



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Nombres índexs

Estadística Descriptiva

Grau d'Estadística

Manuela Alcañiz Zanón

Helena Chuliá Soler

Dept. Econometria, Estadística i Economia Aplicada

Barcelona, novembre de 2024

INDEX

1. Definició de nombre índex.....	3
2. Índexs simples i índexs compostos.....	3
2.1. Índexs simples	3
2.2. Índexs compostos.....	4
2.2.1. Índexs compostos no ponderats.....	5
2.2.2. Índexs compostos ponderats.....	8
3. Propietats dels nombres índexs	10
4. Enllaç i canvi de base.....	11
4.1. Canvi de base	11
4.2. Enllaç de sèries econòmiques	12
5. Índexs de preus	13
5.1. Índex simple de preus	14
5.2. Índexs compostos de preus.....	14
5.2.1. Índexs de Laspeyres	15
5.2.2. Índex de Paasche	16
5.2.3. Índex ideal de Fisher	18
Bibliografia.....	19

1. Definició de nombre índex

Un nombre índex és la mesura estadística que serveix per comparar una magnitud en dos o més moments del temps, prenent-ne un com a període base.

Els nombres índexs permeten analitzar l'evolució de variables posant en relleu els canvis en el temps (o també en l'espai) d'una variable o d'un grup de variables. Per exemple, evolució del nombre de turistes al llarg de l'última dècada en una certa regió; o comparació del nombre de turistes de l'any 2018 entre les diferents províncies catalanes.

Els nombres índexs són aplicables a nombrosos camps d'activitat que poden ser objecte de quantificació i observació estadística. En particular, en l'àmbit de l'activitat econòmica i empresarial són d'ús molt freqüent. En són exemple els índexs de producció, de desocupació i de preus al consum, entre d'altres.

Atenent al nombre de variables que s'analitzen conjuntament, els nombres índexs es poden classificar en:

- Nombres índexs simples
- Nombres índexs compostos: no ponderats i ponderats.

2. Índexs simples i índexs compostos

2.1. Índexs simples

Són aquells que permeten analitzar els canvis experimentats per una única magnitud (magnitud simple) bé sigui al llarg del temps o de l'espai. Per exemple, l'índex de consum d'energia elèctrica a Catalunya des de 2000 fins a 2018, sobre la base del consum del 2000; o l'índex de consum d'energia elèctrica de les diferents províncies catalanes el 2018, sobre la base del consum de Lleida. El més habitual serà comparar una magnitud en diferents moments de temps, prenent un dels períodes com a base o de referència.

Donada una magnitud simple, que anomenarem X , si l'observem al llarg del temps, obtindrem els valors $x_1, x_2, \dots, x_t, \dots, x_T$. Per calcular l'índex simple d'aquesta sèrie caldrà:

- Fixar el període base o període de referència. Suposem que el període base és b .
- Assignar el valor 100 al període base.
- Calcular els valors corresponents dels altres períodes respecte al període base, de forma que es mantingui la relació:

$$\frac{x_t}{x_b} = \frac{I_b^t}{100} \Rightarrow I_b^t = \frac{x_t}{x_b} 100$$

essent x_b el valor de la sèrie en el període base b , i x_t el valor de la sèrie en el període corrent t (període que estem estudiant).

Aleshores, I_b^t és l'índex simple del període corrent t , en base b (el subíndex fa referència al període base i el superíndex al període actual o corrent).

Període	Magnitud	Índex (base b)
1	x_1	$I_b^1 = (x_1/x_b) 100$
2	x_2	$I_b^2 = (x_2/x_b) 100$
...	...	...
b	x_b	100
...	...	...
T	x_T	$I_b^T = (x_T/x_b) 100$

A partir d'alguns exemples es posaran de manifest aplicacions dels nombres índex.

EXEMPLE 1: Preu d'un producte (per quilo) i índexs del seu preu (2008-2018)

Any	Preu (u.m.)	Índex (base 2008)
2008	11	100
2010	14	$127 = 14/11 \cdot 100$
2012	72	$655 = 72/11 \cdot 100$
2014	76	$691 = 76/11 \cdot 100$
2016	104	$945 = 104/11 \cdot 100$
2018	452	$4109 = 452/11 \cdot 100$

L'índex calculat permet analitzar l'evolució creixent o decreixent que ha experimentat la magnitud, quantificant aquesta evolució en termes del valor en el període base o de referència. Així per exemple, veiem que el preu en el període 2008-2010 es va incrementar en un 27% ($127 - 100$) i en un 4009% ($4109 - 100$) entre 2008 i 2018.

2.2. Índexs compostos

En general, les magnituds econòmiques solen ser magnituds complexes, és a dir, combinació de magnituds simples. Així, els índexs de preus industrials resulten de l'agregació dels preus d'un nombre variat de productes industrials; els índexs de qualitat de vida s'obtenen com

agregació d'un conjunt d'indicadors, com l'estat de salut, l'autonomia personal, el suport social, etc.; i l'índex de Preus al Consum resulta de l'agregació dels preus d'un conjunt de béns i serveis que determinen l'estructura de consum d'una família estàndard.

Si es considera que totes les magnituds simples que formen una magnitud complexa tenen la mateixa importància relativa (o pes) en el càlcul de l'índex compost, aleshores l'índex compost corresponent serà no ponderat.

Al contrari, quan les magnituds simples presenten importàncies relatives diferents (pesos diferents), l'índex compost de la magnitud complexa serà ponderat. Aquest és el cas més usual en la pràctica.

2.2.1. Índexs compostos no ponderats

Sigui un conjunt de K magnituds de les quals es disposa de T observacions en diferents períodes:

t	x₁	x₂	...	x_k	...	x_K
1	x ₁₁	x ₂₁	...	x _{k1}	...	x _{K1}
2	x ₁₂	x ₂₂	...	x _{k2}	...	x _{K2}
...	...	...	...	...	...	...
b	x _{1b}	x _{2b}	...	x _{kb}	...	x _{Kb}
...	...	...	...	...	...	...
T	x _{1T}	x _{2T}	...	x _{kT}	...	x _{KT}

on x_{kt} , és l'observació corresponent a la magnitud k en el període t .

El procés per a l'elaboració de l'índex conjunt de les magnituds és el següent:

1. Elaborar els índexs simples de les K magnituds.

- Fixar el període base (per exemple, b).
- Calcular els corresponents índexs simples, tal com s'exposa en el quadre següent:

t	I₁	I₂	...	I_K
1	I_{1b}^1	I_{2b}^1	...	I_{Kb}^1
2	I_{1b}^2	I_{2b}^2	...	I_{Kb}^2
...	...	...	...	...
b	100	100	...	100
...	...	...	...	...
T	I_{1b}^T	I_{2b}^T	...	I_{Kb}^T

sent $I_{kb}^t = \frac{x_{kt}}{x_{kb}} 100$ l'índex simple de la magnitud k ($k = 1, \dots, K$) per al període corrent t ($t = 1, \dots, T$), amb període base b . Els subíndexs k i b indiquen la magnitud i el període base respectivament; i el superíndex t , el període corrent.

2. Resumir o sintetitzar tota aquesta informació en un únic nombre índex per a cadascun dels T períodes, és a dir, elaborar un nombre índex compost o complex.

Per realitzar aquest resum o síntesi existeixen diversos procediments dels quals aquí només en tractarem dos:

- A. *Mitjana aritmètica simple o índex de Sauerbeck*: sintetitza en una sola sèrie, $\bar{I}_b^t$, els índexs simples de les K magnituds, calculant la mitjana aritmètica dels índexs simples corresponents a un mateix moment del temps:

$$\bar{I}_b^t = \frac{I_{1b}^t + I_{2b}^t + \dots + I_{Kb}^t}{K} = \frac{\sum_{i=1}^K I_{ib}^t}{K} = \frac{\sum_{i=1}^K \left(\frac{x_{it}}{x_{ib}} \right) 100}{K}$$

Aquest índex compost té alguns inconvenients:

- El resultat reflectirà la variació real només si els valors de les magnituds simples en el període base coincideixen.
- Un canvi de període base implica refer tots els càlculs ja que aquest índex no presenta la propietat d'inversió, com veurem a l'apartat següent.

Malgrat aquests inconvenients, aquest índex s'utilitza quan les magnituds presenten diferents unitats de mesura i/o no es disposa d'informació dels factors que defineixen les ponderacions dels corresponents índexs simples. Per aquest motiu, els estudiarem, però caldrà tenir present que no sempre reflectiran la variació real.

- B. *Mitjana agregativa o índex de Bradstreet-Dûtôt*: no utilitza directament els índexs simples, sinó que s'obté dividint l'agregat de les observacions de les K magnituds corresponents a un mateix període de temps, per l'agregat de les observacions en el període base d'aquestes mateixes K magnituds, és a dir:

$$IA_b^t = \frac{x_{1t} + x_{2t} + \dots + x_{Kt}}{x_{1b} + x_{2b} + \dots + x_{Kb}} 100 = \frac{\sum_{i=1}^K x_{it}}{\sum_{i=1}^K x_{ib}} 100$$

S'utilitza, principalment, per obtenir índexs de preus, ja que aquest índex compost únicament pot ser elaborat quan les magnituds simples es presenten en les mateixes unitats. Per això, no caldrà refer tots els càlculs per canviar l'any base.

EXEMPLE 2: Es disposa de la següent informació sobre el nombre d'empleats per categoria en una determinada empresa. Es vol calcular l'índex mitjana aritmètica i l'índex mitjana agregativa en base 2014, per estudiar l'evolució de l'ocupació global en aquesta empresa:

Nombre d'empleats				
Categoria	2014	2015	2016	2017
A	100	95	94	90
B	300	300	275	250
C	200	200	180	160
D	20	25	25	30
TOTAL	620	620	574	530

Índexs simples

Categoria	2014	2015	2016	2017
A	100	$95/100 \cdot 100 = 95$	94,00	90,00
B	100	$300/300 \cdot 100 = 100$	91,67	83,33
C	100	$200/200 \cdot 100 = 100$	90,00	80,00
D	100	$25/20 \cdot 100 = 125$	125,00	150,00

Índex mitjana aritmètica

	2014	2015	2016	2017
$\bar{I}_b^t$	100	$(95+100+100+125)/4 = 105$	100,17	100,83

Com es pot observar aquest índex no reflecteix una variació real en aquest cas (perquè els nombres d'empleats de les diferents categories al 2014 no són iguals). Indica que, per exemple, al 2016 el nombre de persones empleades es va incrementar en un 0,17% ($100,17 - 100$) respecte a 2014, quan, com podem comprovar en el quadre inicial, el nombre de persones empleades en aquest any va baixar de 620 a 574 persones.

Índex mitjana agregativa

	2014	2015	2016	2017
IA_b^t	100	$620/620 \cdot 100 = 100$	$574/620 \cdot 100 = 92,58$	85,48

Aquest índex indica que, respecte a 2014, el nombre total de persones empleades el 2015 es manté, baixa un 7,42% (100 – 92,58) el 2016 i baixa un 14,52% el 2017 (100 – 85,48). Aquest índex sí que reflecteix l'autèntica variació en el nombre d'empleats.

2.2.2. Índexs compostos ponderats

Aquests índexs són similars als anteriors, però consideren que les magnituds que formen l'índex compost poden tenir importància diferent en el càlcul de l'índex. Per exemple, en un índex de preus, cada producte té diferent importància, ja que uns es consumeixen en major quantitat, o bé tenen un preu superior. Així, no ha de tenir el mateix pes en el càlcul de l'índex compost el preu del pa o el preu d'un producte de luxe, com el caviar.

Per construir qualsevol índex compost ponderat cal assignar prèviament a cada magnitud una ponderació o pes relatiu, w_k , determinada segons la naturalesa de la magnitud k , $k = 1, \dots, K$. El més pràctic és definir aquests pesos de forma que sumin 1, tot i que no és estrictament necessari.

Un cop assignades les ponderacions existeixen diferents procediments per construir l'índex compost, que es corresponen amb els vistos per als índexs no ponderats:

- A. *Mitjana aritmètica ponderada o índex ponderat de Sauerbeck*: és la mitjana ponderada dels índexs simples de les diferents magnituds.

$$\bar{I}_b^t = \frac{\sum_{i=1}^K I_{ib}^t w_i}{\sum_{i=1}^K w_i} = \frac{\sum_{i=1}^K (x_{it}/x_{ib}) w_i}{\sum_{i=1}^K w_i} 100$$

Presenta els mateixos avantatges i inconvenients que l'índex no ponderat obtingut amb la fórmula de la mitjana aritmètica.

- B. *Mitjana agregativa ponderada o índex ponderat de Bradstreet-Dûtot*: és una mitjana agregada en què s'aplica una ponderació a cadascun dels valors de les diferents magnituds, és a dir:

$$IA_b^t = \frac{x_{1t}w_1 + x_{2t}w_2 + \dots + x_{Kt}w_K}{x_{1b}w_1 + x_{2b}w_2 + \dots + x_{Kb}w_K} 100 = \frac{\sum_{i=1}^K x_{it}w_i}{\sum_{i=1}^K x_{ib}w_i} 100$$

Presenta els mateixos avantatges que l'índex simple mitjana agregativa, sempre que les ponderacions siguin constants (no depenguin de t).

EXEMPLE 3: Suposem que una empresa té 4 categories d'assalariats, amb els següents salaris:

	Salari (u.m.)(x_{it})			
Categoria	2014	2015	2016	2017
A	70	75	82	90
B	85	92	100	110
C	100	105	115	120
D	150	160	180	185

Els empleats de les categories A-D representen el 40%, 30%, 20% i 10% del total d'empleats, respectivament. Aquests percentatges seran els pesos w_i , ja que la importància que ha de tenir cada salari en el càlcul de l'índex d'evolució de salaris dependrà del volum de persones que perceben aquell salari.

Nota: aquests percentatges podrien ser variables en el temps. En aquest cas, caldria modificar les fórmules, de forma que incorporessin el subíndex t en els pesos: w_{it} .

Índex mitjana aritmètica ponderada (base 2014)

Per obtenir l'índex mitjana aritmètica ponderada, en primer lloc s'han de calcular els *índexs simples* dels salaris, I_{ib}^t :

Categoria	2014	2015	2016	2017
A	100	107,14	117,14	128,57
B	100	108,24	117,65	129,41
C	100	105,00	115,00	120,00
D	100	106,67	120,00	123,33

I, a continuació, les sumes ponderades dels índexs simples, tenint en compte que les ponderacions són els percentatges d'empleats de cada categoria (que podem passar a tant per u). Com les ponderacions sumen 1, directament estem calculant els índexs. Per exemple, per a 2015 tindrem:

$$107,14 * 0,4 + 108,24 * 0,3 + 105,00 * 0,2 + 106,67 * 0,1 = 106,99$$

	2014	2015	2016	2017
$\bar{I}_b^t$	100	106,99	117,15	126,59

Aquest índex no reflecteix l'autèntica evolució de la massa salarial.

Índex mitjana agregativa ponderada (base 2014)

Calculem en primer lloc els productes dels salaris pels pesos, i la seva suma:

$x_{it}w_i$	2014	2015	2016	2017
A	28,00	30,00	32,80	36,00
B	25,50	27,60	30,00	33,00
C	20,00	21,00	23,00	24,00
D	15,00	16,00	18,00	18,50
Suma	88,50	94,60	103,80	111,50

Aleshores, els índexs IA_b^t són:

	2014	2015	2016	2017
IA_b^t	100	106,89	117,29	125,99

Per exemple, el valor per a 2015 s'ha obtingut fent: $94,60/88,50 \cdot 100 = 106,89$.

Aquest índex agregatiu ponderat posa de manifest que la massa salarial total de l'empresa s'ha incrementat un 6,89% entre 2014 i 2015, un 17,29% entre 2014 i 2016, i un 25,99% entre 2014 i 2017.

3. Propietats dels nombres índex

D'entre el conjunt de propietats desitjables que pot tenir un nombre índex, assenyalarem les que presenten un interès especial:

- Existència*. Tot nombre índex ha de tenir un valor finit i diferent de zero. Tots els índexs definits anteriorment presenten aquesta propietat.
- Identitat*. Un nombre índex presenta aquesta propietat si l'índex pren el valor u (o 100) quan el període base i el període corrent coincideixen.

$$I_t^t = 1 \text{ (en tant per u)}$$

$$I_t^t = 100 \text{ (en tant per cent)}$$

Aquesta propietat la compleixen tots els índexs definits.

- c) *Inversió*. Es diu que un índex és invertible si en canviar entre si els períodes base i corrent els índexs són inversos (el seu producte en tant per u és igual a la unitat).

$$I_t^b = \frac{1}{I_t^t} \quad I_t^b I_t^t = 1$$

- d) *Circularitat*. Per tal que un índex tingui aquesta propietat és condició necessària però no suficient que presenti la propietat d'inversió. Es diu que un índex presenta la propietat de circularitat si:

$$I_b^m I_m^j I_j^b = 1, \text{ o en general, } I_0^1 I_1^2 \dots I_T^0 = 1$$

Aquestes dues darreres propietats les tenen els índexs simples i els índexs mitjana agregativa (índexs de Bradstreet-Dûtot). La resta d'índexs definits no les presenten.

4. Enllaç i canvi de base

La necessitat d'enllaçar sèries de nombres índexs o de realitzar canvis de base sorgeix de la conveniència que aquests siguin representatius de la realitat de cada moment. Amb el temps es pot donar la situació que els índexs construïts fins aleshores no reflecteixin la realitat a causa de la variació de l'estructura econòmica, per canvis en els gustos o costums, o simplement pel transcurs del temps, quedant, per tant, obsolets. Per això cal revisar la construcció dels nombres índexs, i també les ponderacions assignades a cada magnitud en l'elaboració d'un índex compost. Aquesta revisió portarà a l'obtenció d'una nova sèrie de nombres índexs, amb l'actualització del període base, que caldrà enllaçar amb l'anterior.

4.1. Canvi de base

De les propietats d'inversió i circularitat és fàcil deduir que:

$$I_b^m = \frac{1}{I_m^b} = \frac{1}{I_m^j I_j^b} = \frac{I_j^m}{I_j^b}$$

on j és el període base original i b el nou període base, i els índexs estan expressats en tant per u. Aquesta expressió permet canviar de base, passant l'índex del període corrent m en base j, a base b.

Període	Índex (base j)	Índex (base b)
j	1	$I_b^j = \frac{I_j^j}{I_j^b}$
...	...	...
b	I_j^b	1
...	...	...
m	I_j^m	$I_b^m = \frac{I_j^m}{I_j^b}$

EXEMPLE 4: Reprenent els índexs simples calculats a l'exemple 2, passarem la base de 2014 a 2017:

Categoria	2014	2015	2016	2017
A	111,11	105,56	104,44	100
B	120,00	120,00	110,01	100
C	125,00	125,00	112,50	100
D	66,67	83,33	83,33	100

Per exemple, l'índex de la categoria A per a 2015 en base 2017 és:

$$I_{17}^{15} = \frac{I_{14}^{15}}{I_{14}^{17}} = \frac{95}{90} = 1,0556, \text{ que en tant per cent és } 105,56.$$

En el cas dels índexs simples, aquesta operació pot tenir escàs interès, perquè els índexs simples es poden recalculer fàcilment a partir de les dades originals. Té major utilitat quan es tracta d'índexs compostos, difícils de recalculer. Notem que només es pot realitzar el canvi de base d'aquesta forma per índexs que compleixin totes les propietats mostrades abans i, concretament, les d'inversió i circularitat.

4.2. Enllaç de sèries econòmiques

De les propietats d'inversió i circularitat d'un nombre índex resulta immediata l'obtenció de la següent expressió:

$$I_b^m I_m^j = I_b^j \quad \text{o} \quad I_0^1 I_1^2 = I_0^2$$

Aquesta expressió permet encadenar o enllaçar sèries d'índexs.

EXEMPLE 5: Suposem que l'any 2016 es va actualitzar l'any base d'una sèrie històrica, que abans estava en base 2011. Veurem com enllaçar les dues subsèries. Bàsicament, consistirà en actualitzar la base de la primera part de la sèrie, passant-la a 2016:

Anys	Base 2011	Base 2016	Enllaç	Sèrie mixta base 2016
2011	100		$100/156 \cdot 100 = 64$	64
2012	120		$120/156 \cdot 100 = 77$	77
2013	125		$125/156 \cdot 100 = 80$	80
2014	137		$137/156 \cdot 100 = 88$	88
2015	143		$143/156 \cdot 100 = 92$	92
2016	156	100		100
2017		131		131

Si es tracta d'índexs compostos ponderats (que compleixin les propietats necessàries d'inversió i circularitat), la nova sèrie obtinguda presentarà naturalesa mixta ja que a partir de 2016 possiblement els índexs hagin estat calculats amb unes ponderacions diferents.

5. Índexs de preus

Es construeixen amb la finalitat de recollir les variacions experimentades pels preus d'un conjunt de béns o serveis al llarg del temps. Els preus són òbviament rellevants, però també ho són les quantitats demandades de cada producte. Ambdues magnituds formaran part del càlcul de l'índex, ja que, a més preu i més quantitat demandada, més importància ha de tenir el producte en el càlcul de l'índex compost.

Suposem K productes o béns, dels quals s'han observat els seus preus i quantitats demandades al llarg de T períodes de temps.

Preus dels productes						
Període/prod.	1	2	...	k	...	K
0	p_{10}	p_{20}	...	p_{k0}	...	p_{K0}
1	p_{11}	p_{21}	...	p_{k1}	...	p_{K1}
...	...	...	...	...	...	...
b	p_{1b}	p_{2b}	...	p_{kb}	...	p_{Kb}
...	...	...	...	...	...	...
T	p_{1T}	p_{2T}	...	p_{kT}	...	p_{KT}

Quantitats demandades dels productes						
Període/prod.	1	2	...	k	...	K
0	q ₁₀	q ₂₀	...	q _{k0}	...	q _{K0}
1	q ₁₁	q ₂₁	...	q _{k1}	...	q _{K1}
...	...	...	...	...	...	...
b	q _{1b}	q _{2b}	...	q _{kb}	...	q _{Kb}
...	...	...	...	...	...	...
T	q _{1T}	q _{2T}	...	q _{kT}	...	q _{KT}

5.1. Índex simple de preus

Igual que la resta d'índexs simples, l'índex simple de preus s'obté com a quocient del preu d'un article en un període donat i el seu preu en el període que s'ha fixat com a base.

$$I_{kb}^t = \frac{p_{kt}}{p_{kb}} 100$$

L'índex simple de preus únicament permet comparar els preus de productes de forma aïllada i no de grans grups de productes. A més, no té en compte les quantitats, fet que fa que la seva utilitat sigui molt limitada.

Aquí no s'està tenint en compte la inflació (augment del cost de la vida) que hagi experimentat el preu entre el moment b i el moment t. Més endavant ens ocuparem d'aquesta qüestió.

5.2. Índexs compostos de preus

Un índex de preus de consum o un índex general de preus té com a objectiu obtenir una única magnitud que proporcioni una visió general de l'evolució conjunta dels preus d'un grup de béns i serveis.

Un cop s'han determinat els béns i serveis que formaran l'índex compost o general de preus, hi ha diferents procediments per construir-los, similars als que s'han vist anteriorment. En aquest punt ens limitarem a estudiar els més usuals, que són els basats en la mitjana aritmètica ponderada d'índexs simples.

Com ja s'ha apuntat, les ponderacions dels índexs simples sempre es fixen segons la importància de cada producte en la demanda total, és a dir, en funció dels preus i les quantitats demandades de cadascun d'ells. El producte de preu per quantitat s'anomena valor. En aquest sentit es poden establir quatre criteris per ponderar els índexs simples:

- $w_k = p_{kb} q_{kb}$ (valor del producte k en el període base).
- $w_k = p_{kt} q_{kt}$ (valor del producte k en el període corrent).
- $w_k = p_{kb} q_{kt}$ (valor del producte k al preu del període base, però amb quantitats del període corrent).
- $w_k = p_{kt} q_{kb}$ (valor del producte k al preu del període corrent, però amb quantitats del període base).

Els índexs de preus que s'elaboren més freqüentment utilitzen com a ponderacions la primera i tercera alternatives.

5.2.1. Índex de Laspeyres

És un índex compost ponderat, definit com:

$$L_b^t = \frac{\sum_{k=1}^K I_{kb}^t w_k}{\sum_{k=1}^K w_k}$$

on es pren com a ponderació per a cadascun dels productes el seu valor monetari en l'any base, és a dir, la ponderació per al producte k serà $w_k = p_{kb} q_{kb}$.

$$L_b^t = \frac{\sum_{k=1}^K I_{kb}^t (p_{kb} q_{kb})}{\sum_{k=1}^K p_{kb} q_{kb}} = \frac{\sum_{k=1}^K \frac{p_{kt}}{p_{kb}} (p_{kb} q_{kb})}{\sum_{k=1}^K p_{kb} q_{kb}}$$

Simplificant:

$$L_b^t = \frac{\sum_{k=1}^K p_{kt} q_{kb}}{\sum_{k=1}^K p_{kb} q_{kb}}$$

Així, aquest índex s'obté com a quocient entre el valor dels productes consumits a preu de l'any corrent però amb les quantitats de l'any base, i el valor dels productes consumits l'any base.

Per tant, l'índex de Laspeyres mesura la variació del valor agregat d'un conjunt de béns o productes entre el període base b i el període corrent t, considerant que l'estructura de consum (quantitats) corresponent al període base s'ha mantingut constant.

Presenta l'avantatge que per calcular-lo no cal conèixer les quantitats consumides en cada període; únicament són necessàries les quantitats del període base. Però, per això mateix, presenta l'inconvenient de no tenir en compte els possibles canvis en la demanda dels diferents béns, fet que implica que sigui poc representatiu quan els períodes estan allunyats de l'any base.

5.2.2. Índex de Paasche

S'obté ponderant els índexs simples de preus d'un conjunt de béns pel valor monetari de cada bé calculat amb els preus del període base i les quantitats consumides en el període corrent. Per tant, la ponderació per al producte k serà $w_k = p_{kb} q_{kt}$

$$P_b^t = \frac{\sum_{k=1}^K p_{kb}^t (p_{kb} q_{kt})}{\sum_{k=1}^K p_{kb} q_{kt}} = \frac{\sum_{k=1}^K \frac{p_{kt}}{p_{kb}} (p_{kb} q_{kt})}{\sum_{k=1}^K p_{kb} q_{kt}}$$

Simplificant:

$$P_b^t = \frac{\sum_{k=1}^K p_{kt} q_{kt}}{\sum_{k=1}^K p_{kb} q_{kt}}$$

L'índex de Paasche mesura la variació en el valor agregat del conjunt de béns consumits en el període corrent deguda a la variació dels preus i de les quantitats. Permet seguir l'evolució dels consums i dels preus simultàniament. Com a conseqüència, presenta un inconvenient: resulta difícil de diferenciar en les seves variacions la part que s'ha d'atribuir al canvi en l'estructura de consum (canvi en les quantitats) i la part que s'ha d'atribuir als canvis de preus.

L'avantatge de l'índex de Paasche és que té en compte l'estructura del consum de cada període, però això representa al seu torn la dificultat de disposar d'informació sobre les quantitats demandades en cada període, ja que aquesta informació no és fàcil d'obtenir a curt termini. Per això, habitualment, les sèries d'índexs de preus es construeixen com índexs de Laspeyres, però amb ponderacions ens van actualitzant periòdicament (veurem l'exemple de l'Índex de Preus al Consum, www.ine.es/ipc).

EXEMPLE 6: Càlcul d'índex de preus

A partir dels preus i quantitats demandades de tres articles al llarg del període 2014-2017, es volen elaborar els índexs de preus simples, de Laspeyres i de Paasche sobre la base 2014.

Preus (u.m.)				
Article/any	2014	2015	2016	2017
A	62	70	85	100
B	360	415	480	530
C	75	84	90	120

Quantitats (milions d'unitats)				
Article/any	2014	2015	2016	2017
A	5	6	6	4
B	1	2	2	2
C	8	10	9	8

Índexs simples de preus (base 2014)

A partir del quadre dels preus, i sense tenir en compte les quantitats, es poden obtenir els índexs simples de preus:

Article/any	2014	2015	2016	2017
A	100	112,90	137,10	161,29
B	100	115,28	133,33	147,22
C	100	112,0	120,00	160,00

Índex de Laspeyres (base 2014)

Per calcular aquest índex convé obtenir prèviament el valor del total del cistell conjunt dels tres articles per a l'estructura de consum fixada per les quantitats del període base (2014):

Valors (preus període corrent x quantitats període base)

Article/any	2014	2015	2016	2017
	p ₁₄ q ₁₄	p ₁₅ q ₁₄	p ₁₆ q ₁₄	p ₁₇ q ₁₄
A	310	350	425	500
B	360	415	480	530
C	600	672	720	960
Suma	1270	1437	1625	1990

Un cop obtinguts els valors anteriors, apliquem la fórmula de Laspeyres i obtenim:

	2014	2015	2016	2017
L_b^t	100	113,15	127,95	156,69

Per exemple, l'índex de 2015 s'ha obtingut fent: $1437/1270 \cdot 100 = 113,15$.

Aquest índex reflecteix l'evolució dels preus, suposant que l'estructura de consum ha estat constant des de l'any 2014 (les quantitats no han variat).

Índex de Paasche (base 2014)

Per facilitar el càlcul d'aquest índex obtenim prèviament els valors següents:

Valors (quantitats x preus, ambdós del període corrent)

	2014	2015	2016	2017
Article/any	p ₁₄ q ₁₄	p ₁₅ q ₁₅	p ₁₆ q ₁₆	p ₁₇ q ₁₇
A	310	420	510	400
B	360	830	960	1060
C	600	840	810	960
TOTAL	1270	2090	2280	2420

Valors (preus del període base x quantitats del període corrent)

	2014	2015	2016	2017
Article/any	p ₁₄ q ₁₄	p ₁₄ q ₁₅	p ₁₄ q ₁₆	p ₁₄ q ₁₇
A	310	372	372	248
B	360	720	720	720
C	600	750	675	600
TOTAL	1270	1842	1767	1568

Aplicant la fórmula de Paasche, obtenim:

	2014	2015	2016	2017
P_b^t	100	113,46	129,03	154,34

Per exemple, l'índex per a l'any 2015 s'ha obtingut fent: $2090/1842 \cdot 100 = 113,46$.

Aquest índex reflecteix l'evolució dels preus, suposant que tant els preus com les quantitats han variat. Aquesta hipòtesi és més realista que la de Laspeyres, però, com s'ha dit, presenta dos inconvenients: sovint les quantitats consumides no estan disponibles a temps real, i en els percentatges d'increment no es pot distingir quina part és deguda a variacions en els preus o a variacions en l'estructura de consum, és dir, en les quantitats consumides.

5.2.3. Índex ideal de Fisher

L'índex de preus de Fisher és la mitjana geomètrica dels índexs de preus de Laspeyres i Paasche:

$$F_b^t = \sqrt{L_b^t p_b^t}$$

Aquest índex compleix totes les propietats desitjables comentades anteriorment, inclosa la propietat d'inversió que ni l'índex de Laspeyres ni el de Paasche presenten, la qual, com ja hem vist, permet realitzar canvis de base i enllaços de sèries amb una simple operació aritmètica.

Presenta a curt termini els mateixos problemes per a la seva obtenció que l'índex de Paasche, és a dir, a la fi de cada període no n'hi ha prou de conèixer el preu de tots els productes, sinó que a més cal disposar de les quantitats consumides.

Bibliografia

BARDINA, XAVIER; FARRÉ, MERCÈ. Estadística Descriptiva: Manuals de la Universitat Autònoma de Barcelona, 2009.

BENÍTEZ MÁRQUEZ, M^a DOLORES; IRANZO ACOSTA, JOSÉ LUIS; ISLA CASTILLO, FERNANDO; SARRIÓN GAVILÁN, M^a DOLORES. Estadística Descriptiva: McGraw-Hill, 2013.

HERNÁNDEZ BASTIDA, AGUSTÍN. Curso elemental de Estadística Descriptiva: Pirámide, 2008.

MONTERO LORENZO, JOSÉ M^a. Estadística Descriptiva para Ciencias Sociales: Paso a Paso, 2008.