya no es posible hablar de nuevas tecnologías para la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas. Lo que puede ser nuevo es nuestra toma de conciencia acerca de los problemas que se le ha planteado al profesorado al ejercer su tarea profesional con el ordenador. En concreto, los micromundos matemáticos permiten ofrecer a los estudiantes entornos más relevantes y poderosos para dotar de significado a los conceptos matemáticos. Sin embargo, estos entornos modifican el tipo de matemáticas que se puede enseñar, el conjunto de problemas y las estrategias didácticas. El conocimiento profesional del profesor también debe modificarse. El modo en que se evalúa y se da soporte a los estudiantes debe tener en cuenta las características de la tecnología. Analizaré estos aspectos para entender mejor el tipo de soporte que debe prestarse al profesorado, para ayudarle a utilizar eficazmente esta vieja nueva tecnología.

La gran evolución de buena parte de tecnologías informáticas que ha tenido lugar a lo largo de la última década puede describirse, al menos desde el punto de vista de las aplicaciones que conllevan interacciones entre la persona y la máquina, como el desarrollo de una creciente toma de conciencia de la necesidad de un cambio de énfasis desde el procesamiento de la *información* al procesamiento del conocimiento.

La definición inicial de *información*, en el sentido propuesto por Shannon (1981), se basa en una clara separación entre el significado y la forma del mensaje. Como se sabe, la ciencia computacional se ha desarrollado inicialmente a partir del problema del tratamiento automático de la información, es decir, del tratamiento de la forma independientemente del significado. Este dominio recibió incluso el nombre de *informática* en muchas lenguas (*informatique*, *informatik*, *informatics*, etc.). El desarrollo de la inteligencia artificial, al principio de los años setenta, condujo a una creciente toma de conciencia de la necesidad de tener en cuenta el significado; en particular, cuando lo que está en juego es la interacción entre las máquinas y los seres humanos. Esta evolución culminó, desde el punto de vista de la educación, cuando quedó claro que la pericia de las máquinas no podía traspasarse a los seres humanos (Clancey, 1983).

Pero la conciencia de la necesidad de tener en cuenta el significado y, como consecuencia, la necesidad de considerar las relaciones entre significado y forma, entre los símbolos y su organización, no ha recibido toda la atención que merecía. Además, todavía existen puntos de vista bastantes ingenuos según los cuales la interacción con un ordenador podría eludir las reglas básicas de la semiótica que sugieren que codificar parte del conocimiento acarrearía, como consecuencia inevitable, la pérdida del significado y la emergencia de significado no intencionado.

Desde estos puntos de vista, una de las *problemáticas* (*problématiques*) dominante de la representación del conocimiento es la fidelidad de los medios usados con relación al conocimiento representado (para un análisis de los diferentes tipos o niveles de fidelidad, véase Wenger, 1987, especialmente pp. 84-85 y 312-314). Esta *problemática* ignora lo que incluso Georges Steiner, un conocido catedrático de literatura en Cambridge, menciona como la *transmutación del conocimiento* cuando éste pasa de un medio a otro, por ejemplo, de un texto a una película. Si esto es así, entonces el tema en cuestión no es la fidelidad sino la capacidad para explicitar de qué forma la nueva representación puede provocar interferencias con el significado intencionado.

Por consiguiente, tanto desde el punto de vista del alumnado como desde el del profesorado, el *conocimiento* es la esencia de la interacción con la máquina. Pero el conocimiento no puede simplemente leerse en la pantalla, es el resultado de una construcción en el proceso de interacción con la máquina. Tanto si la interacción trata este objetivo directamente, como sucedería a lo largo del diálogo presente en una clase magistral, o lo trata indirectamente, como sería el caso de las estrategias de aprendizaje por descubrimiento, la forma en que se resuelve dicha interacción restringe el conocimiento construido por el aprendiz. Ejemplificaré esta dificultad y finalmente propondré que quizás el problema surgido deba analizarse desde el punto de vista de la *modelización*.

A continuación estableceré el contexto de este capítulo a partir de todos estos temas.

Modelización 1: la dimensión experimental de las matemáticas

Los tipos de *software* que han influido notablemente en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas son las hojas de cálculo, los sistemas de álgebra computacional (CAS) y los micromundos. Mientras que los dos primeros se han importado al mundo de la educación desde sistemas inicialmente dirigidos a usos profesionales, el último ha sido específicamente diseñado para propósitos educativos. Por ello, prestaré mayor atención al caso de los micromundos, especialmente a aquellos dedicados a la geometría.

LOGO es un ejemplo prototipo de micromundo. A partir de unas herramientas sencillas y básicas, el aprendiz puede construir objetos más y más sofisticados y definir herramientas más y más complejas para futuras investigaciones. En cierto modo, el micromundo evoluciona a medida que crece el conocimiento del aprendiz. Esta es una característica clave de los micromundos y una diferencia significativa entre los micromundos y la mayoría de sistemas. Aunque no está dedicado a la geometría, LOGO es el primer ejemplo de un micromundo geométrico; las figuras geométricas se obtienen como si fueran las huellas dejadas por una tortuga mientras se ejecuta un programa expresado en términos de movimientos hacia atrás, hacia adelante y giros sobre la pantalla. Este micromundo requiere que el alumno construya un sólido puente entre las representaciones simbólicas de los objetos geométricos en el lenguaje LOGO y la representación gráfica que se muestra en la pantalla.

Los entornos geométricos dinámicos (DGEs) son micromundos que se diseñaron específicamente para la geometría en los años ochenta. Dos de ellos son particularmente conocidos, Cabri-géomètre (Laborde J. M., 1985) y Geometer Sketchpad (Jackiw, 1991). El principio básico de su diseño es permitir la construcción de figuras geométricas partiendo de objetos básicos (puntos, líneas rectas, segmentos, círculos, etc.) y relaciones (punto medio, perpendicular, paralela, etc.) que el usuario selecciona a partir de un menú. Una vez se ha dibujado la figura, se pueden mover sus puntos básicos y observar sus modificaciones en la pantalla, en la que cada parte del dibujo se mueve de forma continua y diferenciada. Todas las limitaciones que el usuario ha establecido explícitamente se mantienen mientras éste arrastra el punto por la pantalla. Por tanto, se trabaja con mucho más que un dibujo, se trabaja con una categoría de dibujos, cada uno de los cuales es un caso de una misma figura geométrica. Al mismo tiempo, proporciona a los estudiantes una herramienta para la validación de las propiedades que pueden percibirse en la pantalla: una propiedad será probablemente cierta sólo si se mantiene válida mientras se arrastran los puntos básicos de la construcción. En otras palabras, una *propiedad geométrica* es un *invariante perceptual*. A medida que los estudiantes aprenden más geometría, tienen la posibilidad de construir herramientas más sofisticadas para la resolución de problemas; por tanto, los DGEs les permiten adaptar el micromundo al especificar las macroconstrucciones. En Cabri-géomètre, por ejemplo, estas macroconstrucciones, que son funciones gráficas, aparecen como nuevos elementos del menú desplegable Construcción.

Al ofrecer la posibilidad de una exploración abierta de las propiedades de las construcciones geométricas, así como de construir sucesivas herramientas cada vez más poderosas y, por otro lado, gracias al *feedback* y al comportamiento que se diseñaron de manera específica para la geometría, este tipo de *software* proporciona un entorno que muy probablemente facilitará el aprendizaje de la geometría. Pero, ¿cómo transforman la vida del profesor? (véase modelización 3).

Tomemos el caso del circumcentro. Usando un DGEs es relativamente fácil producir una construcción y *ver* en la pantalla que las tres mediatrices de los lados de un triángulo se cortan en un punto, y que el punto de intersección es el centro del círculo que pasa por sus tres vértices. La manipulación directa de los vértices del triángulo demuestra la *solidez* o consistencia del hecho que se ve en la pantalla. Esta evidencia perceptual es tan fuerte que incluso puede hacer que los estudiantes no lleguen a entender por qué es necesario demostrarlo. Hasta cierto punto, la eficiencia del *software* ha eliminado la necesidad de demostración.

Esta observación no es nueva y se aplica a casi todas las nuevas tecnologías cuando éstas dotan a las matemáticas de instrumentos que parece que proporcionan la respuesta. Las hojas de cálculo hacen cálculos, el sistema CAS proporciona la gráfica de las funciones y sus propiedades básicas y los DGE muestran a través de la simple visualización la validez de afirmaciones geométricas.

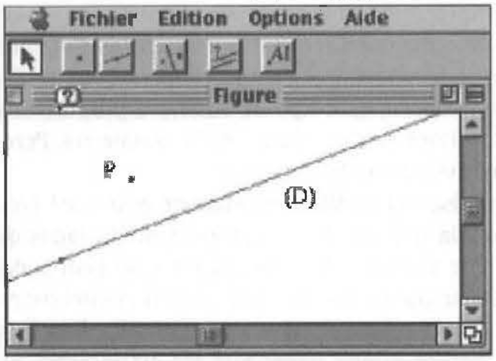
En matemáticas, trasformar las herramientas que se usan conduce a un cambio de los problemas que resulta interesante plantear, más que a una transformación de las matemáticas en sí, como muchas veces se ha afirmado. Me gustaría citar, como mínimo, dos tipos de transformaciones:

- Por un lado, la tecnología informática ofrece la posibilidad de tratar problemas y experimentar situaciones que sin ella no serían accesibles para la enseñanza y el aprendizaje.
- Por otro lado, dicha tecnología abre la posibilidad de adoptar un enfoque experimental de las matemáticas que cambia la naturaleza de su aprendizaje.

El primer tipo de transformación es a menudo enfatizado por los partidarios de innovaciones pedagógicas basadas en la tecnología. Un tema como el de «el círculo de nueve puntos» se puede tratar de nuevo con los DGEs, lo que hace que dentro de las limitaciones del sistema escolar actual, limitaciones de coste *cognitivo* y de tiempo, sea posible construir una figura y explorar sus propiedades y cómo justificarlas, algo que sería del todo imposible en clases con alumnos y alumnas que tuvieran una habilidad media para dibujar las figuras sobre papel. La afirmación de que los entornos informáticos reducen la complejidad de las tareas debido a su poder computacional es un argumento bastante común y generalizado. Sin embargo, es mucho más interesante el caso de los problemas que se pueden proponer en estos entornos pero que apenas podrían considerarse trabajando con lápiz y papel.

Imaginemos una versión personalizada de Cabri-géomètre con un menú que sólo ofreciera las siguientes herramientas: punto, línea y reflexión, y el siguiente problema (cuadro 1).

Cuadro 1



Dado un punto y una línea, construye una línea paralela que pase por el punto dado (personalizar la barra del menú es una de las características básicas de Cabri-géomètre).

Un problema de este tipo resultaría bastante artificial planteado sobre el papel, ya que obligaría al profesor a prohibir arbitrariamente el uso de las herramientas para dibujar directamente la línea paralela con la regla y el compás. Por el contrario, en el entorno DGE el alumno deberá usar las propiedades básicas de la reflexión. Existen muchos ejemplos de este tipo que dan una nueva perspectiva al valor de algunos conceptos geométricos. El concepto de lugar geométrico se ha beneficiado del desarrollo de los DGEs, renovando su interés, al permitir conexiones y su modelización.

Pero estas promesas contrastan con la reticencia del profesorado, reticencia que no puede justificarse únicamente por la falta de *hardware* en las escuelas. Un estudio citado por el INRP en 1992 demuestra que en los países industrializados el 85% de los niños y niñas de 13 años usan calculadoras, pero menos del 10% han aprendido a usarlas con sus profesores. También muestra que sólo el 15% de la enseñanza y el 3% de los ejercicios y problemas han sido diseñados para acomodar estas tecnologías tan expandidas.

No tengo datos parecidos referentes al uso del ordenador, pero todos podemos imaginar lo que ocurre con el ordenador; es suficiente un rápido vistazo a la evolución de los libros de texto y al modo en que incorporan las calculadoras o el ordenador.

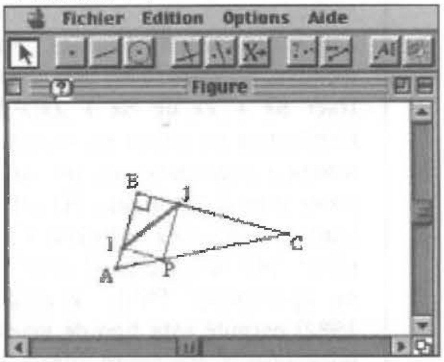
Tal y como Cuban analizó en su clásico estudio del uso de la tecnología en las aulas, los profesores

> *[...] o bien se resistirán o se sentirán indiferentes a cambios que consideran irrelevantes para su práctica, que incrementan su carga sin aportar beneficios al aprendizaje de sus alumnos o que debiliten su control de la clase.* (Cuban, 1986, p. 71)

A menudo se dice que el *software* educativo, al igual que todas las tecnologías educativas avanzadas, incluyendo las calculadoras de bolsillo, abre paso a un enfoque experimental a la resolución de problemas matemáticos.

Con un DGE se puede explorar el caso del cuadrilátero en el que las mediatrices de los lados se cortan en un punto, o el siguiente problema (véase cuadro 2).

Cuadro 2



Sea un punto *P* en el lado opuesto al ángulo recto de un triángulo rectángulo, siendo *i* y *j* las perpendiculares desde *P* a los dos catetos del triángulo. ¿Para qué posición de *P* la suma de las longitudes de *i* y *j* es mínima?

Usando Cabri-géomètre o Geometer Sketchpad, la posición de *P* que satisface la condición se halla en un intervalo. Aun suponiendo que los alumnos usen la máxima precisión de medida, en Cabri-géomètre no podrían estar seguros de lo que obtienen puesto que el punto *P* se mueve como mínimo pixel a pixel. En este caso, estos entornos sugieren una conjetura que debe establecerse por otros medios que no sean la simple observación de la pantalla; por tanto, existen problemas que probablemente empujarán a los alumnos a ir más allá de la experimentación y de la observación, a pesar de mi comentario anterior.

Pero experimentar significa organizar un campo experimental y sus relaciones con los objetos matemáticos en cuestión. Por ejemplo, en los casos citados anteriormente, los estudiantes deben tener en cuenta las propiedades de la pantalla del ordenador (conjunto de pixeles) y su interacción con el movimiento de arrastre del ratón (no es fácil controlar el movimiento preciso de un punto en la pantalla). Al igual que en otras ciencias experimentales, la relación entre el campo experimental y su homólogo conceptual o teórico no viene dada, debe conceptualizarse. Aceptamos así la *problemática de la modelización*.

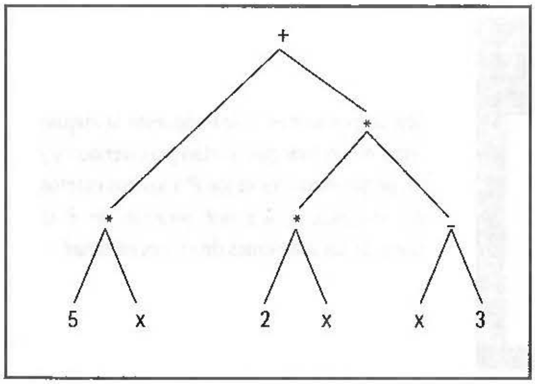
La cuestión a la que puede llegarse en este punto es conocer qué parte de esta conceptualización está específicamente relacionada con el entorno informático; esta cuestión será abordada en el siguiente apartado.

Modelización 2: la fidelidad imposible

Para resaltar la importancia del problema surgido cuando se presenta la necesidad de elegir, y en la propia elección, tomaré un ejemplo relacionado con un aspecto básico de la representación del conocimiento en la ciencia computacional.

Consideremos expresiones algebraicas como las que manipulamos en el álgebra elemental. Estas expresiones pueden percibirse como series de caracteres, $5x + 2x(x\text{-}3)$, o como una estructura de árbol (véase cuadro 3). Escoger una representación entre las posibles determina el tipo de manipulación posible en el *interface* del sistema. Si se escoge la estructura de árbol (como se hace, por ejemplo, en el entorno de aprendizaje APLUSIX; Nicaud, 1989) algunas manipulaciones no serán posibles. Por ejemplo, un usuario no puede extraer $5x + 2x$ de $5x + 2x(x\text{-}3)$ puesto que no puede encontrarse ninguna manipulación de subárbol que lo explique. Por otro lado, escoger una estructura de lista (como se hace en el entorno de aprendizaje PIXIE; Sleeman, 1982) permite este tipo de manipulaciones y, por tanto, ofrece la

Cuadro 3



posibilidad de tener en cuenta los éxitos y fracasos de un alumno en lo que a manipulaciones algebraicas básicas se refiere, como por ejemplo, la siguiente transformación: $5x + 2x(x-3) \rightarrow 7x(x-3)$.

Como reacción a lo que podrían considerarse limitaciones técnicas, a veces se sugieren otras prácticas, para que los efectos citados dejen de existir. Pero estas sugerencias olvidan que otras prácticas causarían otros efectos *secundarios* o no intencionados. A menudo se sugiere que las representaciones múltiples serían una posible solución para este tipo de problema, pero esto presupone que pueden enumerarse y describirse exhaustivamente las representaciones relativas a una parte dada de conocimiento. Un rápido vistazo a la historia del conocimiento humano, incluso limitándose a la ciencia o a las distintas representaciones que marcan el desarrollo de los alumnos, puede convencer a cualquiera de que tal empresa está condenada al fracaso.

La cuestión no es evitar completamente todos los posibles efectos secundarios, ya que toda representación tiene efectos productivos; se trata de ser capaz de describir en qué consisten con el máximo detalle. De hecho, sugeriría que en primer lugar la representación no debe evaluarse *in abstracto* sino comparándola con su propósito intencionado. En los casos anteriormente citados, hay que tener en cuenta que PIXIE se centra en el diagnóstico de reglas mal formadas en la manipulación elemental de fórmulas algebraicas, mientras que APLUSIX se centra en problemas de factorización.

La literatura sobre la tecnología nos muestra que el problema de la relación entre una representación y lo que representa a menudo se plantea en términos de *fidelidad*. Esto podría proceder de las investigaciones sobre el diseño de entornos para entrenar comportamientos:

> *Para poder comprender y aprender el dominio, el estudiante necesitaría una representación altamente realista del aparato o del entorno y de técnicas igualmente realistas para interaccionar con esta* interface. *Esta creencia ha llevado al desarrollo de simuladores de vuelo y de sistemas de entrenamiento de mantenimiento que están basados en aparatos del mundo real y que aportan al estudiante experiencias directas tanto con los aparatos como con el problema del dominio en que se usan.* (Miller, 1988, p. 175)

La investigación en esta dirección ha llevado al desarrollo de *interfaces* que permiten simular conceptos abstractos como velocidad, energía o vectores para hacer posible su *manipulación directa*.

De hecho, se necesita algo de fidelidad. Nadie esperaría ver un círculo que no tuviera forma de círculo. En cierto modo, podríamos parafrasear a Bresenham (1988, p. 348) diciendo que todo entorno informático debe cumplir el principio WYSIWYE (WhatYouSeeIsWhatYouExpect): lo que ves es lo que esperas ver. Pero el problema es mucho más complicado porque está relacionado con la complejidad y con la especificidad del ordenador como medio. Para clarificar esto, daré algunos ejemplos de geometría.

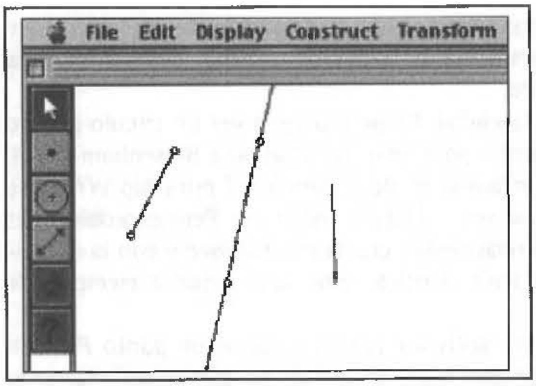
Volvamos a Cabri-géomètre. Este *software* permite dibujar un punto *P* en un segmento, sin ninguna otra condición que la de ser uno de los puntos del segmento (la relación básica aquí es la de punto sobre un objeto). Cuando se arrastra en la pantalla un extremo del segmento, *P* también debe moverse, por lo tanto, debe tomarse una decisión en cuanto a su comportamiento. Esta decisión puede tomarse de acuerdo con lo que ocurriría usando lápiz y papel, o podría decidirse escoger al azar un nuevo punto para cada nueva posición de los extremos del segmento. Pero en este caso *P* sorprendentemente *saltaría* de lugar a lugar. Podría preferirse que *P*, al igual que los demás puntos, siguiera una trayectoria continua. En el caso de la mayoría de DGEs, esto se obtiene obligando que *P* divida el segmento siempre según la misma razón. La consecuencia es que *P* deja de ser un punto cualquiera del segmento: cuando un extremo del segmento se mueve manteniéndose sobre una línea dada, la trayectoria de *P* es una línea homotética... Aunque es un invariante perceptual, esta propiedad no debe considerarse una propiedad geométrica ya que es el resultado de una elección arbitraria en el proceso computacional.

La decisión tomada por los diseñadores de los DGEs podría ser objeto de una discusión interminable; sin embargo, en todos los casos, *es preciso* tomar este tipo de decisiones. Y sea cual sea la decisión tomada nos corresponde a nosotros, como educadores en matemáticas, caracterizar sus efectos y sus posibles consecuencias.

Llamaremos *transposición computacional* (Balacheff, 1993) al proceso que conduce a la especificación y posterior puesta en práctica de un modelo de conocimiento. La transposición computacional se refiere al trabajo necesario para cumplir los requisitos de la representación simbólica y de la computación. Dado que no es posible encontrar una solución que evite una desviación entre las representaciones y lo que intentan representar, estos problemas podrían tratarse cambiando las cuestiones relacionadas con la fidelidad por aspectos relacionados con la delimitación del *dominio epistemológico de validez* de la modelización o de la representación escogida (Balacheff, 1991; Balacheff y Sutherland, 1994).

Si los alumnos deben construir su conocimiento a partir de la interacción con estos entornos, entonces los temas aquí tratados son cruciales. Las características del comportamiento del *software*, incluyendo las no intencionadas, se transformarán, probablemente, en características específicas del significado construido por los estudiantes. Un último ejemplo ilustrará este punto.

Cuadro 4



En la primera versión del Geometer-Sketchpad, el dibujo de un segmento estaba constituido por un conjunto de tres objetos: una línea y dos puntos. Esta representación ya no se usa en la última versión del *software*, pero puede adivinarse que existió tal representación. En el cuadro 4 se muestra el dibujo de la imagen simétrica de un segmento respecto de un eje de simetría.

La imagen del segmento de la derecha no tiene extremos, entonces uno podría plantearse si se trata o no de un segmento. Podrían hacerse estas dos observaciones:

- En primer lugar, para obtener una adecuada representación de un segmento debería haber seleccionado, como saben todos los usuarios del Geometer-Sketchpad, los tres elementos de la representación del segmento de la izquierda del dibujo.
- En segundo lugar, la línea de la derecha —que podríamos llamar segmento abierto— es un objeto del Geometer-Sketchpad ya que puedo usarlo para realizar nuevas acciones, por ejemplo, construir su punto medio.

La cuestión que se plantea ahora, desde un punto de vista cognitivo, es la siguiente: ¿en este entorno, qué será para los alumnos un segmento? El segmento puede tener propiedades bastante distintas a las tradicionales, los extremos, por ejemplo, parecen tener un estatus bastante especial (un segmento esta formado por una línea y dos extremos).

Estas transformaciones de las representaciones de los objetos pueden ser tan profundas que pueden llegar a cambiar la naturaleza de los problemas que abarcan.

Un ejemplo clásico es el de LOGO, para el cual un círculo es una curva de curvatura constante, mientras que en la mayoría de DGEs modernos se define como un conjunto de puntos a una distancia constante de un punto dado. El problema de dibujar tres círculos exteriores tangentes dos a dos no tiene el mismo grado de complejidad en ambos entornos; en LOGO se trata de una cuestión especialmente difícil.

La transposición computacional y el dominio de validez epistemológica están intrínsecamente relacionados. Un tema clave de investigación en la próxima década será entender los procesos relacionados, especialmente sus características intrínsecas (las que no se modificarán con el progreso técnico), y desarrollar marcos teóricos y metodologías para la identificación de un dominio epistemológico de validez.

Modelización 3: el origen de posibles malentendidos en la enseñanza

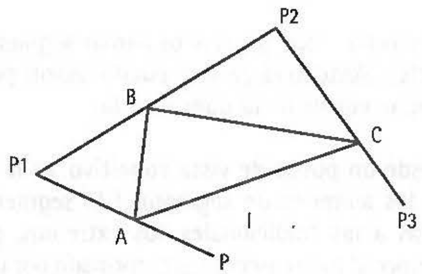
¿Los elementos de la nueva complejidad que acabo de comentar pueden tener efectos importantes sobre la enseñanza? En efecto, los tienen por lo menos en dos sentidos:

- En primer lugar, los entornos informáticos pueden facilitar que el alumnado desarrolle nuevas concepciones acerca de los objetos matemáticos, de maneras que todavía no estamos preparados para afrontar.
- En segundo lugar, plantean al profesorado nuevos problemas en el diagnóstico de la comprensión y la producción de los estudiantes, debido a que para comprender las producciones de *software* es necesario tener una visión de los procesos subyacentes y de las estructuras de conocimiento.

Las dos situaciones siguientes pretenden ejemplificar esta afirmación.

Consideremos el siguiente problema (cuadro 5).

Cuadro 5



Construye un triángulo *ABC*. Construye un punto *P* y su punto simétrico *P1* respecto a *A*. Construye *P2*, el punto simétrico de *P1* respecto a *B* y construye *P3*, el punto simétrico de *P2* respecto a *C*. Mueve *P*, ¿Qué puede decirse de la figura cuando *P3* y *P* coinciden? Construye el punto *I*, de tal forma que sea punto medio del segmento *PP3*. ¿Qué puede decirse del punto *I* cuando *P* se mueve? Explícalo. (De Capponi y Laborde (1995) *Cabri-classe*, hoja 4-10.)

Habiendo construido la figura con Cabri-géomètre, la manipulación directa del punto *P* muestra un hecho obvio: *el punto* I *no se mueve*. Puesto que *I* depende directamente de *P* y *P3*, dos puntos que se mueven cuando *P* se mueve, este *hecho* parece sorprendente. El reto de esta situación consiste en dar una explicación.

Examinemos la interacción entre una profesora y un estudiante, Fabien, sobre este problema (se puede encontrar un análisis más detallado en Balacheff y Soury-Laverge, 1995). Fabien ha observado el hecho pero no tiene ninguna idea de la justificación: «El punto *I* no se mueve, pero ¿ y qué?» Ya que Fabien se ha dado cuenta espontáneamente del paralelogramo *ABCI*, la profesora le anima a centrarse en él, y el alumno demuestra que *ABCI* es un paralelogramo. En esta etapa, desde el punto de vista de la geometría (y de la profesora), el motivo por el cual *I* permanece inmóvil mientras *P* se mueve es obvio. La profesora le proporciona pistas a Fabien:

«¡Oye! ¿Qué significa que cuando *P* se mueve, *I* no se mueve? Te dice que *I* es ¿cómo?» [protocolo 113]

«Has usado muchos puntos intermedios, pero si consideramos la conclusión de que los puntos *P*, *P1*, *P2*, *P3* ya no juegan ningún papel...» [protocolo 117]

«Pero si no se mueve cuando mueves *P* ¿qué te dice? *I*, el punto *I*, me has dicho que se movía de acuerdo con ¿qué puntos?» [protocolo 139]

«Los otros, no se mueven. ¿Ves lo que quiero decir? Entonces ¿cómo podrías definir finalmente el punto *I* sin usar los puntos *P*, *P1*, *P2* y *P3*?» [protocolo 143]

Pero todavía no ve *lo evidente*. Avanzada la interacción, la profesora le explica los motivos matemáticos de la inmovilidad de *I*, produciendo un genuino efecto: ¡Ah!

Para explicar la inmovilidad de *I*, la profesora tuvo que conseguir que el estudiante estableciera un vínculo entre un *mundo mecánico* —el de la *interface* de Cabri-géomètre— y un *mundo teórico* —el de la geometría. Sólo este vínculo puede transformar el *hecho* observado de la *inmovilidad de I* en un *fenómeno*, la propiedad de *invariancia* de *I*. Las intervenciones de la profesora siguieron una actuación sujeta a las limitaciones del contrato didáctico que funcionaron como un requerimiento paradójico: cuanto más precisa era la explicación de la profesora sobre lo que Fabien debía hacer, más se arriesgaba a provocar la desaparición del aprendizaje deseado (Brousseau 1997, p. 66).

Al compartir la pantalla como un campo común de experimentación, el estudiante y el profesor pueden compartir *hechos*, pero no *fenómenos*. En otras palabras, no basta con mirar la pantalla del DGE para ver la geometría de una situación. En cierto modo, la profesora podría haber dicho ¿no lo ves?, sin darse cuenta de que *ver* es *saber*; esto proporciona una visión distinta de la relación entre matemáticas y visualización.

Escuchemos a otro estudiante, Sébastien [protocolo 78-84]:

> SÉBASTIEN: Por tanto... He dicho que... Pero no es muy claro... Que cuando, por ejemplo, ponemos *P* a la izquierda, entonces *P3* compensa hacia la derecha. Si sube, entonces el otro baja...
>
> PROFESORA: Entonces...
>
> SÉBASTIEN: Pero no he encontrado ninguna prueba matemática, mm...
>
> PROFESORA: Bien, entonces ¿qué puedes decir acerca de *I*? Que... ¿Por qué *I* es invariante? ¿Por qué no se mueve?
>
> SÉBASTIEN: Esto es exactamente lo que no he encontrado... cómo demostrar que... de hecho *P3*... niega el movimiento de *P*.

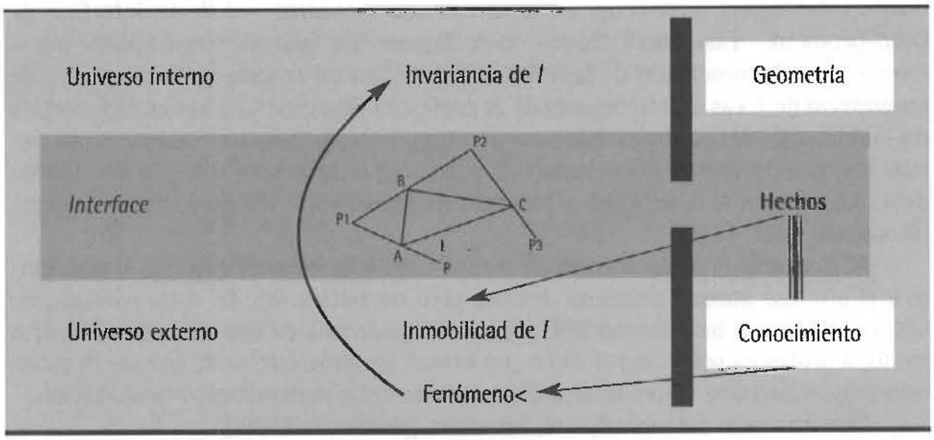
Este fragmento del protocolo de Sébastien nos da más evidencias explícitas de que el paso del mundo mecánico al mundo geométrico no es obvio, aun habiendo percibido la necesidad de establecer dicho paso.

Me atrevo a afirmar que este paso de la pantalla del ordenador a las matemáticas es un *proceso de modelización*.

El ordenador, como máquina física, crea tres universos distintos con una fuerte interacción y entre los cuales es difícil establecer delimitaciones: el universo interno (dentro de la caja), la *interface* y el universo externo, en el que nos hallamos. En el cuadro 6 de la página siguiente se ilustra esta división. Si lo analizamos desde el punto de vista del problema que estamos estudiando, podríamos describir la situación del modo siguiente: la invariancia de *I* es un resultado del modelo geométrico implementado y que le permite mantener la coherencia y las limitaciones de una construcción dada, a la vez que permite la manipulación directa de los objetos libres. El usuario *traduce* dinámicamente esta invariancia debido al hecho de la inmovilidad de I en la *interface*. El usuario debe reconstruir el significado de este hecho a partir del conocimiento que posee, pero este significado no es en absoluto un significado dado.

El tema de la transposición computacional ha revelado el problema de la expresión de un modelo bajo limitaciones computacionales. Este problema aparece de

Cuadro 6



nuevo en relación con los usuarios cuando quieren expresar su conocimiento en el contexto de un determinado *software*. En cierto modo, deben realizar una transposición local de su conocimiento para poder manejar las limitaciones específicas del sistema que usan.

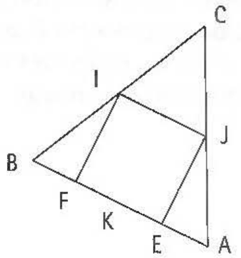
En geometría no existe un único método para producir una construcción geométrica. Consideremos el caso de un triángulo rectángulo; su construcción podría basarse en el hecho de que dos de los lados son perpendiculares; otra construcción podría basarse en el hecho de que un triángulo con un vértice sobre una circunferencia, y cuyo lado opuesto es el diámetro de dicha circunferencia, es un triángulo rectángulo. La manipulación directa de estas dos construcciones se comportará de modos distintos mientras que el dibujo será siempre el mismo (cualquier conjunto de pixeles obtenido de una manera puede obtenerse de la otra). Esta transposición del conocimiento del usuario al medio computerizado, que es un tipo de actividad de modelización, puede ser el origen de dificultades en la comunicación, como se ilustra en el cuadro 7.

Finalmente Fabien y su profesora utilizaron las funciones de Cabri-géomètre que les permiten ver los objetos escondidos para clarificar la construcción. Este último ejemplo es la situación típica con la que se encuentran los profesores cuando, para poder entender el sentido de las producciones de los alumnos, deben tener información acerca del proceso que les ha llevado a realizarlas. La complejidad de este proceso y la gran variedad de posibilidades hacen que esta tarea sea mucho más dura que la de los clásicos entornos de lápiz y papel. Requiere un conocimiento del *software* que va más allá del conocimiento del manual del usuario o incluso de sus especificaciones iniciales.

En un dominio distinto al de la geometría, el de la enseñanza de las fracciones, Ohlsson (1991) nos da un claro ejemplo de una creencia ampliamente compartida por los científicos computacionales y los diseñadores de *software*. Este autor describe un *software* para el aprendizaje de las fracciones que ofrece al estudiante dos ventanas distintas; una de ellas muestra las fracciones (registro matemático) y está asociada a otra

Cuadro 7

Un círculo dibujado usando un punto *O* como centro y pasando por un punto *P* no diferirá a primera vista del dibujo de un círculo definido por un centro *O* y con un radio dado sobre el cual se dibuja un punto *P* (como punto sobre objeto). Volvamos a la interacción entre Fabien y su profesora: El siguiente extracto breve [protocolos 326-343] ilustra bien el tema que quiero plantear:



PROFESORA: Bien. Entonces, tu triángulo ¿será siempre isósceles?

FABIEN: Sí

PROFESORA: ¿hacemos una pequeña comprobación? Espera, este punto [señalando la pantalla]... no puedo moverlo ¿por qué? Se ve que está más o menos bien. Mira, intentaré mover el punto *C*, sólo para ver lo que pasa. ¡Eh! ¿Por qué el punto *B* sigue cuando muevo el punto *C*. ¡Es extraño!

FABIEN: ¿cómo?

PROFESORA: El punto *C*...

FABIEN: ¿sí?

PROFESORA: ... cuando muevo el punto *C*, el punto *B* lo sigue y el punto *A* no se mueve. ¿Cómo lo hiciste?

FABIEN: Sí, porque es un circulo.

PROFESORA: Está en un círculo...

FABIEN: Exacto, *C* es el centro del circulo...

PROFESORA: sí ...

FABIEN: Y *B* y *A* están en el círculo.

PROFESORA: Mm... Bien, ¿has conectado *B* al círculo? ¿cómo lo has hecho?

FABIEN: No, no. *C* es el centro del círculo.

PROFESORA: *C* es el centro, pero ¿y tu punto *B*?

FABIEN: Espera, te lo mostraré.

ventana que muestra un conjunto de ilustraciones relacionadas (el mundo concreto de las particiones). A continuación Ohlsson afirma lo siguiente:

> *[Esta] atrayente característica permitió [al estudiante] obtener* feedback *matemático de sus acciones físicas.* (*ibid.* p. 55)

Pero también indica que, sin embargo, el estudiante podría llegar a una «idea incorrecta» (*ibid.*). Por lo tanto, plantea, entre otras, la siguiente cuestión:

> *¿Por qué construyó el estudiante una idea y no otra? ¿Hubiera sido posible anticipar que este ejercicio llevaría a establecer esta idea concreta?.* (*ibid*)

Estos aspectos son cruciales para que el profesor pueda controlar el aprendizaje. Ohlsson busca una respuesta en la línea de las teorías del aprendizaje, pero yo sugiero que esta complejidad quizás podría entenderse mejor a partir de la observación de las características matemáticas tanto del entorno como de la situación de aprendizaje, ya que las teorías del aprendizaje modernas enfatizan, aunque de formas distintas, la importancia del proceso de adaptación del aprendiz a su entorno. Las características del entorno son, pues, cruciales en la construcción del significado. Por lo tanto, explorarlas desde el punto de vista de las conceptualizaciones que estimulan es tan esencial como explorar los posibles procesos cognitivos del aprendiz. El resultado de los procesos cognitivos del aprendiz depende, en gran medida, de las características del entorno.

Conclusión

Actualmente, la comunidad investigadora está estudiando muchas cuestiones, tanto fundamentales como técnicas, en el campo del diseño y la implementación de entornos informáticos de enseñanza y aprendizaje. Algunas de ellas son ya clásicas, como las modelaciones de los estudiantes, la explicitación del conocimiento, la producción automática de explicaciones, etc. No obstante, hay otras cuestiones que todavía no se están investigando, quizás debido a que en el actual escenario de investigación no existen vínculos sólidos entre los científicos computacionales y los investigadores en educación matemática. Me gustaría finalizar formulando algunas de estas cuestiones.

La introducción del *software* educativo, del tipo que sea, hace que la situación de enseñanza y aprendizaje sea mucho más compleja desde un punto de vista didáctico porque un sistema informático es, ante todo, la materialización de una tecnología simbólica. Esta particularidad juega un papel clave en dos sentidos:

- Por una parte, modificando el objeto de enseñanza como resultado del proceso de transposición computacional.
- Por otro lado, modificando las relaciones que uno puede tener con dichos objetos o el tipo de problema que resulta relevante o de interés.

El profesorado difícilmente será capaz de introducir estas tecnologías en su práctica diaria si no está bien informado sobre todos los aspectos que pueden determinar su lugar y su papel preciso en un proceso didáctico. Afirmaría que los profesores deben conocer los entornos de aprendizaje informáticos desde un punto de vista didáctico.

Un aspecto clave concierne a la posibilidad del profesor de controlar la situación de aprendizaje, al mismo tiempo que da suficiente autonomía al estudiante para que pueda desarrollar un auténtico proceso de aprendizaje. La riqueza y la complejidad del resultado de la interacción entre el aprendiz y la máquina es tal que el profesor difícilmente podrá estar seguro de haber comprendido todas las producciones de los estudiantes. Esta cuestión es especialmente importante en el caso de la tutoría a distancia debido a las limitaciones temporales. Esto hace que sea necesario desarrollar máquinas que sean capaces de interaccionar con el profesor para facilitarle su tarea, concretamente en lo que a la interpretación y la corrección de las producciones de los alumnos se refiere.

Otro aspecto clave que me gustaría destacar es la necesidad de progresar en la formación de profesores para que comprendan mejor las matemáticas del ordenador. Los entornos informáticos plantean una dificultad intrínseca si se les compara con los entornos materiales clásicos, debido a la representación dinámica que exhiben y a su autonomía de acción. Estas características probablemente cambiarán las relaciones entre el aprendiz y su entorno simbólico, pero también las relaciones entre el profesor y su entorno de trabajo. Me atrevo a sugerir que la *modelización* puede ser la palabra clave para encontrar una respuesta. Si es así, deberíamos considerar que esta relación forma parte del contenido matemático que debemos enseñar.

Referencias bibliográficas

BALACHEFF, N. (1991): «Contribution de la Didactique et de l'Épistémologie aux Recherches en EIAO», en BELLISSANT, C. (ed.): *Actes des XIII Journées Francophones sur l'Informatique*. Grenoble. IMAG, pp. 9-38.

BALACHEFF, N. (1993): «La Transposition Informatique. Note sur un Noveau Problème pour la Didactique», en ARTIGUE, M.; GRAS, R.; LABORDE, C.; TAVIGNOT, P. (eds.): *20 ans de Didactique des Mathématiques en France*. Grenoble. La Pensée Sauvage.

BALACHEFF, N.; SUTHERLAND, R. (1994): «Epistemological Domain of Validity of Microworlds, the Case of Logo and Cabri-géomètre», en LEWIS, R.; MENDELSON, P. (eds.): *Lessons from Learning. Proceedings of the IFIP* WG3 Working Group. A46. Amsterdam. North-Holland/Elsevier B.V., pp. 137-150.

BALACHEFF, N.; SOURY-LAVERGE, S. (1995): «Analyse du Rôle de l'Enseignant dans une Situation de Préceptorat à Distance: TéléCabri», en NOIRFALISE, R. ; PERRIN-GLORIAN, M.J. (eds.): *Actes de la VII Ecole d'Été de Didactique des Mathématiques*, pp. 47-56.

BRESENHAM, J.E. (1988): «Anomalies in Incremental Line Rastering», en EARNSHAW, R.A. (ed.): *Theoretical Foundation of Computer Graphics and CAD*. NATO ASI Series F. 40. Berlín. Springer Verlag, pp. 329-358.

BROUSSEAU, G. (1997): *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Dordrecht . Kluwer Academic Publishers.

CAPPONI, B.; LABORDE, C. (1995): *Cabri-Classe*. Argenteuil. Editions Archimède.

CLANCEY, W.J. (1983): «The Epistemology of a Rule-based Expert System: A Framework for Explanation». *Artificial Intelligence*, n. 20, pp. 215-251.

CUBAN, L. (1986): *Teachers and Machines*. Nueva York. Teachers College Press.

JACKIW, N. (1991): *The Geometer's Sketchpad*. Berkeley, CA. Key Curriculum Press.

LABORDE, J.M. (1985): *Projet d'un Cahier Brouillon Informatique de Géométrie*, Rapport Interne LSD (IMAG). Grenoble (también en GUIN, D.; NICAUD, J.F.; PY, D. (eds.): *Environments Interactifs d'Aprentissage avec Ordinateur*. París. Eyrolles, 1995, 41).

MILLER, J.R. (1988): «The Role of Human-Computer Interaction in Intelligence Tutoring Systems», en POLSON, M.C.; RICHARDSON, J.J. (eds.): *Foundations of Intelligent Tutoring Systems.* Hillsdale, New Jersey. Lawrence Erlbaum Associates, pp. 143-189.

NICAUD, J.F. (1989): «APLUSIX: un Système Expert Pédagogique et un Environnement d'Apprentissage dans le Domaine du Raisonnement Algébrique». *Technique et Science Informatique*, n. 8(2), pp. 145-155.

OHLSSON, S. (1991). «Knowledge Requirements for Teaching: the Case of Fractions», en GOODYEART, P. (ed.): *Teaching Knowledge and Intelligent Tutoring.* Norwood, New Jersey. Ablex Publishing Company, pp. 25-59.

SLEEMAN, D.H. (1982): «Inferring (mal) Rules from Pupils' Protocols». *Proceedings of the European Conference on Artificial Intelligence.* Orsay, France, pp. 160-164.

WENGER, E. (1987): *Artificial Intelligence and Tutoring Systems.* Los Altos, CA. Morgan Kaufmann Publishers.

6

Posibles relaciones entre lenguaje natural y lenguaje matemático

Pearla Nesher
University of Haifa (Israel)

Introducción

Mientras que el lenguaje natural se utiliza, entre otras muchas situaciones, en la comunicación cotidiana y en el discurso en el aula para explicar nuevos términos y conceptos, las matemáticas constituyen un lenguaje formal que obedece sus propias reglas semánticas y sintácticas. Aunque casi todo el mundo puede comprender y expresarse utilizando el lenguaje natural, la situación en relación con el lenguaje matemático dista de ser satisfactoria. A simple vista, el lenguaje natural parece presentar abundantes situaciones engañosas, ambigüedades, dobles significados, expresiones excesivas y modalidades y estilos diversos, por lo que debería ser mucho más difícil de aprender que el lenguaje matemático que está libre de todas estas características engorrosas. Las matemáticas parecen ser un riguroso medio para expresar el pensamiento, aunque algo artificial, tal y como señaló Popper (1989 (1963), p. 309). El lenguaje matemático es independiente de la variación del contexto y expresa el pensamiento de forma exacta y concisa.

Pero, como bien sabemos, no es exactamente cierto que se aprenda con mayor facilidad el lenguaje matemático que el natural. ¿Por qué el lenguaje matemático es tan difícil de aprender y de usar? Quizás, aún no comprendemos totalmente la relación entre estos dos lenguajes y no somos capaces de utilizarla para interpretar las dificultades reales de los estudiantes.

Sólo me detendré en tres puntos (aunque hay más temas que deberían discutirse):

- Semejanzas y diferencias entre lenguaje natural y lenguaje matemático.
- Los problemas de encunciado verbal.
- El discurso en el aula durante el aprendizaje matemático.

Semejanzas y diferencias entre lenguaje natural y lenguaje matemático

Aspectos ontológicos (¿etimológicos?)

En mi opinión, el lenguaje natural y el lenguaje matemático son dos lenguajes distintos, aunque relacionados entre sí. Comparten, por supuesto, las características de todo sistema simbólico, o lenguaje, en el sentido de que expresan el pensamiento y representan ciertos objetos o relaciones que se hallan fuera del lenguaje. El lenguaje natural, normalmente, trata del mundo que nos rodea, mientras que las matemáticas expresan pensamientos especiales y denotan objetos y relaciones que normalmente, aunque no siempre, pueden aplicarse a nuestro mundo. Hay pensamientos especiales que sólo pueden expresarse a través del lenguaje matemático. Consideremos, por ejemplo, estos dos grupos de frases:

Grupo 1	Grupo 2
a) Hay tres libros en la mesa.	*a'*) $2 + 3 = 5$
b) Me encontré a dos chicas.	*b'*) el 5 es un número primo.
c) Compré media libra de queso.	*c'*) la raíz cuadrada positiva de 4 es 2.

En el grupo 1 nos centramos en objetos que no son números, sino libros, chicas y queso, mientras que los números se usan para denotar su cantidad o su magnitud. Por el contrario, en el grupo 2 nos centramos en objetos y conceptos relacionados con las matemáticas, tales como 5, 2, número primo o raíz cuadrada. Los números naturales aparecen tanto en el lenguaje cotidiano como en las matemáticas. En el lenguaje natural hay palabras para designar números y en el lenguaje matemático hay símbolos especiales, hay dígitos. ¿Juegan éstos el mismo papel en ambos contextos? Su ontología (¿etimología?) es distinta. Se refieren a objetos y relaciones distintas. Además, existen otros muchos objetos y conceptos matemáticos que no tienen una expresión paralela en el lenguaje natural, por ejemplo «raíz cuadrada de -1» o «función exponencial».

Aspectos semánticos y sintácticos

Al igual que el lenguaje natural, las matemáticas tienen su propia sintaxis y su propia semántica. Asumiendo que todos estamos familiarizados con la sintaxis y la semántica de nuestra lengua materna, me centraré en el lenguaje de las matemáticas. Consideremos las siguientes expresiones matemáticas:

a) $2 + 3 = 5$	*b*) $2 \quad 3 = + 5$

Todos entendemos que hay algo incorrecto en *b*. Hay reglas sintácticas que seguimos cuando sabemos matemáticas, convenciones que el niño aprenderá en la escuela. Según la escuela matemática formalista, en el lenguaje de las matemáticas sólo importa la sintaxis. Pero, al igual que Popper (1989 (1963)), afirmo que el lenguaje matemático tiene también su propia semántica.

Los que sabemos matemáticas estamos de acuerdo en que si $a + b = c$, entonces $c - b = a$. Este acuerdo es consecuencia de nuestra comprensión del significado de los signos +, - y =. Comprendemos que cuando escribimos una proposición que contiene una operación de adición, tal como $a + b = c$, la a y la b a ambos lados del signo + son los sumandos y c, al otro lado del signo =, es su suma. Sabemos también que cuando escribimos una frase que incluye el signo -, la operación de sustracción, el papel de los números a ambos lados del signo - es diferente. A la izquierda del signo - se halla la suma, resultado de una relación aditiva y, a su derecha, encontramos un sumando, mientras que el segundo sumando se encuentra al otro lado del signo =.

Podría seguir con la diferencia entre una *expresión* y una *proposición* y elaborar el significado del signo =. Quizás el lector lo consideraría demasiado técnico, pero estoy intentando poner de relieve que la sintaxis de las matemáticas transmite significados, lo que constituye la base para expresar pensamientos matemáticos. Al considerar el papel que cada símbolo juega en matemáticas y el significado de sus expresiones, nos hallamos en el dominio de la semántica (Frege, 1984 (1952)). Y la semántica del lenguaje matemático difiere de la semántica del lenguaje natural. x, +, > o *197* son símbolos especiales del lenguaje matemático que usan su propia sintaxis y su propia semántica para expresar pensamientos que tienen significado matemático.

Aplicaciones: donde los dos lenguajes se encuentran

¿Cómo es posible que este lenguaje, las matemáticas, se haya convertido en algo tan importante y no sea sólo un juego esotérico de símbolos? La respuesta está en el hecho de que los pensamientos expresados por las matemáticas son útiles en otros dominios además del suyo propio. Por ejemplo, una serie de símbolos tales como *240 + 360 = 600* es útil porque sabemos que si contamos 240 hombres en la antesala de un cine, y después contamos que entran 360 mujeres, no necesitamos volver a contar para saber si una sala con un aforo de 600 butacas podrá acomodarlos a todos. Podemos *calcular* la suma. Esto es posible porque:

- Encontramos, por una parte, una conexión entre la semántica de la operación suma y, por otra, nuestro conocimiento común de que los hombres y las mujeres forman conjuntos disjuntos; estas dos consideraciones nos informan de que, por consiguiente, pueden usarse como sumandos en una relación aditiva (volveré más tarde a este conocimiento).
- Somos conscientes de la naturaleza deductiva de las matemáticas y creemos que podemos confiar en nuestros cálculos. De hecho, si alguien, en lugar de sumar las dos cantidades, contara otra vez cuánta gente hay en la antesala y obtuviera como resultado 599, le diríamos inmediatamente que se ha equivocado *al contar*. Todos sabemos que 240 + 360 no puede dar 599. Confiamos mucho más en la naturaleza deductiva de las matemáticas y en sus propias fuentes de veracidad y falsedad, que no son experimentales, que en nuestros datos procedentes de la observación (véase Popper, 1989

(1963), pp. 201-215), para tener más información acerca de la naturaleza descriptiva y deductiva de las aplicaciones.).

Este es el motivo por el cual las matemáticas se han convertido en la reina, o en la doncella, de todas las ciencias. No obstante, para aplicar las expresiones matemáticas como modelos en situaciones fuera de las matemáticas es necesario construir un puente: se requiere un vínculo entre la semántica del lenguaje de las matemáticas y la semántica del lenguaje del mundo en que se quieren aplicar. Seguiré con esta discusión a continuación.

Los problemas de enunciado verbal

Otro dominio en el cual el lenguaje natural y el lenguaje matemático convergen es el de los problemas de enunciado verbal tal como se enseñan en la escuela. Se tiende a creer que el motivo por el que enseñamos a resolver problemas de enunciado verbal es la aplicabilidad de las matemáticas, como primer paso hacia la modelización (Gravemeijer, 1997; Verschaffel y otros, 1997; Wyndhamn y Saljo, 1997). Sin embargo, el volumen de documentación e investigaciones en esta área es el resultado del consenso generalizado acerca de que la mayoría de estudiantes no logran resolver muchos de los problemas de enunciado verbal que se les presentan, a excepción de los más simples. Este fracaso tiene dos raíces.

- En primer lugar, la mayoría de los niños no consiguen entender la esencia misma de la tarea. Por ejemplo, Rachel, de 8 años, dijo a su maestro: «Comprendo bien las palabras y los números, sólo dígame si debo sumar o restar». El maestro, podríamos alegar que debido a consideraciones educativas, se negó a contestar esta pregunta y, educadamente, respondió a Rachel: «Esto es lo que se supone que debes encontrar tu sola». Rachel no obtuvo ningún beneficio de la respuesta de su maestro, sino que, contrariamente, empezó a desarrollar un sentimiento de fracaso que posteriormente se traduciría en una fobia hacia los problemas de enunciado verbal. Rachel es la típica alumna que no sabe cómo llegar a descubrir si se debe sumar o restar, y, en consecuencia, qué modelo matemático escoger y para qué propósito. Responder a Rachel y a otros alumnos como ella es nuestro principal reto pedagógico. ¿Sabemos cómo y por qué enseñar a resolver problemas de enunciado verbal o, simplemente, acumulamos más y más ejemplos con la esperanza de que nuestros estudiantes les encontrarán algún sentido?
- En segundo lugar, para enseñar a los niños qué deben hacer con los problemas de enunciado verbal y cómo pueden decidir qué modelo matemático adoptar, deberíamos comprender verdaderamente lo que supone esta tarea. A continuación presentaré varios dilemas relacionados con este tema, y que constituyen la base de mi largo trabajo de investigación en relación con los problemas de enunciado verbal en primaria (Nesher y Teubal, 1975; Nesher y Katriel, 1977; Nesher, 1980; Nesher y otros, 1982).

A los ojos del niño

En la escuela, los problemas de enunciado verbal, aunque se supone que sirven para enseñar la aplicación de las matemáticas al mundo real, no se parecen a situaciones reales y los niños no los consideran relacionados con nada real. Son parte del ritual escolar. Mi ejemplo favorito es la historia para un problema escrita por un alumno de segundo grado cuando se le pidió que contara una historia que correspondiera a la frase matemática 1 + 6 = 7

> JOHNNY (segundo grado): Mamá compró una plancha y luego compró seis planchas más. Ahora tiene siete planchas.

Esta historia no representa ninguna situación de la vida real, sino que refleja la experiencia escolar de Johnny en cuanto a los requisitos de la tarea. Mientras que para nosotros los problemas matemáticos de enunciado verbal presentan al niño situaciones de la vida real, para el niño son sólo otra de las tareas escolares, caprichosas e irrelevantes, en las que deben realizarse operaciones a partir de datos dados verbalmente.

El proceso para solucionar problemas de enunciado verbal empieza con la lectura de un texto expresado en lenguaje natural y termina escribiendo y calculando utilizando el lenguaje simbólico matemático. La comprensión del lenguaje natural es una condición necesaria pero, en mi opinión, no suficiente ya que los problemas de enunciado verbal no son textos ordinarios.

¿Qué tipo de texto son los problemas de enunciado verbal?

Me gustaría tomar un ejemplo genérico para ilustrar la naturaleza artificial de los textos de los problemas de enunciado verbal y mostrar cómo puede determinarse qué operación matemática debe ser utilizada. Este análisis detallado también nos será de utilidad más adelante.

> **Problema 1**
> En el estante hay dos muñecas y tres osos de peluche. ¿Cuántos juguetes hay en el estante?

Este simple problema de enunciado verbal presupone mucha información conocida por el maestro pero no siempre por el niño. En primer lugar, un análisis de la estructura del texto anterior nos muestra que existen tres series subyacentes en el texto del problema. Éste es un requisito indispensable para todo problema bien formado que requiera una operación binaria, mientras que un problema que requiera dos operaciones binarias deberá, exactamente, estar constituido por cuatro series subyacentes (Hershkovitz y otros, 1990; Hershkovitz y Nesher, 1996 y en prensa):

- Serie (1): Hay dos muñecas en el estante.
- Serie (2): Hay tres osos de peluche en el estante.
- Serie (3): Hay un número desconocido de juguetes en el estante.

El hecho de que los conjuntos de objetos mencionados en la primera y segunda serie sean conjuntos disjuntos y el tercer conjunto sea su unión nos permite interpretar esta información como correspondiente a una operación de adición. Suponer que los conjuntos son disjuntos es una condición necesaria, de lo contrario no sería una adición, sino quizás la unión de conjuntos como en el caso del problema 2.

> **Problema 2**
> Un acuario tiene 5 peces grandes y 3 peces marrones. En total hay 6 peces en el acuario.
> ¿Qué podemos decir a partir de esta información?

Volviendo al problema 1, es necesario comprender el lenguaje natural para saber que no existe ningún objeto que sea al mismo tiempo una muñeca y un oso de peluche (para que se cumpla la condición de ser conjuntos disjuntos). También debe ser cierta la condición de inclusión: para cualquier objeto, si es una muñeca, entonces es un juguete y si es un oso de peluche, entonces es un juguete. La siguiente suposición necesaria para solucionar el problema 1 establece que dado un objeto cualquiera, si es un juguete, entonces es o bien una muñeca o bien un oso de peluche. Esta última suposición no es nada obvia y no resulta de la experiencia del niño en su mundo natural. En la estantería podría haber otros juguetes que no fueran ni muñecas ni osos de peluche, pero el texto no dice nada acerca de esto (véase Nesher y Katriel, 1977, para una exposición formal y completa).

De hecho, el texto del problema 1 no describe un estante de juguetes real. El texto fue especialmente compuesto para describir una situación que cumpliera las condiciones lógicas de conjuntos disjuntos y su unión. Es artificial porque obedece a suposiciones que sólo son propias de este tipo de texto y que no se mantienen en el uso ordinario del lenguaje natural que describe la realidad.

Otras de las características generales de este tipo de textos son:

- La comprensión del texto de un problema de enunciado verbal requiere reconocer la existencia de *dependencias semánticas* entre las series subyacentes en el mismo. En el problema 1 había relaciones de dependencia entre las muñecas, los osos de peluche y los juguetes, pero ésta podría haber sido expresada mediante adjetivos (ventanas abiertas, ventanas cerradas, ventanas) o por cláusulas temporales (por la mañana, por la tarde, durante el día). Obsérvese que la tripleta «por la mañana, por la tarde, por la noche» no sería válida en este caso, ya que ninguna de sus partes puede ser la unión de los otros dos conjuntos. El lenguaje natural, con su riqueza, nos proporciona un número infinito de tripletas a las que correspondería una descripción formal aditiva y todavía más casos a los que no puede aplicarse una frase aditiva. Deberíamos enseñar explícitamente a los alumnos cómo localizar estas tripletas en los problemas de enunciado verbal, tanto las que funcionan como las que no.
- Un problema aritmético de enunciado verbal es *una unidad textual autocontenida*, situada en el contexto de la clase de matemáticas. Se supone que todos los *objetos* citados en los problemas de enunciado verbal existen en el

dominio referencial definido por el texto. Por otra parte, no existe ningún otro *objeto*, excepto aquellos citados en el texto. Por ello, en el caso del problema 1 no habría ningún otro juguete en el estante. Además, los *objetos* persisten a lo largo de la *duración* del problema. Veamos otro ejemplo ilustrativo:

> **Problema 3**
> Por la mañana John tenía 5 caramelos y al mediodía su hermana le dio dos. ¿Cuántos caramelos tiene ahora?

Un problema como el planteado no tiene sentido para un niño normal que probablemente se habría comido alguno de los caramelos en ese intervalo de tiempo. Tampoco tiene sentido hablar de manzanas y asumir que ninguna se va a pudrir, o hablar de conejos y asumir que ninguno procreará, etc. (Popper, *ibid.*, p. 212).

- El hecho de que los textos de los problemas de enunciado verbal estén *numéricamente sobrecargados* de modo artificial enfatiza el papel especial de los *objetos* en los problemas aritméticos de enunciado verbal. Éstos funcionan, esencialmente, como objetos para ser manipulados numéricamente y fácilmente se ignoran las funciones que estos objetos tienen en sus contextos naturales. Esto explica por qué *mamá puede comprar 6 planchas más cuando ya tiene una.*
- La cuestión de la *identificación* estricta raramente surge. La identidad real de los objetos en los textos de los problemas de enunciado verbal es mucho menos relevante que la relación entre las clases semánticas a las que pertenecen. Por ello, en los textos de los problemas de enunciado verbal se encuentran, habitualmente, expresiones del tipo «3 chicos se fueron a la playa...» en la que se hace referencia a tres miembros pertenecientes a la categoría *chicos*, en lugar de «Jacob, Joseph y Dan se fueron a la playa...». Esta última formulación precisa más elaboración para llegar a la primera, es decir, para llegar al número con el que operar.

De todo esto se deduce que los enunciados que los libros de texto presentan al alumnado no describen la realidad, sino que son meros recursos pedagógicos que crean textos artificiales con el objetivo de enseñar a los alumnos a tomar modelos usando las matemáticas. Los *recursos lingüísticos* del lenguaje natural se utilizan de tal forma que aseguran la interpretación de los problemas de enunciado verbal como reflejo del conjunto de condiciones lógicas que conducen a una operación matemática específica.

Distintas interpretaciones del lenguaje natural

Tal como he mencionado anteriormente, en el lenguaje natural existen muchos recursos semánticos para representar dos conjuntos disjuntos y su unión. En consecuencia, comprender el lenguaje natural es una condición necesaria para ser capaz de solucionar un problema de enunciado verbal. No obstante, la interpretación del texto de un problema de enunciado verbal es claramente distinta de la interpretación que podría hacerse mediante un uso normal del lenguaje natural.

Las dos series siguientes podrían encontrarse en un problema de enunciado verbal en matemáticas, o podrían formar parte de una secuencia narrativa: «dos niños estaban corriendo... y tres niños estaban andando...» Los verbos *andar* y *correr* tienen lecturas que se solapan notablemente y sólo difieren en la especificación del modo de moverse: *corriendo* implica un movimiento rápido, mientras que *andando* no. Cuando dos verbos como éstos aparecen en el discurso cotidiano, o como parte de una narración, y con una proximidad secuencial como la que tenemos aquí, se interpretan con el énfasis puesto en sus características semánticas diferenciales y no en sus características comunes, dando, de esta forma, un énfasis de contraste a estos verbos.

En consecuencia, podemos decir que:

1. Si los niños *corrieron* a clase, entonces,
   a) se movieron hacia la clase;
   b) su movimiento era rápido.
2. Si los niños *anduvieron* a clase, entonces,
   a') se movieron hacia la clase;
   b') su movimiento no era rápido.

En un texto narrativo la manera en que se movieron, es decir b y *b'*, es el foco de atención de la expresión y distingue los dos grupos de niños, quizás con connotaciones que podrían responder a preguntas como «¿Quién llegó primero?» o «¿Quién llegó cansado?». Sin embargo, en un problema de enunciado verbal *b* y *b'* sirven meramente para establecer dos conjuntos disjuntos, y *a* y *a'* para establecer su unión; el texto está despojado de cualquier otra connotación. Los textos en matemáticas son textos especiales y se interpretan a partir de su estructura lógica, que permite satisfacer una operación matemática. Otras connotaciones son innecesarias.

Acabo de narrar una historia larga y algo complicada acerca de un simple problema de enunciado verbal. Sin embargo, la lección que podemos extraer es que siempre existe un modo de saber qué operación corresponderá a un texto dado. Cómo saberlo no debería ser nuestro secreto, sino que deberíamos transmitir explícitamente éste conocimiento a los niños.

Indicios verbales

Muchos maestros, en su intento desesperado por ayudar a los niños a pasar de un enunciado verbal, dado en lenguaje natural, al lenguaje matemático, les sugieren que se apoyen en el significado de determinadas palabras para encontrar la operación matemática precisa. Estas palabras especiales se llaman *indicios verbales*. Se han llevado a cabo muchos estudios sobre cómo entrenar a los niños en la utilización de este vocabulario (Dahmus, 1970).

Hace ya mucho tiempo, Jerman y Rees (1972) hablaron del papel de los indicios verbales como uno de los factores que permiten determinar la dificultad relativa de la resolución de problemas aritméticos verbales. Su concepción de los indicios verbales incluía palabras como *más, menos, añadido, todo junto, ganado, perdido, sobrante, cada, media.*

El uso de los indicios verbales es problemático desde el punto de vista de la transición de una frase en lenguaje natural a la frase matemática correspondiente.

En una clase de álgebra que di hace muchos años, varios alumnos no sabían distinguir entre estas dos series que incluyen la palabra más:

a) Nueve *más* que siete (Que podría aparecer en un contexto como: Invité a siete personas a la fiesta pero aparecieron nueve más.)

b) Nueve *es más* que siete (Que podría aparecer en un contexto como: Invité a nueve personas a mi fiesta y Sue invitó a siete a la suya, por lo que tuve una fiesta más concurrida.)

Cuando las traducimos a símbolos matemáticos, aparecen del modo siguiente:

a) $9 + 7$

b) $9 > 7$

Esta es la parte más difícil de la transición del lenguaje natural al lenguaje matemático. Requiere que se comprendan no sólo palabras aisladas como *más*, sino que se comprenda también la sintaxis del lenguaje natural y la del lenguaje matemático. Está claro que la palabra *más* puede tener varios significados dependiendo del contexto sintáctico.

En un experimento que llevamos a cabo hace varios años, observamos que, de hecho, los alumnos usan cualquier indicio verbal del texto como indicador de la operación matemática que debe utilizarse. A pesar de ello, a menudo se equivocan cuando la misma palabra se utiliza como distractor, cuando es necesaria una operación diferente.

La concepción errónea de que ciertas palabras pueden servir como indicios verbales inequívocos es el resultado de presentar los problemas de enunciado verbal de forma artificial, utilizando un vocabulario especializado y limitado cuyos términos, finalmente, se convierten en indicios verbales para las operaciones matemáticas. Esto queda reflejado en los libros de texto que actualmente se usan en las escuelas de primaria, y en la utilización masiva de ciertas palabras con connotaciones no derivadas de la experiencia de los alumnos con el lenguaje natural sino de nuestra enseñanza y que, desgraciadamente, sirven como malas muletas.

Para comprobar el verdadero papel de los indicios verbales en la resolución de problemas de enunciado verbal se diseñó el siguiente experimento. El estudio contemplaba dos variables: *a*) indicios verbales y *b*) operaciones matemáticas necesarias para solucionar el problema. Una tabla de doble entrada, con dos valores para cada categoría, presentaba las cuatro combinaciones posibles. (Para ver los problemas en cuestión véase Apéndice A.)

Por ejemplo, la formulación verbal incluía más y la operación necesaria era la adición (+); o la formulación verbal incluía menos aunque la operación requerida fuera la adición (+). El cuadro 1 de la página siguiente muestra los resultados.

Tal como puede apreciarse, la proporción mayor de respuestas correctas se da cuando las palabras clave actúan como indicio de la operación, y la proporción de respuestas correctas es mucho menor cuando las palabras clave son distractores respecto a la operación.

Este experimento demostró que enseñar a solucionar problemas con la ayuda de palabras clave nos aleja, a menudo, de nuestro objetivo. El mero hecho de que

Cuadro 1. Proporción de respuestas correctas en problemas de enunciado verbal bajo cuatro categorías distintas

INDICIO VERBAL / OPERACIÓN	más	menos
+	0,87	0,64
-	0,43	0,81

una misma palabra aparezca a veces como indicio y otras como distractor demuestra que no existe una traducción unívoca basada en indicios verbales que pueda garantizar la solución correcta. Si se hubiera encontrado un vocabulario restringido con el cual pudieran establecerse correspondencias biunívocas entre el lenguaje natural y las expresiones aritméticas, la resolución de problemas de enunciado verbal se convertiría, por completo, en algo trivial, o meramente en un simple algoritmo.

Experimentos como el que acabo de ilustrar (Nesher y Teubal, 1975) y la abundancia de anécdotas en las aulas nos llevan a pensar que en lugar de tener en cuenta palabras aisladas deberíamos considerar el texto entero y encontrar las dependencias semánticas que se dan en él.

Orientación futura en la era del ordenador

Uno de los primeros intentos de abordar la transición desde la formulación verbal a la expresión matemática, en el contexto de los problemas de enunciado verbal, se realizó hace mucho tiempo, en el marco del procesamiento de la información (Paige y Simon, 1966). Su enfoque es especialmente interesante para aquellos que intentamos usar el ordenador para la resolución de problemas (Hershkovitz y Nesher, 1996 y en prensa; Reusser, 1988).

Paige y Simon (1966) intentaron analizar la cuestión, comparando las estrategias de resolución de problemas del ordenador con las de los humanos. Esto les llevó a algunas observaciones relativas al proceso de traducción del lenguaje natural a expresiones formales, considerando dos estrategias principales:

- La traducción secuencial directa.
- La comprensión global del problema.

En la actualidad, aquellos que intentan usar el ordenador para enseñar problemas de enunciado verbal están utilizando esta caracterización de las estrategias. Mientras que Reusser creó programas informáticos que seguían estrategias secuenciales directas (Reusser, 1992), Hershkovitz ha creado un programa informático que usa el enfoque global al texto (Hershkovitz y otros, 1990; Hershkovitz y Nesher, 1996 y en prensa). Debido a limitaciones de espacio no profundizaré en este tema.

El discurso en el aula y hablar de matemáticas en el aula

El discurso en las clases de matemáticas es un tema importante en la agenda actual de la comunidad de educadores matemáticos. Éste es otro contexto en el que se analiza la relación entre el lenguaje natural y las matemáticas.

En los Estándares Curriculares y de Evaluación de las Matemáticas Escolares que redactó el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 1991), entre los cinco «nuevos objetivos para el alumno», se incluye «aprender a comunicarse matemáticamente».

Apelar a la comunicación tiene sus raíces en varias tradiciones de investigación. Me gustaría usar las palabras de uno de sus defensores (Sfard, 1997):

> *La conversación matemática se fomenta no sólo por su propio valor sino debido a los efectos que se espera que produzca en el proceso de aprendizaje y en la calidad del conocimiento resultante [...] se cree que la conversación matemática es buena para el pensamiento matemático.*

En los estándares se especifica que mientras los estudiantes comunican sus ideas «aprenden a clarificar, refinar y consolidar su pensamiento» (NCTM, 1991, p. 6).

Las cuestiones que Sfard plantea son: ¿Qué hay en el mecanismo del pensamiento matemático que hace que la *verbalización* de ideas matemáticas sea beneficiosa para el proceso de aprendizaje? ¿Qué tiene que ver la habilidad para solucionar problemas con la capacidad para comunicar matemáticas a otros? (Sfard, 1997).

La afirmación anterior está basada en la conexión entre el lenguaje y el pensamiento, tesis muy conocida en el campo de las teorías cognitivas. El lenguaje es la ruta principal para articular ideas. La pregunta básica que se plantea con este argumento es ¿de qué lenguaje estamos hablando?, ¿del lenguaje natural que utilizamos para comunicarnos habitualmente en nuestra vida cotidiana, en las conversaciones en clase, al describir situaciones, o del lenguaje formal de las matemáticas? Me inquieta pensar que hablar de lenguaje y comunicación en términos generales contribuye a la ambigüedad y vaguedad de nuestras intenciones. En este punto, me gustaría hacer una distinción entre *hablar matemáticamente* y *hablar de matemáticas*.

Hablar matemáticamente y hablar de matemáticas

Al usar el término *hablar matemáticamente* me refiero a usar libremente ideas matemáticas, como función, igualdad o proporción, manipularlas de acuerdo con la sintaxis del lenguaje matemático y ser capaz de aplicarlas en varios contextos, tal y como se especifica en los estándares NCTM:

> *El desarrollo del poder de un alumno para utilizar las matemáticas implica el aprendizaje de signos, símbolos y términos matemáticos. Esto se consigue mejor en situaciones de resolución de problemas en las que los alumnos tienen la oportunidad de leer, escribir y discutir ideas, en las que el uso del lenguaje de las matemáticas se convierte en natural.* (NCTM, 1991, p. 6)

Al *hablar de matemáticas* llevamos a cabo otra acción. Usamos el lenguaje natural como metalenguaje para expresar todo tipo de pensamientos acerca de las matemáticas. Es una cuestión distinta. El vocabulario y la gramática, sintaxis y semántica, son las del lenguaje natural. Dentro del marco de *hablar de matemáticas* me gustaría citar algunos aspectos susceptibles de contribuir al aprendizaje de las matemáticas.

Cuando los maestros escuchan las explicaciones de los alumnos

Desde el punto de vista constructivista es muy importante hablar de matemáticas. De hecho, éste es el principal medio para dar al maestro la oportunidad de aprender algo sobre el pensamiento de sus alumnos y conducir un diálogo real con ellos.

La bibliografía relacionada con la investigación está llena de ejemplos que ponen de manifiesto que los alumnos tienen un buen rendimiento, solucionan algunos problemas correctamente y, a pesar de ello, siguen aferrándose a serias concepciones erróneas.

Un ejemplo bien conocido es el estudio de los decimales (Resnick y otros, 1989). En este estudio, al comparar decimales tales como 0,4 y 0,456, John supo señalar correctamente cuál era el mayor, pero falló al comparar 0,4 y 0,256, al afirmar que 0,256 era el mayor. Si atendemos a su explicación podremos detectar la fuente de sus extrañas respuestas. John no hacía ninguna distinción entre los números decimales y los enteros, ignoraba la coma decimal, y comparaba los números como si fueran enteros. Explicó: «0,4 es más pequeño que 0,256 porque 256 es mayor que 4».

Annette, por otro lado, decidió lo contrario en ambos casos. Afirmó que 0,4 era mayor que 0,456 y que 0,4 era mayor que 0,256. También se equivocó y acertó, respectivamente, por lo que su conocimiento es difícil de comprender y evaluar. Pero si atendemos a sus explicaciones, su respuesta tiene sentido. La explicación de Annette para ambos casos fue: «las décimas son mayores que las milésimas y, por consiguiente, un número que sólo tenga décimas es mayor que uno con milésimas».

En esta situación, no podíamos ayudar ni a John ni a Annette a no ser que les escuchásemos hablar de lo que habían hecho. Ambos partían de concepciones erróneas, o comprensiones incompletas, que no podían detectarse directamente a partir de su ejecución matemática. Fueron su explicación y sus respuestas las que nos dieron una pista acerca de su pensamiento. El habla en este caso es el medio que refleja el pensamiento del alumnado.

El discurso en clase de matemáticas (un modo mixto)

Se afirma que la conversación entre niños, en la que intentan explicar sus métodos, contribuye a su propia comprensión. Deberíamos distinguir claramente entre la conversación cuando es una charla inútil y la conversación que aporta significado al aprendizaje matemático. Obviamente, hablar sobre sus propias acciones lleva a los niños a tener que reflexionar sobre las mismas, aspecto que no siempre se alcanza de otra forma y, por consiguiente, permite que lleguen a ser más conscientes de ellas.

Me gustaría también destacar que una parte importante del aprendizaje en matemáticas está relacionado con el desarrollo de explicaciones aceptables matemáticamente, es decir, con la elaboración de argumentos válidos en matemáticas. El profesorado, como parte de su papel, podría ayudar a los alumnos a aprender qué es un argumento convincente en matemáticas y en qué se parece, o se distingue, de un argumento ético o artístico. De esta forma, las conversaciones entre alumnos en clase de matemáticas podrían contribuir a que éstos pudiesen adoptar las formas propias del razonamiento matemático. También podrían enriquecer el repertorio de estrategias aceptables para una tarea matemática concreta.

Debe tenerse en cuenta que este tipo de conversación se da utilizando el lenguaje natural que actúa como metalenguaje para explicar pensamientos matemáticos. La conversación normalmente se basa en un texto expresado en lenguaje matemático. Hay muchas ideas que sólo pueden expresarse en lenguaje matemático.

Tomemos el siguiente ejemplo trivial: «un cuarto de un número menos cinco». Parece parte del lenguaje natural, como mínimo no está escrito de manera simbólica. Pero, por supuesto, esta expresión es ambigua. Puede escribirse como $1/4\,(n-5)$, o bien como $1/4\,n-5$. Desde un punto de vista matemático, estas expresiones tienen significados distintos y expresan pensamientos diferentes (Frege, 1984, (1952)). No obstante, sólo podemos diferenciarlos a través de su notación formal.

En este ejemplo, hablar matemáticamente significa ser capaz de representar esta idea de tal forma que los dos significados puedan distinguirse. Los matemáticos, al estar de acuerdo sobre el papel de los paréntesis en la notación formal, son capaces de realizar tal distinción. Hay muchos términos en matemáticas y en ciencias, como función, raíz, integral, altura o punto, que no existen, o tienen significados distintos, en el lenguaje natural.

Por ello, cuando en clase de matemáticas hablamos utilizando el lenguaje natural, incluso si lo usamos como metalenguaje, el contenido de la conversación se expresa, la mayor parte del tiempo, en lenguaje matemático. En consecuencia, en las conversaciones en clase de matemáticas, incluso el lenguaje natural es un modo de lenguaje mixto que dista de ser natural (véase apéndice B).

Volvamos al discurso en clase de matemáticas. Cuando los niños discuten entre ellos acerca de argumentos válidos en matemáticas usando el lenguaje natural como metalenguaje para ideas matemáticas, aunque estén parcialmente expresadas en términos matemáticos, cuando explican sus estrategias en este modo mixto, desarrollan aprendizaje matemático. Este tipo de discurso en el aula podría ser el centro de nuestra enseñanza de las matemáticas en el futuro, cuando la tecnología se encargue de muchos de los algoritmos.

Referencias bibliográficas

DAHMUS, M. E. (1970): «How to Teach Verbal Problems». *School Science and Mathematics*, n. 70, pp. 121-138.

FREGE, G. (1984 (1952): «On Sense and Reference», en GEACH, P., BLACK, M. (eds.): *Translation from the Philosophical Writings of Gottlob Frege*. Oxford. Basil Blackwell.

GRAVEMEIJER, K. (1997): «Commentary: Solving Word Problems: A Case of Modelling?». *Learning and Instruction*, n. 7(4), pp. 389-397.

HERSHKOVITZ, S.; NESHER, P. (1996): «The Role of Schemes in designing Computerized Environments». *Educational Studies in Mathematics*, n. 30, pp. 339-366.

HERSHKOVITZ, S.; NESHER, P. (en prensa): «Tools to Think with: Detecting Different Strategies in Solving Arithmetic Word Problems». *Journal for Technology in Mathematics Education*, n. (1, 1).

HERSHKOVITZ, S.; NESHER, P.; YERUSHALMY, M. (1990): *Schemes for Problem Analysis (SPA)*. Tel Aviv. Centre for Educational Technology.

JERMAN, M.; REES, R. (1972): «Predicting the Relative Difficulty of Verbal Arithmetic Problems.» *Educational Studies in Mathematics*. Vol. 4, pp. 306-323.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (1989): *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA. NCTM.

– (1991): *Professional Standards for Teaching Mathematics*. Reston, VA. NCTM.

NESHER, P. (1980): «The Stereotyped Nature of School Word Problems». *For the Learning of Mathematics*, n. 1(1), pp. 41-48.

NESHER, P.; GREENO, J.G.; RILEY; M.S. (1982): «The Development of Semantic Categories for Addition and Subtraction». *Educational Studies in Mathematics*, n. 13, pp. 373-394.

NESHER, P.; KATRIEL, T. (1977): «A Semantic Analysis of Addition and Subtraction Word Problems in Arithmetic». *Educational Studies in Mathematics*, n. 8, pp. 251-269.

NESHER, P.; TEUBAL, E. (1975): «Verbal Clues as an Interfering Factor in Verbal Problem Solving». *Educational Studies in Mathematics*, n. 6, pp. 41-51.

PAIGE, J. M.; SIMON, H.A. (1966): «Cognitive Processes in Solving Algebra Word Problems». *Problems Solving: Research, Method and Theory*, §3, pp. 51-119.

POPPER, K.R. (1989 (1963)): *Conjectures and Refutations: The Growth of Scientific Knowledge*. 5ª ed. Londres y Nueva York. Routledge.

RESNICK, L.B.; NESHER, P.; LEONARD, F.; MAGONE, M.; OMANSON, S.; PELED, I. (1989): «Conceptual Bases of Arithmetic Errors: The Case of Decimal Fractions». *Journal for Research in Mathematics Education*, n. 20(1), pp. 8-27.

REUSSER, K. (1988): «Problem Solving beyond the logic of things: Textual Effects on Understanding and Solving Word Problems». *Instructional Science*, n. 7, pp. 309-338.

SFARD, E.A. (1997): «Learning Mathematics Through Conversation: Is It as Good as They Say? A Debate». *For the Learning of Mathematics*. En prensa.

VERSCHAFFEL, L.; DE CORTE, E.; BORGHART, I. (1997): «Pre-service Teachers' Conceptions and Beliefs about the Role of Real-word Knowledge in Mathematical Modelling of School Word Problems». *Learning and Instruction*, n. 7(4), pp. 339-361.

WYNDHAMN, J.; SALJO, R. (1997): «Word Problems and Mathematical Reasoning – A Study of Children Mastery of Reference and Meaning in Textual Realities». *Learning and Instruction*, n. 7(4), pp. 361-383.

Apéndice A

1 El domingo el lechero trajo 4 botellas de leche más que el lunes. El lunes trajo 7 botellas. ¿Cuántas botellas trajo el domingo?
2. El lunes el lechero trajo 7 botellas de leche, 4 botellas menos que las que trajo el domingo. ¿Cuántas botellas trajo el domingo?
3. El domingo el lechero trajo 11 botellas de leche, 4 más que las que trajo el lunes. ¿Cuántas botellas trajo el lunes?
4. El domingo el lechero trajo 11 botellas de leche y el lunes trajo 4 menos. ¿Cuántas botellas trajo el lunes?

Apéndice B

MAESTRA: No. ¿Qué número es mayor? ¿Este número o éste? (*señalando claramente con su dedo el 0,64 y el 0,8*).

JANE: (con seguridad) El número de arriba (*subrayando el 64*).

MAESTRA: El número de arriba es mayor (*afirmándolo, no formulándolo como pregunta*). ¿Por qué?

SUSIE: (*tranquilizada sabiendo por el tono de la maestra que la respuesta es correcta*) Porque sesenta y cuatro...

JANE: Sí, tiene más cifras que el número de abajo.

MAESTRA: ¡Ah, ya veo! ¿Entonces creéis que los números que tienen más cifras son mayores? (*una corta pausa*) ¿Siempre?

JANE: (*respondiendo rápidamente a la implicación negativa de la pausa*) No, no siempre.

MAESTRA: ¿Podéis darme un ejemplo en el que un número más largo es menor?

JANE: (*después de una pausa*) Si tienes cero coma uno cero cero cero.

MAESTRA: (*escribiendo 0,1000 debajo de los otros dos números*) Sí, y ¿éste es mayor o menor comparado con éste? (*señala el 0,8*).

SUSIE: Menor.

MAESTRA: ¿Cuál es mayor, cero coma ocho o cero coma uno, cero, cero, cero? ¿Cuál es mayor?

SUSIE: (*cambiando su respuesta porque parece creer que «los maestros no formulan de nuevo las preguntas si has acertado» –información obtenida a partir de una entrevista previa–*) El de abajo. Éste (*señalando el 0,1000*).

MAESTRA: ¿Cómo lo sabes? (*pausa*) ¿Cuál es el mayor de estos dos (*señalando el 0,8 y el 0,1000*) y por qué?

JANE: Éste es mayor (*señalando el 0,8*) porque tiene un ocho en lugar de un uno... porque ocho es más grande que uno.

7

La demostración como contenido a lo largo del currículum

Tommy Dreyfus
Weizmann Institute of Science (Israel)

Sólo los matemáticos profesionales
aprenden algo a partir de demostraciones.
La otra gente aprende a partir de explicaciones.
(Ralph P. Boas, 1981)

Introducción

En este capítulo argumento que la demostración, entendida en un sentido amplio, debería estar presente de forma subyacente en todos los componentes del currículum de matemáticas; debería ser una idea dominante que influyera en el tratamiento de cada tema y debería, por consiguiente, determinar la naturaleza de lo que sucede en la clase de matemáticas.

Mi contribución empieza con ejemplos de cálculo para ilustrar cómo la naturaleza de las matemáticas impone la demostración a modo de idea guía y para mostrar qué efecto podría tener la demostración entendida como idea subyacente. Utilizo el cálculo porque sirve para ilustrar bien los puntos clave, pero su uso debería interpretarse como algo ilustrativo más que como algo esencial, puesto que también podría haber usado otros dominios de contenido.

Seguidamente, presento algunos resultados de investigaciones en educación matemática para defender el argumento de que debería concebirse la demostración como algo mucho más general que un contenido de instrucción concreto y con un papel más importante.

Posteriormente, presento algunos progresos recientes en el propio campo de las matemáticas para defender la idea de que es apropiado, para la enseñanza secundaria, trabajar la demostración entendida en un sentido amplio. Finalmente, resumo la argumentación bajo el punto de vista de dicha concepción amplia de demostración.

Después de algunas semanas de clase, y antes de empezar el tema de la derivada, acostumbro a preguntar a mis alumnos de cálculo I, en la universidad, cuál es la derivada de $f(x) = x^2$ y, generalmente, responden a coro $2x$. Luego les pregunto ¿Por qué? y el silencio es sobrecogedor. Preguntarles ¿Podéis justificarlo? o ¿Podéis explicarlo?, en lugar de un ¿Por qué? algo avasallador, no da mejores resultados. En un escenario diferente, pregunté primero cuál era la derivada de $f(x) = x^2$ en $x = 3$, y luego qué significa que la derivada de $f(x) = x^2$ en $x = 3$ sea 6. El efecto fue el mismo.

¿Qué respuestas podía esperar? Dado que los estudiantes tienen bagajes bastante distintos, podría imaginarme una gran variedad de respuestas que incluirían las siguientes:

- La tasa de variación de $f(x)$ respecto a x es $2x$.
- La pendiente de la tangente a la gráfica de $y = x^2$ en el punto (3,9) es 6.
- Si dibujas el gráfico de $y = f(x)$ y dibujas una recta que pase por el punto $A(x, x^2)$ y un punto B próximo en la gráfica, y luego dejas que B se acerque más y más a A, entonces la pendiente de la recta se acerca más y más al valor $2x$.
- El límite de $((x + h)^2 - x^2)/h$ cuando h tiende a 0 es $2x$.

Me sentiría también satisfecho con intentos con menor éxito, con versiones parciales o abreviadas de las que acabo de citar o con otras variantes que mostraran que los estudiantes establecen alguna conexión entre la derivada de una función (en un punto) y otras nociones más elementales o más relacionadas con las aplicaciones. Por ejemplo, un estudiante podría mencionar el hecho de que «tiene algo que ver con el cociente de incrementos» u otro podría sugerir «relacionarlo con la velocidad de un cuerpo que se mueve durante 3 segundos según una ley cuadrática».

Estas respuestas distan mucho de ser demostraciones satisfactorias, ni siquiera justificaciones, pero contienen un núcleo que podría usarse para construir un argumento más detallado. No obstante, parece ser que la formación que habían recibido mis alumnos antes de acceder a la universidad ni tan sólo les permitía dar dichas respuestas parciales. La mayoría de ellos son capaces de encontrar un máximo utilizando la derivada segunda, pero sólo en algún caso excepcional saben por qué se hace así. Cuando les pido que encuentren, por ejemplo, por qué $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2$ tiene puntos de inflexión, el conocimiento puramente computacional de muchos de ellos es insuficiente. Tienden a inferir que existe un punto de inflexión porque recuerdan que en un punto de inflexión la derivada segunda es igual a cero, pero olvidan uno o más de las siguientes condiciones adicionales relevantes:

- Puede ocurrir que P implique Q pero que Q no implique P; Q es condición necesaria para P pero no suficiente.
- El caso que nos ocupa sería un ejemplo de esta situación: En un punto de inflexión, la derivada segunda es cero, pero la derivada segunda también puede ser cero en puntos que no son de inflexión.
- Por lo tanto, para identificar con seguridad un punto de inflexión es necesario comprobar una condición adicional que es condición suficiente. Esta

condición surge de la definición: los puntos de inflexión son puntos de transición entre las partes convexas y las partes cóncavas del gráfico.

- La función dada no tiene tal transición y por consiguiente no tiene ningún punto de inflexión.

Podrían usarse otras definiciones de punto de inflexión; podrían hacerse suposiciones que simplificaran la situación, como considerar sólo las funciones que son doblemente diferenciables; podrían discutirse detalles lingüísticos (obsérvense los cuantificadores implícitos *en un punto de inflexión, la derivada segunda es cero*). Sin embargo, el tema en discusión no son estos detalles, sino la naturaleza del conocimiento matemático de los estudiantes y el espíritu del currículum de secundaria que han seguido. La esencia de la cuestión es la falta de un convencimiento sólido que defienda que las afirmaciones matemáticas pueden justificarse, y que una gran parte de la importancia y del significado de las matemáticas reside en tales justificaciones y que, consecuentemente, defienda también la creencia de que las afirmaciones matemáticas tienen sentido (Schoenfeld, 1991).

Otros autores han discutido ampliamente la naturaleza de las matemáticas y su relevancia para la enseñanza de las mismas (por ejemplo, Davis y Hersh, 1980; Steen, 1988), destacando la importancia de la naturaleza deductiva de las matemáticas. El filósofo Pierce, desde una posición extrema, ha definido las matemáticas como la ciencia en la que las conclusiones son necesarias ¡sin ni siquiera mencionar acerca de qué hay que sacar conclusiones! Por otro lado, la mayoría de nuestros estudiantes ocupan la mayoría de sus clases de matemáticas haciendo cálculos numéricos o algebraicos. En raras ocasiones, quizás nunca, se les pide que justifiquen, expliquen o interpreten los cálculos que hacen con tanta corrección. Ginsburg (1996) lo ha expresado sucintamente:

> *[...] la esencia de las matemáticas no es producir respuestas correctas, sino pensar creativamente [...] En las clases de matemáticas raramente se incita a los niños a pensar.* (pp. 185-186)

En un artículo reciente en el que compara las matemáticas y las artes, Reiner (1994) hace una distinción entre técnica y arte:

> *La técnica se compone de capacidades específicas en las que uno puede entrenarse; el arte no sólo organiza estas actividades sino que las transciende de un modo difícil de definir con claridad. Mezclar pinturas o dominar las escalas es técnica; la Virgen de la Roca o una improvisación original de jazz es arte. [...] Una distinción similar parece ser válida en matemáticas y ciertamente podría ser clave para la educación. Encontrar el máximo común divisor de dos números siguiendo alguna receta es técnica; desarrollar un proceso siguiendo las líneas del algoritmo de Euclides, convenciéndose a uno mismo y convenciendo a los demás de que funciona, o desarrollar su interpretación geométrica, es matemáticas. Incluso un breve examen de la mayoría de libros de texto de secundaria pone de relieve un énfasis tremendo en la técnica.* (p.16)

En consecuencia, ser capaz simplemente de usar con corrección procedimientos matemáticos no hace justicia a la naturaleza de las matemáticas; ejecutar tales procedimientos es una habilidad técnica; comprender por qué los procedimientos funcionan hace que el procedimiento, su uso y su correcta ejecución sean matemáticas. También da mucho poder a la persona que los comprende, indicándole cuándo pueden aplicarse, qué condiciones deben satisfacerse para que funcionen, cuándo tienen sentido, cuándo y cómo podrían modificarse si no se satisficieran todas esas condiciones.

Muchos de los procedimientos que se enseñan habitualmente en secundaria pueden ser ejecutados por calculadoras y ordenadores. Usiskin (1993) predijo que:

> *[...] probablemente desaparecerá del currículum aquello que los ordenadores pueden hacer rápida y fácilmente. Lo que quedará serán probablemente unas matemáticas más conceptuales y más visuales.* (p. 326)

Por ello, la habilidad para desarrollar tales procedimientos será, en principio, pronto superflua. En la práctica, no obstante, los procedimientos deberán permanecer en el curriculum, con un único objetivo: que los estudiantes entiendan por qué, cuándo, bajo qué condiciones y con qué modificaciones potenciales se justifica su uso; dicho objetivo es el que determinará la amplitud de la presencia de los procedimientos y su desarrollo en el curriculum. En otras palabras, las matemáticas determinarán cuánta técnica deberá imponerse a los estudiantes.

Algunos resultados de investigaciones en torno a la demostración

Éste no es lugar para hacer una completa revisión de las investigaciones en torno a la demostración; el lector puede encontrar más información en otros artículos (por ejemplo, en Balacheff, 1997). Por lo tanto, sólo mencionaré y ejemplificaré algunos resultados acerca de las concepciones del alumnado en relación con la demostración que son relevantes para el objetivo de este capítulo.

Algunos autores (Balacheff, 1987; Harel y Sowder, en prensa) han analizado y clasificado secuencias argumentales consideradas demostraciones por los alumnos. Por ejemplo, Balacheff planteó a sus estudiantes que determinarán el número de diagonales de un polígono. Los tipos de demostraciones que identificó incluían:

- *Argumentos empíricos ingenuos:* «hay cinco vértices y cinco diagonales –¡sí, lo hemos demostrado!».
- *Experimentos cruciales:* «intenta con 15, y si funciona, significa que funcionará con los demás».
- *Ejemplos genéricos:* «si hay 6 vértices, parten tres de cada vértice, entonces parten 18 diagonales; pero una diagonal une dos puntos: hay sólo 18 : 2 = 9 diagonales; luego con siete vértices, 4 diagonales partiendo de cada vértice...».
- *Experimentos mentales:* «de cada vértice parten el número de vértices menos (sus dos vecinos y él mismo); hay que multiplicar el resultado por el número de vértices; de cada vértice parte el mismo número de diagonales...».

Otro grupo de investigaciones (por ejemplo, Fischbein, 1982, o Vinner, 1983) mostraron la inadecuación de las concepciones del alumnado acerca de lo que es una demostración. Por ejemplo, Fischbein dio a centenares de alumnos de secundaria una demostración de la afirmación: Para todo entero n, $E = n^3 - n$ es divisible por 6. Aunque más del 80% de los estudiantes afirmaron que habían comprobado la demostración y la aceptaron como correcta, menos del 70% estuvieron de acuerdo con que $E = n^3 - n$ es siempre divisible por 6, menos del 40% determinaron que lo que pretendía ser un contraejemplo debía contener algún error, y menos del 30% estuvieron de acuerdo con que no era necesario hacer más comprobaciones para determinar la validez o la falsedad de la afirmación. Fischbein llegó a la conclusión de que menos del 15% de los estudiantes entendía realmente lo que significa una demostración matemática. A partir de este grupo de estudios, podría concluirse que la noción de demostración matemática es sencillamente demasiado avanzada y excesivamente sofisticada para los estudiantes preuniversitarios y que, por lo tanto, no debería formar parte del currículum, al igual que el cálculo en varias variables y la teoría de cuerpos no están en él.

No obstante, una tercera categoría de investigaciones (por ejemplo, Lampert, 1990; Maher y Martino, 1996), pone de manifiesto que los alumnos, incluso los de primaria, pueden producir argumentaciones matemáticas poderosas. Por ejemplo, Maher y Martino presentan la evolución, a lo largo de cinco años, de los argumentos justificativos de una alumna de primaria. Mientras que la mayoría de tareas propuestas a la alumna requerían clasificar y organizar datos, ésta no sólo desarrolló progresivamente su habilidad de clasificación sistemática, sino que, desarrolló otra habilidad aún más significativa, al acompañar la clasificación con la argumentación verbal, mostrando, por ejemplo, que una clasificación dada era, de hecho, incompleta. Los autores llegaron a la conclusión de que el interés de la alumna por la justificación emergió de su idea de que las matemáticas debían tener sentido.

Si los alumnos de primaria eran capaces de razonar utilizando modelos argumentativos similares a los de la demostración, ¿por qué los estudiantes de secundaria no podían hacerlo? Entendemos mejor esta cuestión analizando con más detalle la situación en que se desarrollaron estos estudios. Los estudios en el ámbito de primaria se realizaron en el marco de experimentos de enseñanza; los alumnos asistían a clases asociadas a proyectos de investigación a largo plazo, en las que razonar, argumentar de forma convincente y justificar las afirmaciones matemáticas formaban parte de la cultura del aula; los alumnos desarrollaban justificaciones en problemas que les eran familiares y en los que habían desarrollado un interés personal, es decir, problemas de los cuales los niños se habían apropiado; como resultado, habían desarrollado un interés personal por la justificación, y examinaban sus propios argumentos para establecer si eran o no convincentes. Los resultados de estos estudios ponen de manifiesto que, bajo circunstancias adecuadas, los alumnos son capaces de alcanzar un alto nivel de razonamiento deductivo, ya en primaria.

Los estudios en el ámbito de secundaria, por otra parte, se desarrollaron sin ninguna intervención, en clases *normales*. Se formulaban preguntas a alumnos que asistían a clases de matemáticas típicas, en las que la tarea habitual era calcular más que convencer o argumentar. Se les planteaba un problema sin ninguna relevancia particular para ellos. Debían juzgar si un argumento, elaborado por una tercera persona, era convincente y cuál era la significatividad de este hecho. Los resultados muestran que, por el motivo que sea, *la mayoría* de alumnos de secundaria no tienen una concepción adecuada de lo que es la demostración.

Los alumnos de primaria sintieron una clara necesidad de demostrar en un entorno que apoyaba la demostración, mientras que no ocurría lo mismo con los estudiantes de secundaria. No debería infravalorarse la importancia de sentir la necesidad de demostrar. Cómo puede llegarse a desarrollar esta necesidad es una cuestión nada trivial del diseño curricular, discutida en otros artículos (Dreyfus y Hadas, 1996; Harel, en prensa; Schoenfeld, 1991). Presentar afirmaciones sorprendentes puede tener éxito como motivación. Sin embargo, el efecto sorpresa está íntimamente relacionado con el significado del contexto en que aparece la afirmación y su relevancia para los alumnos. De hecho, una afirmación sin sentido no puede sorprender ni requiere explicación ni justificación.

Una última diferencia entre los estudios desarrollados en relación con primaria y secundaria está en los tipos de demostración con los que los alumnos trabajaban, tipos que pueden considerarse distintos a partir del criterio establecido en el primer grupo de investigaciones. Mientras que los alumnos de primaria aprendían en clases en las que el desarrollo gradual de un tipo de demostración a otra de tipo superior era parte integral de su educación matemática, a los alumnos de secundaria se les presentaba una demostración formal, aunque no difícil, aceptable según los estándares de los matemáticos profesionales. A continuación veremos que los avances en el propio campo de las matemáticas muestran la complejidad de la noción de demostración y, por tanto, no deberíamos esperar que nuestros estudiantes fueran capaces de captar demostraciones sofisticadas y de alto nivel sin haber estado expuestos durante muchos años al espíritu de la justificación y a la naturaleza del pensamiento matemático.

¿Están los matemáticos tan seguros de lo que es una demostración?

La mayoría de matemáticos son platonistas durante la semana (Sfard, en prensa); es decir, en su trabajo cotidiano se comportan de acuerdo con la que podría ser la definición de demostración de un diccionario:

> *Una secuencia de afirmaciones, cada una de las cuales o bien se deriva de las anteriores de forma válida o bien es un axioma o presuposición, y cuya parte final, la conclusión, es la afirmación a partir de la cual se establece la verdad.* (Borowski y Borwein, 1989)

Pero los *domingos* tienden a volverse críticos, planteándose un número considerable de preguntas profundas en relación con la naturaleza de las demostraciones que utilizan y escriben a diario.

Por ejemplo, durante la segunda mitad del siglo XIX y ya bien entrado el siglo XX, se discutía acaloradamente el estatus de las demostraciones de existencia: Supongamos que un matemático demuestre que cierto objeto matemático existe, pero que su demostración no sea constructiva y el objeto no puede mostrarse. ¿Hasta qué punto es legítimo que otros matemáticos construyan nuevos objetos o nuevas demostraciones basándose en ésta?

En este sentido, Velleman (1997) planteó la siguiente pregunta en relación con el último teorema de Fermat: «¿La existencia de una demostración matemáticamente correcta garantiza que el teorema es cierto?» El campo de trabajo de Velleman es la base axiomática de las matemáticas y el teorema de incompletitud de Gödel evidencia que es imposible demostrar que el conjunto de axiomas subyacentes sea consistente. Un aspecto problemático adicional del intento de construir explícita y lógicamente todas las matemáticas a partir de los axiomas de la teoría de conjuntos es la longitud de las demostraciones necesarias: Russell y Whitehead necesitaron 362 páginas para llegar a demostrar que 1 + 1 = 2 (Davis y Hersh, 1980, p. 334). La longitud también es un problema en algunas demostraciones convencionales; el ejemplo más famoso es el de la clasificación de grupos finitos simples cuya demostración original necesitó cerca de 15.000 páginas. ¿Cómo pueden revisarse tales demostraciones? Pueden contener algunas lagunas serias e incluso errores y Zahler (1976) sugirió que muchos de los artículos matemáticos publicados contienen indudablemente serios errores que no han sido descubiertos.

Las demostraciones largas no son las únicas que no pueden ser adecuadamente revisadas. Lo mismo ocurre con las demostraciones que utilizan programas informáticos, como la de que cuatro colores bastan para colorear un mapa. Los matemáticos, por tanto, se han visto conducidos a introducir la noción de demostraciones probabilísticas: Este tipo de demostraciones fijan una probabilidad p próxima, pero no igual, a 1 y entonces muestran que el teorema es cierto con una probabilidad p. Con este desarrollo, las matemáticas adquieren algunas de las características de una ciencia experimental: Cada vez que el ordenador ejecuta el programa con éxito, disminuye la probabilidad de que todavía exista un error en el teorema; o cada vez que se revisa a conciencia otra pequeña parte de una larga demostración, la probabilidad de que todavía exista un error en el teorema decrece. Fallis (1996) ha propuesto incluso usar experimentos bioquímicos en las demostraciones probabilísticas de los teoremas matemáticos. Argumenta que la evidencia conseguida a partir de experimentos con ADN no sólo es tan legítima como la conseguida a través de programas informáticos, sino que es mucho más eficiente dado que el procesamiento del ADN se da de forma paralela y masiva.

Apenas hemos arañado la superficie de todos los retos planteados por la noción de demostración matemática. En una presentación más detallada, Hanna (1995) concluye que la demostración está viva y goza de buena salud en la práctica matemática y continúa mereciendo un puesto prominente en el currículum de matemáticas.

Kleiner y Movshovitz-Hadar (en prensa) han mostrado que el debate actual sobre qué es lo que constituye una demostración aceptable es una reafirmación de una tradición de 2.000 años. Contrapuesta a este bagaje, la mejor definición de demostración que el matemático ideal de Davis y Hersh (1980) puede dar después de ser presionado por un estudiante de filosofía insistente es la siguiente: «Bien, es un argumento que convence a alguien que conoce el tema» (p. 40).

Como educadores matemáticos, ¿qué debemos aprender a partir de los debates de los matemáticos sobre la demostración? Por una parte, deberíamos darnos cuenta de que el motivo de dicho debate es precisamente el hecho de que la demostración es de extrema importancia para ellos. En matemáticas, la demostración no sólo es importante sino que constituye uno de los componentes del núcleo central de las mismas. Por ello, si queremos enseñar matemáticas, y queremos que nuestros alumnos aprendan matemáticas, la demostración, en una forma u otra, debe impregnar nuestros currículos.

Por otro lado, deberíamos darnos cuenta de que no existen estándares absolutos en cuanto a lo que constituye o no una demostración. Pueden haber pequeñas diferencias entre lo que es una demostración, una justificación, una explicación y una argumentación convincente, pero en enseñanza secundaria estas diferencias son muchísimo menos importantes que las similitudes.

Necesitamos utilizar una concepción amplia de la noción de demostración y está justificado hacerlo; una concepción que nunca sea completa, que no esté terminada o fijada sino que pueda crecer con nuestros estudiantes desde el parvulario hasta la licenciatura (incluso más lejos), una que mejore y se desarrolle junto con la madurez matemática del estudiante.

La demostración entendida en un sentido amplio

Nosotros, los matemáticos, los educadores matemáticos y los profesores, quizás tengamos claro lo que constituye una demostración, al menos en cuanto a las matemáticas en la enseñanza secundaria. Reconocemos una demostración cuando la vemos. Pero no ocurre lo mismo con nuestros estudiantes; éstos pueden tener dudas distintas, a la vez que similares, a las dudas que tienen los matemáticos. Sus dudas tienen otro nivel de sofisticación, pero dan lugar a preguntas similares: ¿Qué podemos dar por supuesto? ¿Qué argumentos podemos usar? ¿Qué grado de detalle es necesario? ¿Qué es lo que constituye una justificación? ¿Una demostración?

Deliberadamente no he mencionado aspectos relacionados con el rigor y la formalización ya que su relevancia es limitada. Ni tampoco tiene sentido que aparezcan mientras los estudiantes no hayan tenido suficientes oportunidades para experimentar, en contextos con significado y relevancia para ellos, las nociones de afirmación (verdadera o falsa), implicación, contraejemplo, argumento a favor de una afirmación y demostración entendida como cadena coherente de razonamientos que llevan de unas afirmaciones iniciales a una afirmación final. Por ejemplo, no debería sorprender que para la mayoría de estudiantes de secundaria, la distinción entre un teorema y su recíproco no sea muy clara, porque casi todas las implicaciones que encuentran son bidireccionales y cuando no lo son no se enfatiza suficientemente la direccionalidad.

Volvamos a la cuestión «¿Por qué la derivada de x^2 es igual a $2x$?

Todas las respuestas presentadas anteriormente son intentos de justificación; varían en el grado de detalle y rigor; pueden ser más o menos aceptables para el profesorado, dependiendo de las expectativas que éste tenga acerca del conocimiento de sus alumnos, pero todas ellas están, en cierto modo, dirigidas hacia la explicación y justificación de los resultados de los cálculos. Podríamos y deberíamos preguntarnos ¿qué argumentos son matemáticamente correctos?, ¿cuáles son nuestros criterios para aceptarlos como tales?, ¿cuáles aceptaríamos si un alumno los utilizara en un examen?, ¿qué criterios determinan que el argumento de un alumno sea aceptable?, ¿podría un argumento incorrecto ser una demostración?, ¿podría ser aceptable?, ¿qué significa incorrecto?, ¿incompleto significa incorrecto?, ¿hasta qué punto incompleto?, ¿hasta qué punto la completitud depende del conocimiento del autor?, ¿puede la cantidad convertirse en calidad?, ¿pueden los argumentos parecer erróneos a los ojos de un experto y aceptables a un profesor, o viceversa?

Pero todas estas preguntas están relacionadas con el detalle; son importantes pero pueden contestarse, con buenos motivos, de forma diferente por profesores distintos y en currículos diversos. Y su importancia es muchísimo menor a la necesidad de que los estudiantes se enfrenten realmente a preguntas cuya naturaleza les pida que razonen, argumenten y justifiquen las afirmaciones matemáticas.

La argumentación de este capítulo sugiere que en la enseñanza secundaria, e incluso antes, debería concebirse la demostración en un sentido amplio; el énfasis debería estar más en la esencia del razonamiento que no en los detalles. La demostración, en este sentido, no es un tema que pueda ser tratado de una vez y para siempre en un curso sobre, por ejemplo, geometría euclidiana, sino que está íntimamente relacionada con la naturaleza de toda iniciativa de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y, por consiguiente, los alumnos deberían vivirla a lo largo de todo el currículum. Debería jugar un papel fundamental, constituyendo así el legado más esencial de la naturaleza de las matemáticas a la naturaleza del currículum escolar de matemáticas.

Referencias bibliográficas

BALACHEFF, N. (1987): «Processus de Preuve et Situations de Validation». *Educational Studies in Mathematics*, n. 18, pp. 147-176.

BALACHEFF, N. (1997): *Preuve-Proof-Prueba* (*on-line*) accesible en *http://www-cabri.imag.fr/preuve*

BOAS, R.P. (1981): «Can We Make Mathematics Intelligible?». *American Mathematical Monthly*, n. 88(10), pp. 727-731.

BOROWSKI, E.J.; BORWEIN, J.M. (1989): *Dictionary of Mathematics*. London. Collins.

DAVIS, P. J.; HERSH, R. (1980): *The Mathematical Experience*. Boston. Birkhäuser.

DREYFUS, T.; HADAS, N. (1996): «Proof as Answer to the Question Why». *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, n. 28 (1), pp. 1-5.

FALLIS, D. (1996): «Mathematical Proof and the Reliability of DNA Evidence». *American Mathematical Monthly*, n. 103(6), pp. 491-497.

FISCHBEIN, E. (1982): «Intuition and Proof». *For the Learning of Mathematics*, n. 3(2), pp. 9-24.

GINSBURG, H.P. (1996): «Toby's Math», en STERNBERG, R.J.; BEN-ZEEV, T. (eds.): *The Nature of Mathematics*. Mahwah, Nueva Jersey. Lawrence Erlbaum, pp. 175-202.

HANNA, G. (1995): «Challenges to the Importance of Proof». *For the Learning of Mathematics*, n. 15(3), pp. 42-49.

HAREL, G. (en prensa): «The Necessity Principle and Its Implications to the Teaching of Mathematics». *American Mathematical Monthly*.

HAREL, G.; SOWDER, L. (en prensa): *Students Proof Schemes*.

KLEINER, I.; MOVSHOVITZ-HADAR, N. (en prensa): «Proof: -A Many- Splendoured Thing». *The Mathematical Intelligencer*.

LAMPERT, M. (1990): «When the Problem is Not the Question and the Solution is Not the Answer: Mathematical Knowing and Teaching». *American Educational Research Journal*, n. 27 (1), pp. 29-63.

MAHER, C.A.; MARTINO, A.M. (1996): «The Development of the Idea of Mathematical Proof: A 5-year Case Study». *Journal for Research in Mathematics Education*, n. 27 (2), pp. 194-214.

REINER, F. (1994): «Mathematics and the Arts: Taking Their Resemblances Seriously». *Humanistic Mathematics Network Journal*, n. 9, pp. 9-20.

SCHOENFELD, A.H. (1991): «On Mathematics as Sense-making: An Informal Attack on the Unfortunate Divorce of Formal and Informal Mathematics», en VOSS, J.F.; PERKINS, D.N.; SEGAL, J.W. (eds.): *Informal Reasoning and Education*. Mahwah, Nueva Jersey. Lawrence Erlbaum, pp. 311-343.

SFARD, A. (en prensa): «The Many Faces of Mathematics: Do Mathematicians and Researchers in Mathematics Education Speak about the Same Thing?», en SIERPINSKA, A.; KILPATRICK (eds.): *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity*. An ICMI Study. Dordrecht. Holanda. Kluwer.

STEEN, L.A. (1988): «Mathematics, the Science of Pattern». *Science*, n. 240, pp. 611-616.

USISKIN, Z. (1993): «From "Mathematics for Some" to "Mathematics for All"», en BIEHLER, R.; SCHNOTZ, R,; STRÄSSER, R.; WINKELMANN, B. (eds.): *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*. Dordrecht. Holanda. Kluwer, pp. 315-326.

VELLEMAN, D.J. (1997): «Fermat's Last Theorem and Hilbert's Program». *The Mathematical Intelligencer*, n. 19 (1), pp. 64-67.

VINNER, S. (1983): «The Notion of Proof -Some Aspects of Students. Views at the Senior High Level», en HERSHKOWITZ, R. (ed.): *Proceedings of the Seventh International Conference on the Psychology of Mathematics Education*. Rehovot. Israel. Weizmann Institute, pp. 289-294.

ZAHLER, R. (1976): «Errors in Mathematical Proofs.» *Science*, n. 193, p. 98.

Bloque 3:

Currículum alcanzado y contextos de aprendizaje

8

El papel del contexto en la resolución de problemas matemáticos

Guida de Abreu
University of Huton (Gran Bretaña)

Introducción

Mi primer contacto con las ideas relacionadas con la resolución de problemas, como área de estudio e investigación en educación matemática, tuvo lugar en 1986, en un curso de postgrado impartido por Frank Lester. Aquel año Frank era profesor visitante del Master de Psicología que impartía la Universidad Federal de Pernambuco. Había traído consigo numerosa bibliografía actualizada (algo difícil de encontrar en Brasil por aquel entonces), y entre ella, un libro editado por Silver (1985) titulado *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving*. Preparando mi aportación, revisé mis apuntes y mis notas. Me emocioné al volver a leer la revisión de Kilpatrick (1985), de 25 años de trabajo, recordando su observación acerca de que los investigadores en educación matemática están sólo empezando a examinar las implicaciones del punto de vista socio-antropológico. Por lo tanto, espero que al centrarme en el contexto, aportaré mi contribución a un área que se identificó como prioritaria hace ya más de una década.

La definición de resolución de problemas en sí misma constituye un tema de debate en el campo de la educación matemática (Kilpatrick, 1985; Lester, 1978; Wyndhamn, 1993). Mi aportación parte de una definición bastante comprensible de lo que es la resolución de problemas:

> *Es uno de los tipos fundamentales de pensamiento que implica la resolución de una dificultad, la superación de obstáculos, el responder a una pregunta o la consecución de un objetivo.* (Stenberg, 1995, p. 36)

Al intentar entender cómo el alumnado desarrolla y usa técnicas de resolución de problemas, seguiré el enfoque psicológico que considera como unidad de análisis la actividad matemática de la persona dentro de un contexto sociocultural (Abreu, 1993; Lave, 1988; Saxe, 1990).

El concepto contexto es, en sí mismo, bastante complejo y ha sido objeto de continua elaboración dentro del campo de la psicología del aprendizaje (Jacob, 1997; Muller y Perret-Clermont, en prensa; Saljo, 1996). Desde la psicología se ha analizado a distintos niveles, los contextos del desarrollo humano. Entre ellos, cabría citar la formación biológica y cognitiva del niño, el entorno inmediato, el contexto social y económico y el contexto cultural. Dependiendo de la perspectiva teórica que se adopte, variarán los aspectos de lo que se ha definido erróneamente como contexto y que se toman como objetos para ser analizados empíricamente (Abreu, 1997). Algunos estudios interpretan el término contexto en un sentido bastante restringido, por ejemplo, para referirse al modo de presentar una tarea y a la influencia de distintos formatos pictóricos (por ejemplo, Nickson, 1997). Otros estudios toman el contexto en un sentido más amplio, por ejemplo, para referirse a la influencia de los valores y de las estructuras de poder en las sociedades modernas (por ejemplo, Fasheh, 1988).

En mi aportación me centraré en el componente cultural del contexto (Abreu, en prensa). En mi opinión, desde el punto de vista del análisis, las explicaciones psicológicas con relación a cómo el contexto estructura el pensamiento y el aprendizaje han seguido dos líneas (Abreu, en prensa). Una enfatiza el componente cultural del contexto y explora de qué forma determinadas herramientas culturales específicas, tales como la organización lógica de sistemas de cálculo concretos y las normas sobre cuándo y cómo usarlos, median la cognición. La otra enfatiza el componente social del contexto y analiza de qué manera las relaciones específicas y las acciones de actores sociales concretos, tales como la interacción entre iguales o entre experto y no experto, median la cognición.

Según Vygotsky, los aspectos del componente cultural del contexto seleccionados inicialmente para el análisis empírico eran aspectos de la cultura semejantes a la tecnología (Van der Veer y Valsiner, 1991), sistemas de signos tales como el lenguaje, sistemas de escritura y sistemas de cálculo. No cabe duda de que esta selección estaba basada en una perspectiva bastante reduccionista de la noción de cultura (véase Abreu, 1996; Van der Veer y Valsiner, 1991). A pesar de ello, ofrecía una idea muy poderosa de cómo el *conjunto de herramientas* (Bruner, 1996) disponible en una cultura concreta modela el funcionamiento de la mente. A continuación resumiré brevemente la visión de Vygotsky acerca de cómo ciertas herramientas median el pensamiento humano.

Resolución de problemas mediada por herramientas culturales

Una primera aproximación, por parte de los psicólogos que estudiaban la forma en que el contexto de una determinada práctica modela la manera en que un individuo resuelve un problema, se centraba en las herramientas culturales que median la actividad de resolución de problemas. Las herramientas pueden ser sistemas simbólicos de signos para representar ideas matemáticas (sistemas de contaje o de medida) o pueden ser instrumentos materiales (calendarios, calculadoras, ordenadores, etc.). Esta idea era clave en los escritos de Vygotsky, y parecía que había surgido de la analogía entre las herramientas físicas y las mentales:

> *En el proceso del trabajo humano, el hombre transforma la naturaleza física con el uso de herramientas, y en el proceso de la utilización de herramientas transforma su propia naturaleza [...] Vygotsky extendió brillantemente este concepto de interacción en un entorno mediado por el hombre, incluyendo el uso de signos junto al uso de herramientas. Interpretaba el término signos como sistemas de signos creados socialmente, tales como el lenguaje, y los sistemas numéricos y de escritura que emergen en el transcurso de la historia y que varían de una sociedad a otra. Los procesos mentales siempre incluyen signos, del mismo modo que la acción sobre el entorno siempre requiere el uso de instrumentos físicos (aunque sea simplemente la mano del hombre). Cambiar las herramientas altera la estructura de la actividad en el trabajo: labrar la tierra con una azada o con un tractor requiere distintos esquemas de comportamiento. De forma similar, Vygotsky argumentó que cambiando los sistemas de símbolos se reestructura la actividad mental.* (Scribner y Cole, 1981, pp. 8-9)

Desde esta perspectiva, los psicólogos fueron capaces de comprender, por ejemplo, que contar hasta mil puede ser una tarea difícil o simple, según el sistema numérico al que la persona tiene acceso (Nunes, 1997). Para aquellos que usan un sistema de contaje donde los números se corresponden a distintas partes del cuerpo, como los estudiados en Papua Nueva Guinea (Lancy, 1978 citado en Bishop, 1988), sistemas numéricos sin base y finitos, en los que los números están comprendidos entre 12 y 68, contar hasta mil puede resultar bastante difícil (Nunes, 1997; Saxe y Postner, 1983).

Siguiendo esta línea, la dificultad es algo que puede explicarse a partir de las limitaciones de la herramienta utilizada, y no como algo localizado en la cabeza (¡de naturaleza biológica!). Raramente reflexionamos sobre el hecho de que nuestra habilidad para contar hasta mil no es únicamente la expresión de una habilidad cognitiva, sino que resulta facilitada por las propiedades del sistema de numeración en base diez que utilizamos (Nunes, 1997).

La descripción etnográfica de las herramientas utilizadas en prácticas culturales específicas, intentando entender su organización lógica, es una tarea muy interesante. Diría que es el primer paso para aquellos realmente interesados en la comprensión del pensamiento de las personas que desarrollan prácticas sociales concretas. En los ejemplos que se presentan a continuación quedará claro que sin una descripción etnográfica me hubiera resultado imposible comprender las matemáticas de los cultivadores de caña de azúcar. No obstante, mi interés está relacionado con las experiencias de las personas que, formando parte de grupos sociales diversos, están expuestas a herramientas coexistentes. A mi modo de ver, este es un aspecto clave en las sociedades modernas marcadas por el cambio y por la necesidad de adoptar nuevas tecnologías. Vygotsky y Luria iniciaron esta aproximación en las expediciones de Luria al Uzbekistán para estudiar el impacto de la escolarización (alfabetización), pero su enfoque estaba enmarcado en una visión etnocéntrica de cultura y desarrollo humano. Por ejemplo, tal y como Van der Veer y Valsiner (1991) destacaron, los escritos de Vygotsky sugieren que él creía que:

> *[...] el pensamiento de la gente primitiva difícilmente funcionaba a través de conceptos, sino que tenía un carácter muy concreto;* (*op. cit.*, p. 20)

y además:

> *[...] afirmaba que el nivel de desarrollo social y cultural de las minorías nacionales [...] era «bajo».* (*op. cit.*, p. 215)

En consecuencia, según Vygotsky sólo se podía seguir una ruta: reemplazar las formas de conocimiento *bajas, inferiores* y *concretas* por formas *altas, superiores* y *abstractas*. No obstante, en la actualidad, desde un punto de vista cognitivo hay suficientes evidencias que sugieren que este contraste entre *concreto* y *abstracto* responde a una discusión teórica no sostenible frente a pruebas empíricas (véase, por ejemplo, Nunes, 1992).

Además, los motivos por los que algunos grupos minoritarios deberían reemplazar sus formas de conocimiento por las de los grupos mayoritarios no pueden explicarse en términos de formas de *superioridad cognitiva*. Por lo tanto, formulemos de nuevo las preguntas: ¿Qué ruta debe seguir un individuo para solucionar un problema cuando dispone de herramientas coexistentes? ¿Por qué escoge una determinada ruta y no otra?

Coexistencia de herramientas culturales y resolución de problemas por parte del individuo

Unos minutos de reflexión nos permitirán revivir, en nuestra memoria, una serie de situaciones en las que recordamos haber visto a alguien, incluso nosotros mismos, usar sistemas monetarios o de medida que difieren, de alguna forma, de los convencionales. Globalmente, podemos seguir la pista hasta la historia del grupo, o de la persona, hasta la época en que se usaban dichas unidades.

Por ejemplo, en Portugal, algunos miembros de la generación anterior utilizan todavía, para referirse a cien mil escudos, el término um conto de reis, una referencia a la moneda anterior. Frecuentemente vemos turistas haciendo conversiones entre unidades monetarias para juzgar si el precio de un producto o servicio concreto es aceptable, barato o caro. Algo parecido ocurre cuando alguien de un país donde, por ejemplo, se usan millas para señalar las carreteras viaja a otro país en el que se usan kilómetros. Podemos verles traduciendo dichas unidades.

Estas observaciones informales nos sugieren que una forma de desenvolverse en situaciones con herramientas coexistentes es establecer vínculos o puentes. No obstante, lo que parece ser un fenómeno natural en contextos no escolares, no es espontáneo para los niños en la escuela, donde se tiende a tratar independientemente las distintas herramientas. Este fenómeno ha sido comprobado en investigaciones empíricas, tal y como se ilustra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1

Este primer ejemplo ilustra el *establecimiento de conexiones* entre distintas herramientas que representan un mismo concepto. Aunque la entrevistadora (Abreu, 1991, p.172) era consciente de las medidas concretas usadas por los agricultores (contas), retó al agricultor presentándole el problema utilizando medidas que le resultaban menos familiares (en este caso hectáreas, utilizadas la mayoría de las veces por quienes proporcionan servicios a la agricultura, tales como agrónomos, banqueros, vendedores, etc.).

> ENTREVISTADORA: Imagine que tiene un compañero que le pide consejo acerca de la cantidad de fertilizante que necesita para un campo de 3,5 hectáreas. ¿Cuánto fertilizante necesita?
>
> AGRICULTOR: Inmediatamente le explicaré que 3,5 hectáreas son 70 contas.
>
> ENTREVISTADORA: ¡Hummm...! 3,5 hectáreas son 70 contas.
>
> AGRICULTOR: Entonces necesitará fertilizar las contas, dos contas con un saco, son 70, necesitará 35 sacos.

La solución inmediata a este problema podría haberse obtenido simplemente multiplicando el número de hectáreas por 10 (sacos). En lugar de ello, el agricultor, Antonio, siguió una estrategia con pasos adicionales, que le permitía dar significado al proceso. En primer lugar calculó el área en contas. Para hacerlo usó una convención agrícola «una hectárea son 20 contas» (ésta es una aproximación burda, véase Abreu, 1988). Cuando tuvo el área en contas, fue capaz de encontrar la solución al problema usando otra convención agrícola «un saco por cada dos contas». El proceso fue más largo, pero la utilización de contas le permitió relacionarlo fácilmente con su práctica.

La conta es una de las unidades de análisis con más significado para los agricultores y la usan para tomar decisiones relacionadas con varias tareas. La conta es una unidad que les permite cuantificar la cantidad de trabajo o de productos agrícolas necesarios e intercambiar información dentro de la comunidad. Además, la conta también es una unidad que les permite establecer fácilmente conexiones con otras unidades ajenas a su comunidad, por ejemplo las utilizadas por instituciones financieras. A pesar de conocer la equivalencia con otros sistemas, tienden a privilegiar su sistema indígena como mediador en la resolución de problemas. Recurrir a las herramientas familiares les permite monitorizar la resolución de sus problemas partiendo del conocimiento basado en su práctica.

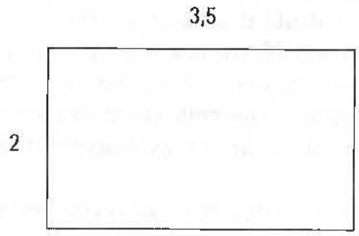
Ejemplo 2

Este ejemplo ilustra la *ausencia de intentos para establecer conexiones* entre distintas herramientas que representan un mismo concepto. Se pidió a un grupo de chicas de sexto grado que solucionaran un problema escolar que simulaba una situación cotidiana (véase cuadro 1 en la página siguiente). La tarea consistía en encontrar la cantidad de alambre necesaria para construir una valla alrededor de tres campos representados mediante cartulinas (Abreu y otros, 1997, pp. 242-245). Después de iniciar un proceso correcto para averiguar el perímetro de uno de los campos, a través de métodos exclusivamente orales, el grupo decidió calcularlo mediante el algoritmo escrito que se usaba en la escuela.

Según el sistema de representación utilizado, obtenían resultados distintos sin que apareciese ningún intento para conectarlos. Las chicas, antes de usar la representación escrita, realizaron oralmente la suma de dos de las longitudes, paso que las hubiera animado a dudar del resultado escrito si hubieran establecido alguna conexión. Este ejemplo procede de un estudio con niños portugueses, no obstante, se han hecho observaciones similares con niños brasileños (Carraher y otros, 1987) y también con niños americanos (Cobb, 1990).

Los ejemplos anteriores ponen de manifiesto que cuando un individuo está expuesto a herramientas coexistentes, o bien intenta establecer conexiones, o bien trata las herramientas como independientes. Podría especularse que seguir un camino u otro puede ser una cuestión de diferencias individuales. Si esto fuera cierto, podría esperarse que individuos involucrados en prácticas sociales distintas tratasen por igual las herramientas existentes. Sin embargo, esta explicación contradice los resultados de los estudios empíricos presentados anteriormente; mientras que el estudio con agricultores proporciona gran variedad de ejemplos de diferentes formas de es-

Cuadro 1



ERMELINDA: Uno, dos, tres y medio (*midiendo una de las dimensiones*).
Mª JOSÉ: Aquí debería ser el mismo (*lado opuesto*).Tres, tres, seis, siete.
ERMELINDA: Uno, dos (*midiendo la otra dimensión*).
ENTREVISTADORA: ¿Cuánto alambre se necesita para vallar el campo?

En este momento, las chicas producen el siguiente algoritmo escrito:

$$\begin{array}{r} 3{,}5 \\ 3{,}5 \\ 2 \\ \underline{2} \\ 7{,}4 \end{array}$$

ERMELINDA: Es siete coma cuatro.
ENTREVISTADORA: Vamos a hacerlo mentalmente. ¿Tres y medio más tres y medio?
ALUMNAS: Siete.
ENTREVISTADORA: ¿Más estos dos lados?
ALUMNAS: Once.

tablecer conexiones entre distintas herramientas (Abreu, 1988), el estudio con escolares pone de manifiesto que, en general, no intentan establecer conexiones entre herramientas diferentes (Abreu y otros, 1997). Consecuentemente, una explicación más plausible sería que las distintas formas de abordar herramientas coexistentes pueden ser la expresión de tipos de comportamientos sostenidos por prácticas sociales específicas. De hecho, actualmente hay algunas intervenciones didácticas cuyo objetivo es mejorar el aprendizaje matemático del alumnado a partir de permitirle establecer, en la escuela, conexiones con su conocimiento previo.

Después de haber señalado parte de la complejidad para desenvolverse en contextos culturales en los que el individuo puede estar expuesto a más de una herramienta para la solución de un problema, en el siguiente apartado se explora otra dimensión de la coexistencia común en las prácticas escolares. En este caso, la cuestión abordada no es la coexistencia de herramientas sino la coexistencia de soluciones, soluciones puramente matemáticas versus soluciones matemáticas mediadas por consideraciones del mundo real.

Coexistencia de soluciones matemáticas y soluciones del mundo real

En el campo de la educación matemática, la resolución de problemas a menudo:

> *[...] se interpreta como la situación en que habilidad y reflexión matemática se ponen realmente en uso; cuando los alumnos resuelven un problema, están aplicando su conocimiento a alguna situación del mundo real más que realizando simplemente un conjunto de ejercicios abstractos que pueden resolverse con algoritmos. La resolución de problemas se ve como un test decisivo de habilidad y comprensión genuinas.* (Wyndhamn y Säljö, 1997, p. 361)

Esta preocupación relacionada con el uso y la aplicación de las matemáticas aprendidas en la escuela a otras situaciones del *mundo real* ha sido señalada en informes educativos claves en varios países (e.g. *NCTM, National Council of Teachers of Mathematics*, USA, 1980; *Cockcroft*, Inglaterra, 1982, p.73; *The Curriculum Plan*, Brazil, DSE, 1984, 1986).

Permítanme poner algunos ejemplos procedentes de documentos claves publicados en Inglaterra:

> *Las matemáticas son útiles únicamente cuando pueden aplicarse a una situación concreta y llamamos resolución de problemas a la habilidad para aplicar las matemáticas a una variedad de situaciones.* (Cockcroft, 1982, p. 73)

Este énfasis aparece en el actual *Mathematics National Curriculum* originado a partir de la ley *Education Reform Act* de 1988 y corregido por la ley *Education Act* de 1993, en Inglaterra. Por ejemplo, los niños entre cinco y siete años:

> *[...] deben tener oportunidades para usar y aplicar las matemáticas en tareas prácticas, en problemas de la vida real y dentro de las mismas matemáticas [...]*

y se espera que, alrededor de los once años, los niños:

> *[...] sepan comprobar la sensatez de un resultado, con o sin calculadora, basándose en la magnitud de los números y en el contexto.* (Matthews, 1997, p. 16)

El mismo tipo de recomendaciones son claves en el National Numeracy Project, del que se ha hablado mucho, que insiste en que debería enseñarse a los niños, entre preescolar y segundo (entre 5 y 7 años), a comprobar si los resultados de las operaciones son razonables y a solucionar problemas de tipo numérico en situaciones cotidianas y contextos familiares: relativos a dinero y medidas, incluyendo la elección de unidades y la lectura de escalas.

Referente a la cuestión de si las personas, al pedírseles que solucionen problemas aritméticos bastante simples, tienden a usar *consideraciones del mundo real* como mediadores de su proceso de pensamiento, me gustaría contrastar los resultados obtenidos en mi propia investigación con agricultores (ejemplo 1) con los resultados obtenidos por Yoshida, Verschaffel y De Corte (1997) con escolares en Japón y Bélgica (ejemplo 2).

Ejemplo 1

Este ejemplo pone de manifiesto que en el contexto de las prácticas agrícolas las consideraciones del *mundo real* son un mediador clave en la resolución de problemas. La inteligencia de los agricultores para con las relaciones numéricas quedaba de manifiesto en las estrategias que usaban para solucionar *problemas absurdos*. En estas situaciones se presentaban los problemas con las medidas que resultaban familiares a los granjeros, pero el entrevistador manipulaba las cantidades.

Por ejemplo, se les preguntaba: «Si un agricultor tiene 18 sacos de fertilizante para distribuir en 6 contas, ¿qué cantidad aplicará a cada conta? (tal y como se ha dicho anteriormente, generalmente se aplica 1 saco cada 2 contas)». De los 27 agricultores, sólo 6 trataron la cuestión como problema estrictamente matemático, sin tener en cuenta las implicaciones reales para el cultivo de la caña de azúcar. Los otros o lo transformaron (14) o se negaron a resolverlo (7). Las transformaciones se basaban en las proporciones habituales para el cultivo, tal y como se ilustra a continuación:

> AGRICULTOR (Sr. José): No puede hacerlo. Con 18 sacos en 6 contas quemará la caña de azúcar. Lo correcto es un saco para cada dos contas. (Abreu, 1991, p. 173)

El fenómeno opuesto aparece con mayor frecuencia entre los escolares que, en general, tienden a ignorar las consideraciones del mundo real. Verschaffel, De Corte y Borghart (1997) argumentan que

> *[...] más que funcionar como contextos realistas que invitan o incluso fuerzan a los alumnos a usar su sentido común y su experiencia en el mundo real, los problemas aritméticos escolares se han convertido en algo artificial, en tareas tipo puzzle que se perciben como algo separado del mundo real.* (p. 339)

Para comprender este fenómeno, el grupo belga ha desarrollado varios estudios, primero, para establecer cómo lo viven los escolares y, segundo, para identificar aquellos aspectos del contexto escolar, tales como concepciones, creencias y prácticas pedagógicas de los profesores, que pueden contribuir a la introducción de consideraciones realistas en las matemáticas escolares.

Ejemplo 2

Hasta el momento, los estudios de De Corte y otros (véase también Yoshida y otros, 1997) confirman que las consideraciones del mundo real raramente tienen un rol mediador en las soluciones de los escolares a los problemas aritméticos. La metodología adoptada por De Corte (véase De Corte y otros en prensa) estaba basada en pruebas escritas que contenían dos tipos de problemas aritméticos:

- Problema *S* (*problema estándar*): «Steve ha comprado 5 tablones de 2 metros cada uno. ¿Cuántos tablones de 1 metro puede obtener serrándolos?». Los problemas estándar pueden resolverse directamente a través de operaciones aritméticas.
- Problema *P* (*problema problemático*): «Steve ha comprado 4 tablones de 2,5 metros cada uno. ¿Cuántos tablones de 1 metro puede obtener serrando estos tablones?».
  La solución matemática directa resulta problemática si se toman en cuenta consideraciones realistas.

Las pruebas contenían diez preguntas (5 problemas *S* y 5 problemas *P*) y se pasaron a escolares de edades comprendidas entre los 10 y los 11 años en Bélgica y Japón (quinto grado). Se analizaron las respuestas a los problemas *P* y se agruparon en dos categorías:

- *Respuestas no realistas:* 4 x 2,5 metros = 10 metros; 10 metros: 1 metro = 10. Steve puede obtener 10 tablones de 1 metro.
- *Respuestas realistas:* Steve puede serrar 2 tablones de 1 metro de cada tablón de 2,5 metros. 2 x 4 = 8. Por tanto, Steve puede obtener 8 tablones.

En Bélgica, sólo 10 escolares de 75 dieron una *respuesta realista* al problema anterior, y en Japón 4 de 91. Estos resultados podrían interpretarse como pruebas de la existencia de características comunes del desarrollo del pensamiento matemático, inherentes al modo de funcionar de la mente humana, independientes del contexto cultural concreto.

Esta interpretación es, a mi entender, algo ingenua, y me inclinaría por la hipótesis de que la globalización de la enseñanza de las matemáticas *occidentales* ha significado la diseminación de representaciones concretas de las matemáticas escolares. De hecho, la investigación llevada a cabo por Verschaffel, De Corte y Borgahart (1997) con maestros en formación inicial corrobora este tipo de argumentación. Administraron pruebas parecidas a maestros en formación inicial y les pidieron, en primer lugar, que solucionaran los problemas por sí mismos y, en segundo lugar, que evaluaran las respuestas de los niños. Los resultados revelaron que en más de la mitad de los casos sus respuestas a los problemas *P* fueron no *realistas*. En la evaluación de las respuestas de los niños apareció la misma tendencia. En conjunto, los resultados revelaron que para los problemas *P* las respuestas *no realistas* habían obtenido una mayor puntuación que las *respuestas realistas* (que habían tenido en cuenta el contexto).

En resumen, los dos ejemplos sugieren que la resolución de problemas puede estar mediada por consideraciones del mundo real; no obstante, este aspecto queda altamente restringido por el tipo de entorno en el que opera el individuo. Mientras las situaciones fuera de la escuela valoran muy positivamente las implicaciones prácticas, este hecho parece haber sido descuidado en las matemáticas escolares, planteando muchos retos a una materia conceptualizada frecuentemente como ciencia exacta, con respuestas únicas para cada problema.

Conclusión

En esta contribución he intentado ilustrar de qué forma el *componente cultural del contexto* media la resolución de problemas por parte del individuo. Los dos puntos más importantes que he intentado resaltar establecen que para entender la resolución de problemas es necesario tener en cuenta:

- Las herramientas disponibles en las prácticas culturales específicas, las propiedades de las herramientas y la forma en que individuos y grupos sociales concretos utilizan herramientas alternativas coexistentes. Los ejemplos muestran ciertas interacciones entre el modo en que pueden usarse las herramientas y los procesos de pensamiento correspondientes (estrategias de resolución de problemas).
- Que las convenciones y creencias sobre lo que constituye una solución apropiada en una práctica social concreta media también la resolución de problemas por parte del individuo.

Espero que las implicaciones de este tipo de investigaciones resulten claras para la educación matemática. Más que en los resultados descritos en las publicaciones, algunos de los cuales pueden resultar bastante exóticos en otras culturas, creo que la importancia de estas investigaciones está en que proporcionan una nueva herramienta (método) para que el profesorado pueda explorar y comprender el aprendizaje de sus alumnos. Por ejemplo, en mi trabajo con maestros portugueses y brasileños he observado que son conscientes de que pueden aparecer diferencias de rendimiento en un mismo niño según utilice herramientas orales o escritas en la solución de un problema aritmético. No obstante, en el momento en que llevé a cabo mi investigación, no parecía que dichos maestros conociesen la organización concreta de la aritmética oral y de la aritmética escrita que les hubiese permitido determinar con precisión las diferencias entre estrategias concretas asociadas a la herramienta (por ejemplo, en la resta escrita restar siempre el dígito más pequeño del más grande, independientemente de si es un dígito del minuendo o del sustraendo; así 23 - 17 = 14, se explica porque 7 menos 3 es 4 y 2 menos 1 es 1).

Con estas nuevas herramientas los profesores pueden explorar otra dimensión: analizar las ideas y creencias de sus alumnos acerca de lo que significa seleccionar y utilizar apropiadamente las herramientas. Mi ejemplo favorito, en este sentido, es el de un niño que me dijo que la mitad de once era cinco, y al ver que no estaba satisfecha con su respuesta, dijo que también podía ser seis y, finalmente, consiguió llegar a cinco y medio. Este ejemplo muestra que el niño conocía mis expectativas de forma ambigua, por lo tanto, primeramente articuló la respuesta en términos basados en su propia comprensión (basados en la utilización de *la mitad* en su cultura familiar). No obstante, en el proceso de interacción, fue capaz de volver a articular la respuesta para satisfacer mis expectativas (la respuesta esperada en clase de matemáticas). Resumiendo[1], este tipo de investigaciones proporcionan una herramienta que permite al profesorado actuar como etnógrafos del estudio de las mentes de los alumnos para intentar entender las estrategias que éstos usan, así como sus creencias sobre el desarrollo apropiado de la acción.

Referencias bibliográficas

ABREU, G. de (1988): *O uso da matematica na agricultura: o caso dos produtores de cana-de acucar.* Unpublished Master Degree Thesis. Universidade Federal de Pernambuco. Brazil.

ABREU, G. de (1991): «Psicologia no trabalho, um enfoque cognitivo: O uso da matematica por agricultores de cana-de açucar». *Psicologia, Teoria e Pesquisa*, n. 7 (2), pp. 163-177.

ABREU, G. de (1993): *The Relationship between Home and School Mathematics in a Farming Community in Rural Brazil.* Unpublished Doctoral Dissertation. Cambridge. Gran Bretaña. Cambridge University.

ABREU, G. de (1996): *Extending the Culture and Cognition Framework: Learning Mathematics as a Construction of Social Identities.* Biennial Meeting of ISSBD [International Society for the Study of Behavioural Development]. Quebec, Canada, 12-16 agosto.

ABREU, G. de (1997): «Relationships between Macro and Micro Socio-cultural Contexts: Implications for the Study of Interactions in the Mathematics Classroom». Se publicará en: *Proceedings of the CIEAEM 49* [International Commission for the Study and Improvement of Mathematics Education].

ABREU, G. de (en prensa): «Learning Mathematics in and outside School: Two Views on Situated Learning», en BLISS, J.; LIGHT, P.; SALJO, R. (eds.): *Learning Sites: Social and Technological Contexts for Learning.* European Science Foundation.

ABREU, G. de,; BISHOP, A.; POMPEU, G. (1997): «What Children and Teachers Count as Mathematics», en NUNES, T.; BRYANT, P. (eds.): *Learning and Teaching Mathematics: An International Perspective.* Hove, East Sussex. Psychology Press, pp. 233-264.

1. En esta aportación me he restringido a unos pocos ejemplos con el fin de introducir un campo de investigación muy amplio. Véase la edición especial de *Learning and Instruction* de verano del 98.

BISHOP, A.J. (1988): *Mathematical Enculturation: a Cultural Perspective on Mathematics Education*. Dordrecht. Kluwer Academic Publishers.

BRUNER, J. (1996): *The Culture of Education*. Cambridge, Mass. Harvard University Press.

CARRAHER, T.N.; CARRAHER, D.W.; Y SCHLIEMANN, A.D. (1987): «Written and Oral Mathematics». *Journal for Research in Mathematics Education*, n. 18(2), pp. 83-97.

COBB, P. (1990): «The Tension between Theories of Learning and Instruction», en LEE, V. (ed.): *Children's Learning in School*. Milton Keynes. The Open University, pp. 137-151.

COCKROFT Committee of Inquiry into the Teaching of Mathematics in Schools (1982): *Mathematics Counts*. Londres. HMSO.

DE CORTE, E.; VERSCHAFFEL, L.; LASURE, S.; BORGHART, I.; YOSHIDA, H. (en prensa): «Learning Bad and Good Things from Instruction», en BLISS, J.; LIGHT, P.; SALJO, R. (eds.): *Learning Sites: Social and Technological Contexts for Learning*. European Science Foundation.

DSE [Directoria de Servicos Educacionais] (1984): *Proposta Curricular Ensino de 1º Grau*. Recife, Brazil. Secretaria de Educacão de Pernambuco.

DSE [Directoria de Servicos Educacionais] (1986): *Perfis de Saida dos Alunos de 5ª a 8ª Serie do Ensino de 1º Grau*. Recife, Brazil. Secretaria de Educacão de Pernambuco.

FASHEH, M. (1988): «Mathematics in a Social Context: Math within Education as Praxis versus within Education as Hegemony», en KEITEL, C.; DAMEROW, P.; BISHOP, A.; GERDES, P. (eds.): *Mathematics, education and society*. Paris. UNESCO, pp. 84-87.

JACOBB, E. (1997): «Context and Cognition: Implications for Educational Innovators and Anthropologists». *Anthropology and Education Quarterly*, n. 28, pp. 3-21.

KILPATRICK, J. (1985): «A Retrospective Account of the Past 25 Years of research on Teaching mathematical problem Solving», en SILVER, A. (ed.): *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives*. Hillsdale. Nueva Jersey. Lawrence Erlbaum Association.

LANCY, D.F. (ed.) (1978): «The Indigenous Mathematics Project». *Papua New Guinea Journal of Education*, n. 14 (número especial).

LAVE, J. (1988): *Cognition in Practice: Mind, Mathematics and culture in Everyday Life*. Cambridge. Cambridge University Press.

LESTER, F. (1978): «Mathematical problem Solving in the Elementary School: Some Educational and Psychological Considerations», en HATFIELD, L.L (ed.): *Mathematical Problem Solving: Papers from a Research Workshop*. Columbus, Ohio. ERIC.

MATTHEWS, J. (1997): «Mathematics Results at Key Stages 1 and 2, 1995-96». *British Journal of Curriculum and assessment*, n. 7(3), pp. 16-18.

MULLER, N.; PERRET-CLERMONT, A.N. (en prensa): «Negotiating Identities and Meanings in the Transmission of Knowledge. Analysis of Interactions in the Specific Context of a "Knowledge Exchange Network"», en BLISS, J.; LIGHT, P.; SALJO, R. (eds.): *Learning Sites: Social and Technological Contexts for Learning*. European Science Foundation.

NCTM [National Council of Teachers of Mathematics] (1980): *An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980s.* Reston, VA. The Council.

NICKSON, M. (1997): «What is the Difference between a Pizza and a Relay Race? The Role of Context in Assessing KS2 Mathematics». *British Journal of Curriculum & Assessment,* n. 7(3), pp. 19-23.

NUNES, T. (1992): «Ethnomathematics and Everyday Cognition», en GROUWS, D.A. (ed.): *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* Nueva York. MacMillan, pp. 557-574.

NUNES, T. (1997): «Systems of Signs and Mathematical Reasoning», en NUNES, T.; BRYANT, P. (eds.): *Learning and Teaching Mathematics: An International Perspective.* Hove, East Sussex. Psychology Press, pp. 29-44.

SALJO, R.; WYNDHAMN, J. (1993): «Solving Everyday Problems in the Formal Setting. An Empirical Study of the School Context for Thought», en CHAIKLIN, S.; LAVE, J. (eds.): *Understanding Practice: Perspectives on Activity and Context.* Cambridge. Cambridge University Press, pp. 327-342.

SALJO, R. (1996): «Mental an Physical Artefacts in Cognitive Practices», en REIMANN, R.; SPADA, H. (eds.): *Learning in Human and Machines: Towards an Interdisciplinary Learning Science.* Oxford. Elsevier Science, pp. 83-96.

SAXE, G.B. (1990): *Culture and Cognitive Development: Studies in Mathematics Understanding.* Hillsdale, New Jersey. Lawrence Erlbaum Associates.

SAXE, G.B.; POSNER, J.(1983): «The Development of Numerical Cognition: Cross-cultural Perspectives», en GINSBURG, H P. (ed.): *The development of Mathematical Thinking.* Londres. Academic Press, pp. 291-317.

SCRIBNER, S.; COLE, M. (1981): *The Psychology of Literacy.* Cambridge, Mass. Harvard University Press.

SILVER, A. (ed.) (1985): *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives.* Hillsdale. Nueva Jersey. Lawrence Erlbaum Association.

STERNBERG, R. (1995): *In Search of the Human Mind.* Londres. Hartcout Brace.

VAN DER VEER, R.; VALSINER, J. (1991): *Understanding Vygotsky: A Quest for Synthesis.* Oxford. Blackwell.

VERSCHAFFEL, L.; DE CORTE, E.; BORGHART, I. (1997): «Pre-service Teachers' Conceptions and Beliefs about the Role of Real-world Knowledge in Mathematical Modelling of School Word Problems». *Learning and Instruction,* n. 7(4), pp. 339-359.

WYNDHAMN, J. (1993): *Problem Solving Revisited: on School Mathematics as a Situated Practice.* Linkoping Studies in Arts and Science 98. Department of Communication studies. Suecia. Linkoping University.

WYNDHAMN, J.; SALJO, R. (1997): «Word Problems and Mathematical Reasoning –a Study of Children's Mastery of Reference and Meaning in Textual Realities». *Learning and Instruction,* n. 7(4), pp. 361-382.

YOSHIDA, H.; VERSCHAFFEL, L.; CORTE, E. (1997): «Realistic Considerations in Solving Problematic Word Problems: Do Japanese and Belgian Children Have the Same Difficulties?». *Learning and Instruction,* n. 7(4), pp. 329-338.

9

Principios y paradigmas de una «educación matemática realista»

Fred Goffree
Freudenthal Instituut (Holanda)

Introducción

Los objetivos de la *educación matemática realista* en Holanda están basados en los cinco principios de la *reconstrucción didáctica* (Streefland, 1991). El trabajo para el desarrollo de la educación matemática en los Países Bajos se ha guiado por estos principios (Gravemeijer, 1994). Podría decirse, a nivel global, que sólo los contenidos matemáticos que puedan conectarse con el mundo real serán útiles como punto de partida para la educación matemática.

En los Países Bajos, los contenidos que forman la parte central del currículum de matemáticas en educación primaria (sumas y restas hasta 100, tablas de multiplicar, divisiones largas, proporciones, fracciones, decimales y porcentajes) están organizados de tal forma que su estructura manifiesta los principios de la educación realista. Cuando se implementan los cursos, las cuestiones que emergen a partir de la interacción entre el profesor y los alumnos pueden considerarse signos de una educación matemática realista, y lo mismo ocurre con los principios de los que se parte y la arquitectura que se esboza.

En este capítulo se introducen los paradigmas de una *educación matemática realista*, entendiendo paradigma en el sentido de Freudenthal (1991), y se analizan algunos de los aspectos esenciales relacionados con su implementación. Algunos de los ejemplos que se presentan para ilustrarla están tomados de un curso sobre porcentajes, desarrollado dentro del marco de un programa de formación permanente para maestros que impartían clases en quinto nivel. Las primeras cinco lecciones del curso se han digitalizado e incluido en el Entorno de Aprendizaje Interactivo Multimedia (*Multimedia Interactive Learning Environment, MILE*) creado para las facultades de educación de los Países Bajos. Finalmente, se presenta una reflexión sobre la realidad que, a menudo, no llega a satisfacer las expectativas de la teoría y plantea continuos dilemas al profesorado (Lampert y Ball, 1998).

Un problema con porcentajes

Mucha gente tiene problemas con los porcentajes, tanto en la escuela como en la vida cotidiana. Las dificultades más comunes que aparecen en el trabajo con porcentajes puede ilustrarse con el ejemplo siguiente:

> El 27 de octubre, el índice de Dow Jones cayó un 7,2%. Al día siguiente, todo estaba en orden puesto que el índice había subido un 7,2%. Antes de la caída del 27 de octubre, el índice estaba en 7698.0555.
> ¿Tenía el mismo valor después de la subida?

Frente a este problema las estrategias para resolverlo pueden ser muchas:

- El que prefiere los cálculos responde negativamente, y lo explica de la siguiente forma: el 7,2% de 7698.0555 es 7,2 x 76.980555 = 554.25999. Entonces el índice Dow Jones es 7698.0555 - 554.25999 = 7143.7956. Al día siguiente el 7,2% de 7143.7956 es 514.35328. Si a esto le sumamos 7143.7956 entonces resulta 7658.1488 que es menor que 7698.0555.

Éste es posiblemente el camino menos directo para la llegar a la respuesta, sin embargo la estrategia utilizada es bastante común. Se podría haber resuelto más rápidamente siguiendo otras, por ejemplo:

- Se calcula directamente el 92,8% (100 - 7,2 = 9,8) del índice de partida y luego se calcula el 107,2% (100 + 7,2 = 107,2) del resultado obtenido.
- Se calcula 92,8/100 x 107,2/100 y se observa que no es igual a 1, puesto que 92,8/100 x 107,2/100 = 0.994816.
- Incluso, si se quiere ser más operativo, puede trabajarse sobre un índice igual a 100; después de caer un 7,2 % se convierte en 92,8 y al aumentar un 7,2% obtenemos 107,2/100 x 92,8 = 99,4816.

Algunos profesores tienen, incluso, más recursos:

- Una disminución del 7,2% se obtiene multiplicando por 0,928, mientras que un incremento del 7,2% equivale a multiplicar por 1,072; realizar ambas operaciones equivale a multiplicar por 0,994816 (0,928 x 1,1072 = 0,994816), por lo tanto, el resultado es menor que el valor inicial.

Pueden utilizarse también recursos de carácter visual:

- Se dibuja un segmento para representar el índice de Dow Jones el 27 de octubre, se divide en cuatro partes para representar el 25% (en lugar de una cantidad extraña como el 7,2%) y luego se elimina el último cuarto; la parte restante del segmento se divide de nuevo en cuatro partes y se le añade un

cuarto. Cuando el profesor presenta esta estrategia, los estudiantes más brillantes se dan cuenta, incluso antes de que termine, de que el segmento será menor que el inicial.
Las representaciones mediante sectores son de poca utilidad para resolver esta situación concreta. En cambio, los profesores que utilizan rectángulos para representar las cantidades obtienen, en este ejemplo, mejores resultados que los que usan segmentos.

Al plantearnos la pregunta ¿por qué los adultos siguen cometiendo errores con los porcentajes? surge la necesidad de analizar cuál ha sido históricamente la enseñanza de los porcentajes.

Algo de historia sobre la enseñanza de los porcentajes

Las dificultades que tanto adultos como niños manifiestan en las manipulaciones con porcentajes nos llevan a reflexionar sobre qué conocimientos tienen de los porcentajes y de su didáctica los propios maestros.

A principios de este siglo un holandés, Kellinga (1926), publicó un nuevo método de cálculo que denominó *Noodig rekenen* (aritmética esencial). Kellinga, que entonces era más conocido, con su nombre real, como didacta del lenguaje (Padre Jozef Reynders), fue muy crítico con los libros de aritmética utilizados en la época. Hablando de *una edad de la razón*, afirmó que la aritmética debería enseñarse no solamente para que la gente pudiera calcular, sino también, por su valor formativo, para desarrollar el pensamiento lógico. Kellinga creyó que los ciudadanos holandeses de 1926 necesitaban un método simple para el cálculo con fracciones y, en particular, con porcentajes: ¿cuál es el 1% de 9 florines? o, más difícil, ¿cuál es el 7,5% de 560 florines?

Kellinga hizo un descubrimiento didáctico, una forma de calcular que todavía aparece en algunos enfoques actuales, conocida como *la regla del uno por ciento*. Para que funcionase bastaba saber que el 1% correspondía a la fracción 1/100. Para calcular el 5% de 850 era suficiente hallar el 1% de 850 (8,5) y luego multiplicarlo por 5. De esta forma, el 5% de 850 es 5 x 8,5 = 4,25

Para valorar este método como un auténtico descubrimiento, es necesario tener en cuenta cómo se enseñaba la aritmética en esa época. Con anterioridad a Kellinga los holandeses solían calcular *según Bartjens*. Willen Bartjens, director de escuela del siglo XVII, escribió un libro de aritmética utilizado en las escuelas durante siglos. Su legado aún puede encontrarse en el *enfoque mecánico* de la enseñanza de la aritmética.

Métodos similares al de Bartjens, como los propuestos en los libros de Cocker y Riese en Gran Bretaña y Alemania, respectivamente, tuvieron el mismo efecto. La aritmética consistía en seguir determinados procedimientos de acuerdo con unas reglas fijas; una de ellas es la llamada *regla de tres*. He aquí un ejemplo:

«Si el precio de 3 kilos de queso es de 37 florines, ¿cuánto cuestan 7 kilos?»

Los tres números, 3 (Kg), 37 (florines) y 7 (Kg) se ponían en línea:

3 37 7

y se calculaba 37 por 7 y se dividía por 3, dando 86 1/3.

No fue hasta el siglo XIX cuando se empezaron a oír críticas sobre *estos métodos aritméticos:* los que calculaban *según Bartjens* desconocían el por qué del mecanismo de cálculo y, a menudo, invertían el orden de los números sin darse cuenta de que el resultado era incorrecto.

Jacob de Gelder, profesor de matemáticas en la Universidad de Leiden, la universidad más antigua de los Países Bajos, fue el primero en criticar dos siglos de aritmética. Mostró que la regla de tres podía incorporarse a la teoría matemática de las proporciones. En el ejemplo anterior bastaba con calcular la cuarta proporcional, $3 \div 37 = 7 \div a$. Entonces, aplicando las propiedades de las proporciones ($3 \times a = 37 \times 7$) no sólo se obtenía la respuesta correcta, sino que también quedaba claro cómo se obtenía la respuesta. Es comprensible que este enfoque de la aritmética, concebido alrededor del año 1850, provocara finalmente que Kellinga, unos 50 años más tarde, iniciara cambios con respecto a *esta forma de aritmética.*

Este modo de enseñanza simplificado prevaleció en los Países Bajos hasta 1971. Fue entonces cuando se creó el instituto IOWO (Instituto para el Desarrollo de la Educación Matemática), bajo la dirección del profesor Hans Freudenthal, con el objetivo de trabajar en un nuevo enfoque de la educación matemática que en la actualidad, después de un cuarto de siglo de investigaciones y de trabajo creativo sobre el desarrollo del currículum, se conoce como *educación matemática realista.* A continuación describiré el significado de este tipo de educación.

Los cinco principios de enseñanza y aprendizaje en una «educación matemática realista»

En los últimos 25 años, los Países Bajos han visto no sólo el desarrollo de nuevos materiales para la educación matemática, sino también el trabajo realizado para explicitar los principios subyacentes en esta visión particular de la educación matemática que es la llamada *educación matemática realista.* Se ideó un marco referencial de dominio específico con continuos ajustes, tanto en sus detalles como en sus aspectos más generales, es decir, tanto en la teoría global como en la local, teniendo en cuenta los resultados de las investigaciones desarrolladas (Goffree, 1997).

En el marco teórico, la teoría de aprendizaje y la teoría de enseñanza están relacionadas causalmente. Esto significa que las directrices para la *enseñanza* de las matemáticas deben ser consecuencia natural de las ideas alcanzadas sobre el *aprendizaje* de las matemáticas.

Tomemos, por ejemplo, el principio según el cual los niños sólo se apropian de una determinada idea matemáticas cuando ésta es significativa para ellos y veamos cómo se concreta el significado de esta relación causal y sus implicaciones en el caso particular de los ejercicios en que los niños deben resolver operaciones planteadas de la forma 5 + ... = 12.

Los maestros holandeses de primer y segundo curso temen el día en que deben enseñar a su alumnado operaciones del tipo 5 + ... = 12, ya que los niños tienen constantes problemas con ellas. A menudo, cuando parece que los alumnos ya dominan este tipo de operaciones aparecen de nuevo respuestas como 5 + 17 = 12. El maestro es consciente de que el niño está pensando: «Hay un signo más y un signo igual, por lo tanto es una suma. Los números son 5 y 12; por lo tanto, la respuesta debe ser 17». Además, el maestro cree que no puede cambiar este esquema de pensamiento.

Cuando las matemáticas se desarrollan a nivel formal, desde el punto de vista de los niños, parecen convertirse en un conjunto de trucos de magia. Si todos los conjuros con los números y los signos funcionan, sientes que te has convertido en un auténtico mago. No obstante, si la respuesta es incorrecta, simplemente ha fallado el truco de magia. Freudenthal describió este fenómeno como el *contexto mágico* (véase Goffree, 1993, nota 26). Este punto de vista sobre el proceso de aprendizaje indica que, en educación, se debería ayudar a los niños a dar significado a las matemáticas. Por ello, la educación matemática requiere que las matemáticas se vuelvan concretas.

Alrededor del año 1970, se cuestionaron las llamadas *operaciones de completar espacios en blanco*, como por ejemplo, 5 + ... = 13. Los que estaban involucrados en el diseño de cursos de matemáticas para la escuela ya no les encontraban sentido. No obstante, se salvaron de ir directamente a la papelera pedagógica cuando Wiskobas hizo un interesante descubrimiento didáctico (Van den Brink, 1973), dando a la suma y a la resta un significado real y concreto en forma de viaje en autobús: hay (a) pasajeros en el autobús; en la siguiente parada no baja nadie y suben (b) pasajeros; el autobús continúa con ($a + b$) pasajeros, etc. La suma con espacios en blanco para completar ahora tiene la forma de: «Un autobús llega a la parada con 5 pasajeros y se va con 12. Si ningún pasajero ha bajado del autobús, ¿cuántos pasajeros han subido en esa parada?». Esto parece eliminar los problemas de las viejas sumas de completar espacios en blanco, y ahora los libros escolares de matemáticas en los Países Bajos están repletos de ejercicios similares *al viaje en autobús.*

Hacer de las matemáticas algo concreto se ha convertido, por consiguiente, en un principio educativo importante, pero que conlleva el riesgo de ser mal interpretado. La palabra concreto a menudo se interpreta en el sentido de *manipulativo*, algo que, incluso para los niños más pequeños, es sólo parte de la verdad. Concreto no significa únicamente materializable, sino también *algo que ellos puedan imaginar fácilmente*, por ejemplo, un viaje en autobús. Para los niños de los últimos niveles de primaria el entorno educativo se ampliará más allá de un viaje en un autobús local. Veremos esto cuando el principio de *convertir las matemáticas en algo concreto* se aplique a los porcentajes con la ayuda de un popular programa de televisión.

Los cinco principios de enseñanza y aprendizaje que constituyen el marco de una *educación matemática realista* pueden presentarse brevemente como se muestra en el cuadro 1 de la página siguiente.

Cuadro 1

APRENDIZAJE	ENSEÑANZA
A.1. Construcción	**E.1. Bases concretas para la orientación**
El aprendizaje de las matemáticas es una actividad constructiva. Esto contradice la idea de que los niños simplemente absorben el conocimiento matemático que se les presenta.	Convertir las matemáticas en algo concreto. Crear contextos reconocibles a los cuales los niños puedan asignar sus propios significados. De este modo, se crea una base concreta para orientar a los niños.
A.2. Subiendo el nivel	**E.2. Modelos**
El aprendizaje de las matemáticas se da en algún momento situado entre las matemáticas informales de los niños (nociones intuitivas, procedimientos inventados) y las matemáticas formales de los adultos. Esto significa que el proceso de aprendizaje de cada alumno se da a diferentes niveles de formalización. Los cambios de nivel se dan de modo súbito y crean una discontinuidad en el proceso de aprendizaje.	Para poder conseguir el avance en los niveles durante el proceso de enseñanza y aprendizaje, los alumnos deben tener a su disposición herramientas que les permitan establecer un vínculo entre las matemáticas informales y las formales. Una herramienta importante, que ha demostrado ser útil en numerosas ocasiones, es el uso de un modelo (de pensamiento). Crear un modelo *de* una situación o fenómeno conocido, permitir que los alumnos investiguen la situación y el modelo, conseguir que lo usen en otras situaciones y ayudarles a que lo conviertan en un modelo *para* (solucionar problemas).
A.3. Reflexión	**E.3. Momentos de reflexión**
El aprendizaje de las matemáticas se estimula con la reflexión. La reflexión es el motor que permite progresar, es decir, que hace avanzar de nivel (Freudenthal, 1991).	El maestro debe encontrar el momento oportuno para incluir la reflexión en la clase de matemáticas. Las buenas ocasiones para la reflexión incluyen cualquier conflicto cognitivo y cualquier aspecto que el alumno pueda haber pensado por sí mismo (*producciones propias*) (Streefland, 1991) (Selter, 1993).

A.4. El contexto social	E.4. Lecciones de matemáticas interactivas
Los niños aprenden más a menudo en compañía de adultos o de otros niños que no solos. Esto significa que otros actores en el proceso de aprendizaje pueden proporcionar el impulso para aprender. Los diferentes actores comparten entre sí procedimientos y conceptos matemáticos, discuten sobre ellos y generan ideas colectivamente. Se expresan diferentes opiniones y, a veces, es necesario persuadir a los demás, o por el contrario, escuchar sus argumentos.	El maestro debe organizar la educación matemática de modo que la interacción se convierta en una parte natural de ella. Como contrapartida, se crea un clima pedagógico en el cual el alumnado puede tomar parte en la interacción. La idea de clase como una especie de *comunidad matemática* da una dimensión especial, al igual que la *conferencia matemática* en la clase que describe Selter (1993). El camino didáctico escogido y el nivel de participación del maestro pueden tomar varias formas conocidas como *regímenes* (Boekaert y Simons, 1993). El profesor debe ser también consciente de que la interacción social puede interrumpir el proceso de aprendizaje (Steinbring, 1997).
A.5. Estructuración	**E.5. Entretejer los hilos del aprendizaje**
Si los niños construyen sus propias matemáticas de manera significativa, entonces las nuevas ideas y reflexiones se incorporan a las que ya se tienen. Esto significa que el conocimiento matemático disponible (por ejemplo, las estructuras cognitivas) está sujeto a constantes mejoras. El nuevo conocimiento se incorpora a las estructuras cognitivas existentes (asimilación), o la estructura total se ajusta para acomodar las nuevas ideas (acomodación). Por consiguiente, los niños aprenden matemáticas como un todo coherente y no como partes separadas. Esta capacidad de conexión funciona en dos sentidos, cubriendo tanto las relaciones entre las ideas matemáticas como la relación entre las ideas matemáticas y el mundo real. Además, uno de los aspectos básicos del aprendizaje consiste en dar estructura a lo que se está aprendiendo.	El maestro debe basar su enseñanza de las matemáticas en situaciones del mundo real, como fuente de ideas y como situaciones para poder aplicarlas. El primer caso sería un ejemplo de *matematización horizontal;* el contexto concreto que se ofrece debe ser trabajado matemáticamente por los niños. La conexión con el mundo real proporciona desde el principio significado a la actividad. Por otro lado, las ideas matemáticas que se usan pueden constituir, por ellas mismas, el tema de estudio; esto se denomina *matematización vertical* y permite establecer conexiones con otras ideas matemáticas, en parte, como resultado del bagaje concreto (por ejemplo, las proporciones en forma de fracciones en la introducción de los porcentajes).

Indicadores de una «educación matemática realista»

En Holanda, el cuerpo de inspectores de la escuela primaria, que evalúa la calidad de la educación desde la perspectiva de la administración educativa, publicó recientemente los resultados de un estudio sobre la educación matemática en dicho país (Inspectie 1997). El estudio implicó la participación de casi un centenar de inspectores que visitaron las escuelas, entrevistaron a los maestros y observaron la actividad en las aulas. La cuestión central de la evaluación se reflejaba en el protocolo de observación a través de la siguiente pregunta: «¿Tiene suficiente calidad la educación matemática?».

Esta pregunta se concretaba en otras tres más específicas:

- ¿Tiene la escuela las condiciones básicas necesarias para favorecer en sus aulas una enseñanza de las matemáticas efectiva?
- ¿El programa de enseñanza de las matemáticas cubre los objetivos centrales y existe una adecuada continuidad entre los niveles educativos?
- ¿El enfoque didáctico que se utiliza en las clases es apropiado para el desarrollo de una *educación matemática realista*?

Para cada pregunta objeto de evaluación se establecieron unos estándares y se desarrollaron unos indicadores a partir de los cuales se recogían los datos en las escuelas y se observaban las prácticas en las aulas.

A continuación, presentamos dos estándares con sus correspondientes indicadores.

Estándar 8: El maestro usa contextos y modelos

Indicadores

8.1. Se usan contextos realistas durante la lección o la actividad.

8.2. Se usan materiales o modelos durante la lección o la actividad.

8.3. Cuando un maestro retoma un tema, utiliza el mismo modelo o el mismo material que había usado la primera vez.

8.4. Cuando usa modelos, el maestro establece conexiones, refiriéndose a contextos reconocibles.

8.5. Cuando se discuten operaciones *simples* o actividades aisladas, el maestro recuerda los contextos y/o modelos que había usado con anterioridad.

8.6. (-) Los contextos no están relacionados con el problema matemático que se está tratando.

8.7. (-) Los ejercicios con modelos se hacen por el mero hecho de hacerlos.

Una respuesta afirmativa a los indicadores señalados con un (-) significa un punto negativo en la evaluación del estándar.

Estándar 9: La interacción juega un papel importante en las clases de matemáticas

Indicadores

9.1. Durante la explicación o discusión, se da a los alumnos la oportunidad y el tiempo necesario para buscar soluciones por ellos mismos.

9.2. Una vez hallada la solución, se comparan las estrategias seguidas.
9.3. El maestro pone empeño para hacer participar a los alumnos que no pudieron encontrar la respuesta por ellos mismos.
9.4. El maestro pide a los alumnos que articulen y justifiquen las estrategias de resolución.
9.5. El maestro aporta estructura a los métodos de resolución.
9.6. (-) El maestro es el único que tiene la posibilidad de hablar.
9.7. (-) El maestro sólo pide las respuestas a los alumnos y no el camino seguido para encontrarlas.

En particular, los indicadores presentados corresponden a la evaluación de la adecuación del enfoque didáctico al desarrollo de una *educación matemática realista.* Estos ejemplos ponen de manifiesto que los indicadores establecidos son, necesariamente, poco precisos y muy amplios debido a la agilidad necesaria en todo proceso de evaluación de este tipo que requirió que las visitas a cada una de las escuelas se limitasen a un único día.

En relación con este estudio, los inspectores llegaron a la conclusión, entre otras, de que la educación matemática en las escuelas holandesas era en general, mediocre. Ésta era una conclusión general que, en particular, también tenía en cuenta la planificación y las condiciones básicas en las escuelas. En cuanto a la calidad didáctica, a juicio de los inspectores, existía, como mínimo, un clima favorable a la mejora y, en particular, debían mejorarse los aspectos relacionados con la *interacción y la reflexión.*

Sin embargo, el objetivo de los inspectores no era encontrar muestras claras de que la enseñanza de las matemáticas que se desarrollaba en las aulas correspondía a una enseñanza realista de las matemáticas. Tampoco pretendían obtener evidencias de que la práctica se sustentaba en las bases de los principios esenciales de los paradigmas de una *educación matemática realista* (Goffree, 1993, p. 3). Los esquemas de evaluación desarrollados para la inspección eran índices poco específicos, para poder ser utilizados con agilidad, cuyo objetivo era identificar los puntos débiles de la enseñanza de las matemáticas.

Sin embargo, determinar si la ausencia de puntuación en un indicador positivo debe verse necesariamente como un punto débil es una cuestión crucial. Si esto fuera así, la excesiva vaguedad de algunos estándares y de su interpretación se opondrían a la validez del esquema de evaluación, ya que, de hecho, se observaron clases de matemáticas realmente de gran calidad, en las que no se usaron contextos ni modelos y en las que la interacción iba más allá de la discusión de los resultados.

Pautas para el diseño de un curso realista sobre porcentajes

El marco teórico que hemos esquematizado hasta aquí puede utilizarse también para *diseñar* la educación matemática, en cuyo caso, deberían establecerse puentes entre los principios globales subrayados y el trabajo real que se desarrolla en clase.

Esto requiere llevar a cabo un minucioso análisis del dominio específico del conocimiento matemático, del de los procesos de aprendizaje y, por supuesto, de los niños. Requiere también una gran inventiva y creatividad por parte del diseñador, que se complementarán con una adecuada interpretación de los paradigmas de la enseñanza realista de las matemáticas, y se beneficiará de los consejos sensatos de otros profesores y expertos.

A. Treffers que había desarrollado el marco teórico citado anteriormente (Treffers, 1993) y tenía gran experiencia por haber desarrollado numerosos cursos, dio las siguientes pautas para que el profesorado pudiera diseñar sus cursos sobre porcentajes:

- Trabajar a partir de cualquier conocimiento informal que los niños posean sobre los porcentajes.
- Enfocar los porcentajes de forma amplia, por lo menos al principio.
- No evitar la especial idiosincrasia y las numerosas dificultades que presentan los porcentajes.
- Usar chistes, malentendidos, contradicciones aparentes o cualquier idea que sea poco clara, como punto de partida para la investigación y la reflexión.
- Empezar con porcentajes simples relacionados con fracciones básicas cuyo numerador sea la unidad.
- Visualizar las propuestas con la ayuda de una *herramienta de porcentajes* o una *regla de doble escala.*
- Dejar espacio en las lecciones para la *estimación*, porque es a la vez un objetivo útil en sí mismo y una herramienta para conducir el trabajo hacia los cálculos precisos.
- Trabajar gradualmente desde 50%, 10% y 5% hasta la regla del 1%.
- Relacionar las fracciones con las fracciones decimales y las proporciones y usar la *tabla de proporciones* fijada para 100.
- Limitar los ejercicios y extender el tema para incluir en él áreas de interés fuera del ámbito escolar.
- Incluir actividades relacionadas con el sentido numérico, de tal forma que los niños puedan dar significado a las ideas matemáticas implicadas en ellas.

Las instrucciones para desarrollar un método de enseñanza de los porcentajes pueden interpretarse también como *indicadores* de una enseñanza realista de las matemáticas, si se generalizan los principios teniendo siempre en cuenta la relación con el marco teórico global.

Queremos insistir en algunos de los puntos citados anteriormente, ya sea por su propia importancia o porque incluyen aspectos que pueden ser novedosos para el lector. El cálculo mental, la estimación, la capacidad de reflexión y de intuición y el dominio de destrezas básicas son los principales elementos del sentido numérico y cubren las habilidades matemáticas necesarias para desenvolverse en la vida cotidiana. Una *tabla de proporciones* contiene una lista ordenada de proporciones; la *herramienta de porcentajes* puede usarse para leer en ella un porcentaje o, como mínimo, para obtener una aproximación al mismo. La *regla de doble escala* es un tipo de regla cuya parte superior está dividida en centenas y su parte inferior en cualquier proporción que sea relevante para el problema que se discute –por ejemplo, 65 florines divididos en partes de 25 y 40 florines. La significación didáctica de la *estimación* no se discutirá con más detalle ya que si se usa la cinta métrica como modelo mental, debería ser obvio que ya se está usando una estimación.

En estos momentos el lector estará preparado para diseñar un curso realista sobre porcentajes. Tenemos ideas para empezar y numerosas situaciones de las que partir:

- El periódico ofrece muchas posibilidades para todo tipo de ejercicios. En relación con los porcentajes, ofrecen contextos concretos relacionados con las rebajas y los descuentos, la caída y subida de los precios, los precios de los intereses hipotecarios y las diferencias entre ellos.
- También puede empezarse a trabajar con modelos geométricos tales como el rectángulo, el círculo y la recta. Es importante no olvidar la recta numérica que puede interpretarse fácilmente como un modelo de situaciones de la vida cotidiana; hay numerosos ejemplos de ello (el nivel del agua del hervidor (*kettle* en inglés), el comprobador de la carga de la batería...). El círculo aparece, a menudo, en forma de diagrama de sectores y facilita la interpretación de los porcentajes.
- Los periódicos también ofrecen ejemplos de errores comunes con los porcentajes, en particular, con relación a aumentos y disminuciones. Dos ejemplos de la prensa regional holandesa ilustran esta afirmación:

> «El United va a doblar el precio de las entradas. El Manchester United se propone subir un 50% el precio de las entradas la próxima temporada.» *(De Gelderlander)*
>
> «El Ministerio de Educación ha rebajado el precio que se pedía por la venta de la Escuela Inicial Técnica de Tholen casi un 100%: ha pasado de los 1,2 millones de florines a sólo 608.000 florines, precio por el cual la ha adquirido.» *(De Eendrachtsbode)*

- Pueden también utilizarse los conflictos cognitivos para estimular la reflexión; por ejemplo, la confusión lingüística entre *por ciento* y *ciento* o una reducción del 50% de un precio que necesita luego un incremento del 100% para restaurar el precio inicial.

El problema de la interrelación de los porcentajes con las fracciones, los decimales y las medias, no tiene una solución rápida y fácil, pero tiende a resolverse por sí mismo durante el proceso de enseñanza.

Una arquitectura realista para el curso sobre porcentajes

El desarrollo de todos los temas básicos de matemáticas del nivel de primaria tiene una misma estructura, que puede describirse como *arquitectura realista* (Treffers y otros, 1994, p. 153). El desarrollo de cualquier tema empieza siempre tomando un elemento del mundo real en el que puedan aplicarse los contenidos matemáticos que se están trabajando. Esta primera fase se llama *fase de operación informal ligada al contexto*. Los niños exploran el contexto, aparecen las primeras dificultades y los primeros problemas, a los que los niños deben enfrentarse en grupo, y se aclaran los aspectos necesarios.

Por ejemplo, en el curso sobre las *tablas de multiplicar* los niños se enfrentan, en primer lugar, a algunos problemas de cálculo complicados. Entonces, un cálculo hábil les conduce de forma natural a reconocer las estructuras de multiplicación que pueden visualizarse y esquematizarse, por ejemplo, saltarse líneas de números permite reconocer una estructura determinada.

Esta primera fase de implicación ligada al contexto se transforma gradualmente en la fase de *implicación semi-formal apoyada en modelos*, en la cual los modelos multiplicativos respaldan el cálculo hábil y llevan la adición al nivel de la multiplicación. Luego, los modelos permiten ver estrategias de multiplicación fijas, por ejemplo, darse cuenta de que 5 x 4 puede ser igual a la mitad de 10 x 4, o bien, que 6 x 7 es 7 más 5 x 7 o, también, la mitad de 70 más 7.

Estas estrategias pueden interpretarse como multiplicaciones abreviadas, del mismo modo que la multiplicación es una versión abreviada de la adición. Durante la enseñanza, a menudo el cambio de nivel se convierte en algo visible cuando los alumnos y alumnas adoptan, a partir de las nuevas ideas, caminos más cortos para realizar las operaciones matemáticas (véase el «curso de multiplicación larga» (Treffers, 1991) para el análisis del paradigma subyacente).

Esto nos lleva a la fase de *reconstrucción* de las tablas. Los niños usan las estrategias citadas anteriormente para calcular por ellos mismos los productos de las tablas que no han memorizado. Paralelamente, las estrategias se convierten gradualmente en procedimientos de cálculo aplicables a situaciones más generales.

Este modo de aprender y usar las tablas (los productos de las tablas y las estrategias de cálculo) es mucho más rico que la simple memorización de las mismas. En primer lugar, se aprenden las estrategias de cálculo al mismo tiempo que las tablas. En segundo lugar, la multiplicación aprendida de esta forma tiene una base esquemática y un significado claros. Finalmente, las tablas y las estrategias pueden aplicarse a números mayores que diez (entonces el conocimiento de las tablas se convierte realmente en algo funcional), y también a números menores que diez cuando la tabla no puede recordarse de forma inmediata.

Casi de forma imperceptible, hemos llegado a la fase de *memorización*. En este momento, se trata de calcular poco y saber mucho. Las estrategias son cada vez más útiles para la aplicación del conocimiento de la tabla en la siguiente fase, la de *aplicación*, que, con suerte, durará toda la vida.

Después de la primera fase, ligada al contexto, y de la segunda fase, basada en modelos, el tema de las tablas de multiplicar adquiere un carácter especial, por el hecho de que el aprendizaje memorístico de la tabla requiere una gran cantidad de tiempo y esfuerzo. En general, la tercera fase de los cursos de matemáticas realistas se puede describir como la de las *operaciones rutinarias formales*. En el curso sobre porcentajes, el énfasis no debería recaer en el puro trabajo memorístico, pero esto no significa que no sea muy útil conocer equivalencias entre porcentajes y fracciones (por ejemplo, 20% = 1/5).

En este punto, deberíamos hacer una advertencia a los diseñadores de cursos y a los autores de libros de texto. Esta división en fases puede fácilmente dar la impresión de que la enseñanza y la educación consisten en seguir paso a paso la estructura realista lineal. Nada más lejos de la verdad. La naturaleza misma del enfoque realista, con la atención puesta en la realidad de los niños, tanto exterior como interior, permite establecer relaciones y conexiones (Treffers y otros, 1994, p.153). Estas relaciones y conexiones podrán observarse en el apartado siguiente en el que se ilustra la discusión en clase, al abordar el problema «cómo se empieza».

El curso realista sobre porcentajes

En el marco del proyecto MILES, diseñamos un curso de porcentajes para el quinto grado siguiendo, de forma general, las directrices de la arquitectura realista. El curso fue experimentado en aulas reales, inicialmente por maestros implicados en el proyecto y posteriormente por maestros externos a él. La experimentación fue seguida en todos los casos por un miembro del proyecto que actuaba como observador externo y, a partir de las observaciones, se fue revisando el curso.

Este curso y su implementación en las aulas se presenta en las facultades de educación a los maestros en formación como ejemplo de una *educación matemática realista* basada en los problemas. Además, las grabaciones de las clases donde se desarrolla el curso permiten trabajar con los maestros en formación en el análisis de las interacciones que se dan en las aulas.

A continuación presentamos algunos de los *momentos* del desarrollo de estos cursos, como ejemplos que ilustran su arquitectura realista.

La primera clase del curso empieza con un intento por parte del maestro (Paul) de hacer un inventario de lo que los niños ya saben sobre los porcentajes. Para ello, se había elegido un *problema contexto* adecuado basado en un conocido concurso televisivo de los sábados por la noche llamado Cinco Contra Cinco.

Cinco Contra Cinco (Vijf tegen vijf)
El juego consiste en dos equipos de cinco miembros que compiten uno contra otro. Los jugadores deben contestar, por turnos, a preguntas tales como ¿qué es lo primero que haces cuando llegas a casa después de unas vacaciones? y deben proporcionar la respuesta que, según su opinión, darían la mayoría de holandeses. La respuesta de los jugadores se contrasta con los resultados en porcentajes de una estadística hecha con anterioridad.

Después de ver un vídeo con la grabación del programa empieza la discusión. Uno de los niños explica cómo funciona el juego diciendo que «se necesita una puntuación alta» y rápidamente aparece la palabra porcentaje. Esto da al maestro, Paul, la oportunidad de empezar la discusión planteando la cuestión: «El público aplaudió cuando la respuesta fue un 20%. ¿Es eso una puntuación alta?» y prosigue introduciendo un problema difícil relacionado con el contexto: «¿Cómo debería ser una pregunta para ser adecuada para el programa?».

Los niños proponen todo tipo de preguntas, pero la mayoría de ellos no se da cuenta de que las preguntas del programa deben cumplir dos condiciones: deben tener más de una respuesta posible y deben permitir que personas diferentes den respuestas distintas. Sin revelar esto a la clase, Paul propone a los alumnos que con su ayuda intenten encontrar una pregunta realmente válida: «Decidme un famoso entrenador de fútbol». Paul escribe los nombres propuestos en la pizarra, después de haber escuchado las sugerencias de todos los alumnos. Cuando ya se han mencionado cinco nombres distintos, nadie puede proporcionar ningún otro.

Paul pide que cada alumno *vote* al entrenador que, según su opinión, sea el mejor. Escribe el recuento de votos al lado de cada nombre y pregunta: «¿Cómo llegáis desde esta lista a los porcentajes?, ¿Qué tanto por ciento de la clase nombró a Van Gaal?». En la clase hay 26 niños, lo que plantea un cálculo molesto y Paul no considera apropiado entrar en estimaciones en esta fase exploratoria. Por ello dice: «Vamos a asumir que hay 25 alumnos» a pesar de que se da cuenta de que puede crearse una situación conflictiva. Van Gaal obtuvo 15 votos y Paul pregunta: «¿Podemos decir que el 15% ha escogido a Van Gaal?». Un alumno, Joey, explica con muchos detalles que la afirmación sería falsa.

Un análisis más detallado de la discusión en clase (la interacción) nos proporciona información no sólo sobre la situación inicial de los niños, sino también sobre el enfoque realista de la enseñanza de las matemáticas basada en problemas.

En cuanto a esto último, es evidente que las situaciones reconocibles pueden ofrecer buenas oportunidades de crear discusiones animadas. Para que esto funcione, es esencial que las orientaciones del maestro estén dirigidas a la consecución de los objetivos. Tanto lo que los niños ya saben, formal e informalmente sobre los porcentajes (*realidad interior*), como el enfoque adoptado al formular una pregunta válida para el programa (*realidad exterior*) parece variar enormemente entre los niños. Y las diferencias van más allá. Un alumno intenta obtener respuestas a cuestiones matemáticas sobre los porcentajes («¿cuánto es el 20%?, ¿qué relación tiene con el 100%?»), otro alumno considera los porcentajes desde el marco del juego («¿es el 20% una puntuación alta?»), mientras que otro está preocupado por los entrenadores de fútbol («¿es Van Gaal mejor que Cruiff?»). Tal como puede verse, el ejercicio planteado no conduce de manera natural a un enfoque matemático lineal paso a paso.

La libertad de participar libremente y la oportunidad de intercambiar ideas que proporciona la interacción puede añadir más dimensiones a la discusión, pero también puede desviarla. Esta situación se hace evidente cuando los alumnos trabajan en pequeños grupos bajo su propia responsabilidad, con el maestro supervisando a distancia y con la única tarea de aconsejarles. La interacción social, el proceso de aprendizaje matemático y la exploración de un contexto que deberían producirse de la forma más natural posible exigen la máxima atención por parte del maestro (véase Steinbring, 1997).

En esta situación, el maestro está frente a una difícil elección didáctica: ¿Puede poner el trabajo en manos de los grupos de alumnos y delegar de esta forma la responsabilidad? Ningún conocimiento teórico ni teoría sobre la enseñanza puede proporcionarle una respuesta clara. El maestro sólo puede resolver este dilema sopesando las distintas posibilidades, utilizando su intuición, teniendo coraje para aceptar riesgos y aceptando sus propias dudas (Lampert y Ball, 1998). Si las actividades plantean propuestas interesantes, si los niños se concentran y el clima de trabajo de clase invita a ello, el maestro generalmente asumirá el reto y hará el papel de supervisor del trabajo en grupos.

No obstante, este no es el único dilema que los maestros deben afrontar como resultado de una enseñanza de las matemáticas realista. La interacción social puede distraer a los niños del proceso de aprendizaje matemático intencionado; el contexto rico puede no generar cuestiones relevantes para las ideas que quieren enseñarse; empezar a partir de lo que los alumnos ya conocen puede implicar puntos de partida enormemente variados de un alumno a otro y algunas de las soluciones a las que llegarán unos niños sería mejor que los demás no las tomaran en consideración. Todos estos hechos generan dilemas al maestro, dilemas para los cuales no existe ninguna solución clara y general que pueda aplicarse a todas las situaciones concretas. El proyecto MILE ofrece a los maestros la oportunidad de estudiar detalladamente la obstinada y difícil realidad de una enseñanza de las matemáticas realista.

Volviendo al problema planteado inicialmente

Los diseñadores del curso sobre porcentajes escribieron, por encargo de MILE, una guía para los alumnos, *Mijn groot procentenboek* (Mi gran libro de porcentajes), con una estructura general que tiene en cuenta los cinco principios citados, está guiada por las recomendaciones de Treffers y otros (1994), y presta atención a los posibles conflictos entre la interacción y la *educación matemática realista* basada en problemas.

Si alguien analizase este material tratando de formarse una impresión sobre las acciones y pensamientos del alumnado, probablemente se preguntaría si, al finalizar el curso, los alumnos serían capaces de resolver el problema del índice Dow Jones descrito al principio de este capítulo.

Tal y como se ha descrito en la introducción, este problema tiene una considerable dificultad aritmética (7,2% y 7.698,0555 son números complicados) y, al mismo tiempo, requiere una importante reflexión (habitualmente se calcula el tanto por ciento de *algo*). Después del trabajo en las dos primeras fases del curso, los alumnos pueden utilizar la recta numérica como modelo de medida, aunque todavía en el sentido de un modelo concreto. Además, vimos que la posibilidad de estimación de un porcentaje sólo se utilizaba cuando podían usarse fracciones habituales (por ejemplo 45%).

Pretender que los alumnos vean las *ideas matemáticas esenciales* que se esconden tras los complicados números del problema de Dow Jones es pedir demasiado. Es necesario, como mínimo, estar dispuesto a empezar la resolución del problema con una aproximación global, en lugar de apresurarse a intentar calcular el resultado. En las cinco sesiones del curso se ha prestado poca atención a este tema. Podría creerse que si un alumno quiere dar este paso, dispone ya de la recta numérica como modelo. No obstante, el contexto del problema del índice de Dow Jones no sugiere de forma natural dicho modelo, como sería el caso del nivel del agua en el hervidor.

Evidentemente podría conducirse al alumno hacia la utilización de la recta numérica como modelo. Sin embargo, una vez se ha comprendido correctamente este modelo aparece una nueva dificultad debido a la necesidad de resolver el problema a través de una estimación. Si se redondean los valores dados y se trabaja con 10% y 8000, la concreción física de la recta numérica no permite obtener una respuesta definitiva ya que la magnitud de un 10% dificulta la posibilidad de ver los detalles.

El tipo de razonamiento que se pretende alcanzar en este caso, puede conseguirse sólo si se utiliza la recta numérica como modelo mental, y entonces no hay marcas divisorias en ella, y las operaciones de quitar un 10% primero y después añadir un 10% sólo tienen lugar mentalmente. Este método no estaba incluido en las lecciones del curso implementadas hasta el momento, con lo cual nuestros alumnos no podían resolver el problema.

Lo que debería suceder en las sucesivas lecciones posteriores, que empiezan con la fase de *trabajo semi-formal apoyado en modelos*, puede intuirse a partir de la discusión presentada en los párrafos precedentes.

Consideración final

Durante los últimos 25 años, en los Países Bajos se ha dedicado tiempo y esfuerzo al desarrollo de una educación matemática realista. Más del 80% de las escuelas tienen en cuenta alguno de los cinco principios del *aprendizaje y la enseñanza realistas de las matemáticas* y, en este momento, hay otros tres principios en proceso de desarrollo.

Los resultados de las inspecciones escolares fueron moderadamente alentadores tanto sobre la situación actual como en relación con el futuro de la educación matemática. Hay muchos profesionales dedicados a la implementación de estos métodos, tanto en el ámbito de la formación de maestros como en los programas de supervisión y orientación escolares. Sin embargo, a pesar de los esfuerzos, quedan todavía muchos aspectos por mejorar. La *educación matemática realista* exige un gran compromiso profesional por parte de todos los grupos implicados y, naturalmente, la participación de los alumnos.

Referencias bibliográficas

BOEKAERTS, M. (1993) en SIMONS, P.R.J.: *Leren en Instructie Psychologie van de Leerling en het Leerproces*. Assen. Dekkert & van de Vegt. [Aprendizaje e Instrucción. La psicologia del alumno y el proceso de aprendizaje]

BRINK, J. VAN DEN (1973): «Wie gaat er mee? Wie niet? Autobusproblemen voor Klas 1», en *Wiskobas Bulletin*, n. 3(2). Utrecht, Iowo. [*¿Quién viene? ¿Quién no? Problemas de autobuses para la clase de primero*]

DOLK, M. y otros (1996): *Multimedia Interactive Learning Environment for Future Primary Mathematics Teachers*. Projectplan. Utrecht Freudenthal Instituut.

FREUDENTHAL, H. (1991): *Revising Mathematics Education. China Lectures.* Dordrecht. Kluwer Academic Publishers.

GOFFREE, F. (1993): «HF: Working on Mathematics Education», en STREEFLAND, L. (ed.): *The Legacy of Hans Freudenthal.* Dordrecht. Kluwer Academic Publishers, pp. 21-50.

GOFFREE, F. (1997): «Onderzoek en Ontwikkeling: vàn en vóór het Reken-wiskunde-onderwijs in Nederland.» *Tijdschrift voor Onderzoek en Nascholing van het Reken-wiskundeonderwijs*, n. 15(1), pp. 3-18. [*Investigación y Desarrollo: desde y para la práctica de la educación de las matemáticas en los Países Bajos*]

GRAVEMEIJER, K.P.E. (1994): *Developing Realistic Mathematics Education.* Utrecht, CD- ß Press/Fi.

INSPECTIERAPPORT (1997-7): *Rekenen en Wiskunde in het Primair Onderwijs. Verslag van een Evaluatie van de Kwaliteit van het Reken-wiskundeonderwijs.* De Meern: Inspectiekantoor. [*Las matemáticas en la educación primaria. Informe de una evaluación sobre la calidad de la educación de las matemáticas*]

KELLINGA, C. (1926): *Noodig Rekenen op de Lagere School.* Tilburg. Het R.K. Jongensweeshuis. [*Aritmética esencial para las escuelas primarias.*]

LAMPERT, M.; BALL, L.D. (1998): *Investigating Teaching. New Pedagogies and New Technologies for Teacher Education.* Nueva York. Columbia University. Teachers' College Press.

MASON, M.; BURTON, L.; STACEY, K. (1982): *Thinking Mathematically.* London. Addison-Wesley Publishers Limited.

SELTER, C. (1993): *Eigenproduktionen im Arithmetikunterricht der Primarstufe.* Wiesbaden. Deutscher Universitäts Verlag. [*Trabajo independiente en la educación aritmética en primer grado*]

STEINBRING, H. (1997): «Epistemological Investigations of Classroom Interaction in Elementary Mathematics Teaching». *Educational Studies in Mathematics*, n. 32, pp. 49-92.

STREEFLAND, L. (1991): *Fractions in realistic Mathematics Education. A Paradigm of Developmental Research.* Dordrecht. Kluwer Academic Publishers.

STREEFLAND, L. (ed.) (1991): *Realistic Mathematics Education in Primary Schools. On the occasion of the opening of the Freudenthal Instituut.* Utrecht. Freudenthal Institute.

TREFFERS, A. (1991): «Didactical Background of a Mathematics Program for Primary Education», en STREEFLAND, L. (ed.): *Realistic Mathematics Education in Primary Schools. On the occasion of the opening of the Freudenthal Instituut.* Utrecht. Freudenthal Instituut, pp. 21-56.

TREFFERS, A. (1993): «Streefdoelen voor Procenten». *Willem Bartjens*, n. 12(4), pp. 44-46. [*Objetivos para los porcentajes*]

TREFFERS, A; STREEFLAND, L.; MOOR, E. De (1994): *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool: Deel III.* Breuken. Tilburg, Zwijsen, pp. 223.

10

Alternativas a la evaluación con exámenes: expectativas y dificultades

Kenneth Ruthven
Cambridge University (Gran Bretaña)

Introducción

Este capítulo tiene dos partes. En la primera, reviso y discuto las ideas que han influido en los últimos años en la reforma de la evaluación en educación matemática. En la segunda parte describo, en concreto, algunas de las características más importantes de las recientes reformas de la evaluación en matemáticas llevadas a cabo en Inglaterra y reflexiono sobre la lección que podemos aprender a partir de ellas, en particular, sobre las dificultades relacionadas con la implementación de una evaluación alternativa a la evaluación con exámenes.

Ideas que han influido en la reforma de la evaluación

Prioridad de la reforma de la evaluación en educación matemática

Durante la pasada década, los temas relacionados con la evaluación en educación matemática han recibido una considerable atención. En concreto, la *International Comission on Mathematical Instruction* (ICMI) ha dado su apoyo a un gran estudio denominado *Assessment in Mathematics Education and Its Effects:*

> *El desarrollo de la enseñanza de las matemáticas durante las pasadas tres o cuatro décadas ha señalado como prioridad la reforma curricular, ciertamente con tipologías distintas, o incluso contradictorias. Simultáneamente, la educación matemática, como campo académico, ha centrado su atención en los procesos de aprendizaje de las matemáticas y en las condiciones para su desarrollo y, en particular, en los procesos de formación y adquisición de conceptos matemáticos. Este interés, en cierto modo, ha dejado a un lado la evaluación. Se ha considerado la evaluación como un factor de*

menor importancia para la educación matemática, siendo, además, un factor externo a ella. Cuando la evaluación atrajo la atención de los educadores matemáticos fue debido, a menudo, a un malestar entorno a su papel y a su función. Las formas de evaluación tradicionales, especialmente exámenes y pruebas externas, han sido en muchos casos algunos de los factores que han perjudicado o frenado la reforma del curriculum. (Niss, 1993*a*, pp. 4-5)

En los Estados Unidos, organizaciones líderes, como el *Educational Testing Service* (ETS) y el *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM), han intentado replantear y reformar la evaluación en matemáticas. Los editores de una publicación surgida del trabajo desarrollado con el apoyo del *Educational Testing Service* afirman:

Se han iniciado amplios cambios en educación matemática como respuesta a los potentes avances recientes en tecnología, psicología cognitiva y matemáticas, y también para satisfacer las numerosas demandas públicas en favor de una reforma educativa. Estos cambios han dado ya lugar a una replanteamiento importante de lo que significa comprender en matemáticas, de la naturaleza de la enseñanza y del aprendizaje de las mismas y de las situaciones reales en las que las matemáticas son útiles. El reto consiste en tomar iniciativas relacionadas con la evaluación que sean válidas sistemáticamente, en el sentido que sirvan para complementar y potenciar otras mejoras en el sistema educativo, en lugar de constituir un impedimento para reformas curriculares altamente necesarias. (Lesh y Lamon, 1992, p. v)

Direcciones clave para la reforma de la evaluación en educación matemática

Al revisar las publicaciones de ICMI y ETS en la publicación *Educational Studies in Mathematics*, comenté:

Está mucho más claro de qué quieren alejarse los impulsores de la reforma de la evaluación que aquello hacia lo que quieren dirigirse. Sin embargo, en la reforma hay tres amplias direcciones que aparecen varias veces en este volumen y que parecen exigir un apoyo considerable: hacia concepciones más auténticas o realistas de la actividad matemática, hacia una mayor calidad interpretativa en la información de la evaluación, y hacia una mayor integración de los procesos de enseñanza, aprendizaje y evaluación. (Ruthven, 1994, pp. 439-440)

Aunque me solidarizo con estas orientaciones para la reforma, me sorprendió que gran parte de la discusión fuera parcial, reflejando, quizás, una falta de experiencia en la complejidad que representa poner en práctica estos ideales en clases reales.

Parecía existir cierta disposición para desertar de un currículum, y una evaluación, que acepta determinadas tareas como tareas básicas. En parte, esto es debido a que se cree que dichas tareas plantean demandas rutinarias y estereotipadas y fomentan la enseñanza directiva. Pero esto puede descartar con demasiada rapidez el proceso de aprendizaje cognitivo a través del cual se han enseñado tradicionalmente las rutinas básicas (Newman y otros, 1989). Ciertamente, incluso en un currículum que decida no enfatizar rutinas estándares, sigue siendo importante desarrollar la capacidad para reconocer ciertas tareas como estándares. Las tareas básicas (y los esquemas que permiten reconocerlas como tales) cumplen dos funciones sociocognitivas importantes. En primer lugar, crean un sistema de puntuación pública sin el cual el conocimiento matemático sólo sería reconocido a nivel personal. En segundo lugar, actúan como elementos base para la construcción de tareas más avanzadas y, en definitiva, de esquemas. Ciertamente, reconocer el papel de las tareas básicas parecería ser algo indispensable en cualquier justificación, desde una perspectiva constructivista social, de la emergencia de conocimiento matemático público, y de la enculturación en dicho conocimiento.

En segundo lugar, encontré que se prestaba poca atención rigurosa a los aspectos de equidad. Por el contrario, tendía a haber un fuerte compromiso, relativamente poco crítico, «con un nuevo consenso acerca de la naturaleza de las matemáticas reales» (Lesh y Lamon, 1992, p. 24). Se suponía benévolamente que la mejora de la calidad de los contenidos de las matemáticas escolares es el principal medio para fomentar la equidad, ayudando a todos los alumnos a *actuar como matemáticos* mostrando *comprensión de alto nivel*. Evidentemente, para que las nuevas formas de evaluación sean aceptadas será crucial poder defender que son medios apropiados y justos para la certificación y la selección. Aunque Little (1993, p. 96) enunció la «Ley inversa de la evaluación: la fiabilidad de la evidencia obtenida es inversamente proporcional a su validez educativa», estos aspectos deben analizarse con profundidad. ¿Cómo pueden defenderse las nuevas formas de evaluación si, tal como puede suceder, se ven como medios para amplificar las ventajas de aquellos cuya lengua materna es la misma que la lengua de instrucción y de evaluación, las de aquellos que provienen de comunidades y entornos familiares que gozan de un acceso privilegiado a los recursos tecnológicos e intelectuales?

Los estándares de evaluación del NCTM

Me sentí, pues, satisfecho cuando el *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) de los Estados Unidos publicó sus *Estándares de Evaluación para las Matemáticas Escolares*, sobre los que se había reflexionado con profundidad. Este documento presenta seis criterios para juzgar la calidad de la evaluación en matemáticas:

- El *estándar matemático*. La evaluación debería reflejar las matemáticas que todos los alumnos necesitan saber y ser capaces de hacer:

  Las actividades proporcionan oportunidades a todos los alumnos para formular problemas, para razonar matemáticamente, para establecer conexiones entre las ideas matemáticas y para comunicarse utilizando las matemáticas. Los alumnos se implican en la resolución de problemas reales usando la información y las herramientas tecnológicas disponibles en la vida real. Además, las capacidades, y los conocimientos de procedimientos y de hechos se evalúan como parte del hecho de hacer matemáticas. (NCTM, 1995, p. 11)

- El *estándar de aprendizaje*. La evaluación debería acrecentar y realzar el aprendizaje matemático:

  La evaluación es una oportunidad de aprendizaje además de ser una oportunidad para que los alumnos demuestren lo que saben y lo que pueden hacer. Además, la evaluación [...] orienta la instrucción posterior, y, en consecuencia, puede contri-

buir a intensificar aún más el aprendizaje de los estudiantes. Los alumnos pueden usar también la evaluación para llegar a aprender independientemente. (NCTM, 1995, p. 13)

- El *estándar de equidad.* La evaluación debería promover la equidad:
  Los bagajes y las experiencias de los alumnos influyen en sus percepciones de las situaciones de evaluación y pueden ser la causa de que respondan a ellas de modo impredecible. Puede que los alumnos necesiten especificar lo que asumen cuando comunican los resultados de sus trabajos. Los evaluadores quizás necesiten estar abiertos a soluciones alternativas. (NCTM, 1995, p. 15)
- El *estándar de apertura.* La evaluación debería ser un proceso abierto:
  La información sobre el proceso [de evaluación] está a disposición de quienes se ven afectados por él. Antes de que se evalúe formalmente el aprendizaje, se informa a los estudiantes de lo que necesitan saber, de cómo se espera que demuestren lo que saben y de cuáles serán las consecuencias de la evaluación. (NCTM, 1995, p. 17)
- El *estándar de inferencia.* La evaluación debería promover inferencias válidas acerca del aprendizaje de las matemáticas:
  Utilizar fuentes de evidencia múltiples puede mejorar la validez de las inferencias que se hacen acerca del aprendizaje de los estudiantes. [...] El uso de múltiples fuentes permite que los puntos fuertes observados a través de un método compensen los puntos débiles percibidos a través de otros. También ayuda a los profesores a juzgar la consistencia del trabajo matemático de los alumnos. (NCTM, 1995, p. 19)
- El *estándar de coherencia.* La evaluación debería ser un proceso coherente:
  La coherencia en la evaluación incluye tres tipos de acuerdo. En primer lugar, [las fases del] proceso de evaluación encajan unas con otras. En segundo lugar, la evaluación satisface el objetivo por el cual se realiza. [...] En tercer lugar, la evaluación está en sintonía con el currículum y con la instrucción. (NCTM, 1995, p. 21)

El documento de los *Estándares* ilustra eficazmente estos principios a través de relatos de prácticas profesionales ejemplares. Reconoce también que, en la práctica, será necesario aceptar y resolver los conflictos potenciales entre estos principios. Por ejemplo:

Las nuevas formas de evaluación, tales como los dossieres o los proyectos extensos, pueden crear nuevas fuentes de desviación. Los proyectos extensos pueden permitir que los estudiantes completen parte del trabajo en casa, con lo que las diferencias entre los recursos disponibles en el hogar (incluyendo la ayuda de los padres) puede sesgar los resultados. Para asegurar la igualdad de recursos, es posible que la escuela o la comunidad deban proporcionar materiales adicionales para que todos los alumnos tengan la oportunidad de realizar los proyectos utilizando sus habilidades al máximo. Otra fuente de desviación potencial está en aquellas actividades de evaluación que dependen en gran medida de la habilidad de los estudiantes para comunicar conocimientos matemáticos en inglés. Esta desviación puede corregirse a través de actividades adicionales que permitan formas alternativas de comunicación. Una tercera fuente de desviación puede ser el resultado de las formas de puntuación usadas en *muchas de las actividades de evaluación. Las tareas complejas requieren un esfuerzo considerable, por parte de aquellos que las puntúan, para emitir juicios. El sesgo en estos juicios puede ser afrontado con una formación adecuada y procedimientos de puntuación apropiados.* (NCTM, 1995, p. 19)

Retos en la implementación de la reforma sistémica de la evaluación

A pesar de que los *Estándares* establecen un admirable marco de principios para guiar la reforma de la evaluación, dicen relativamente poco acerca de los aspectos prácticos de su implementación. El texto principal finaliza con una lista de «doce grandes cambios en la práctica de la evaluación», «alejándose» de polos negativos, tales como «limitar a los alumnos a una única forma de demostrar su conocimiento matemático», «acercándose» a polos positivos, tales como «ofrecer a los alumnos múltiples oportunidades para demostrar todo su potencial matemático». (NCTM, 1995, p. 83).

Mellin-Olsen identificó una importante dificultad a la que se enfrentan muchos profesores al trabajar con esta aproximación a la reforma:

Los profesores se encuentran con dificultades al desarrollar su enseñanza, al ver diferentes metodologías que más que complementarse, se contradicen. Según la interpretación que los profesores hacen de la educación matemática, hay dos formas distintas de tratar el conocimiento matemático. [...] En el método antiguo se trabaja con libros de texto, solucionando, esencialmente, problemas del libro para obtener las capacidades adecuadas en relación al examen. El nuevo método es el recomendado por aquella formación de profesores que transciende, de distintas maneras, la resolución de problemas del libro de texto [...] Aquí la cuestión sorprendente, cuestión que no han tomado con suficiente seriedad los que diseñan cursos, entre los cuales me incluyo, es que se olvida tratar las distintas prácticas educativas en su totalidad didáctica. ¿Cómo puede, por ejemplo, el trabajo por proyectos apoyar al trabajo por tareas de rutinas y el trabajo por tareas de rutinas apoyar al trabajo por proyectos? La experiencia señala que, más que mostrar a los futuros profesores todas las cualidades de los métodos nuevos, se les debe ayudar a relacionar las nuevas maneras de hacer con las antiguas, de forma tal que también se incluya la práctica según las antiguas maneras. En los textos no hay nada que muestre a los profesores cómo coordinar lo antiguo y lo nuevo en una totalidad [...] De esta forma se pide a los profesores [...] que empiecen a practicar de un modo completamente nuevo. (Mellin-Olsen, 1995, p. 152)

Leinhardt (1988) va más allá, argumentando que se ha pedido a los profesores que abandonen su experiencia práctica, construida a lo largo de muchos años; experiencia que les permite manejar la enseñanza en el aula con agilidad y seguridad. Por ejemplo, en una publicación anterior del NCTM, esta autora destaca una característica clave de la práctica docente de profesores de matemáticas muy efectivos, dentro del antiguo paradigma de la enseñanza directa:

La noción de guión surgió de la investigación que intentaba mostrar de qué forma los profesores diagnosticaban y respondían a los errores de los alumnos en sesiones de tutoría [...] Cada profesor se ocupaba de un conjunto limitado de acciones o decisiones de enseñanza específicas. Estas acciones incluían reconducir el ciclo de enseñanza a *través de explicaciones y la construcción de contextos para las decisiones de los estudiantes, pero no solían incluir la construcción de modelos para representar la forma de pensamiento del alumno en relación con el problema. Si se supone que los profesores deben diagnosticar, ¿por qué no construían estos modelos del alumno como aprendiz tal y como era de esperar? La respuesta es que construyeron modelos, pero de forma distinta a la que habíamos anticipado. Los construyeron en términos de cómo debería enseñarse el tema la próxima vez. Parece que los profesores construyen banderas para su propio uso, banderas que les indican los materiales que presentarán dificultades al ser aprendidos, y luego ajustan su enseñanza del tema como respuesta a esas banderas o basándose en éxitos pasados, en lo que funcionó con anterioridad. Parece que diagnostiquen su enseñanza y el ciclo de la misma, más que diagnosticar la representación mental de un estudiante concreto. Un objetivo primordial de la enseñanza parece ser el de seguir un guión, haciendo únicamente ajustes modestos, sobre la marcha, como respuesta a las necesidades particulares de los alumnos. De esta forma, una lección dada por un profesor eficaz, que lleva muchos años enseñando, contiene, esencialmente, capas de conocimiento acumulado sobre el tema y sobre cómo enseñarlo. Este conocimiento es flexible en un sentido acumulativo, pero es, en cierto modo, menos flexible en un sentido inmediato o local.* (Leinhardt, 1988, pp. 52-53)

Ciertamente, los implicados en la reforma han reconocido:

[...] la complejidad de la tarea de evaluación que afrontan los profesores, minuto a minuto, al intentar contactar con las formas de pensar del alumno en relación con un problema o con una situación. [...] Los alumnos no están necesariamente haciendo lo que los profesores asumimos que hacen. Para mayor dificultad, los alumnos a menudo son imprecisos en sus esfuerzos por contarnos lo que están haciendo[...] Somos muy conscientes de que algunos lectores pueden pensar que obtener el tipo de información que buscamos, acerca de las formas básicas de pensamiento de los alumnos, no es tan sólo difícil, sino que resulta imposible. [...] Pero cuando se trabaja con profesores que deciden grabar sus clases en vídeo [...] parece claro que los cambios en los procedimientos de enseñanza, de hecho, dan resultado. Los profesores también se vuelven más analíticos al reflexionar sobre las clases que han dado recientemente. Darse cuenta de que un alumno puede estar pensando acerca de una situación de modo distinto al que el profesor espera es, en sí mismo, algo con mucho poder. (Maher y otros, 1992, pp. 250, 259)

Lecciones a partir de la experiencia inglesa de reforma sistémica

Principios para un sistema de evaluación nacional

Para explorar las realidades de un sistema de reforma amplio, voy a basarme en la experiencia inglesa. Desde la publicación del Informe Cockcroft (1982), numerosos desarrollos curriculares y de evaluación han seguido las grandes directrices para la enseñanza y la evaluación identificadas en los documentos de reforma anteriormente mencionados. Estos desarrollos curriculares fueron institucionalizados a escala nacional con la introducción de un currículum nacional en 1989 y de un sistema de evaluación nacional, en 1992, para las edades de 7, 11, 14 y 16 años. En particular, idear un *sistema nacional de evaluación* —para inglés, ciencias y otras asignaturas entre las que se incluían las matemáticas— hizo necesario transformar los amplios principios de evaluación en prácticas de evaluación específicas, viables a escala nacional:

> *Cualquier sistema de evaluación debería satisfacer ciertos criterios generales. En relación con la evaluación nacional, damos prioridad a los cuatro criterios siguientes:*
>
> - *Los resultados de la evaluación deberían proporcionar información directa acerca de los logros de los alumnos en relación con los objetivos: deberían hacer* referencia a criterios.
> - *Los resultados deberían proporcionar una base para las decisiones acerca de las posteriores necesidades de aprendizaje de los alumnos: deberían ser* formativos.
> - *Las notas o las proporciones deberían poder compararse entre clases y entre escuelas, dado que los profesores, los alumnos y los padres han de poder compartir un lenguaje común y unos estándares comunes: por tanto, la evaluación debería ser calibrada y* arbitrada.
> - *La forma de establecer y utilizar los criterios y la puntuación debería estar relacionada con las expectativas de desarrollo educativo, permitiendo cierta continuidad a la evaluación de un alumno en edades distintas: las evaluaciones deberían estar relacionadas con la* progresión.

¿Cómo se operativizaron estos principios? En el caso del *principio de referencia a criterios*, se formularon varios centenares de *informes de logros* para cubrir el currículum de matemáticas desde los 5 hasta los 16 años: por ejemplo, «interpretar diagramas estadísticos» o «calcular con fracciones, decimales, porcentajes o proporciones, según sea apropiado». En la práctica, estas frases, que eran bastante ambiguas, se operativizaron de forma más clara en las preguntas que aparecían en los exámenes nacionales.

El *principio de progresión* llevó a que estos informes de conocimiento se organizaran en cinco áreas, representando diferentes aspectos de las matemáticas —uso y aplicación de las matemáticas, números, álgebra, forma y espacio, y manipulación de datos—, dentro de una estructura por niveles, en la cual el nivel 2 representaba los conocimientos esperados de un alumno típico de 7 años, el nivel 4 los de un alumno de 11 años, los niveles 5/6 los de un alumno de 14 años y los niveles 6/7 los de un alumno de 16 años.

El *principio de la evaluación formativa* generó la expectativa de que los profesores actualizarían continuamente las evaluaciones de los alumnos hechas en clase, confrontándolas con este marco nacional, utilizando esta información para orientar su enseñanza. Se formuló formalmente a través de la petición a los profesores de que mantuvieran registros de esa evaluación para cada uno de los alumnos, guardando las pruebas que la evidenciaran.

El *principio de calibración* influyó en la organización de la evaluación sumativa de los alumnos en las edades indicadas anteriormente. En primer lugar, la evaluación sumativa de los alumnos hecha por los profesores, respaldada por las pruebas recogidas, podía arbitrarse dentro de la escuela y entre escuelas. En segundo lugar, esta evaluación podía compararse con los resultados de «tareas básicas de evaluación o de exámenes estándar» de todos los alumnos en las edades claves.

La evaluación dentro investigaciones de clase, abiertas y ampliadas

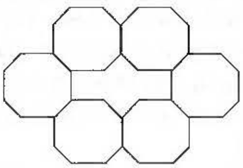
Examinemos con mayor detalle la puesta en práctica de este nuevo sistema de evaluación, relacionándolo tanto con los estándares del NCTM como con los principios expuestos anteriormente. La expresión más clara de las ideas base de los estándares del NCTM fue la inclusión en el curriculum y en el modelo de evaluación del uso y aplicación de las matemáticas, con la intención de que se extendieran al trabajo en otras áreas del currículum identificadas como *áreas de contenido matemático*. En un principio, esta área de *proceso* fue llamada *aplicaciones prácticas de las matemáticas*, ampliándose posteriormente, bajo la denominación *uso y aplicación de las matemáticas* en tareas prácticas, en problemas de la vida real, y para investigar dentro de las propias matemáticas.

Se creó una amplia gama de materiales para apoyar a los profesores en la implementación y evaluación del *uso y aplicación de las matemáticas*. Un ejemplo excelente es la investigación *anillos octogonales*, diseñada por el equipo responsable de la evaluación de los alumnos del primer ciclo de secundaria. La situación a investigar y la terminología apropiada para describirla se muestran en la hoja de trabajo del cuadro 1, en la que se pide a los alumnos que creen unos anillos relativamente simples de acuerdo

Cuadro 1. Anillos octogonales

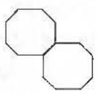
Construyendo anillos

Aquí tenemos un anillo octogonal.
Se construye uniendo baldosas octogonales.
Hay un *único* espacio en el centro del anillo.

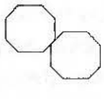


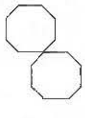
Reglas para unir las baldosas

Alinea exactamente las aristas.

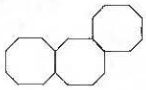


No son válidos ninguno de los siguientes:

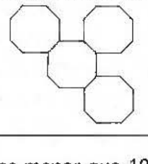




Asegúrate de que cada baldosa toque *sólo* a otras *dos*.



El siguiente ejemplo *no* es válido.

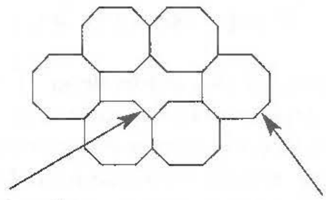


Haz algunos anillos. Puedes utilizar *cualquier* número de baldosas menor que 10. Intenta construir cinco anillos *distintos*.

Cuadro 2. Anillos octogonales

Observando modelos numéricos

6 baldosas



10 aristas interiores libres

26 aristas exteriores libres

Número total de aristas libres **36**

Antes de construir el próximo anillo, ¿puedes decir cuántas aristas libres tendrá?
Investiga

con unas condiciones determinadas. Las notas que la acompañan ofrecen al profesor una guía detallada de las dificultades que los alumnos pueden tener para entender la tarea e implicarse en ella y sugieren posibilidades para superarlas. Se indica que los alumnos pueden trabajar tanto individualmente como en grupos.

El tema clave de la investigación se muestra en la hoja de trabajo del cuadro 2, con notas incluidas que sugieren alternativas apropiadas y extensiones, tanto para alumnos con bajo rendimiento como para alumnos con rendimiento alto.

En cuanto a la evaluación, las notas aconsejan lo siguiente:

> *Los alumnos pueden demostrar sus logros de modos muy diversos a lo largo del desarrollo de la actividad. La mayor parte de las evidencias [del uso y aplicación de las matemáticas] serán efímeras. Por ejemplo, la evidencia de comunicación puede que sea oral y quizás el profesor necesite solicitar evidencias del razonamiento, puesto que los alumnos no están necesariamente acostumbrados a expresar su razonamiento con suficiente detalle. Se proporcionan listas para recordar a los profesores qué evidencias pueden buscar o pedir durante la actividad, y para proporcionarles un medio para recoger, durante las clases o justo después de ellas, las evidencias efímeras que se producen. [...] Al final de la actividad habrá una amplia gama de evidencias que contribuirán a la evaluación. Ésta incluirá los trabajos de los alumnos, y no únicamente comentarios de los alumnos sobre sus propios logros y notas del profesor sobre cualquier evidencia efímera. [...] Tomar en consideración todas estas evidencias ayudará a emitir juicios en relación con los informes de conocimiento que son relevantes para cada alumno.*

La hoja de trabajo del cuadro 3 (página 179), particularmente interesante, establece los informes de logros, formulados en el lenguaje de los alumnos, a partir de los cuales se les juzgará. En ella se muestran algunos informes relacionados con el *uso y aplicación de las matemáticas* y, en los cuadros 4 y 5 (página 180), informes relacionados con el *álgebra* y con *la forma y el espacio*. Este es un buen ejemplo de un intento riguroso por satisfacer el *estándar de apertura*, explicitando a los alumnos los criterios a partir de los cuales se va a juzgar su trabajo, y de satisfacer el *estándar de aprendizaje*, proporcionando un marco en el que profesor y alumnos pueden trabajar para desarrollar su comprensión de la situación problemática y de las ideas matemáticas que puedan llegar a surgir de ella.

Quedan claros los ideales que hay detrás de la oferta de tales recursos, pero también se observa que la implementación práctica de estos ideales implica una enorme dificultad. Tanto la inspección escolar como la evaluación oficial han establecido que este aspecto de la reforma ha tenido un pobre impacto en las aulas de los centros de primaria y secundaria. Respecto a primaria, los inspectores escolares informaron de que:

> *Aspectos tan importantes como el uso y aplicación de las matemáticas no se han desarrollado plenamente, debido a que los profesores de primaria no tenían formación ni experiencia directa previa. Muchos profesores asumieron que estos aspectos estaban automáticamente incluidos en todo lo que estaban haciendo, por lo tanto, su cobertura fue superficial.*

Respecto a secundaria:

> *Aproximadamente un tercio de las escuelas abordaron [el uso y la aplicación de componentes matemáticos] tal como se pretendía: como parte de todo el currículum matemático, impregnando, de un modo u otro, todas las actividades. Otro tercio empezó a tratar estos aspectos añadiendo a su currículum el trabajo a través de investigaciones, de la resolución de problemas y de actividades prácticas. El resto de escuelas ignoraron estos aspectos o creyeron erróneamente que estaban ya incluidos en lo que venían haciendo.*

La evaluación oficial informó de que los profesores tendían a interpretar el *uso y la aplicación de las matemáticas* de forma que encajaba con enfoques establecidos con anterioridad, presentando una necesidad de cambio mínima. Había, no obstante, importantes variaciones en la interpretación. En relación con primaria, generalmente se operativizaba en términos de tareas surgidas de alguna situación práctica, planteada por el profesor o surgida en el transcurso de las situaciones cotidianas del aula, tareas que frecuentemente requerían medir. En relación con secundaria, la operativización dominante se basaba en investigaciones matemáticas que podían llegar a conducir a una generalización algebraica.

Es importante reconocer también que tales investigaciones pueden llegar a ser tan rutinarias y estándares, como otras tareas matemáticas más consolidadas:

> *El panorama emergente, muestra a los alumnos activamente implicados en el desarrollo de ideas matemáticas [...] pero de una forma restringida, en la cual plantearse preguntas se ha convertido, en gran medida, en una rutina. Esta constatación [...] llama la atención sobre la emergencia de códigos informales alrededor del trabajo matemático del curso [...] A través de ejemplos prototípicos de actividades de investigación y de plantillas estandarizadas para desarrollarlas y hacer informes, tales códigos intentan hacer que el proceso de investigación sea algo más fácil de enseñar y de evaluar.* (Coe y Ruthven, 1994, p. 52)

Cuadro 3. Uso y aplicación de las matemáticas

Escoger y comprobar

1/3*a*	Encontré una forma de hacer el trabajo más fácilmente	
1/4*a*	Busqué un modelo. Anoté algunas respuestas para que me ayudaran a encontrar mi modelo.	
1/5*a*	Dividí mi trabajo en dos etapas.	
1/6*a*	Me planteé mis propias preguntas para intentar responder a la cuestión de los anillos octogonales.	

Comunicar

1/3*b*	He descrito mis anillos usando las palabras correctas.	
1/3*c*	Anoté de modo ordenado algunas de las cosas que encontré. *Por ejemplo*, anoté el número de baldosas que usé en mis anillos.	
1/4*b*	Organicé mis diagramas o mis números cuando presenté los resultados.	
1/5*b*	Presenté mis resultados de más de una forma. *Por ejemplo*, usé explicaciones y una tabla o un gráfico.	
1/6*b*	Mejoré mi propia descripción del trabajo o la del de alguien.	

Razonar

1/3*d*	He probado algunos anillos para ver si afirmaciones como «Siempre puedes hacer un anillo con un número par de baldosas» eran ciertas.	
1/4*c*	He dado argumentos sobre algo que encontré.	
1/4*d*	He hecho una afirmación general acerca de algo que encontré.	
1/5*c*	He hecho una afirmación general acerca de algo que encontré y que comprobé que era cierto.	
1/6*c*	He descrito una regla general para uno de mis modelos numéricos y he explicado por qué estoy seguro de que la regla es cierta.	

Cuadro 4. Álgebra

3/4*a*	Descubrí un modelo numérico y lo describí. *Por ejemplo,* he descrito cómo encontrar el siguiente número de aristas libres.	
3/4*b*	He descrito una conexión entre los hechos usando una fórmula en palabras. *Por ejemplo,* he usado aristas libres y baldosas en una fórmula.	
3/5*a*	He hecho algunos anillos octogonales registrando el número de baldosas y de aristas libres que usé. Lo hice para ayudarme en la búsqueda de modelos numéricos.	
3/5*b*	He descrito una conexión entre los hechos usando símbolos. *Por ejemplo,* he usado símbolos para mostrar la relación entre el número de baldosas y el número de aristas libres.	
3/6*a*	He explorado un modelo numérico. *Por ejemplo,* he intentado encontrar una relación entre el número de baldosas y el número de aristas interiores.	

Cuadro 5. Forma y espacio

4/3*b*	He encontrado algunas formas o anillos que tienen un eje de simetría.	
4/4*a*	He hecho distintos anillos. He usado términos matemáticos para describir algunas de las formas que he hecho.	
4/4c	He encontrado algunas formas o anillos con simetría central.	
4/4*d*	He encontrado el área interior de un anillo contando. O He medido un perímetro.	
4/5*b*	He usado lo que sé sobre los octógonos para ayudarme a explicar algo que encontré.	

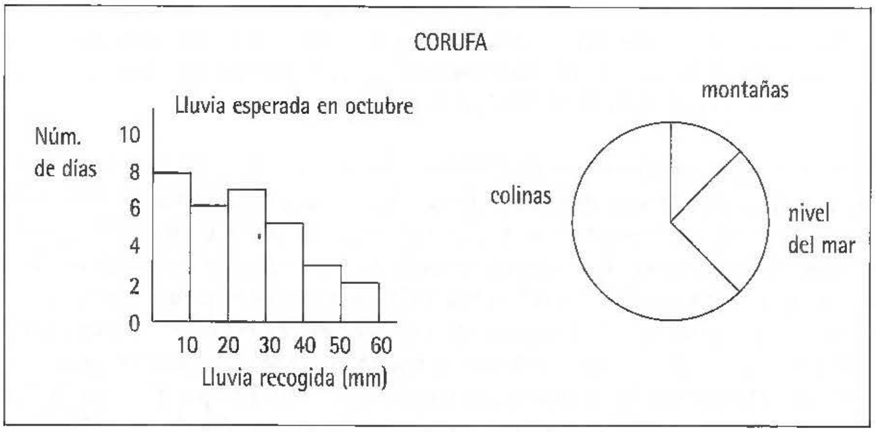
La contextualización de los problemas, referencia a criterios y progresión de los alumnos

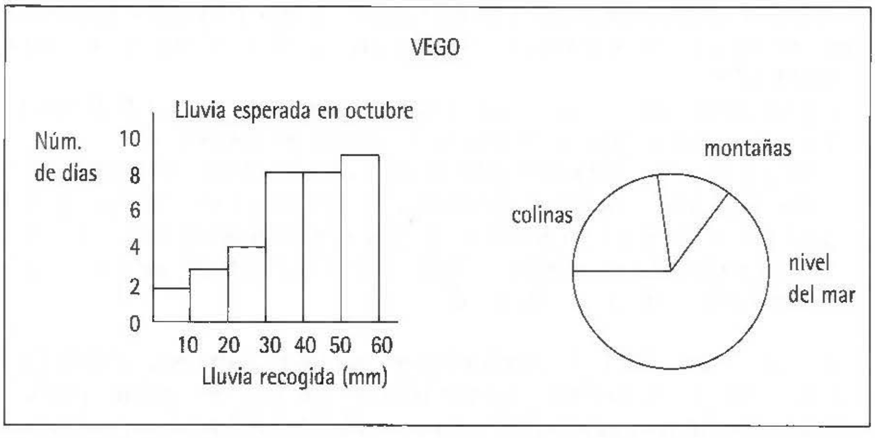
El formato de las pruebas nacionales ha constituido una de las influencias más significativas sobre la práctica docente. Consideremos dos ítems, de nuevo diseñados por el equipo responsable de la evaluación de los alumnos del primer ciclo de secundaria, correspondientes a los informes de logros citados anteriormente: «interpretar diagramas estadísticos» —en el cuadro 6— y «calcular con fracciones, decimales, porcentajes o proporciones, según sea apropiado» —en el cuadro 7. Ambos ilustran algunas de las tensiones que surgen en el diseño de ítems para una prueba en la nueva evaluación.

Tomemos, en primer lugar, *las vacaciones en bicicleta* (cuadro 6). Este ítem requiere habilidades de lectura relativamente desarrolladas; generando tensión entre, por una parte, contextualizar el problema para satisfacer la dimensión de la *vida real*

Cuadro 6. Vacaciones en bicicleta

Nikos y Sharon planean hacer unas vacaciones en bicicleta en octubre y están intentando escoger dónde ir. Tienen la siguiente información:





Escoge el lugar al que preferirías ir a pasar unas vacaciones en bicicleta. Usa los dos diagramas de frecuencia y las dos gráficas de sectores para justificar tu elección. El lugar escogido no importa pero debes escribir algo sobre la lluvia esperada *y* el tipo de carreteras.

de los *estándares matemáticos* y, por otra, satisfacer el *estándar de inferencia* —e indirectamente *el de equidad*— que requiere que la respuesta al ítem no esté excesivamente supeditada a la habilidad de lectura.

En segundo lugar, el ítem presupone que el alumno tiene ciertos conocimientos acerca del mundo de las vacaciones, del ciclismo y de los distintos tipos de carreteras, conocimientos más probables en alumnos de ciertos grupos sociales; aspectos que indican, de nuevo, una tensión entre autenticidad y equidad.

En tercer lugar, la última frase presenta explícitamente de qué forma van a ser juzgadas las respuestas, y el esquema de corrección confirma que una respuesta se juzgará correcta sólo si:

> *Muestra una* comprensión *de la pauta general de los datos en ambas gráficas de sectores y en ambos diagramas de frecuencia, exponiendo las razones por las cuales se prefiere un determinado lugar, por ejemplo, «En Corufa hay muchas colinas pero es menos probable que haya fuertes lluvias», «Vego es menos montañoso pero el clima es más lluvioso.» Es aceptable mencionar uno de los dos lugares si la respuesta muestra que el alumno ha considerado los datos del otro lugar, por ejemplo, «Escogería Corufa porque llueve menos y no me importa que haya más colinas.»*

Parece, pues, que las respuestas del tipo «Iría a Corufa ya que es posible que en Vego la mayoría de los días llueva con gran intensidad, y esto es mucho más importante que el tipo de carretera» no se admiten: una respuesta al problema realista y razonable resulta inaceptable porque considera innecesaria la información de las gráficas de sectores y, por ello, declina realizar su interpretación *matemática* (al contrario de lo que sucede en el supermercado de Jean Lave en el que los vendedores encuentran un sinfín de maneras para decidir cuáles van a ser las *mejores compras* sin calcular directamente). Existe, pues, una tensión entre, por una parte, la abertura del juicio y el diagnóstico del pensamiento matemático y, por otra, la autenticidad de la tarea y la equidad de trato. Así, este ítem ilustra la importancia de las tensiones que pueden surgir en la práctica entre los principios incluidos en los estándares del NCTM.

Vayamos a los *descuentos en las zapatillas de deporte* (cuadro 7). El esquema de corrección especifica que una respuesta se considerará correcta si:

> *Indica que la tienda de deportes de Brian vende hoy las zapatillas de deporte más baratas* y *muestra un trabajo que indique que un precio con una reducción de 1/3 es más barato que el mismo con un descuento del 30%, afirmando, por ejemplo, que 1/3 es un 33%, 33,3% o 33 1/3 % o inventando un precio para las zapatillas y calculando un descuento del 30% y una reducción de 1/3.*

Un aspecto importante es la insistencia en que los alumnos muestren su trabajo. Por supuesto, esto es necesario porque el ítem exige una elección que podría ser simplemente aleatoria, escogiendo entre dos posibles tiendas sin decir, por ejemplo, qué tienda ofrece el precio más barato. En este caso, el problema está en que los alumnos pueden calcular mentalmente y en que, de hecho, es bastante difícil explicar matemáticamente, de forma explícita y sucinta, el proceso de cálculo. Supongamos, por ejemplo, que un alumno razone de este modo: «Un descuento del 30% sig-

Cuadro 7. Zapatillas de deporte

Dos tiendas venden las mismas zapatillas deportivas al mismo precio.
Hoy ambas tiendas están de rebajas.
Cada tienda tiene una oferta distinta en las zapatillas de deporte.

La tienda de deportes de **Jane**	La tienda de deportes de **Brian**

Zapatillas de deporte Descuento **30%**	Zapatillas de deporte Descuento en **1/3 del precio**

¿Qué tienda vende hoy las zapatillas de deporte más baratas?
Muestra tu trabajo.

nifica 30 libras esterlinas de 100; un descuento de 1/3 significa 1 libra esterlina de 3, es decir, 10 libras esterlinas de 30, que son 30 libras esterlinas de 90, que sería más que 30 libras esterlinas de 100; por tanto, 1/3 es un descuento mejor».

Por otra parte, la autenticidad y la equidad, en concreto el *principio de apertura* hacia soluciones alternativas, fomentan que se dé una puntuación máxima al alumno que proporcione una solución funcionalmente adecuada, sea de la forma que sea, tal y como establece el correspondiente esquema de corrección. De hecho, los estudiantes que han seguido procesos complejos para calcular el 30% y 1/3 de un precio inventado han trabajado mucho más duro que uno que simplemente haya hecho una comparación directa entre el 30% y 1/3. No obstante, de acuerdo con las consideraciones evolutivas del *estándar de aprendizaje*, es importante convencer a los estudiantes –y a sus profesores– de la importancia de adquirir la capacidad de generar la solución más directa; por este motivo podría argumentarse que la solución directa debería puntuarse más. Ciertamente, en Inglaterra, una interpretación de las matemáticas predominantemente funcional, combinada con el énfasis en que los alumnos puedan escoger las estrategias, ha desembocado en que algunos profesores se inhiben en el momento de intervenir para ayudar a los alumnos a desarrollar métodos más directos y eficientes.

Aparecieron considerables problemas en la implementación del *principio de referencia a criterios*. Los alumnos no tenían una actuación consistente, incluso en ítems de examen aparentemente paralelos con recursos disponibles similares. Por ejemplo, en el examen nacional de 1992 que realizaron los alumnos de 14 años, el 53% de ellos respondió correctamente el ítem de las *vacaciones en bicicleta* y un 54% un ítem paralelo de un *estudio medioambiental*, no obstante, sólo el 34% de ellos respondió correctamente ambos ítems. De modo parecido, el 46% de ellos acertaron en el ítem del *descuento en las zapatillas de deporte* y el 44% en uno parecido sobre una *colecta para caridad*, pero sólo un 31% de alumnos dieron una respuesta correcta en ambos.

Los profesores también tuvieron problemas para emitir juicios sumativos en cuanto a los informes de logros. Los inspectores informaron de que una de las principales preocupaciones de los profesores estaba relacionada con el significado de los informes de logros y cómo y en base a qué podían hacer evidente a través de ellos el producto de un alumno para que éste pudiese juzgar por sí mismo si dominaba dicho conocimiento. A menudo, las múltiples fuentes de evidencia que los profesores tenían a su disposición entraban en conflicto y, como consecuencia, eran reducidas a términos bastante generales como *trabajo desarrollado*, *cierto nivel de comprensión* y *dominio*.

Aparecieron problemas parecidos a la hora de cuantificar los logros de los alumnos. Esencialmente, el esquema de actuación de los alumnos en el examen no se correspondía ni con el modelo de progresión sugerido por la estructura por niveles ni con el sentido común del modelo de enseñanza y aprendizaje sobre el que se basaba. Como consecuencia, cuando se agruparon los perfiles de los alumnos para asignar un nivel de logros, se vio que el resultado de muchos alumnos dependía en gran parte del criterio de agrupación adoptado. Los profesores con experiencia tenían menos problemas en este punto: tendían a interpretar las evidencias de que disponían, de forma justificable o no, para que se correspondieran con la jerarquía por niveles. En efecto, la evaluación realizada por los profesores resultó estar influida por la evaluación global del *nivel de habilidad* del alumno. Estos problemas se analizan con mayor detalle en otro documento (Ruthven, 1995).

En vista de las dificultades manifiestas, de la inquietud política y pública y de las abrumadoras demandas de los profesores, la evaluación nacional y la evaluación realizada por los profesores ha evolucionado, pasando a ser un modelo de desempeño y progresión esencialmente referenciado por normas.

Lecciones que hay que aprender

En el caso inglés, pues, la función sumativa del sistema de evaluación formal –con su insistencia en juicios simples que puedan ser aceptados como consistentes y generalizables– ha triunfado sobre la función formativa –que requiere una evidencia mucho más detallada, pero acepta su carácter, a menudo, conjetural y efímero. No obstante, ahora tenemos poderosos ejemplos de lo que es posible en el aula cuando se apoya a los profesores para desarrollar enfoques bien concebidos. De igual modo, ahora está claro que nos enfrentamos al reto de diseñar tareas de evaluación que tengan en cuenta, de forma apropiada, una amplia gama de principios de evaluación. Sin embargo, este reto no es insuperable ya que se ha aprendido mucho del trabajo pionero desarrollado, a pesar de que sigue siendo necesario comprender mejor cuáles son los requisitos para hacer que estos principios sean una práctica de evaluación viable. Según mi punto de vista, la experiencia inglesa no nos proporciona ningún argumento para abandonar los ideales de la reforma de la evaluación, pero resulta una fuerte advertencia respecto a la importancia de reconocer honestamente las tensiones que se originan al ponerlos en práctica y de prestar atención a la realidad tanto de las expectativas de la comunidad educativa, y de la sociedad en general, como de la práctica en las aulas.

Referencias bibliográficas

COCKCROFT, W.H. (1982): *Mathematics Counts. Report of the Committee of Enquiry into the Teaching of Mathematics in School under the Chairmanship of Dr. W.H. Crockcroft.* Londres. Her Majesty Stationery Office.

COE, R.; RUTHVEN, K. (1994): «Proof Practices and constructs of Advanced Mathematics Students». *British Educational Research Journal,* n. 20(1), pp. 41-53.

LESH, R.; LAMON, S. (1992): *Assessment of Authentic performance in School Mathematics.* Washington, DC. AAAS Press.

LEINHARDT, G. (1988): «Expertise in Instructional Lessons: An Example from Fractions», en GROUWS, D.; COONEY. T. (eds.). *Effective Mathematics Teaching.* Reston, Virginia. NCTM.

LITTLE, C. (1993): «The School Mathematics Project: Some Secondary School Assessment Initiatives in England», en NISS, M. (1993) (ed.): *Cases of Assessment in Mathematics Education.* Dordrecht. Kluwer Academic Publishers.

MAHER, C.; DAVIS, R.; ALSTON, A. (1992): «A Teacher's Struggle to Assess Student Cognitive Growth», en LESH, R.; LAMON, S. (1992): *Assessment of Authentic Performance in School Mathematics.* Washington, DC. AAAS Press.

MELLIN-OLSEN, S. (1993): «A Critical View of Assessment in Mathematics Education: Where is the Student as Subject?», en NISS, M. (1993) (ed.): *Investigations into Assessment in Mathematics Education.* Dordrecht. Kluwer Academic Publishers.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (1995): *Assessment Standards for School Mathematics.* Reston, VA. NCTM.

NEWMAN, D.; GRIFFIN, P.; COLE, M. (1989): *The Construction Zone: Working for Cognitive Change in School.* Cambridge. Cambridge University Press.

NISS, M. (1993*a*): «Assessment in Mathematics Education and Its Effects: An Introduction», en NISS, M. (1993) (ed.): *Investigations into Assessment in Mathematics Education.* Dordrecht. Kluwer Academic Publishers.

NISS, M. (1993*b*) (ed.): *Investigations into Assessment in Mathematics Education.* Dordrecht. Kluwer Academic Publishers.

NISS, M. (1993*c*) (ed.): *Cases of Assessment in Mathematics Education.* Dordrecht. Kluwer Academic Publishers.

RUTHVEN, K. (1994): «Better Judgement: Rethinking Assessment in Mathematics Education». *Educational Studies in Mathematics. Special Issue on Assessment,* n. 27 (4), pp. 433-450.

RUTHVEN, K. (1995): «Beyond Common Sense: Reconceptualizing National Curriculum Assessment.» *The Curriculum Journal,* n. 6(1), pp. 5-28.

Visión de futuro

11

Implicaciones para el cambio

Núria Gorgorió
Universitat Autònoma de Barcelona (España)
Alan Bishop
Monash University (Australia)

Hacia la democratización de la educación matemática

La sociedad actual requiere de sus ciudadanos conocimientos matemáticos distintos y mayores que los que requería en un pasado inmediato. Los profesionales implicados en la educación matemática de los jóvenes tienen ante sí nuevos retos. Para aquellos preocupados por cuestiones relacionadas con la democracia, el mayor reto es, posiblemente, el de encontrar cómo proporcionar una educación matemática válida para el mayor número posible de ciudadanos. La necesidad de democratizar la educación matemática está presente, de forma más o menos explícita, en las contribuciones de varios de los autores de este libro y fue tema de discusión a lo largo de las reuniones y seminarios celebrados durante el TIEM. Por otra parte, en el año 2000, declarado *Año Mundial de las Matemáticas* por la UNESCO a propuesta de la UMI (Unión Matemática Internacional), gran parte de la comunidad de educación matemática, se plantea si la educación matemática que las instituciones educativas ofrecen hoy por hoy responde a las necesidades de la sociedad a cuyos jóvenes se dirige.

En primer lugar, debemos exponer qué significado otorgamos a la expresión una educación matemática válida para el mayor número posible de ciudadanos, ya que corresponde a un aspecto siempre presente, aunque raramente explicitado, en los debates relacionados con la formación matemática de los jóvenes.

Democratizar el conocimiento matemático y hacer que la educación matemática sea accesible al mayor número posible de jóvenes ha sido uno de los objetivos de la UNESCO. Dicho objetivo se ha reflejado ampliamente en congresos y publicaciones, por ejemplo, ya en 1984, en el ICME V, se desarrolló un importante grupo de trabajo que, con el nombre Matemáticas para Todos, dio lugar a una publicación útil e interesante (Damerow y otros, 1984). Siguiendo en la misma línea, en el ICME VI, en 1988 se dedicó un día entero al tema *Matemáticas, educación y sociedad* que aportó puntos de vista nuevos e importantes en relación con la democratización de la educación matemática (véase Keitel y otros, 1989). En una publicación posterior de la UNESCO (Bishop y otros, 1993), en la misma perspectiva, se analizan las influencias significativas en el aprendizaje matemático de los alumnos. Un último ejemplo de las publicaciones de la UNESCO en esta línea es la excelente publicación de Clements y Ellerton (1996), en la que se analiza la situación desde una perspectiva no eurocentrista. En todos estos trabajos aparece como fondo común el objetivo de la democratización de la educación matemática.

Parece que las matemáticas sean un contenido curricular a través del cual puede justificarse la selección de élites. Quizás sea la naturaleza abstracta y el poder generalizador de las matemáticas lo que permite a algunos alumnos, aquellos para quienes los procesos del pensamiento matemático resultan fáciles, progresar rápidamente. O quizás sea la forma en que las matemáticas se han utilizado, y siguen utilizándose, en los procesos de selección para el acceso a la universidad y, como consecuencia, para posiciones de más prestigio en la sociedad, lo que ha hecho de ellas un instrumento de selección. Junto a estos factores, la incapacidad que muchos adultos sienten frente a las matemáticas, además de la invisibilidad de su utilidad en el mundo laboral y en la participación en la sociedad, hacen que la cultura matemática se considere patrimonio de unos pocos e innecesaria para la mayoría.

Sea cual sea el motivo por el cual la formación matemática de nuestros alumnos se ha convertido en instrumento de selección, superar la imagen elitista de la cultura matemática representa un reto añadido para aquellos profesionales convencidos de la necesidad de una educación matemática para todos. Por otra parte, el futuro de nuestra sociedad depende de la calidad de la educación que proporcionemos a nuestros alumnos. A nuestro entender, uno de los mayores retos de nuestra comunidad profesional es el de luchar contra la ignorancia, democratizando el conocimiento matemático sin el cual una gran parte de nuestros jóvenes están en franca desventaja frente a una sociedad cambiante.

Los responsables del proceso de educación matemática de nuestros jóvenes podríamos eludir dicho reto, argumentando que el problema radica en la materia, en los alumnos o en el propio sistema educativo. Sin embargo, consideramos como parte de nuestras obligaciones incidir en todos los procesos encaminados a su superación, actuando desde distintos niveles. En primer lugar, debemos actuar en el ámbito del currículum y de su implementación, incidiendo en las formas de enseñar y en el replanteamiento del significado de la educación matemática. En segundo lugar, creemos que nos corresponde el derecho y el deber de incidir en la política educativa, que determina las posibilidades y limitaciones del contexto en que nos movemos. Finalmente, desde el ámbito de la investigación en educación matemática, conseguir que los estudios teóricos tengan significatividad y aplicabilidad en la práctica es también una responsabilidad ineludible.

Las propuestas de cambio elaboradas a partir de los esfuerzos conjuntos deberían ser atendidas por la administración educativa y los políticos que la definen. La responsabilidad corresponde también a aquellos, que ocupando posiciones de poder, continúan apoyando el mito de que las matemáticas son una materia sólo para algunos. Atender las propuestas encaminadas a la democratización de la educación matemática requerirá, en muchos casos, modificar estructuras consolidadas y abandonar tradiciones, muchas veces implícitas. Por lo tanto, profesores e investigadores tenemos planteado otro reto que proviene del compromiso social que tenemos como enculturadores matemáticos: el de intentar modificar los puntos de vista de los responsables de la política educativa y de aquellos con poder para cambiarla, fomentando, impulsando y exigiendo los cambios que pensemos que revertirán en la democratización que propugnamos.

En nuestro país, la democratización de la educación se concreta en la implementación del nuevo sistema educativo, resultado de la aplicación de la reforma promulgada por la LOGSE, que regulariza la educación obligatoria para todos los jóvenes hasta los 16 años. En este contexto, y desde el punto de vista de la educación matemática, empieza a ser alarmante que algunas voces públicas proclamen su miedo a que los estudiantes no aprendan las matemáticas que deberían si se sigue en la línea iniciada por la reforma. Las reacciones al miedo y a la insatisfacción de algunos toman distintas formas, por ejemplo, la agrupación de alumnos por niveles o los créditos variables que dejan de serlo. En este marco y partiendo de que la educación secundaria obligatoria está destinada a la globalidad de la población juvenil y que, por lo tanto, tiene carácter terminal y no propedéutico, queremos presentar algunas de las reflexiones generadas a lo largo del desarrollo del TIEM que pueden servir de base para las reflexiones y el debate en relación con la educación matemática.

Algunos miembros de nuestra sociedad y, más en concreto, los padres y los profesores implicados en la enseñanza secundaria post-obligatoria y universitaria, afirman estar realmente preocupados por lo que llaman *descenso del rendimiento matemático* de nuestros jóvenes. Desde nuestro punto de vista, gran parte de esta preocupación surge de la discrepancia entre lo que los alumnos saben y lo que pueden hacer al iniciar el bachillerato y lo que sus profesores quieren enseñarles. Esta discrepancia puede ser el resultado de olvidar el carácter global y terminal de la educación obligatoria, interpretándola únicamente como una fase previa y preparatoria para el Bachillerato, perdiendo así de vista aquellos alumnos que dejarán la escuela o seguirán otras vías de formación independientes de las dirigidas a la universidad.

Sin lugar a dudas, si se interpreta la secundaria obligatoria únicamente como una etapa en el proceso hacia estudios superiores, se cree en la validez de las pruebas de acceso a la universidad, y se analizan los resultados en matemáticas en dichas pruebas, la única conclusión a la que se puede llegar es que *los niveles están bajando.* Sin embargo, este planteamiento nos parece excesivamente simple. En primer lugar, no puede olvidarse el carácter global de la educación secundaria obligatoria. Además, tal como analizamos a lo largo de este capítulo, la educación matemática que contemple las diversidades de nuestros alumnos, diversidad social y cultural, diversidad de metas y expectativas, y diversidad de capacidades e intereses, aunque difícil, no es un reto inalcanzable.

Por otra parte, pensando en aquellos alumnos que continuarán sus estudios hacia carreras universitarias, es necesario revisar la validez de los contenidos y procedimientos que se enseñan en el Bachillerato y la de las pruebas de acceso a la universidad. ¿Deberíamos replantearnos la significatividad y aplicabilidad de las matemáticas que se enseñan en el Bachillerato, estableciendo un nuevo significado para esta materia? ¿Deberíamos cuestionarnos el valor del tipo de conocimientos que evalúan las pruebas de acceso a la universidad? ¿Evalúan la utilización del conocimiento, el pensamiento crítico y el razonamiento que son necesarios a los alumnos que cursan estudios universitarios?

A pesar de que nuestro interés en este capítulo se centra en la educación obligatoria, queremos hacer una reflexión en relación con las pruebas de acceso a la universidad ya que condicionan en gran medida lo que sucede en las etapas educativas anteriores. La valoración del alumnado a través de pruebas como las de acceso a la universidad da por supuesto que existe una única forma de conocimiento matemático y que este conocimiento matemático puede evaluarse a través de dicho tipo de pruebas. De esta forma se olvida que la investigación en el campo de la psicología del aprendizaje matemático y en el campo de la educación matemática ponen de manifiesto la existencia de distintos tipos de conocimiento. ¿Un rendimiento alto en las pruebas de selectividad garantiza la capacidad del alumno de aplicar de forma pertinente sus conocimientos matemáticos en situaciones nuevas? La investigación está demostrando también que algunos alumnos con un nivel de éxito muy alto en pruebas de este estilo no son capaces de utilizar sus conocimientos en situaciones no usuales más complejas. Este tipo de pruebas evalúan, generalmente, conocimientos inertes, con lo cual su superación con éxito no garantiza que el alumno sea capaz de relacionarlos entre sí o aplicarlos a situaciones nuevas. La investigación demuestra también que el éxito en este tipo de pruebas está altamente relacionado con los estilos de enseñanza vividos. Volveremos a la cuestión de aplicabilidad y capacidad de generalización de los conocimientos en el apartado en que proponemos una revisión del currículum y de su implementación.

Para que la implementación del nuevo sistema educativo abra realmente posibilidades para la democratización de la educación matemática son necesarios cambios. En particular, son necesarios cambios en relación con los contenidos curriculares y con su implementación, tanto en la etapa obligatoria como en las etapas posteriores. Sin embargo, estos cambios no pueden iniciarse sin que tenga lugar un debate social sobre el significado de *saber matemáticas* en la sociedad actual, y sobre qué matemáticas se espera que sepan los ciudadanos del futuro. En este debate, deberían estar representados los profesionales relacionados con las matemáticas y su enseñanza, incluyendo los investigadores en ambos campos, profesionales de la educación en general, la administración educativa, y representantes de la sociedad. En las discusiones, las opiniones de maestros, profesores, matemáticos e investigadores en educación matemática deberían ser escuchadas por igual. No hay ninguna razón para afirmar que los matemáticos universitarios tengan opiniones más respetables que los profesores, o los investigadores en educación matemática, sobre qué matemáticas hay que enseñar y cómo hacerlo. Este debate debería ir acompañado de otro paralelo en el seno de la comunidad de profesionales implicados en la educación matemática, en el que se plantease qué respuesta podemos y estamos dispuestos a dar a las demandas sociales, teniendo en cuenta las limitaciones del contexto en que se desarrolla nuestra actividad profesional.

La naturaleza cambiante de las propias matemáticas como ciencia, los avances tecnológicos y las necesidades de una sociedad cada vez más diversa nos llevan a la necesidad de replantearnos los objetivos de la educación matemática. Debemos analizar, en particular, las responsabilidades de los profesionales directamente implicados en la consecución de dichos objetivos, tanto respecto a la docencia como respecto a la investigación. Tampoco podemos olvidar las responsabilidades de la administración educativa que establece los límites de lo que es posible, permitiendo dar respuesta a las necesidades de la sociedad quien, en definitiva, determina lo que es deseable.

Revisando algunos mitos

En este apartado, revisamos algunos de los mitos que dificultan o interfieren en el proceso de democratización de la educación matemática. En primer lugar, revisamos el mito generado por la *cultura del utilitarismo* que, junto con la *invisibilidad de las matemáticas* en el desarrollo de las prácticas laborales, conduce a una interpretación simplista del significado del conocimiento matemático necesario para los ciudadanos adultos, reduciéndolas a habilidades rutinarias en el desarrollo de algoritmos numéricos. En segundo lugar, revisamos el *mito del déficit cognitivo*, mito implícito en el pensamiento y actuación de profesorado, alumnado, padres y de la sociedad en general, que interfiere en gran medida con la idea de democratización de la educación matemática.

La idea de la democratización matemática es una idea presente en reformas iniciadas en otros países hace ya bastante tiempo, bajo el lema de la *alfabetización numérica*. Sin embargo, los autores de este capítulo preferimos el término alfabetización matemática ya que mantiene la idea de *alfabetización* en su profundo significado, sin restringir la noción de matemáticas. Por ejemplo, ya en el informe Cockcroft (1982), se pretende una definición más amplia que las existentes hasta el momento del concepto *alfabetización numérica*. En su formulación hay un intento de ampliar el concepto, que incluiría, además de la competencia en los algoritmos numéricos, la necesidad de *dar sentido a los problemas numéricos* (Straker, 1997, p. 4). Sin embargo, la revisión del concepto propuesta por el informe Cockcroft sigue basándose en aspectos relacionados con la aritmética básica. La noción de *alfabetización numérica* centra la atención en su raíz *números*, mientras que durante más de dos milenios las matemáticas han sido bastante más que números.

La pregunta que nos planteamos ante el interés internacional hacia la alfabetización numérica es la siguiente: ¿Cuáles son las razones teóricas y prácticas que han llevado a restringir la idea de alfabetización matemática convirtiéndola en alfabetización numérica? Creemos que en esta simplificación hay implícita una representación del significado de las matemáticas incluida en los supuestos culturales que la enmarcan, la *cultura de la utilidad*. Deben enseñarse matemáticas en la medida en que son necesarias para *la vida adulta y el mundo del trabajo*. Si esto debe ser así, surgen inevitablemente distintas preguntas: ¿Útil a quién? ¿Para qué? Análogamente, si la definición de utilidad se basa en lo que ocurre en las prácticas laborales, es legítimo preguntarse en qué sentido éstas han cambiado y hacia qué dirección. Quizás deberíamos preguntarnos también hasta qué punto las matemáticas del mundo laboral resultan *visibles*, en el sentido de que su presencia o ausencia está clara para el que las utiliza.

En los últimos años la estructura del mercado de trabajo ha cambiado radicalmente, los modelos demográficos, las prácticas laborales y las habilidades requeridas se han transformado en algo muy complejo. A pesar de ello, aparentemente, sigue siendo cierto que, son muchas las personas que no utilizan las matemáticas en su vida laboral o como ciudadanos adultos. Sin embargo, la situación no es tan simple como parece tal como se observa en los numerosos estudios que analizan las matemáticas necesarias para el desarrollo de distintas actividades profesionales. Por ejemplo, Harris (1991), en un estudio detallado de los problemas matemáticos que deben solucionarse en distintas situaciones laborales, muestra que existe una gran variedad de actividades matemáticas que aparecen en la vida laboral, aunque los que las utilizan no las acepten como matemáticas. De manera semejante, Wolf (1984) pone de manifiesto que los individuos se niegan a aceptar que usen matemáticas en su práctica laboral, aunque un observador externo pueda identificarlas como tales. Podríamos afirmar que las matemáticas del adulto no son siempre *visibles*, aunque subyazcan en las distintas prácticas laborales, sociales y culturales.

De la visión utilitarista de las matemáticas surge una primera paradoja. Si se analiza únicamente la superficie de las actividades laborales relacionadas con la aritmética, se encuentran sólo vestigios de matemáticas. De ahí puede concluirse que las necesidades matemáticas de un adulto son insignificantes cuantitativamente y triviales cualitativamente. Si se acepta que las necesidades matemáticas de la vida laboral son simples, entonces se genera un círculo vicioso: a medida que las matemáticas de la vida laboral se vuelven invisibles, las matemáticas del currículum escolar se vuelven menos aplicables, de tal forma que lo que se enseña en la escuela resulta cada vez menos relevante para el mundo del trabajo y por lo tanto más invisible.

En el marco de la cultura del utilitarismo, parece una decisión lógica la que se ha tendido a aplicar en la década de los noventa, restringiendo las matemáticas a unos contenidos básicos definidos a partir de su uso: la geometría como *espacio*, el álgebra como *generalización del número* o la estadística como *manipulación de datos*. A partir de esta toma de decisiones surge una nueva paradoja. La comunidad educativa está en lo cierto cuando afirma que son muchos los que carecen de seguridad en sus conocimientos matemáticos, ignorando los más básicos. Sin embargo, al intentar solucionar este problema, existe el riesgo de separar las matemáticas de su significado como ciencia, de sus raíces en la ciencia y en la tecnología, eliminando la cuestión principal del sentido de las matemáticas en el currículum escolar. Intentando enseñar las matemáticas pensando en lo que los alumnos pueden aprender, hemos separado las matemáticas de lo que realmente es útil, las hemos convertido en algo *práctico*, en algo donde las acciones tienen más importancia que las estructuras subyacentes. La cultura del utilitarismo podría llevarnos a creer en la aparente imposibilidad de ampliar el interés de los alumnos por las matemáticas sin restringir progresivamente su contenido a simples acciones.

El desarrollo de la cultura tecnológica y la omnipresencia del ordenador nos enfrentan a un nuevo reto, cuestionándonos la formación matemática de nuestros jóvenes, a la vez que nos proporcionan grandes posibilidades educativas. En el futuro, cada día habrá más ciudadanos que deban enfrentarse al ordenador en sus puestos de trabajo. Sin embargo, podría pensarse que sus tareas requerirán poco dominio matemático, aparte de la necesidad de sentirse cómodos en el manejo de información numérica. Las conclusiones de esta afirmación surgen, una vez más, de la cultura del utilitarismo y nos conducen inevitablemente a pensar que las prácticas laborales requerirán progresivamente menos matemáticas. La tendencia a pensar que no es necesario poseer habilidades matemáticas en estas situaciones laborales, aunque no da motivos para desmatematizar el currículum, fomenta interpretaciones que lo facilitan.

Sin embargo, para poder trabajar de forma efectiva con un ordenador hay que tener los conocimientos matemáticos necesarios para comprender los modelos subyacentes en los programas que se manejan. En muchas situaciones laborales, cada vez resulta más importante ser capaz de pensar matemáticamente y tomar decisiones basadas en la interacción de los conocimientos matemáticos y los conocimientos propios del campo de trabajo. Tal como señalan Pozzi y otros (1998), en su estudio sobre la utilización de las matemáticas en distintas actividades laborales, las relaciones entre los conocimientos matemáticos y los conocimientos profesionales son muy complejas y requieren de una nueva interpretación del termino alfabetización matemática y de un replanteamiento de las implicaciones para el currículum escolar. Para comprender los modelos subyacentes en los programas utilizados, para hacerlos visibles, es necesario comprender qué datos son importantes y cuáles son las relaciones entre ellos realmente significativas. Ser capaz de responder estas cuestiones requiere de conocimientos matemáticos, que permitan dar significado al modelo —por ejemplo, gráficos, variables o parámetros— y conocimientos y habilidades para expresar su estructura —por ejemplo, herramientas geométricas, numéricas o algebraicas. Estos autores señalan también que la necesidad de comprender los modelos surge en situaciones no rutinarias, cuando la toma de decisiones es contestada o resulta problemática. En un estudio en el mismo campo, Noss y Hoyles (1996) afirman que para ser capaz de manejar con éxito modelos, es necesaria la capacidad de toma de decisiones y para ello es requisito indispensable la capacidad de relacionar, basándose en el apoyo informático, los conocimientos profesionales con la comprensión matemática. Además, consideran que la capacidad de interrelacionar los significados propios y externos de las matemáticas es fundamental para el aprendizaje de las mismas.

En general, el análisis en profundidad de los requisitos matemáticos de la práctica laboral señala la necesidad de hacer visibles las estructuras matemáticas subyacentes en la práctica para aquellos que las utilizan. Dichas estructuras incluyen, en particular, la necesidad de expresarse matemáticamente, de ser capaces de pensar en la geometría y el álgebra de las situaciones en que se desarrollan. La comunidad de educación matemática debe reflexionar seriamente cómo hacer visibles las matemáticas del mundo laboral de una forma honesta, que no prive a las matemáticas de su esencia y que no contribuya todavía más al divorcio existente entre las matemáticas escolares y las matemáticas del trabajo, la ciencia y la tecnología. Las nuevas culturas del mundo laboral requieren que se redefina la comprensión de las matemáticas como un todo y no como conjunto de técnicas separadas. Por ello una *alfabetización matemática real* debería pasar por la construcción de nuevas culturas educativas en las que se proporcione a los alumnos los medios necesarios para dar sentido a los modelos y para expresarlos algebraicamente, geométricamente e informáticamente.

Es pues el momento de discutir en profundidad qué tipos de conocimientos matemáticos nuevos son necesarios, más que seguir buscando maneras más efectivas de transmitir los conocimientos tradicionales. Para ello será imprescindible un debate que supere el mito de que la inteligencia práctica necesaria para llegar a ser un adulto funcional se reduce a habilidades numéricas suponiendo que la tecnología moderna se ocupará del resto. Será necesario dar respuesta a las demandas de la sociedad cambiante, buscando cómo desarrollar un currículum de matemáticas y una visión del mundo matemático en que se supere el divorcio entre el conocimiento tácito, relacionado con la práctica laboral, y el conocimiento científico.

La *capacidad matemática* o *habilidad matemática* es otro de los constructos utilizado por profesores, alumnos y padres, y por la sociedad en general, que ha llegado a mitificarse y que interfiere en gran medida con la idea de democratización de la educación matemática. El profesorado se siente capacitado para distinguir los *buenos* alumnos de los *malos*. Una vez identificadas las capacidades de los alumnos, se crean grupos bajo criterios de *nivel*. Si un alumno es *bueno*, *capaz* o *hábil* para las matemáticas se le apoya para que desarrolle sus habilidades y se le orienta hacia estudios universitarios. Si el alumno es *malo*, *incapaz* o *poco hábil* se abandona cualquier intento de que aprenda matemáticas, permitiéndole que abandone, negándole así las oportunidades de llegar a un conocimiento matemático básico. Los padres de los alumnos de los grupos de *nivel alto*, se enorgullecen de los éxitos de sus hijos y los padres de los alumnos de los grupos de *nivel bajo* lamentan sus fracasos. Sin embargo, raramente unos u otros cuestionan los criterios o motivos, explícitos o implícitos, para establecer los grupos o los beneficios de la agrupación por niveles.

El constructo *habilidad matemática* aparece ligado al proceso de aprendizaje del alumno como si éste dependiera de una única variable, la *habilidad matemática* del alumno. Afortunadamente, su interés desde el punto de vista de la investigación está disminuyendo. El problema del constructo *habilidad matemática* radica en que no tiene en cuenta el contexto en el que el alumno aprende. Da por supuesto un nivel específico de habilidad, independiente del currículum, del profesor o de su metodología, sin tener en cuenta la edad del alumno, sus conocimientos no escolares, su motivación o su nivel social o cultural, entre otras variables. En la actualidad el interés de la investigación se dirige hacia la idea de *habilidades matemáticas* o *inteligencias múltiples*, tal como las caracteriza Gardner (1993), términos que describen las distintas formas en que los alumnos se aproximan y resuelven nuevas situaciones de aprendizaje. Las investigaciones en esta línea sugieren que los profesores deberían buscar la riqueza de sus alumnos, explotando sus potencialidades, en lugar de caracterizarles como *buenos* o *malos* y proponerles situaciones que únicamente confirman sus expectativas de éxito o fracaso. La identificación y el desarrollo de las potencialidades de los alumnos pueden conseguirse utilizando metodologías ricas y variadas, y adaptando el currículum para que contemple las diversidades. Volveremos a este punto en el apartado dedicado al currículum y su implementación.

Para poder comprender realmente la educación matemática, ésta debe considerarse incluida en la comprensión global de la realidad social y cultural en que se desarrolla (Oliveras, 1996). Las ideas surgidas de la interpretación de las matemáticas como producto cultural (Bishop, 1999) pueden contribuir al desarrollo de una educación matemática democratizadora. Aceptar el origen social y cultural de las matemáticas, reconocer su relación con las actividades de las prácticas del entorno del alumno y admitir que el aprendizaje de las matemáticas no es una cuestión relacionada únicamente con aspectos cognitivos, sino que involucra factores de orden afectivo y social asociados a contextos particulares (Abreu, 1995), permite establecer las bases para el desarrollo de un currículum de matemáticas que pueda llegar más fácilmente a todos los alumnos (Bishop, 1998).

Los alumnos son personas individuales que existen en contextos sociales y culturales específicos. Con el desarrollo de la investigación sobre el *aprendizaje situado* y con los estudios que evidencian los distintos aspectos sociales que influyen en el aprendizaje, se ha visto que hay otras muchas explicaciones, a parte de las cognitivas, que influyen en el aprendizaje del alumno. Explicar las dificultades de los alumnos en términos de *déficit cognitivo* es, además de reduccionista, cuestionable (Ginsburg y Allardice, 1984; Nunes y otros, 1993; Rasekoala, 1997). El aula es un contexto social y, como tal, los que participan en la actividad que en ella se desarrolla interpretan distintos roles que pueden influir significativamente en la calidad del aprendizaje (véase, por ejemplo, Brew y otros, 1998, o Gorgorió y otros, en prensa -*a*-).

La investigación en educación matemática ha puesto de manifiesto la importancia de la idea *cognición en la práctica* (*cognition in practice*), (Lave, 1991), que establece que cualquier aprendizaje se desarrolla en una situación determinada. La investigación confirma lo que el sentido común nos dice: cualquier alumno puede parecer muy válido en una situación y no serlo en una situación distinta; al cambiar la situación el alumno parece tener capacidades distintas. Además, se ha probado que al cambiar el currículum, el método o el profesor, el alumno puede trabajar a niveles de dificultad superiores. En particular se ha visto que si el currículum se centra en problemas y temas de interés para el alumno éste mejora su aprendizaje. Si el profesor utiliza métodos que incluyen actividades imaginativas y ricas surgen muchos alumnos brillantes, alumnos que en otras situaciones no lo parecían.

Entre las ideas procedentes de la investigación que pueden contribuir al desarrollo de una educación matemática democratizadora, debemos incluir las relacionadas con la *práctica matemática situada* en el contexto no escolar. Las prácticas sociales con requerimientos matemáticos abren nuevas posibilidades para los profesores creativos con ánimos democráticos. Las ideas procedentes de la práctica matemática no escolar son importantes, tanto desde el punto de vista de la motivación de los alumnos, ya que permiten partir de sus intereses, como desde la perspectiva de su importancia para la significatividad del aprendizaje matemático. El conocimiento de otras prácticas matemáticas, distintas de las formales, permite que el profesorado plantee problemas y situaciones en el aula que estimulen a los alumnos a mostrar los conocimientos que poseen, surgidos en situaciones de aprendizaje no formal. En particular, permiten que el alumnado sea consciente de que conoce y utiliza ideas y técnicas matemáticas, elevando su interés y su autoestima.

Centrar la atención en los alumnos como personas que aprenden en lugar de considerar el aprendizaje como constructo global, aunque cambia el papel del profesor, le permite ampliar sus aproximaciones y aprovechar al máximo los recursos de aprendizaje, adaptándolos a sus alumnos y aumentando sus posibilidades. Democratizar la educación matemática requerirá que los profesores: tengan una visión amplia de los alumnos, sin hacer suposiciones innecesarias sobre sus posibles niveles; sean conscientes de la situación social y cultural de los mismos y de las influencias que esta situación pueda tener sobre su aprendizaje; organicen situaciones de aprendizaje en colaboración y den a los alumnos mayor control sobre su propio aprendizaje.

El currículum y su implementación

Un adulto funcional necesita poseer conocimientos matemáticos suficientes para afrontar con rigor los retos de su práctica laboral, para enfrentarse a la información del mundo actual y para poder participar en una sociedad cambiante. Por otra parte las sociedades, y en particular la nuestra, son cada vez más multiculturales por lo que si creemos en la democratización de la educación debemos plantearnos también muchas cuestiones relacionadas con la equidad. La comunidad de educación matemática, de forma conjunta, debería ser capaz de organizar un currículum en el que el aprendizaje de unas matemáticas rigurosas, no compartimentadas y aplicables, resultase un estímulo para *todos* los alumnos. Tenemos ante nosotros un reto planteado: cómo alcanzar una educación matemática democratizadora, que capacite a las personas, les informe y les oriente en sus acciones, a la vez que sea informativa, crítica, creativa y responsable.

Durante las últimas décadas se ha puesto mucho énfasis en el currículum, tanto en lo que a investigación se refiere como a innovación en la práctica. Se han analizado y discutido los contenidos a enseñar y las posibles secuenciaciones para facilitar los procesos de aprendizaje de los alumnos, teniendo en cuenta las características personales, las motivaciones y las expectativas. Se ha reflexionado también sobre las formas de enseñar, en particular, sobre el papel de la interacción y de la comunicación. En estos momentos, debemos plantearnos hasta qué punto nuestro currículum refleja las necesidades que se prevén en relación con un futuro en el que se anticipan como aspectos clave la tecnología, la continuidad de la formación o la necesidad de un pensamiento global en contextos muy diversos.

Quizás con la implementación masiva de calculadoras y ordenadores podríamos conseguir una visión tecnológica. Sin embargo, todavía muchos de los programas informáticos disponibles en la mayoría de los centros únicamente reproducen, o se utilizan reproduciendo, modelos existentes con anterioridad. Hoy por hoy, es todavía escasa la utilización de programas con propuestas realmente innovadoras. Además, las políticas educativas siguen promoviendo una idea utilitarista de la educación, bajo la cual el objetivo de la educación matemática es garantizar las competencias necesarias para el desarrollo de prácticas laborales. Evidentemente la competencia matemática seguirá siendo necesaria pero, tal como afirma Ellyard (1998), no será suficiente, siendo de máxima importancia poseer un pensamiento global y ser a la vez capaz de actuar localmente.

Por otra parte, desde el punto de vista de la globalidad de la educación, no puede olvidarse que la educación matemática de nuestros jóvenes no es patrimonio exclusivo del profesorado de matemáticas, como tampoco lo es establecer las bases matemáticas de otros campos de estudio. Los profesores de física, de química o de geografía también enseñan matemáticas y los alumnos utilizan y aplican las matemáticas en sus clases. Deberíamos pues avanzar hacia un replanteamiento del significado del conocimiento matemático necesario para nuestros alumnos. Deberíamos dejar de centrarnos en contenidos compartimentados internos a la materia y buscar aquellas formas de pensamiento y expresión matemática que son comunes o paralelos a los necesarios en otros campos: modelizar, descontextualizar y contextualizar, analizar datos, interpretar y producir información verbal y figurativa, entre otros. Tenemos un reto planteado: la búsqueda de un terreno de juego común e interdisciplinar. Debemos poner el énfasis no únicamente en el área de matemáticas o en sus compartimentos estancos, sino también en identificar qué herramientas, contenidos y procedimientos debemos proporcionar al alumno para que pueda extender sus conocimientos y aplicarlos. Debemos buscar también el camino que se debe seguir desde las distintas áreas para que el alumno pueda llegar a conocer dichas herramientas.

Por otra parte, en un futuro inmediato, la educación ya no será una experiencia propia de los jóvenes y dejará de ser patrimonio de los centros educativos formales. La educación será, es necesario que sea, y de hecho es, una experiencia continuada a lo largo de la vida. Para satisfacer las necesidades de los ciudadanos, la educación formal, no formal e informal deberán desarrollarse de forma complementaria (véase Bishop y otros, 1993). Este hecho nos plantea nuevos retos al tener la necesidad de establecer criterios profesionales sólidos en un campo desconocido hasta el momento por muchos de nosotros, el de la educación no desarrollada en las instituciones formales.

Una mirada a la situación pasada, desde la perspectiva actual, junto con una visión de futuro debería permitirnos identificar las prioridades de la educación matemática. La educación matemática actual se basa, sin lugar a dudas, en conocimientos históricos. Las matemáticas tienen una larga historia y los currículos están encerrados en esta historia. La reflexión sobre el pasado puede contribuir a interpretar la situación actual (véase, por ejemplo, Castelnuovo, 1999). Analizando la evolución de los estudios en relación con el currículum, observamos que recientemente ha aparecido una tendencia de cambio en el énfasis, desde el contenido al contexto. Mientras que siguen desarrollándose estudios en relación con el contenido, aumenta el interés por el contexto en el que se desarrolla la práctica matemática; la idea de práctica matemática situada o desarrollada en un contexto concreto está adquiriendo mayor relevancia. Parte de los estudios en este campo investigan las prácticas matemáticas que tienen lugar en contextos no escolares, prácticas con unas características marcadamente distintas de las escolares (véase, por ejemplo, Abreu, 1993, o Nunes, 1993). Este tipo de estudios nos plantean un nuevo reto: encontrar cómo relacionar los conocimientos procedentes de ambos contextos y cómo permitir la entrada en el aula de los conocimientos no formales, para después legitimarlos y utilizarlos como punto de partida hacia la construcción de conocimiento formalizado.

Podría irse más lejos afirmando que el conocimiento matemático de los alumnos situado en su contexto debería contribuir a dar forma al currículum matemático. Con ello los centros educativos y sus departamentos de matemáticas serían los responsables de dar forma a un currículum local para cada centro ya que conocimientos, intereses, expectativas, posibilidades y limitaciones son únicas y particulares en cada situación. Esta afirmación con relación al contenido curricular parece mucho más evidente si entendemos el currículum como instrumento para la alfabetización matemática y tenemos en cuenta la necesidad de equidad que compense los desequilibrios sociales. Nadie esperaría un mismo currículum de alfabetización para situaciones sociales o culturales distintas.

Sin lugar a dudas, hay argumentos en contra de la implantación de un currículum únicamente de alfabetización matemática. Estos argumentos se basan, a menudo, en la afirmación de que con ello se limitaría la posibilidad de que los mejores alumnos siguieran estudiando matemáticas a niveles superiores. Sin embargo este argumento es, una vez más, un argumento elitista. El desarrollo de un currículum de alfabetización matemática en el sentido de D'Ambrosio (1985), que incluya las seis actividades matemáticas establecidas como universales —contar, localizar, medir, diseñar, jugar y explicar— (Bishop, 1999), es claramente un objetivo educativo democrático. Además, está suficientemente probado que existen formas de desarrollar un mismo currículum a distintos niveles. Una posibilidad sería el trabajo a través de actividades, investigaciones y proyectos propuesto por Bishop (1998, 1999) o el trabajo a través de *actividades matemáticas ricas* (Gorgorió y otros, 2000; Planas y otros, 1999*a*) que facilitan el desarrollo de las capacidades de todos los alumnos, avanzando a partir de sus distintos puntos de partida y respetando sus propios estilos cognitivos.

En nuestro contexto, al hablar de democratización de la educación matemática nos referimos, en particular, a que todos los alumnos tengan acceso a unos conocimientos matemáticos básicos. Esta cuestión es fuente de debate, especialmente en relación con la etapa de secundaria obligatoria, e incluye muchas discusiones enmarcadas bajo el nombre *tratamiento de la diversidad*. En primer lugar, queremos hacer notar que el término *tratamiento* no nos parece adecuado para describir las acciones que hay que realizar frente a la diversidad. Cuando se parte de que el *déficit cognitivo* no es la única explicación posible del fracaso matemático de algunos alumnos, no puede hablarse de la diversidad como si fuera una *enfermedad que debe tratarse*. Desde nuestro punto de vista, las diferencias entre alumnos, cuando son atendidas con los recursos suficientes, pueden ser una fuente de riqueza. Preferimos el término *diversidades* en su forma plural, ya que en singular engloba mucho y explica poco. La atención de las diversidades debe partir de una interpretación de las matemáticas que tenga en cuenta su base cultural, su desarrollo y evolución en prácticas sociales concretas y su utilización en contextos no escolares o formales.

Bishop (1999) propone considerar de forma distinta las matemáticas, con minúscula, entendidas como producto cultural, presente en las prácticas sociales de toda comunidad y las Matemáticas, con mayúscula, como ciencia universal desarrollada por los investigadores y enseñada en las escuelas, es decir, como cuerpo de conocimientos formal. En el contexto diario de nuestros alumnos, el conocimiento matemático formal y el no formal coexisten. Por lo tanto, desde nuestras propuestas didácticas, debemos asegurar la transición entre las prácticas matemáticas de la vida cotidiana y las escolares, y viceversa. Desde este punto de vista, nos enfrentamos al reto de encontrar un equilibrio en las propuestas del currículum escolar que garanticen esta transición. Por una parte, debemos permitir a los alumnos que expliciten sus conocimientos y procedimientos matemáticos, quizás no elaborados ni compartidos, para que puedan evolucionar hacia el conocimiento Matemático que pretende su educación formal. Por otra, debemos identificar en qué situaciones de la vida cotidiana son necesarios conocimientos matemáticos y cuáles son éstos, para tener instrumentos que nos permitan garantizar la significatividad del aprendizaje.

Tal como señalan Gorgorió y otros (1999), para conseguir atender mejor las diversidades, deberíamos buscar el equilibrio entre las características del conocimiento matemático escolar y el conocimiento matemático de la práctica, a menudo oculto. Una posible fórmula sería analizar de qué forma las personas utilizan conocimientos matemáticos dentro y fuera de la escuela (véase, por ejemplo, Carraher y otros, 1991; o Masingila, 1996) para identificar las características relevantes de los conocimientos y procedimientos matemáticos, explícitos o no, de las prácticas en los contextos no formales. En las prácticas matemáticas necesarias en contextos cotidianos las personas buscan eficacia, los problemas pueden ser cambiados, transformados, abandonados o resueltos y los procedimientos se crean según las necesidades (Lave, 1991). Las matemáticas en el contexto no escolar son una herramienta al servicio de un objetivo práctico, y no un objetivo en sí mismas (Nunes 1993). En las prácticas matemáticas cotidianas el contexto en el que se desarrollan tiene significado para el sujeto y, como consecuencia, lo motiva para resolverlo (Lester 1989; Planas y otros, 1999*b*). Sin embargo, las situaciones usadas en la escuela para desarrollar conceptos matemáticos son, a menudo, distantes de las prácticas diarias, con lo cual los alumnos no se sienten especialmente interesados en resolverlas ya que no tienen significado para ellos (Carraher y otros, 1991). Las características de las prácticas contextualizadas justifican suficientemente su introducción en el aula, como mínimo, desde el punto de vista de la motivación. Además, si tenemos en cuenta que las prácticas matemáticas formales y no formales coexisten y que ambas son necesarias para desempeñarse en la sociedad, la introducción de las prácticas no formales en el aula queda suficientemente justificada.

Proponemos pues que, a partir de la introducción de actividades relacionadas con el contexto cotidiano del alumnado y con el objetivo de avanzar hacia el conocimiento formal a partir de su legitimización, se busque el equilibrio entre:

- El *rigor* necesario desde el punto de vista formal y la *eficacia* que condiciona las estrategias de la práctica.
- La utilización de *signos y símbolos* propios del conocimiento formal y los distintos *significados* que pueden atribuírseles, construyéndolos en el aula, contrastando los de las propias Matemáticas y los externos a ellas.
- La *contextualización* que da significado a las situaciones y la *abstracción* que permite resolverlas.

- La *completitud* de las Matemáticas como ciencia universal y las características de las matemáticas como producto cultural, como *conocimiento que ha sido construido* a partir de las necesidades de las prácticas sociales.
- El *interés por el contenido* y el interés *por el alumno* como persona que aprende.

Estas reflexiones nos plantean un nuevo reto: cómo adaptar las situaciones problema para que den cabida a las características de ambos tipos de prácticas matemáticas. En particular, debemos buscar cómo enfatizar el papel del contexto, tal como señalan reiteradamente distintos autores en este mismo libro. Todo problema existe en un contexto, y es éste el que determina qué puede aceptarse como solución válida (Bishop, 1991; Hilton y Pedersen, 1983; Schoenfeld, 1994). Enfocar el contexto como un ruido, susceptible de perturbar la claridad del mensaje matemático, es un error; el contexto por sí mismo es el mensaje, siendo las matemáticas un medio para descodificarlo (Freudenthal, 1973).

Una posible forma de compatibilizar las características de las prácticas matemáticas formales y no formales es a través del planteamiento de *actividades ricas* (véase, por ejemplo, Planas y otros, 1999*a*; Gorgorió y otros, 2000)[1]. Este tipo de actividades tienen, en particular, algunas de las características ya presentes en las propuestas de los trabajos de Arcavi (1995), Bishop (1998) o Broomes (1989). En concreto, una *actividad rica* sería aquella que:

- Está relacionada con el contenido curricular, tanto respecto al currículum intencional como respecto al currículum que se deberá desarrollar.
- Permite establecer conexiones entre distintas áreas del currículum, dentro o fuera de las matemáticas, con lo cual amplia la imagen de las ideas matemáticas y facilita el desarrollo de significados.
- Sirve como introducción y motivación para un contenido básico y, por lo tanto, su presencia en el currículum desarrollado está justificada.
- Supone un reto para la mayoría de los alumnos ya que incluye una gradación de dificultades para diferentes ritmos de aprendizaje, partiendo de las posibilidades de todos y permitiendo su expansión para los más rápidos.
- Facilita la implicación de todos los alumnos, ya que les permite que puedan establecer conexiones con el contexto de fuera del aula.
- Es flexible, permitiendo al alumno que establezca relaciones entre sus conocimientos para poder aplicarlos.
- Pretende no únicamente la búsqueda de respuestas correctas sino también que los alumnos generen buenas preguntas.
- Finaliza cuando el alumno es consciente de sus aprendizajes, reflexionando, interiorizando y estableciendo relaciones, tanto con aprendizajes anteriores como con vivencias de fuera del aula.

1. La caracterización y formulación de *actividades ricas* fue uno de los centros de interés de los seminarios desarrollados durante el TIEM. Estos artículos reflejan la participación de sus autores en dichos seminarios.

Plantear en clase *actividades ricas* y organizar el desarrollo del currículum a través de la complementariedad de actividades, proyectos e investigaciones, permite identificar las potencialidades de todos los alumnos y fomentar su desarrollo (Bishop, 1998), a la vez que posibilita adaptar el currículum para que contemple las diversidades, permitiéndonos un acercamiento a la democratización de la educación matemática.

Sin embargo las actividades no son ricas *a priori*, sino que es su gestión en el aula lo que determinará que se alcancen algunas de las características mencionadas (Gorgorió y otros, 2000). En particular, la capacidad del alumnado para aplicar y generalizar conocimientos está relacionada en gran medida con los estilos de enseñanza vividos. La enseñanza *cerrada* conduce, a menudo, a que los alumnos tengan dificultades para percibir la relevancia de las matemáticas aprendidas y sean, por lo tanto, incapaces de utilizarlas adaptándolas a situaciones más complejas o ligadas a contextos no escolares. La enseñanza basada únicamente en el método transmisivo, centrado en procesos algorítmicos y técnicas formalizadas, no permite, en general, que el alumno llegue a un conocimiento profundo de las matemáticas, con lo cual lo aprendido no puede ser transferido a situaciones abiertas ni aplicado a situaciones no formales ya que se ha impedido que el alumno llegue a pensar por sí mismo.

Cuando el profesorado se basa sólo en un método didáctico aparecen muchas limitaciones. La experiencia y la investigación demuestran que las distintas formas de enseñar conducen a resultados distintos, que varían desde conseguir la mera *instrucción* de los alumnos hasta lograr avanzar en su *educación*. Si el profesor en clase de matemáticas *da su lección*, explicando un tema y mostrando unos procedimientos, que los alumnos practican en ejercicios que terminarán en casa si es necesario, instruye a sus alumnos. De esta forma se obtienen resultados muy distintos de los que se podrían obtener si se dedicara menos tiempo a los procedimientos rutinarios y más al análisis y al razonamiento. Hay diversos criterios que ponen de manifiesto la calidad educativa de una sesión de clase, por ejemplo, si los conceptos y procedimientos matemáticos clave se desarrollan a través de ejemplos y discusiones o si el profesor únicamente los enuncia. Nos aproximamos más a la educación cuando centramos la clase en uno o dos problemas, elegidos cuidadosamente, construyendo un proceso entero, desde su principio hasta su fin, en el que los alumnos trabajan en pequeño grupo en algo que les motiva y supone un reto para ellos, para compartir posteriormente las posibles soluciones en la puesta en común, en la que se señalan los aspectos remarcables de los distintos procesos seguidos, se introducen nuevas posibilidades y se resume lo que se ha aprendido. En este tipo de aproximación, el profesor necesita saber controlar, de forma sutil, la dirección del trabajo de los alumnos, seleccionando, por ejemplo, un problema inicial que pueda resolverse modificando alguno de los métodos desarrollados en alguna sesión anterior.

La investigación en educación matemática

Si se pretende analizar los posibles avances en educación matemática, la investigación es uno de los campos que no pueden ignorarse. Por una parte, la investigación con frecuencia pone de manifiesto cuáles son los aspectos considerados como cruciales en las acciones para el cambio. Por otra, la investigación es fundamental en nuestro campo ya que nos proporciona protección intelectual frente a las demandas de la política educativa, frecuentemente poco reflexionadas, que sugieren que la enseñanza de las matemáticas debería limitarse a un restringido abanico de competencias algorítmicas. Si la educación matemática debe democratizarse, es necesaria una democratización a todos los niveles. Desde este punto de vista, en relación con la investigación deben revisarse tanto los problemas planteados como los métodos seguidos para investigarlos. La responsabilidad corresponde a todos los investigadores tanto si sus estudios se desarrollan como parte de su práctica laboral, por interés o como parte de su formación continuada.

Bishop (1996) propone un código ético que incluye, entre otros, algunos de los retos a los que se enfrentan los investigadores en educación matemática, retos que deberían ser aceptados si se quiere que la investigación y sus productos contribuyan a la democratización de la educación matemática. Queremos destacar aquí algunos:

- Los investigadores en educación matemática, como parte de la comunidad educativa, son responsables ante la sociedad en su globalidad, por lo que cualquier investigación debería poder justificarse en términos de sus beneficios potenciales para el mayor número posible de alumnos.
- Dado que la investigación en educación matemática es una actividad dependiente de la práctica educativa, el proceso de investigación debería centrase en los docentes, con lo cual deberían plantearse problemas y cuestiones de la práctica en el aula y los profesores deberían participar en todos los estadios de la investigación, especialmente en el planteamiento de los aspectos que habrá que investigar.
- Cualquier investigador debería aceptar compromisos morales, culturales y éticos con el resto de los ciudadanos. Si aceptamos que las prácticas educativas pueden tener efectos positivos y negativos sobre las personas, entonces debemos aceptar que la investigación puede tener efectos parecidos.
- La investigación debería reconocer y documentar los contextos culturales, sociales e institucionales en los que se desarrolla, dado que la educación siempre está situada en un contexto único, por lo que se debería actuar cautelosamente ante las generalizaciones, especialmente en lo que ser refiere a la implementación de modelos educativos derivados de investigaciones desarrolladas en contextos distintos.
- La investigación en educación matemática, además de garantizar la ética en su proceso, debería asegurar que es beneficiosa para los alumnos y profesores objetos de la investigación. Además de investigar *qué debería ocurrir* es importante investigar *qué ocurre*. Cuando la investigación tiene como objetivo el desarrollo teórico deberíamos garantizar que las prácticas estudiadas son beneficiosas por ellas misma.
- Los investigadores deberían aceptar el compromiso de publicar y divulgar sus conclusiones de forma comprensible y hacer que fuesen accesibles al mayor número de profesores posible. La comunicación entre investigadores se da fácilmente ya que todos ellos tienen como objetivo, por razones diversas, publicar en revistas académicas de prestigio. Sin embargo, debería-

mos tomarnos el tiempo de publicar nuestros resultados de forma comprensible en contextos educativos más públicos y abiertos, permitiendo la crítica no únicamente desde el contexto universitario sino también desde la práctica docente.

La falta de relación entre la investigación y la práctica en educación matemática está ampliamente documentada (Brophy, 1986; Crosswhite, 1987; Freudenthal, 1983; Kilpatrick, 1981). Tal como afirma Kilpatrick (1992), las acciones de un profesor que interpreta las situaciones de clase en su contexto están muy alejadas de las inferencias hechas por un investigador preocupado por el control de la variación, la cuantificación de los efectos o el uso de modelos estadísticos. Los programas y proyectos de investigación están todavía dominados por las preguntas y las orientaciones de los investigadores y, rara vez, por las de los profesores. Sin duda, muchos de los temas que preocupan a los investigadores tienen implicaciones para su aplicación en el aula. Sin embargo, los investigadores posiblemente saben poco sobre las opiniones de los profesores con relación a qué aspectos sería interesante investigar. Los profesores tienen experiencia y conocimiento real del contexto y sus limitaciones, limitaciones impuestas desde el currículum y la evaluación, y conocen la influencia del libro de texto, las restricciones debidas a horarios y calendarios y las dinámicas de los centros y de los grupos. Desde este punto de vista, si se considera que el objetivo final de la investigación es el de cambiar la práctica docente y las políticas educativas, los estudios en colaboración, desarrollados por investigadores procedentes de la universidad junto con docentes en activo, son los que pueden darle un mayor sentido.

Creemos que, si el objetivo final de la investigación es el de *promover cambios* en el contexto educativo, los estudios desarrollados de forma colaborativa pueden facilitar el establecimiento de puentes entre los avances en investigación y los actos educativos. En los estudios en colaboración los profesores analizan su propia práctica docente, siguiendo una aproximación crítica a la educación, con el objetivo explícito de mejorarla, contando con el apoyo de investigadores universitarios que aportan su experiencia y conocimiento a los procesos de análisis y propuestas de mejora. Investigar bajo un enfoque colaborativo permite, por una parte, poder contar con el apoyo y la experiencia procedente del campo universitario y, por otra, poder avanzar gracias a los conocimientos y la experiencia de los profesores en activo, y, lo que es más importante, plantearse cuestiones directamente relacionadas con la práctica docente. A través de la perspectiva de los profesores, como miembros plenos de los equipos de investigación, se podrá identificar y dar sentido a las cuestiones planteadas en la investigación. Los profesores conocen mejor que los investigadores universitarios el contexto en el que se desarrolla el estudio. Conocen mucho mejor los elementos que limitan y condicionan la educación matemática: los currículos escolares, la estructura y los horarios de los centros y el contexto familiar de sus alumnos. Son también los profesores quienes conocen las posibilidades reales de cambio y las posibles vías para su implementación.

Por otra parte, las cuestiones y las explicaciones de los profesores provienen de un campo de conocimientos que es distinto, a la vez que complementario, del investigador universitario aislado. El trabajo en colaboración facilita la comunicación entre dos dominios distintos y permite superar la exclusión mutua que a menudo se da entre teoría y práctica. La presencia de profesores como miembros plenos de los equipos de investigación legitima y facilita el proceso de comunicación con otros docentes, a la vez que contribuye a encontrar posibles vías de divulgación de los resultados y de las propuestas de innovación. Además, su participación en el proceso de investigación resulta en beneficio de su práctica docente y de la de sus compañeros en el entorno inmediato. Por otra parte, su presencia en los equipos de trabajo enriquece en gran medida el proceso de interpretación de las situaciones estudiadas, facilitando así el proceso de triangulación y análisis de datos, complementando los puntos de vista de los investigadores universitarios.

El trabajo en colaboración permite tener en cuenta, por una parte, los factores que condicionan la práctica docente y, por otra, las conexiones con los avances teóricos (Ruthven, 1999). Ambos puntos de vista tienen un papel relevante en la investigación, ya que permiten establecer las limitaciones, posibilidades y restricciones del contexto, a la vez que ofrecen la generalidad que da significado a la investigación. Trabajar de forma colaborativa contribuye al desarrollo de la práctica, ya que parte de la contextualización de los estudios en la realidad del aula, al tiempo que establece la investigación en términos de las necesidades y esquemas de conocimiento de los propios docentes. De esta forma, la investigación resulta un análisis de la práctica a la vez que una búsqueda de explicaciones hacia el desarrollo de la teoría.

La participación de profesores en activo en estudios colaborativos, reflexionando sobre sus acciones y no sólo aplicando las ideas de los investigadores académicos, junto con la concienciación de los investigadores de las limitaciones y dificultades del trabajo en el aula puede resultar de provecho, tanto para la investigación como para la práctica. La investigación bajo un enfoque colaborativo es una buena alternativa, por una parte, a la investigación externa, con poca relación con la realidad del aula y, por otra, a la práctica subjetiva a la que le falta la garantía de la observación externa que asegure la triangulación de los datos y de su interpretación. Sin embargo, el desarrollo, y la misma supervivencia, de la investigación colaborativa no será posible sin la contribución de las distintas administraciones educativas involucradas, que deben facilitarla poniendo los medios económicos necesarios, reduciendo los horarios lectivos de los profesores, facilitando su participación en congresos, promoviendo grupos de trabajo permanentes de profesores en activo y reestructurando las jerarquías de poder (Baumann, 1996).

En el momento presente, en que la enseñanza de las matemáticas se enfrenta a muchas tensiones con la implementación del nuevo sistema educativo, consideramos que la investigación en colaboración puede contribuir a que la comunidad educativa se comprometa en el desarrollo de los cambios necesarios para que los planteamientos de la LOGSE sean una realidad. Entendemos por comunidad educativa tanto agentes, entre ellos profesores e investigadores, como estructuras, es decir las establecidas por la administración educativa. Por otra parte, el desarrollo de investigaciones en colaboración puede contribuir a que políticos y burócratas de la administración acepten la necesidad y la importancia de prestar atención a los avances y los resultados de la investigación educativa.

La democratización de la educación matemática es un importante objetivo para el futuro inmediato. Desde esta perspectiva, creemos que la comprensión de las situaciones educativas y las propuestas para el cambio que pueden surgir a partir de modelos de investigación en colaboración compensan ampliamente las limitaciones, las dificultades y los conflictos, ya sean de carácter teórico o práctico, que puedan aparecer durante su desarrollo.

Responsabilidades compartidas

Ante el reto de facilitar el acceso de todos los alumnos a unos conocimientos matemáticos básicos, son necesarios muchos cambios, cambios que deben producirse a distintos niveles. No es suficiente que la administración educativa proponga nuevas directrices. Tampoco bastará con que algunos profesores, de forma aislada, cambien su propia práctica docente. Ante el reto del cambio, es necesario un esfuerzo conjunto, que debe implicar a todas las personas involucradas en el proceso educativo, desde la administración, hasta los profesores, sin olvidar a los responsables de la formación inicial y permanente, ni a los investigadores. El esfuerzo conjunto requerirá que el proceso se produzca en dos direcciones simultáneamente, desde la administración con sus directrices, y desde los profesores con su trabajo diario. Sin embargo, no es suficiente con que la administración haga propuestas, debe poner los medios para que los profesores puedan implementarlas. Tampoco es suficiente que los profesores cambien de forma aislada su propia práctica diaria, deberán compartir sus experiencias y sus reflexiones con otros profesores, en grupos de trabajo, seminarios o asociaciones. La administración debe debatir sus propuestas con grupos de profesores expertos y con asociaciones de profesores y éstos, colectivamente, deben poder plantear sus opiniones a la administración en un proceso de retroalimentación mutua, en el cual el papel de la investigación es también relevante.

Por otra parte, tal como señalan Gorgorió y otros (en prensa *b*), cualquier cambio en educación, en particular los necesarios para una implementación real de la LOGSE, requiere tiempo. Tiempo para que los políticos comprendan las ideas de la reforma, e imaginen y acepten lo que pueden significar para la práctica existente. Tiempo para que las personas implicadas en los distintos niveles tengan la oportunidad de comprender y debatir lo que la reforma significará. Tiempo para que los profesores acepten las ideas y puedan encontrar maneras para cambiar su propia práctica y tiempo para reflexionar sobre sus intentos de mejorar la situación educativa. Sin embargo, a menudo, ante la implementación de una reforma, los políticos y la sociedad tienden a esperar resultados visibles inmediatos. También, con frecuencia, los profesores se sienten desanimados ante una situación frente a la cual sienten que no tienen medios para avanzar. Por todo ello, creemos absolutamente necesario que la administración educativa facilite el tiempo y los medios necesarios para que los cambios puedan hacerse realidad.

Tenemos ante nosotros el reto de generar cambios en la educación matemática de nuestros jóvenes y son los profesores quienes, en primer lugar, pueden ser los agentes del cambio. Desde las instituciones responsables de la formación inicial y permanente del profesorado, pueden promoverse entre los docentes determinadas formas de pensamiento y determinadas formas de enseñar. De ello se desprende que las instituciones responsables de la formación inicial y permanente del profesorado tienen un papel esencial en el proceso de cambio. Aquellos que en un futuro van a ser profesores de matemáticas cuando llegan a la facultad, de matemáticas o de educación, han vivido su propio proceso enculturizador, a menudo a través de modelos magistrales, unidireccionales y transmisivos. Además, sin lugar a dudas, su proceso educativo ha sido un proceso selectivo. Si pretendemos que su actuación como futuros docentes no sea magistral sino colaborativa, no unidireccional sino bidireccional, no transmisiva sino constructiva y no selectiva sino respetuosa con la diversidad, los responsables de la formación de los docentes además de *dar lecciones de* matemáticas o sobre *cómo enseñar matemáticas*, deberíamos plantearnos cómo romper el círculo vicioso a través del cual existe el riesgo de perpetuar el esquema.

Los responsables de la continuación del sistema deberían revisar, en busca de patrones de calidad, las prácticas durante la formación inicial y sus modelos docentes y los grupos de trabajo y de discusión, tanto en la formación inicial como permanente. Los profesores necesitan pautas y modelos para revisar, modificar o cambiar las actividades, la evaluación, la metodología y los criterios de agrupación de alumnos. Los profesores necesitan parámetros y criterios para analizar el currículum desde la perspectiva de su utilidad, significatividad e interdisciplinariedad. Las instituciones responsables de la formación del profesorado, especialmente las implicadas en la formación permanente, deberían ayudar a los profesores en la toma de las múltiples decisiones de cada día.

La implementación de cambios requiere también que los responsables de la política educativa tomen algunas decisiones que pueden resultar difíciles. En los documentos oficiales, las directrices tienen en cuenta la diversidad de los alumnos y los cambios propuestos tienen significado. Sin embargo las propuestas son muy generales y algunos responsables de la administración educativa no han abandonado todavía sus antiguos principios. Por otra parte, a menudo los documentos oficiales son una ayuda escasa para los profesores. Para llegar a la democratización de la educación matemática sería necesario, en primer lugar, que la administración se esforzase en cambiar aquellos principios, a menudo, implícitos, y aquellas *tradiciones* que condicionan su política. Deberían, por ejemplo, aceptar la posibilidad de que los docentes además de *enseñar* deben *reflexionar* sobre qué y cómo enseñan, facilitando los proyectos de investigación en colaboración, aunque esto suponga replantear las estructuras o los horarios de los centros y aunque requiera dotaciones presupuestarias complementarias. También hay la necesidad urgente de que la administración educativa establezca nuevos programas de formación permanente y apoye a las asociaciones de profesores como elementos dinamizadores del cambio. Sería necesario abandonar el control centralizado del currículum y de los modelos de enseñanza y también fomentar y divulgar modelos con éxito desarrollados por grupos de profesores, reconociendo su profesionalidad y aceptando sus propuestas de innovación e investigación.

Los programas de formación permanente deben plantearse desde una nueva perspectiva, siendo su punto de partida las necesidades que sienten los profesores, no unas necesidades impuestas, y deben ser desarrollados teniendo en cuenta la complementariedad de la práctica docente y la investigación. Deberían fomentarse las políticas de formación permanente dirigidas específicamente a mejorar la calidad de la práctica educativa, a través del desarrollo de actividades y estrategias didácticas específicas. Deberían crearse situaciones de formación permanente en las que los profesores pudieran elaborar y refinar situaciones de aula, en grupos de trabajo colaborativo, donde se diseñe, revise, experimente, discuta y mejore cada propuesta. Deberían experimentarse nuevos contenidos y nuevas metodologías, compartirse las experiencias y obtener retroalimentación en los grupos de discusión. De esta forma, no únicamente se obtendrían mejores recursos didácticos, sino que se generarían nuevos métodos y criterios. Bajo este modelo, no sólo podrían conseguirse mejores *clases de matemáticas*, sino que se produciría un debate intelectualmente rico y profundo, sobre la teoría y la práctica educativa y sobre qué tipo de conocimiento matemático es necesario para nuestros alumnos, a la vez que se reflexionaría sobre los propios objetivos de la educación matemática. Siguiendo este modelo, las actividades no son los únicos productos: se hace necesario compartir también los procesos seguidos y los procedimientos utilizados. La función de la formación permanente sería la de promover el establecimiento de comunidades, grupos o asociaciones en las que pudiesen desarrollarse tradiciones de investigación e innovación. El tiempo que los profesores destinasen a este tipo de formación no debería ser tiempo premiado con posibilidades de promoción sino que debería ser considerado como parte de su práctica laboral.

Los políticos deben tomar decisiones a distintos niveles. Los maestros, los profesores y los investigadores podemos y debemos hacer propuestas y aportaciones en el proceso de toma de decisiones, propuestas que deben ser atendidas por la administración educativa. Se hace necesario un debate en el que se revisen los objetivos de la educación matemática y su evaluación. En este debate deben participar representantes de la administración educativa, matemáticos, profesores de matemáticas e investigadores en educación matemática. La revisión de la evaluación y su concordancia con los objetivos propuestos para la etapa de escolaridad obligatoria, debería necesariamente conducir a discutirlos para ver cuáles son los realmente relevantes para una formación básica de todos los alumnos y alumnas. La participación en el debate es una responsabilidad compartida. Sin embargo, es a la administración educativa a quien corresponde la responsabilidad final de la toma de decisiones para dar respuesta a las necesidades sociales y quien debe poner los medios para que se implementen los cambios necesarios.

Los profesionales implicados en la educación matemática de los jóvenes tenemos la responsabilidad de partir de lo que pareció funcionar en el pasado, mejorándolo con lo que parece resultar positivo en la actualidad, teniendo una visión del futuro. Independientemente de lo que nuestra memoria selectiva nos permita recordar sobre lo que funcionó o dejó de funcionar, lo que realmente es cierto es que los contenidos matemáticos del pasado, enseñados tal como se hacía entonces, dejarán de ser válidos en el futuro.

Referencias bibliográficas

ABREU G. de (1993): *The relationship between home and school mathematics in a farming community in rural Brazil.* PhD thesis. Cambridge. Cambridge University.

ABREU, G. de (1995): «A Matemática na Vida Versus na Escola: Uma Questão de Cognição Situada ou de Identidades Sociais?». *Psicologia: Teoria e Pesquisa*, n. 11(2), pp. 85-93.

ARCAVI, A. (1995): «Y en matemática, los que instruimos ¿qué construimos?». *Substratum*, II, pp. 77-94.

BAUMANN, J.F. (1996): «Conflict or compativility in classroom inquiry? One teacher's struggle to balance teaching and resarch». *Educational Resarcher*, n. 25, (7), pp. 29-36.

BISHOP, A.J. (1991): «Teaching mathematics to ethnic minority pupils in secondary schools», en PIMM, D. y LOVE, E. (eds.): *Teaching and learning school mathematics.* Londres. Hodder & Stoughton, pp. 26-43.

BISHOP, A.J. (1996): «A researchers' code of practice?». Comunicación presentada en Working Group 24. *8th International Congress on Mathematics Education.* ICME8. Sevilla. Agosto, 1996.

BISHOP, A.J. (1998): «Equilibrando las necesidades matemáticas de la educación general con las de la instrucción matemática de los especialistas». *SUMA*, febrero, pp. 25-37.

BISHOP, A.J. (1999): *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural.* Barcelona. Paidós. (1988, *Mathematical Enculturation. A Cultural Perspective on Mathematics Education.* Dordrecht. Holanda. Kluwer. Ac. Pub.)

BISHOP, A.J.; HART, K.; LERMAN, S; NUNES, T. (1993): *Significant influences on children's learning of mathematics.* París. UNESCO.

BREW, C.; PEARN, C.; LEDER, G.; BISHOP, A.J. (1998): «Big fish resizing themselves in the school pond: why do girls under-rate their ability?», en KEITEL, C. (ed.): *Social justice and mathematics education*, pp. 69-82. Berlín. Freie Universitat Berlin.

BROOMES, D. (1989): «Using goals to construct useful forms of school mathematics», en KEITEL, C.; DAMEROW, P.; BISHOP A.J.; GERDES P. (eds.): *Mathematics, Education and Society.* París. UNESCO. Science and Technology Education. Document Series n. 35.

BROPHY, J. (1986): «Teaching and Learning Mathematics: Where Research Should Be Going». *Journal for Research in Mathematics Education*, n. 17(5), pp. 323-336.

CARRAHER, T.; CARRAHER, D.; Y SCHLIEMANN, A.L.; (1991): *En la vida diez, en la escuela cero.* Madrid. Siglo Veintiuno.

CASTELNUOVO, E. (1999): «La matemática escolar en este siglo», en REGUEIRO M.D. y otros (eds.): *Actas 9 JAEM, Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas*, pp. 17-21. Lugo. CEFOCOP.

CLEMENTS, M.A.; ELLERTON, N.F. (1996): *Mathematics education research: past, present and future.* Bangkok. UNESCO.

COCKCROFT, W.H. (1982): *Mathematics Counts.* Londres. HMSO.

CROSSWHITE, F.J. (1987): «Cognitive science and mathematics education: a mathematics educator's perspective», en SHOENFELD, A.H. (ed.): *Cognitive Science and Mathematics Education.* New Jersey. Lawrence Erlbaum Associated, pp. 165-277.

D'AMBROSIO, U. (1985): «Mathematics education in a cultural setting. *International journal of mathematical education in science and technology*», n. 16(4), pp. 469-477.

DAMEROW, P.; DUNKLEY, M.E.; NEBRES, B.F.; WERRY, B (eds.), (1984): *Mathematics for all.* París. UNESCO

ELLYARD, P. (1998): *Ideas for the new millennium.* Melbourne. Melbourne University Press.

FREUDENTHAL, H. (1973): *Mathematics as an Educational* Task. Dordrecht, Netherlands. Reidel.

FREUDENTHAL, H. (1983): «Major Problems of Mathematics Education», en ZWENG, M.; GREEN, T.; KILPATRICK, J.; POLLAK, H.; SUYDAM, M. (eds.): *Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education,* pp.1-7. Boston. Birkhäuser.

GARDNER, H. (1993): *Multiple intelligences: the theory in practice.* Nueva York. Basic Books.

GINSBURG, H. P.; ALLARDICE, B.S. (1984): «Children's difficulties with school mathematics», en ROGOFF, B.; LAVE, J.(eds.): *Everyday cognition: its development in social context.* Cambridge. Massachussets. Harvard University Press, pp.194-219.

GORGORIÓ, N.; PLANAS, N; VILELLA, X. (1999): «¿Cómo afrontar las diversidades en la clase de matemáticas?», en REGUEIRO M.D. y otros (eds.): *Actas de las IX JAEM Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas,* pp. 492-496. Lugo. CEFOCOP.

GORGORIÓ, N.; PLANAS, N.; VILELLA, X. (en prensa *a*): «Immigrant children learning mathematics in mainstream schools», en ABREU, G.; BISHOP A.; PRESMEG N. (eds.): *Transitions between Contexts for Mathematics Learning.* Dordrecht, Holanda. Kluwer Ac. Pub.

GORGORIÓ, N.; ARTIGUES, F.; BANYULS, F.; MOYANO, D.; PLANAS, N.; ROCA, M.; XIFRÉ, A. (2000): «Proceso de elaboración de actividades geométricas ricas: un ejemplo, las rotaciones». *SUMA,* n. 33, febrero, pp. 59-71.

GORGORIÓ, N.; PLANAS, N.; VILELLA, X., BISHOP A. (en prensa *b*): «Research in a complex social context: dichotomies, complementarities and tensions», en VALERO, P.; ZEVENBERGEN, R. (eds.): *The Social Dimension of Mathematics Education: Theoretical, Methodological and Practical* Issues. Boulder, Colorado. Westview Press.

HARRIS, M. (1991): «The Maths in Work Project», en HARRIS, M. (ed.): *Schools, Mathematics and Work.* Brighton. Falmer.

HILTON, P.; PEDERSEN, J. (1983): *Fear No More. An Adult Approach to Mathematics.* Massachusetts. Addison Wesley Pub. Co.

KEITEL, C.; DAMEROW, P.; BISHOP, A.J.; GERDES, P. (1989): *Mathematics, Education* *and Society.* París. UNESCO. Science and Technology Education. Document Series, n. 35.

KILPATRICK, J. (1981): «The Reasonable Ineffectiveness of Research in Mathematics Education». *For the Learning of Mathematics*, n. 2(2), 22-29.

KILPATRICK, J. (1992): «A history of research in mathematics education», en GROUWS, D.A. (ed.): *Handbook or Resarch on Mathematics Teaching and Learning.* Nueva York. MacMillan, pp. 3-38.

LAVE, J. (1991). *La cognición en la práctica.* Barcelona. Paidós Educación.

LESTER F.K. (1989): «Mathematical problem solving in and out of school». *Arithmetic Teacher*, 39.

MASINGILA, J.; DAVIDENKO, S.; PRUS-WISNIOWSKA, E. (1996): «Mathematics learning and practice in and out of school: A framework for connecting these experiences». *Educational Studies in Mathematics*, n. 31(2), pp. 175-200.

NOSS, R.; HOYLES, C. (1997): *Windows on Mathematical Meaning. Learning Cultures and Computers.* Dordrecht. Kluwer Ac. Pub.

NUNES, T. (1993): «The socio-cultural context of mathematical thinking: research findings and educational implications», en BISHOP, A.J.; HART, K.; LERMAN, S.; NUNES, T. (eds.): *Significant influences on children's learning of mathematics*, pp. 27-42. París. UNESCO.

NUNES, T.; SCHLIEMANN, A.; CARRAHER, D. (1993): *Street mathematics and school mathematics.* Cambridge. Cambridge University Press.

OLIVERAS, M.L. (1996): *Etnomatemáticas. Formación de profesores e innovación curricular.* Granada. Ed. Comares. Colección «Mathema».

PLANAS, N., VILELLA, X., GORGORIÓ, N. (1999*a*): «Fiayaz en clase de matemáticas: ambiente de resolución de problemas en un aula multicultural.» *SUMA*, n. 30, febrero, pp. 65-75.

PLANAS, N.; VILELLA, X.; GORGORIÓ, N. (1999*b*): «El cálculo en contexto: aportaciones de alumnos de distintos entornos culturales». *UNO*, octubre, pp. 9-18.

POZZI, S., NOSS, R.; HOYLES, C. (1998): «Tools in practice, mathematics in use». *Educational Studies in Mathematics*, n. 36(2), pp.105-122.

RASEKOALA, E. (1997): «Ethnic minorities and achievement: the fog clears». *Multicultural Teaching*, n. 15(2), pp. 23-29.

RUTHVEN, K. (1999): «Reconstructing Professional Judgement in Mathematics Education: From good practice to warranted practice», en HOYLES, C.; MORGAN, C.; WOODHOUSE, G. (eds.): *Rethinking the Mathematics Curriculum.* Londres. Falmer Press, pp. 203-216.

SCHOENFELD, A.H. (1994): «A discourse on methods». *Journal for Research in Mathematics Education*, n. 25(6), pp. 697-710.

STRAKER, A. (1997): *Framework for Numeracy: Years 1 to 6. National Numeracy and Literacy Project.* Londres. The National Center for Literacy and Numeracy.

WOLF, A. (1984): *Practical Mathematics at Work: Learning through* YTS. Sheffield. Manpower Services Commission.