UNIVERSITAT DE BARCELONA

Indagación matemática en la educación secundaria: ecología didáctica y transferencia

Susana Vásquez Elías

UNIVERSITAT DE BARCELONA

Indagación matemática en la educación secundaria: ecología didáctica y transferencia

Programa de doctorado en Didáctica de las Ciencias, las Lenguas, las Artes y las Humanidades

Doctoranda: Susana Vásquez Elias

Directora: Dra. Berta Barquero Farràs y Dra. Marianna Bosch Casabò

Tutora: Marianna Bosch Casabò

Indagación matemática en la educación secundaria: ecología didáctica y transferencia

Memoria presentada para optar al grado de doctor por la Universidad de Barcelona

Autora:

Susana Vásquez Elias

Directoras:

Dra. Berta Barquero Farràs

Dra. Marianna Bosch Casabò

Programa de doctorado:
Didáctica de las Ciencias, las Lenguas, las Artes y las Humanidades

Línea de Investigación:
Didáctica de las Matemáticas y las Ciencias Experimentales

Facultad de Educación

UNIVERSITAT DE BARCELONA

Resumen

La presente investigación aborda el problema de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En los últimos años, diversas corrientes de innovación pedagógica han emergido, destacando la implementación de un currículum competencial que desplaza el énfasis desde los conocimientos hacia las competencias, introduciendo nuevos dispositivos didácticos como las situaciones de aprendizaje. Además, la empresa privada ha contribuido con plataformas en línea que ofrecen materiales didácticos alternativos al tradicional libro de texto. Estas innovaciones reflejan la necesidad de cambio y la insatisfacción de la comunidad educativa con los enfoques tradicionales de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Para llevar a cabo este cambio de paradigma, es esencial un vínculo estrecho entre la comunidad educativa y la investigación, para diseñar, gestionar y analizar estos nuevos dispositivos y estudiar sus condiciones de difusión, tomando en consideración el avance científico en el área.

Esta tesis se fundamenta en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), que proporciona un marco conceptual y metodológico para nuestra investigación. La TAD estudia las condiciones que se requieren para realizar un cambio de paradigma, alejándose de una visión de la enseñanza centrada en los saberes y en el profesor como transmisor central de estos, hacia un enfoque que pone las cuestiones en el centro del proceso educativo. Dentro de este marco, se introducen los recorridos de estudio e investigación (REI) como dispositivos didácticos principales, alineados con la enseñanza basada en la indagación, donde los procesos de enseñanza-aprendizaje se centran en la investigación de cuestiones problemáticas y en la elaboración de respuestas a estas cuestiones.

La ecología de los REI – es decir el estudio de las condiciones que facilitan su implementación y de las restricciones que la limitan – ha sido objeto de estudio durante estas últimas dos décadas a nivel tanto nacional como internacional, principalmente en el grupo de investigación de la TAD. Sin embargo, estos estudios a menudo se han realizado en condiciones facilitadoras muy artificiales, alejadas del aula promedio. Esta tesis surge de la necesidad de experimentar los REI en un entorno de aula convencional, con las restricciones típicas de las instituciones educativas, para analizar desde un punto de vista epistemológico y didáctico los fenómenos que ocurren al implementar estos dispositivos.

Para esta investigación, utilizamos la ingeniería didáctica como método, tanto para el diseño como para el análisis de varios ciclos de experimentación de propuestas en un mismo centro educativo. Consideramos dos REI que se diseñaron e implementaron en el último curso de la educación secundaria obligatoria, junto con varios ciclos de implementación de cada uno.

El primer REI es un recorrido finalizado, diseñado para que la investigación de los estudiantes conduzca a estrategias de recuento en el ámbito de la combinatoria. En este caso, se parte del problema de la seguridad de distintos tipos de candados, llevando a los estudiantes a desarrollar sus propias estrategias para el recuento de códigos.

El segundo REI es un recorrido no finalizado alrededor del estudio del COVID19, donde se parte de una cuestión generatriz abierta sobre el virus, permitiendo que la investigación sea dinámica, aunque se prevea el recurso a ciertos saberes, en particular estadísticos.

Esta investigación analiza, por un lado, la ecología del desarrollo de los REI mencionados, y por otro, incorpora la importancia de los procesos de modelización en la dinámica de los REI y la potencial interdisciplinariedad que estas propuestas plantean.

Nuestra investigación ofrece una visión integral y práctica de la implementación de los REI en la enseñanza de las matemáticas en la educación secundaria. Proporciona dispositivos creados bajo el contexto concreto de una escuela, pero con resultados prometedores para su posible transferencia a otros centros y niveles educativos.

Abstract

This research addresses the issue of mathematics teaching and learning in secondary education. In recent years, various pedagogical innovations have emerged, notably the implementation of a competency-based curriculum that shifts the focus from knowledge to skills, introducing new didactic devices such as learning situations. Additionally, private companies have contributed with online platforms offering alternative educational materials to the traditional textbook. These innovations highlight the need for change and the dissatisfaction within the educational community regarding traditional approaches to teaching mathematics. To achieve this paradigm shift, a close link between the educational community and research is essential to design, manage, and analyse these new devices and study their dissemination conditions, considering scientific advances in the field.

This thesis is based on the Anthropological Theory of the Didactic (ATD), which provides a conceptual and methodological framework for our research. The ATD studies the conditions required to realize a paradigm shift, moving away from a teacher-centred knowledge transmission approach to a focus on inquiry-based education. In this context, study and research paths (SRPs) are introduced as primary didactic devices, aligned with inquiry-based learning, where teaching and learning processes focus on investigating problematic questions and developing responses to these questions.

The ecology of SRPs – the study of conditions that facilitate their implementation and the restrictions that limit it – has been studied over the past two decades, mainly within the ATD research group. However, these studies often took place under very artificial facilitating conditions, far removed from the average classroom. This thesis arises from the need to experiment with SRPs in a conventional classroom setting, with the typical restrictions of educational institutions, to analyse from an epistemological and didactic perspective the phenomena that occur when implementing these devices.

We employ didactic engineering as a method for both designing and analysing several cycles of proposal experimentation within the same school. Two SRPs were designed and implemented in the final year of compulsory secondary education, along with several implementation cycles for each.

The first SRP is a finalized path, designed to lead student investigation to counting strategies in combinatorics. This involves starting from the problem of the security of different types of locks, leading students to develop their own strategies for counting codes.

The second SRP is an open-ended path around the study of COVID-19, starting with a generating question about the virus, allowing for dynamic investigation while anticipating the use of certain knowledge, particularly statistical.

This research examines the ecology of the development of the mentioned SRPs, emphasizes the importance of modelling processes in SRP dynamics, and explores the potential interdisciplinarity these proposals present.

Our study offers a comprehensive and practical view of implementing SRPs in secondary mathematics education, providing devices created within the specific context of a school, but with promising results for potential transfer to other schools and levels.

Agraïments

Després d'aquest llarg camí, arriba el moment de fer memòria, reflexionar sobre tot el que ha passat i agrair a totes aquelles persones que m'han donat suport durant tot aquest procés. Mirant enrere, em quedo amb el record d'un viatge tranquil, on totes les pedres s'han posat en el moment adequat, i tot i que hi ha hagut moments difícils de gestionar, acabo amb una sensació d'orgull i satisfacció plena.

L'agraïment més important el dec a les meves directores: la Berta i la Marianna. Quan vaig començar els estudis de doctorat, no només ho vaig fer per una inquietud professional, sinó també com a mitjà de recerca de referents als quals poder admirar i, sens dubte, heu superat les meves expectatives. No només heu estat les meves directores, sinó també mentores en els moments crítics. Us estic molt agraïda per aquests anys de viatge juntes i per la gran oportunitat que ha representat poder formar part del vostre equip.

A tots els companys i companyes del grup de la TAD, tant els més sèniors com les companyes de doctorat. Escoltar-vos en seminaris, congressos o reunions, aprendre i poder treballar amb vosaltres ha estat tot un privilegi. Gràcies!

A la direcció del col·legi Natzaret, especialment a la Cristina i a la Mary, us agraeixo enormement el suport que m'heu donat, facilitant-me la tasca de compaginar els estudis de doctorat amb la feina de professora, i donant-me tota la llibertat per desenvolupar les meves idees i propostes, així com per assistir a congressos o reunions, escoltant-me i donant-me suport en els moments crítics.

Als companys que heu participat en algun REI: Ferran, Andrea, Guillem, Álex, Raquel, Inma y Míriam. Us agraeixo la confiança que vau posar en mi per liderar els projectes i tota la feina, temps, entrevistes, enquestes i maldecaps que us he fet passar. Aquesta investigació també és vostra. En especial, a mi compañero y amigo Ferran, que desde el primer año te involucraste al máximo, lanzándote conmigo a la incertidumbre. Gracias por tu paciencia, profesionalidad, sentido del humor y tu capacidad para "estar" siempre que te he necesitado.

A les meves alumnes, de les diferents escoles on he anat passant: Natzaret, Sant Josep Obrer i Santa Anna, tant les que heu participat en alguna experimentació com les que no. Sou el meu principal estímul i la raó primera per dedicar-me tant al món de la docència com, ara, al de la investigació.

En la part més personal vull agrair la Míriam, per poder tenir-te com a amiga i referent (de professional i de persona), el teu suport i els teus consells i paraules de reafirmació m’han ajudat molt en molts moments. Gràcies a tota la “meva gent”, als que heu estat present i m’heu escoltat en els moments difícils. Gràcies!

Finalmente, a mi familia, por enseñarme a ser perseverante con mis objetivos y por estar siempre allí, vigilando que todo fuera bien. Y, por último, a ti, Tote, que te has llevado sin duda la peor parte y aun así has sabido cuidarme, apoyarme, tranquilizarme y darme todo lo que he necesitado con un amor que me ha salvado en más de una ocasión.

Índice

Capítulo 1: Introducción

1.1. La problemática de enseñar matemáticas en secundaria. Una reflexión personal

El punto de partida de esta tesis se encuentra en el problema de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En esta primera parte, narraré mi experiencia personal en la profesión de ser profesora de matemáticas y las dificultades que he ido detectando en relación con la enseñanza de las matemáticas y cómo estas mismas dificultades fueron las motivadoras de la investigación que se aborda en esta tesis. Además, después de cada etapa, iré presentando las cuestiones docentes que me generó cada experiencia, así como unas primeras hipótesis y reflexiones sobre qué se propone aportar al conocimiento y formación para la profesión de docente.

1.1.1. Mi formación como profesora y el problema de la vocación docente

A pesar de que mi formación inicial fue un grado universitario de Física, pronto mi carrera profesional se orientó hacia la enseñanza de las matemáticas. Mi primera experiencia profesional fue como profesora de repaso universitario, donde asistía a estudiantes de primer año de carrera en sus asignaturas de matemáticas. De primera mano observé cómo muchos de los estudiantes llegaban a los estudios superiores con una comprensión deficiente de conceptos matemáticos básicos. Ahí me di cuenta de que, al asumir este nuevo rol de profesora, incluso en funciones de refuerzo, mi dominio de la disciplina debía ir mucho más allá de la formación inicial que había recibido en la carrera. Este desafío me permitió un estudio de las matemáticas aplicadas en varios ámbitos: ayudar a estudiantes de farmacia con problemas de estadística, a estudiantes de ingeniería con cálculo diferencial, a estudiantes de informática con álgebra de matrices, y la lista podría continuar.

Posteriormente, decidí especializarme a través del máster en profesorado (en particular, de matemáticas). Durante este programa, identifiqué que entre mis compañeros (aproximadamente 30), yo era la que tenía una formación más sólida en matemáticas, sin ser matemática. La mayoría eran arquitectos o ingenieros, normalmente con experiencia en la empresa privada. En las clases recuerdo sentir desconexión del resto, ya que yo encontraba fascinantes los problemas de modelización matemática planteados en las clases de didáctica de las matemáticas del profesor Joan Gómez, o las situaciones contextualizadas presentadas por la profesora Iolanda Guevara. Sin embargo, no percibía que esta sensación fuera compartida por los demás.

Al iniciar mi carrera como profesora de secundaria, me encontré nuevamente con diversos desafíos profesionales. Al realizar mis primeras sustituciones, buscaba profesores referentes que me inspiraran, pero en general me encontré con un colectivo agotado, estresado y con una alta carga lectiva. Muchos de ellos, no solo los de matemáticas reflejaban una actitud poco apasionada por su profesión. Esta actitud podía justificarse por las condiciones del trabajo que, aunque mejores que actualmente, empezaban a ser deficientes. Los descansos eran utilizados para planificar la siguiente sesión, y no era raro ver a profesores coordinando las asignaturas compartidas durante la hora del almuerzo. Lo más común era dedicar los fines de semana a corregir; y era bien sabido por todos que, si había un fin de semana largo, al regresar siempre había una reunión de evaluación y las notas debían estar listas para entonces. Cuando se conseguía tener una hora no lectiva para corregir o preparar, solía estar ocupada por otras tareas. Por lo tanto, la primera impresión fue que ser profesor requería mucho sacrificio. Además, en mi búsqueda de referentes, identifiqué varios profesores, aunque de otras asignaturas, que me inspiraban por su habilidad comunicativa, por su trato con el alumnado o por su capacidad de gestionar los conflictos, pero no encontré a nadie con experiencia en el campo de la matemática, del que pudiera aprender cómo ser un buen profesor *de matemáticas.*

Por otro lado, observé que el primer desafío profesional al que se enfrenta un profesor novel es la gestión del aula. Afortunadamente, en los centros donde he trabajado, esta tarea ha sido relativamente sencilla, aunque sin duda requiere una gran parte del esfuerzo. Siempre he considerado que la actividad que se presenta a los estudiantes es una herramienta facilitadora para la gestión del aula. Sin embargo, reconozco que en estos primeros años mi enfoque docente se centraba en garantizar que los estudiantes pudieran aprobar los exámenes. Enseñar con énfasis en el examen fue lo que aprendí de mis colegas con más experiencia.

De ellos, identifiqué una vez más la problemática que ya había encontrado anteriormente. En la mayoría de los casos, los profesores de matemáticas que encontraba en los primeros centros carecían de una formación sólida en la materia y ninguno con formación matemática: economistas, biólogos, químicos, o incluso maestros de EGB, todos impartían sus materias y las matemáticas. A pesar de su dominio en la gestión del aula, su habilidad como buenos comunicadores y control de la materia, tenían propensión a no salirse del libro, a reutilizar los materiales utilizados en cursos anteriores y estas actitudes dificultaban mucho mis intentos de renovar la dinámica de clase. Incluso con el paso del tiempo, cuando ingresaban al centro nuevos profesores, sin demasiada experiencia en muchos casos, notaba que estas dinámicas de profesores más experimentados también se repetían en ellos. En este caso, dedicaban todo su esfuerzo en la gestión del aula y les quedaban poca energía para la innovación.

Surgía entonces la cuestión de: ¿cómo aprovechar el potencial de estos nuevos perfiles, que también son expertos en otros ámbitos? Estos profesores podrían aportar mucho al trabajo de propuestas interdisciplinares, aspecto que se descubrirá más adelante. En consecuencia, es natural preguntarse si se podría utilizar esta variedad de perfiles docentes para promover una perspectiva de la enseñanza interdisciplinar, y cómo utilizar la experiencia de base de estos profesores expertos en otros ámbitos para enriquecer la interacción entre disciplinas.

1.1.2. Docencia e innovación

Durante mis primeros años de desarrollo profesional, ya como profesora de secundaria, tuve la suerte de trabajar en el Col·legi Natzaret, un centro reconocido por su enfoque innovador en la enseñanza. Desde el momento en que ingresé, cada año recibíamos formación en metodologías innovadoras y se nos animaba a aplicarlas en el aula. Estas metodologías partían de la premisa de que la enseñanza debía centrarse en el alumno y no en el profesor, es decir, "el alumno es el protagonista del aprendizaje". Esta frase resonó profundamente en mí, ya que hasta ese momento visualizaba las clases de matemáticas centradas en el profesor: yo era la protagonista y los estudiantes debían estar pendientes, atentos, entender y reproducir lo que yo explicaba. Al adoptar este cambio de mentalidad, comencé a cuestionar otras dimensiones del proceso de enseñanza.

Esta dinámica cultivó en mí una necesidad de no conformarme con métodos de enseñanza más transmisivos, ni quedarme estancada en un solo estilo, sino más bien descubrir y adoptar nuevas técnicas y prácticas cada año. Sin embargo, noté que el enfoque de la innovación en estos centros se limitaba a la dimensión pedagógica. Se nos ofrecía una formación transversal y aplicable desde la educación infantil hasta el bachillerato, válida para todas las materias escolares, pero sin centrarse en el contenido específico de cada disciplina. Aunque encontraba muy necesaria esta formación y actualización constante, también encontré algunas limitaciones. Por ejemplo, notaba una cierta sobrecarga en la frecuencia de la actualización: aún no habíamos tenido tiempo de consolidar las metodologías que nos habían implementado un año, que al año siguiente ya se nos presentaban nuevas propuestas. Además, teniendo en cuenta el poco tiempo del que dispone, en general, un profesor, las formaciones se solían hacer en un formato muy compacto: nos enseñaban lo necesario para implementar y muchas veces notaba que se necesitaba mucho más tiempo de reflexión, alguna lectura o momentos para poder cuestionar las limitaciones de esa metodología. Aunque se presentaban como metodologías *muy contrastadas y estudiadas*, no existía una colaboración clara con ninguna organización investigadora ni universidad.

Como he comentado previamente, las propuestas que se nos presentaban solo modificaban el aspecto pedagógico de la enseñanza, pero poco se decía de otro problema que yo identificaba en las aulas. Cada día en la clase de matemáticas me enfrentaba a dilemas muy comunes en la comunidad docente y con los estudiantes: ¿por qué enseñamos lo que enseñamos? Lo que enseñamos, ¿qué funcionalidad o interés tiene? ¿Qué necesidad hay de enseñarlo? ¿Por qué no enseñamos otras cosas, que parecen tener más utilidad? Todas estas cuestiones se silencian al nombrar "el currículum", estamos obligados a enseñar lo que nos ordena el currículum, y en parte esa reflexión tranquiliza, ya que interpela a las instituciones encargadas de creación curricular o instituciones investigadoras en la enseñanza de las matemáticas, entre otras. De este modo, el docente se libera de la responsabilidad de enfrentarse a ciertas cuestiones al referirse a un ente superior, el currículum. Esto le permite distanciarse de las restricciones y limitaciones impuestas por el currículum, sobre las cuales no tiene control directo para modificar. Pero el mismo cuestionamiento también es lanzado desde el alumnado: ¿Para qué me va a servir esto en el futuro? ¿Esto no lo podría calcular mucho más rápido con la calculadora/ordenador? ¿Por qué tenemos que aprendernos estas fórmulas de memoria? Estas cuestiones son más difíciles de responder y a menudo quedan en el aire, ya que “el currículum” no es una justificación suficiente para el alumnado.

Después de estos primeros años, pude identificar estos problemas docentes: la falta de referentes en profesores expertos en matemáticas en los centros de secundaria y la necesidad de un cambio en las metodologías de enseñanza más tradicionales, centradas en el profesor, por unas donde el foco es el alumno, específicamente en el ámbito de las matemáticas. Por esta razón, decidí embarcarme en estudios de doctorado con el objetivo de especializarme en la enseñanza de las matemáticas. Mi interés no era simplemente mejorar como profesora o que mis alumnos aprendieran mejor, sino más bien investigar cómo diseñar clases efectivas y estructurarlas de manera que el aprendizaje fuera significativo y perdurable.

Además, en el colegio implementamos una nueva metodología para las clases de matemáticas: el sistema ONMAT de la editorial Tekman Books. Esta exigencia institucional implicó que todos los profesores de matemáticas del centro realizaran un cambio instantáneo y que, como equipo, invirtiéramos mucho esfuerzo en aplicar estas nuevas prácticas en el aula. Las clases se volvieron menos expositivas y se promovió el trabajo autónomo del alumno, además de la realización de diversas actividades destinadas a reforzar la comprensión y los proyectos de aprendizaje basados en problemas (PBL).

Una ventaja de adoptar este enfoque a través de una editorial fue que el profesorado no tuvo que diseñar las actividades, sino simplemente aplicarlas, lo que permitió centrarse en la gestión del aula para esta nueva metodología. Sin embargo, observé que en muchas ocasiones tanto otros profesores como yo misma teníamos dificultades para comprender el propósito de las actividades o cómo se integraban las matemáticas en ellas. Esto fue especialmente evidente en los PBL: las propuestas parecían demasiado difíciles de implementar con los recursos proporcionados. Se nos brindaban unos pasos generales para cualquier PBL y una propuesta de solución que parecía inalcanzable para los estudiantes, a menos que se les proporcionara una guía adecuada y muy detallada.

Si bien las propuestas de los PBL eran muy interesantes porque enfocaban el aprendizaje desde un punto de vista práctico, donde las matemáticas estaban al servicio de la resolución de problemas, la falta de una guía detallada del proceso condujo al fracaso en su aplicación. Como resultado, tuvimos que rediseñar estas propuestas, abandonando la idea de PBL para adaptarlas a nuestras clases de manera más efectiva.

Durante la implementación de ONMAT en nuestras clases de matemáticas, contábamos con el respaldo de un representante de la empresa, con quien manteníamos reuniones periódicas. Sin embargo, rápidamente nos dimos cuenta de la escasa eficacia y utilidad de estas interacciones. En la mayoría de los casos, su preocupación se centraba en asegurarse de que dominábamos las herramientas digitales necesarias para operar la plataforma web. Sin embargo, cuando nuestras consultas abordaban temas más amplios, como la gestión de la clase, adaptaciones específicas o el diseño de actividades, esta persona se mostraba incapaz de brindarnos orientación adecuada. En consecuencia, no contábamos con la asistencia de un experto en didáctica o en matemáticas para asesorar a los profesores en la implementación de ONMAT.

Después de valorar esta segunda etapa de participación en procesos de innovación, me cuestioné sobre qué significa, cómo se fundamenta o debe la innovación educativa. Como sucedió en mi caso, esta nació de una editorial, una empresa privada. En los últimos años, están surgiendo varias empresas parecidas que generan un cambio pedagógico importante y vemos cómo muchas escuelas apuestan por ellas. ¿Están estas nuevas empresas están bien respaldadas por los avances de la investigación en didáctica? ¿Cómo ayudan estas editoriales a crear la infraestructura didáctica necesaria para la transferencia de la investigación? ¿Supera la motivación económica al rigor científico? ¿Existe un acompañamiento de personal especializado detrás? ¿Qué tipo de respuestas puede proporcionar una colaboración entre investigación y empresa en la transferencia de la innovación?

1.1.3. Descubrimiento de la investigación en didáctica: la TAD y la propuesta de los recorridos de estudio e investigación

Fue en 2018 cuando conocí a Berta Barquero y a Marianna Bosch, y ellas me presentaron la línea de investigación emprendida y desarrollada por la TAD y, en particular, la propuesta de los REI en la que el grupo se encontraba inmerso. Sin duda, la línea de investigación en la que trabajaban encajaba muy bien con las inquietudes que previamente había empezado a tener. La reflexión alrededor de la contraposición o complementariedad de los paradigmas de visita de las obras y de cuestionamiento del mundo fue toda una revelación, al dar nombre y explicación a un fenómeno que yo ya identificaba en mi experiencia docente. Además, las herramientas de la TAD que empezaba a manipular poco a poco, tanto para el diseño de mis actividades como para su análisis, me ayudaron, sin duda, a mejorar mi práctica profesional. El poder dar vocabulario concreto a acciones que antes carecían de definición hicieron que fuera mucho más sencillo identificar errores y empezar a elaborar propuestas de mejora.

En la primera etapa hicimos una adaptación de los PBL incorporando las dinámicas de la indagación y algunas herramientas de análisis y observación de los REI, para posteriormente diseñar propiamente un REI y experimentarlo durante varios cursos. Esta tarea también presentó dificultades. Por un lado, por la organización del centro: yo no era la única profesora en el aula de matemáticas, sino que era una asignatura compartida entre dos o tres profesores. Luego, tenía que intentar compartir lo descubierto en mi estudio individual con mis compañeros profesores. Tuve que reducir mucho el conjunto de herramientas didácticas que me había acostumbrado a manejar, y transferir sólo aquellas pautas que consideré útiles para la puesta en el aula, dejando muy claro el objetivo y cómo lo llevaríamos a cabo. Creo que esta primera transferencia no se hizo de manera idónea: yo aún era muy principiante en el ámbito de la investigación y mis explicaciones seguro que dejaban más interrogantes que aclaraciones. Aunque en esas sesiones adopté un rol de líder y daba las instrucciones y explicaciones al alumnado, tuve la suerte de contar con un equipo de profesores muy flexible, que ejecutaron sin problemas las indicaciones que les daba. En ese momento fue cuando me empecé a preguntar cómo debía hacerse una transferencia eficiente, eficaz y bien fundamentada desde el mundo de la investigación en didáctica de las matemáticas al profesorado: ¿qué hace falta transferir y cómo? ¿qué herramientas son útiles para el investigador y cómo se deben adaptar para ser transferidas (en caso necesario) al profesorado y a su práctica en aula?

1.1.4. El estado actual. Una reflexión sobre mi práctica docente

Finalmente, reflexionaré sobre el marco del aprendizaje de las matemáticas que he experimentado a lo largo de mis años como profesora. Al inicio de mi carrera, se enfatizaba que el objetivo del aprendizaje no era simplemente transmitir contenidos, sino asegurarse de que los estudiantes fueran competentes en la materia, es decir, enseñarles a ser competentes. Para lograr esto, se proponían situaciones más orientadas a las competencias, menos teóricas o de aplicación directa, donde los estudiantes debían demostrar su capacidad para aplicar los conocimientos y estrategias para resolver problemas. Inicialmente, esta idea me pareció muy coherente. Desde mi perspectiva como profesora, mi objetivo era entrenar a los estudiantes en situaciones competenciales que fueran útiles para la vida, pero para ello estaba convencida de que primero debía dotarlos de las herramientas necesarias.

Sin embargo, pronto me di cuenta de que dedicaba una gran cantidad de tiempo a los primeros pasos: dominar la teoría y practicar ejercicios. Lograr que los estudiantes adquirieran dominio de la práctica era costoso, lo que dejaba poco tiempo para enfocarse en el desarrollo de las competencias. Además, muchas veces los ejercicios competenciales se resolvían con herramientas mucho menos sofisticadas de las que habíamos enseñado en clase, lo que los hacía menos útiles como indicadores de evaluación y terminaban siendo relegados en mis clases. Con el tiempo, mis clases volvieron a adoptar la tendencia de teoría seguida de ejercicios prácticos.

La evaluación por competencias se convirtió en un paradigma difícil de alcanzar dentro de la institución. Además, al observar que mis estudiantes tenían éxito en las pruebas de competencias y sus notas de bachillerato eran bastante buenas, tomé esto como un indicador de éxito y dejé de preocuparme por cumplir con los objetivos competenciales. No les encontraba utilidad para lo que consideraba mi objetivo principal: enseñar matemáticas sofisticadas y asegurar que mis estudiantes fueran hábiles en la resolución de problemas típicos.

Al introducir algunas situaciones de aprendizaje en el aula, se observaron varios fenómenos: en primer lugar, el interés generado en los estudiantes por situaciones que se acercaban a su realidad o presentaban escenarios prácticos y realistas. Además, se destacó el enfoque más transversal del trabajo, que requería en ocasiones la interacción con otras disciplinas, se promovía el debate de argumentos, la reflexión conjunta, el trabajo con datos, la generación de hipótesis y su contraste.

Sin embargo, noté cierta inquietud entre mis colegas profesores. En algunos momentos, parecía que *no hacíamos matemáticas*, ya que el ritmo de trabajo era más pausado y no se dedicaba tanto tiempo a la práctica de ejercicios o a las clases magistrales. Además, muchas de estas propuestas innovadoras se implementaron en muy poco tiempo, haciendo que la transición fuera casi inexistente y los profesores nos vimos abrumados por el cambio, sin sentirnos seguros con las nuevas metodologías y sin asesoramiento de ningún experto para valorar nuestra labor docente.

Actualmente, en el centro educativo aún nos encontramos en esta etapa. Se ha observado una disminución en los resultados de selectividad y un aumento en la ansiedad de los estudiantes frente a estas pruebas. Los profesores perciben que los estudiantes tienen dificultades crecientes con el cálculo, muestran inseguridad sin la ayuda de calculadoras y no poseen la misma destreza que tenían los estudiantes de generaciones anteriores.

Este panorama ha ocasionado un retroceso en cuanto a las dinámicas que anteriormente teníamos establecidas. Se ha retornado al trabajo sin calculadora y a la práctica mecánica de algoritmos, relegando algunos proyectos y situaciones contextualizadas que resultaban desafiantes tanto para los alumnos como para los profesores.

Estas consecuencias negativas son evidentes y me exigen reflexionar sobre: ¿Cómo gestionar la transición de una enseñanza más tradicional, más transmisiva, a las nuevas propuestas de innovación? ¿Qué ética se debe tener presente al experimentar en el aula? ¿El coste que supone para los primeros alumnos, *conejillos de indias*, con los que implementamos nuestras propuestas es suficiente para justificarlas? ¿Cómo debe actuar la comunidad investigadora para garantizar que el proceso de innovación será positivo para estudiantes y profesores? ¿Siempre innovación representa mejoras? ¿Cómo valorar, evaluar, analizar estas supuestas mejoras? ¿Cuáles son los límites de introducir supuesta innovación para estudiantes que, al final, forman parte de un sistema educativo y de una sociedad? ¿Cómo puede ayudar la investigación a encontrar un equilibrio entre paradigmas didácticos y pedagógicos (¿enseñanza más transmisiva, con un fuerte papel transmisor del profesor vs, por ejemplo, enseñanza basada en proyectos con más autonomía por parte de los estudiantes?

Si pensamos en los resultados de los estudiantes, por ejemplo, los que tienen como prioridad superar unos exámenes estandarizados, ¿garantizan estas propuestas que los alumnos salgan totalmente preparados para superar cualquier reto?

1.1.5. La transformación de profesora a investigadora

En mi recorrido profesional de los últimos 13 años he viajado por varias etapas, he pasado por varios roles y ocupado distintas posiciones como profesora: profesora de repaso, estudiante para profesora, profesora novel, profesora coordinadora, estudiante de didáctica, investigadora y observadora-analista didáctica. Gracias a este proceso, he podido recoger de primera mano mis impresiones sobre el estado del profesor de matemáticas, en diferentes instituciones en la actualidad. Debido a mi situación privilegiada, he podido vivir el rol del profesor también desde un punto de vista más externo, como investigadora en didáctica.

Me gustaría explorar la potencialidad del rol de docente como facilitador de conocimiento para la interacción con la comunidad investigadora. Descubrir las posibles transformaciones que puede experimentar un profesor de secundaria al asumir el rol de investigador, así como identificar los rasgos del investigador que podrían resultar beneficiosos para los profesores. Reconozco que existe una distinción inevitable entre mi personalidad como profesora y mi papel como investigadora. Sin embargo, considero que ambas facetas poseen características distintivas y valiosas. Aprovechando este doble rol, me pregunto qué herramientas de la investigación me han ayudado a mejorar mi práctica docente y cuales son útiles para el avance científico, aunque puedan no ser tan fácilmente transferibles al aula. De esta manera, podríamos establecer qué funciones puede tener lo que en la investigación didáctica se ha nombrado un "profesor facilitador" o "*knowledge bróker"* (Arzarello et al., 2014), que mejore la doble interacción profesores-investigadores y asegure las condiciones que den sustento a las propuestas que nacen de la investigación y pretenden ser transferidas y encajar en el aula.

1.2. La teoría antropológica de lo didáctico (TAD)

Esta tesis se enmarca en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). Esta teoría fue por el investigador francés Yves Chevallard (Chevallard, 1985/1991) como un desarrollo de la Teoría de Situaciones Didácticas, inaugurada por Guy Brousseau (Brousseau, 1997), Estos marcos teóricos forman parte de lo que Gascón (1993) denomina el *enfoque epistemológico* en didáctica de las matemáticas. En este programa de investigación, se pretende un análisis didáctico más allá de los modelos del desarrollo cognitivo o psicológico, situando en el centro la búsqueda de modelos específicos que expliquen cómo se originan y desarrollan los conocimientos matemáticos involucrados en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Por lo tanto, nuestra intención será investigar en un sentido tanto didáctico (cuando nos preguntemos *cómo enseñar*) como también epistemológico (cuando analicemos *qué enseñar).*

1.2.1. Paradigmas e indagación

El punto inicial, situándonos ya en el marco de la TAD, es la caracterización de paradigmas pedagógicos y didácticos y el estudio sobre cómo facilitar un cambio de paradigma en la enseñanza y aprendizaje, en particular, de las matemáticas, pero aplicable también a otros ámbitos disciplinares. Chevallard (2015) distingue entre el "paradigma del cuestionamiento del mundo" en contraposición al "paradigma de la visita de las obras".

En el segundo paradigma, cuya forma degenerada deriva en el "monumentalismo", existen dos personajes muy diferenciados: el profesor y el alumno, cada uno con unos roles muy marcados y diferenciados. El profesor enseña y es responsable de ofrecer las explicaciones correctas y el alumno atiende y es responsable de entender las explicaciones del profesor. Después, acostumbra a haber un proceso evaluativo en el que el alumno ha de demostrar que es capaz de reproducir aquello que el profesor le ha ofrecido y en el que el profesor verifica que esos conocimientos han sido devueltos de la misma manera y con la misma corrección que él los había dado inicialmente. Por lo tanto, el proceso del aprendizaje es totalmente unidireccional y hay un objeto claro en el centro del proceso: nociones, teorías, procedimientos, notación, cálculos, algoritmos… Podemos englobarlos todos dentro del concepto de *obra.* Entendemos como obra cualquier construcción humana y, en este contexto, aquellas organizaciones de conocimientos que el currículum propone para que el profesor las enseñe a los estudiantes.

En este paradigma, el profesor es el centro del proceso y su objetivo es enseñar, es decir, presentar las obras del currículum a los alumnos. En cambio, la responsabilidad de los alumnos es aprender aquello que el profesor explica, es decir, visitar las obras que les muestra el profesor. Es común que tanto estudiantes como profesores se cuestionen el porqué de aquello que se enseña, la razón de ser de las obras curriculares (normalmente contestado con previsiones de futuro) o la utilidad o funcionalidad de las obras. Algunas veces se puede forzar alguna situación que se enmascara dentro de este paradigma: primero enseñamos las obras y posteriormente las utilizamos para demostrar su utilidad y validez en un contexto artificial y perfectamente moldeado para que aquella obra encaje a la perfección. A este último fenómeno lo conocemos como *aplicacionismo* (Barquero, Bosch & Gascón, 2013). En este paradigma, la importancia está en el aprender (las obras) y su utilización es parte del reflejo de dicho aprendizaje.

En cambio, en el paradigma del *cuestionamiento del mundo,* el proceso de enseñanza y aprendizaje se entiende como un proceso colectivo, donde los roles de estudiante y profesor están menos marcados que en el paradigma anterior. Ahora, profesor y alumno forman parte de un mismo colectivo: la comunidad de estudio. En este paradigma, el centro del proceso está en la problemática (en las cuestiones que se van a estudiar) y el objetivo es darles respuesta. Durante el proceso se necesitarán herramientas (a veces serán obras), pero estas herramientas pasan a tener una importancia secundaria o, mejor dicho, solo son importantes en la medida en que permiten elaborar respuestas a las cuestiones abordadas. En el paradigma del cuestionamiento del mundo, la importancia está en indagar (cuestiones) para descubrir (y comprender) el mundo.

Como cualquier cambio social y cultural, este cambio de paradigmas no se concibe de manera instantánea. El planteamiento desde la investigación consiste en estudiar las condiciones que permiten el cambio, considerando para ello las propuestas que se sitúan en la transición entre paradigmas. Para dichos estudios, en la TAD se realizan análisis ecológicos: qué condiciones y qué restricciones favorecen y limitan esta transición. Cuando se hacen estos análisis y se pregunta si una actividad determinada está marcada por los indicadores de la visita de las obras. Acostumbramos a hacer un análisis general, entendiendo toda actividad matemática como una actividad humana y, por lo tanto, sujeta a condicionantes de muchos niveles (denominados niveles de codeterminación (Chevallard, 2002)).

Siguiendo el camino de la transición hacia el nuevo paradigma, Chevallard, (2004) propone los Recorridos de Estudio e Investigación (REI) como dispositivo didáctico que aboga centrar el aprendizaje en el estudio de cuestiones, en contraposición a las propuestas del paradigma dominante, que se centran en el estudio directo de saberes atomizados. Estos REI no solo suponen un modelo para diseñar e implementar propuestas que se llevan al aula, sino que también describen un marco de referencia para el análisis de los procesos de aprendizaje de todo tipo, incluyendo aquellos que se sitúan en el paradigma de la visita de las obras.

1.2.2. Los recorridos de estudio e investigación (REI)

La TAD, más allá de ser un marco teórico, ofrece un dispositivo concreto para la transición hacia un paradigma del cuestionamiento del mundo: los recorridos de estudio e investigación (REI) (Chevallard, 2004; Chevallard, 2013). Estas propuestas, que se encuentran en la línea de la "enseñanza basada en la indagación" (Artigue y Blomhøj, 2013), articulan, diseñan y describen procesos de enseñanza-aprendizaje centrados en cuestiones.

Apoyándonos en García et. al (2019), describimos a continuación los puntos clave de un REI:

- El punto de partida es una cuestión problemática, denominada cuestión generatriz, que impulsa el proceso de indagación. La comunidad de estudio, formada por estudiantes y profesores, se proponen abordar dicha cuestión y tienen como objetivo conseguir darle respuesta.
- Durante este proceso, que se asemeja más al de la indagación científica que al típico proceso de enseñanza centrado en la transmisión de conocimientos, surgen nuevas preguntas derivadas que es necesario resolver para poder ofrecer una respuesta completa. Este hecho dota al proceso de su carácter abierto e indeterminado. En estas situaciones caracterizamos el REI como *abierto* o *no finalizado,* en contraposición a los REI *finalizados*, en los que se eligen obras de antemano y se guía el proceso para ir a parar a ellas (Bosch, 2018).
- La investigación de estas cuestiones derivadas es llevada a cabo por la comunidad de estudio de manera colaborativa, pudiendo acceder a toda la información disponible, incluso si esta ha sido elaborada por otras instituciones.
- El estudio de dicha información (u obra) es también parte del proceso y muchas veces requiere de un análisis o "deconstrucción" de esta. Algunas de estas preguntas secundarias implican la búsqueda de nuevos conocimientos u otros recursos que permitan validar, adaptar y desarrollar la información encontrada.
- El proceso finaliza cuando la comunidad consigue desarrollar una respuesta final a la cuestión generatriz, que será significativa e incluirá los elementos globales del estudio.

En España y durante las últimas décadas, se han realizado experimentaciones en varios contextos utilizando estos dispositivos y con resultados muy prometedores. Sin embargo, estas experimentaciones se han realizado en contextos concretos: grupos pequeños, procesos aislados de la asignatura principal o procesos de enseñanza en condiciones normales llevados a cabo por profesores que también son investigadores de la TAD.

Tabla 1: REI experimentados en España en las últimas décadas

Referencia	Nivel	Título/Cuestión generatriz	Dominio de referencia
(Chappaz y Michon, 2003)	Primaria	La caja de la pastelera	Geometría
(Brousseau et al., 2002)	Primaria	¿Qué se esconde en la botella?	Probabilidad y estadística inferencial
(Bosch y Barquero, en proceso)	Primaria y Secundaria	La moda no da la talla	Relaciones aritméticas y geométricas
(García, 2005)	Secundaria	Planes de ahorro	Proporcionalidad
(Rodríguez, 2005)	Secundaria	Tarifas de teléfono	Desigualdades y comparación gráfica de funciones.
(Rojas, 2024)	Secundaria	Envase de perfumes	Modelización funcional-geométrica
(Serrano et al., 2013)	Secundaria	Previsiones de ventas	Modelización
(Roa, 2019)	Secundaria	¿Cómo dividir una parcela en partes iguales?	Geometría
(Benito, 2019)	Secundaria	Cómo construir un horno solar	Cónicas
(Verbisck et al., 2021)	Secundaria	Escasez del agua en Brasil	Estadística
(Jessen, 2016)	Secundaria	¿Cómo se puede aliviar el dolor de un paciente con analgésicos como el paracetamol?	Modelización
(Lucas, 2015)	Universidad	Evolución del virus del Dengue	Modelización
(Monreal et al., 2018) (Barquero et al, 2021)	Universidad	Evolución de los usuarios de Facebook	Modelización

1.2.3. Praxeologías matemáticas

Para poder caracterizar lo que entendemos como REI, necesitamos profundizar la dimensión epistemológica de las propuestas didácticas. En la TAD se utiliza la noción de *praxeología* (Chevallard, 1999b) como modelo general tanto de las actividades humanas como de sus productos en forma de conocimientos. Es decir, a todo aquello que nos permita estudiar las diferentes relaciones entre los diferentes elementos que intervienen en los procesos didácticos. Como uno de sus postulados básico, la TAD introduce la noción de praxeología, negando la visión particularista del mundo social e incluyendo la actividad matemática dentro de un modelo más amplio de actividad humana.

Inicialmente en la TAD conocíamos los modelos epistemológicos de referencia (MER) como aquellos modelos que describen los procesos de enseñanza y aprendizaje mediante la elaboración de modelos generales y en términos de praxeologías. Cuando hablamos de *epistemología* en la TAD nos referimos siempre a aquello que se enseña, es decir, el conocimiento. Dado que la TAD entiende el conocimiento como una organización praxeológica, en realidad iremos en búsqueda de modelos de referencia praxeológicos (MPR) (Bosch & Gascón, 2006; Bosch, 2019).

Las praxeologías están constituidas por cuatro componentes, separados en dos bloques: el "saber hacer", también llamada la *praxis*, que contiene los tipos de tareas (T) y las técnicas que permiten abordarlas (τ); y el "qué saber", también llamado *logos*, que contiene la tecnología (θ) que justifica las técnicas así como las propias justificaciones de estas, las teorías (Θ), que también son las encargadas de justificar la *razón de ser* de las organizaciones así como de proporcionar su interpretación y de organizar los tipos de tareas (Chevallard, 1999a).

En la TAD se han establecido criterios e indicadores para valorar el grado de completitud de dichas organizaciones praxeológicas, observando las relaciones entre los diferentes componentes. De dicho análisis, observamos que, si nos situamos en el paradigma de la visita de las obras, las organizaciones matemáticas suelen tener los bloques de *praxis* y *logos* muy desconectados. Hablamos de la *incompletitud* de las organizaciones matemáticas dentro de la institución escolar y de la *rigidez* de estas (Bosch et al., 2004) como fenómenos típicos de este paradigma predominante.

1.2.4. El esquema herbartiano

Para describir los procesos de indagación que generan los REI, la TAD propone modelos en términos del esquema herbartiano y sus dialécticas (Bosch y Chevallard, 1999; Bosch et al., 2020). El esquema se presenta en los siguientes términos:

$$[S(X; Y; ♥) \rightarrow M = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_j, R_1^{\lozenge}, \dots, R_n^{\lozenge}, O_{n+1}, \dots, O_m\}] \rightarrow R^{♥} ,$$

donde:

$S(X; Y; ♥)$: Sistema didáctico formado un grupo de estudiantes (X) y un grupo de profesores (Y), que comparten un objeto de estudio ♥.

M : Medio experimental, formado por el conjunto de las cuestiones $(Q_1, Q_2, \dots, Q_j)$, las respuestas disponibles y aceptadas por la sociedad $(R_i^{\lozenge})$ y disponible en los *media,* así como las obras existentes y accesibles (O_j).

$R^{♥}$: Respuesta final considerada por X e Y como aceptable.

En un REI, según el esquema herbartiano, profesores y estudiantes se involucran en la investigación de una cuestión generatriz, que define el punto de inicio. A partir de esta cuestión, la comunidad de estudio elabora el medio experimental, es decir, se articulan una serie de cuestiones derivadas, que se van estudiando y dando respuesta. Para este fin, se pueden ir a buscar respuestas existentes en los media (por ejemplo: un libro de texto, internet, el profesor, un experto, etc.) y se ponen en cuestión, analizan y validan utilizando las obras existentes como herramientas. Este medio experimental irá evolucionando, incluyendo nuevas cuestiones, respuestas y obras, hasta que la comunidad de estudio consiga elaborar una respuesta final a la cuestión generatriz.

1.2.5. Las dialécticas de la indagación

Para explicar estas praxeologías (o relaciones), el investigador debe observar los gestos didácticos que ocurren durante el estudio. La TAD utiliza las "dialécticas" para describir estos gestos. Las *dialécticas* se definen metafóricamente como cualquier conflicto que, combinado, permite superar las propias contradicciones para complementarse. Al examinar estos gestos, descubrimos que a menudo se oponen al modelo pedagógico predominante, pero que también ofrecen una respuesta a las limitaciones que normalmente aparecen en las instituciones.

Podemos distinguir nueve dialécticas entre las seis iniciales (Chevallard, 2007) y las tres añadidas posteriormente (D1, D2 y D3) (Chevallard, 2013). Recientemente, Chevallard (2024) ha propuesto añadir una décima dialéctica, “de los sistemas y los modelos” (D10), muy conveniente para nuestra investigación. Todas ellas ayudan a describir la dinámica de indagación de un REI, por lo tanto, participan en su diseño, pero también constituyen herramientas de análisis y gestión muy potentes.

- D1. Dialéctica del estudio y de la investigación (de las preguntas y respuestas)
- D2. Dialéctica del individuo y el colectivo
- D3. Dialéctica del análisis-síntesis praxeológica y del análisis-síntesis didáctica
- D4. Dialéctica de circunscribirse y salirse del tema
- D5. Dialéctica del paracaidista y del buscador de trufas
- D6. Dialéctica de las cajas negras y cajas claras
- D7. Dialéctica de los medio y los media
- D8. Dialéctica de la lectura y de la escritura
- D9. Dialéctica de la difusión y recepción de respuestas
- D10. Dialéctica de los sistemas y los modelos

A continuación, las describiremos utilizando el trabajo de Parra y Otero (2018), veremos cómo aparecen en general en los REI y cómo están relacionadas con los diferentes niveles del análisis didáctico (*cronogénesis, topogénesis* y *mesogénesis*).

D1. Dialéctica del estudio y de la investigación (de las preguntas y respuestas)

En un REI podrán distinguirse dos tipos de momentos didácticos: los momentos de estudio y los momentos de investigación. Estos momentos estarán caracterizados por planteamiento de cuestiones o elaboración de respuestas. La responsabilidad de la generación o desarrollo de preguntas o respuestas no está ligada al profesor o al estudiante, sino que cualquiera se puede responsabilizar de estas tareas. Esto choca con el contrato pedagógico dominante en el paradigma del monumentalismo, donde el profesor es el que genera las cuestiones de interés y proporciona las respuestas. Los estudiantes se responsabilizan también de generar cuestiones, pero que entendemos mejor como “dudas”, y que están totalmente dirigidas a que el profesor las responda.

Esta es la dialéctica principal del análisis sobre la *cronogénesis*, es decir, sobre la evolución del proceso de estudio e investigación.

D2. Dialéctica del individuo y el colectivo

En los REI todos aquellos participantes del estudio (profesores y estudiantes), lo que designamos como la comunidad de estudio, son responsables de la construcción colectiva de las respuestas. En los REI, aunque los equipos de trabajo tengan la responsabilidad individual de realizar su propia investigación, los resultados parciales de esta se comparten con el grupo, de manera que se da por concluida una cuestión en el momento en el que la comunidad consigue proponer y validar la respuesta colectiva.

Podemos identificar esta dialéctica como la responsable del análisis sobre la *topogénesis*, es decir, de la repartición de responsabilidades y roles en el proceso de indagación.

D3. Dialéctica del análisis-síntesis praxeológica y del análisis-síntesis didáctica

Esta aparece tanto en las etapas de diseño como en las del propio proceso de estudio. Por ejemplo, cuando generamos un primer mapa de cuestiones y respuestas (mapa CR, que detallaremos en la sección siguiente), con las posibilidades que ofrece la cuestión generatriz, se ha de realizar un análisis praxeológico profundo y amplio de qué se necesita (técnicas, tecnologías, teorías) para construir las respuestas, pero también se ha de concretar una síntesis de las herramientas que se intentarán focalizar.

Por otro lado, en los momentos de estudio e investigación, los estudiantes analizan mucha información, muchas veces en exceso, ya que suelen abordar cuestiones muy variadas y diferentes entre ellas. El profesor, en la mayoría de los casos, con el rol de guía, puede asumir la responsabilidad de sintetizar la producción colectiva para asegurar una respuesta suficientemente robusta.

D4. Dialéctica de circunscribirse y salirse del tema

En los REI aparecen momentos donde, por ejemplo, al investigar, los estudiantes encontrarán respuestas ya elaboradas por otros, que no comprenderán. Esto les generará cuestiones sobre esas respuestas, cuestiones que no están propiamente relacionadas con la investigación principal, sino que se relacionan con algún otro objeto de estudio. Los REI no descartan incluir momentos más tradicionales, donde estos objetos son estudiados por la comunidad, convirtiendo al profesor, en este momento, como el media principal para elaborar las respuestas.

D5. Dialéctica del paracaidista y del buscador de trufas

En los procesos de indagación vemos que suelen suceder momentos de inspección global alrededor de la cuestión generatriz. Normalmente, en los REI diseñados se suele denominar “lluvia de preguntas”, donde los estudiantes reflexionan sobre el problema y se cuestionan muchos aspectos sobre la problemática (paracaidistas). Una vez identificadas todas las ramificaciones, se van seleccionando más concretamente algunas de estas áreas y se hace un estudio mucho más detallado de una única área, encontrándose allí el saber útil (las trufas) que será necesario para la elaboración de la respuesta.

D6. Dialéctica de las cajas negras y cajas claras

En los REI los estudiantes se suelen encontrar con “cajas negras”, objetos que no comprenden, pero que intuyen que son útiles para la elaboración de las respuestas. En la educación tradicional, estos objetos suelen ser “clarificados” por el profesor, categorizando el aprendizaje en estas dos opciones. Además, en la educación tradicional es el profesor quien selecciona las cajas negras (porque así lo indica el currículum) y las establece como claras cuando esa lección se ha terminado, asumiendo que ya se sabe todo lo que se debería saber. En los procesos de indagación, esto sucede con un rango más amplio de “grises”. El estudiante puede seleccionar qué aspectos de las cajas negras es interesante estudiar y clarificar y no es necesario que sea su totalidad, puesto que los objetos solo interesan en la medida en la que puedan participar en la producción de la respuesta a la cuestión generatriz o a las cuestiones derivadas durante la indagación.

D7. Dialéctica de los medio y los media

Entendemos como medio didáctico todos aquellos recursos de los que se dispone y que se van elaborando durante el proceso de indagación. Algunos de estos recursos ya están disponibles inicialmente, al momento de delimitar la cuestión generatriz. Posteriormente, se irán incrementado a partir de las informaciones, herramientas y obras que se encuentran en los media (un libro de texto, el profesor, internet…). Estos recursos, se incorporan posteriormente en el medio al estudiarlos, validarlos y convertirlos en material disponible para avanzar en el proceso.

Podemos distinguir esta dialéctica que explica la *mesogénesis*, es decir, la construcción del medio experimental necesario para el progreso del proceso de indagación.

D8. Dialéctica de la lectura y de la escritura

En los procesos de indagación, el estudiante primero se encuentra con la información (lectura), la observa, analiza y evalúa, para posteriormente incorporarla en sus producciones. Este gesto queda marcado cuando el estudiante pone por escrito esta información en sus producciones.

En los REI diseñados se han incluido varios dispositivos pedagógicos para facilitar el desarrollo de estas técnicas de escritura. Se han elaborado modelos de diarios de trabajo, de informes finales, de presentaciones finales… Aunque también ha habido situaciones donde el estudiante ha sido más libre de plasmar su investigación en formatos diversos.

D9. Dialéctica de la difusión y recepción de respuestas

En la enseñanza tradicional suelen existir momentos de “explicación”, donde típicamente es el profesor el que difunde un saber y los estudiantes lo reciben. Estas explicaciones no pueden ser cuestionadas, puesto que representan un saber sabio y, aunque los estudiantes identifiquen algunas limitaciones, estas disquisiciones suelen evitarse y rápidamente se vuelve a la explicación.

En los REI, la comunidad de estudio ha de estar capacitada para poder explicar y justificar las respuestas encontradas y el resto de los miembros de la comunidad ha de cuestionarlas e identificar las limitaciones. El proceso, por lo tanto, es mucho más complejo. En los REI diseñados se han propuesto herramientas llamadas “puestas en común” con el profesor como moderador del debate, donde los estudiantes comparten sus respuestas y el resto del grupo las cuestionan y deciden, o no, incorporarlas en su propia investigación.

D10. Dialéctica de los sistemas y los modelos

Los REI parten de una cuestión inicial que se refiere a un sistema. Esta cuestión provoca elaborar un modelo inicial a este sistema. Por lo general, este primer modelo no permite resolver la cuestión directamente. La comunidad tendrá que construir, con la ayuda de unas herramientas (los elementos praxeológicos), un sistema intermedio que permitirá abordar mejor la cuestión inicial.

Como afirma Chevallard, en las descripciones de los procesos de modelización, se suele olvidar aquello que permite pasar del sistema inicial al sistema intermedio. A este fenómeno le llama *praxeología evanescente*.

1.2.6. Mapas de preguntas y respuestas

Como explica Florensa (2018), los mapas de cuestiones y respuestas (mapas CR) han sido una herramienta muy utilizada en la TAD desde la tesis de Barquero (2009), donde se presentan unos "mapas" de posibles trayectorias, para concretar el Modelo Epistemológico de Referencia (MER) describiendo los procesos de estudio (dialéctica 1: de las preguntas y respuestas) en Barquero et al. (2007) o en Hansen y Winsløw (2010).

Los mapas CR (Winsløw et al., 2013) se caracterizan por empezar con una cuestión generatriz y describen el proceso de indagación utilizando una estructura jerarquizada y arborescente, de donde cada cuestión genera sucesivas cuestiones derivadas, así como respuestas a las mismas (Figura 1).

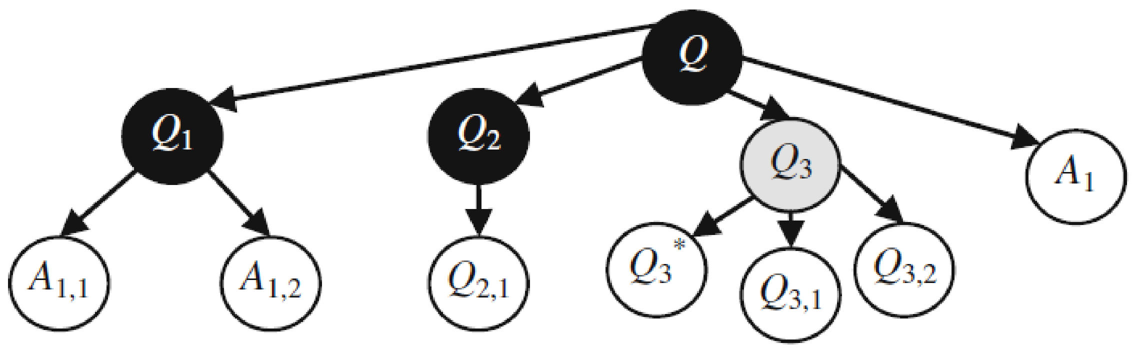


Figura 1: Ejemplo de mapa CR (Winsløw et al., 2013)

Por un lado, el uso de los mapas CR se ve involucrado en todas las etapas de los ciclos de la ingeniería didáctica, que desarrollaremos en la sección siguiente. Para empezar, constituyen la herramienta de descripción del MPR en el análisis preliminar. Sirve como herramienta de diseño del REI en el análisis a priori, como herramienta de seguimiento y gestión en el análisis *in vivo* y como herramienta de validación y reflexión en el análisis *a posteriori*.

Por otro lado, no sólo se ve implicada la dialéctica pregunta-respuesta (D1), sino que del análisis de estos mapas el investigador puede deducir qué medios y media (D7) han sido utilizados, quién se ha responsabilizado de la cuestión (D2), y contrastando el mapa con la observación, puede comprobar qué cuestiones se han escrito de manera explícita (D8) o cómo se ha entrado y salido del tema en cuestión (D4).

1.3. La modelización matemática

El estudio de la modelización matemática en el campo de la educación lo podemos encontrar inicialmente en los trabajos de Freudenthal (1968) y Pollak (1968, 1979) en el simposio "*Why to teach mathematics so as to be useful*", que fue continuado, en 1983, por las conferencias internacionales del ICTMA (Conferencia Internacional sobre la Enseñanza de la Modelización y Aplicaciones Matemáticas) y es por los grupos de investigación dedicados a la modelización en congresos (ICME, CERME) (Barquero, 2023).

Relacionamos la modelización matemática con el uso de modelos (matemáticos) para representar la realidad. En el contrato pedagógico tradicional se ha confundido este aspecto de las matemáticas con la idea de "aplicar" las matemáticas a situaciones concretas de la realidad, de manera que primero se presentan las herramientas matemáticas (técnicas) para luego utilizarlas en una situación realista. Así encontramos que el concepto "modelización matemática" es una idea difusa entre el colectivo de profesores, ya que no se suele entender como una actividad matemática que pueda pertenecer a las escuelas, sino a instituciones superiores.

1.3.1. La modelización matemática y el currículum

La importancia de la modelización ha sido reconocida a nivel internacional en las últimas décadas como una de las competencias centrales en la educación matemática. Por ejemplo, podemos encontrar en el Programa PISA, para la evaluación de estudiantes de la OCDE, que afirma "La noción de modelado matemático ha sido una piedra angular del marco de PISA para matemáticas" (OCDE, 2019, págs. 75-76, traducción propia). En las reformas curriculares de Dinamarca aparecen ya en 1960 y en 1970 en Portugal. Después del año 2000 lo hacen en Alemania y Suecia. En España aparecen menciones esporádicas en 2007 y 2014, pero con una importancia mayor en la reforma de 2020 (Barquero, 2023).

En la última modificación del currículum catalán (Departament d'Educació, 2022a) podemos encontrar aspectos de la modelización; por ejemplo, vemos mención directa a la modelización o al uso de modelos en algunos saberes, solo del sentido espacial o del sentido algebraico.

Tabla 2: Menciones a la modelización en el listado de saberes del currículum (Departament d'Educació, 2020a)

1º y 2º primaria	3º y 4º primaria	5º y 6º primaria	1º, 2º y 3º ESO	4º ESO
Sentido espacial				
Razonamiento, modelización y visualización geométrica			Visualización y modelización geométrica	
Utilización de **modelos** geométricos en la resolución de problemas relacionados con los demás sentidos.	Identificación de **modelos** geométricos en la resolución de problemas similares.	Puesta en práctica de **modelos** geométricos en la resolución de problemas relacionados con los demás sentidos matemáticos.	Uso de **modelos** geométricos para representar y explicar relaciones numéricas y algebraicas en situaciones diversas.	Generación de **modelos** geométricos para representar y explicar relaciones numéricas y algebraicas en situaciones diversas, incluidas las cotidianas. Uso de propiedades geométricas de figuras planas y tridimensionales que **modelizan** situaciones de la vida cotidiana.
Sentido algebraico: Modelo matemático				

Conocimiento de estrategias de **modelización** de situaciones de la vida cotidiana mediante dibujos, esquemas, diagramas, objetos manipulables, dramatizaciones...	**Modelización** de situaciones de la vida cotidiana de forma pautada usando representaciones matemáticas (gráficas, tablas...).	**Modelización** de problemas de la vida cotidiana usando representaciones matemáticas.	**Modelización** y resolución de problemas contextualizados, también de la vida cotidiana, secundándose en representaciones matemáticas y en el lenguaje algebraico. Obtención de conclusiones razonables sobre una situación de la vida cotidiana una vez **modelizada**. Relaciones y funciones: Identificación de relaciones cuantitativas en situaciones contextualizadas, incluyendo la vida cotidiana y determinación de los tipos de funciones que las **modelizan** (lineales y cuadráticas).	**Modelización** y resolución de problemas contextualizados, también de la vida cotidiana, secundándose en representaciones matemáticas y en el lenguaje algebraico, haciendo uso de distintos tipos de funciones. Obtención y análisis de conclusiones razonables de una situación de la vida cotidiana una vez **modelizada**

En cuanto a las competencias que aparecen en dicho currículum, encontramos mención a la modelización en 3 de 9, pertenecientes a la etapa de ESO (ninguna para primaria). Serian (Departament d'Educació, 2022a):

> Competencia específica 1. Interpretar, **modelizar** y resolver situaciones de la vida cotidiana, propias de las matemáticas y de otros ámbitos del conocimiento aplicando diferentes estrategias y formas de razonamiento para explorar procedimientos, obtener soluciones.
>
> Competencia específica 4. Utilizar el pensamiento computacional, organizando datos, descomponiendo en partes, reconocimiento patrones, interpretando, modificando, generalizando y creando algoritmos para **modelizar** situaciones y resolver problemas de forma eficiente.
>
> Competencia específica 5 Conectar diferentes elementos matemáticos relacionando conceptos, procedimientos, argumentos y **modelos** para desarrollar una visión de las matemáticas como un todo integrado.

Y esto no solo se ve en el currículum local, sino que podemos ver que en diferentes países la modelización matemática va ganando importancia dentro de la visión de lo que es importante que adquieran los alumnos de cualquier sistema educativo (Barquero, 2023).

1.3.2. Los ciclos de la modelización

Existe un consenso generalizado sobre el proceso de modelización y su descomposición en varios pasos sintetizados, conocidos como "ciclos de modelización", a pesar de la diversidad de conceptualizaciones de las actividades de modelización (Barquero et al., 2019; Perrenet y Zwaneveld, 2012). Muchos ciclos de modelización con diferentes enfoques se pueden encontrar en la literatura (por ejemplo, Blum y Leiß, 2007; Borromeo Ferri, 2007; Galbraith y Stillman, 2006; Kaiser y Sriraman, 2006; Niss y Blum, 2020). Estos ciclos han sido especialmente útiles como herramienta para análisis de los procesos que siguen los alumnos al resolver actividades de modelización, estudiando lo que ocurre en cada paso, explorando los caminos seguidos y creando nuevas actividades de modelización. Vemos un ejemplo de proceso de modelización en la Figura 2.

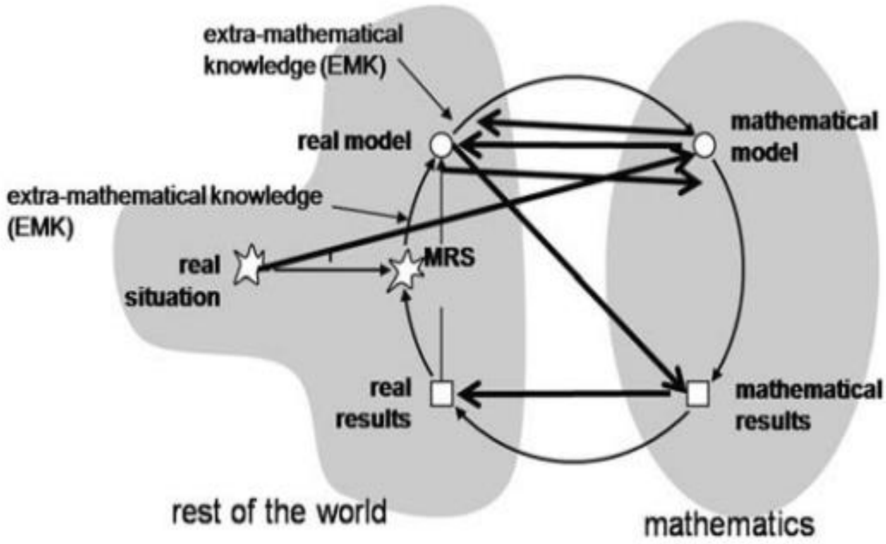


Figura 2. Esquema de un proceso de modelización (estudiante de 10º grado) (Borromeo Ferri, 2010, p. 113)

1.3.3. La modelización matemática en el ámbito de la TAD

En el marco de la TAD, la modelización está relacionada con la noción de que "hacer matemáticas" implica producir, transformar, interpretar y desarrollar modelos matemáticos. El proceso de transposición didáctica, en este campo, también es de gran relevancia, pues la investigación ha de buscar también qué aspectos de la modelización se han de llevar a la escuela. (Chevallard, 1989; García at al., 2006).

Otro aspecto importante para destacar es el rol que juegan los modelos y sistemas. La reciente inclusión de una 10a dialéctica a las 9 iniciales, la dialéctica del modelo y del sistema (Chevallard, 2024), nos reafirma en la necesidad de incluirla para poder describir estos procesos dentro de un REI.

Entendemos el sistema como todo aquello que constituya el objeto de estudio de la modelización. La naturaleza de los sistemas puede ser muy variada: desde un conjunto de datos ya recolectados, hasta una comunidad de estudio, un objeto, un fenómeno... Los sistemas pueden ser extra-matemáticos (provienen de otras disciplinas) o también intra-matemáticos. Los modelos son aquel conjunto de objetos matemáticos que permiten representar el sistema y tienen la capacidad de generar conocimiento sobre el sistema que representa.

La diferencia entre sistema y modelo muchas veces no es tan clara. De hecho, estos dos objetos comparten características y pueden intercambiar funciones. Como se reflexiona en Barquero (2023), estos sistemas y modelos tienen dos características principales: la *recursividad* y la *reversibilidad.*

Dentro del proceso de modelización, una vez el sistema ha sido modelizado, este puede constituir un modelo para sistemas más complejos. A esta característica de los modelos-sistemas la conocemos como *reversibilidad* y resulta muy interesante para los procesos de enseñanza, ya que cuando los estudiantes consiguen estudiar en profundidad un cierto sistema, se convierten en “expertos” en la actividad matemática que hay detrás, permitiendo cambiar de estatus al sistema y convertirlo en modelo, para poder estudiar, por ejemplo, similitudes con otros sistemas similares, reutilizar las técnicas para modelizar otros sistemas, encontrar patrones más generales, generando modelos cada vez más evolucionados y, por lo tanto, haciendo evidente también la característica de *recursividad* del proceso de modelización: es un proceso recursivo en el sentido que se involucra una redefinición continua de los sistemas a modelar y una evolución constante de los modelos generados.

La TAD propone la matemática como herramienta de modelización, e interpretada como articulación y concatenación de praxeologías matemáticas o de modelización de complejidad creciente. De esta manera, la modelización nos sirve tanto de herramienta epistemológica como didáctica para la gestión y análisis de los procesos.

Como explica Barquero (2023), el proceso de modelización como herramienta de construcción de conocimiento, dentro de la TAD, la entendemos a través de las praxeologías. Cuando se produce el proceso de modelización, entendemos que existe una *tarea* a resolver, utilizamos unas *técnicas* para elaborar modelos y los validamos, justificamos y valoramos los límites de estas técnicas mediante la *teoría*. Este proceso es claramente *recursivo,* ya que una vez el proceso ha finalizado, podemos cuestionar el modelo y convertirlo en sistema a estudiar para volver a empezar nuevamente con el proceso y generar un nuevo modelo que represente mejor o tenga menos limitaciones que el modelo anterior y así sucesivamente. Luego, los objetos matemáticos no representan sistemas o modelos de antemano, si no que pueden funcionar como unos u otros en diferentes etapas del proceso, mostrando así su naturaleza *reversible* (Figura 3).

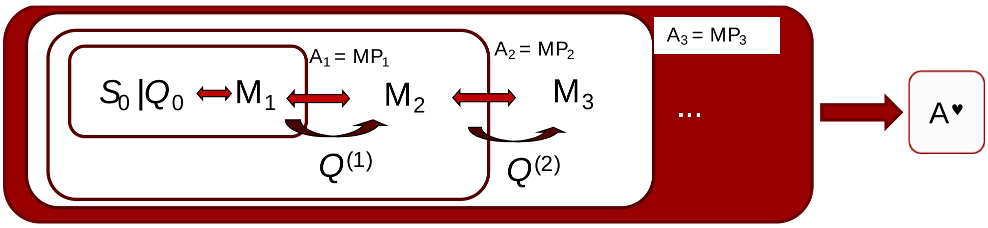


Figura 3. Representación del proceso de modelización en la TAD (Barquero, 2023)

Las investigaciones dentro de la TAD reflejan fenómenos didácticos relacionados con los procesos de modelización matemática (Barquero, 2009; García, 2005). Los dos fenómenos didácticos que queremos plantear están relacionados con el aplicacionismo y la interdisciplinariedad.

Por un lado, estos procesos de modelización se viven en la escuela desde el paradigma de la visita de las obras. Las actividades de modelización de las instituciones aparecen como imposición del currículum y su enseñanza se ha visto aislada y no es articuladora de las estructuras matemáticas ligadas al resto del currículum (García et al, 2006). Volvemos a ver la predominancia del *aplicacionismo* como el modelo epistemológico dominante (Barquero et al, 2013), donde la modelización se vive como la transferencia de modelos y donde la única tarea consiste en *aplicarlos*, limitando así todo el potencial que este podría ofrecer.

Por otro lado, la modelización tal como se entiende en la TAD no es específica de la disciplina matemática. En los últimos años, y relacionado con la creciente necesidad de incluir la modelización en los estándares curriculares internacionales, también hay una alta demanda de integrar la modelización en diversas disciplinas (Blum y Niss, 1991/2007; Cai et al., 2014; Houston, 2009). Vemos así la necesidad de relacionar la modelización con el carácter interdisciplinar de las propuestas basadas en la indagación, como los REI.

1.3.4. La modelización como motor de la indagación

Como se explica en (Barquero et al., 2011), la modelización tiene el rol determinante en los procesos de indagación. Por un lado, podemos ver que la modelización está presente en el concepto de REI. Partimos de una cuestión generatriz (Q_0) que se inscribe en un sistema (más o menos) matematizado. Durante el proceso de indagación se describe y modeliza el sistema. Las respuestas provisionales (R_i) no se pueden elaborar únicamente dentro del sistema, sino que emerge la necesidad de elaborar modelos que expliquen los sistemas y hacerlos evolucionar, así como la comprobación de la validez y alcance de dichos modelos. Por este motivo podemos decir que la *indagación* es el *motor* de la modelización. Los REI facilitan el proceso de modelización y evitan así la tendencia de reducir la modelización matemática escolar a la presentación directa de los modelos matemáticos con el único objetivo de ser aplicados en situaciones y sistemas artificialmente preparados para ello.

1.3.5. Modelización matemática e interdisciplinariedad

Otra de las potencialidades de la modelización matemática como herramienta para la transición hacia un paradigma de indagación reside en la variedad de disciplinas de origen para los sistemas. Aunque denominemos a los sistemas como “matemáticos”, al igual que la modelización, son objetos que pertenecen a la realidad, y la realidad es, por definición, interdisciplinaria. Luego, la modelización es una herramienta que nace de la matemática y la ciencia, pero sirve y funciona para multitud de ámbitos, tanto científicos como sociales o incluso para el arte (English, 2009).

Los autores que estudian el origen y desarrollo histórico de las disciplinas definen los dos aspectos básicos de las disciplinas escolares: la labor de transposición didáctica y la academización de un saber que debe ser “transformado en objeto de enseñanza” (Julia, 2000, p. 47). Definen tres componentes del código disciplinar, que representa aquello que configura, organiza y ordena las disciplinas (Viñao, 2006): unos contenidos, un discurso y unas prácticas:

> Todas o prácticamente todas las disciplinas se presentan en este sentido como cuerpos de conocimientos, provistos de una lógica interna, articulados en torno de algunos temas específicos, organizados en planes sucesivos claramente diferenciados y que conducen a algunas ideas sencillas y precisas o, en cualquier

caso, encargadas de ayudar en la búsqueda de la solución de los problemas de mayor complejidad (Chervel, 1991, pp. 89)

Desde el punto de vista de la TAD, según Bosch y Gascón (2009, pp.89): "*cuando hablamos de una teoría o disciplina […] nos referimos generalmente a un conjunto de praxeologías que designamos metonímicamente a partir de su componente tecnológico-teórico*". Construimos un cuadro comparativo de las diferentes definiciones alrededor de las disciplinas y praxeologías, así como las analogías entre ellas

Tabla 3: Relaciones entre disciplinas desde un punto de vista histórico y praxeologías en la TAD

Definición de disciplina (Viñao, 2013)	Definición de praxeología (Chevallard, 1999b)
Cuerpo de conocimientos (Contenidos)	Qué saber (*logos*) - Discurso que describe y justifica las técnicas y estructura los tipos de tareas
Lógica interna (discurso): Valor formativo y la utilidad académica, profesional o social de dichos contenidos.	Qué saber (*logos*) - Teorías/disciplina que justifican la razón de ser
Prácticas (Saber empírico) - Prácticas docentes en el aula: el modo de transmitir, enseñar y aprender los contenidos de la disciplina	Saber hacer (*praxis*) - Tipos de tareas - Técnicas que permiten abordarlas
Prácticas (Saber empírico) - Prácticas académicas frente a otros campos disciplinares: la presentación social y académica de la disciplina propia y el modo de referirse a las restantes o de comportarse con los que a ellas se dedican	Organizaciones praxeológicas que se asocian o estructuran en distintos campos y disciplinas, de forma evolutiva y relativa a las instituciones tanto productoras como transmisoras del saber

Desde el punto de vista histórico, podríamos definir las disciplinas como el conjunto de organizaciones praxeológicas con algún "tema" (en el sentido de Chervel (1991)) en común. Aun así, para completar esta definición de disciplina, hay que tomar en consideración las instituciones en las que se generan, transponen y desarrollan las praxeologías. En el caso de las disciplinas escolares, según (Viñao, 2013), las disciplinas son:

1. Fuente de poder social y académico: campos jerarquizados entre los que se desarrollan situaciones de dominio y hegemonía, de dependencia y sujeción.

2. Apropiaciones, por grupos de profesores determinados, de espacios sociales y académicos: cotos exclusivos configurados como tales a consecuencia de su apropiación por unos profesores determinados, acreditados como tales profesores de dicha disciplina por su formación —títulos, currículum— y su selección o modo de acceso, dos aspectos en general controlados por quienes ya están habilitados para «cazar» en el coto. […] (Viñao, 2013, pp. 266).

Luego, en el paradigma del cuestionamiento del mundo planteado por la TAD, el punto de partida nos sería el estudio de las disciplinas, puesto que se organizan las estructuras escolares alrededor de las cuestiones, no de las disciplinas. Estas aparecerían más adelante: al estudiar las cuestiones y de manera inevitable surgirían las obras a visitar y estas pertenecen (por una cuestión social e histórica) a alguna disciplina (o a varias).

En esta línea, en el marco de la TAD, existe un posicionamiento claro respecto de la modelización: esta no representa una dimensión dentro de la matemática, sino que la matemática es, en esencia, una actividad de modelización (García et al., 2006). Por lo tanto, no se distingue ninguna razón a priori para considerar la modelización como intra-matemática o extra-matemática. Como afirman los autores, la distinción entre extra o intra-matemática será la naturaleza de la componente teórica de las praxeologías, que la determinará el contexto en el que situemos el sistema.

El cuestionamiento del mundo es adisciplinar: las cuestiones no tienen, intrínsecamente, una única disciplina, sino que pueden abarcar multitud de estas y, a su vez, interconectarlas. Con esta revisión comparativa entre la definición histórica de las disciplinas y su interpretación en la TAD llegamos a la conclusión: en el paradigma del cuestionamiento del mundo tiene más sentido hablar de modelización (en el sentido amplio) que de disciplinas aisladas. Es el estudio de las cuestiones el que nos puede llevar al estudio de una (o varias) disciplinas. Consecuentemente, el paradigma del cuestionamiento del mundo se vuelve un gran aliado en la búsqueda de un aprendizaje interdisciplinar.

1.3.6. La combinatoria desde la perspectiva de la modelización

Uno de los sistemas/modelos matemáticos que serán claves en el desarrollo de esta tesis reside en el problema de la combinatoria: los problemas de contar y sus estrategias. Entendemos la combinatoria como un ejemplo de dominio (en el sentido de la ecología didáctica, como veremos más adelante) que podemos cuestionar fácilmente desde la perspectiva de la modelización.

En el modelo praxeológico dominante en la enseñanza de la combinatoria, distinguimos que tienen un fuerte componente las *técnicas* que se utilizan para contar, pero muy débil en cuanto a los elementos *tecnológico-teóricos* que las sustentan. Es decir, en la enseñanza clásica de la combinatoria se ha puesto mucho énfasis en la aplicación de fórmulas-modelo para la resolución de problemas-modelo. Por lo tanto, en términos praxeológicos, hay mucho trabajo de la técnica, mucho componente *praxis*. Sin embargo, la justificación de estas técnicas está ausente en el modelo tradicional y, por lo tanto, poco componente *logos*.

En el trabajo de final de grado de Juberó (2022) se hace un análisis praxeológico de dos libros de texto, uno de ellos que podríamos considerar representativo de la organización dominante en el sistema educativo actual y uno que ofrece varias alternativas al aprendizaje tradicional. En este último, se introduce un cuestionamiento intermedio para guiar la resolución de problemas, un sistema simbólico para describir los modelos y se proporciona un problema prototípico a cada tipo de problema. Estas alternativas al libro de texto tradicional facilitan la actividad de modelización y aportan elementos intermedios entre los sistemas considerados y la construcción de los modelos que facilitan el recuento de elementos. Sin embargo, la organización matemática propuesta, sigue encorsetadas en la atomización, rigidez de las técnicas, así como el aislamiento temático propio del aplicacionismo.

Si consideramos el libro de texto *Marea Verde* (Juberó, 2022) como un buen representante de la organización matemática dominante en secundaria sobre los problemas de contar, descubrimos que los tipos de problemas de contar serían:

- Problemas de permutaciones
- Problemas de variaciones
- Problemas de combinaciones

Y las estrategias directamente proporcionadas:

- Diagramas de árbol
- Listas de cadenas

En el análisis realizado por Juberó (2022) se reflejan varios indicadores como, por ejemplo:

> Queda en manos de los alumnos el determinar, para cada problema, si el conjunto de objetos por contar corresponde a permutaciones, variaciones o combinaciones. […] Se identifican los diagramas de árboles y la construcción de tablas como herramientas […] Y no se especifican las situaciones donde convendría más una que la otra. […] Las nomenclaturas no son las estándares. […] raramente aparece en el texto un discurso tecnológico para interpretar el resultado de aplicar las técnicas de resolución de los problemas de contar. […] No hay tareas abiertas. […] La rutinización es rígida ya que no hay un progreso en el uso repetido de las técnicas. (Juberó, 2022, p. 57-62)

En este ejemplo, se proporcionan directamente los modelos, acompañados de problemas resueltos donde se aplica cada modelo. El modelo, por lo tanto, aparece como obra a ser enseñada y aplicada para resolver problemas puramente académicos. En ningún momento se plantean otras fases del proceso de modelización: ningún sistema a estudiar ni validación del alcance de las técnicas. Por lo tanto, aquí no podemos entender la combinatoria como dominio de la modelización, ya que no identificamos más etapas que la de la aplicación de los modelos en situaciones concretas.

En cambio, en el análisis del libro de texto *Almadraba* (Bosch et al., 1997), se ofrecen tres tipos de problemas iniciales:

- Quinielas: representación de las variaciones con repetición.
- Distribución de pósteres: Variaciones sin repetición.
    - o Caso particular, cuando el total de símbolos coincide con el número de elementos del grupo o cadena: Permutaciones.
- Reparto de premios: Combinaciones.

Se presenta el proceso de abordar los problemas de contar en cuatro fases:

- Descripción simbólica (o traducción del enunciado al lenguaje simbólico)
- Análisis cualitativo de los grupos de símbolos
- Análisis cuantitativo de los grupos de símbolos

- Fórmula general de un tipo particular de problemas

Además, se ofrece una clasificación de los tipos de problemas:

- Problemas simples (los tres iniciales)
- Problemas compuestos, que tratarán los problemas descomponibles, es decir, aquellos que se pueden descomponer en una cadena de problemas simples.

Finalmente se describe esquemáticamente un *algoritmo de clasificación* (Figura 4).

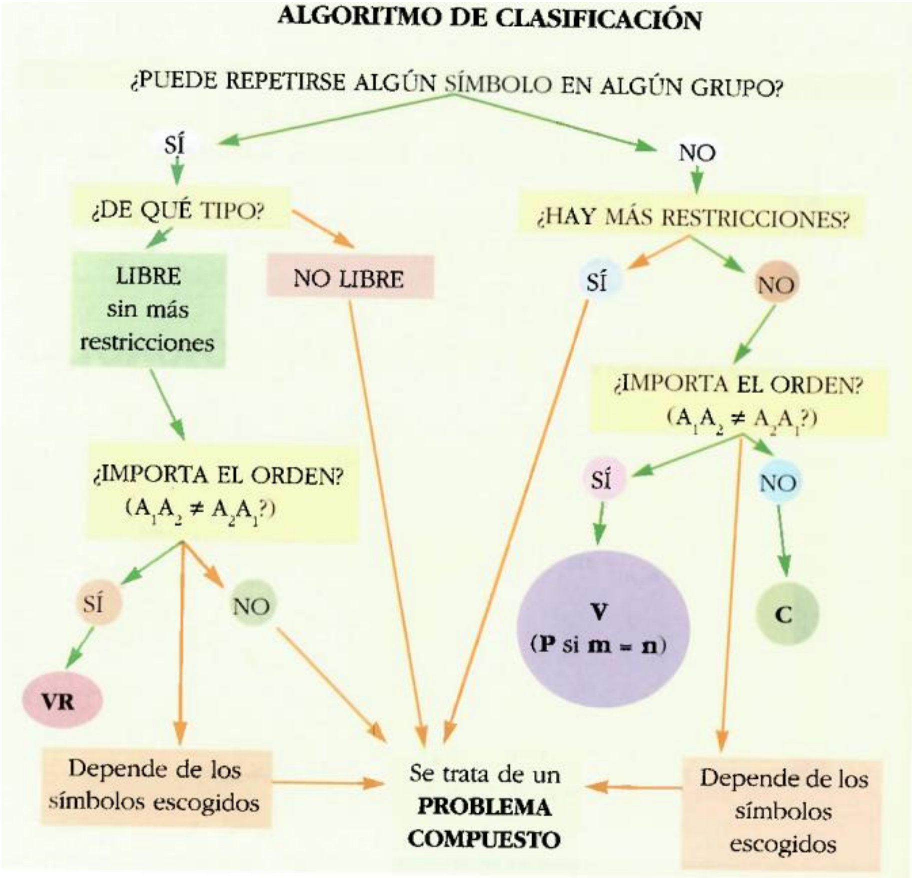


Figura 4: Algoritmo de clasificación de problemas del libro Almadraba (Bosch et al., 1997)

En el análisis comparativo Juberó (2022) describe esta organización matemática como:

> Se propone un gran tipo de problemas sobre cómo contar un conjunto de objetos y se introduce una técnica general basada en una primera modelización del conjunto de objetos por contar a partir de cadenas de símbolos. Este modelo intermedio es el que permite determinar, en una segunda fase, si la cadena de símbolos corresponde a permutaciones, variaciones o combinaciones. [...] Durante todo el proceso son preguntas exploratorias las que guían el desarrollo de la técnica. (Juberó, 2022, p. 58)

Aun así, esta presenta limitaciones:

> Hay muy poca diversidad de técnicas. [...] No hay problemas de contar inversos. [...] No se identifican actividades abiertas. [...] No aparecen de forma explícita cuestiones de interpretación y justificación de las técnicas. (Juberó, 2022, p. 58)

En este caso, los modelos se presentan como respuesta a un cuestionamiento, que, aunque sigue teniendo una motivación puramente académica, estudia unos sistemas (los problemas de contar), plantea unas estrategias y analiza su alcance, tal como haría la modelización más profesionalizada.

Utilizaremos este análisis comparativo como punto de partida para el planteamiento de una propuesta de REI que aborde las limitaciones que ofrecen las organizaciones matemáticas actuales alrededor de los problemas de contar.

También en el estudio de Juberó (2022), se indica que la propuesta del libro de Almadraba (Bosch et al., 1997) presenta restricciones propias al ser un libro de texto, un recurso didáctico muy encorsetado en el sistema educativo existente, pero que supone un punto de inicio para proponer unas organizaciones matemáticas con una dimensión praxeológica más completa.

En este punto es interesante observar que se nos plantea una cuestión docente que representa uno de los pilares de esta tesis: Siguiendo la evolución de las organizaciones matemáticas anteriores, ¿podemos hacer una propuesta de REI que supere las limitaciones anteriores y ofrezca un paso más en la transición hacia el paradigma del cuestionamiento del mundo a través de la modelización de los problemas de contar? ¿Dichas propuestas introducen una mayor completitud praxeológica, generando un estatus más claro al componente *logos* que en las aproximaciones clásicas?

1.4. Estudios empíricos realizados

Como eje principal de esta tesis se incluye el diseño y la implementación de dos REI en el 4.º curso de educación secundaria y 1.º de Bachillerato, en la misma escuela concertada. Tanto para el diseño como para el análisis de estas experimentaciones se utiliza la metodología de la ingeniería didáctica, que detallaremos a continuación.

1.4.1. Metodología: ingeniería didáctica

El marco metodológico que sigue esta tesis es el de la "ingeniería didáctica", que fue introducido por Artigue (1988 y 2014) y adaptado posteriormente al caso de los REI (Barquero y Bosch, 2015) y se estructura en cuatro fases de análisis: preliminar, a priori, *in vivo* y *a posteriori* (Figura 5).

Figura 5: Ciclos de la ingeniería didáctica (García et al., 2019)

En el análisis preliminar se identifican los fenómenos didácticos de interés, se realiza un análisis epistemológico del contenido matemático que se plantea, así como el análisis de las condiciones y limitaciones que plantean las instituciones involucradas. La segunda fase, el diseño y análisis a priori, tiene una doble componente: matemática y didáctica. En ella se define y caracteriza el contenido matemático previsto (dimensión matemática) y cómo se generará este contenido matemático: qué cuestiones problemáticas son más interesantes y tienen más papel generador (dimensión didáctica).

En esta segunda fase se describe el diseño desde tres niveles de análisis didáctico (Chevallard, 1985) (Barquero y Bosch, 2015): *mesogénesis, cronogénesis* y *topogénesis*. La *mesogénesis* describe la evolución de los medios experimentales disponibles, la *cronogénesis* la evolución temporal de las cuestiones o saberes involucrados y la *topogénesis* habla de la distribución de responsabilidades del profesor y de los estudiantes.

La tercera fase consiste en el análisis *in vivo*, en donde se produce la experimentación, se observan las interacciones y se recogen datos. Finalmente, en el análisis *a posteriori,* se contrastan, validan y desarrollan las hipótesis de investigación y se da respuesta a los fenómenos didácticos propuestos en la primera fase.

Aunque estas fases están diseñadas para seguir una propuesta muy lineal, la realidad es que en la implementación muchas veces se solapan y suelen surgir interacciones entre las diferentes fases. De esta manera, a partir de los resultados detectados en el análisis *in vivo* o *a posteriori*, suelen aparecer nuevos fenómenos didácticos a estudiar o nuevo contenido matemático a describir en las futuras experimentaciones.

Los fenómenos didácticos generales que se abordan son el cambio de paradigma, mencionado anteriormente, la integración de los procesos de modelización matemática y la emergencia de relaciones interdisciplinares en los procesos de indagación.

1.4.2. Metodología: la ecología de los REI

Para el análisis general de los REI nos centraremos en el estudio de su *dimensión ecológica*. La entendemos como el estudio de las condiciones que facilitan y de las restricciones que limitan la integración de los procesos dentro de las instituciones escolares.

Para este tipo de análisis Chevallard (2002) introduce la *escala de niveles de codeterminación didáctica* (Figura 6).

Civilización ↔ Sociedades ↔ Escuela ↔ Pedagogía
Disciplinas ↔ Dominios ↔ Sectores ↔ Temas ↔ Cuestiones

Figura 6: Escala de niveles de codeterminación didáctica

Gracias a esta escala podemos identificar en qué niveles se sitúan dichas condiciones y restricciones y así poder valorar hasta qué punto son modificables dentro del alcance de la actividad docente. En lo que sigue, consideraremos principalmente tres niveles de la escala: el de la escuela, al considerar las características del centro educativo donde se han implementado los REI; la pedagogía como conjunto de dispositivos generales para el estudio propuestos en la escuela y que no son específicos de ninguna materia o proceso concreto de estudio; y finalmente la disciplina o disciplinas de las materias de enseñanza relacionadas con los REI.

1.4.3. Condiciones del centro

Todas las experimentaciones desarrolladas en esta tesis han sido experimentadas en el mismo centro escolar, durante varios cursos consecutivos e involucrando un equipo de profesores, entre los cuales encontramos a la investigadora principal. A continuación, describiremos las características generales del centro, poniendo énfasis en aquellas condiciones que, a priori, resultan favorables para la implementación de los REI.

El Col·legi Natzaret es un centro de dos líneas, con alumnado que, en general, inicia la escolaridad en las primeras etapas de infantil (P3) y llega, como mínimo, hasta 4.º curso de ESO. Algunos de ellos continúan los estudios de Bachillerato, que también se ofrecen en el centro. En las clases de matemáticas, y salvo algunas excepciones ocurridas durante la época de pandemia, los dos grupos clase (A y B) están dispuestos en un aula grande, con capacidad para los dos grupos. Aun así, la estructura del edificio permite dividir esta aula doble en dos aulas con una capacidad de unos 30 alumnos cada una.

El centro se sitúa en Esplugues de Llobregat, un municipio cercano a Barcelona. Se trata de un centro religioso concertado con tradición familiar en el barrio. El alumnado, en general, es de un nivel sociocultural medio-alto y muy poco disruptivo. El ambiente de clase suele ser agradable y tranquilo.

En la organización escolar se priorizan las matemáticas, añadiendo una hora extra a las demandadas por la legislación, de manera que todos los cursos de secundaria, exceptuando 1.º de ESO, disponen de cuatro franjas horarias a la semana de matemáticas. Además, en todos los cursos se responsabilizan un mínimo de tres profesores. De manera que, en general, una clase de matemáticas acostumbra a tener unos 60 estudiantes, con tres profesores y cuatro sesiones a la semana, de entre 50 y 60 minutos. Es necesario indicar que, en la realidad de estas cuatro sesiones, muchas veces el tercer profesor está ausente, ya que o bien se requiere para otras gestiones del centro o la organización horaria no permite que los tres profesores estén en las cuatro sesiones semanales. Otras veces son cuatro profesores, con una repartición horaria dispar, muchas veces algún profesor sólo entra una o dos horas. Esto a veces genera una dificultad de gestión y coordinación de profesorado: algunos de los profesores del curso no se responsabilizan al 100% de la asignatura, puesto que no disponen del 100% de carga lectiva, por lo que acaban dependiendo de las indicaciones de los profesores que tienen la dedicación completa y se convierten más en un profesor de apoyo que en un referente.

En los últimos años el centro ha sufrido un proceso de renovación del profesorado, haciendo muy inestable el equipo de profesores: profesores con mucha experiencia docente, pero con una competencia digital limitada, profesores sustitutos temporales, profesores nuevos tanto en el centro como en la profesión... Todos provenientes de otros ámbitos (economistas, ingenieros, biólogos...) y para los cuales las matemáticas eran una asignatura extra aparte de las propias de su formación. Por lo tanto, consideramos un equipo de profesores de matemáticas inestable, aunque joven y dinámico.

La línea de innovación del centro sigue metodologías pedagógicas alineadas con la investigación cognitiva, que engloban el "aprendizaje significativo" (Ausubel, 1968), las inteligencias múltiples (Gardner, 1983), el pensamiento lateral (Bono, 1970), aprendizaje cooperativo (Johnson & Johnson, 1989), proyectos de comprensión, herramientas de pensamiento y metacognición (Perkins, 1992; Swartz, 2013) o portfolios (Stefanakis, 2002).

Durante los últimos años, las clases de matemáticas han seguido la metodología pedagógica de la editorial "Tekman Books", ONMAT, que sigue todas las corrientes anteriores. Estas propuestas están divididas en bloques temáticos, muy parecidos a los temas tradicionales, aunque un poco más fragmentados. En cada bloque temático se ofrecen actividades variadas, muy alejadas a las metodologías de la enseñanza tradicional. Las actividades principales que se proponían a los estudiantes eran:

- Rutinas y estrategias del pensamiento (propuestas que nacen del *Project Zero*[1], de la Universidad de Educación de Harvard): Actividades individuales, cortas y muy dirigidas, donde se plantea una situación, problema o noticia. No suele haber problema a resolver, sino preguntas de reflexión acerca de la situación planteada. Son actividades que están muy destinadas a desarrollar aspectos cognitivos del estudiante.
- Ejercicios: Actividad digital, con ejercicios mecánicos y problemas auto-corregibles. Los estudiantes debían realizar las actividades en su cuaderno,

[1] https://pz.harvard.edu

anotando las estrategias utilizadas y escribir el resultado final en la aplicación digital. Al enviar la actividad, la plataforma autocorregía estas respuestas, ofreciendo al alumno una realimentación inmediata de sus resultados.

- Actividad manipulativa: actividad dirigida por el profesor donde, siguiendo unos pasos, los estudiantes acababan descubriendo o desarrollando alguna propiedad matemática a través de la manipulación de materiales.
- Recurso teórico: Espacio similar al libro de texto tradicional, separado por temas, donde el estudiante podía encontrar los saberes relacionados con el tema. En el contrato didáctico con los estudiantes esta relación estaba muy clara: si un estudiante se encontraba con alguna dificultad, sabía que en el recurso teórico podría encontrar algunas respuestas que le ayudarían a resolver la dificultad.
- Masterclass: clase magistral típica. En la estructura de una unidad esta no solía aparecer al principio, sino que se dejaban algunas sesiones para que el alumnado se enfrentara a los problemas y los profesores asesoraban individualmente a los estudiantes que presentaban alguna dificultad. Más adelante, se realizaban una o dos sesiones de esta "*masterclass*", donde el profesor abordaba algunos de los puntos más conflictivos del recurso teórico. Muchas veces esta "masterclass" se dejaba opcional, a elección de los estudiantes, ya que algunos eran bastante autónomos y preferían enfrentarse solos a los problemas y entender por si solos los nuevos contenidos.
- PBL: Propuestas de *Problem Based Learning*. La editorial planteaba un problema y ofrecía una posible solución, así como los pasos generales de resolución de cualquier PBL. Todos los PBL se hacían en grupo cooperativo y las situaciones se adaptaron para ofrecer una guía del proceso, con metas intermedias y material elaborado por el profesorado, para asegurar que todos los grupos seguían procesos similares. Una de estas herramientas era un diario de clase, donde los estudiantes debían hacer un registro de las tareas realizadas cada día. Además, el PBL solía concluir con la presentación de un producto final.
- Examen: actividad tradicional, con exámenes individuales donde el alumno demostraba saber reproducir las técnicas trabajadas en los ejercicios, con preguntas de un estilo similar a estos.

La actividad que nos sirvió para introducir los REI fueron los PBL. Se utilizó esta franja, conocida por estudiantes y profesores para modificar las herramientas e ir introduciendo algunas más propias de los REI que de los PBL.

Por un lado, se incorporó un diario de clase con la terminología propia de los REI. En estos diarios los estudiantes debían formular las cuestiones trabajadas cada día, así como las respuestas obtenidas y las preguntas que habían quedado pendientes por investigar. Además, debían diferenciar estas cuestiones de las tareas que habían realizado, tareas entendidas como acciones para progresar en la investigación.

Por otro lado, al iniciar cada PBL se planteaba una "lluvia de preguntas" y una clasificación por temáticas. De esta manera, los estudiantes lanzaban muchas cuestiones, algunas con respuesta directa y otras que requerían de más indagación. Estas cuestiones eran organizadas por los profesores y devueltas de manera colectiva a todo el grupo. De todas estas cuestiones el profesor seleccionaba aquellas que resultaban más interesantes y guiaba actividades posteriores para seguir la línea que marcaban estas preguntas. Además, en cada PBL se resaltaba una cuestión inicial, que el profesorado insistía en repetir en cada sesión. A diferencia de los REI, los PBL tenían como objetivo generar un producto final (un video, un informe, una presentación…) y muchas veces la gran parte de sesiones del PBL se dedicaba a alguna tarea matemática concreta: calcular un área, representar unos datos, proponer una estructura que cumpla con algunas características… de manera que la actividad matemática estaba muy dirigida y se explicitaba a los estudiantes.

Por ejemplo, una actividad que nació como un PBL, pero se adaptó para seguir las dinámicas que luego se repetirían en los REI fue la propuesta llamada “Apocalipsis Zombi”. Se trata de una propuesta muy guiada sobre estrategias de previsión de crecimiento de una función exponencial, para estudiantes de 3.º de la ESO. En el Apéndice 3.4 añadimos los materiales utilizados.

Al llevar un par de años siguiendo esta nueva metodología decidimos incorporar los REI propiamente, sin mezclarlos con los PBL, en 4º de ESO. En este curso los estudiantes ya habían adquirido autonomía en las herramientas introducidas en cursos anteriores: redacción de diarios, identificación de cuestiones y respuestas trabajadas, reparto de tareas, investigación en fuentes diversas… La práctica en estrategias y rutinas de pensamiento hacían que la identificación de cuestiones problemáticas fuera relativamente sencilla. Igualmente, los profesores que participaban también habían implementado los PBL en otros cursos, por lo tanto, también estaban habituados a este tipo de trabajo.

1.4.4. Diseño final de los REI

En el transcurso de la elaboración de esta tesis se han experimentado dos propuestas de REI para educación secundaria. El diseño de estas propuestas ha ido evolucionando a lo largo de las diferentes implementaciones, siguiendo la metodología de la ingeniería didáctica, así como adaptándose a las restricciones institucionales y a veces sociales (como en el caso de las experimentaciones realizadas durante la pandemia).

A continuación, describiremos las versiones finales de los diseños de los REI, a modo general. Más adelante, en los capítulos correspondientes, se encontrará una descripción más detallada de estos diseños y en los apéndices, se podrá encontrar el material elaborado.

El REI de los candados

La primera experimentación se trata de un REI finalizado, donde se propone el estudio de la seguridad de un conjunto de candados a través del número de códigos que admiten. Cuando nos referimos a este REI como *finalizado,* nos referimos al sentido que le da Chevallard (2022), en cuanto es un REI con una finalidad concreta: tiene como objetivo ir a parar a unas obras específicas, en este caso, la combinatoria clásica. Podríamos pensar que esta propuesta no difiere mucho de una que viva bajo el paradigma de la visita de las obras, ya que se diseña una actividad para hacer que el alumno se enfrente a una serie de situaciones para hacerle ir a parar a una obra preestablecida. Consideramos que la propuesta se ajusta más a una transición entre el monumentalismo y el paradigma del cuestionamiento del mundo ya que en los REI finalizados, aunque exista una visita de las obras, esta no representa el fin último del REI, sino que existe un proceso que da sentido y razón de ser al estudio de la obra y se genera una emergencia de la necesidad de crear modelos y hacerlos evolucionar cada vez hacia su versión más matematizada, siempre con una razón y motivación intrínsecas.

Este primer REI nació bajo unas restricciones institucionales muy fuertes: el centro marcaba unas fechas concretas para la experimentación y obligaba a las investigadoras a asegurar que la propuesta tuviera relación con el bloque de combinatoria y probabilidad de 4º de ESO del currículum.

Además, recientemente se han añadido dichos saberes a los estándares curriculares de Cataluña (Tabla 4), lo que genera una fuerte restricción institucional en cuanto a la temática general del REI, pero a la vez una condición facilitadora que justifica bien su implementación en el centro durante los diferentes ciclos.

Tabla 4: Menciones a la combinatoria en el listado de saberes del currículum de educación básica y bachillerato (Departament d'Educació, 2022a/2022b)

<table>
<tr><th>1º, 2º y 3º ESO</th><th>4º ESO</th><th>1º Bachillerato: Matemáticas y Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales</th></tr>
<tr><td colspan="2">Sentido numérico</td><td>Probabilidad y estadística</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="4">Conteo - Resolución de problemas y situaciones de la vida cotidiana en los que se vayan a realizar recuentos sistemáticos, utilizando diferentes estrategias (diagramas de árbol, técnicas de combinatoria, etc.).</td><td>Sentido numérico</td></tr>
<tr><td>Conteo – Uso de técnicas de conteo (diagramas de árbol, permutaciones, combinaciones, variaciones) para resolver problemas en los que se tenga que contar elementos de un conjunto.</td></tr>
<tr><td>Sentido estocástico</td></tr>
<tr><td>Predictibilidad e incerteza – Cálculo de probabilidades en experimentos simples mediante la regla de Laplace en situaciones de equiprobabilidad y en combinación con diferentes técnicas de recuento.</td></tr>
</table>

Inicialmente se partió del cuestionamiento de la seguridad digital: ¿por qué las webs nos piden que generemos contraseñas con tantas restricciones? ¿Por qué nos piden que cambiemos nuestra contraseña tan a menudo? ¿Cómo se atribuye el grado de seguridad de una contraseña? Cuando se analizaron los posibles recorridos de esta cuestión, se dio con una limitación: las obras matemáticas relacionadas con estas cuestiones representan una parte muy pequeña del currículum de matemáticas en combinatoria. Todas estas cuestiones se pueden resolver con el concepto de variación con repetición: ¿de cuantas maneras diferentes podemos seleccionar n elementos de un total de m? $VR_m^n = m^n$ ¿Cuántas contraseñas distintas se pueden hacer con $n = 5$ letras del abecedario ($m = 26$)? $VR_{26}^5 = 26^5$. Vemos que mientras más letras o símbolos tenga la contraseña, más segura será esta. Así, en el análisis del alcance de la cuestión generatriz nos damos cuenta de que los media disponibles (contraseñas web) estaban relacionados con obras limitadas y, por lo tanto, no habría un trabajo matemático de interés para el profesor ni para la institución. Así pues, se decidió buscar un símil a las contraseñas web, que permitieran estrategias más variadas. De esta manera, se fue a parar a unos candados con mecanismos variados que permitían generar cadenas de símbolos (como las contraseñas web) a partir de diferentes estructuras y que matemáticamente se ajustaban también a las variaciones sin repetición $V_m^n = \frac{m!}{(n-m)!}$ y a las combinaciones $C_m^n = \binom{n}{m}$

En los primeros diseños del REI (Vásquez et al., 2021a y Vásquez et al., 2021b) se optó por elegir la cuestión generatriz: *¿Cuánto tiempo se tarda en abrir un candado?* Después de un ciclo de experimentación, se decidió cambiar a una cuestión menos dirigida: *¿Qué candado es más seguro?* (Vásquez et al., 2021c, Barquero et al, 2023). Y finalmente, en el diseño final, que se ha definido como: Q_0*: De esta lista de candados, ¿qué candado es más seguro?*

A continuación, se buscaron unos media que permitieran el desarrollo de tipos de tareas más variadas: variaciones con y sin repetición, permutaciones y combinaciones. Los media elegidos fueron unos candados tradicionales y unos alternativos (Figura 7).

Figura 7: Candados disponibles en la experimentación

Vemos que el mapa de cuestiones y respuestas del diseño final (Figura 8) se inicia con la cuestión Q_0: De esta lista de candados, ¿qué candado es más seguro? con sus propias herramientas y saberes previos y que, con la guía (que no instrucción directa) del profesor, construya el medio didáctico correspondiente a las técnicas de conteo de la combinatoria tradicional. De esta manera, el alumno se enfrentará a Q_1: ¿Cuántos códigos admite cada candado? Y en el proceso de encontrar una respuesta, podrá identificar patrones en las estrategias de conteo utilizadas.

Más adelante, una vez abordada la cuestión inicial, se propone una continuación del REI para comprobar el alcance de las estrategias elaboradas, mediante la cuestión Q_2: Nos han dado nueva información sobre los candados, ¿se puede encontrar el número de códigos con la nueva información?

Cuando el alumno ya es *experto* en la resolución de problemas de contar con candados, se propone una ampliación, más allá del REI original, hacia el trabajo de modelización: Q_3: ¿Qué caracteriza un modelo de candado? ¿Cuáles hay? Aquí los alumnos organizan las estrategias e intentan encontrar patrones y expresiones algebraicas a los modelos identificados. En esta fase, el rol del profesor cambia: pasa de asistente o guía a media principal, ya que es el primer momento en el que ofrece el acceso a las obras buscadas (excepto si estas han sido encontradas previamente en la investigación). Esta es la fase de *institucionalización*, donde se enseña la obra de la combinatoria clásica, en el sentido más tradicional. Aun así, esta fase es totalmente prescindible para el proceso de indagación: un estudiante podría no utilizar la combinatoria clásica y establecer su propia notación y algoritmos de resolución de candados para otras situaciones. Y en este sentido se introduce la última cuestión Q_4: ¿cómo resolver situaciones de conteo generales? En donde se proponen a los estudiantes situaciones y problemas de contar, similares a las propuestas en la mayoría de los libros de texto y ajustadas al currículum.

En la Figura 8 vemos el recorrido final ejecutado en las últimas experimentaciones, donde también indicamos las respuestas y estrategias previstas, así como las diferentes etapas de la propuesta.

Figura 8: Mapa de cuestiones y respuestas del REI de Candados

El REI sobre el COVID

El segundo REI diseñado e implementado corresponde a un REI no finalizado, es decir, que no se propone para estudiar ningún tema o ámbito temático en concreto, sino que su planteamiento se define como centrado en el estudio de una cuestión inicial y más abierto en cuanto al tipo de respuesta por elaborar y a las obras necesarias para dicha elaboración.

El primer diseño de este REI nació dentro del contexto del confinamiento durante la pandemia del COVID-19 al finalizar el curso escolar 2019-20 (Vásquez et al, 2021d), en la que se experimenta un diseño inicial únicamente involucrando a la asignatura de matemáticas para estudiantes de 1.º de Bachillerato social. En este diseño, la cuestión generatriz era: *¿El número de personas afectadas por la COVI-19 está evolucionando de manera similar en diferentes países?*

Al identificar una gran componente interdisciplinar, el curso siguiente (2020-21) se decidió hacer un cambio en el enfoque de la cuestión y realizar un estudio más abierto (Vásquez et al., 2022; Vásquez et al., 2023a y Vásquez et al., 2023b), donde cada equipo debía hacer un estudio alrededor de la temática del COVID-19, enfocándose en qué podía resultar interesante de estudiar e involucrando diferentes disciplinas: matemáticas (o estudio de los datos), biología (o estudio del virus), y expresión plurilingüe (estudio de noticias). En este caso, cada equipo debía generar su propia cuestión inicial y realizar su propia investigación. En esta experimentación se pudo hacer un análisis de la potencialidad de cada cuestión generatriz.

En la siguiente experimentación (2021-22) se decidió cerrar un poco la investigación y todos los equipos debían centrarse en el estudio de una única cuestión generatriz: *¿Cuánta de toda la información (sobre el COVID) que se ha dicho ha acabado siendo cierta? ¿Estamos en el momento y con la información suficiente de poder estar seguros de tener las respuestas?* En este caso se incluyó también a la asignatura de tecnología, para poder añadir también un trabajo con un software informático de simulación. Aunque todos los equipos debían estudiar la veracidad de algunas noticias, cada equipo se dedicó a estudiar un aspecto diferente y, por lo tanto, se volvió a tener un REI muy abierto, sin un único recorrido.

Finalmente, en la última experimentación (curso 2022-23) se decidió cambiar la cuestión inicial a Q_0; *¿Qué variante ha sido peor?* y en este caso se potenció un estudio grupal más unificado, donde todos los equipos estudiaban de manera colaborativa la misma cuestión (Vásquez et al, aceptado).

En el caso de esta propuesta no se puede definir un diseño concreto para el REI, ya que al tratarse de un REI no finalizado, su realización dependerá mucho del grupo, el profesorado y las dinámicas y dispositivos utilizados. Aun así, proponemos aquí el mapa de cuestiones final que se consideró para la última experimentación realizada, nutrida también por las experiencias anteriores (Figura 9).

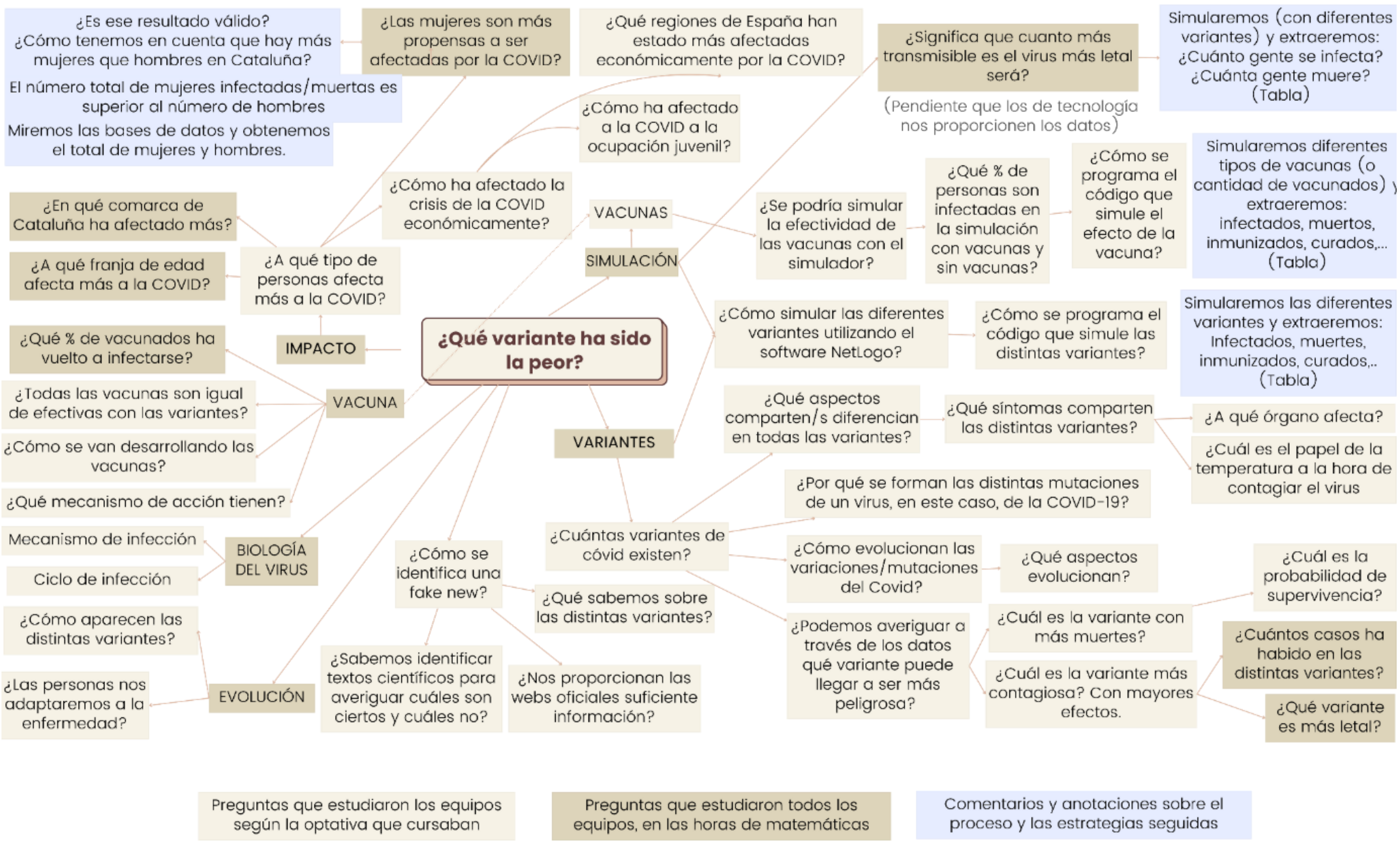


Figura 9: Mapa de cuestiones y respuestas del REI del COVID de la experimentación 2022/23

1.4.5. Diferentes roles del investigador

Durante los diferentes ciclos de las experimentaciones, la investigadora principal ha tomado varios roles en cuanto al diseño, implementación y análisis de las propuestas. Podemos distinguir tres tipos de agentes: el equipo de investigación, la investigadora y el profesorado participante en las experimentaciones. A continuación, describiremos el rol que tuvieron cada uno de dichos agentes.

Durante las primeras experimentaciones, el equipo de investigación y la investigadora principal asumieron la responsabilidad del diseño y de la observación de las implementaciones. Aquí la investigadora tuvo, además, el rol de profesora de aula y, por lo tanto, pudo hacer una observación directa de lo que sucedía en el aula. El equipo de investigación participaba también de esta observación, con lo cual se pudieron hacer triangulaciones de los fenómenos observados. En la fase de análisis se recogieron las impresiones y opiniones de los profesores no investigadores con entrevistas semiestructuradas.

En una segunda fase, cuando la tarea de diseño consumía menos tiempo y recursos y los profesores involucrados ya habían participado en el REI en experimentaciones anteriores, en el diseño inicial se pretendió que la investigadora dejara de funcionar como profesora y pasara a ser observadora de aula, junto con el resto del equipo de investigación. Esta intención inicial no pudo sostenerse durante toda la experimentación: hubo momentos en los que su rol volvió a ser el de profesora, por restricciones horarias o imprevistos, y momentos en los que el equipo de profesores requería de asesoramiento y guía. Por lo tanto, en estas experimentaciones podemos decir que la investigadora ocupó un rol de *facilitadora* a la vez que de *observadora*.

Más adelante, en una tercera fase, el REI se experimentó en ausencia de esta figura de facilitadora y los datos de la observación se recogieron únicamente a partir de la experiencia de los profesores.

1.4.6. Objetivo: LABINQUIRY

Gracias al desarrollo de los REI presentado en esta tesis, así como otros diseñados por el equipo de la investigación de la TAD, en la actualidad se están implementando algunos REI en diferentes escuelas, de varias tipologías y con profesorado muy variado.

Estas propuestas se enmarcan en un proyecto de prueba de concepto, Labinquiry, y en el proyecto de investigación coordinado EDUParadigms. El primero tiene como objetivo crear una infraestructura con recursos y material didáctico para facilitar la implementación de situaciones de aprendizaje en forma de REI y el segundo analizar las condiciones para la transición entre paradigmas en la enseñanza de las matemáticas y otras disciplinas[2].

En particular, el REI de *los candados* ha sido implementado durante el curso escolar 2023/24 en cinco centros de educación secundaria y los resultados prevén seguir

[2] https://atd-tad.org/proyectos/proyecto-prueba-de-concept-labinquiry/

desarrollando las cuestiones de investigación planteadas en esta tesis. Aunque en este estudio aún no se puedan resolver de manera definitiva, esta tesis representa una primera aproximación y una contribución importante a los problemas docentes y de investigación relacionados con la transición hacia el paradigma de cuestionamiento del mundo.

1.5. Del problema docente al reto investigador

1.5.1. Preguntas de investigación

En la introducción de este trabajo introdujimos algunos problemas docentes muy generales y ambiciosos, que podríamos resumir en:

¿Cómo gestionar la transición desde una educación tradicional e implementar las propuestas más innovadoras? ¿Qué podemos hacer, desde la investigación, para acompañar a los profesores, no expertos en didáctica, y que puedan llevar a cabo las propuestas que nacen de la investigación? ¿Estas propuestas garantizan que los alumnos salgan totalmente preparados para superar cualquier reto? ¿Es viable una propuesta interdisciplinar donde se aproveche la naturaleza de los profesores con formación no matemática y esta pueda ser utilizada como una ventaja?

Después de introducir las herramientas teóricas esenciales, podemos formular, ahora más concretamente y siempre en el marco de la TAD, nuestros problemas de investigación (PI).

PI1. Ecología del desarrollo de los REI

Suponiendo una institución docente donde se han debilitado muchas de las restricciones propias del contrato pedagógico habitual,

PI1.1. ¿Qué condiciones son necesarias y qué restricciones limitan el desarrollo de los REI en el aula de secundaria y, en consecuencia, la transición hacia un paradigma del cuestionamiento del mundo?

Si planteamos unas propuestas que nacen de la investigación, pero tienen como objetivo que se adhieran a la comunidad docente y que los profesores no investigadores puedan implementar de manera autosuficiente,

PI1.2. ¿Qué condiciones son necesarias para asegurar un desarrollo sostenible de estas propuestas?

PI1.3. ¿Qué restricciones limitan la participación de la comunidad docente en la implementación de los REI?

PI2. Modelización matemática como núcleo del REI

PI2.1. ¿Cómo interviene la modelización matemática en la dinámica de la indagación en un REI? ¿Cuál es la función de las dialécticas en la dinámica de los REI?

PI2.2. ¿Qué condiciones se requiere para que un REI pueda promover el trabajo de modelización sostenido?

PI2.3. ¿Las propuestas de los REI permiten desarrollar la capacidad recursiva y reversible de los modelos/sistemas matemáticos?

PI2.4. ¿Qué posibles contribuciones aportan los REI finalizados al estudio de las praxeologías?

PI3. Interdisciplinariedad en los REI

PI3.1. ¿Cómo intervienen las disciplinas en la dinámica de la indagación en un REI? ¿Qué restricciones establecen en la enseñanza disciplinar en un REI?

PI3.2. ¿Qué condiciones se requieren para que un REI pueda promover la interdisciplinariedad?

PI3.3. ¿Qué función tiene la interdisciplinariedad dentro del paradigma del cuestionamiento del mundo?

1.6. Estructura de la tesis

En esta tesis se incluyen los estudios basados en dos propuestas de REI implementadas en la educación secundaria, en el mismo centro, durante 4 cursos consecutivos. Estos estudios abordan las cuestiones de investigación que hemos planteado en la sección anterior. En esta sección presentaremos la organización de estos estudios, a qué etapa del proceso de ingeniería didáctica se corresponde, así como las cuestiones de investigación que abordan. En los apéndices se podrán encontrar otros artículos previos y relacionados, pero de menor importancia para la investigación. En el Capítulo 5 se presentan las conclusiones más importantes, en el Capítulo 6 se proponen unas reflexiones finales y nuevas líneas de desarrollo y finalmente, en los apéndices se incluyen los materiales que han sido utilizados en las experimentaciones más recientes, así como otros REI que, aunque se han llevado al aula, aún no han sido investigados propiamente.

1.6.1. Estudios realizados

Para abordar las diferentes preguntas de investigación se han realizado y publicado diferentes artículos y comunicaciones. Algunas de ellas han quedado vacías, puesto que no se ha dedicado ninguna publicación a su estudio; aun así, en las conclusiones intentaremos dar una visión general de nuestras conclusiones al respecto.

Tabla 5: Relación de estudios realizados

<table>
<tr><th>Estudio</th><th>Capítulo</th><th>REI y curso escolar</th><th>Preguntas de Investigación</th><th>Ingeniería didáctica</th></tr>
<tr><td colspan="5">Sobre el REI de candados</td></tr>
<tr><td>(Vásquez et al., 2021a)</td><td>Apéndice 1.1</td><td rowspan="2">Candados 2018/19</td><td rowspan="5">PI1: Ecología del desarrollo de los REI</td><td>Diseño a priori y análisis in vivo</td></tr>
<tr><td>(Vásquez et al., 2021b)</td><td>Apéndice 1.2</td><td>1er ciclo</td></tr>
<tr><td>(Vásquez et al., 2024)</td><td>Capítulo 2</td><td>Candados 2018/19
2020/21 y 2021/22</td><td>3 ciclos</td></tr>
<tr><td>(Vásquez et al., 2021d)</td><td>Apéndice 1.3</td><td>COVID 2019/20</td><td>Análisis preliminar</td></tr>
<tr><td>(Vásquez et al., 2023b)</td><td>Apéndice 1.4</td><td>COVID 2021/22</td><td>2º ciclo</td></tr>
<tr><td colspan="5">Sobre el REI de COVID</td></tr>
<tr><td>(Vásquez et al., 2021c)</td><td>Capítulo 3.1</td><td>Candados 2019/20
2020/21</td><td rowspan="2">PI3: Modelización matemática como núcleo del REI</td><td>2º y 3er ciclos</td></tr>
<tr><td>(Vásquez et al., 2022)</td><td>Apéndice 1.5</td><td>COVID 2020/21</td><td>1er ciclo</td></tr>
</table>

(Vásquez et al., 2023c)	Capítulo 3.2	COVID Bach. 2022/23	PI1: Ecología del desarrollo de los REI	2º ciclo con mismos estudiantes
Interdisciplinariedad				
(Vásquez et al., 2023a)	Capítulo 4.1	COVID 2021/22	PI4: Interdisciplinariedad en los REI PI1: Ecología del desarrollo de los REI	2º ciclo
(Vásquez et al., aceptado)	Capítulo 4.2	COVID 2021/22 2022/23		2º y 3er ciclos (comparación)

1.6.2. Artículos en este compendio

Esta tesis por compendio está compuesta por los siguientes artículos, organizados en capítulos:

Capítulo 2: El problema del diseño y gestión de un REI y transferencia a profesores

Vásquez, S.; Barquero, B. y Bosch, M. (2024). Managing an SRP in secondary school: Which padlock is more secure? En Barquero, B., Bosch M., Chevallard, Y., Florensa, I., Markulin, K. y Ruiz-Munzon, N. (Eds.), *Extended Abstracts 2022: Proceedings of the 7th International Conference on the Anthropological Theory of the Didactic (CITAD7)*. Birkhauser-Springer Nature. https://doi.org/10.1007/978-3-031-55939-6_33

Capítulo 3: Los REI y la Modelización

3.1. La modelización en un REI finalizado: la situación de los candados

Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2021c). Teaching and learning combinatorics in secondary school: a modelling approach based on the Anthropological Theory of the Didactic. *Quadrante, 30*(2), 200–219. https://doi.org/10.48489/quadrante.23878

3.2. La modelización en un REI no finalizado: la situación del COVID

Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2023c). Modelling COVID-19 data with simulations: A recursive process. En P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi y E. Kónya (Eds.). *Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)* (pp. 1363–1370). Alfréd Rényi Institute of Mathematics and ERME. https://hal.science/hal-04416538

Capítulo 4: Los REI y la Interdisciplinariedad

4.1. Diseño de un REI piloto y condiciones para promover la interdisciplinariedad

Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2023a). A Study and Research Path about the Evolution of Pandemics at Secondary School: Conditions for an Interdisciplinary Approach. *Rivista Matematica della Università di Parma, 14*(2), 281–298. http://www.rivmat.unipr.it/vols/2023-14-2/04-barquero.html

4.2. Las disciplinas y la interdisciplinariedad en el paradigma del cuestionamiento del mundo

Vásquez, S. Barquero, B. y Bosch, M. (aceptado) Interdisciplinariedad en educación secundaria: un recorrido de estudio e investigación. *Enseñanza de las Ciencias*. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.6029

1.6.3. Estructura de la tesis

A continuación, detallamos la estructura elegida para el desarrollo de esta tesis.

En el capítulo 1, la introducción, se organiza en seis secciones. Se presenta el recorrido profesional de la doctoranda como profesora de matemáticas en secundaria y los problemas docentes que se encuentra. A continuación, se detallan los aspectos más teóricos en los que se ha basado la investigación: la TAD y la modelización matemática. Finalmente, se definen las condiciones y metodología de la investigación experimental, así como la formulación final de las preguntas de investigación.

El capítulo 2 está compuesto por un artículo, publicado como capítulo de libro, presentado como comunicación oral en el 7.º congreso internacional de la TAD (CITAD7, Barcelona, 2022), que presenta las tres rondas de experimentaciones realizadas en el mismo centro, con estudiantes de 4.º curso de ESO. Este artículo resume el diseño final conseguido después de varios ciclos de ingeniería didáctica, pero, además, se identifican algunas estrategias colaborativas para facilitar la transferencia de los REI entre investigadores y profesores.

Para completar esta sección, en el capítulo 2 se incluyen cuatro artículos en los apéndices 1 a 4. Se trata de dos comunicaciones en congresos internacionales (IRP-TAD 2019 y SEIEM21) y dos artículos de la revista UNO. En ellos se describen distintos aspectos de los diseños de los dos REI principales de esta tesis y de su implementación.

El capítulo 3, sobre los REI y la modelización matemática, incluye dos secciones diferenciadas. La primera contiene un artículo publicado en la revista portuguesa *Quadrante*. En este, se describe el diseño de un REI finalizado, una propuesta de modelización en combinatoria con las herramientas de la TAD y se hace una interpretación del proceso de modelización bajo este paradigma del cuestionamiento. La siguiente sección contiene una comunicación en el congreso CERME13 que, de manera similar al anterior, describe la actividad de modelización con datos reales sobre el COVID, desde la propuesta de un REI, donde se fomenta el aprendizaje basado en la indagación. En ambos artículos, caracterizamos el rol y la evolución de las cuestiones, sistemas, modelos y respuestas en el marco de las dialécticas que propone la TAD.

Además de estos artículos, en el capítulo 3 se incluye un artículo en apéndices. Se trata de una comunicación para el congreso CERME12, donde se presenta el primer estudio del REI sobre el COVID desde la perspectiva de la modelización.

En el capítulo 4, sobre los REI y la interdisciplinariedad, incluimos dos secciones. En la primera se presenta un artículo publicado en la revista italiana *Rivista di Matemática della Università di Parma,* en él se describe una implementación del REI sobre COVID diseñado para generar interdisciplinariedad entre matemáticas, biología y expresión lingüística. Además del diseño y del análisis de la experimentación, se detallan las restricciones encontradas que limitaron el desarrollo interdisciplinar de la propuesta. En la segunda sección de este capítulo se presenta un artículo aceptado para su publicación en la revista *Enseñanza de las Ciencias*, donde se describe la siguiente implementación del REI interdisciplinar sobre COVID, con algunos dispositivos diseñados para incentivar la interdisciplinariedad. En este artículo final, se discute el papel de las disciplinas en las propuestas basadas en el cuestionamiento desde la perspectiva de la TAD.

En el capítulo 5 se presentan los principales resultados y conclusiones incluidos tanto en los capítulos, en los apéndices, así como en estudios realizados, pero no publicados. La estructura de este capítulo intenta dar respuesta a las diferentes cuestiones de investigación planteadas.

Finalmente, en el capítulo 6 se describen algunas hipótesis para las preguntas que han quedado abiertas y algunas líneas de investigación futuras.

En la Tabla 6 añadimos la relación entre las preguntas de investigación planteadas y los artículos y comunicaciones realizadas.

Tabla 6: Estructura de la tesis: Preguntas de investigación y su relación con los artículos publicados

PI1 Ecología del desarrollo de los REI Suponiendo una institución docente donde se han debilitado muchas de las restricciones propias del contrato pedagógico habitual,	
PI1.1¿Qué condiciones son necesarias y qué restricciones limitan el desarrollo de los REI en el aula de secundaria y, en consecuencia, la transición hacia un paradigma del cuestionamiento del mundo?	**Apéndice 1.1** Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2021a). How long would it take to open a padlock? A study and research path with grade 10 students. En B. Barquero, I. Florensa, P. Nicolás, y N. Ruiz-Munzón (Eds.), *Extended Abstracts Spring 2019: Advances in the Anthropological Theory of the Didactic* (pp. 105–115). Birkhäuser. https://doi.org/10.1007/978-3-030-76413-5_12 **Apéndice 1.2** Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2021b). La gestión de un REI en secundaria: ¿Cuánto tiempo se tarda en abrir un candado? En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo, y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 621–628). SEIEM. https://www.seiem.es/docs/actas/24/Comunicaciones/621.pdf **Apéndice 1.4** Vásquez, S., Balat, F. y Orlandi, G. (2023b). Gestión y evaluación de un proyecto multidisciplinar sobre el estudio e impacto de la pandemia. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, 99, 23–32. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=8970749
Si planteamos unas propuestas que nacen de la investigación, pero tienen como objetivo que se adhieran a la comunidad docente y que los profesores no investigadores puedan implementar de manera autosuficiente,	
PI1.2 ¿Qué condiciones son necesarias para asegurar un desarrollo sostenible de estas propuestas? PI1.3 ¿Qué restricciones limitan la participación de la comunidad docente en la implementación de los REI?	**Capítulo 2: El problema del diseño y gestión de un REI y transferencia a profesores** Vásquez, S.; Barquero, B. y Bosch, M. (2024). Managing an SRP in secondary school: Which padlock is more secure? En Barquero, B., Bosch M., Chevallard, Y., Florensa, I., Markulin, K. y Ruiz-Munzon, N. (Eds.), *Extended Abstracts 2022: Proceedings of the 7th International Conference on the Anthropological Theory of the Didactic (CITAD7)*. Birkhauser-Springer Nature. https://doi.org/10.1007/978-3-031-55939-6_33
PI2 Modelización matemática como núcleo del REI	
PI2.1 ¿Cómo interviene la modelización matemática en la dinámica de la indagación en	**Capítulo 3.1** Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2021c). Teaching and learning combinatorics in secondary school: a modelling approach based on the

un REI? ¿Cuál es la función de las dialécticas en la dinámica de los REI? PI2.2 ¿Qué condiciones se requiere para que un REI pueda promover el trabajo de modelización sostenido?	Anthropological Theory of the Didactic. *Quadrante, 30*(2), 200–219. https://doi.org/10.48489/quadrante.23878
PI2.3 ¿Las propuestas de los REI permiten desarrollar la capacidad recursiva y reversible **de los modelos/sistemas matemáticos?** **¿Qué posibles contribuciones aportan los REI finalizados al estudio de las praxeologías?** PI2.3 ¿Las propuestas de los REI permiten desarrollar la capacidad recursiva y reversible de los modelos/sistemas matemáticos?	**Apéndice 1.5** Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2022). The role of models and modelling in the pandemics' evolution: transposing an 'study and research path' to secondary school. En J. Hodgen, E. Geraniou, G. Bolondi y F. Ferretti (Eds.), *Proceedings of the Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12)* (pp. 1177–1186). Free University of Bozen-Bolzano and ERME. https://hal.science/hal-03758988/document **Capítulo 3.2** Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2023c). Modelling COVID-19 data with simulations: A recursive process. En P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi y E. Kónya (Eds.). *Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)* (pp. 1363–1370). Alfréd Rényi Institute of Mathematics and ERME. https://hal.science/hal-04416538
PI3 Interdisciplinariedad en los REI	
PI3.1 ¿Cómo intervienen las disciplinas en la dinámica de la indagación en un REI? ¿Qué restricciones establecen en la enseñanza disciplinar en un REI? PI3.2 ¿Qué condiciones se requieren para que un REI pueda promover la interdisciplinariedad?	**Capítulo 4.1** Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2023a). A Study and Research Path about the Evolution of Pandemics at Secondary School: Conditions for an Interdisciplinary Approach. *Rivista Matematica della Università di Parma, 14*(2), 281–298. http://www.rivmat.unipr.it/vols/2023-14-2/04-barquero.html **Apéndice 1.3** Vásquez, S., Barquero, B. y Romero, O. (2021d). Recorridos de estudio e investigación interdisciplinares: ¿Cómo llevar la problemática actual sobre la COVID-19 al aula? *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, 93, 23–29. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=8029529
PI3.3 ¿Qué función tiene la interdisciplinariedad dentro del paradigma del cuestionamiento del mundo?	**Capítulo 4.2** Vásquez, S. Barquero, B. y Bosch, M. (aceptado) Interdisciplinariedad en educación secundaria: un recorrido de estudio e investigación. *Enseñanza de las Ciencias*. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.6029

Capítulo 2: El problema del diseño y gestión de un REI y transferencia a profesores

El capítulo 2 constituye el primer artículo de este compendio. Este aborda las cuestiones:

PI1 Ecología del desarrollo de los REI

Suponiendo una institución docente donde muchas de las limitaciones propias del contrato pedagógico habitual están eliminadas,

PI1.1¿Qué condiciones son necesarias y qué restricciones limitan el desarrollo de los REI en el aula de secundaria y, en consecuencia, la transición hacia un paradigma del cuestionamiento del mundo?

El artículo está en proceso de publicación, como capítulo de libro en *Extended Abstracts 2022: Proceedings of the 7th International Conference on the Anthropological Theory of the Didactic (CITAD7).*

Resumen del artículo en español:

Este artículo presenta el diseño e implementación de la tercera experimentación de un REI con alumnos de secundaria basado en el estudio de la seguridad de los candados. Por un lado, mostramos la evolución de las condiciones creadas para llevar a cabo el REI y cómo el nuevo diseño se basa en los resultados de experiencias anteriores. Por otro lado, analizamos los recursos que necesitan los profesores que no son expertos en didáctica para dirigir un REI. Si los dos primeros REI fueron gestionados por un profesor que también es investigador TAD, este tercer REI ha sido implementado por dos profesores ordinarios y un investigador TAD adoptando un papel de apoyo y observación. Los resultados obtenidos arrojan luz sobre la ecología de los REI y el tipo de colaboración entre profesores e investigadores que puede apoyar su difusión en las instituciones escolares.

Referencia:

Vásquez, S.; Barquero, B. y Bosch, M. (2024). Managing an SRP in secondary school: Which padlock is more secure? En Barquero, B., Bosch M., Chevallard, Y., Florensa, I., Markulin, K. y Ruiz-Munzon, N. (Eds.), *Extended Abstracts 2022: Proceedings of the 7th International Conference on the Anthropological Theory of the Didactic (CITAD7)*. Birkhauser-Springer Nature. https://doi.org/10.1007/978-3-031-55939-6_33

Otras publicaciones relacionadas se añaden como apéndices:

Apéndice 1.1

Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2021a). How long would it take to open a padlock? A study and research path with grade 10 students. En B. Barquero, I. Florensa, P. Nicolás, y N. Ruiz-Munzón (Eds.), *Extended Abstracts Spring 2019: Advances in the Anthropological Theory of the Didactic* (pp. 105–115). Birkhäuser. https://doi.org/10.1007/978-3-030-76413-5_12

Apéndice 1.2

Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2021b). La gestión de un REI en secundaria: ¿Cuánto tiempo se tarda en abrir un candado? En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo, y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 621–628). SEIEM. https://www.seiem.es/docs/actas/24/Comunicaciones/621.pdf

Apéndice 1.3

Vásquez, S., Barquero, B. y Romero, O. (2021d). Recorridos de estudio e investigación interdisciplinares: ¿Cómo llevar la problemática actual sobre la COVID-19 al aula? *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas,* 93, 23–29. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=8029529

Apéndice 1.4

Vásquez, S., Balat, F. y Orlandi, G. (2023b). Gestión y evaluación de un proyecto multidisciplinar sobre el estudio e impacto de la pandemia. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, 99, 23–32. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=8970749

Managing an SRP in secondary school: Which padlock is more secure?

Abstract. *This article presents the third implementation of a study and research path (SRPs) with secondary school students based on the study of the security of padlocks. Two main research problems are addressed. On the one hand, we show the evolution of the conditions created to run the SRP and how the new design builds on the results of previous experiences. On the other hand, we analyse the resources needed for teachers who are not experts in didactics to run an SRP. If the two first SRPs were managed by a teacher who is also an ATD-researcher, this third SRP has been implemented by two ordinary teachers and an ATD-researcher adopting a supporting and observing role. The results obtained shed light on the ecology of SRPs and the kind of collaboration between teachers and researchers that can support their dissemination in school institutions.*

Keywords: project-based teaching, study and research paths, combinatorics, paradigm of questioning the world, secondary education.

Research project and goals

We present a study that is part of the doctoral thesis project "The ecology of study and research paths in the teaching of mathematics at secondary level". More specifically, we aim at analysing the conditions needed to implement study and research paths (SRPs) in Spanish secondary schools and the constraints hindering this implementation. This project is in line with the more general study of the conditions of possibility for the transition from the paradigm of visiting works to the paradigm of questioning the world. It addresses the general research question:

RQ: What conditions favour and what constraints hinder the development of SRPs in the teaching of mathematics at secondary level?

We take as empirical domain a school in the surroundings of Barcelona that has a strong tradition in innovative pedagogical projects facilitating interdisciplinarity and project-based teaching. This school offers a special organisation of the groups of students in terms of flexibility: the 60 students of each cohort can be grouped in two classes of 30 or three of 20 or a big group of 60 depending on the kind of activity (teamwork, practical work, lecture, etc.). The two or three teachers of each subject can also move among the groups depending on the activity: they can always work with the same group of 20-30 students or rotate with the other teachers. All subjects activate specific innovative instructional proposals that are promoted by the school, like project-based learning, cooperative work, strategies to develop metacognitive skills, specific assessment rubrics and the use of digital tools. If we consider the scale of didactic codeterminacy, compared to many other schools in Catalonia, we can say that this one proposes different conditions at the school and pedagogical levels, which certainly affect the didactic levels and, more specifically, the ecology of the SRPs.

Vásquez, S.; Barquero, B. y Bosch, M. (2024). Managing an SRP in secondary school: Which padlock is more secure? En Barquero, B., Bosch M., Chevallard, Y., Florensa, I., Markulin, K. y Ruiz-Munzon, N. (Eds.), *Extended Abstracts 2022: Proceedings of the 7th International Conference on the Anthropological Theory of the Didactic (CITAD7)*. Birkhauser-Springer Nature. https://doi.org/10.1007/978-3-031-55939-6_33

We thus propose to approach the general research question by considering two specific questions:

RQ1: What specific conditions and constraints appear during the successive implementations of the same SRP about padlocks?

RQ2: What collaborative mechanism and tools can be useful to share the SRP management beetween teachers who are experts in the ATD and teachers who are not?

In previous research (Vásquez et al., 2021a, 2021b), we have described the design, implementation, and analysis of the SRP for grade 10 students starting from a generating question about the security of a collection of padlocks. This SRP is related to the teaching of counting problems and combinatorics and has been implemented during two academic years (2018-19, 2020-21) by the first author, acting as the leader of a team of two or three teachers. In the academic year (2021-22), it was implemented under new conditions: the didactician played the role of observer and let the other two teachers of the course manage the SRP by themselves. We are now presenting the details of this last SRP design and how it built on the results of the previous implementations. We will then describe the organisation of the collaborative strategy between the teachers and the didactician during the management of the SRP.

Institutional context and previous SRPs

The proposed SRP has been implemented for the third time in the subject of mathematics with grade 10 students. The structure and tools introduced with the SRP were not new to either students or the teachers. As mentioned before, in this school it is common to organise project-based activities at the secondary school level (grades 7 to 12), where students work in teams and have an initial problem situation to address.

The first two implementations provided enough stability to the SRP to transfer it to non-research teachers. Thus, the third design already integrated the facilitating conditions identified with the previous SRP implementations. We focus on detailing these conditions chronologically to better show their evolution (Table 1). The main difference in the experimental conditions has been the role of the teacher-researcher. During the first two experiments, she played the role of teacher, but in the third experiment, she only played the role of classroom observer.

<table>
<tr><td></td><td>2018-19</td><td>2020-21</td><td>2021-22</td></tr>
<tr><td>Students participating</td><td>60</td><td>60</td><td>56</td></tr>
<tr><td>Non-ATD-expert teachers involved</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Groups</td><td>3</td><td colspan="2">2</td></tr>
<tr><td>Sessions (1h)</td><td>20</td><td colspan="2">11</td></tr>
<tr><td>Students per team</td><td>3-4</td><td>5-6</td><td>4-6</td></tr>
<tr><td>Type of team</td><td>Heterogenous</td><td colspan="2">Homogeneously according to their grades</td></tr>
<tr><td>Role of the researcher</td><td colspan="2">Teacher</td><td>Observer</td></tr>
</table>

Table 1. Details of the different implementation conditions

Vásquez, S.; Barquero, B. y Bosch, M. (2024). Managing an SRP in secondary school: Which padlock is more secure? En Barquero, B., Bosch M., Chevallard, Y., Florensa, I., Markulin, K. y Ruiz-Munzon, N. (Eds.), *Extended Abstracts 2022: Proceedings of the 7th International Conference on the Anthropological Theory of the Didactic (CITAD7)*. Birkhauser-Springer Nature. https://doi.org/10.1007/978-3-031-55939-6_33

Working with a generating question instead of a goal

In the first two experiments, the teachers gave students a collection of padlocks (see Figure 1) and posed as generating question: “How long would it take to open each of these padlocks?”*.* In the first version, the students naturally gave too much importance to the “correct password”, because to open them you need to know this password. Moreover, the didactic contract about the question did not succeed in making it important enough by itself. Teachers guided the research where they wanted students to go—developing strategies to count the number of possible passwords—without leaving too much freedom to the students, for instance, to search for information about types of padlocks and security mechanisms, ways to open them, the time needed for it, etc.

Therefore, in the following investigations, the question was changed to Q_0: “Which padlock is safer?” It was also added that, as we were in the subject of mathematics, we would not be concerned with the technological aspect of the padlocks, so the option of opening them by force was ruled out. With this new version of the question, in the first discussions, students concluded rather quickly that a padlock will be safer if it admits more passwords or possible combinations of numbers, thus turning the question into counting the numbere of passwords admitted by each padlock.

General organisation

The time devoted to the SRP, 11 sessions in total, did not change from the previous years. The SRP was also proposed during the same period of the academic year, linked to the topic of Combinatorics. To avoid coming back to the traditional didactic contract of the visiting works paradigm, teachers were asked to emphasise their role in all sessions: they will not facilitate answers, they must become members of the research group, lead the debates, and manage the teams’ organisation. The 56 students of grade 10 were divided in two groups, each one led by one of the teachers. Generally, the teacher-observer walked around the two classrooms without intervening and doing digital work (signing diaries, updating instructions, checking deliveries, etc.). Even so, sometimes she had to play the role of teacher due to organisational situations and on other days she also participated in the group discussions, as a reinforcement to the classroom teacher.

The assessment of the project included cooperative and individual work. For the cooperative section, the team had to fill in their daily diaries and a guided workbook. Individual work was evaluated with a bonus system for contributions to group discussions and a final evaluation test, with combinatorial problems.

Physical empirical milieu

The physical locks were available in the three implementation (Figure 1). In the first phases of the first implementation, all teams had to work with all the padlocks. As there were only two units of each type, this became a strong limitation. In the following experiments, the teams were assigned only one padlock, which meant that they always had the one assigned at their disposal.

Vásquez, S.; Barquero, B. y Bosch, M. (2024). Managing an SRP in secondary school: Which padlock is more secure? En Barquero, B., Bosch M., Chevallard, Y., Florensa, I., Markulin, K. y Ruiz-Munzon, N. (Eds.), *Extended Abstracts 2022: Proceedings of the 7th International Conference on the Anthropological Theory of the Didactic (CITAD7)*. Birkhauser-Springer Nature. https://doi.org/10.1007/978-3-031-55939-6_33

Figure 1. First set of padlocks used by students

Media available

In the first SRP, the students worked with a paper workbook. Although computers were available, they were not allowed to use them. During this experimentation, students naturally accepted this limitation and did not complain. This limitation in the didactic contract led to the demise of this natural gesture of the researcher, which is to look up whether someone has already found the answer to the problem addressed or to a similar one. This gesture does not come naturally to the students, if they are restricted in the means available to them.

For this reason, during the following two SRPs, students had the same workbook of the previous year, but in a digital format, with shared documents to work cooperatively. This change in the available resources generated a quick response from the students: many of them explored for information on the Internet and found combinatorial formulae, which were not easy to understand for the students, but they sensed that they would be part of the solution. However, they did not find any interesting information about padlocks that could help them in the inquiry.

Evolution of the didactic *milieu*

From the first SRP, already in the first session, a clarification was made that became recurrent in the rest of the sessions: it is essential to establish a common vocabulary for the exchange of arguments. The vocabulary proposed by the teachers is the following:

Padlocks admit *codes*. “Code” will be the word used to indicate a possible password. We only use “password” for the correct code that opens the padlock. All codes are made up of *cells*, which correspond to the physical spots we can use to select the *elements* of the codes. For example, in padlock number 1, we have 4 cells and 10 elements in each cell.

The expected discussion about padlocks was generated. Students had realised that the most secure padlock is the one that admits the most codes and formulated the first derived question: *Q*0.1*: Which padlock admits more codes?* This question leads naturally to question *Q*1 *How many codes does each padlock admit?*

Questions-answers dialectic

Teachers presented the questions and answers map (QA map) to students in the first session using a shared padlet. In the first experimentation, the construction of the QA map was proposed to the students but they did not find its necessity and only elaborated it as a didactic request. It was therefore decided to locate it in the teacher’s topos as a tool for the in vivo analysis. The map has a dynamic and live structure with questions and

Vásquez, S.; Barquero, B. y Bosch, M. (2024). Managing an SRP in secondary school: Which padlock is more secure? En Barquero, B., Bosch M., Chevallard, Y., Florensa, I., Markulin, K. y Ruiz-Munzon, N. (Eds.), *Extended Abstracts 2022: Proceedings of the 7th International Conference on the Anthropological Theory of the Didactic (CITAD7)*. Birkhauser-Springer Nature. https://doi.org/10.1007/978-3-031-55939-6_33

answers indicating the different lines of enquiry that emerge during the process (Figure 2). Questions and the classification of the QA map branches are decided by the teachers according to the results shared in the session. The figure corresponds to an intermediate step of the inquiry. It includes the generating question $Q0$ and the derived one $Q1$, with the names assigned to each padlock: “roulette”, “buttons”, “dates”, “words”, and “directional”. The results from the students' teams are attached to each type of padlock.

Teamwork organisation

In the first experimentation, the groups were heterogeneous: high-level pupils mixed with pupils with more difficulties. This made cooperative work difficult to manage: few students tended to do all the work without the participation of their teammates. In addition, as previously mentioned, all teams had to study all the padlocks. This generated an excess of time dedicated to the study of the padlocks.

To solve these two constraints, in the successive experimentations students' teams were arranged by the teachers according to their class performance. One padlock was assigned to each team, and they had to study it and prepare a presentation showing their results to the whole class. The assignment of the padlocks was decided by the teacher, considering that padlock 2 must be assigned to the team that is supposed to work best or be more responsible, as it is the padlock with the most complex calculation of the number of codes. The rest of the padlocks are very similar to each other, but it is better to assign padlock 1 to the team that is expected to have more difficulties.

Padlocks as training

After the first session, students already have a way of solving the initial question by determining that the padlock with more cells is the most secure. The project could be considered finished in the moment they find the number of possible codes, but teachers engaged some critical thinking with the students. First of all, a justification needs to accompany the answer. Moreover, in any research, even if you can conclude with the answer to the initial question, the research itself generates interesting new questions, which are worth pursuing further.

So, students were asked the following question $Q2$ “Can we find the total number of codes for any padlock?” Four new padlocks were presented with some variations from the original ones: for instance, padlock 1 without repeating any element or padlock 2 with a password of 1 to 10 digits. The devices were the same, but new conditions had been introduced regarding the composition of the passwords. The aim of this stage is for the teams to reproduce the techniques found in the previous phase with these new padlocks and to justify their arguments, thus realising that the strategies and reasoning used in the different locks follow the same structures.

Additionally, the students were asked question $Q3$ “How can we classify the padlocks according to the method used to calculate the total number of codes?” Students were asked to elaborate a classification table of all the padlocks to have an overview of the different counting strategies and the results. This classification and the similarities

Vásquez, S.; Barquero, B. y Bosch, M. (2024). Managing an SRP in secondary school: Which padlock is more secure? En Barquero, B., Bosch M., Chevallard, Y., Florensa, I., Markulin, K. y Ruiz-Munzon, N. (Eds.), *Extended Abstracts 2022: Proceedings of the 7th International Conference on the Anthropological Theory of the Didactic (CITAD7)*. Birkhauser-Springer Nature. https://doi.org/10.1007/978-3-031-55939-6_33

between counting strategies were pooled in class. Students were expected also to propose formulas with a mathematical notation to generalise the calculations.

Padlocks as models

The last phase corresponds to the formalisation of the final answer: teachers share the different proposals and present the formulas about permutations, combinations and variations as they are understood by the mathematical community. In addition, a list of combinatorial problems with different contexts will be used to work on the last question *Q*4 “Do these formulas work to solve problems with contexts different from those with padlocks?” In this way, padlocks cease to be the object of study and become the model for solving more complex problems (Vásquez et al., 2021c).

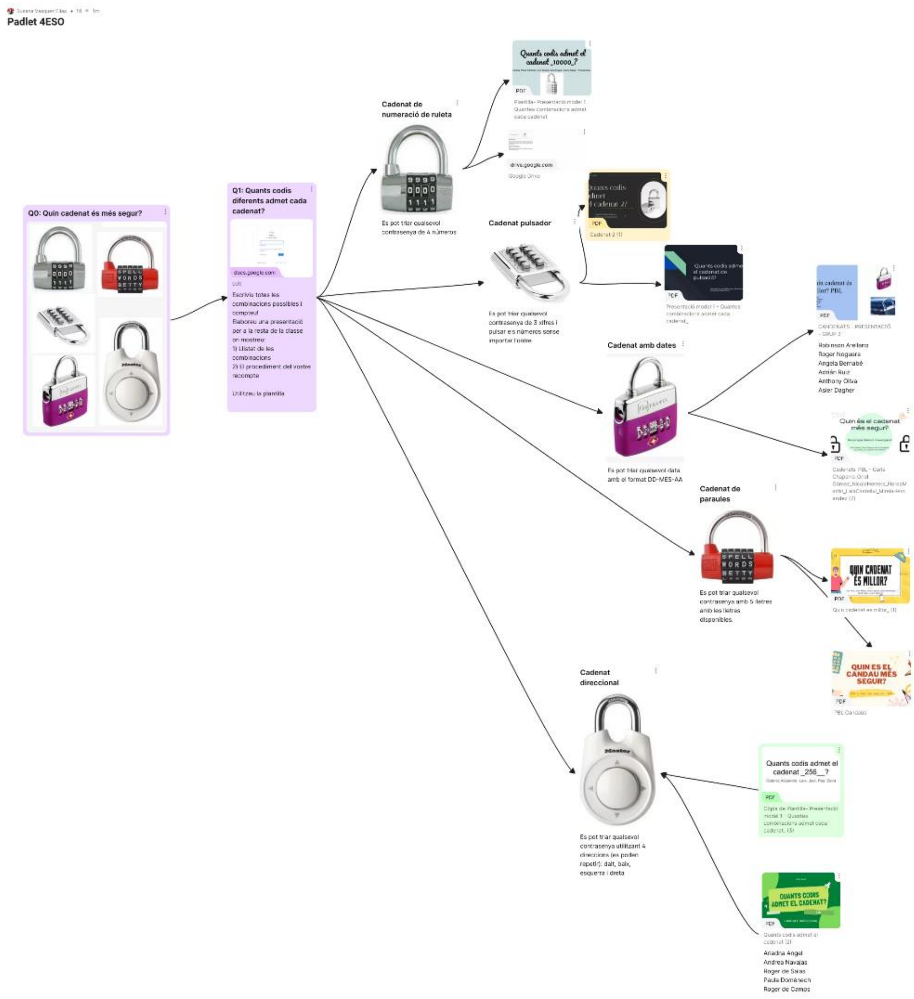


Figure 2. Outcome of the Q&A map generated up to session 5

Collaborative strategies

Our second research question focuses on the collaborative mechanism and tools to be shared between teachers and researchers to facilitate the dissemination of SRPs. The impressions and suggestions of non-ATD-expert teachers were gathered from interviews and the class observation diary. It must be said that the teacher-researcher had prepared

Vásquez, S.; Barquero, B. y Bosch, M. (2024). Managing an SRP in secondary school: Which padlock is more secure? En Barquero, B., Bosch M., Chevallard, Y., Florensa, I., Markulin, K. y Ruiz-Munzon, N. (Eds.), *Extended Abstracts 2022: Proceedings of the 7th International Conference on the Anthropological Theory of the Didactic (CITAD7)*. Birkhauser-Springer Nature. https://doi.org/10.1007/978-3-031-55939-6_33

the complete didactic infrastructure of the SRP (planning of the sequence, session plans, documents and resources for the students and the teachers, structure of the Google Classroom, etc.). She could also explain the results from the two previous experiences, what could be expected from the students and possible ways to react. In this respect, we can say consider the SRP as *finalised* (Chevallard, 2013) in the sense that, even if the generating question is open, many aspects of the final answer are already known by the teachers and, therefore, there exists a main path with some established milestones to follow.

Complete a priori design

Teachers appreciated having and understanding the a priori complete and finalised design, to have the full picture of what is expected of them. They also appreciated being able to discuss the resolution of the padlocks with the teacher-researcher, as they themselves had difficulties in identifying all the possible resolution strategies that the students could bring out.

Questions and answers map to manage the *in vivo* analysis

Teachers did not find a complete use for the QA map. Since the map was part of the a priori design of the SRP, teachers did not give it added value. Moreover, they did not manage to use it on a recurrent basis with the students. For them, it was just a *padlet* to post answers and presentations on. We do not know to what extent they perceive keeping track of the work done during the inquiry as an essential didactic gesture. They could find other ways to refer to the different paths and elements intervening in the SRP, like the derived questions, provisional answers, media accessed, information found, etc. However, the management of the *in vivo* analysis and the tools supporting them remain an open problem. Teachers are not used to share with the students the organisation of the study: it is seen as their concern, not the students' one. They do not feel the need of explicitly commenting on the inquiry management, what has been done, what is to be done, what difficulties appear, etc. This is an important change introduced by the SRPs that needs to be more deeply approached.

Researcher's support and open classroom

Teachers value positively having the teacher-researcher available to complement the class or provide discussions and observations about the sessions, and also the possibility to ask for help or advice. The scaffolding provided seems essential, at least during the first SRP implementation. However, the tradition of collaborative work among teachers of the considered school must not be underestimated. And this is not common in all secondary schools in Spain.

For instance, the school has glass-walled classrooms so that one group can observe what the other group is doing. This helps teachers be aware of the work done by the parallel teacher and establish visual communication. The SRP teachers' remarked about this special situation, which is revealing about what kind of conditions at the level of the school can be determinant for the SRPs' ecology.

Vásquez, S.; Barquero, B. y Bosch, M. (2024). Managing an SRP in secondary school: Which padlock is more secure? En Barquero, B., Bosch M., Chevallard, Y., Florensa, I., Markulin, K. y Ruiz-Munzon, N. (Eds.), *Extended Abstracts 2022: Proceedings of the 7th International Conference on the Anthropological Theory of the Didactic (CITAD7)*. Birkhauser-Springer Nature. https://doi.org/10.1007/978-3-031-55939-6_33

Final remarks

The SRP about padlocks security has acquired a rather stable form after its consecutive implementations with experts and non-experts teachers in the ATD. The didactic infrastructure and the organisation of the inquiry are settled up and students' activities are more and more easy to predict. This helps teachers become more confident and secure when entering into a totally new didactic praxeology. However, it also runs the risk of directing them back to the old paradigm of visiting works, where the path students are supposed to run is always predetermined and closely defined. Finding the balance between the needed infrastructure and the openness of the inquiry is the challenge that needs to be faced.

Acknowledgments

This research was carried out thanks to the Spanish ministry projects EDUParadigms PID2021-126717NB-C31 (MCIN/AEI/FEDER, UE and "ERDF A way of making Europe").

References

Chevallard, Y. (2013). L'évolution du paradigm scolaire et le devenir des mathématiques. Questions vives et problems cruciaux. In A. Bronner et al. (Eds.), *Questions vives en didactique des mathématiques: problèmes de la profession d'enseignant, role du langage* (pp. 85–120). La Pensée sauvage éditions.

Vásquez, S., Barquero, B., & Bosch, M. (2021). La gestión de un REI en secundaria: ¿Cuánto tiempo se tarda en abrir un candado? In P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo, & D. Carrillo, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 621–628). SEIEM.

Vásquez, S., Barquero, B., & Bosch, M. (2021b). How Long Would It Take to Open a Padlock? A Study and Research Path with Grade 10 Students. In B. Barquero, I. Florensa, P. Nicolás, N. Ruiz-Munzón (Eds.), *Extended Abstracts Spring 2019* (pp. 105-115). Birkhäuser.

Vásquez, S., Barquero, B., & Bosch, M. (2021c). Teaching and learning combinatorics in secondary school: a modelling approach based on the Anthropological Theory of the Didactic. *Quadrante, 30*(2), 200-219. https://doi.org/10.48489/quadrante.23878

Vásquez, S.; Barquero, B. y Bosch, M. (2024). Managing an SRP in secondary school: Which padlock is more secure? En Barquero, B., Bosch M., Chevallard, Y., Florensa, I., Markulin, K. y Ruiz-Munzon, N. (Eds.), *Extended Abstracts 2022: Proceedings of the 7th International Conference on the Anthropological Theory of the Didactic (CITAD7)*. Birkhauser-Springer Nature. https://doi.org/10.1007/978-3-031-55939-6_33

Capítulo 3: Los REI y la Modelización

El capítulo 3 constituye el segundo y tercer artículos de este compendio. Este aborda las cuestiones relativas a la pregunta de investigación PI2 Modelización matemática como núcleo del REI.

3.1. La modelización en un REI finalizado: la situación de los candados

En esta sección estudiamos las cuestiones:

PI2.1 ¿Cómo interviene la modelización matemática en la dinámica de la indagación en un REI? ¿Cuál es la función de las dialécticas en la dinámica de los REI?

PI2.2 ¿Qué condiciones se requiere para que un REI pueda promover el trabajo de modelización sostenido?

Resumen del artículo en español:

Este trabajo se centra en el papel de la combinatoria como herramienta de modelización para indagar sobre diferentes situaciones que implican conteo y simulación con objetos reales. Basándonos en la Teoría Antropológica de la Didáctica, nuestra investigación presenta el diseño e implementación de un Recorrido de Estudio e Investigación (REI) para la educación secundaria obligatoria en el área de la combinatoria. El REI parte de una pregunta generadora sobre descubrir qué candado (entre varios) es más seguro. Los resultados empíricos corresponden a una segunda implementación del REI con alumnos de 4.º de la ESO en una escuela catalana con una larga experiencia en innovación educativa. Distinguimos dos fases de modelización. En primer lugar, examinamos el papel de la combinatoria en el proceso de modelización que surgió a partir de la situación problemática inicial de los candados. Consideramos la construcción de modelos por parte de los alumnos para representar sus exploraciones a través de la interacción con los candados, destacando la importancia de nombrar y definir las variables y las relaciones utilizadas para caracterizar los tipos de candados. En segundo lugar, analizamos cómo los estudiantes simulan y validan estos modelos combinatorios elementales antes de generalizarlos para explorar otros sistemas más allá de los candados.

Referencia:

Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2021c). Teaching and learning combinatorics in secondary school: a modelling approach based on the Anthropological Theory of the Didactic. *Quadrante, 30*(2), 200–219. https://doi.org/10.48489/quadrante.23878

Teaching and learning combinatorics in secondary school: a modelling approach based on the Anthropological Theory of the Didactic

Abstract. This paper focuses on the role of combinatorics as a modelling tool to inquire about different situations involving counting and simulation with real objects. Based on the Anthropological Theory of the Didactic, our research presents the design and implementation of a Study and Research Path (SRP) for compulsory secondary education in the area of combinatorics. The SRP starts from a generating question about discovering which padlock (among several) is safer. The empirical results correspond to a second implementation of the SRP with grade 10 students in a Catalan school with a long experience in educational innovation. We distinguish two modelling phases. First, we look at the role of combinatorics in the modelling process that emerged from the initial padlocks' problem situation. We consider students' construction of models to represent their explorations through the interaction with the padlocks, highlighting the importance of naming and defining the variables and the relationships used to characterise the types of padlocks. Second, we analyse how students simulate and validate these elementary combinatorial models before generalising them to explore other systems beyond padlocks.

Keywords: combinatorics; mathematical modelling; secondary school; Study and Research Paths; modelling praxeologies.

Resumo. Este artigo centra-se no papel da combinatória como ferramenta de modelação para investigar e estudar diferentes situações que envolvem contagem e simulação com objetos reais. Com base na Teoria Antropológica do Didático, a nossa investigação apresenta a conceção e implementação de um Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP) para o ensino secundário obrigatório na área da combinatória. O PEP parte de uma questão geradora sobre a descoberta do cadeado (entre vários) que é mais seguro. Os resultados empíricos correspondem à segunda implementação do PEP com estudantes do 10.º ano de uma escola catalã com uma longa experiência de inovação educacional. Distinguimos duas fases de modelação. Primeiro, analisamos o papel da combinatória no processo de modelação que emergiu da situação problemática inicial dos cadeados. Consideramos a construção de modelos pelos alunos para representar as suas explorações através da interação com os cadeados e a importância de nomear e definir as variáveis e as relações utilizadas para caracterizar os tipos de cadeados. Em segundo lugar, analisamos a simulação e validação destes modelos combinatórios elementares utilizados pelos estudantes e a sua generalização para explorar outros sistemas para além dos cadeados.

Palavras-chave: combinatória; modelação matemática; ensino secundário; Percursos de Estudo e Pesquisa; praxeologias de modelação.

Introduction

Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2021c). Teaching and learning combinatorics in secondary school:a modelling approach based on the Anthropological Theory of the Didactic. *Quadrante, 30*(2), 200–219. https://doi.org/10.48489/quadrante.23878

This article focuses on teaching and learning combinatorics in secondary school from a mathematical modelling perspective. Several authors underline that combinatorics is an essential topic in the mathematics curriculum, with a rich structure of powerful principles that underlie several areas, such as counting, computation, and probability (English, 1993, 2005). According to English (2005, p. 121), combinatorics may be defined as "a set of principles of calculation involving the selection and arrangement of objects in a finite set".

The recommendation of including combinatorics in the school mathematics curriculum has been endorsed, for several years, in international and national curriculum debates (Batanero et al., 1997; Kapur, 1970). Combinatorics has been highlighted as closely related to other curricular domains that refer to the "way of counting and computing" and "ways to build models of representation" (English, 2005). However, students often have great difficulty when addressing complex counting problems. For example, Batanero et al. (1997) propose taking a more in-depth look at students' mistakes when solving combinatorial problems to identify the variables that might influence their difficulties. These studies are first necessary to help researchers understand the nature of students' difficulties and the reasons behind their mistakes and, secondly, to analyse how students perform in combinatorial activities.

There are several types of problem situations involving combinatorial knowledge. As explained by English (2005), these problems on the one hand usually include the fundamental counting principle (DeGuire, 1991) requiring the use of systematic lists, tables, or tree diagrams. On the other hand, they can include combinatorial configurations (Batanero, et al., 1997; Dubois, 1984). The difficulty of the resulting combinatorial configurations depends on the type of combinatorial operations and the nature of the elements to be combined. Concerning combinatorial operations, we can distinguish between arrangements, permutations, and combinations, depending on the number of elements counted and whether the order is important. The elements to be combined are usually digits, letters, or objects, among others. However, as Lockwood (2013) underlined, the literature on combinatorics education is not very developed and has not yet addressed such ways of thinking at a level that enables researchers and educators to understand how students conceptualise counting problems.

Our study concerns a proposal to teach combinatorics at the secondary school level. We explore the role of combinatorics from a mathematical modelling approach to inquire and study different situations involving counting and simulation. We address the following research questions: *How to approach combinatorics problems from a modelling perspective? How can this modelling perspective help design, implement, and analyse a teaching proposal about combinatorics in secondary school?*

Our research is based on the Anthropological Theory of the Didactic (ATD) and its conception of mathematical modelling. The ATD approaches teaching and learning phenomena from a perspective that is at the same time epistemological (putting the knowledge to be taught and learnt at the centre of the analysis) and institutional (considering mathematics as a human activity carried out in different social settings). As

Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2021c). Teaching and learning combinatorics in secondary school:a modelling approach based on the Anthropological Theory of the Didactic. *Quadrante, 30*(2), 200–219. https://doi.org/10.48489/quadrante.23878

explained in the following section, we use the notion of *modelling praxeologies* and the proposal of the so-called *Study and Research Paths* (SRPs) for the teaching and learning of mathematical modelling. We rely on past results about the design and implementation of SRPs (Bosch, 2018; Chevallard, 2006, 2015) and adapt them to the area of combinatorics in compulsory secondary education. We propose a SRP that starts from a generating question about how long it would take to open some particular types of padlocks. This paper focuses on two consecutive implementations of this SRP with grade 10 students in a Catalan school with a long educational innovation experience.

We will distinguish two phases in the modelling activities. First, we look at the role that combinatorics plays in the modelling process that emerged from the initial padlocks problem situation. We analyse students' construction of combinatorial models to represent what they explore through the interaction with the padlocks. From a modelling perspective, this interaction highlights the importance of naming and defining the variables at stake and the relationships used to characterise the types of padlocks. Second, we analyse the simulation and validation of these elementary combinatorial models used by the students and how they were then generalised to explore other systems beyond padlocks.

The ATD as a framework for instructional design in modelling

Despite a diversity of conceptualisations of modelling activities (Barquero, Bosch, & Wozniak, 2019; Perrenet & Zwaneveld, 2012), there is a widespread consensus about the modelling process and its decomposition in different steps synthesised in various versions of modelling cycles. Many modelling cycles can be found in the literature with varying approaches (e.g., Blum & Leiß, 2007; Borromeo Ferri, 2007; Galbraith & Stillman, 2006; Kaiser & Sriraman, 2006; Niss & Blum, 2020). They have been particularly helpful in analysing the cognitive processes students follow while solving modelling activities, studying what happens in each step of the modelling process, exploring the paths followed by students or teachers, and designing new modelling activities.

In the case of the ATD, modelling is linked to the notion of mathematical activity by assuming that doing mathematics mostly consists of producing, transforming, interpreting, and developing mathematical models (Chevallard, 1989; García et al., 2006).

On the one side, mathematical activities, as any other human activity, are described in terms of *praxeologies*, which are the primary tool proposed by the ATD to approach knowledge and activities in institutional settings (Chevallard, 1999). A praxeology is an entity formed by a combination of *praxis* – the know-how or ways of doing – and *logos* – an organised discourse about the praxis. The *praxis* block contains *types of tasks* and sets of *techniques* to carry out the tasks, while the *logos* block includes a *technology* (a discourse about the techniques) and a *theory* to justify the technology. This quartet provides a unitary vision of human activities without dissociating the "doing" from the "thinking and telling about the doing".

Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2021c). Teaching and learning combinatorics in secondary school:a modelling approach based on the Anthropological Theory of the Didactic. *Quadrante, 30*(2), 200–219. https://doi.org/10.48489/quadrante.23878

On the other side, the ATD proposes a broad notion of modelling to describe knowledge production (Chevallard, 1989). The two main elements are the notions of *system* and *model* that represent more a function than an entity. A model is something one considers or elaborates to gain information about a system. For instance, a fraction can be used as a model of a certain proportion of objects (playing the role of system). Still, it can also be considered a system to be modelled with another model, such as an equation or an algebraic expression. In this general conception, both models and systems can be mathematical or extra-mathematical. It depends on how they are used and how one considers them. Their role can also be exchanged. For example, let us consider the system formed by a class of 16 boys and 19 girls. We can model it with the fraction 19/35 to get knowledge about the proportion of girls in the class. Reciprocally, to establish that 19/35 < 20/36 (an inequality that we are now considering as our system), one can use the class with boys and girls as a model and say: "if in a class with 19 girls and 35 children, one more girl arrives, the proportion of girls clearly increases". It is now the extra-mathematical model that helps us getting new knowledge about the mathematical system. This situation is very common at school, for instance when teaching negative numbers using lifts, debts, and temperatures.

As in other approaches, the modelling process includes different phases, as delimiting the system to be studied, constructing the model, working with the model to obtain information about the system, and coming back to the system to interpret, validate and extend the results obtained. It becomes a recurring process when the information brought by the model introduces new questions about the initial system, the validity of the model or the relationship between the system and the model.

We can now join the perspective about modelling with the description in terms of *praxeologies*. We start from an initial system, where some particular questions and tasks are posed; we use a technique to produce a model of the system underpinning the tasks, according to some hypotheses assumed to delimitate the system. We sustain this praxis by notions, tools, and justifications provided by the technology and the theory that justify why and how we can use the modelling techniques. This work corresponds to what we call *modelling praxeologies* (Barquero, Bosch, & Gáscon, 2019; Wozniak, 2012).

Moreover, Serrano et al. (2010) explain that

the productivity of the model, that is, the fact that it produces new knowledge about the system, requires a certain 'fit' or 'adaptation' to the system. This process is rarely done at once. It requires a fourth and back movement between the model and the system, in a sort of questions-answers or trial-error dynamics. (p. 2193)

Therefore, once a given system has been modelled, new questions usually emerge. New modelling *praxeologies* can be developed by integrating the model produced into new techniques to solve new tasks within a more developed *logos*. Following García et al. (2006), we can consider modelling as a *process of reconstruction and articulation of praxeologies of increasing complexity*. Thus, modelling also appears as the construction

Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2021c). Teaching and learning combinatorics in secondary school:a modelling approach based on the Anthropological Theory of the Didactic. *Quadrante, 30*(2), 200–219. https://doi.org/10.48489/quadrante.23878

of a sequence of mathematical *praxeologies* that become progressively broader and more complex.

In this process, modelling is a continuous and recursive process since each model (or *praxeology*) proposed can, in turn, be questioned and become a system for a new modelling process. It enables the connection and coordination of mathematical models (or mathematical *praxeologies*) into broader and more complete knowledge organisations.

This paper presents an example of a modelling project about the security of different types of padlocks, particularly concerning the time required to open each padlock. We use a didactic device proposed in the ATD to design and implement inquiry processes for educational purposes called *study and research paths* (SRPs) (Bosch, 2018; Chevallard, 2015). As we explain later, a SRP aims at providing or elaborating an answer to an open question *Q* through an inquiry process. This process (or "path") involves raising derived questions, searching already available pieces of answer or knowledge tools, mobilising knowledge, and other kinds of resources to validate, adapt, and develop the information found.

Our research methodology corresponds to the didactic engineering process (Barquero & Bosch, 2015) structured in four steps. First, the identification of didactic phenomena to address. In our case, they correspond to the formal character of current teaching of combinatorics at secondary level in Spain (Roa et al., 2003). The second step refers to the *a priori* analysis of a given teaching proposal under certain conditions: here, the design of an SRP about padlocks security as an appropriate initial system to justify and develop combinatorics as a modelling tool. The implementation of the SRP appears as the third step or *in vivo* analysis, to gather information and evidence about the implemented didactic process. Finally, the fourth step corresponds to the *a posteriori* analysis that goes back to the conditions established for the running of the SRP, its design and the didactic phenomena at stake.

In SRPs, modelling *praxeologies* appear during the inquiry to approach questions and develop answers. In the next sections, we use some of the main traits of SRPs, in particular:

- The starting point of an SRP, and consequently of the modelling process, is a generating question *Q* posed by the teacher and addressed to the community of study – the students and the teacher. In our case, the generating question is about inquiring into *which padlock is safer.*
- The study community addresses the generating question by opening many derived questions and proposing partial answers to these questions. An arborescence of questions and answers is used to describe the possible paths to follow (*a priori* design) or those actually covered (*in vivo* or *a posteriori* analysis). Modelling processes then appear as arborescences (or tree-structures) of questions and answers that establish possible connections among them.

Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2021c). Teaching and learning combinatorics in secondary school:a modelling approach based on the Anthropological Theory of the Didactic. *Quadrante, 30*(2), 200–219. https://doi.org/10.48489/quadrante.23878

- In this question-answer dialectic, mathematical modelling appears as a recursive process that includes the mathematisation of extra- and intra-mathematical systems. This process can start from an extra-mathematical system modelled using mathematical tools (arithmetic operations, figures, formulas, equations, functions, etc.). Then the mathematical models are developed to get information about the system. At that point, the models can assume the role of mathematical systems to be further modelled, and the process starts again. Sometimes, in this process, the initial system can end up representing the model used to study it, the recursiveness leading to a situation where the system models the model –now acting as a system.

In this paper, we distinguish among different modelling phases to clarify this dialectic between the system and the model(s) considered. As a general description, in the first phase, we look at the role combinatorics plays in the modelling process that emerged from the initial padlocks' problem situation. We analyse students' construction of models to represent what they explore through the interaction with the padlocks and the importance of naming and defining the variables and the relationships used to characterise the type of padlocks. This leads the students to build up a diversity of representations of combinatorial models involving laws and operations. Second, we analyse the validation of the elementary combinatorial models and their generalisation to explore other systems beyond padlocks. In this process, we will see the padlocks themselves acting as models of the new systems to study. During these two phases, we describe the modelling *praxeologies* that emerge and their evolution towards more complete situations allowing students to use the typology of padlocks to address new combinatorial problems.

Design of an SRP about combinatorics for secondary school

Institutional context and conditions for the implementation

The first experimentation of the SRP happened in April-May 2020. After a process of analysis and improvement, this same SRP was carried out again in February 2021. In both cases, there were two groups of grade 10 students, from 14 to 16 years old, at Col·legi Natzaret, in Esplugues de Llobregat, a town near Barcelona. In this paper, we focus on the second implementation.

The SRP methodology was new for the students. However, Col·legi Natzaret is a school with a long tradition in student-centred pedagogy. Since grade 1, students have been used to different kinds of innovative instructional proposals, like project-based learning, cooperative work, strategies to develop metacognitive skills, and the use of digital tools.

According to the teachers, in the academic year 2020-2021, grade 10 students were relatively homogeneous with good grades; they were used to work in cooperative teams and had strong autonomous working skills, predisposition and motivation. For these reasons, teachers concur that classroom management was not, in general, a constraint. Regarding their prior knowledge, these students had only done one activity related to

Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2021c). Teaching and learning combinatorics in secondary school:a modelling approach based on the Anthropological Theory of the Didactic. *Quadrante, 30*(2), 200–219. https://doi.org/10.48489/quadrante.23878

combinatorics in the previous year. In this activity, they were confronted with a simple counting case, where it was feasible to manually count the total number of combinations.

In the second implementation of the SRP about padlocks, there were two groups of 30 students and two teachers (one per group), both with experience in teaching, one being also a researcher in didactics and first author of the paper. The teacher-researcher led the design of the SRP together with the research team. All decisions were there discussed by both teachers, and they plan together the details of the implementation. They decided to organise the students working teams beforehand following a "level" criterion: students were sorted by their last term marks and clustered into teams of 6 students. Therefore, both groups had five working teams of 6 members.

According to the course's current pedagogical organisation and the assessment of competences promoted by the official curriculum guidelines, the weight of the working team's tasks was 70%, leaving the other 30% to individual work. Working team tasks assessment included a workbook, daily reports, and an oral exposition. Individual work was assessed with a final test and the students' contributions and participation in classroom discussions. The material prepared for the SRP included: a guided digital workbook for the students to show their research about the padlocks; diary templates to be filled by the teams to record the list of questions addressed, answers found, and new questions arisen; a summary about the different combinatorics formulas; a list of problems related to the combinatorial unit; and an online survey. In the survey, students had to give their opinion about: the calendar organisation; the difficulty and the amount of work; the importance of the padlocks in their understanding of the mathematical knowledge; the importance of the *masterclass*[1]; whether they were willing to repeat a similar unit organisation about another topic.

Teachers decided to meet regularly after each session to discuss what happened and make decisions about the next sessions. When needed, they included the research team in the discussion. They also recorded their vision of each session in a shared logbook.

A priori design of the SRP about padlocks

The first design of the SRP started from the generating question about: *How long would it take to open some padlocks?* Five different padlocks were used to introduce this question and, quickly, students engaged in describing the number of possible combinations to open each kind of padlock. In the second implementation, the formulation of the generating question was broader: *Which padlock is safer?* This second formulation aimed to let students decide by themselves to look at how many combinations each padlock has, to compare each padlock's safety. Moreover, we also expected that students would look for other characteristics of the padlocks and inquire about their physical traits and strengths.

The initial question was introduced from five initial padlocks (Figure 1), each of them with different properties:

Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2021c). Teaching and learning combinatorics in secondary school:a modelling approach based on the Anthropological Theory of the Didactic. *Quadrante, 30*(2), 200–219. https://doi.org/10.48489/quadrante.23878

#1 #2 #3 #4 #5

Figure 1. First set of padlocks used by students

Padlocks number 1, 3 and 4 have similar operability, the digits of the combinations can be introduced by rotating some wheels. To begin with, padlock number 1 allows any combination of 4 digits, in other words, we can introduce any number from 0000 to 9999, so there are 10.000 possible combinations. Padlock 3 works in the same way: we can introduce any date from 00-JAN-00 TO 39-DEC-99 (the padlock doesn't recognise if the date is real or not), so there are 40·12·100 possible combinations. Finally, padlock 4 has the same mechanism as padlock number 1 but with 5 cells. We can introduce 10 different letters in any cell, which gives 100.000 possible combinations because the padlock does not recognise if the word has any meaning.

Padlock number 2 is different than the previous ones. It does not have wheels, but buttons. It opens when the correct three buttons are pushed. When a number is pressed, it remains activated until it is pushed from the back side of the padlock. Therefore, in this case, numbers cannot be repeated and the order of activation of the buttons does not influence the final combination. Then, this padlock has $\binom{10}{3}$ different combinations.

Finally, padlock number 5 is equipped with a dial that allows a choice of four possible directions (up, down, left and right). The correct password is a combination of four of these directions, enabling repetitions. This padlock is actually very similar to padlocks #1, #3 and #4, but with a dial instead of wheels. It has $4^4 = 256$ possible combinations.

In a first phase, students were expected to address the questions Q_1: *How many combinations does each padlock have? Which strategies can be used to count them?* They were expected to use some techniques to understand the system. In particular (1) listing the possible codes or combinations for each padlock (for instance, writing them manually or using *Excel*); (2) making an initial list with the exemplification of possible codes, and using arithmetic calculations to facilitate the total counting; (3) using a pre-algebraic description to compute the total number of combinations. We consider that the justification of these initial techniques is based on the necessity to describe the sample space of all possible combinations before counting the total.

In this first phase, it is important that, once students have predicted the total number of codes, they may explain the techniques and models used and justify their use and the resulting answer. It will not be the teacher the only one responsible for validating their answers, as students can check manually by using the padlocks to simulate all the possible combinations. By comparing the different models used by the students, especially the more informal ones, the resulting question is to explore other techniques to

Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2021c). Teaching and learning combinatorics in secondary school:a modelling approach based on the Anthropological Theory of the Didactic. *Quadrante, 30*(2), 200–219. https://doi.org/10.48489/quadrante.23878

compute the total without writing the whole list one by one. At this stage, we expect that students may identify and debate the critical variables in the system to model. In particular: *How to name the cells in the padlock and the other elements (numbers, letters, symbols, etc.)? How many symbols can we have in a cell? Can the elements be (or not) repeated? Is it important the order in which we enter each element?* These are some of the derived questions possible to be posed in this first phase.

In a second phase, teachers brought in four new padlocks with some variations from the initial five. The devices were the same, but they introduced new conditions on the composition of the password:

Padlock 6: It is padlock number 1, but we know that the correct password does not have any repeated number. The number of passwords is then $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$.

Padlock 7: It is padlock number 2, but we do not know how many buttons should be pushed. The correct password can have between 0 to 10 active buttons. The number of passwords is $\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \cdots + \binom{10}{10} = 2^{10}$.

Padlock 8: It is padlock number 3, but we know that the day and the year of the correct password does not have any repeated number.

Padlock 9: It is padlock number 5, but we know that the correct password does not have any repeated direction.

The main question to be presented to the students is Q_2: *Can we use the same kind of counting techniques to find the total number of security codes for any of these new padlocks?* The main purpose of this stage is to test the *validity* of the modelling techniques and the resulting models considered in the previous situation and to understand the changes the new padlocks introduce in the system. Moreover, it is a way to discuss the *scope* of the models by offering students an extended system. In some sense, we could say that this second phase aims to strengthen the modelling praxeology. When trying to apply the initial techniques to the new padlocks, we expect students will make the *logos* part more explicit (what they did, what does and does not work now, why, etc.).

Once the students have all the computations for the nine different padlocks (five with new restrictions and four new ones), we expect the next following questions to appear Q_3: *Are there any formulas that could simplify the total counting of combinations? Are these formulas specific of the "kind of padlock" we want to understand?* We then expect some online search for possible formulas and finding difficulties to interpret them. In this stage, teachers will give some explanations to institutionalise some of the knowledge about combinatorics, to unify the terminology, and to help them to look at the similarities among the different techniques used and results found.

The third phase arrives with an important extension of the initial situation, moving beyond the padlock's problematic presented initially. In this sense, all the work built in the previous phases is now part of the system to model. The question to address with the students is Q_4: *Can we use the same formulas and counting techniques to solve different problems*

Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2021c). Teaching and learning combinatorics in secondary school:a modelling approach based on the Anthropological Theory of the Didactic. *Quadrante, 30*(2), 200–219. https://doi.org/10.48489/quadrante.23878

beyond those involving (only) padlocks? This phase will start when students search for information "outside", that is, possible formulas that exist for the total number of possible combinations. They will probably find information about other contexts that require combinatorial knowledge. At this phase, teachers plan to present a list of other contexts (maybe some of them proposed by the students), with examples of situations including different combinations of elements to count. At this stage, we expect students to analyse the new systems proposed and make decisions on the value of the variables that characterise the combinatorial situations, and on the model to be used. This work requires associating the modelling *praxeologies* developed in the previous stages with the new situations or systems to model.

We are now presenting the results obtained in implementing the SRP with two groups of Grade 10 students during the academic year 2020-2021.

Results from the analysis of the experienced SRP about padlocks

According to the four phases of the didactic engineering process, the *in vivo* analysis was carried out during the SRP implementation through discussions between the two teachers and the research team. During this phase, the team of teachers and researchers decided on the steps to follow depending on the students' productions and classroom dynamics. We are not including this phase here but focusing on the last phase about the *a posteriori* analysis.

The collection of data for the *a posteriori* analysis includes all the students' productions: diaries, reports, recorded oral presentations, test and answers to a survey about the different aspects of the SRP and the students' description of their experience. It also includes all materials produced by the teachers and a shared logbook they filled in at the end of each session, where they record the activities carried out, parts of the joint class discussions and some specific episodes they noticed. These data constitute the evidence used to support our analyses.

First phase: SRP generating question and first modelling process

In the first sessions, teachers gave each working team a different padlock. There were five padlocks (see Figure 1) to analyse, one per team. Teachers asked students to address questions about which padlock is safer (Q_0). Although the first reaction of most teams was trying to find the correct passwords, in the first shared discussion, the students concluded that the lock is more secure when it is more difficult to enter all the passwords. Therefore, they all agreed on trying to count how many passwords could be entered in each lock. Teachers asked each team to answer Q_1 for the padlock assigned: *How many combinations does your padlock have?*

All teams started by computing, manually or using *Excel*, all the possible combinations. Then, they looked for a technique to make this computation faster by thinking about how to count them without explicitly writing all the combinations. For example, *Team A* (Figure 2), which worked with lock number 2 (Figure 1, padlock #2), wrote all the combinations in a spreadsheet. They started by typing 10 columns, which would represent the first digit

Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2021c). Teaching and learning combinatorics in secondary school:a modelling approach based on the Anthropological Theory of the Didactic. *Quadrante, 30*(2), 200–219. https://doi.org/10.48489/quadrante.23878

of the combination. Using the “drag a cell” tool, they automatically typed all the numbers included in each column. They manually removed the combinations numbers that had a repeated digit. They noticed that some combinations were equivalent because they corresponded to the same password: 012, 102, 201, 021, 120 and 210 (in red). They started to paint all the equivalent combinations in the same colour. Finally, they did not paint all the combinations, since they saw that, in all cases, they always painted 6 numbers.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
"012"	102	201	301	401	501	601	701	801	901
"013"	103	203	302	402	502	602	702	802	902
"014"	104	204	304	403	503	603	703	803	903
"015"	105	205	305	405	504	604	704	804	904
"016"	106	206	306	406	506	605	705	805	905
"017"	107	207	307	407	507	607	706	806	906
"018"	108	208	308	408	508	608	708	807	907
"019"	109	209	309	409	509	609	709	809	908
"021"	120	210	310	410	510	610	710	810	910
"023"	123	213	312	412	512	612	712	812	912
"024"	124	214	314	413	513	613	713	813	913
"025"	125	215	315	415	514	614	714	814	914
"026"	126	216	316	416	516	615	715	815	915
"027"	127	217	317	417	517	617	716	816	916
"028"	128	218	318	418	518	618	718	817	917

Figure 2. Partial view of the list with all the combinations proposed by *Team A*

Once they had an answer for Q_1, they prepared their report to explain the process followed: mainly the questions addressed, the solutions found, and how they had reached these answers using an arithmetical operation. Once the reports were ready, the teacher started a whole group discussion on the work done, avoiding validating their answers. All the teams used the complete list of combinations as a validation means. In the whole group discussion, there were many questions in common among the groups. For instance: *How many cells and how many elements have each cell? Can the elements be repeated? Is it important in which order to put each element?*

All the working teams concluded with a correct answer for their padlock, since they had the complete list of combinations to check the proposed arithmetical operation, although some were more difficult than others. One team – *Team D* –, which had the *directional* padlock (Figure 1, padlock #5) explained to the class that they had looked up for existing answers on the web. They shared with the class that they had found a formula n^m that worked for them, but they could not explain exactly why.

Moreover, one padlock was different from the rest, as it worked by pushing the buttons (Figure 1, padlock #2). This padlock was assigned to *Team B*, made of the students with the best marks in the subject. This team was unable to compute all the combinations in the spreadsheet (as it also happened with *Team A* in Figure 2). When they saw that this initial technique was not useful (or reliable) enough, they changed the technique to model the padlocks’ combinations. Figure 3 shows the initial arithmetical model they produced (similarly to other groups) and the development of this model needed to compute the total number of codes for padlock #2. They wrote in the report:

Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2021c). Teaching and learning combinatorics in secondary school:a modelling approach based on the Anthropological Theory of the Didactic. *Quadrante, 30*(2), 200–219. https://doi.org/10.48489/quadrante.23878

In summary, we know that in the first cell there can be 10 numbers, in the second cell there can be 9 numbers, and in the third cell there can be 8 numbers. If we multiply these three numbers, we will have 720 possible combinations.

But the combinations are 720 if the order matters, for example with 1/2/3 there are 6 possible combinations if the order matters, but in the case that it doesn't matter there is only 1. This is what happens with our padlock, as the order is not relevant, for every 6 combinations there is only 1. So, we divide 720 into 6 and get 120 possible combinations.

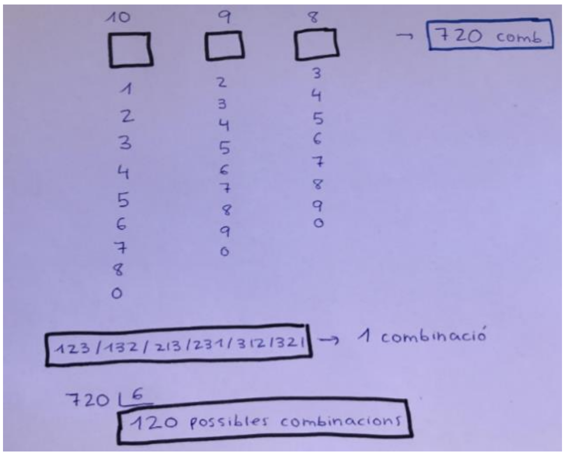


Figure 3. New technique proposed by *Team B* for computing the total of combinations

In the class discussion during this previous stage, the teachers raised the need to set up a common way to refer to several elements that emerged during the modelling process. Students initially used various expressions to communicate their hypotheses, express the variables characterising the system to model (cell, code, combination, order, repetition, etc.), and explain the techniques used and the resulting models to compute the total amount of combinations. It was necessary to establish a common and specific terminology to refer to the mathematical activity they were developing. Using the ATD terminology, we can say that teachers had to introduce new elements of the modelling praxeology to agree on a common *logos*. Thus, they introduced "combination" for the padlock security code, "cell" for each element of a concrete combination, "elements" of a cell for the group of values that can be entered or selected in a cell. Although this terminology was not immediately assimilated and well used by the students, it made it possible to improve the common discussions on the working teams' responses and justifications. To facilitate its adoption, the teachers constantly referred to this agreed vocabulary. They also used it in the institutionalisation of the partial results proposed by the students and the new questions that arose. Here is an example of the teachers' proposal:

Padlocks admit *combinations*. *Combination* will be the word used to indicate a possible password. We only use *password* for the correct combination. All combinations are made up of *cells*, which are the physical spots we can use to select *cell-elements*. For example, in padlock number 1, we have 4 *cells* and 10 elements in each cell.

Second phase: extending the models' scope

Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2021c). Teaching and learning combinatorics in secondary school:a modelling approach based on the Anthropological Theory of the Didactic. *Quadrante, 30*(2), 200–219. https://doi.org/10.48489/quadrante.23878

When all the teams finished the first modelling process, the teachers presented the new question Q_2: *Can we use the same kind of counting techniques to find the total number of codes for any of these padlocks?* This time, they proposed students to work with the same five padlocks with constraints and four new padlocks that were also distributed among the teams.

As they used the previous models, students were quicker in analysing the padlocks, determining the values of the variables, and deciding if the padlock was (or not) a similar case to one previously modelled. As mentioned before, this second stage helped students extend and discuss the *scope* of the mathematical models. We can now say that this second phase allowed to strengthen the students' modelling *praxeologies* by making their justification more visible. Students at that time could describe the techniques used, explain why they worked and developed them to get more efficient techniques.

Once the students had all the computations of the total number of combinations for the nine different padlocks, the teachers raised questions about *the existence of any formula that could simplify the total counting of combinations* (Q_3). Most of the students proposed a classification of the padlocks according to the models they used to compute their total number of combinations. Figure 4 shows the classification proposed by *Team A* that classified the padlocks into three groups they named as: "Raised padlocks", "Dividing padlocks" and "Factorial padlocks". In particular, *Team A* then explained the arithmetic calculation that allowed them to compute the combinations and suggested a general formula for each group of padlocks. The students directly established some formulas, but some groups also looked up these formulas on the internet.

Classification of all padlocks according to the resolution method

Name of the group of padlocks	Padlocks in the group	Calculation of the number of combinations of each padlock	Proposed formula
The raised padlocks	1	10 · 10 · 10 · 10 = 10.000 combinations	n^m n = number of cell elements m = number of cells *unless the number of cell elements is different, we use the multiplication of the number of cell elements (as in padlock 3)
	3*	4 · 10 · 12 · 10 · 10 = 48.000 combinations	
	4	10 · 10 · 10 · 10 · 10 = 100.000 combinations	
	5	4 · 4 · 4 · 4 = 256 combinations	
The dividing padlocks	2	10 · 9 · 8 = 720 / 6 = 120 combinations	**n!** is the number of cell elements multiplied by the next number in descending order. **m!** is the number of cells multiplied by the next number in descending order. $\frac{n!}{m!(n-m)!}$
	7	10 · 9 /1·2 + 10 · 9 · 8/1 · 2 · 3... = 1.013 combinations	
The factorial padlocks	6	10 · 9 · 8 · 7 = 5.040 combinations	n · (n - 1) · (n - 2) · (n - 3) ... n = number of cell elements *unless the number of cell elements does not change (as in padlock 8)
	8*	4 · 9 · 12 · 10 · 9 = 38.880 combinations	
	9	4 · 3 · 2 · 1 = 24 combinations	

Figure 4. Classification of the padlocks proposed by *Team A*, translated from the original work of the students

Third phase: the "recursiveness" of the modelling process

After the first two phases of the SRP, a masterclass was planned. Each of the teachers was in charge of presenting the master class to each group. They started reviewing the students' padlocks classification and recollecting the explanations given to find the number of combinations. It was the first occasion for the teachers to validate the solutions

Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2021c). Teaching and learning combinatorics in secondary school:a modelling approach based on the Anthropological Theory of the Didactic. *Quadrante, 30*(2), 200–219. https://doi.org/10.48489/quadrante.23878

officially. Once this was done, they asked the question: *How can we elaborate a general technique to find the number of combinations for each padlock?* They also posed the following derived questions, that have different answers depending on the padlock chosen: *Do two combinations with the same elements but ordered in different ways count as two combinations or as only one? Can two or more elements be repeated in each combination? How many cells does each combination have? How many elements can we put in each cell?* The teachers thus institutionalised the terminology of combinatorics, techniques, and general formulas to quickly calculate the number of combinations (Figure 5).

Let m mean the number of cells and n the number of elements in each cell:		
 All combinations allowed	• The order matters • Elements can be repeated • *Variation with repetition*: $VR_{n,m} = n^m$	$VR_{10,4} = 10^4$
 Only combinations without repeated elements	• The order matters • Elements cannot be repeated • *Variation without repetition*: $V_{n,m} = \frac{n!}{(n-m)!}$	$V_{10,4} = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!}$ $= 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$
 Only combinations without repeated elements and $n = m$	• Same case than before but with $n = m$ • *Permutation*: $P_n = n!$	$P_4 = 4!$
 Combinations pressing 3 of 10 numerical keys	• The order does not matter • Elements cannot be repeated • *Combination*:	$C_{10,3} = \frac{10!}{3!\,(10-3)!} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{2 \cdot 3}$

Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2021c). Teaching and learning combinatorics in secondary school:a modelling approach based on the Anthropological Theory of the Didactic. *Quadrante, 30*(2), 200–219. https://doi.org/10.48489/quadrante.23878

	$C_{n,m} = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$	

Figure 5. Institutionalisation of the different cases and formulas in the masterclass

At the end of the session, the teachers proposed the students to review their previous answers and associate them with the now institutionalised classification and methods. They also provided a list of typical combinatorial problems in different contexts. At the beginning of each combinatorics problem, they suggested students to relate its characteristics and resolution to the types of padlocks studied. Then, they asked the students if they had found some other situations in which they could apply these new formulas, raising the last question, Q_4.

After the master class, the students answered an individual multiple-choice test. This test contained ten questions with different combinatorics situations (ice cream flavours, coloured T-shirts, etc.) but always with the same structure: "How many different ways can we count...". The next day, the teachers gave the grades and a week later, the students who wanted were allowed to take a second attempt at a similar test.

Discussion and conclusions

A modelling process in combinatorics

Combinatorics problems mainly address questions concerning the counting of complex collections of items. Modelling these collections is a critical step in all the procedures needed to solve them. However, the modelling process usually requires more than one model of the initial situation. We can talk about *recursive modelling* in the sense that a second-step modelling process starts by considering the first model as a new system to model. The inquiry process about padlocks' security presented here illustrates this situation, summarised in Figure 6. The first extra-mathematical system is composed of different types of padlocks and the question raised is about the number of combinations needed to open them. Students spontaneously consider a first model of these combinations in the form of a list of possibilities using an *Excel* table or directly writing all the possibilities (Figure 2). This first model reveals many limitations, especially to validate the final result (*How to know if one combination is missing?*). Teachers intervene to help elaborate a second type of model of the initial system by introducing some terminology to describe the collections of items to count (cells, elements, combinations) and determine their characteristics (order, repetitions, etc.). Students can then propose different numerical formulas with numbers instead of letters (Figures 3 and 4) that play the role of what can be called *intermediate models*. Teachers then institutionalise general algebraic formulas (some previously found by the students) as a third type of model to unify the work done by the teams with the different padlocks (Figure 5). However, the modelling process does not stop here.

Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2021c). Teaching and learning combinatorics in secondary school:a modelling approach based on the Anthropological Theory of the Didactic. *Quadrante, 30*(2), 200–219. https://doi.org/10.48489/quadrante.23878

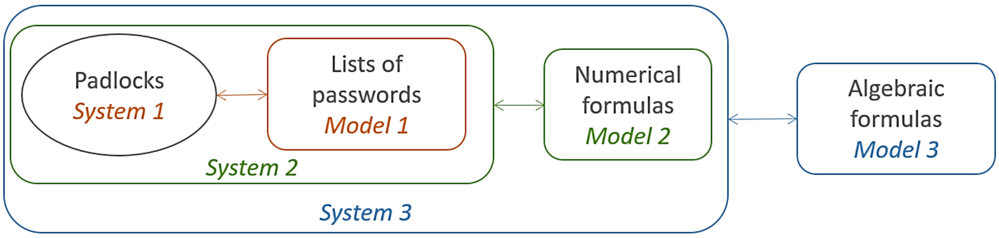


Figure 6. Recursiveness of the modelling process

It is worth noticing that the intermediate models are critical for explaining and validating both the model proposed and the results they help to obtain. These intermediate models thus acquiring a *technological role* in the final combinatorics *praxeology* centred on the algebraic formulas. What did not appear in the experimented SRP was specific work with the algebraic formulas, which would lead to extend the praxeology to include more complex systems or collections to count – a task that exceeded the curriculum exigence of the course. However, the fact that the initial system is made of material objects that can also be handled played a crucial validating role. At the end of the process, students could time how long it took to open each padlock and present it in a short video as a final form of validation.

A second important aspect to mention is that, once students have used the different models to determine the number of possible combinations for each padlock, *they started using padlocks as models* for a variety of new counting problem situation proposed by the teachers. In other words, in a new counting situation (a system including a collection of items to count), students started using the padlocks as concrete references for the new counting problem. This use of padlocks allowed them to characterise the collection to then associate a formula to count its elements. In this second type of situations, the padlocks appear as intermediate models between the system (collection of items to count) and the algebraic formula (see Figure 7).

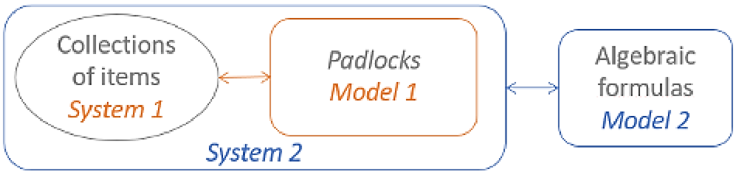


Figure 7. Padlocks acting as intermediate models

Traditionally, the intermediate models used to solve combinatorial problems are the expressions that characterise the collections: variation, permutation, combination. In the students' inquiry process, the padlocks play this intermediate role and help "materialise" each type of situation. The padlock as a model is richer in terms of properties than a simple verbal expression. The case is similar to the one described in Serrano et al. (2010): there is a process of progressive mathematisation of the successive "systems". However, in the end, padlocks appear as representatives of the types of situations considered in combinatorics problems. We thus have an example of a modelling process where the

Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2021c). Teaching and learning combinatorics in secondary school:a modelling approach based on the Anthropological Theory of the Didactic. *Quadrante, 30*(2), 200–219. https://doi.org/10.48489/quadrante.23878

mathematisation is not linear, and extra-mathematical systems – padlocks – end up acting as models of mathematical situations. The interactions between extra-mathematical and intra-mathematical modelling are more complex than the ones described by Serrano et al. (2010).

Promoting a modelling process through a SRP

Our research questions deal with the relationship between combinatorics and modelling practices and the analysis of proposals to promote the construction of combinatorics models in secondary school. For the first question, the SRP about padlocks illustrates how modelling *praxeologies* to approach combinatorics problems rely on the construction of a sequence of models, leading to a progressive mathematisation process. It also shows another phenomenon that is not specific to combinatorics but plays an essential role in this case: the use of "typical situations" (here represented by the padlocks) to initiate the modelling process with new types of systems, in other terms, the use of extra-mathematical systems to model mathematical systems.

The second research question is about the design, implementation, and analysis of a teaching proposal to promote modelling processes in combinatorics. Since the works of García et al. (2006) and Barquero (2009), we know that SRPs tend to generate inquiry processes where modelling *praxeologies* play a crucial role. The SRP about padlocks is not an exception. The openness of the generating question and the students' freedom to explore the initial systems appear to facilitate the emergence of spontaneous modelling processes that teachers contribute to developing. In the second implementation of the SRP that we consider in this paper, teachers were less directive than in the first one. In particular, they let students carry out the first exploration of the combinations by counting them using paper and pencil or *Excel*. This strategy facilitated the emergence of the first models and enriched the initial system. As a second improvement, the teachers enabled the students to search for answers and information about padlocks outside the class. This helped them find some of the formulas finally proposed to the class. We thus see that the elaboration of models in a modelling process can also be nourished by considering external information that does not only arrive from the teacher.

SRPs are still a new instruction format in secondary education, and the conditions for their dissemination as normalised activities need further research. However, as other ATD investigations have shown (Jessen et al., 2020), they seem appropriate to foster the development of modelling processes as a means for the inquiry they promote. The case of combinatorics is not usually considered from a modelling perspective, maybe because of the difficulty to include the recursive vision of modelling and the complex relationship that extra-mathematical and mathematical systems play in this process. Our research aims to link both problems to improve the implementation of SRPs and the teaching of combinatorics as a modelling activity in secondary education.

Acknowledgements

This research was carried out thanks to "Col·legi Natzaret" and the Spanish ministry projects RTI2018-101153-B-C21 and RTI2018-101153-A-C22 (MCIU/AEI/FEDER, UE).

Notes

[1] From now on, we will use *masterclass* as the didactic organization known as *lecture,* as this is the common word used by this school to refer to the didactic moment when the teacher institutionalises some work.

References

Barquero, B. (2009). *Ecología de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las matemáticas* (Doctoral dissertation). Universitat Autònoma de Barcelona, Spain.

Barquero, B., & Bosch, M. (2015). Didactic Engineering as a research methodology: From fundamental situations to study and research paths. In A. Watson & M. Ohtani (Eds.), *Task Design in Mathematics Education* (pp. 249-272). Cham, Switzerland: Springer.

Barquero, B., Bosch, M., & Gascón, J. (2019). The unit of analysis in the formulation of research problems: The case of mathematical modelling at the university level. *Research in Mathematics Education, 21*(3), 314–330.

Barquero, B., Bosch, M., & Wozniak, F. (2019). Modelling praxeologies in teacher education: the cake box. In U.T. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen, & M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the CERME 11* (pp. 1144-1152). Utrecht, the Netherlands: Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.

Batanero, C., Navarro-Pelayo, V., & Godino, J. D. (1997). Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils. *Educational Studies in Mathematics, 32*, 181-199. https://doi.org/10.1023/A:1002954428327

Blum, W., & Leiß, D. (2007). How do students and teachers deal with mathematical modelling problems? The example Sugarloaf and the DISUM project. In C. Haines, P. L. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.), *Mathematical modelling: Education, engineering and economics*. ICTMA 12 (pp. 222–231). Chichester, England: Horwood.

Borromeo Ferri, R. (2007). Modeling from a cognitive perspective: Individual modeling routes of pupils. In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.), *Mathematical modeling: Education, engineering and economics* (pp. 260–270). Chichester, England: Horwood.

Bosch, M. (2018). Study and Research Paths: A model for inquiry. *Proceedings of the International Congress of Mathematics* (pp. 4001–4022). Rio de Janeiro, Brazil: ICM.

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique a l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège – Deuxième partie. Perspectives curriculaires: la notion de modélisation [The transition between arithmetic and algebra in the teaching of mathematics at secondary school level – Second part. Curricula approaches: The notion of modelling]. *Petit x*, *19*, 45–75.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique [The analysis of teaching practices from the anthropological theory of the didactic]. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(2), 221–266.

Chevallard, Y. (2006). Steps towards a new epistemology in mathematics education. In M.Bosch (ed), *Proceedings of CERME 4* (pp. 21-30). Barcelona, Spain: Fundemi IQS.

Chevallard, Y. (2015). Teaching Mathematics in Tomorrow's Society: A Case for an Oncoming Counter Paradigm. In S.J. Cho (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 173-187). Dordrecht, The Netherlands: Springer.

DeGuire, L. (1991). Permutations and combinations: A problem solving approach for middle school students. In M. J. Kenny & C. R. Hirsh (Eds.), *Discrete Mathematics across the curriculum, K-12: 1991 Yearbook* (pp. 55-58). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Dubois, J. G. (1984). Une systematique des configurations combinatoires simples [A system of simple combinatorial configurations]. *Educational Studies in Mathematics, 15* (1), 37-57.

English, L. D. (1993). Children's' strategies in solving two- and three-dimensional combinatorial problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*(3), 255-273.

English, L. D. (2005). Combinatorics and the development of children's combinatorial reasoning. In G.A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 121-141). Kluwer Academic Publishers.

Galbraith, P., & Stillman, G. (2006). A framework for identifying student blockages during transitions in the modelling process. *ZDM Mathematics Education, 38*(2), 143–162. https://doi.org/10.1007/BF02655886

García, F. J., Gascón, J., Higueras, L. R., & Bosch, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics. *ZDM Mathematics Education, 38*(3), 226–246. https://doi.org/10.1007/BF02652807

Jessen, B., Otaki, K., Miyakawa, T., Hamanaka, H., Mozoguchi, T., Shinno, M., & Winsløw, C. (2020). The ecology of study and research paths in upper secondary school. In M. Bosch, Y. Chevallard, F. J. García, & J. Monaghan (Eds.), *Working with the Anthropological Theory of the Didactic in Mathematics Education: A Comprehensive Casebook* (pp. 118-138). Routledge.

Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modeling in mathematics education. *ZDM Mathematics Education, 38,* 302-310. https://doi.org/10.1007/BF02652813

Kapur, J. N. (1970). Combinatorial analysis and school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 3*, 111-127. https://www.jstor.org/stable/3481871

Lockwood, E. (2013). A model of students' combinatorial thinking. *Journal of Mathematical Behavior*, *32,* 251–265. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.02.008

Niss, M., & Blum, W. (2020). *The Learning and Teaching of Mathematical Modelling.* London: Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315189314

Perrenet, J., & Zwaneveld, B. (2012). The Many Faces of the Mathematical Modeling Cycle*. Journal of Mathematical Modelling and Application, 1*(6), 3-21.

Roa, R., Batanero, C., & Godino, J. (2003). Estrategias generales y estrategias aritméticas en la resolución de problemas combinatorios. *Educación Matemática 15(2)*, 5-25.

Serrano, L., Bosch, M., & Gascón, J. (2010). Fitting models to data. The mathematising step in the modelling process. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2185–2196). Lyon: INRP 2010.

Wozniak, F. (2012). Des professeurs des écoles face à un problème de modélisation : une question d'équipement praxéologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 32(1),* 7–55.

3.2. La modelización en un REI no finalizado: la situación del COVID

En esta sección estudiamos la cuestión:

PI2.3 ¿Las propuestas de los REI permiten desarrollar la capacidad recursiva y reversible de los modelos/sistemas matemáticos?

Referencia:

Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2023c). Modelling COVID-19 data with simulations: A recursive process. En P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi y E. Kónya (Eds.). *Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)* (pp. 1363–1370). Alfréd Rényi Institute of Mathematics and ERME. https://hal.science/hal-04416538

Resumen del artículo en español:

Este artículo estudia el papel de las actividades de modelización en las propuestas de aprendizaje interdisciplinar basado en la indagación en la enseñanza secundaria. Presenta una investigación empírica basada en dos implementaciones de una indagación interdisciplinaria sobre las variantes del COVID-19 y sus efectos. En la primera implementación, importantes restricciones limitaron la indagación de los estudiantes impidiendo el proceso de cuestionamiento auto-sostenido y el desarrollo de modelos matemáticos. Para analizar mejor estas limitaciones, un año más tarde se llevó a cabo una segunda actividad en la clase de matemáticas. Discutimos los resultados de esta implementación e identificamos relaciones interesantes entre los datos, los modelos y las simulaciones implicadas en el proceso de modelización. Las conclusiones se refieren al papel de la modelización en relación con el análisis de datos y a las condiciones que favorecen los procesos de modelización e indagación.

Apéndice 1.5

Vásquez, S., Balat, F. y Orlandi, G. (2023b). Gestión y evaluación de un proyecto multidisciplinar sobre el estudio e impacto de la pandemia. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, 99, 23–32. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=8970749

Modelling COVID-19 data with simulations: a recursive process

Abstract. This paper studies the role of modelling activities in interdisciplinary inquiry-based learning proposals at secondary school level. It presents an empirical investigation based on two implementations of an interdisciplinary inquiry about the COVID-19 variants and their effects. In the first implementation, important constraints limited the students' inquiry preventing the self-sustained questioning process and the development of mathematical models. To better analyse these constraints, a second activity was implemented one year later in the mathematics class. We discuss the results of this implementation and identify interesting relationships between the data, models, and simulations involved in the modelling process. Conclusions refer to the role of modelling concerning data analysis and the conditions fostering modelling and inquiry processes.

Keywords: Modelling, simulations, study and research paths, secondary school, pandemics.

Introduction: COVID-19, mathematical modelling and Interdisciplinarity

The COVID-19 pandemic quickly spread to the worldwide population with some scientific tools and methods. On the one hand, it showed the importance of mathematical, biological, epidemiological, medical, economic, and social research in tackling in real time a social problem that affected the whole of humanity. On the other hand, it became clear how the responses to the problems caused by the pandemic required more than ever the collaboration between disciplines, facilitating the conception of mathematics as a modelling tool to approach real-life problems at secondary school level (Elsner et al., 2023; Maass et al., 2022; Sawada, 2022).

Our research focuses on the role of mathematical modelling activities when integrating the inquiry of critical questions in secondary school mathematics. In previous research (Bosch, 2018), we have been using the proposal of the *study and research paths* (SRP) as introduced by the anthropological theory of the didactic (ATD) to approach the teaching of modelling. One of such SRPs is about the pandemic's evolution (Vásquez et al., 2022). An SRP is a sustained inquiry process that starts with an open question that students address under the teacher's guidance. During the SRP, the inquiry community, made of the students and the teacher, raises new questions derived from the initial one and searches for new information in the form of knowledge tools and empirical data. This new information is then worked to become available and help produce a final answer to the question addressed. Modelling processes naturally appear during SRPs when involving statistical data treatment (Østergaard, 2022; Vásquez et al., 2021).

The results presented in this paper are based on two experiences with grade 10 and 11 students at a Spanish secondary school. In the first experience presented by Vásquez et al. (2022), students worked in an interdisciplinary setting involving the subjects of

Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2023c). Modelling COVID-19 data with simulations: A recursive process. En P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi y E. Kónya (Eds.). *Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)* (pp. 1363–1370). Alfréd Rényi Institute of Mathematics and ERME. https://hal.science/hal-04416538

mathematics, technology, biology, and communication. The interaction between disciplines was productive, but the students' modelling work was limited. It corresponded to the stages of delimiting the system to be studied, formulating hypotheses about relations among variables, and representing the data numerically and graphically. The institutional conditions established to ensure interdisciplinarity hindered the development of mathematical modelling activities with data. In the following academic year 2022-23, a new curriculum reform has been implemented in Catalonia, and, in grade 11, a one-term elective subject "Applied Mathematics" has been proposed with the aim of facilitating a panoramic vision of the application field of mathematics.[3] It includes "tools that enable solving with scientific rigour the challenges or questions that appear in situations that are external to mathematics". The examples of proposed challenges refer to topics such as cryptography, archaeology, big data, climate change, among others. There is also one related to the pandemics, formulated as "What statistical data are key to the evolution of a pandemic? What statistical tools are used to analyse data and decision making?".

Following the previous experience and the new conditions created by the curriculum reform, we designed and implemented an SRP, led by the first author of this contribution, as the continuation of the previous one. It aimed at facilitating students' questioning involving modelling and simulations as a self-sustained process (Bosch & Winsløw, 2015), where the answers produced by the models generate new questions requiring further development of the modelling process. In particular, we address the following research questions: (RQ1) *What conditions can facilitate a self-sustained modelling process in an inquiry-based activity with empirical data treatment involved?* (RQ2) *What is the role of data and simulations in the modelling process?*

Research methodology overview

Our research follows the didactic engineering research steps, as introduced by Artigue (2014). It started from the *a priori* analysis that includes the design of both SRPs to overcome some of the main constraints detected in the previous implementation and test the potentialities of the instructional proposal. For the data collection, during the implementation of the SRPs and its *in vivo* analysis, we used different sources, including student productions, surveys, and interviews with students and teachers. We also used the first author's classroom notes and observations. To analyse the data, we used some specific tools from the ATD. First, we analysed the students' productions by identifying the questions they had formulated in their reports, the kind of models appearing, and the temporary and final answers produced. From this data, and teachers' classroom notes, the researchers constructed a *questions and answers map* (QA-map, Winsløw et al., 2013) as an *a posteriori* analysis of the modelling paths followed by the working teams during the SRP.

Related to the kinds of questions that emerged during the SRP, we classified questions that the students posed into different categories. First, we considered questions related

[3] https://xtec.gencat.cat/ca/curriculum/batxillerat/curriculum-171-2022/materies-optatives/materies-optatives-trimestrals-de-primer-curs/ (our translation).

Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2023c). Modelling COVID-19 data with simulations: A recursive process. En P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi y E. Kónya (Eds.). *Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)* (pp. 1363–1370). Alfréd Rényi Institute of Mathematics and ERME. https://hal.science/hal-04416538

to the general aims of the SRP and possible changes in the didactic contract. On the other hand, questions depending on the discipline they put the focus on. The first SRP was guided by teachers of different disciplines (mathematics, biology, technology, and communication) who selected some of the questions to be addressed during the implementation. Within this disciplinary category, we distinguished sub-categories. Particularly, about the mathematics discipline, we distinguished questions related to collecting data, data analysis techniques, the role and use of models to fit data, and the role and use of models to characterize the data evolution. In the *a posteriori* analysis, we also analysed the conditions facilitating and the constraints hindering the use and development of mathematical modelling in this interdisciplinary setting.

Main results obtained in the first SRP

In the first interdisciplinary SRP, after analysing the path followed by each team during the modelling process, we noticed that the mathematical content used mostly corresponded to the first stage of the modelling process when delimiting the system to study: collecting data, elaborating hypotheses, data selection and organisation. With respect to the data selection and organisation, the amount of data in the databases was considerable,[4] forcing students to use spreadsheets. Students succeed in representing data through bar charts and pie charts to compare (sub)populations by gender and ages, and some of the teams used time-series graphs to analyse the evolution and tendencies. When students tried to justify the results and formulate new hypotheses, they encountered complex situations that discouraged them. The inquiry processes was not self-sustained: students formulated questions and only answered them, without launching the modelling process with new questions from the results obtained. We could see that in all the questions addressed, the students developed a similar pattern: one question-one answer; no new questions born from the answers; questions and answers classified according to the disciplines; no questions or answers crossing the "boundaries" of the disciplines. Moreover, the paths followed by the groups were very different, as well as the variety of teachers and disciplines involved in the SRP. Both conditions made it difficult to guide and link the paths that the different groups followed. Little time was devoted to reflecting on the mathematical issues, the models used, their validity, and their limitations. Additionally, teachers often felt lost and missed much of the process of the team's work, making it challenging to advise the students properly. However, interesting interactions between mathematics and technology appeared: students used the simulation to generate new data, which they modelled and analysed in a productive way.

A 2nd development of the SRP: modelling and simulating data about COVID

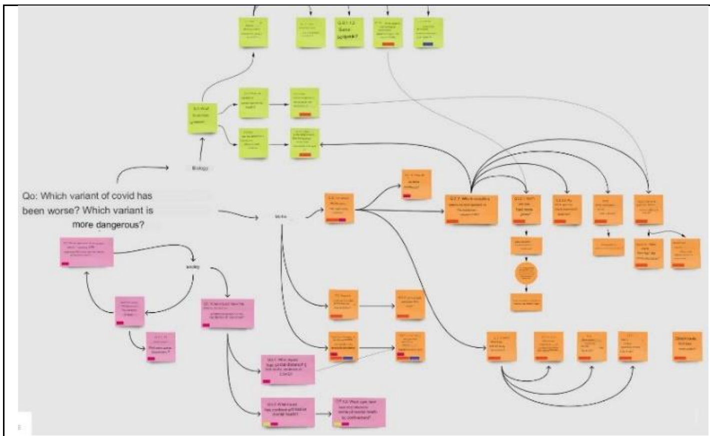
In the 2022/23 experimentation, a second development of the SRP was implemented one year later with high school students (grade 11). The group was small, with 6 students (2 boys and 4 girls) organised in three teams. They were engaged students who chose the elective course "Mathematics Applied to social sciences". All of them, except one new

[4] using the free access data available at https://governobert.gencat.cat/en/dades_obertes/inici/index.html

Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2023c). Modelling COVID-19 data with simulations: A recursive process. En P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi y E. Kónya (Eds.). *Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)* (pp. 1363–1370). Alfréd Rényi Institute of Mathematics and ERME. https://hal.science/hal-04416538

student, had experienced the SRP the previous year. Only one teacher was guiding the SRP, the mathematics one, and at least one student in each team had a computer to process the large data files. The entire group had a common generating question of the SRP about "*Which variant of COVID has been worse? Which variant has been the most dangerous?*".

From the beginning, the teacher explained that in this new SRP, they would all start from the same initial question Q_0, which was already addressed in the previous SRP by a working team in the class. The teacher presented the complete QA map that had been created by the researchers based on the path followed by this working team as presented in Figure 1. Green cards refer to questions about *Biology* (e.g., Q_1) pink cards refer to *Societal* questions (e.g., Q_5 and Q_6), and orange cards refer to *Data analysis* cards (e.g., Q_2, Q_3, Q_4). Moreover, the teacher clarified that the previous work mainly focused on delimiting the system and doing a first exploratory statistical analysis. It was made clear that a main aim of the new SRP was to delve into the mathematics tools to address in-depth, connect, and extend some questions of the previous SRP synthesized by the teacher in the QA map.



Q_{1Green}: What do we mean by variant? $Q_{1.1}$: What is the biological difference between the variants of COVID?
$Q_{1.2}$: Which variant is more harmful to health? [...]
$Q_{2Orange}$: For whom has the pandemic had the most impact? $Q_{2.1}$: How do we define incidence? $Q_{2.2}$: Which variables seem more important in the incidence? $Q_{2.3}$: With what data can we study the incidence? [...]
$Q_{3Orange}$: How can data analysis be used to make predictions? $Q_{3.2}$: Can new waves be predicted? [...]
$Q_{4Orange}$: How do data analysis and simulation help us make decisions? $Q_{4.1}$: Does the simulation allow us to check whether social distancing works or not? [...]
Q_{5Pink}: What impact have the different social measures (restrictions) had on the incidence of covid? [...]
Q_{6Pink}: Which variant has affected the economy of Spain more? [...]

Figure 1: Completed QA map presented to students and some of the main questions

The QA map was presented to the students as a daily work tool: during each session, students might select and be responsible for addressing some questions or branches. After this, they had to complete the map with the new questions that emerged. Students had to fill in a logbook at the end of each session and accomplish weekly assignments. As the group was small, classroom management was simple, and the teacher could provide continuous feedback to the three teams.

During the first sessions, students agreed to address question $Q_{2.2.2.1}$ about which sex has had more cases. In only one session, and after looking at the charts and the differences among sexes, it was possible to conclude the need of calculating relative frequencies instead of absolute ones. The teams then decided to study the comparison of the number of infected people location and tried to find some justification for the results. For example,

Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2023c). Modelling COVID-19 data with simulations: A recursive process. En P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi y E. Kónya (Eds.). *Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)* (pp. 1363–1370). Alfréd Rényi Institute of Mathematics and ERME. https://hal.science/hal-04416538

one team suggested that the subpopulation with the highest incidence was those with an older population and another team hypothesized that some counties should have a greater number of health centres. In the next sessions, they focused on studying the evolution of the COVID incidence in Catalonia. To this end, they asked themselves questions such as: In what period has there been a higher/lower incidence? When they worked on this question, they represented time-series graphs and interpreted them in terms of the major peak or periodicity of the waves, but they could not go beyond the representation and qualitative analysis of graphs.

At this stage, the teacher suggested a change of branch in the QA map (Q_4). The students were proposed to work with the NetLogo application (https://ccl.northwestern.edu/netlogo/), a simulation software to run and simply edit programs. Only one student had already used the software from the previous SRP to simulate pandemic conditions. The others knew that the previous year some classmates were in charge of this activity. Students used NetLogo to ran different cases by changing some of the parameters to observe the consequences in the evolution of the susceptible, infected, or recovered number of people. For instance, Figure 2 presents how *Team* 1 simulated two scenarios under the same conditions (one year, 100% of people practicing social distancing) except for the parameter *social distancing* (1.5 m in the left-side plot and 2 m in the right-side plot).

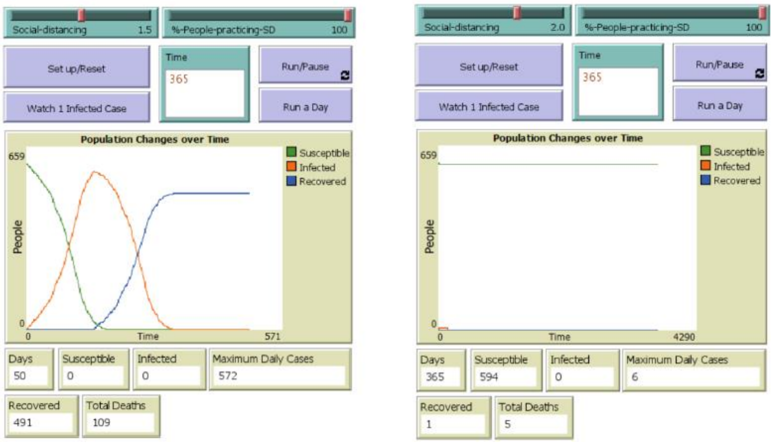


Figure 2: Simulations run by *Team* 1

Students got used to the simulation tool and even inspected the code the NetLogo program provides. The next step was for the students to come up with a question that could be solved by the simulation software. For example, *Team* 1 wondered about the time it would take for the virus to spread in two different communities, according to changes in the mobility parameters (Figure 3, left side). *Team* 2 posed the question of which parameter was more efficient to modify: the safety distance or the percentage of the population that meets the constraints (Figure 3, right side). All teams ran the simulation several times varying the parameters and generating new data numerically and graphically. Then, the teacher introduced the students to the study of correlated variables. For this purpose, they were offered the spreadsheet tool itself, which allows them to calculate the value of Pearson's correlation coefficient and the linear regression line. The

Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2023c). Modelling COVID-19 data with simulations: A recursive process. En P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi y E. Kónya (Eds.). *Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)* (pp. 1363–1370). Alfréd Rényi Institute of Mathematics and ERME. https://hal.science/hal-04416538

students started asking questions about the interpretation, justification, and validation of the parameters intervening in the regression models.

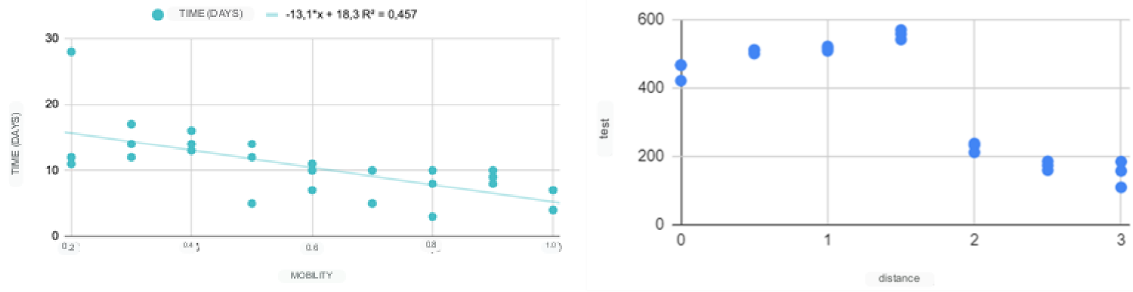


Figure 3: Plot made by *Team* 1 and *Team* 2 with data obtained from NetLogo simulations

As a final activity, students were asked to study dependencies between different variables using the original databases. For example, *Team* 1 studied the relationship between the number of men and of women infected by each of the variants (Figure 4, left side). They were able to answer the original question Q_1 ("Which sex has been more affected?") in a different way than the one used at the beginning of the SRP. They ended up concluding, for example, that "for each infected woman, 0.74 men would be infected". *Team* 2 explored the dependence between vaccination status and disease incidence for months between 2021 and 2022, noticing a strong correlation (Figure 4, right side).

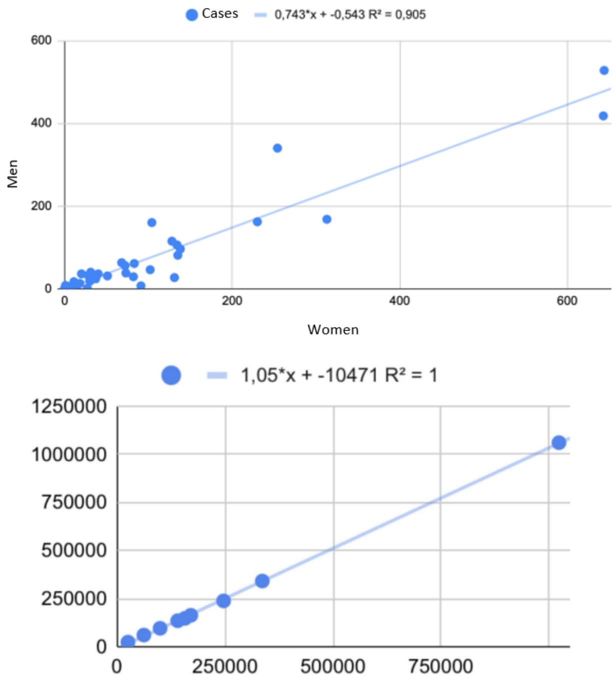


Figure 4: Plots made by *Team* 1 and *Team* 2 with data from NetLogo simulations

To conclude the project, students presented all their advances to the rest of the group, with special attention to the kind of models and mathematical tools used for the simulation and correlation analysis.

Conclusions: Analysis of the modelling process and the role of simulations

Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2023c). Modelling COVID-19 data with simulations: A recursive process. En P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi y E. Kónya (Eds.). *Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)* (pp. 1363–1370). Alfréd Rényi Institute of Mathematics and ERME. https://hal.science/hal-04416538

Regarding *RQ1* about the facilitators of a *self-sustained modelling process in the SRP*, we have identified some conditions both at the school, pedagogical and discipline levels. First, the curriculum reform mentioned at the beginning of the paper, with a subject only devoted to the use of mathematics for the study of socially relevant situations. In this occasion, the design of the SRP did not have to assume the curriculum constraint of teaching a given topic and could, therefore, give all the priority to the study of the COVID questions. At the pedagogical level, it seems that the work in small teams, and with few students, allowed more fluency in the debates and continuous feedback from the teacher to the students and among the teams of students. Moreover, students got easily involved in the discussions about the questions to address or answers that *needed further study*.

Another important (non-independent) condition is the length of the inquiry process, which was started the previous year in the interdisciplinary context and retaken for a more in-depth modelling approach. The fact that some students had already studied the initial question Q_0 was well-accepted by them: going further did not mean a repetition and students seem to appreciate their master of the situation. This second round of the SRP gave the chance to focus better on a small number of questions (if we compare with the first one), most of them more delimited in the topic of data analysis and data modelling. Last but not least, on this occasion, students with the teacher started their inquiry from an initial already made *question-answer map*, elaborated by the researchers after analysing previous students' reports. This QA map was used along the process as one of the main tools to guide the collective inquiry process. Since the beginning, students selected, referred to, and developed specific elements of this already-made QA map. It was adopted by the class as a *reference model* to which each team could refer when explaining their progress, as well as when comparing their advances with the other teams.

Considering the modelling processes generated during the SRP, we consider that working with simulations generate a good *milieu* for students to produce their data and simplify a real and complex system, thereby facilitating their understanding. This conclusion also relates to *RQ2: What is the role of data and simulations in the modelling process?* When the simulation activity was launched, all teams proposed to study the impact of the safety distance or the percentage of people complying with the distance restrictions. Working with the NetLogo simulator, students were also able to ask how the program worked and whether they could identify sections of code dedicated to each aspect of the virus. This was a surprise for the teacher since the students fit a social science profile, and no one would have thought that they would be interested in programming.

From the study of the simulation outcomes, all groups saw the need to relate the different variables: for example, incidence numbers and safety distance. It is at this point that the teacher introduced the students to the study of the correlation between variables, as this was the mathematical tool needed to continue with the inquiry. At this time, the teacher had to intervene and explain how to use the database tool that allowed studying the relationship between variables. She did not develop how the parameter r^2 or the regression line were computed. Students only were provided with their interpretation, so that they could be used in the analysis of the relationships between variables. Thanks to

Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2023c). Modelling COVID-19 data with simulations: A recursive process. En P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi y E. Kónya (Eds.). *Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)* (pp. 1363–1370). Alfréd Rényi Institute of Mathematics and ERME. https://hal.science/hal-04416538

this new mathematical tool, students could come back to the study of the data and try to apply this new technique to deepen into previous analyses, being able to generate questions such as “Is there any relationship between the incidence and the number of calls made to the emergency number?” or “Is there any relationship between the incidence of the disease and vaccination?" As mentioned above, one group wanted to re-ask question Q_1, specifying, by variants, the differences in incidence between the numbers of men and women.

In Vásquez et al. (2021), we analysed the *recursivity of the modelling process* with an initial system formed of padlocks that are first modelled through combinatorics formulas and then play the role of models of other counting situations. The recursivity appears when the system (padlocks) plays the role of the model of another system (counting situations) or when a model appears as a system to be further modelled. The results we can extract from the second development of the SRP about COVID evolution are related to the elements intervening in the modelling process and making it a self-sustained process. We can detect a particular *dual role of the simulations*. Initially, because the data system was complex, only simple mathematical models were proposed: statistical graphs and relative frequencies. Then, to enrich the models, new controlled data was produced using the simulator. The data produced was simpler and could then be modelled with more complex mathematical tools: scatterplots, linear regression lines, and correlation coefficient. The results obtained with these complex models helped, in turn, question the simulation process, which became the system to be studied. The students then discovered the “hidden model” used by the simulator, found its parameters and could determine the elements of the system the model was taking care of. At this point, the identification of parameters led to consider new variables and led to the search for new data to be further analysed. It becomes interesting in further research to analyse self-sustained processes as those defined by Bosch and Winsløw (2015) in terms of modelling and recursivity. And, particularly, the role of data simulators in this recursive process.

Acknowledgement

Funded by the Spanish R&D project: PID2021-126717NB-C31 (MCIU/AEI/FEDER, UE).

References

Artigue, M. (2014). Didactic engineering in mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 159–162). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_44

Bosch, M. (2018). Study and Research Paths: a model for inquiry. In B. Sirakov, P. N. de Souza, & M. Viana (Eds.), *International Congress of Mathematicians* (Vol. 3, pp. 4001–4022). World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. https://eta.impa.br/dl/121.pdf

Bosch, M., & Winsløw, C. (2015). Linking problem solving and learning contents: the challenge of self-sustained study and research processes. *Recherches en*

Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2023c). Modelling COVID-19 data with simulations: A recursive process. En P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi y E. Kónya (Eds.). *Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)* (pp. 1363–1370). Alfréd Rényi Institute of Mathematics and ERME. https://hal.science/hal-04416538

Didactique des Mathématiques, *35*(3), 357-401. https://revue-rdm.com/2015/linking-problem-solving-and/

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude : 3. Ecologie & régulation. *XIe école d'été de didactique des mathématiques (Corps, 21-30 de agosto de 2001)* (pp. 41-56). La Pensée Sauvage

Elsner, J., Sadler, T., Kirk, E., Rawson, R., Friedrichsen, P., & Ke, L. (2023). Using Multiple Models to Learn about COVID-19 Breadcrumb. *The Science Teacher*, *90*(3).

Maass, K., Artigue, M., Burkhardt, H., Doorman, M., English, L.D., Geiger, V., Krainer, K., Potari, D., & Schoenfeld, A. (2022). Mathematical modelling – a key to citizenship education. In N. Buchholtz, B. Schwarz, & K. Vorhölter (Eds.), *Initiationen mathematikdidaktischer Forschung*. Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-658-36766-4_2

Sawada, Y. (2022). Proposal for Teaching Mathematical Modelling Using COVID-19 as an Example of an Infectious Disease Epidemic: The Case of Japan in the Corona Vortex. *Contemporary Mathematics and Science Education*, *3*(2), ep22017. https://doi.org/10.30935/conmaths/12363

Østergaard, C. H. (2022). An Inquiry Perspective on Statistics in Lower Secondary School in Denmark and Japan–An Elaboration and Modelling of the Anthropological Theory of the Didactic Through Two Statistics Classrooms. *European Journal of Science and Mathematics Education*, *10*(4), 529-546. https://doi.org/10.30935/scimath/12401

Vásquez, S., Barquero, B., & Bosch, M. (2021). Teaching and learning combinatorics in secondary school: a modelling approach based on the Anthropological Theory of the Didactic. *Quadrante*, *30*(2), 200-219. https://doi.org/10.48489/quadrante.23878

Vásquez, S., Barquero, B., & Bosch, M. (2022). The role of models and modelling in the pandemics' evolution: transposing a 'study and research path' to secondary school. In J. Hodgen, E. Geraniou, G. Bolondi, & F. Ferretti (Eds.), *Proceedings of the CERME12* (pp. 1177-1184). ERME / Free University of Bozen-Bolzano. https://hal.science/CERME12/hal-03758988v1

Winsløw, C., Matheron, Y., & Mercier, A. (2013). Study and research courses as an epistemological model for didactics. *Educational Studies in Mathematics, 83*, 267-284. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9453-3

Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2023c). Modelling COVID-19 data with simulations: A recursive process. En P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi y E. Kónya (Eds.). *Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)* (pp. 1363–1370). Alfréd Rényi Institute of Mathematics and ERME. https://hal.science/hal-04416538

Capítulo 4: Los REI y la Interdisciplinariedad

El capítulo 4 constituyen los dos últimos artículos de este compendio. Este aborda las cuestiones relativas a la pregunta de investigación PI3 Interdisciplinariedad en los REI.

4.1. Diseño de un REI piloto y condiciones para promover la interdisciplinariedad

Esta sección está compuesta por el artículo publicado en la Revista "Rivista di Matemática della Università di Parma". Aunque se trata de una revista del ámbito de las Matemáticas, Física y Ciencias de la Computación, el volumen 14(2) es un número especial dedicado a la enseñanza de la modelización matemática, como continuación del evento EduSIMAI, organizado por la SIMAI (Italian Society of Applied and Industrial Mathematics) con el objetivo de facilitar la colaboración entre profesores, investigadores en educación matemática, matemáticos y profesionales del ámbito empresarial.

En este capítulo aborda la cuestión: PI3.2 ¿Qué condiciones se requieren para que un REI pueda promover la interdisciplinariedad?

Referencia

Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2023a). A Study and Research Path about the Evolution of Pandemics at Secondary School: Conditions for an Interdisciplinary Approach. *Rivista Matematica della Università di Parma, 14*(2), 281–298. http://www.rivmat.unipr.it/vols/2023-14-2/04-barquero.html

Resumen del artículo en español:

En este trabajo se expone la experiencia del diseño e implementación de una propuesta didáctica sobre la evolución de la pandemia del COVID-19 en secundaria. La propuesta se basa en los llamados "recorridos de estudio e investigación" (REI) fundamentados en la Teoría Antropológica de la Didáctica. Este REI está estrechamente vinculado al diseño de una propuesta de formación del profesorado (descrita en Barelli et al., 2023) cuyo objetivo es dotar a los profesores de secundaria de herramientas para abordar la interdisciplinariedad. Aquí nos centramos en la colaboración entre investigadores y profesores de secundaria en la adaptación y transposición de un proyecto de enseñanza abierta para indagar en el papel de los modelos y modelizaciones de diferentes disciplinas en el estudio de la evolución del COVID-19. Nos centramos en la discusión de la ecología del REI "interdisciplinar", es decir, en el análisis de las condiciones que han facilitado el desarrollo de este REI y las limitaciones que dificultan su progreso dentro de un enfoque interdisciplinar.

Apéndice 1.3

Vásquez, S., Barquero, B. y Romero, O. (2021d). Recorridos de estudio e investigación interdisciplinares: ¿Cómo llevar la problemática actual sobre la COVID-19 al aula? *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, 93, 23–29. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=8029529

A Study and Research Path about the evolution of COVID-19 at Secondary school: Conditions for an Interdisciplinary Approach

Abstract. This paper discusses the experience of the design and implementation of an instructional proposal about the evolution of the COVID-19 pandemic in secondary school. The proposal is based on the so-called 'study and research paths' (SRP) grounded on the Anthropological Theory of the Didactic. This SRP is closely linked to the design of a teacher education proposal (described in Barelli et al., this issue) aiming to provide secondary school teachers with tools to address interdisciplinarity. We here focus on the collaboration between researchers and secondary school teachers in adapting and transposing an open teaching project to inquire into the role of models and modelling from different disciplines in the study of the evolution of COVID-19. We focus on discussing the ecology of the 'interdisciplinary' SRP, that is, the analysis of the conditions that have facilitated the development of this SRP and the constraints that hinder its progress within an interdisciplinary approach.

Introduction

Research in mathematics education has recognized the importance of including applications and mathematical modelling in the teaching and learning of mathematics (Blum, 2015). In this respect, we have several examples of major issues in our society that require a collective scientific effort working across the boundaries of the scientific disciplines, where mathematics and mathematical modelling can be seen and act as service subjects.

Besides all the progress made in research and the support of educational policies and curriculum reforms, well-established modelling activities do not disseminate as expected. They confront critical constraints that hinder their long-term "survival", some of them related to the difficulty of treating interdisciplinarity contexts in schools. These constraints are connected to important interrelated didactic phenomena that exist in school institutions. One is the isolation of disciplines and the prevalence of monodisciplinary curricula (Michelsen, 2006). Another one is the dominant way to organize the teaching and learning of school disciplines, based on the logic of (monodisciplinary) concepts rather than the logic of (multidisciplinary) problems. Finally, therefore, there is a lack of epistemological and didactic tools to approach modelling in the interaction among disciplines (Rasmussen, 2016). The discussion about interdisciplinary education is connected to the issue of STEM education (Maass et al., 2019) from three different perspectives: twenty first century skills, mathematical modelling, and education for responsible citizenship. English (2016) makes the role of modelling in STEM education

Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2023a). A Study and Research Path about the Evolution of Pandemics at Secondary School: Conditions for an Interdisciplinary Approach. *Rivista Matematica della Università di Parma, 14*(2), 281–298. http://www.rivmat.unipr.it/vols/2023-14-2/04-barquero.html

clear: “modelling is a powerful vehicle for bringing features of 21st-century problems into the mathematics classroom”.

During the COVID-19 pandemic, more than ever, citizens and, in particular, students have been exposed to and asked to understand how mathematical and scientific advances contribute to the comprehension of societal phenomena, in this case, related to the evolution of the pandemic. Mathematical models have been widely used and disseminated to analyze the spread of the virus and models have been often employed to guide policy decisions in handling the COVID-19 crisis. As expressed by Saltelli et al. (2020) in their manifesto about the “Five ways to ensure that models serve society”:

> “Mathematical models are a great way to explore questions. They are also a dangerous way to assert answers. Asking models for certainty or consensus is more a sign of the difficulties in making controversial decisions than it is a solution, and can invite ritualistic use of quantification. Models’ assumptions and limitations must be appraised openly and honestly. Process and ethics matter as much as intellectual prowess. It follows, in our view, that good modelling cannot be done by modellers alone. It is a social activity.” (Op. cit., p. 484).

In the context of the IDENTITIES project, the issue of the role of models, modelling and simulation has been one of the central topics addressed in the design of an instructional module for teacher education about interdisciplinarity (see Barelli et al., this issue). This module was tested in a local implementation during 4 sessions of 3 hours in the academic year 2021-22 at the University of Barcelona and in an international IDENTITIES Summer School (in 2021 and 2022, for about 10 hours), where the first two authors were involved, as a participant and as an educator, respectively. The teacher education proposal focused on modelling activities that could be transposed to secondary schools to address live societal questions that emerged during the scientific approach to the pandemics. Along with the different submodules of the proposal, participants were asked to assume different roles to facilitate questioning together (teachers and educators) on the way to describe, analyze and design possible modelling activities. In the initial submodules, teachers-participants were asked to experience as “students” a teaching project, a study and research path (SRP), previously designed by the researchers linked to the role of models, modelling and simulations in the study of the evolution of the pandemics. The following submodules aimed at introducing and transferring epistemological and linguistic tools to teachers-participants for the analysis of interdisciplinarity. In the last module, teachers in training worked on the design of an adaptation of the experienced SRP, and, in case they had the chance, they implemented it in a real secondary school context. This paper focuses on the work developed by one of the participants, the first author of this paper, a secondary school teacher and researcher in didactics of mathematics.

We focus on the experience with the design and implementation of an SRP about modelling the COVID-19 evolution for secondary school education, with the collaboration of teachers (non-researchers) of different subjects (mathematics, biology, and english). This particular SRP has been implemented twice, in April-June 2020, with the beginning of the pandemic, and in February-March 2021. We are interested in different aspects that emerged from this experience, which include stages of design of an interdisciplinary SRP, in collaboration between researchers and non-researchers, and stages of analysis of the implementation, we are interested in different aspects. On the one hand, we want to focus on the *conditions* that facilitate the collaboration between teachers, and students, to initiate and guide an SRP with a fluent interaction among different disciplines; on the other hand, we want to analyze the *limitations* or *constraints* that hinder its progress toward a more prosperous interdisciplinary approach.

Research Framework and Methodology

Within the framework of the Anthropological Theory of the Didactic (ATD), the main one used in this paper, a change of school paradigm is proposed to overcome some of the main didactic phenomena linked to the "monumentalisation" of the taught knowledge (Chevallard, 2015). This change has been described in terms of a paradigm shift, from the "paradigm of visiting works" to the "paradigm of questioning the world". Chevallard characterizes the transformation in mathematics education not only at the pedagogical level ("how to teach?") but also at the didactic and epistemological levels, dealing with the question about "what and how to teach?". In the paradigm of questioning the world, the knowledge to be taught is associated with the inquiry of relevant questions. Approaching these questions includes moments of study (searching for available answers in the media) and moments of inquiry (deconstruction and reconstruction of knowledge to generate one's answer), leading to what is known as a *study and research path* (SRP) (Bosch, 2018; Chevallard, 2015). Carrying out an SRP starts with the consideration of an open *generating question* Q_0, which involves raising derived questions Q', Q'', etc., searching already available pieces of answer or knowledge tools, mobilizing knowledge, and other kinds of resources to validate, adapt, and develop the information found. Compared to the traditional notion of knowledge in school institutions, implementing question-led study processes helps the knowledge to be taught to become dynamic, provisional, and collective. It also generates interdisciplinary processes because questions are often raised in social contexts without being associated with a single discipline. Finding the disciplines that can provide productive answers to the questions addressed as part of the inquiry process, as it is necessary to merge the tools obtained in different disciplines or domains for the elaboration of a final answer to Q_0.

Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2023a). A Study and Research Path about the Evolution of Pandemics at Secondary School: Conditions for an Interdisciplinary Approach. *Rivista Matematica della Università di Parma, 14*(2), 281–298. http://www.rivmat.unipr.it/vols/2023-14-2/04-barquero.html

This paper presents an example of a modelling project about the COVID19 evolution conceived as an SRP. Our research methodology corresponds to the *didactic engineering process* (Barquero & Bosch, 2015) structured in four steps. First, is the identification of didactic phenomena to address. In our case, they correspond to the consequences of school isolation of disciplines and the difficulties that this isolation creates in the approach of open questions that are not raised within a single discipline. The second step refers to the *a priori* analysis of a given teaching proposal under certain conditions: here, it is the design of an SRP about the COVID-19 evolution. The implementation of the SRP appears as the third step or *in vivo* analysis, to gather information and evidence about the implemented didactic process. Finally, the fourth step corresponds to a *posteriori* analysis that goes back to the conditions established for the running of the SRP, its design and the didactic phenomena at stake. In the next sections, we use some of the main traits of SRPs, in particular:

- The starting point of an SRP is a generating question Q_0 posed by the teacher(s) and addressed to the community of study: the students and the teacher(s). Neither teacher(s) nor students need to know the answer to Q_0 in advance. There are generally different possible types of final answers to Q_0. What needs to be clear at the beginning is to whom the final answer is addressed and how it will be received and assessed.
- The study community addresses the generating question by opening many derived questions and proposing partial answers to these questions. An arborescence of questions and answers—a *questions-answers map*—is used to describe the possible paths to follow (*a priori* design) or those actually covered (*in vivo* or *a posteriori* analysis). Questions-answers maps (Q-A maps) play a key role in the management of the SRP because they help provide disciplinary-neutral terminology to describe the paths followed and conceive the new lines of the inquiry at different moments of the process.
- Running an SRP includes searching for available answers in the *media* (the internet, textbooks, articles, experts, etc.) and testing their value and productivity to answer Q_0 or the derived questions Q', Q'', etc. Knowledge tools of different natures and disciplines are mobilized not because of their importance or domain but for their utility to answer the questions raised. The study and testing of the searched information and knowledge tools usually leads to the raising of new derived questions, thus producing a self-sustained process (Bosch & Winsløw, 2015).

Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2023a). A Study and Research Path about the Evolution of Pandemics at Secondary School: Conditions for an Interdisciplinary Approach. *Rivista Matematica della Università di Parma, 14*(2), 281–298. http://www.rivmat.unipr.it/vols/2023-14-2/04-barquero.html

Conditions for the design and implementation of an SRP about modelling COVID-19 evolution in secondary school

The SRP about modelling the COVID-19 evolution has been implemented twice, in April-June 2020 with the beginning of the pandemic (see Vásquez et al., 2021a), and in February-March 2021. Due to the exceptional conditions of the first implementation, this paper focuses on the second edition as its design was improved and the conditions for implementation were more stable (at least, than during the pandemic lockdown). The implementation was carried out at Col·legi Natzaret, in Esplugues de Llobregat, a town near Barcelona, with 60 students of grade 10 (15-17 years old) distributed in two parallel groups. It was developed as an interdisciplinary project involving the subjects of mathematics, biology, and oral and written expression. Students were organized in working teams of six members, with heterogeneity in relation to their academic performance.

The SRP ran over 17 one-hour sessions during the official hours of mathematics, biology and oral and written expression. It ran under relatively regular conditions, although the limitations due to the pandemic: the parallel groups could not interact, and each teacher was assigned to only one of the groups. Four teachers participated in the implementation: two mathematics teachers (one being the first author of the paper), a biology teacher, and an english teacher taking care of the course on communication skills. Both teachers, the biology and english ones had half of the students in the corresponding optional subjects. In collaboration with her research team, the first author developed the *a priori* design of the SRP. The rest of the teachers had no direct involvement in the design. Still, they got actively engaged in deciding how to present the project to students and in the *in vivo* analysis during its implementation. Some special sessions were organized with all the teachers to agree on how to introduce the project, the timing, the way to distribute the students and the strategy to manage the SRP. Then, during the implementation, the teachers shared a journal where they daily reported their work with the class and the teaching materials (their presentations, students' reports, valuation criteria, among other aspects).

Students worked collaboratively with online and digital tools. The teachers used a shared google presentation to report the progress of each working team. In addition, after each session, the working teams worked with the same template to document the advances of their inquiry. They had to report on the questions they had addressed, the temporary answers found, the tasks developed individually and in groups, and the new questions to follow with. Besides these shared documents, students had access to a presentation with some common instructions, indicating what was expected from their work and the steps to follow. From the start, the students were informed that they were responsible for defining the questions to address and the hypothesis they had about pandemic evolution.

They had to update their questions-answers map regularly and, in the end, prepare an informative video presenting the results from their research to be distributed to the school community. The SRP teachers evaluated the students' presentations, with some invited teachers from other subjects. The final assessment also included the other resources produced during the SRP, like the logbooks and the Q-A maps.

Results of the experienced SRP about the COVID-19 evolution

Transferring the responsibility to formulate "researchable" questions

The generating question Q_0 students were asked to confront with was a general extra-mathematical problem of particular social relevance due to the excess of news related to the pandemic. They were asked to run an awareness campaign for the school about the pandemic and its impact on society. They were responsible for providing contrasted and scientifically founded information and defining what they wanted to address. The final answer must take the form of a short video presentation.

In the beginning, students were told to approach their research from three complementary points of view: from the *available data* (accessible through the Spanish government website) and the *mathematical models* they could use (Which data may be selected to understand the evolution of the pandemic? How can mathematics and mathematical models help us to understand the evolution of the pandemic?); from the *biological knowledge* of the disease (How is the virus behaving?); and from the *societal impact* of the pandemic (What impact and effects are the pandemics having on our society?). Students were asked to delimit their focus by always keeping in mind these three complementary general questions.

Students began by gathering the concerns of the educational community, starting with their own and surveying their classmates and families. This helped them define the questions they wanted to address and plan the first steps of their inquiry. At the end of these first steps, each team had to present the general topic and identify three interrelated "researchable" questions concerning the mathematical, biological and societal aspects. Some examples of the researchable questions they posed are: How long does COVID-19 survive on a surface? What are the characteristics of the virus that make it so deadly? What age groups are the ones more affected? What are the physical sequelae of the disease? About the societal questions, examples of the ones proposed by the students were: How has the pandemic affected tourism in Barcelona? How has confinement affected people's daily lives? What different restrictions were implemented in Madrid during the three waves in comparison to Barcelona? Concerning the mathematics questions, those with a descriptive nature were more frequent: Which autonomic communities in Spain have been more affected? How can we measure if the first wave was worse than the rest? Are there important differences between the evolution of the

Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2023a). A Study and Research Path about the Evolution of Pandemics at Secondary School: Conditions for an Interdisciplinary Approach. *Rivista Matematica della Università di Parma, 14*(2), 281–298. http://www.rivmat.unipr.it/vols/2023-14-2/04-barquero.html

case numbers (infected, death, recovered) over the two consecutive years? However, there were also some groups that included questions about the evolution of the data: How has COVID evolved in Catalonia? How has it evolved in different counties?

As it can be read in the project presentation[5], the whole implementation followed three main phases. The first phase includes the (a) generation and formulation of "researchable" questions, (b) exploration of databases, and (c) presentation of specific questions and hypotheses to address. The second one focuses on (a) looking for and organizing the most relevant data for their inquiry, and (b) analyzing data and proposing models to fit data and predict the evolution of the pandemics. The third and last step corresponds to the students' elaboration of an informative video. In the following section, we focus on the student's work in the first two phases, paying special attention to the researchable questions with a mathematics intervention.

The role of questions-answers maps for students and for teachers

During the sessions guided by the mathematics teachers, the different teams addressed their researchable questions. To facilitate their work, the mathematics teachers asked them to follow a structured report. On the one hand, each team had to make explicit the main questions they wanted to address, their hypothesis or preliminary answers, and the data they worked with. On the other hand, they had to fill out their *map of questions and answers* to describe the particular study and research trajectory they were following. This device, which was used during the whole implementation, took a crucial role for several reasons. First, it allowed students to have a common instrument for all the sessions and make explicit the evolution of the inquiry. Second, it helped teachers from different disciplines to follow the work of the teams. Moreover, students used this organization to address the questions of each discipline with the corresponding teachers. *Figure 1* shows an example of *Team A*, which is commented on below. Additionally, at the end of the implementation, the assessment of these maps consider the completeness and classification of all the elements, the relevance of the questions, their creativity and accuracy.

Five sessions were devoted to the first phase of the project: to delimit and construct the *system*. During these sessions, students were provided with a database from the Spanish ministry that regularly updated the data about the evolution of the pandemic since its beginning. Students found different spreadsheets with accumulated data on cases, deaths, and ICU admissions. These worksheets also included information by sex, age groups, provinces, and communities. This large amount of data created important limitations. On the one hand, they had to be very careful in defining what they were interested in looking at, that is, to delimit and construct the *system* — that is, the part of

[5] The project presentation is available at https://bit.ly/3tRQpPz

Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2023a). A Study and Research Path about the Evolution of Pandemics at Secondary School: Conditions for an Interdisciplinary Approach. *Rivista Matematica della Università di Parma, 14*(2), 281–298. http://www.rivmat.unipr.it/vols/2023-14-2/04-barquero.html

reality that is to be modelled —, as well as the particular questions they wanted to address. That is why the teachers were especially attentive to helping them in delimiting the system by selecting the variables to consider, formulating the initial hypothesis to contrast, etc. On the other hand, they needed to learn some techniques to work with Excel to manipulate big spreadsheets easily. They had some experience with Excel but as beginners users. Then, the mathematics teachers had to dedicate some common sessions to respond to these necessities. For instance, students asked how to sort a list of data by value, and how to filter by defining some criteria (e.g., provinces or age groups), among other utilities.

In the particular case of *Team A*, they were first interested in this initial question: "$Q_{0\text{-Team A}}$: "*Which has been the 'worst' wave of the pandemics in Spain? Has the second wave been worse than the first one (as said in the media)?"*. In these first steps, they started to define what they wanted to address (length, number of infections, hospitalization and death, in global and by different groupings):

- Q_{1dates}: How long did each wave last?
  - $Q_{1.1}$: When do we start counting the beginning of a wave and its ending?
- $Q_{2infections}$: How many infections were there in each wave?
  - $Q_{2.1}$: How many infections by sex were there? In total? By sex? By age group?
  - $Q_{2.2}$: Which were the most infected age groups?
    - $Q_{2.2.1}$: How many infected people were between 0-9 years old? 10-19? 20-29?...
- $Q_{3hospitalizations}$: How many people were hospitalized during each wave?
  - $Q_{3.1}$: In terms of hospitalizations, which wave has been the worst?
- $Q_{4deaths}$: What is the number of deaths in each wave?
  - $Q_{4.1}$: How many deaths by sex were there? In total? By sex? By age group?
    - $Q_{4.1.1}$: What can explain why men seem more likely to die?
    - $Q_{4.1.2}$: Does the growth rate of mortality have the same trend for each group age?

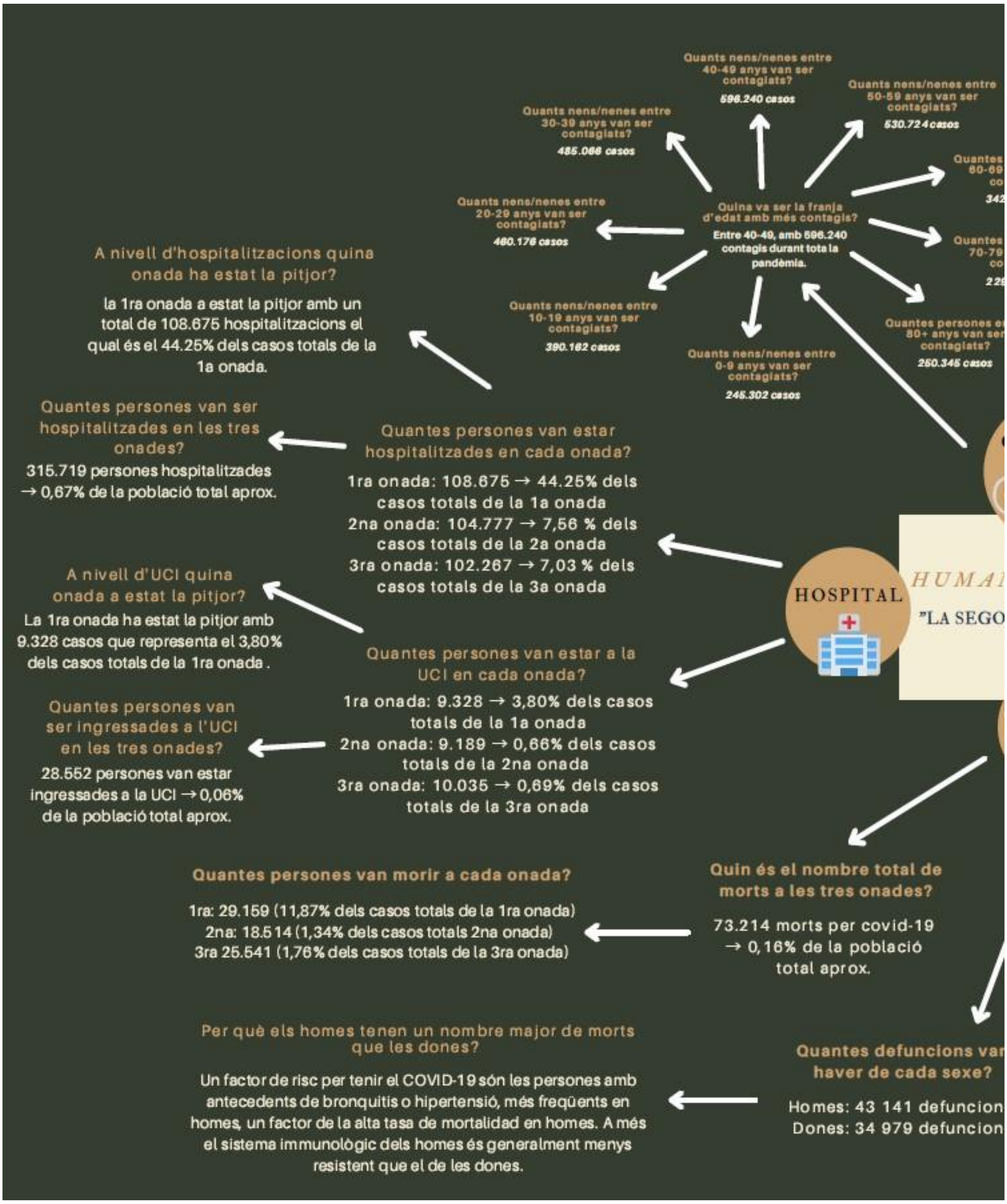
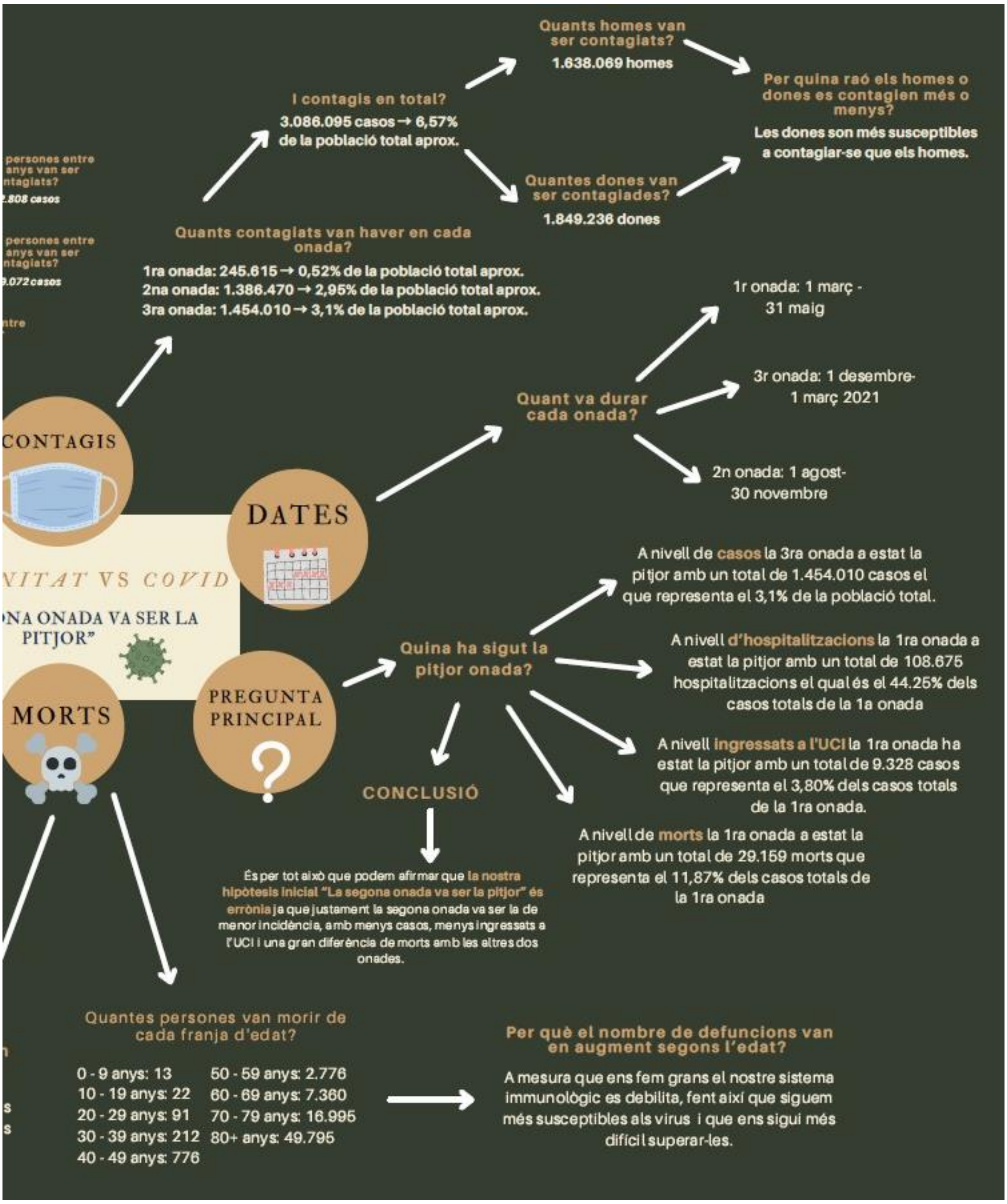


Figure 1. Example of Q-A map developed by Team A

Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2023a). A Study and Research Path about the Evolution of Pandemics at Secondary School: Conditions for an Interdisciplinary Approach. *Rivista Matematica della Università di Parma, 14*(2), 281–298. http://www.rivmat.unipr.it/vols/2023-14-2/04-barquero.html



These questions mainly correspond to delimiting the system and representing the data numerically and graphically. The same happened with the rest of the groups, who mostly worked on the graphical representation of the data (once selected and manipulated). For groups who posed some questions about the pandemic evolution, the most common was the graphical representation of data concerning time. For instance, here is a sample of the questions posed by *Team B*:

- $Q_{0\text{-Team B}}$: Which wave has affected Madrid the most?

Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2023a). A Study and Research Path about the Evolution of Pandemics at Secondary School: Conditions for an Interdisciplinary Approach. *Rivista Matematica della Università di Parma, 14*(2), 281–298. http://www.rivmat.unipr.it/vols/2023-14-2/04-barquero.html

- Q_1: Which wave shows the highest speed in the increase in the number of cases? And less?
    - $Q_{1.1}$: What is the date with the most cases registered?
    - $Q_{1.2}$: How long has each wave lasted?
    - $Q_{1.3}$: Why are there fewer registered cases on the weekends?
    - $Q_{1.4}$: How do restrictions affect the registration of cases?
- Q_2: Which wave has the highest number of cases, regardless of its duration?
- Q_3: Which wave presents the highest number of cases, considering its duration?

This team wanted to analyze the variation in the number of cases. They defined and calculated the *speed* of the number of cases using variation taxes. However, none of them started to propose equation-based models to fit the data and forecast what can happen in the future. All the groups posed questions to describe the data or compare them by age or place, but none of them tried to go further.

In the last session, the teams made presentations to their peers. One of the key instruments that teams shared with the rest was the Q-A maps that synthesized their inquiry. Interesting ideas emerged from the comparison of the different paths, such as: Which is the correct way of comparing the data from two or more provinces? Which tools exist and are more understandable to analyze the variation of data (rates of growth)? Which can be the interpretation of the increase or decrease, speed of increase or decrease of data? Does it make sense to talk about linear or exponential growth?, among other questions that could guide the continuation of the SRP into more advanced mathematical tools.

If we focus on the teachers' work guiding the SRP, it is important to mention that the Q-A maps elaborated by the different working teams have been recognized also by teachers as an important tool facilitating the guidance of the project and the collaboration among teachers from the different disciplines. On the one hand, the Q-A maps (new for some of them) helped them to monitor the work of each team (see comments from Teacher B), due to the openness of the initial researchable questions chosen and the diversity of paths followed. Moreover, students used these maps to organize the questions selected. Students, but also teachers, used them to plan when and how to address some of the questions (in what subject, with the whole class or with some of the working subgroups, …). Additionally, at the end of the implementation, the assessment of these Q-A maps was considered as one central aspect, assessing relevant aspects such as its completeness to describe the path followed, the classification and hierarchical organization proposed of all the elements (e.g. questions, answers, terminology, strategies followed).

Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2023a). A Study and Research Path about the Evolution of Pandemics at Secondary School: Conditions for an Interdisciplinary Approach. *Rivista Matematica della Università di Parma, 14*(2), 281–298. http://www.rivmat.unipr.it/vols/2023-14-2/04-barquero.html

With this respect, during the interviews realized with the teachers, after the implementation, the second mathematics teacher (Teacher B) explained that:

> "[...] The map of questions and answers has a double function. The first is to see how the teams integrate the different questions that emerged during their inquiry; and, then, to synthesize what they knew before and what they know after the process they have followed. It is a good tool for monitoring, to know which group is more or less lost [...]."

Or, in the case of the teacher of biology, Teacher C:

> "[...] It [the Q-A maps] offers double work for students: along with their research, students find answers (outside and inside the class), then they have to know how to pose, how to write the question(s) to which you have already given the answer. So they (the students) are responsible for finding the coherence between what they put as a question and what they write as an answer.
>
> "[...] In the map, you [referring to the teacher] can see the progress because it is where you see that there are questions that have answers. [...] It is a tool for monitoring the student's learning and the group's process."

Discussion and conclusions concerning the conditions and constraints for the implementation of an interdisciplinary SRP

From the implementation of the SRP about the COVID-19 evolution different positive aspects emerged. First, the topic and the initial questions posed by the students were clearly of social relevance and the utility of the final answers requested was beyond doubt. The interdisciplinarity character of the questions and their treatment was also visible, as we all saw during the pandemics in the discussions presented in the media, showing different controversies between scientifics' and policy-makers' decisions, and also among experts of different areas (medicine, mathematics, economics, psychology, etc.). Second, the school offered special positive conditions to run the SRP. Having the possibility to organize a common teaching process with grade 10 teachers of three different subjects is not always possible. And having their acceptance to participate needs the implicit support and encouragement of the head teacher and the school management team. The choice of the SRP as an instructional proposal and the tools provided by the ATD to conceive modelling processes facilitate putting the questions addressed at the core of the inquiry process without "caring" about the type of knowledge tools that are used to elaborate the final answers. Finally, the teacher who assumed the responsibility of the SRP is an expert in the ATD, she has been implementing this type of instructional proposal for three years and, therefore, has certain expertise in its design and management. Also, the students had previously followed an SRP during grade 9 (see Vásquez et al., 2021b) and were used to teamwork and project-based learning in all the subjects.

However, having apparently "good" conditions for the running of an interdisciplinary process does not mean that disciplines will interact in the elaboration of the final answer to the SRP. Indeed, also important *constraints* appeared that hinder this interaction and to which more attention should be paid in future research. The most important one is the teachers' *disciplinary profile* and their resistance to guiding the students' work unless the questions approached were clearly related to their discipline. Another one concerning the scholar organization level: among the three subjects that were merged to run the SRP, mathematics was compulsory for all grade 10 students, but biology and communication, on the contrary, were elective. Therefore, some students dedicated more hours than others to the development of the project. In the same way, the mathematics teachers spent 4 hours per week and the teachers of the optional subjects only 3 hours per week. This was an important constraint for both teachers and students, who were unequally involved. It also caused hierarchies in the project production and sometimes resulted in students not being able to participate as they feel disconnected from their team's progress.

Moreover, teachers highlighted the lack of time available as one of the big constraints that prevented them from more effective coordination. As explained by the biology teacher (Teacher C) during the interview:

> "[We] have two meeting hours, which are where teachers are supposed to work on everything that being a teacher entails [...]. For the projects to be successful and enriching, they require a good design and presentation, but it is also necessary time to attend students. It would even be perfect to do a second round of the project: once the students have presented their work, the teachers should be able to meet and comment on it [...]. These hours do not exist, even if we ask for them. Instead of this, they [the school] introduce new "fashionable" methodologies (without foundation). With this, we are preventing ourselves from making good use of a methodology that has good potential [...]."

Following similar arguments, the communication teacher (Teacher D) claimed that:

> "This project has been made during our free hours, while we were having lunch, [...]. I'm sorry we can't work more with teachers from other subjects because the school does not give us the time, it's impossible. [...] The school encourages us to do this type of implementation, but they do not give us the resources or working time to do it well."

What teachers missed was to have time to share and reflect on what had happened in class and to coordinate their intervention according to the students' work. Consequently, teachers were mainly aware of the students' work did during their class hours, but under their advice, as experts in some of the intervening disciplines. That is, due to the school organization, the teachers of the different disciplines (mathematics, biology and English/communication) could not be at the same time guiding the SRP. This has

Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2023a). A Study and Research Path about the Evolution of Pandemics at Secondary School: Conditions for an Interdisciplinary Approach. *Rivista Matematica della Università di Parma, 14*(2), 281–298. http://www.rivmat.unipr.it/vols/2023-14-2/04-barquero.html

consequences because students tended to choose questions to address that seemed closer to the subject or teacher's disciplinary domain. For instance, in the case of Teacher D, the English teacher:

> [I] felt that I had been able to follow the biology and social research closely, as this was what the students were working on when the biology teacher and myself were in the classroom [with independent groups]. During our sessions, the students did not work on the mathematics questions, as the mathematics teachers were not in the classroom.

It was at the final presentation that she was able to see the result of the mathematics research. She also commented that she was able to understand the mathematics part of the research because it was explained at a simple level.

Interdisciplinary work needs quality time for the teachers to share opinions and make decisions. It has to overcome a long tradition of secondary school mono-disciplinary treatment of topics. Moreover, it needs time for teachers (and students) to think together about the necessary knowledge that is on the frontiers between the disciplines and the new knowledge coming from the interaction and integration of disciplines.

With this respect, teachers and researchers must collaborate during the SRP implementation—the *in vivo analysis*—to detect where and how disciplinary and interdisciplinary knowledge is needed. And this collaboration needs a previous collective reflection on what it means to design and guide an SRP coordinating and integrating different disciplines. Teachers participating in this implementation refer to how conscious they were about the project's multidisciplinary nature. However, this does not mean that they knew how to deal with multidisciplinarity. In this sense, the biology and english teacher agreed that their subjects were the only ones in which they felt able to advise the teams, or at least to debate and counteract what the students were defending. These results link with the importance given in Barelli et al. (2023) to "metareflection questions about interdisciplinarity", meaning the reflection on the role and interactions of different disciplines and how to manage them in class. This reflection is crucial to planning the proposal, but also would have been here necessary to help teachers' reflect on the epistemological and didactic nature of interdisciplinarity and on the strong constraints they were directly challeging.

Acknowledgement

This research was made thanks to "Col·legi Natzaret", the Spanish ministry projects RTI2018-101153-B-C21 and RTI2018-101153-A-C22 (MCIU/AEI/FEDER, UE) and the Erasmus+ Programme IDENTITIES (Grant Agreement n°2019-1- IT02-KA203- 063184).

References

Barelli, E., Barquero, B., & Branchetti, L. (this issue). Questioning the evolution of the pandemic in an interdisciplinary way: the design of a Study and Research Path for pre-service Teacher Education. *Rivista di Matematica della Università di Parma*, this issue.

Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? In S. J. Cho (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 73–96). Springer.

Bosch, M. (2018). Study and Research Paths: a model for inquiry. In B. Sirakov, P. N. de Souza, & M. Viana (Eds.), *International Congress of Mathematicians* (Vol. 3, pp. 4001–4022). World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.

Bosch, M., & Winsløw, C. (2015). Linking problem solving and learning contents: the challenge of self-sustained study and research processes. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 35*(2), 357-399.

Chevallard, Y. (2015). Teaching mathematics in tomorrow's society: A case for an oncoming counter paradigm. In S. J. Cho (Ed.), Proceedings of the 12th international congress on mathematical education (pp. 173–187). Springer.

English, L. (2016). Advancing mathematics education research within a STEM environment. In K. Fry, S. Dole, M. Goos, K. Maker, A. Bennison, & J. Visnovska (Eds.), Research in mathematics education in Australasia 2012-2015 (pp. 353-371). Springer.

Maass, K., Geiger, V., Ariza, M.R., et al. (2019). The Role of Mathematics in interdisciplinary STEM education. *ZDM Mathematics Education, 51*, 869–884. https://doi-org/10.1007/s11858-019-01100-5

Michelsen, C. (2006). Functions: a modelling tool in mathematics and science. *ZDM - Mathematics Education*, *38*(3), 269-280. https://doi-org/10.1007/BF02652810

Rasmussen, K. (2016). The direction and autonomy of interdisciplinary study and research paths in teacher education. *Journal of Research in Mathematics Education, 5*(2), 158-179.

Saltelli, A., et al. (2020). Five ways to ensure that models serve to society: a manifesto. Nature, 582, 482-582. https://doi.org/10.1038/d41586-020-01812-9

Winsløw, C., Matheron, Y., & Mercier, A. (2013). Study and research courses as an epistemological model for didactics. *Educ Stud Math, 83*(2), 267–284. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9453-3

Vásquez, S., Barquero, B., & Romero, O. (2021). Recorridos de estudio e investigación interdisciplinares: ¿Cómo llevar la problemática actual sobre la COVID-10 al aula? *UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas.*

Vásquez, S., Barquero, B., & Bosch, M. (2021b). Teaching and learning combinatorics in secondary school: a modelling approach based on the Anthropological Theory of the Didactic. *Quadrante*, *30*(2), 200–219. https://doi.org/10.48489/quadrante.23878

4.2. Las disciplinas y la interdisciplinariedad en el paradigma del cuestionamiento del mundo

Finalmente, el último apartado de este cuarto capítulo está dedicado a tratar las cuestiones:

PI3.1 ¿Cómo intervienen las disciplinas en la dinámica de la indagación en un REI? ¿Qué restricciones establecen en la enseñanza disciplinar en un REI?

PI3.3 ¿Qué función tiene la interdisciplinariedad dentro del paradigma del cuestionamiento del mundo?

Y para ello, componemos esta sección con el artículo aceptado el 13/6/24 para su publicación en la revista "Enseñanza de las Ciencias". Se podrá encontrar en el Apéndice 2.1 el certificado de aceptación del artículo.

Referencia

Vásquez, S. Barquero, B. y Bosch, M. (aceptado) Interdisciplinariedad en educación secundaria: un recorrido de estudio e investigación. *Enseñanza de las Ciencias.* https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.6029

Interdisciplinariedad en educación secundaria: un recorrido de estudio e investigación

Resumen. Partimos de la hipótesis de que la separación entre disciplinas dificulta la enseñanza basada en la indagación y que generar entornos interdisciplinarios la facilita cuando los contenidos disciplinares se ponen al servicio del estudio de cuestiones, superando las limitaciones de la organización escolar por materias. Estudiamos esta conjetura a través de la propuesta de recorridos de estudio e investigación (REI) según la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Presentamos un REI sobre la evolución del COVID-19 implementado durante dos años consecutivos en 4º curso de la educación secundaria española (15-16 años), en un trabajo conjunto entre las asignaturas de matemáticas, tecnología, biología y comunicación. Los resultados muestran que el entorno interdisciplinar promueve dinámicas de indagación, pero que para que sea sostenible, es crucial preservar espacios de trabajo disciplinar.

Palabras clave: Interdisciplinariedad, modelización, recorridos de estudio e investigación, educación secundaria, pandemia.

Abstract. We start from the hypothesis that the school separation between disciplines hinders inquiry-based teaching. Creating interdisciplinary environments facilitates this approach when disciplinary content is utilized in the study of problematic issues, surpassing the limitations of school organization by subjects. We investigate this conjecture through the proposal of study and research paths (SRP) from the Anthropological Theory of the Didactic. We present an SRP on the evolution of COVID-19 implemented over two consecutive years in the 4th year of Spanish secondary school education, through collaborative work between mathematics, technology, biology, and communication subjects. The results indicate that the interdisciplinary environment fosters inquiry dynamics, but for it to be sustainable, it is crucial to preserve spaces for disciplinary work.

Keywords: Interdisciplinarity, modelling, study and research paths, secondary school, pandemics.

Introducción

La enseñanza secundaria actual estructura los contenidos curriculares en materias que corresponden a diferentes disciplinas académicas. La última reforma educativa en España (Jefatura del Estado, 2020) permite a los centros agrupar materias en “ámbitos” y “establecer organizaciones didácticas que impliquen impartir conjuntamente diferentes materias de un mismo ámbito” (Jefatura del Estado, 2020, p. 122891). Esta medida ha generado debate, con defensores que argumentan que esto puede empobrecer el estudio de las disciplinas y detractores que sostienen que la separación entre materias limita el estudio de cuestiones socialmente relevantes. Como ejemplo local, el programa STEAMCat[6] se define como un enfoque global y transversal que utiliza situaciones problemáticas contextualizadas para

[6] https://projectes.xtec.cat/steamcat/

Vásquez, S. Barquero, B. y Bosch, M. (aceptado) Interdisciplinariedad en educación secundaria: un recorrido de estudio e investigación. *Enseñanza de las Ciencias*. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.6029

trabajar ciencias, tecnología, ingeniería, artes y matemáticas. Movimientos internacionales como STEM buscan hacer evolucionar la estructura disciplinar de los currículos hacia un modelo educativo interdisciplinario que contribuya a dar mayor visibilidad al mundo de la tecnología y de la ingeniería en la escuela (Sanders, 2009; Michelsen y Sriraman, 2009). Estas propuestas, a su vez, han sido criticadas también, entre otras, por su falta de integración curricular (Toma y García-Carmona, 2021), aunque se reconoce una necesidad de establecer relaciones y contenidos para dotarles de utilidad y relevancia para el alumnado.

Estudios en países como Canadá (Hasni et al., 2015), Dinamarca (Rasmussen, 2016) o Brasil (Fidalgo-Neto et al., 2014) han abordado también los retos que surgen cuando se promueven propuestas interdisciplinares. Estos estudios coinciden en que la falta de apoyo y competencia docente obstaculiza el desarrollo de enfoques interdisciplinarios y que la interdisciplinariedad conseguida es superficial, sin lograr la integración efectiva de las materias para resolver problemas complejos. Algunos autores han dedicado esfuerzos para favorecer y guiar la aplicación de propuestas interdisciplinares (Lenoir y Hasni, 2016), en concreto, en el ámbito de la enseñanza de las ciencias (Broggy et al., 2017). En la enseñanza de las matemáticas, English y colaboradores ponen de manifiesto el potencial de las propuestas interdisciplinares para el estudio de problemas de modelización realistas (English y Watters, 2005; English, 2008 y 2009).

Para superar las limitaciones que pueden suponer el encorsetamiento disciplinar, desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD; Chevallard, 2013) se propone un tipo de dispositivo didáctico denominado "recorrido de estudio e investigación" (REI), como medida para avanzar hacia un cambio de paradigma pedagógico—el paradigma del cuestionamiento del mundo —que permita poner el estudio de cuestiones en el centro de los procesos de enseñanza escolares, y para abordarlas desde una perspectiva abierta, "no-disciplinar". Esto no implica abandonar las disciplinas o los saberes disciplinares, sino supeditar su estudio a la necesidad de aportar respuestas a las cuestiones que se aborden. La TAD está desarrollando una línea de investigación centrada en el estudio de las condiciones necesarias para la transición hacia este nuevo paradigma, así como las restricciones que aparecen en distintos niveles de codeterminación didáctica (Chevallard, 2002) (disciplinares, pedagógicos, escolares, sociales); restricciones que dificultan la transición hacía el paradigma del cuestionamiento del mundo. Estas investigaciones se están desarrollando desde hace años, especialmente por investigadores de Argentina, Dinamarca, España, Francia y Japón, tanto en el ámbito de la enseñanza universitaria y la formación del profesorado como en la educación secundaria (ver, por ejemplo, Barquero et al., 2021; Bosch et al., 2020; Parra y Otero, 2018). Nuestro trabajo se inscribe en esta línea, como desarrollaremos más adelante.

Como afirma Rasmussen (2016), un paradigma donde lo importante son las cuestiones nos obliga a pensar que las preguntas de importancia social rara vez pueden ser abordadas desde una única disciplina, por lo que los REI podrían ser especialmente atractivos en estos contextos. Hasta la fecha, y salvo algunas excepciones (Gazzola et al., 2021; Jessen, 2014; Sala et al., 2020), la mayoría de las investigaciones sobre los REI se han circunscrito al diseño e implementación de propuestas dentro de una única disciplina (Barquero et al., 2021; Bosch, 2018). Esto no significa que la cuestión abordada y las herramientas utilizadas sean monodisciplinares, pero el marco de realización era una asignatura concreta con un o una docente especialista de la materia asociada. La opción de organizar un REI entre distintas disciplinas ha sido poco estudiada.

El nuevo currículum español (Jefatura del Estado, 2020) destaca un aprendizaje competencial y funcional, enfocado en la utilidad en contextos reales. Se introducen las *situaciones de aprendizaje*, que plantean problemas o preguntas en contextos reales. Este nuevo planteamiento representa un escenario favorable tanto para la interdisciplinariedad como para el cambio de paradigma, pero su falta de concreción desorienta a los docentes y genera diversas demandas (Domènech-Casal, 2022).

La pandemia del COVID creó un cambio cultural importante en la relación de nuestras sociedades con las distintas disciplinas y con la investigación y su difusión (Maass et al., 2022, Saltelli et al., 2020). Por un lado, se puso de manifiesto la importancia de la investigación biológica, epidemiológica, médica, económica y social para abordar, en tiempo real, un problema socialmente relevante que afectaba a toda la humanidad. Por otro lado, quedó claro que las respuestas a los problemas de la pandemia requerían más que nunca la colaboración entre expertos de distintas disciplinas y, para el caso de las matemáticas, se evidenció su pertinencia como herramienta de modelización para abordar problemas de la vida real.

El estudio de Cunningham et al. (2021) aporta pruebas empíricas del aumento de la multidisciplinariedad y la colaboración en la investigación sobre COVID, lo que sugiere que la pandemia ha facilitado una mayor integración entre los distintos campos científicos.

La propia problemática del COVID ha generado algunas propuestas didácticas en los diferentes niveles educativos, aunque mayoritariamente en un entorno monodisciplinar (Elsner et al., 2023; Ledder, 2021; Trelles-Zambrano, 2022; Sawada, 2022). Estos desarrollos se alinean con el creciente énfasis, en la modelización matemática en los estándares curriculares internacionales de estas últimas décadas, respondiendo así a la demanda de integrar la modelización matemática en diversas disciplinas (Blum y Niss, 1991; Blum et al., 2007; Cai et al., 2014; Houston, 2009).

Nuestra investigación se propone identificar si propuestas como los REI, que promueven el cuestionamiento, también favorecen el trabajo interdisciplinar. De la misma manera, investigaremos si las dinámicas que separan y asignan tareas o cuestiones a las diferentes disciplinas potencian más el cuestionamiento y, por lo tanto, también la interdisciplinariedad. Formulamos, en consecuencia, dos cuestiones de investigación:

C1: ¿Cómo intervienen las disciplinas en la dinámica de la indagación en un REI y cómo se genera la interdisciplinariedad?

C2: ¿Qué condiciones facilitan y qué restricciones limitan el trabajo interdisciplinar en un REI?

Vásquez, S. Barquero, B. y Bosch, M. (aceptado) Interdisciplinariedad en educación secundaria: un recorrido de estudio e investigación. *Enseñanza de las Ciencias*.
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.6029

Marco teórico

El marco teórico en el que nos situamos es la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD, Chevallard, 2013; Chevallard y Bosch, 2020), que distingue dos paradigmas pedagógicos, uno dominante y otro en construcción. La estructuración del currículum escolar en distintas disciplinas (llámense áreas, materias o asignaturas) forma parte del paradigma en el que se sitúan los sistemas educativos actuales y que Chevallard (2013) caracteriza como la *visita de las obras*. En este paradigma los objetivos de la enseñanza se definen como un conjunto de contenidos o saberes que los alumnos deben conocer—o, por lo menos, haber encontrado o "visitado"—y que los docentes tienen la responsabilidad de enseñar. Este autor propone considerar el contraparadigma emergente del *cuestionamiento del mundo* para situarse fuera del paradigma dominante y considerar nuevas opciones para la enseñanza.

La TAD toma como principal objeto de estudio las condiciones y restricciones que facilitan o limitan la difusión de conocimientos en la sociedad y, en particular, en las instituciones escolares. Se basa en una concepción del conocimiento (o de los saberes) como resultado de una construcción institucional vinculada a los procesos de indagación y estudio de cuestiones problemáticas. En este sentido, la TAD aborda la problemática didáctica desde una perspectiva antropológica, sin distinguir inicialmente las matemáticas de las demás disciplinas. Los procesos de indagación se estructuran en forma de *recorridos de estudio e investigación* (REI) cuyo objetivo es dar respuesta a una *cuestión generatriz* que se plantea un grupo o una comunidad de estudio (por ejemple, un grupo clase) y para la cual no se dispone generalmente de una respuesta previamente elaborada. El papel del docente es ayudar y guiar al grupo clase a elaborar dicha respuesta, que requiere de un proceso de indagación relativamente largo. La indagación provoca que el alumnado plantee cuestiones derivadas de la inicial, busquen información relevante, estudien nuevos contenidos y se apropien de las herramientas y saberes necesarios para elaborar una respuesta final a la cuestión abordada (Bosch et al., 2020).

La cuestión generatriz de un REI puede surgir en el marco de una única disciplina o materia. Pero, en general, si se consideran cuestiones socialmente relevantes y "vivas" para el alumnado, estas suelen formularse en un contexto multi-disciplinar o a-disciplinar y, además suelen requerir el recurso a varios ámbitos del saber (Jessen, 2014).

No se trata de asumir la interdisciplinariedad como un objetivo de enseñanza. Esto nos situaría en una posición cercana al paradigma de la visita de las obras con la aparición de una nueva obra llamada "interdisciplinariedad", tal como también ponen de manifiesto Toma y García-Carmona (2021) con su análisis crítico de la tendencia STEM.

La mayoría de las investigaciones didácticas sobre interdisciplinariedad suelen abordarla, aunque sea de forma implícita, desde una posición de cuestionamiento, ya sea a partir de un reto (Ortega-Torres y Moncholí, 2021) o de un proyecto (Domènech-Casal et al., 2019). La reciente revisión de Tonnetti y Lentillon-Kaestner (2023) lo confirma, identificando una diversidad de obstáculos que dificultan la implementación de propuestas interdisciplinares. Este estudio revela que los estudiantes pueden experimentar brechas disciplinarias, aprendizaje confuso, dificultades para manejar la globalidad de la información recibida, o

Vásquez, S. Barquero, B. y Bosch, M. (aceptado) Interdisciplinariedad en educación secundaria: un recorrido de estudio e investigación. *Enseñanza de las Ciencias*.
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.6029

conflictos debido a la cooperación requerida. Para los profesores, la identidad profesional disciplinaria también puede ser un obstáculo para cambiar su rol de docentes a "guías de la indagación". Otros obstáculos incluyen la falta de capacitación interdisciplinaria y de documentos de referencia, la dificultad para evaluar habilidades y conocimientos generales y la falta de apoyo institucional.

La distinción entre multidisciplinariedad, interdisciplinariedad y transdisciplinariedad ha sido discutida por distintos autores. Klein (1990) distingue la simple yuxtaposición de disciplinas sin integración alguna (*multi*disciplinariedad) de cuando se produce "una síntesis de dos o más disciplinas que establece un nuevo nivel de discurso y de integración de conocimiento" (*inter*disciplinariedad), del enfoque "holístico que subordina las disciplinas, mirando las dinámicas del sistema completo" (*trans*disciplinariedad) (Choi y Pak, 2006, p. 355, traducción propia). Palmer (1999) también caracteriza la investigación interdisciplinar como un equilibrio entre un conocimiento especializado básico y la creación de nuevo conocimiento.

En nuestra investigación, adoptamos la distinción entre distintos niveles de interacción o diálogo entre disciplinas, cuando estas se utilizan para abordar cuestiones problemáticas. Entendemos la *multi*disciplinariedad cuando distintas disciplinas abordan una cuestión de forma independiente, generando muchas veces cuestiones derivadas independientes, cada una vinculada a un marco disciplinar. La *inter*disciplinariedad surge cuando una misma cuestión permite una aproximación desde distintas disciplinas y con ello la generación de conocimiento conjunto, de repuestas que no se hubieran podido obtener dentro del marco disciplinar. Por último, la *trans*disciplinariedad aparece cuando las cuestiones abordadas necesitan obligatoriamente del trabajo conjunto entre disciplinas, cuestionando así las fronteras que a menudo, y más acusadamente a nivel escolar, se establecen entre ellas. Es importante señalar aquí que la delimitación de las disciplinas tiene un componente histórico institucional y debe interpretarse en una dinámica continua de evolución y transformación constante, junto con la creación de nuevas áreas, especialidades y, finalmente, disciplinas o ciencias nuevas.

Metodología

Nuestra investigación sigue la metodología de investigación llamada "ingeniería didáctica", como la describe Artigue (1988 y 2014) y se adaptó posteriormente en (Barquero y Bosch, 2015; García et al., 2019). Estos autores la estructuran en cuatro fases de análisis: preliminar, *a priori*, *in vivo* y *a posteriori*.

Vásquez, S. Barquero, B. y Bosch, M. (aceptado) Interdisciplinariedad en educación secundaria: un recorrido de estudio e investigación. *Enseñanza de las Ciencias*.
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.6029

Figura 1: Ciclos de la ingeniería didáctica (García et al., 2019)

El diseño de los REI presentados sigue un doble ciclo del proceso de ingeniería didáctica. Tras los resultados del primer ciclo (REI1), se realizaron ajustes en el diseño del segundo (REI2) para abordar las restricciones identificadas. También se puede considerar, dentro de la lógica del proceso de ingeniería didáctica, que el REI1 es un estudio piloto que se integra en la fase del análisis preliminar del REI2. Para evitar repeticiones, se describe primero el diseño e implementación del REI1 siguiendo las cuatro fases del proceso de ingeniería, indicando posteriormente los cambios realizados para el diseño del REI2, diferenciando el contexto escolar, pedagógico y didáctico.

El *análisis preliminar* considera los fenómenos didácticos que se sitúan en el origen de la investigación. En nuestro caso, refiere a las cuestiones de investigación que hemos presentado anteriormente, relativas a las limitaciones de la enseñanza por materias arraigada en el paradigma de la visita de las obras y la potencialidad de los REI para superar dichas limitaciones y generar interdisciplinariedad. De forma más genérica, el análisis preliminar aborda la relación entre el paradigma del cuestionamiento del mundo y la interdisciplinariedad.

El análisis *a priori* del REI1 incluye su diseño a partir de un análisis del potencial generador de la cuestión que lo origina (cuestión generatriz), asegurando su "estudiabilidad" y pertinencia. Esto requiere la identificación de posibles cuestiones derivadas que los alumnos probablemente plantearán y estudiarán, así como la organización didáctica y la generación de medios para su gestión. Durante la implementación, se realiza un análisis *in vivo* a cargo del equipo de docentes e investigadores, basado en los diarios y producciones de los alumnos, así como en el diario compartido por los docentes. Este análisis permite reflexionar sobre el proceso vivido y determinar los pasos por seguir a partir de los resultados que se van obteniendo. Una herramienta clave es el *mapa de cuestiones y respuestas* (mapa CR, en adelante), que recoge las cuestiones que van apareciendo, tanto las que se abordan como las que se decide descartar, marcando así el avance de la indagación (Winsløw et al., 2013). Dicho mapa permite

Vásquez, S. Barquero, B. y Bosch, M. (aceptado) Interdisciplinariedad en educación secundaria: un recorrido de estudio e investigación. *Enseñanza de las Ciencias*.
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.6029

la clasificación de las cuestiones en categorías disciplinares y generales, aunque esta clasificación es más propia de la etapa final de la ingeniería, el análisis *a posteriori*. En esta etapa, realizada al finalizar el REI, se identifican aspectos interdisciplinarios, analizando trayectorias de estudio e investigación de los estudiantes, categorizando las preguntas que aparecen en los mapas CR, los modelos utilizados y las respuestas generadas.

Las categorías para clasificar las cuestiones emergen del análisis inicial de las producciones estudiantiles, realizado por la primera autora y validado posteriormente por el resto de las autoras mediante un proceso de triangulación. Inicialmente, se utilizaron dos categorías de cuestiones: genéricas y disciplinares. Las genéricas corresponden a preguntas relacionadas con los objetivos generales del estudio, organización y los cambios en el contrato didáctico. Dentro de las disciplinares, se distinguieron subcategorías. Para el caso de matemáticas, se distinguen entre cuestiones relativas a: la recopilación de datos, las técnicas de análisis de los datos, y la creación, uso y validación de modelos. Del resto de disciplinas, solamente se consiguió organizarlas por temáticas y relacionarlas entre ellas. La clasificación reveló el carácter multi- o interdisciplinar de los procesos seguidos, identificando disciplinas asociadas a las cuestiones y sus posibles interacciones.

El análisis *a posteriori* también incluyó encuestas de valoración, donde se solicitó a los estudiantes que identificaran tres aspectos aprendidos y tres habilidades adquiridas. La pregunta buscaba destacar *conocimientos significativos* desde la perspectiva del estudiante y evaluar posibles variaciones según la asignatura optativa. Se esperaba que, por ejemplo, los estudiantes de biología resaltaran más aquellos aspectos relacionados con la biología del virus, los de tecnología sobre las simulaciones y los de expresión plurilingüe sobre la redacción de artículos. De ser así, el objetivo de conseguir la interdisciplinariedad no estaría cumplido, al no reconocerse un espacio de cuestiones compartidas. Con estos datos realizamos un análisis temático generando categorías organizadas por disciplinas y la disciplina optativa del estudiante.

Los resultados de este análisis guiaron el segundo ciclo de ingeniería didáctica. En el *análisis a priori* del REI2, se ajustó el diseño para abordar las restricciones observadas en el ciclo anterior. Se repitió la dinámica en el *análisis in vivo* y *a posteriori*, utilizando herramientas similares al ciclo previo y cuyo uso concluyó en un análisis comparativo para detectar posibles diferencias significativas entre las dos experimentaciones.

Diseño e implementación de un primer REI multidisciplinar sobre el COVID y consecuencias para su rediseño

A continuación, describimos el diseño del REI1, algunos de los resultados del análisis *a posteriori* de este primer ciclo y las modificaciones consecuentes que se realizaron para el REI2. El lector verá que en el apartado de resultados daremos respuesta a si dichos cambios resultaron efectivos para el objetivo marcado, teniendo siempre en consideración que el fenómeno didáctico que se quiere estudiar: el de la superación del encierro disciplinar para facilitar la resolución de la cuestión problemática con una mirada interdisciplinar.

Vásquez, S. Barquero, B. y Bosch, M. (aceptado) Interdisciplinariedad en educación secundaria: un recorrido de estudio e investigación. *Enseñanza de las Ciencias*.
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.6029

Contexto escolar

Ambas experiencias se realizaron en 4º curso de la Educación Secundaria Obligatoria en España, con 59 alumnos del mismo centro, repartidos en 2 grupos, en dos años consecutivos (2021/22 y 2022/23). La organización del centro establece que la asignatura “Matemáticas” es obligatoria y cada estudiante elige entre biología, expresión plurilingüe o tecnología como asignatura optativa. Los profesores de matemáticas y el de biología se mantuvieron constantes en ambas implementaciones, mientras que los de tecnología y expresión cambiaron. En ambas, los estudiantes tenían un ordenador personal y acceso a internet con diversas herramientas: hojas de cálculo, procesadores de textos y de presentaciones, entre otras.

Infraestructura pedagógica

Debido a restricciones en el calendario escolar, el REI1 fue más corto de lo deseado (8 días, con 14 sesiones). Se realizó durante el tercer trimestre, momento del curso marcado por limitaciones de calendario. En el cuestionario final del REI1 (Figura 8), los estudiantes indicaron las dificultades generadas por el nivel de trabajo requerido. Por esta razón, en el REI2 se estableció un calendario más flexible y adaptativo, extendiendo su duración a 14 días con 24 sesiones.

En cuanto a la organización de los equipos de trabajo, en el REI1 se mezclaban estudiantes de todas las optativas (grupos multidisciplinares). Todos los equipos se organizaron repartiendo de tareas por disciplinas. Si bien esto facilitó el trabajo colaborativo, se evidenció una limitación en la efectiva interdisciplinariedad, ya que la especialización disciplinar prevalecía en los equipos sobre la integración y complementariedad. En consecuencia, en el REI2 se decidieron formar equipos con estudiantes de la misma optativa (monodisciplinares).

En ambas experiencias los estudiantes utilizaron un documento digital, común a la clase, para compartir las avances y aportaciones y un diario grupal para llevar un registro de la evolución de su trabajo, donde describían las preguntas estudiadas, las respuestas parciales que habían sido encontradas, el reparto de las tareas del grupo e individuales y, por último, proponer nuevas cuestiones de indagación. Este diario se entregaba al finalizar cada sesión por Google Classroom, permitiendo a los profesores supervisar el progreso de los grupos.

Infraestructura didáctica

- Cuestión generatriz del REI1 y condiciones para su estudio

La cuestión generatriz del REI1 fue: *¿Cuánta de toda la información que se ha dicho sobre el COVID ha acabado siendo cierta?* El objetivo inicial era analizar las noticias que aparecieron en tiempo de pandemia y contrastar su veracidad. Cada equipo tenía su propia línea de investigación, que debía incluir cuestiones de todas las disciplinas y, al finalizar, las debían presentar en forma de un artículo científico, un póster, una presentación oral y un vídeo orientado a redes sociales.

- Limitaciones identificadas en el REI1

https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.6029

A raíz del análisis de las producciones de los estudiantes del REI1, se consiguieron identificar tres limitaciones, muy relacionadas con los cambios en el contrato didáctico. Por un lado, el análisis de los mapas CR muestra que la generación, desarrollo y conexión de las cuestiones derivadas fue una tarea que no quedó bien documentada o fue poco elaborada por los equipos. Las cuestiones incluidas en los informes están desarticuladas, se distingue una clara separación entre disciplinas (Figuras 2 y 3) y tienen poco potencial para derivar nuevas cuestiones que completen la investigación. Además, se observó que los equipos se repartían las cuestiones a estudiar según la optativa que cursaban y no compartían sus avances con los demás equipos. Estas evidencias muestran que el trabajo interdisciplinar en el REI1 fue pobre, más cercano a una aproximación multidisciplinar: se involucraron las tres disciplinas, pero no se relacionaron entre ellas. Por lo general, los estudiantes se limitaron a responder a las cuestiones que habían generado en la primera sesión, pero no surgieron cuestiones nuevas, ni se discutieron o validaron las respuestas. La ausencia de esta dialéctica cuestión-respuesta fue más marcada en las optativas que en matemáticas. Como consecuencia, se decidió que en el REI2 los grupos serían monodisciplinares y se añadirían algunos dispositivos pedagógicos para promover la interdisciplinariedad, facilitando la compartición de los avances entre los distintos grupos: la exposición de grupos especialistas y la producción de un artículo científico completo con las aportaciones de todos los grupos.

Vásquez, S. Barquero, B. y Bosch, M. (aceptado) Interdisciplinariedad en educación secundaria: un recorrido de estudio e investigación. *Enseñanza de las Ciencias*.
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.6029

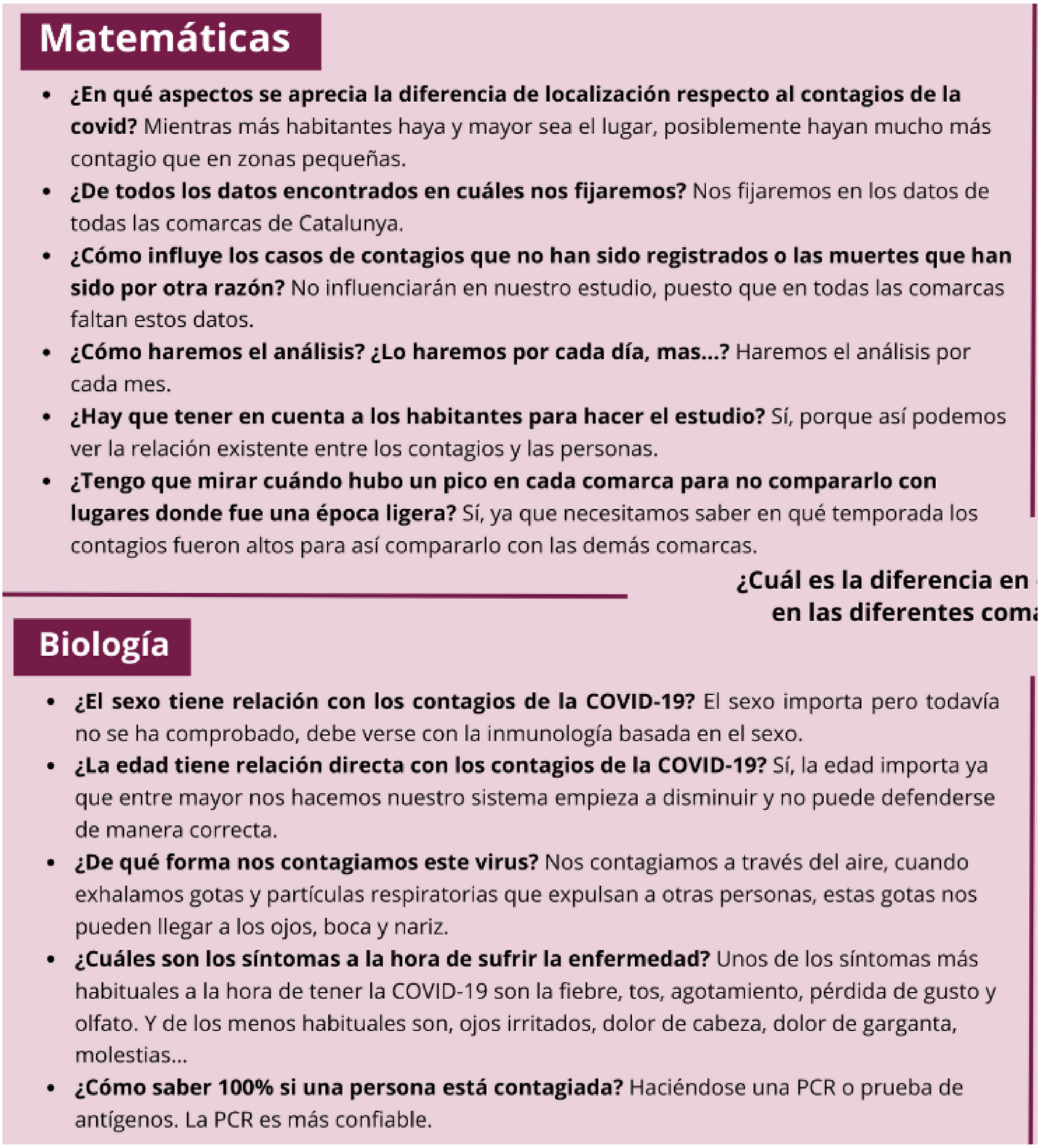


Figura 2: Ejemplo de producción de un mapa CR producido por un equipo en el REI1, con cuestión Q_0: *¿Cuál es la diferencia en el contagio del COVID en las diferentes comarcas de Cataluña?* (parte izquierda del mapa)

Vásquez, S. Barquero, B. y Bosch, M. (aceptado) Interdisciplinariedad en educación secundaria: un recorrido de estudio e investigación. *Enseñanza de las Ciencias*.
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.6029

Social

- **Las diversas formas de vivir en las diferentes zonas, ¿afectan a la forma en que el cóvido se expandió?** Las personas se atraen por ciudades que son grandes y muy conocidas, por tanto cuando dejaron que extranjeros entren en el país hizo que se expanda más.
- **¿La gente se mueve en diferentes lugares desde el comienzo de la pandemia?** Las personas se mueven de la ciudad al pueblo, esperando alejarse de un ambiente en el que hay mucha gente y muchos contagios.
- **¿Cómo afecta el confinamiento a nivel psicológico a las personas?** Problemas de ansiedad, aumento de adicciones y hábitos tóxicos, frustración...
- **¿La forma de relacionarse ha cambiado desde la pandemia? ¿Cómo?** Si, con la pandemia, solemos mostrar desconfianza a los desconocidos y no gustan los aglomeramientos de gente.
- **¿Cómo afecta a la COVID-19 en las ciudades?** A principio del confinamiento afectó tanto a la ciudad como al comercio, esto fue porque algunas tiendas tuvieron que cerrar temporalmente y otros tuvieron que cerrar porque no podían pagar el local.

n el contagio del COVID
narcas de Cataluña?

Otros

- **¿Cómo se visualiza un contagio con diferentes premisas pero al mismo tiempo mediante el programa Netlog?** Existe un gráfico que se va modificando mediante los días pasan a la simulación. Si te descargas los datos finales y mediante el excel creas un gráfico propio, puedes diferenciar entre ellos.
- **¿El COVID-19 es una oportunidad para un aprendizaje "profundo" para la vida?** Esto depende de cada persona, algunas personas se han cogido este confinamiento como una temporada para pensar en sí mismos. pero otros se lo han cogido como una temporada de estudiar cosas nuevas.
- **¿Cuál es la diferencia en las simulaciones según el número de población?** Que donde haya más población, más gente se contagiará rápidamente, por tanto se curaron antes que donde haya menos población, que aunque no se contagia a toda la población, se sigue contagiando la mayoría de ésta y es de manera mucho más lenta por tanto cuando las comarcas con más gente se hayan curado, las comarcas con menos seguirán confirmando casos de cóvido mucho más tiempo.

Figura 3: Ejemplo de producción de un mapa CR producido por un equipo en el REI1, con cuestión Q_0: *¿Cuál es la diferencia en el contagio del COVID en las diferentes comarcas de Cataluña?* (parte derecha del mapa)

Vásquez, S. Barquero, B. y Bosch, M. (aceptado) Interdisciplinariedad en educación secundaria: un recorrido de estudio e investigación. *Enseñanza de las Ciencias*.
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.6029

Como segunda observación, en el análisis *a posteriori* se descubrió que detrás de alguna investigación hubo alguna pregunta que el grupo no identificó como tal y que hubiera permitido abrir nuevos caminos en la indagación. Como ejemplo de este análisis mostramos la Figura 4, un mapa CR realizado por las investigadoras y que reproduce el recorrido de un grupo durante REI1, que eligió como cuestión a estudiar: *¿Qué variante ha sido más peligrosa?* Este mapa incluye las preguntas explícitas (formuladas por los alumnos) e implícitas (deducidas por las investigadoras) que este equipo generó para el desarrollo de su trabajo. El mapa muestra que se derivan cuestiones dentro de cada disciplina, aunque no se crean relaciones entre cuestiones, lo que marcaría la interdisciplinariedad. Se distinguen algunas cuestiones con potencial para ser relacionadas y estudiadas interdisciplinarmente, por ejemplo Q.4.1 con Q.5.1 o Q.1.1.3 con Q.2.2.1, que el equipo no conectó.

Como consecuencia de este resultado, en el REI2 se decidió utilizar como cuestión generatriz única la del grupo que hemos descrito en este apartado, ya que vimos que el mapa CR que derivaba proporcionaba suficiente potencial para generar relaciones interdisciplinares: *¿Qué variante del COVID ha sido la peor?*

La tercera observación se relaciona con la responsabilidad de la gestión del mapa CR. En el REI1 ésta recaía únicamente en los estudiantes, resultando una actividad confusa y con resultados sin una estructura arborescente ni mostrando una evolución clara en relación con las cuestiones estudiadas. Se consideró que la obligación de representar el mapa podía distorsionar el cuestionamiento, centrándose en él como producto en lugar de ser una herramienta, ya que el objetivo derivaba en generar preguntas y organizarlas, en vez de cuestionarse el problema y buscar respuestas. En consecuencia, en el REI2, se propuso traspasar la responsabilidad de generar y gestionar el mapa CR al profesorado, a partir de la información y propuestas incluidas en los diarios de cada grupo y las puestas en común en el aula.

Vásquez, S. Barquero, B. y Bosch, M. (aceptado) Interdisciplinariedad en educación secundaria: un recorrido de estudio e investigación. *Enseñanza de las Ciencias*.
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.6029

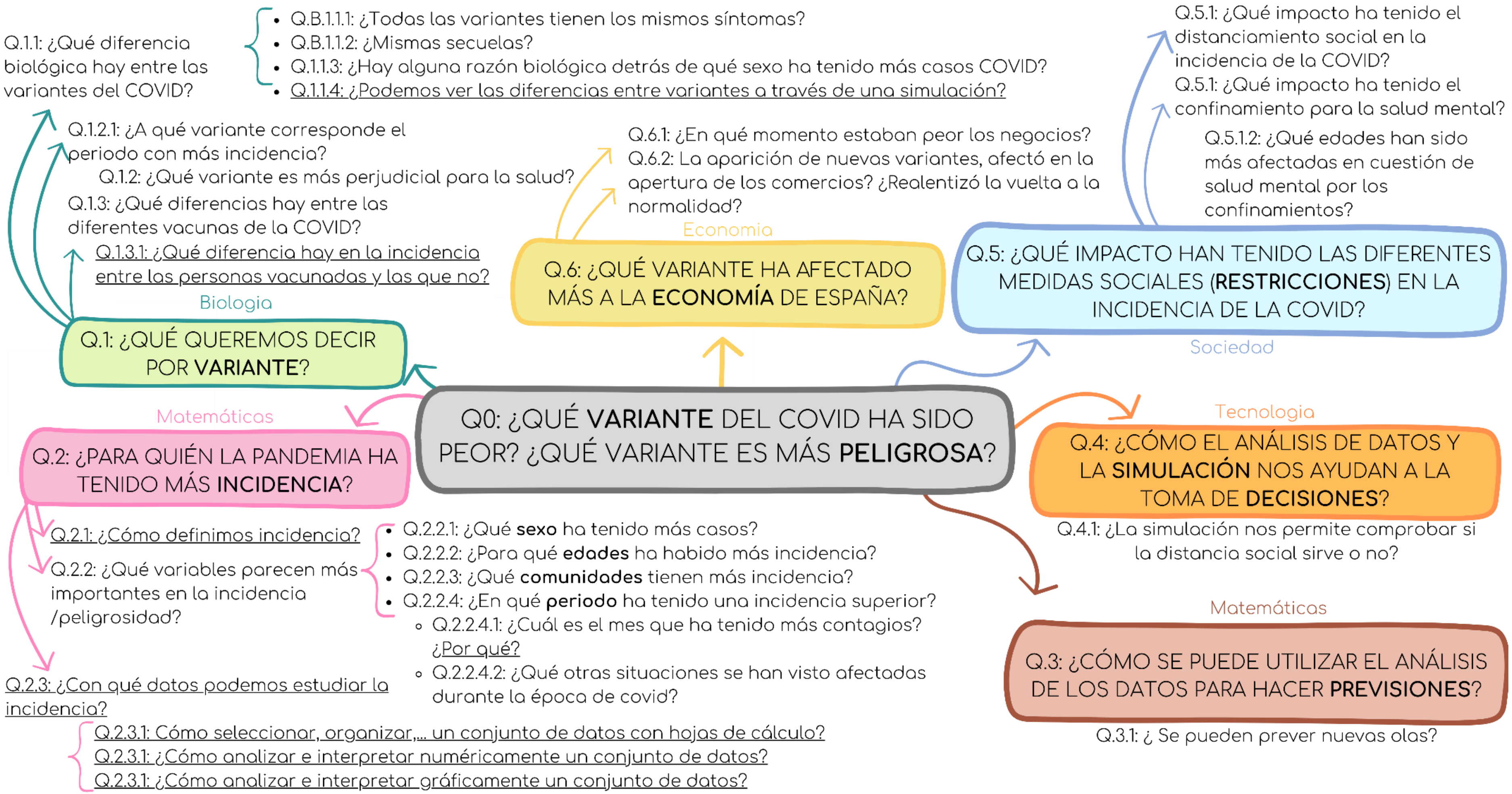


Figura 4: Mapa CR en el REI1 (subrayadas las cuestiones añadidas por los investigadores)

Vásquez, S. Barquero, B. y Bosch, M. (aceptado) Interdisciplinariedad en educación secundaria: un recorrido de estudio e investigación. *Enseñanza de las Ciencias*. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.6029

- Cambios en la infraestructura didáctica al pasar del REI1 al REI2

Teniendo en cuenta las limitaciones previamente comentadas, las primeras sesiones del REI2, así como la preparación previa del grupo de docentes estuvieron especialmente enfocadas a priorizar la *dialéctica cuestión-respuesta* y el *trabajo interdisciplinar*. Recordemos los tres cambios introducidos:

- Equipos monodisciplinares de las tres disciplinas: biología, expresión y tecnología.
- La cuestión generatriz es única para todos los grupos: *¿Qué variante del COVID ha sido la peor?*
- El mapa CR es generado por los profesores.

En la primera sesión del REI2 los estudiantes accedieron a la base de datos abiertos de Cataluña[7] para investigar registros sobre el COVID. Extrajeron cuestiones y las organizaron en un documento de trabajo. Los profesores las seleccionaron y organizaron por temáticas en un Padlet colaborativo (Figura5).

Tras este volcado, se realizaron sesiones de puesta en común: una durante la hora de optativa con grupos separados y con el respectivo profesor y otra en la hora de matemáticas, donde los equipos se dividieron por optativa, con un profesor de matemáticas para cada grupo. En ambas sesiones, se pidió a los estudiantes que seleccionaran y organizaran las preguntas más importantes del Padlet.

[7] https://analisi.transparenciacatalunya.cat/

Vásquez, S. Barquero, B. y Bosch, M. (aceptado) Interdisciplinariedad en educación secundaria: un recorrido de estudio e investigación. *Enseñanza de las Ciencias*.
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.6029

Figura 5: Selección de las preguntas que se compartieron en el REI2

Vásquez, S. Barquero, B. y Bosch, M. (aceptado) Interdisciplinariedad en educación secundaria: un recorrido de estudio e investigación. *Enseñanza de las Ciencias*.
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.6029

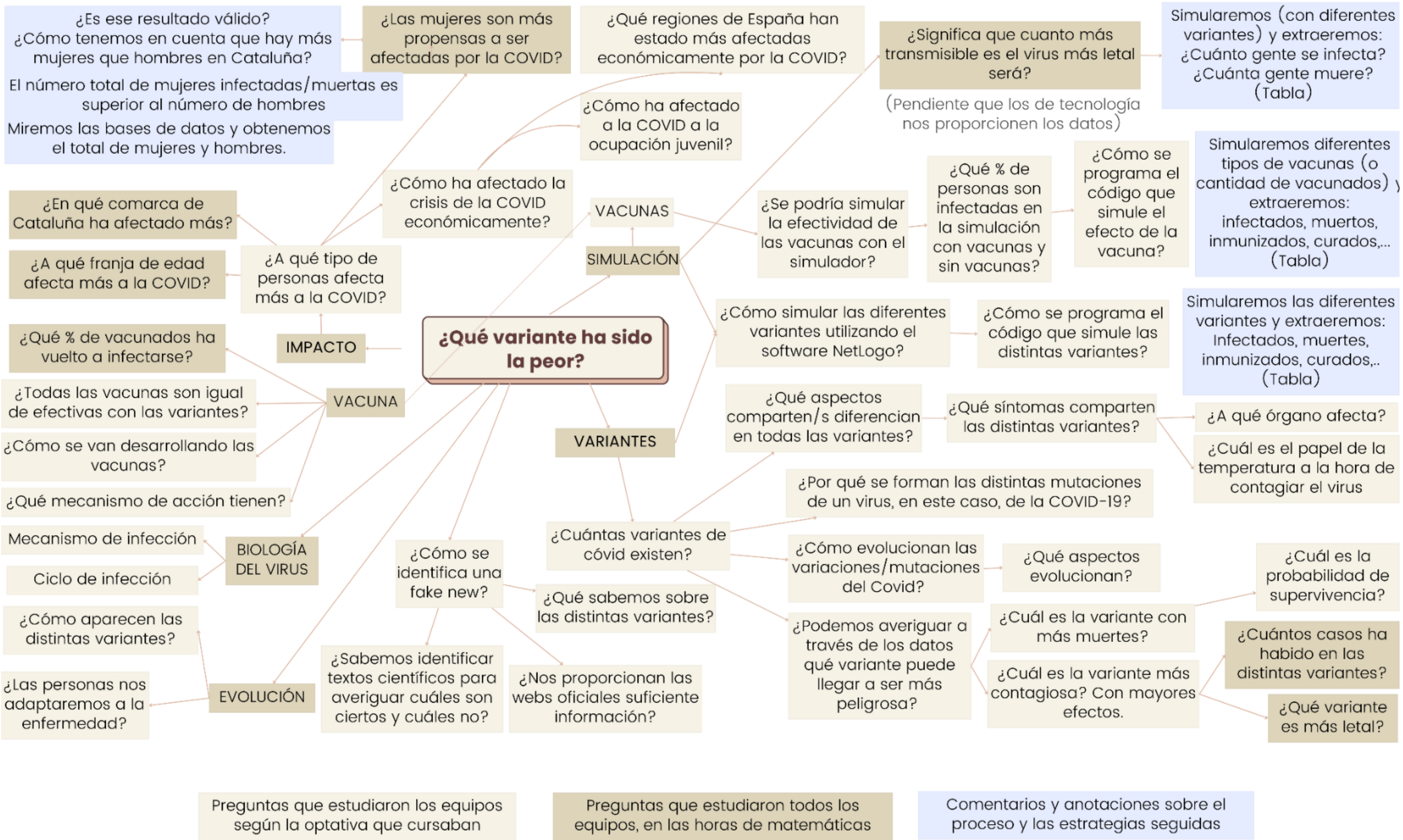


Figura 6: Mapa CR generado en el REI2

Vásquez, S. Barquero, B. y Bosch, M. (aceptado) Interdisciplinariedad en educación secundaria: un recorrido de estudio e investigación. *Enseñanza de las Ciencias*. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.6029

En el REI2 se buscó fomentar la interacción entre los equipos para generar interdisciplinariedad, utilizando el mapa CR (responsabilidad de los profesores) como un espacio para compartir avances. Se consiguió construir el mapa que se muestra en la Figura 6.

Cada equipo abordó preguntas relacionadas con su optativa y completaron el mapa con aportes propios. Para ello, fueron necesarios momentos de puesta en común para explicar y debatir avances. Cada optativa tenía un objetivo específico: el grupo de biología se enfocó en el virus y su comportamiento, el grupo de expresión investigó *fake news* y el grupo de tecnología utilizó el programa *NetLogo* para simular las variantes del virus. En las sesiones de las asignaturas optativas cada profesor especialista asesoraba a los grupos de su disciplina. En las de matemáticas se llevó a cabo el análisis de la base de datos. Se introdujo además una *exposición de especialistas* como nuevo dispositivo para compartir resultados. Los equipos escuchaban las exposiciones, extrayendo información para incorporarla a su trabajo. Dado que la fase de investigación del REI2 se extendió, no quedó tiempo para la producción del vídeo, conservándose el artículo, el póster y la presentación oral como producto final.

Resultados del REI2

Análisis del mapa CR

A diferencia del REI1, en el mapa CR de la Figura 6 no aparece una clara separación entre disciplinas. Solo identificamos la biología como rama, pero las demás disciplinas están interconectadas y se relacionan con preguntas específicas. Por ejemplo, la pregunta *¿Se podría simular la efectividad de las vacunas con un simulador?* podría relacionarse con la tecnología, pero la que nace a partir de esta, *¿Qué porcentaje de personas son infectadas en la simulación con vacunas y sin ellas?*, también se puede asociar con las matemáticas. En la rama de la biología, a partir de la pregunta *¿Cuántas variantes existen?*, nacen otras muchas, una de las cuales—*¿Cuántos casos ha habido de cada variante?*—se puede asociar con las matemáticas. O, si consideramos las ciencias sociales como disciplina involucrada en la pregunta *¿Las mujeres son más propensas a ser afectadas por la COVID?,* también son útiles las matemáticas para poder analizarla, Luego, el cuestionamiento generado en el REI2 se muestra, al menos en este dispositivo, menos separado por disciplinas, con cuestiones que se pueden abordar desde varios puntos de vista y, por lo tanto, generando más interdisciplinariedad.

Enfoque del trabajo matemático

En las primeras sesiones de matemáticas todos los estudiantes abordaron la misma pregunta: *¿Las mujeres son más propensas a ser afectadas por el COVID?* Esta dinámica inicial facilitó las puestas en común y, a diferencia del REI1, los equipos participaron más activamente, ofreciendo comentarios enriquecedores. Uno de los equipos, por ejemplo, escribió en su diario respecto a esta pregunta: *No sólo debemos mirar los casos totales de COVID […] Necesitamos saber el valor relativo para saber el porcentaje y realmente saber cuál es el sexo más afectado.*

Vásquez, S. Barquero, B. y Bosch, M. (aceptado) Interdisciplinariedad en educación secundaria: un recorrido de estudio e investigación. *Enseñanza de las Ciencias*. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.6029

Este mismo equipo afirma, en su artículo final:

Analizando el gráfico […] podemos afirmar que las mujeres han tenido un mayor número de contagios […] Por tanto, podemos interpretar que las mujeres han estado más afectadas […] ya que los datos afirman que ha habido más casos mortales de mujeres. […] debemos tener en cuenta el número total de mujeres y hombres en Cataluña. Entonces calculando el valor relativo, hemos obtenido que las mujeres han muerto un 1,02% respecto a la población de Catalunya, y los hombres un 1,05%. Por lo que los hombres tienen mayor mortalidad […] y es realmente la población más afectada.

Discusiones similares se dieron en preguntas de comparación de datos entre zonas geográficas o grupos de edad. Vemos así, que el REI permitió abordar estas aparentes contradicciones entre variables relativas y absolutas, así como aspectos de modelización matemática, incluyendo la recopilación y organización de datos, representación gráfica y análisis. Por ejemplo, algún grupo también usó tablas de contingencia para poder organizar y analizar los datos (*Figura* 7).

Tabla en relación a los valores: Infectados/no infectados y vacunados/no vacunados

Valor relativo de infecciones

Infectados vacunados: 22,52%
Infectados no vacunados: 60,1%

Estos valores muestran que realmente de la gente vacunada sólo el 22,52% se infecta en comparación con el 60% de la gente que se infecta por qué no está vacunada. Pueden concluir que está vacunado disminuye las probabilidades de infección.

	Vacunados	No vacunados	Total
infectados	1365427	905786	2271213
no infectados	4695697	599090	5294787
Total	6061124	1504876	7566000

Figura 7: Ejemplo de producción de un equipo en el REI2

Limitaciones en la optativa de tecnología

En cuanto al grupo de tecnología, su objetivo principal era simular diferentes parámetros de virus, especialmente la transmisibilidad y su impacto en la mortalidad. La pregunta asociada era *¿Cuanto más transmisible es el virus, más letal es?* Este grupo enfrentó dificultades en la organización del tiempo y la asesoría limitada de la profesora. La organización inicial del proyecto planeaba que, una vez recopilados los datos de la simulación, se compartieran con el resto del grupo para un análisis conjunto. No se le pudo dedicar tiempo a este análisis, perdiendo una oportunidad clara de trabajo interdisciplinar entre tecnología y matemáticas.

Producciones finales

Los equipos presentaron los avances de su trabajo al grupo centrándose en los aspectos específicos de sus optativas. A la vez, debían recoger información relevante de las presentaciones de otros equipos e incluirla en su trabajo referenciando al equipo productor. Los equipos de biología abordaron la naturaleza del virus y de la enfermedad, las variantes y las vacunas; expresión plurilingüe compartió consejos sobre cómo identificar una *fake new* o cómo escribir correctamente un artículo científico y tecnología presentó los resultados de las simulaciones. En las siguientes sesiones, los equipos integraron toda la investigación en sus productos finales.

Identificamos una diferencia significativa entre los posters del REI1 y el REI2: la organización de la información segmentada en disciplinas en el primero y diciplinas más integradas en el segundo. Cuatro equipos de 10 adoptaron una organización similar, con el título principal de la sección como el nombre de la disciplina y la pregunta asociada en una fuente de menor tamaño.

En cambio, en el REI2, sólo un equipo de 14 optó por una distribución por disciplinas. El resto eligieron una estructura donde los títulos principales se asignan a las secciones del artículo (introducción, marco teórico, marco experimental y conclusión).

Valoración de estudiantes y profesores

A partir de los datos de las encuestas a estudiantes, generamos la Tabla 1 que muestra el análisis de frecuencia de palabras. Indica la proporción de alumnos de cada optativa que identifican como “asimilados” los diferentes contenidos. Las palabras más detectadas se categorizaron por disciplinas. Las casillas vacías corresponden a palabras introducidas por los profesores en el REI2 y no identificadas en el REI1. La última fila presenta la proporción de alumnos respecto al total del grupo.

Vásquez, S. Barquero, B. y Bosch, M. (aceptado) Interdisciplinariedad en educación secundaria: un recorrido de estudio e investigación. *Enseñanza de las Ciencias*. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.6029

Contenido	Matemáticas						Tecnología		Biología		Expresión			
	Excel, análisis		*Gráficos*		*Valor relativo, absoluto*		*Simulaciones Netlogo*		*Covid, Biología*		*Fake news*		*Artículos, posters, redacción*	
	2023	*2022*	*2023*	*2022*	*2023*	*2022*	*2023*	*2022*	*2023*	*2022*	*2023*	*2022*	*2023*	*2022*
Biología	53%	65%	73%	50%	40%		17%	10%	70%	60%	10%		30%	20%
Tecnología	38%	69%	63%	44%	25%		75%	88%	63%	44%	13%		25%	19%
Expresión	20%	38%	25%	46%	45%		15%	31%	60%	62%	70%		30%	23%
Proporción de alumnos	40%	**50%**	55%	**40%**	40%		24%	**34%**	66%	**47%**	31%		29%	**17%**

Tabla 1: Resultados del formulario de reflexión de los alumnos.

En el análisis del grupo-clase (última fila), se identifican menos aspectos de hojas de cáculo y análisis de datos, pero más sobre gráficos, incluyendo la categoria de *valor relativo y absoluto* (impuesta en el diseño del REI2). Coincide con las percepciones de los profesores de matemáticas, quienes señalan un menor énfasis en aspectos técnicos de hojas de datos en el REI2, pero una mayor atención a la comparación de datos mediante valores relativos. También se observa una disminución en las simulaciones pero un aumento en aspectos relacionados con la biologia del virus y la redacción de trabajos siguiendo los patrones de un artículo científico. En cuanto a la detección de mejoras en la interdisciplinariedad, persiste la relación entre la optativa del estudiante y el tipo de contenido que identifica en su aprendizaje, pero se observan los cambios siguientes. Los estudiantes de biología continúan identificando “la biología del COVID” como el contenido más recurrente, pero aumenta el porcentaje que reconoce las simulaciones y aspectos de redacción de artículos. Además, entre los estudiantes de tecnología, se incrementa la proporción que reconoce haber aprendido conceptos de biología, y se mantiene alta en los de expresión. También crece la proporción de alumnos de biología y tecnología que identifican haber aprendido sobre redacción de textos. Es decir, podemos identificar que el diseño del REI2 favorece la percepción de la interdisciplinariedad por parte de los estudiantes.

A pesar de esto, vemos que en general las simulaciones han tenido menos impacto en los estudiantes, ya que disminuyen un 10% respecto al año anterior. La falta de acompañamiento de la profesora de tecnología durante algunas sesiones puede explicar esta disminución. De hecho, los estudiantes de tecnología muestran la peor impresión del proyecto, valorando negativamente la claridad diaria del trabajo y el tiempo dedicado (Figura 8), cuando el año anterior había sido superior a la media del grupo. En contraste, los grupos de biología y expresión aumentaron su valoración de la utilidad de las simulaciones, respaldando los resultados anteriores sobre la interdisciplinariedad.

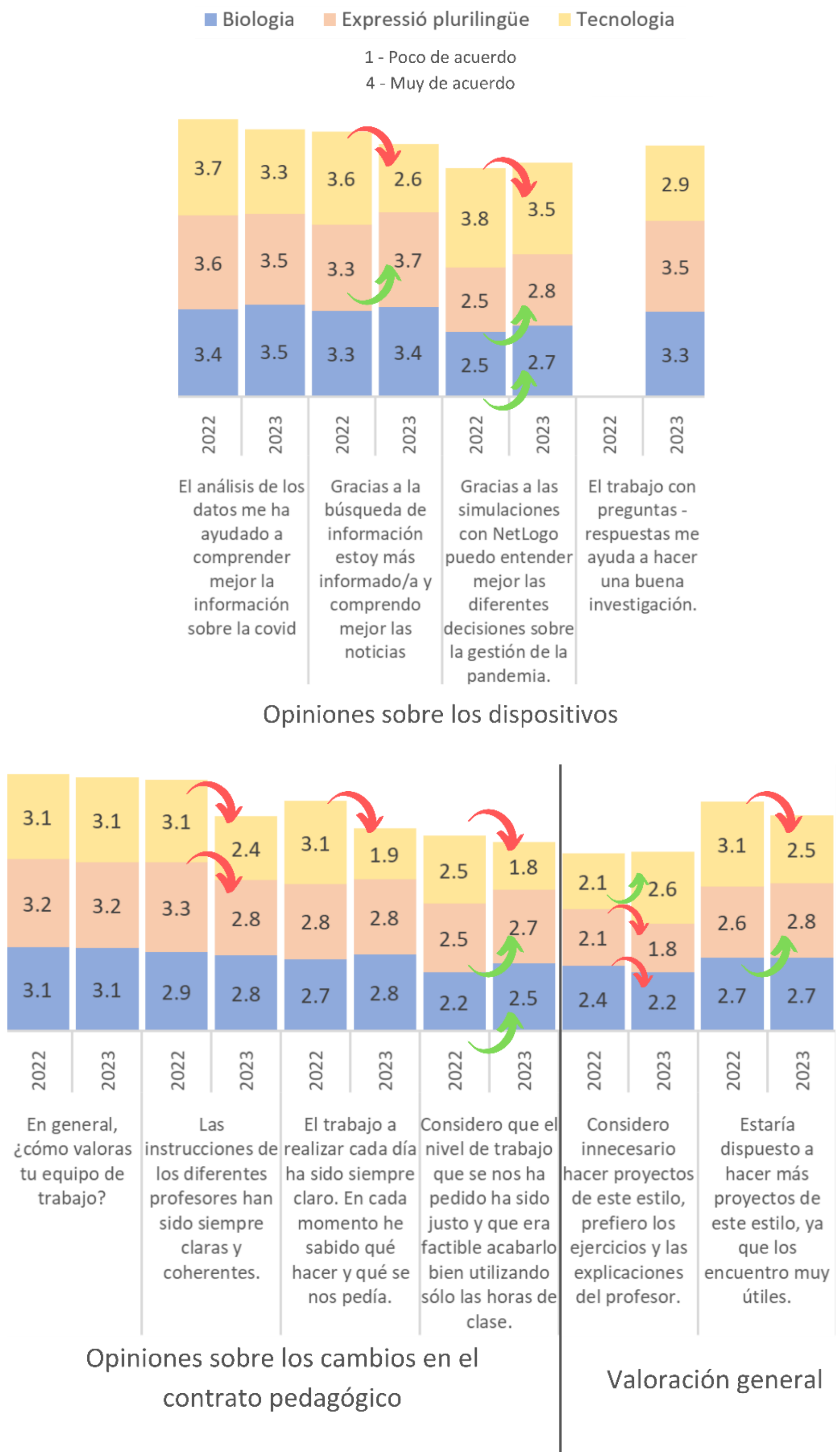


Figura 8: Comparación de la valoración de los estudiantes respecto al proyecto

En cuanto a las impresiones recogidas de los profesores, estos elogian el mapa CR, considerándolo esencial para analizar el caso y aplicable de manera transversal. En cuanto a la interdisciplinariedad, el profesor de biología ve mejoras, logrando un proyecto que integra todas las materias. Sin embargo, el profesor de expresión considera que, aunque estaba planteado como interdisciplinario, el proceso acabó siendo más

Vásquez, S. Barquero, B. y Bosch, M. (aceptado) Interdisciplinariedad en educación secundaria: un recorrido de estudio e investigación. *Enseñanza de las Ciencias*. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.6029

multidisciplinar, especialmente para los estudiantes de expresión, ya que no lograron entender cómo integrar las materias de biología y tecnología. Respecto a las condiciones favorables, destacan el aprendizaje práctico, con un gran impacto, comodidad de los alumnos en equipos pequeños y dinamicidad del proyecto. Sobre los inconvenientes, mencionaron a algunos alumnos desmotivados, poco implicados y con pocas competencias de base, problema recurrente en proyectos similares. Además, señalan la falta de tiempo para hacer un buen seguimiento.

Discusión y conclusiones

Como primer resultado, con relación a la primera cuestión de investigación, podemos afirmar que el cuestionamiento vivido en ambas implementaciones ha facilitado y potenciado la multidisciplinariedad y, en el REI2, cierta interdisciplinariedad. La consideración de los mapas CR muestra que la indagación ha incluido la interacción entre varias disciplinas, favoreciendo el estudio de la cuestión generatriz. Este resultado va en la línea de las investigaciones de Rasmussen (2016) y Jessen (2014), en cuanto a que la dinámica de la indagación generada por los REI facilita la interacción de varias disciplinas.

Como segundo resultado, hemos detectado que la separación entre disciplinas del REI2 ha facilitado la dinámica de la indagación, promoviendo más intercambio entre disciplinas y mayor retroalimentación de las cuestiones. Si bien el cuestionamiento promueve la multidisciplinariedad, la dinámica de la indagación parece fluir más fácilmente dentro del trabajo disciplinar, en línea con los principios propuestos por (Lenoir y Hansi, 2016). Estos autores consideran que no puede haber interdisciplinariedad sin las disciplinas escolares, que la interdisciplinariedad es siempre un medio para otro fin (en nuestro caso, llevar a cabo la indagación) y mencionan la complementariedad entre disciplinas. En particular, los grupos monodisciplinares del REI2 y la dedicación de cada profesor especialista parecen haber facilitado el desarrollo del cuestionamiento y, en consecuencia, la generación de respuestas y nuevas cuestiones.

Se destacó un cambio clave en el cuestionamiento inicial: en el REI1 se forzó una lluvia inicial de preguntas donde los alumnos tenían que producir preguntas de todas las disciplinas. En cambio, en el REI2 los estudiantes generaron preguntas relacionadas, sin necesidad de asignarlas a ninguna disciplina y, posteriormente, toda la comunidad de estudio se organizó para estudiar las preguntas más afines a cada disciplina, evitando la imposición de la disciplinariedad.

Como tercer resultado, y vinculándose a la segunda cuestión de investigación, postulamos que son necesarias ciertas condiciones para facilitar la dinámica de la indagación y lograr así el paso de la multi a la interdisciplinariedad. Aunque la propuesta de los REI se ajusta bien al enfoque multidisciplinario bajo las condiciones pedagógicas e institucionales actuales, postulamos que la transición al trabajo interdisciplinar es posible cuando se mejoran las dinámicas de la indagación. Dicha dinámica requiere de dispositivos didácticos especialmente relacionados con la generación de cuestiones a partir de las respuestas encontradas, tal como indican Bosch y Winsløw (2016). Un dispositivo clave fue la formación de grupos monodisciplinares y la distribución de tareas

Vásquez, S. Barquero, B. y Bosch, M. (aceptado) Interdisciplinariedad en educación secundaria: un recorrido de estudio e investigación. *Enseñanza de las Ciencias*. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.6029

según disciplinas para un posterior trabajo conjunto: los estudiantes exponían sus resultados parciales y todos redactaban un texto con estructura de artículo científico abordando todas las cuestiones. Esto fomentó la comprensión y análisis de los resultados obtenidos por el resto de los equipos y aquí es donde se producía cierta interdisciplinariedad. Otro dispositivo fue la importancia atribuida al estudio de una única cuestión generatriz y la gestión del profesorado del mapa CR, para visibilizar el avance colectivo del estudio, permitiendo al profesorado asumir una gestión más directa de la interdisciplinariedad.

Además, en relación con las restricciones, coincidimos con la revisión de Tonnetti y Lentillon-Kaestner (2023) en cuanto al profesorado: conflictos relacionales, falta de recursos y de formación y necesidad de una infraestructura escolar adaptada. Todo esto acaba conllevando un sobresfuerzo por parte del profesorado, que limita la práctica de estas propuestas solo a aquellos convencidos y dispuestos a trabajar en su tiempo libre (Ghisla et al., 2010; Ríordáin et al., 2016).

Las restricciones identificadas se pueden relacionar con el cambio de paradigma. La interdisciplinariedad y la transdisciplinariedad resultan del paradigma del cuestionamiento del mundo en sus múltiples manifestaciones. Mantener el encierro disciplinar es una reacción propia del paradigma de la visita de las obras. Sin embargo, la "disciplina" en el sentido metodológico del trabajo disciplinar o, en palabras de Palmer (1999), las contribuciones al "conocimiento especializado básico" (*core specialized knowledge*) del experto en la materia siguen siendo un elemento fundamental del proceso de cuestionamiento. La dicotomía no está entre disciplinar o interdisciplinar sino entre visita de las obras (disciplinares) y cuestionamiento plural.

Agradecimientos

Investigación financiada gracias al proyecto de investigación: PID2021-126717NB-C31 (MCIU/AEI/FEDER, UE).

Referencias

Artigue, M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 9*(3), 281–308. https://revue-rdm.com/1988/ingenierie-didactique-2

Artigue, M. (2014). Didactic engineering in mathematics education. En S. Lerman (ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 159–162). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_44

Barquero, B. y Bosch, M. (2015). Didactic engineering as a research methodology: From fundamental situations to study and research paths. En A. Watson y M. Ohtani (Eds.), *Task design in mathematics education: An ICMI study 22* (pp. 249-272). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-09629-2_8

Barquero, B., Bosch, M., Florensa, I. y Ruiz-Munzón, N. (2021). Study and research paths in the frontier between paradigms. *International Journal of Mathematical Education* *in Science and Technology, 53*(5), 1213-1229. https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1988166

Blum, W. y Niss, M. A. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects? State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics, 22*(1), 37-68. https://doi.org/10.1007/bf00302716

Blum, W., Galbraith, P., Henn, H.-W. y Niss, M. (eds.) (2007). *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study*. (Vol. 10). Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1

Bosch, M. (2018). Study and research paths: a model for inquiry. En B. Sirakov, P. N. De Souza y M. Viana (eds.), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (ICM 2018).* (pp. 4015-4035). World Scientific Publishing. https://doi.org/10.1142/9789813272880_0210

Bosch, M., Chevallard, Y., García, F. J. y Monaghan, J. (2020). *Working with the anthropological theory of the didactic in mathematics education. A comprehensive casebook*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9780429198168

Bosch, M. y Winsløw, C. (2016). Linking problem solving and learning contents: the challenge of self-sustained study and research processes. *Recherches en Didactique des Mathematiques, 35*(3), 357-401. https://static-curis.ku.dk/portal/files/161008268/BoschWinslow_RDM2016.pdf

Broggy, J., O'Reilly, J. y Erduran, S. (2017). Interdisciplinarity and science education. En K. Taber y B. Akpan (eds.), *Science education. New directions in mathematics and science education*. (pp. 81-90). Sense Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-6300-749-8_6

Cai, J., Cirillo, M., Pelesko, J.A., Ferri, R.B., Borba, M.D., Geiger, V., Stillman, G.A., English, L.D., Wake, G. y Kaiser, G. (2014). Mathematical modeling in school education: Mathematical, cognitive, curricular, instructional and teacher educational perspectives. En P. Liljedahl, S. Oesterle y C. Nicol (eds.), *Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 36th Conference of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education*. (pp. 145-172). Springer. http://www.pme38.com/wp-content/uploads/2014/05/RF-Cai-et-al.pdf

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude: 3. Ecologie & régulation. *Actes de la XIe École d'Été de Didactique des Mathématiques.* (pp. 41-56). La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (2013). Enseñar matemáticas en la sociedad de mañana: alegato a favor de un contraparadigma emergente. *Journal of Research in Mathematics Education, 2(*2), 161-182. https://doi.org/10.4471/redimat.2013.26

Chevallard, Y. y Bosch, M. (2020). Anthropological theory of the didactic (ATD). En S. Lerman (ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 53-61), Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_100034

Choi, B. C. y Pak, A. W. (2006). Multidisciplinarity, interdisciplinarity and transdisciplinarity in health research, services, education and policy: 1. Definitions, objectives, and evidence of effectiveness. *Clinical and Investigative Medicine. Medicine Clinique et Experimentale, 29*(6), 351-364. https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/17330451/

Cunningham, E., Smyth, B. y Greene, D. (2021). Collaboration in the time of COVID: a scientometric analysis of multidisciplinary SARS-CoV-2 research. Humanities & Social Sciences Communications, 8(1). https://doi.org/10.1057/s41599-021-00922-7

Domènech-Casal J., Lope, S. y Mora, L. (2019). Qué proyectos STEM diseña y qué dificultades expresa el profesorado de secundaria sobre Aprendizaje Basado en Proyectos. *Eureka* *16*(2), 1-16. https://doi.org/10.25267/rev_eureka_ensen_divulg_cienc.2019.v16.i2.2203

Domènech-Casal, J. (2022). Situacions d'Aprenentatge. Idees per al desplegament curricular de les ciències. *Ciències: Revista del Professorat de Ciències de Primària i Secundaria* (45), 20–32. https://doi.org/10.5565/rev/ciencies.469

Elsner, J., Sadler, T., Kirk, E., Rawson, R., Friedrichsen, P. y Ke, L. (2023). Using multiple models to learn about COVID-19 breadcrumb. *The Science Teacher*, *90*(3), 40-45.

English, L. D. (2008). Interdisciplinary problem solving: A focus on engineering experiences. En M. Goos, , R. Brown y K. Makar, (eds.), *Proceedings of the 31st Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australia* (pp. 187-194). Mathematics Education Research Group of Australasia.

English, L.D. (2009) Promoting interdisciplinarity through mathematical modelling. *ZDM Mathematics Education, 41*(1-2), 161-181. https://doi.org/10.1007/s11858-008-0106-z

English, L. D. y Watters, J. J. (2005). Mathematical modelling in the early school years. *Mathematics Education Research Journal, 16*(3), 58-79. https://doi.org/10.1007/bf03217401

Fidalgo-Neto, A., Lopes, R., Magalhães, J., Pierini, M. y Alves, L. (2014). Interdisciplinarity and teacher education: The teacher's training of the secondary school in Rio de Janeiro-Brazil. *Creative Education, 5*(4), 262-272. https://doi.org/10.4236/ce.2014.54035

García, F. J., Barquero, B., Florensa, I. y Bosch, M. (2019). Diseño de tareas en el marco de la teoría antropológica de lo didáctico. *Avances de Investigación en Educación Matemática,* (15), 75-94. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i15.267

Vásquez, S. Barquero, B. y Bosch, M. (aceptado) Interdisciplinariedad en educación secundaria: un recorrido de estudio e investigación. *Enseñanza de las Ciencias*. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.6029

Gazzola, M. P., Otero, M. R. y Llanos, V. C. (2021). Evolution of a teacher-researcher while developing a co-disciplinary study and research path through five implementations. En: B. Barquero, I, Florensa, P. Nicolás, N. Ruiz-Munzón, (eds.), *Extended Abstracts Spring 2019*. (pp. 21-28). Springer International Publishing https://doi.org/10.1007/978-3-030-76413-5_3

Ghisla, G., Bausch, L. y Bonoli, L. (2010). Interdisciplinarity in Swiss schools: A difficult step into the future. Issues in Integrative Studies, 28(28), 295–331. https://interdisciplinarystudies.org/wp-content/issues/vol28_2010/11_Vol_28_pp_295_331.pdf

Hasni, A., Lenoir, Y. y Alessandra, F. (2015). Mandated interdisciplinarity in secondary school: the case of science, technology, and mathematics teachers in Québec. *Issues in Interdisciplinary Studies, 33*(33), 144-180. https://eric.ed.gov/?id=EJ1117890

Houston, K. (2009). *How to think Like a mathematician: A companion to undergraduate mathematics*. Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511808258

Jefatura del Estado (2020). Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. *Boletín Oficial del Estado*, *340*, 122868-122953. https://www.boe.es/eli/es/lo/2020/12/29/3

Jessen, B. (2014). How can study and research paths contribute to the teaching of mathematics in an interdisciplinary setting? *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives, 19*(1), 199-224 http://turing.scedu.umontreal.ca/annales/documents/volume%2019/10Jessen.pdf

Klein, J. T. (1990). *Interdisciplinarity: history, theory, and practice.* Wayne State University Press.

Ledder, G. y Homp, M. (2021). Using a COVID-19 model in various classroom settings to assess effects of interventions. *PRIMUS, 32*(2), 278-297. https://doi.org/10.1080/10511970.2020.1861143

Lenoir, Y. y Hasni, A. (2016). Interdisciplinarity in primary and secondary school: Issues and perspectives. *Creative Education*, *7*(16), 2433-2458. https://doi.org/10.4236/ce.2016.716233

Maass, K., Artigue, M., Burkhardt, H., Doorman, M., English, L.D., Geiger, V., Krainer, K., Potari, D. y Schoenfeld, A. (2022). Mathematical modelling – a key to citizenship education. En N. Buchholtz, B. Schwarz y K. Vorhölter (eds.), *Initiationen Mathematikdidaktischer Forschung: Festschrift zum 70. Geburtstag von Gabriele Kaiser* (pp. 31-50). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-658-36766-4_2

Michelsen, C. y Sriraman, B. (2009). Does interdisciplinary instruction raise students' interest in mathematics and the subjects of the natural sciences? *ZDM Mathematics Education, 41*(1-2), 231-244. https://doi.org/10.1007/s11858-008-0161-5

Ortega-Torres, E. y Moncholí Pons, V. (2021). «Expliquem l'Albufera»: transformar una salida de campo en un proyecto interdisciplinar. *Enseñanza de las Ciencias, 39*(2), 241-252. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3241

Palmer, C. L. (1999). Structures and strategies of interdisciplinary science. *Journal of the American Society for Information Science, 50*(3), 242–253. https://doi.org/10.1002/(sici)1097-4571(1999)50:3<242::aid-asi7>3.0.co;2-7

Parra, V. y Otero, M. R. (2018). Antecedentes de los recorridos de estudio e investigación (REI): características y génesis. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias, 13*(2), 1-18. https://doi.org/10.54343/reiec.v13i2.239

Rasmussen, K. (2016). The direction and autonomy of interdisciplinary study and research paths in teacher education. *Journal of Research in Mathematics Education, 5*(2), 158-179. https://doi.org/10.17583/redimat.2016.1753

Ríordáin, M. N., Johnston, J. y Walshe, G. (2016). Making mathematics and science integration happen: Key aspects of practice. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 47*(2), 233–255. https://doi.org/10.1080/0020739X.2015.1078001

Sala, G., Barquero, B. y Font, V. (2020). Modelización e indagación en la propuesta de un REI codisciplinar de matemáticas e historia. *Educação Matemática Pesquisa*, *22*(4), 546–562. https://doi.org/10.23925/1983-3156.2020v22i4p546-562

Saltelli, A., Bammer, G., Bruno, I., Charters, E., Di Fiore, M., Didier, E., Espeland, W., Kay, J., Lo Piano, S., Mayo, D., Pielke, R., Portaluri, T., Porter, T., Puy, A., Rafols, I., Ravetz, J., Reinert, E., Sarewitz, D., Stark, P., …, Vineis, P. (2020). Five ways to ensure that models serve society: a manifesto. *Nature*, *582*(7813), 482–484. https://doi.org/10.1038/d41586-020-01812-9

Sanders, M. H. (2009). STEM, STEM education, STEMmania. *The Technology Teacher, 68*(4), *20–26*. https://vtechworks.lib.vt.edu/bitstream/10919/51616/1/STEMmania.pdf

Sawada, Y. (2022). Proposal for teaching mathematical modelling using COVID-19 as an example of an infectious disease epidemic: The case of Japan in the corona vortex. *Contemporary Mathematics and Science Education*, *3*(2), ep22017. https://doi.org/10.30935/conmaths/12363

Toma, R. B. y García-Carmona, A. (2021). «De STEM nos gusta todo menos STEM». Análisis crítico de una tendencia educativa de moda. *Enseñanza de las Ciencias, 39*(1), 65–80. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3093

Trelles-Zambrano, C., Toalongo, X. y Alsina, Á. (2022). Una actividad de modelización matemática en primaria con datos auténticos de la COVID-19. *Enseñanza de las Ciencias, 40*(2), 193–213. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3472

Tonnetti, B. y Lentillon-Kaestner, V. (2023). Teaching interdisciplinarity in secondary school: A systematic review. *Cogent Education, 10*(1) https://doi.org/10.1080/2331186X.2023.2216038

Winsløw, C., Matheron, Y. y Mercier, A. (2013). Study and research courses as an epistemological model for didactics. *Educational Studies in Mathematics, 83*(1), 267–284. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9453-3

Capítulo 5: Conclusiones

En este capítulo presentamos las conclusiones de la investigación a partir de una síntesis de aquellas presentadas en los artículos de los capítulos anteriores y en los artículos de los apéndices, así como de los análisis realizados, pero no incluidos aún en ningún artículo publicado.

5.1. PI1: Ecología del desarrollo de los REI

Suponiendo una institución docente donde muchas de las restricciones propias del contrato pedagógico habitual se han debilitado,

PI1.1**¿Qué condiciones son necesarias y qué restricciones limitan el desarrollo de los REI en el aula de secundaria y, en consecuencia, la transición hacia un paradigma del cuestionamiento del mundo?**

A partir de las experimentaciones realizadas en el Col·legi Natzaret durante cinco cursos consecutivos, podemos identificar cómo algunas infraestructuras pedagógicas propias del centro se han transformado en dispositivos didácticos nuevos que han facilitado el desarrollo de los REI. Gracias a la metodología de la ingeniería didáctica, hemos sido capaces de localizar las condiciones favorables en las primeras experimentaciones, ajustando su funcionamiento y evitando algunas de las restricciones. De esta manera, algunos elementos han permanecido invariantes respecto a los diseños en las primeras experimentaciones, debido a que ya constituían una condición favorable, pero otros han visto una evolución gracias a los análisis realizados.

Para poder ser consistentes en la caracterización de dichos dispositivos, los consideraremos como un tangible (como objetos físicos, un espacio virtual, una dinámica de clase, una plantilla de trabajo…) que se activa mediante gestos didácticos específicos: la manera de actuar del profesor y los alumnos en el aula, en su relación al tangible. De esta manera, encontramos inseparables ambos aspectos.

La Tabla 7 sintetiza los dispositivos desarrollados en las diferentes experimentaciones, en relación con las distintas dialécticas.

Tabla 7: Dispositivos didácticos y pedagógicos elaborados y experimentados

Dialéctica	Dispositivos
D1 Dialéctica del estudio y de la investigación (de las preguntas y respuestas)	• Formulación de Q_0 • Mapa de CR
D2 Dialéctica del individuo y el colectivo	• Reparto de cuestiones derivadas entre los equipos de alumnos • Puestas en común de las respuestas provisionales encontradas • Asignación de puntos para premiar la participación
D9 Dialéctica de la difusión y recepción de respuestas	• Exposiciones de los alumnos
D5 Dialéctica del paracaidista y del buscador de trufas	• Lluvia de preguntas • Reparto de cuestiones derivadas entre los equipos de alumnos

D3 Dialéctica del análisis-síntesis praxeológica y del análisis-síntesis didáctica D4 Dialéctica de circunscribirse y salirse del tema D6 Dialéctica de las cajas negras y cajas claras	• Puestas en común • Masterclass • Ejercicios sobre problemas de contar
D7 Dialéctica de los medio y los media	• Dispositivos electrónicos para acceder a Internet • Libros de texto y profesor/a • Candados materiales • Software de simulación
D8 Dialéctica de la lectura y de la escritura	• Diarios • Dosieres de trabajo
D10 Dialéctica de los sistemas y los modelos	• Candados • Simulaciones • Examen sobre problemas de contar

D1 Dialéctica del estudio y de la investigación (de las preguntas y respuestas)

En un proceso didáctico, la *cronogénesis* corresponde al paso y la gestión del tiempo didáctico, es decir del tiempo del estudio (Chevallard, 1985). En el paradigma de la visita de las obras, la *cronogénesis* está muy vinculada a los tipos de obras que se visitan, su delimitación y designación. En un REI, en cambio, el avance en la indagación no se mide en el número de obras visitadas, sino en el de cuestiones abordadas y respuestas intermedias aportadas. De ahí que se asocie la *cronogénesis* con la dialéctica de las preguntas y respuestas o del estudio y la investigación. El principal dispositivo para su gestión es entonces el mapa de cuestiones y repuestas o mapa CR. También la formulación de la cuestión inicial Q_0 es determinante en la gestión de la dialéctica.

A lo largo de las implementaciones, hemos variado la Q_0 en ambos REI, para explorar la potencialidad de dicha cuestión según su formulación. Por ejemplo, en el REI de candados se partió inicialmente de la cuestión "¿Cuánto tardaríamos en abrir cada candado?", pasando por "¿Qué candado es más seguro?", para finalmente quedarnos con "De la siguiente colección de candados, ¿qué candado es más seguro?". Esta evolución en la cuestión inicial se ha reflejado en la facilidad de los estudiantes de generar cuestiones derivadas más cercanas a la trayectoria prevista por el REI finalizado. En el REI de COVID, se ha experimentado la versión del REI donde cada grupo elegía la cuestión a investigar y la versión donde todos partían de una cuestión común, lo que simplificaba la gestión del REI y permitía al profesorado asesorar mejor a los equipos.

En cuanto al tangible de los mapas CR, los gestos didácticos relacionados con su gestión han variado mucho. Tras cada experimentación, investigadores y profesorado nos cuestionábamos: ¿Hasta qué punto debe el profesor compartir el mapa con los alumnos? ¿Debería ser una herramienta colaborativa? ¿Quién construye el mapa, estudiantes o profesores? ¿Es más una herramienta de análisis o también es una herramienta de gestión de la indagación, útil para los estudiantes?

En las primeras experimentaciones del REI de candados se planteó el mapa de CR como un dispositivo para los alumnos, generado por ellos. Se les pidió que, durante el proceso de indagación y estudio, fueran anotando las preguntas en los diarios de trabajo y al finalizar la investigación tenían que organizarlas en un mapa final. Se les instruyó que el mapa debía contener: Cuestiones (Q), Respuestas (R) y Estrategias (E). Además, el mapa debía representar el recorrido real de su investigación y debía contener todas las preguntas realizadas y estudiadas por el grupo. Como ejemplo, podemos ver algunas producciones (Figura 10 y Figura 11) de dichos mapas.

Durante las diferentes experimentaciones se han realizado cuestionarios de opinión a los alumnos para recoger sus impresiones sobre la nueva forma de trabajar en clase. La Figura 12 muestra los resultados, representando la media de la valoración de los estudiantes para cada pregunta, para los distintos años. Se preguntaban diferentes aspectos del trabajo y se pedía a los alumnos indicar su grado de conformidad con la afirmación (siendo 1 poco de acuerdo y 4 muy de acuerdo). Podemos observar que en general los estudiantes siempre valoran positivamente el REI (medias entre 3 y 4).

Además, las diferentes experimentaciones tienen puntuaciones bastante parecidas y positivas. Aun así, identificamos que la pregunta J relacionada con el mapa de CR tuvo una valoración muy baja en la primera experimentación. Esta restricción fue detectada también durante el análisis *in vivo*: vimos que los alumnos tardaban mucho en realizar esta actividad, dedicaban un esfuerzo excesivo a cuestiones de diseño del mapa de CR y recibíamos quejas constantes sobre su utilidad, al finalizar todo el REI: percibían esta solicitud como repetitiva y sin aportar ningún valor añadido al proceso seguido y terminado.

Por lo tanto, en las siguientes experimentaciones, decidimos convertir el mapa CR en una herramienta cuya gestión recaía en el profesorado. Servía para explicar el REI a los nuevos profesores y se utilizaba también en case como un espacio virtual (Padlet, Figura 13) donde compartir y fijar las preguntas trabajadas con los estudiantes, así como una plataforma donde estos podían publicar y compartir sus contribuciones. Era, en cierta manera, una herramienta para marcar el avance y los distintos recorridos del proceso de indagación.

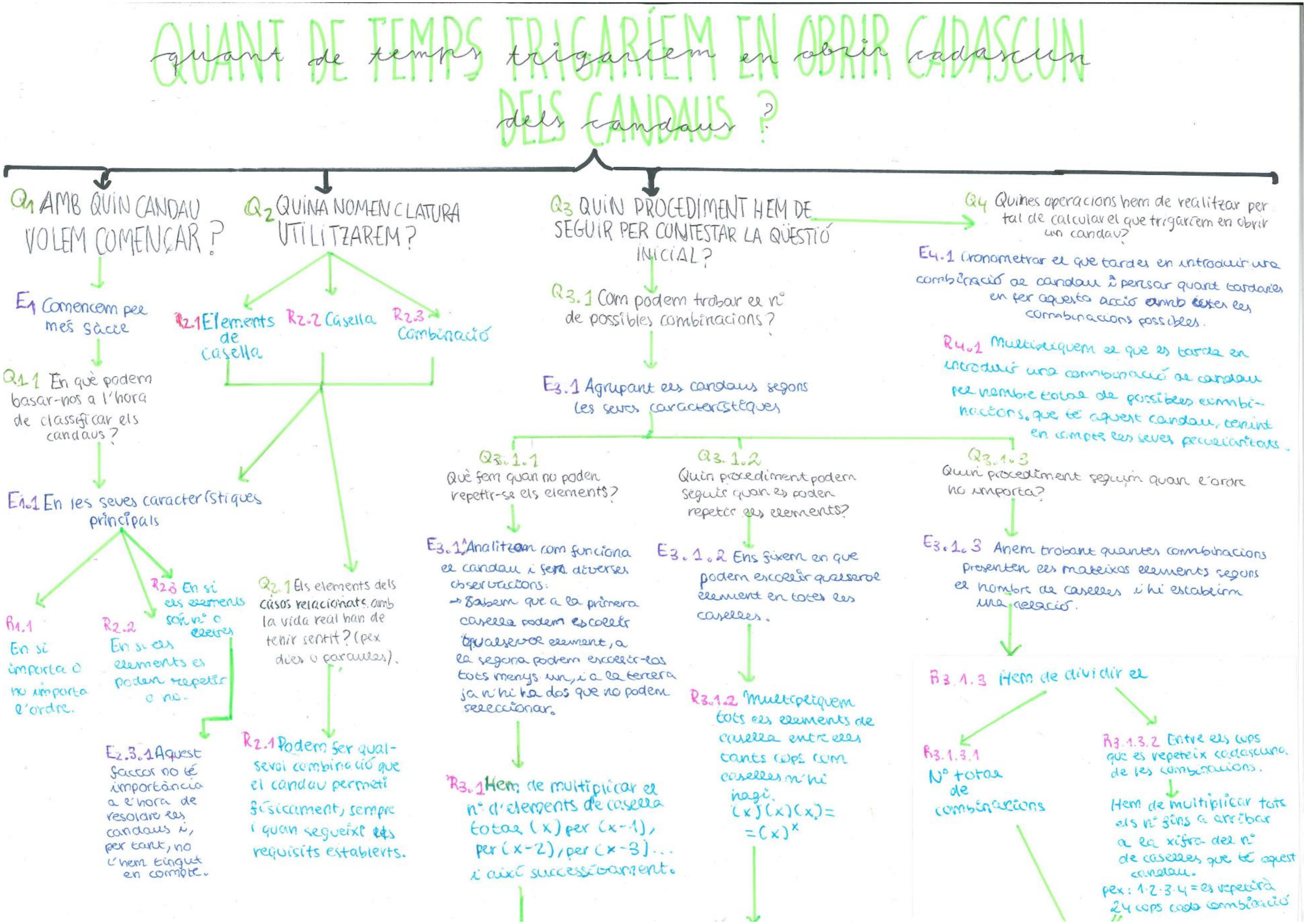


Figura 10: Ejemplo del mapa de CR realizado por un equipo en la 1ª experimentación

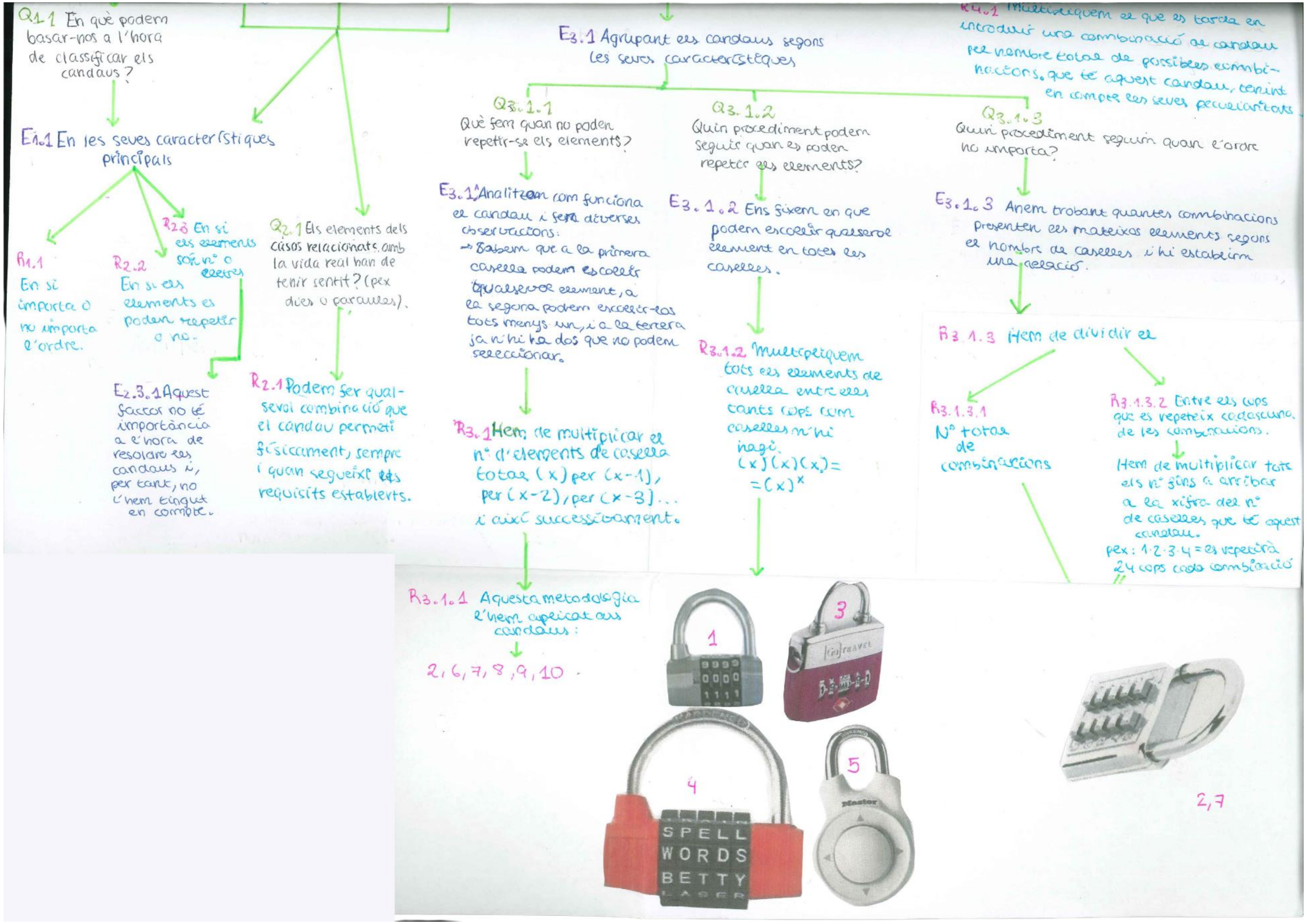


Figura 11: Ejemplo del mapa de CR realizado por un equipo en la 1ª experimentación

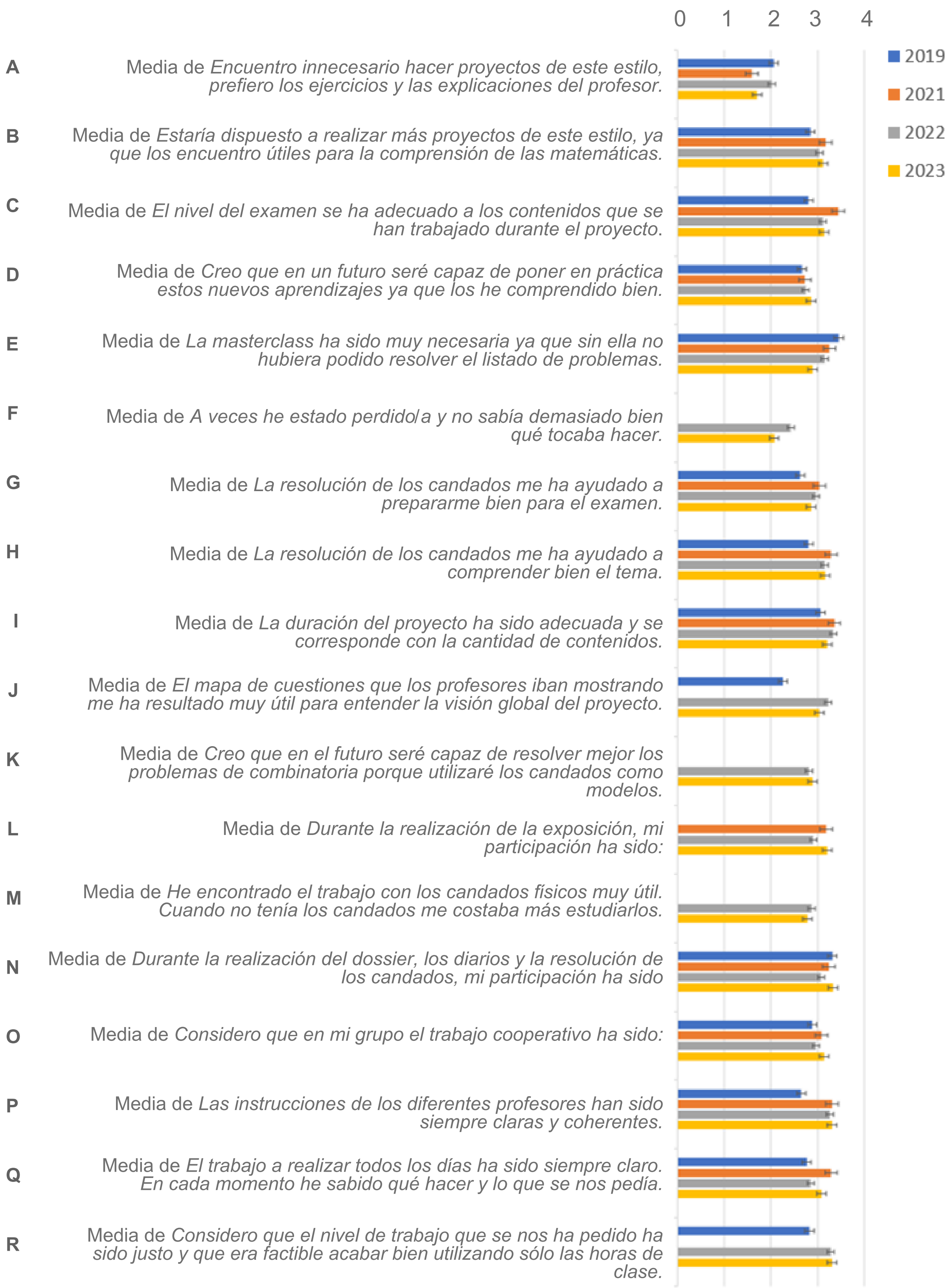


Figura 12: Resultados de las encuestas de valoración al alumnado en las diferentes experimentaciones.

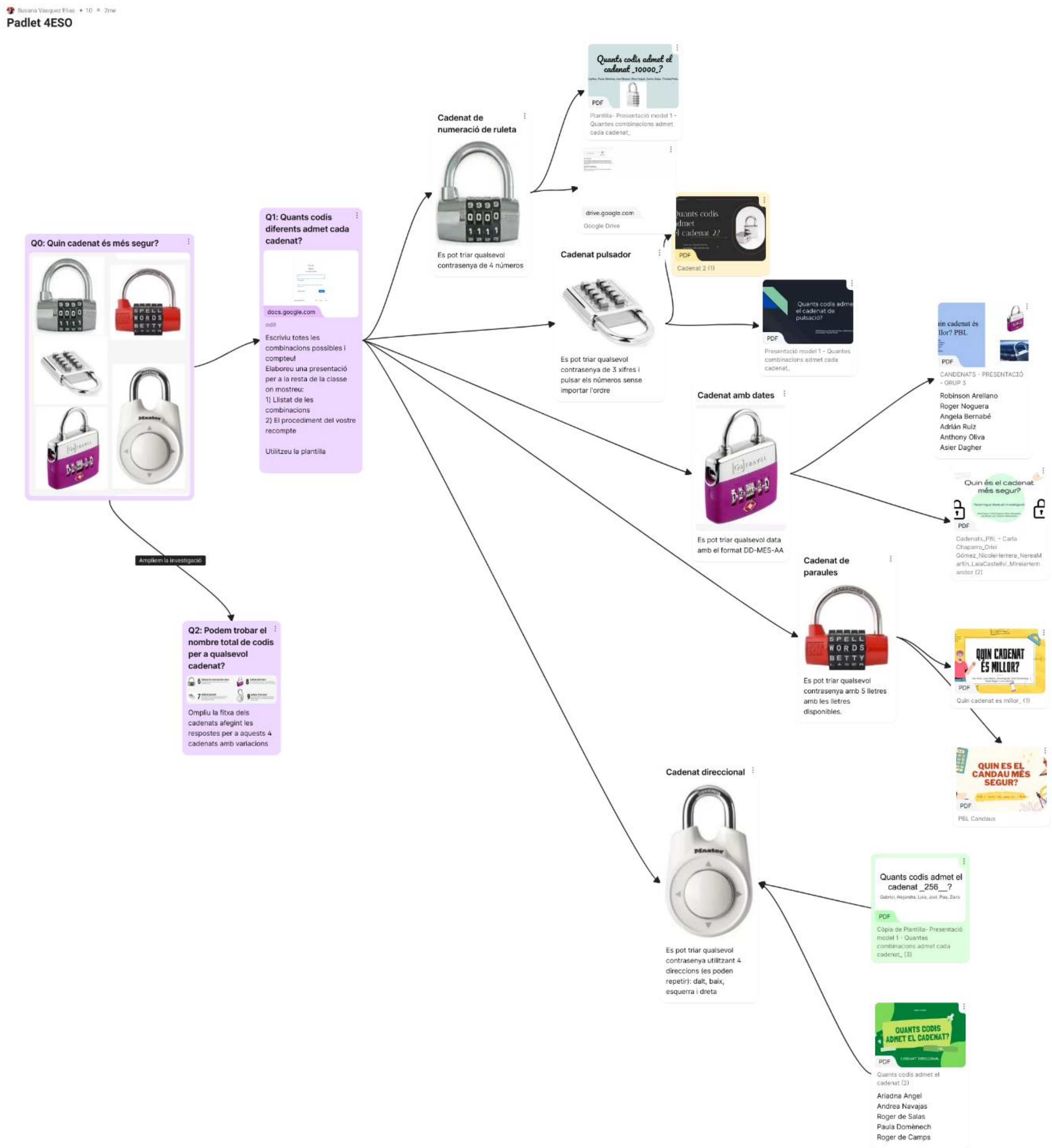


Figura 13: Padlet utilizado en la segunda experimentación.

Por otro lado, en el REI sobre el COVID, el mapa CR fue siempre un dispositivo bien aceptado por los estudiantes. Desde el inicio de la experimentación se planteó como una herramienta tangible compartida entre estudiantes y profesorado, donde se ha variado su finalidad en las diferentes experimentaciones.

Como analizamos en el capítulo 4 (Vásquez et al., aceptado), en el primer REI los mapas generados por los estudiantes no tuvieron una estructura que permitiera ver la evolución de las cuestiones, sólo una organización temática (Figura 14). A pesar de ello, La gran cantidad de cuestiones planteadas y la apertura de la investigación (en su versión inicial) hizo que el mapa fuera un dispositivo muy necesario por los estudiantes para la síntesis y comunicación de la investigación.

Matemáticas

- **¿En qué aspectos se aprecia la diferencia de localización respecto al contagios de la covid?** Mientras más habitantes haya y mayor sea el lugar, posiblemente hayan mucho más contagio que en zonas pequeñas.
- **¿De todos los datos encontrados en cuáles nos fijaremos?** Nos fijaremos en los datos de todas las comarcas de Catalunya.
- **¿Cómo influye los casos de contagios que no han sido registrados o las muertes que han sido por otra razón?** No influenciarán en nuestro estudio, puesto que en todas las comarcas faltan estos datos.
- **¿Cómo haremos el análisis? ¿Lo haremos por cada día, mas...?** Haremos el análisis por cada mes.
- **¿Hay que tener en cuenta a los habitantes para hacer el estudio?** Sí, porque así podemos ver la relación existente entre los contagios y las personas.
- **¿Tengo que mirar cuándo hubo un pico en cada comarca para no compararlo con lugares donde fue una época ligera?** Sí, ya que necesitamos saber en qué temporada los contagios fueron altos para así compararlo con las demás comarcas.

Social

- **Las diversas formas de vivir en las diferentes zonas, ¿afectan a la forma en que el cóvido se expandió?** Las personas se atraen por ciudades que son grandes y muy conocidas, por tanto cuando dejaron que extranjeros entren en el país hizo que se expanda más.
- **¿La gente se mueve en diferentes lugares desde el comienzo de la pandemia?** Las personas se mueven de la ciudad al pueblo, esperando alejarse de un ambiente en el que hay mucha gente y muchos contagios.
- **¿Cómo afecta el confinamiento a nivel psicológico a las personas?** Problemas de ansiedad, aumento de adicciones y hábitos tóxicos, frustración...
- **¿La forma de relacionarse ha cambiado desde la pandemia? ¿Cómo?** Si, con la pandemia, solemos mostrar desconfianza a los desconocidos y no gustan los aglomeramientos de gente.
- **¿Cómo afecta a la COVID-19 en las ciudades?** A principio del confinamiento afectó tanto a la ciudad como al comercio, esto fue porque algunas tiendas tuvieron que cerrar temporalmente y otros tuvieron que cerrar porque no podían pagar el local.

¿Cuál es la diferencia en el contagio del COVID en las diferentes comarcas de Cataluña?

Biología

- **¿El sexo tiene relación con los contagios de la COVID-19?** El sexo importa pero todavía no se ha comprobado, debe verse con la inmunología basada en el sexo.
- **¿La edad tiene relación directa con los contagios de la COVID-19?** Sí, la edad importa ya que entre mayor nos hacemos nuestro sistema empieza a disminuir y no puede defenderse de manera correcta.
- **¿De qué forma nos contagiamos este virus?** Nos contagiamos a través del aire, cuando exhalamos gotas y partículas respiratorias que expulsan a otras personas, estas gotas nos pueden llegar a los ojos, boca y nariz.
- **¿Cuáles son los síntomas a la hora de sufrir la enfermedad?** Unos de los síntomas más habituales a la hora de tener la COVID-19 son la fiebre, tos, agotamiento, pérdida de gusto y olfato. Y de los menos habituales son, ojos irritados, dolor de cabeza, dolor de garganta, molestias...
- **¿Cómo saber 100% si una persona está contagiada?** Haciéndose una PCR o prueba de antígenos. La PCR es más confiable.

Otros

- **¿Cómo se visualiza un contagio con diferentes premisas pero al mismo tiempo mediante el programa Netlog?** Existe un gráfico que se va modificando mediante los días pasan a la simulación. Si te descargas los datos finales y mediante el excel creas un gráfico propio, puedes diferenciar entre ellos.
- **¿El COVID-19 es una oportunidad para un aprendizaje "profundo" para la vida?** Esto depende de cada persona, algunas personas se han cogido este confinamiento como una temporada para pensar en sí mismos. pero otros se lo han cogido como una temporada de estudiar cosas nuevas.
- **¿Cuál es la diferencia en las simulaciones según el número de población?** Que donde haya más población, más gente se contagiará rápidamente, por tanto se curaron antes que donde haya menos población, que aunque no se contagia a toda la población, se sigue contagiando la mayoría de ésta y es de manera mucho más lenta por tanto cuando las comarcas con más gente se hayan curado, las comarcas con menos seguirán confirmando casos de cóvido mucho más tiempo.

Figura 14: Mapa de CR generado por los estudiantes en la 1ª experimentación del REI

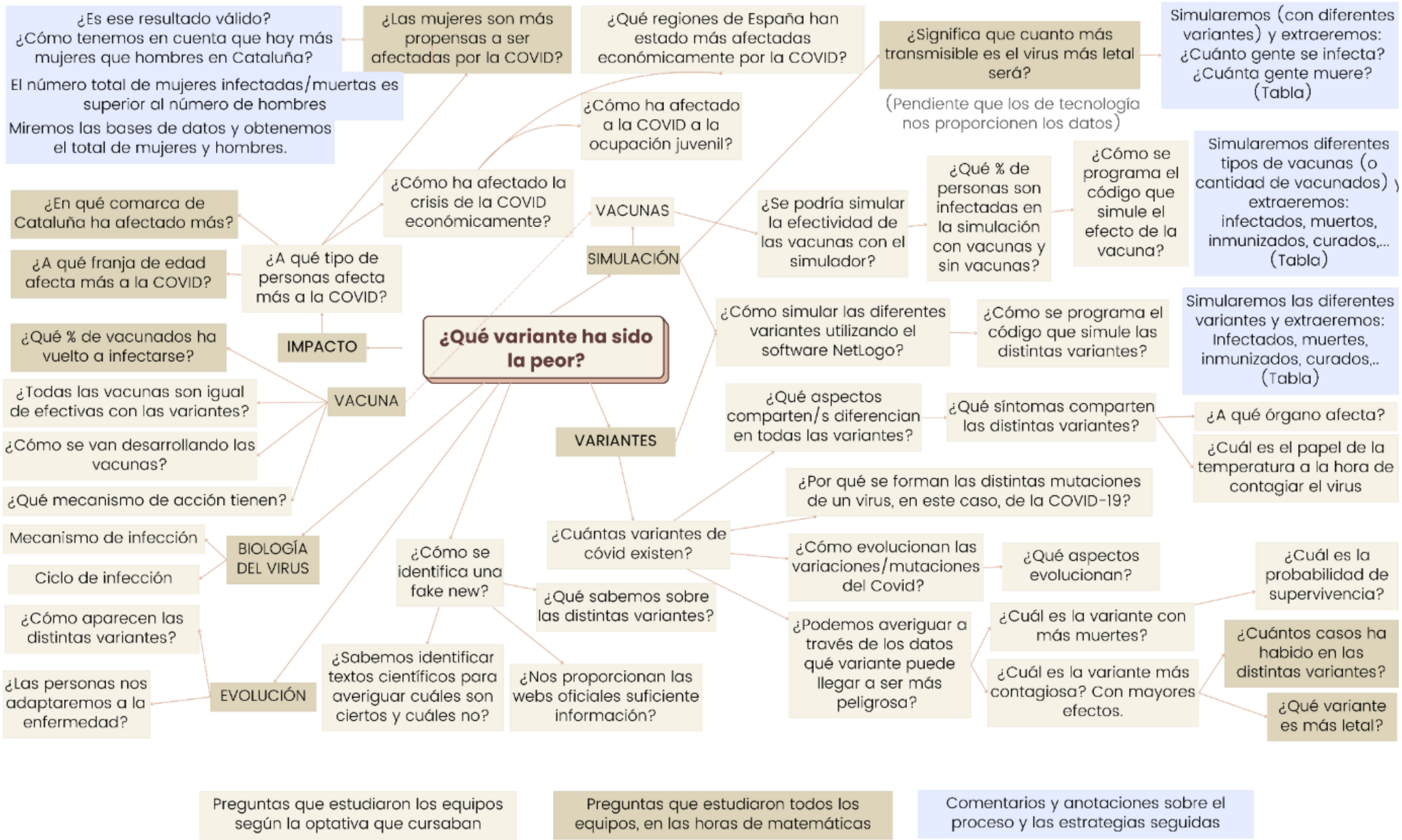


Figura 15: Mapa de CR generado por los estudiantes en la 2ª experimentación del REI

En cambio, en las siguientes experimentaciones, cuando la cuestión era única y toda la clase trabajaba bajo el mismo objetivo, el mapa fue una herramienta generada y gestionada por el profesorado, con las contribuciones de los diferentes equipos y, debido también la gran cantidad de cuestiones involucradas, sirvió para organizar la investigación, para repartir cuestiones tareas entre los grupos y disponer de un dispositivo para representar y actualizar en cada sesión cuál era la evolución de la investigación (Figura 15).

Podemos concluir que los mapas CR han sido una herramienta de análisis muy productiva para las investigadoras. Sin embargo, desde la perspectiva de profesores y estudiantes, a veces ha resultado una actividad redundante, puesto que el énfasis en las cuestiones y respuestas ya estaba incorporado en el trabajo de explicitación en los diarios. Aun así, se ha ido ajustando su papel para la comunidad de estudio, estudiantes y profesores, a lo largo del REI, encontrando cómo y acompañada de qué gestos y técnicas didácticas era de mayor utilidad.

D2 Dialéctica del individuo y el colectivo

En esta dialéctica abordamos la gestión de la *topogénesis*, que corresponde al reparto de responsabilidades o la asignación de roles a profesores y estudiantes durante el proceso de indagación. Por un lado, desde la primera experimentación, se indicó a los profesores que debían cambiar el rol al que estaban acostumbrados, intentando asumir el rol de un miembro más de la comunidad de estudio, sin proporcionar o validar las respuestas de los estudiantes. También se incidió en el cambio hacia el papel central de las cuestiones y su estudio, teniendo que recordarlas, organizarlas, distribuirlas, entre otras responsabilidades a lo largo de las sesiones. Igualmente, en los momentos de trabajo debían ayudar de manera particular a los equipos, siempre a partir del lanzamiento de preguntas para generar cuestionamiento.

Por otro lado, como dispositivo tangible identificado en esta dialéctica, encontramos la “repartición de tareas o responsabilidades” entre los diferentes equipos.

En el caso del REI de los candados, en la primera experimentación todos los grupos partían de la misma cuestión y se dedicaban a estudiar todos los candados. Por lo tanto, no había interacción entre los diferentes equipos más allá de los momentos de puesta en común, donde los equipos que no habían conseguido resolver alguna cuestión aprovechaban para copiar respuestas e integrarlas en su investigación. A partir del segundo ciclo de experimentación, se modificó la repartición de responsabilidades de la clase y se asignó a cada equipo un candado para estudiar. Por lo tanto, para conseguir resolver la Q_0 (¿Qué candado es más seguro?) era necesario que cada equipo trabajara en un candado, asignado por la profesora, y en el momento de las exposiciones compartiera con el grupo los resultados encontrados. De esta manera, cada equipo tenía la responsabilidad sobre algunas cuestiones derivadas de Q_0, que contribuirían a generar la $R^{\heartsuit}$.

En el caso del REI sobre COVID, inicialmente se optó por una investigación muy abierta, sin una Q_0 clara ni común, sino donde cada equipo se dedicaba a investigar un aspecto sobre el COVID, con unos datos comunes. La investigación se hizo tan amplia que la gestión fue muy complicada para los profesores. Por eso, en las siguientes experimentaciones se decidió elegir un objetivo común y repartir las cuestiones secundarias por temáticas según la disciplina de la optativa que cursaban. De esta manera, este tangible (gestión de Q_0 y derivadas) hizo posible que el trabajo y la responsabilización individual (en este caso considerando individuo como el equipo de trabajo) contribuyera a generar la respuesta colectiva $R^{\heartsuit}$ (entendiendo colectivo como la clase).

Finalmente, añadimos el dispositivo de los “puntos positivos por participación”. Consiste en una hoja de cálculo visible por los estudiantes, donde el profesor asignaba diariamente puntos a los estudiantes que participaban activamente en las puestas en común o hacían alguna aportación interesante y puntos penalizadores para los estudiantes que no mostraban una actitud de trabajo y colaboración. De esta manera, se incentivaba la participación individual, más allá de la corrección de las aportaciones, se intentaba que los alumnos contribuyeran también con cuestiones o críticas al trabajo de otros.

D9 Dialéctica de la difusión y recepción de respuestas

En ambas experimentaciones se han incorporado dispositivos parecidos a las “puestas en común” presentadas en la dialéctica D3, pero en este caso las llamamos “exposiciones”. Esta dinámica está caracterizada por la presentación, por parte de los equipos, de las respuestas encontradas. En concreto, aunque todo el grupo tenga un objetivo común (el estudio e investigación de una misma Q_0), hemos detectado la importancia de repartir objetivos distintos a los equipos, todos ellos conectados e importantes para el proceso de investigación grupal. Este dispositivo ya lo hemos explicado en la dialéctica D2 del individuo y el colectivo, pero remarcamos su importancia también en relación con D5 y D9.

En el caso del REI de los candados, se insistió al profesorado que no validaran las respuestas directamente en las sesiones de exposición, sino que fueran los propios estudiantes quienes discutieran el rango de validez de las estrategias y modelos que mostraban los compañeros y si estas coincidían entre ellos.

En el caso del REI sobre el COVID, en el diseño final, se incluye una sesión de “exposición de expertos”, donde los equipos monodisciplinares comparten los resultados de su investigación con los equipos que han trabajado en temáticas distintas. En este caso, no se generó la validación entre iguales, ya no todos cursaban la misma asignatura, pero sí que se les pidió que en sus informes finales incluyeran los resultados encontrados por otros equipos.

D5 Dialéctica del paracaidista y del buscador de trufas

Los momentos diseñados como “lluvia de preguntas” han sido un ejemplo claro de la aparición de esta dialéctica. En todos los REI experimentados se ha empezado por estos momentos, de manera más o menos explícita. A veces se ha gestionado de manera oral y otras veces se ha hecho a nivel escrito, en un Padlet (Figura 16). Generalmente se organizaba en dos momentos: en un primer estadio los equipos tenían un momento para escribir preguntas en su documento, y a continuación, debían seleccionar las más interesantes de esa primera lluvia y compartirlas con el resto de la clase.

Después de este primer momento más exploratorio, que también continua con una búsqueda general de información, la indagación prosigue con el estudio en profundidad de un tipo de cuestión para cada equipo de alumnos, a través del dispositivo de “reparto de tareas entre equipos”.

Vemos así que esta dialéctica es clave para dirigir el proceso de la investigación. Aquí los profesores tenían la instrucción de dejar un tiempo de lectura y análisis de estas cuestiones, para luego resaltar aquellas cuestiones más repetidas y decidir sobre cuáles eran más prioritarias o interesantes y poder organizar, de la forma más apropiada, su estudio. En el diseño a priori se contemplaban las preguntas previstas y se recordaba a los profesores cuáles eran las que habían aparecido en otros años, así como cuáles eran las líneas que se intentarían animar. En el caso del REI de COVID (no finalizado), esta primera dinámica fue clave para organizar la investigación y requirió de varias sesiones de trabajo conjunto por parte de los diferentes profesores involucrados para poder guiar de la misma manera los diferentes subgrupos de estudiantes.

Figura 16: Padlet generado en la lluvia de preguntas del REI sobre COVID

D3 Dialéctica del análisis-síntesis praxeológica y del análisis-síntesis didáctica

D4 Dialéctica de circunscribirse y salirse del tema

D6 Dialéctica de las cajas negras y cajas claras

Debido a que los dispositivos relacionados ayudan a las dialécticas D3, D4 y D6, decidimos agruparlas en esta sección. Los dispositivos utilizados que no han sufrido una evolución significativa desde las primeras experimentaciones han sido los momentos de puestas en común y las clases magistrales (también llamadas masterclass en la infraestructura disponible en el centro escolar).

Los gestos de estas puestas en común sucedían en una dinámica bastante común y han servido para gestionar el proceso de estudio, más relacionado con la *cronogénesis*:

- El profesor propone debatir sobre una cuestión concreta.
- Varios equipos aportan sus ideas y aportaciones y el profesor las anota en la pizarra.
- El profesor promueve una síntesis de estas ideas: elegir qué tienen en común, si dan respuesta a la cuestión o si se derivan otras cuestiones.

Por otro lado, también se han desarrollado momentos de *masterclass*. Estos momentos han aparecido cuando los estudiantes han encontrado alguna pieza de conocimiento demasiado alejada de sus conocimientos disponibles (su *medio*), alguna terminología desconocida o para dar alternativas a las técnicas propuestas. Ha sido un dispositivo muy necesario y valorado tanto por estudiantes como por profesores, aunque también ha sufrido cambios a lo largo de las implementaciones. Podemos observar en la Figura 12, sobre las encuestas de valoración al alumnado en relación con la pregunta E (sobre la necesidad por parte de los estudiantes de esta *masterclass*), una evolución en los resultados: cada año los estudiantes han valorado que necesitan menos estas explicaciones. Posiblemente, porque su integración a lo largo del REI ha sido más marcada en las últimas experimentaciones.

En el caso del REI finalizado de los candados, la *masterclass* se diseñó desde el primer REI piloto y se ha mantenido en todas las experimentaciones de una manera similar. El profesor repite el cálculo del número de combinaciones para los diferentes candados, haciendo énfasis en las propuestas de fórmulas, escritas o sintetizadas y propone la clasificación clásica de los problemas de contar, uniformizando la notación y la terminología, así como mostrando estrategias de cálculo alternativas, si no se han descubierto, como el uso de la calculadora. Así, este dispositivo, sirve tanto para completar el bloque de *logos*, dando robustez a la praxeología construida previamente por los estudiantes, así como complementarlo en el bloque de *praxis*, con técnicas diferentes, no encontradas en el proceso de investigación.

Finalmente, mencionamos en esta dialéctica también un dispositivo más tradicional: el listado de ejercicios de combinatoria clásica. Aunque el trabajo que se hace en el REI de candados a partir de la construcción de $R^{\heartsuit}$ ya no se contempla como parte propia del REI, sino como una ampliación, con una pregunta que formula el profesor pero que nace del trabajo realizado en el proceso de investigación, se vio interesante ofrecer este dispositivo a los estudiantes. Este dispositivo nace de una restricción escolar clara: el ajuste al currículum. Es necesario tanto para el profesor como para los estudiantes mantener un cierto nivel de normalidad en el paradigma de visita de las obras, para poder adaptar las praxeologías encontradas en el propio REI a las situaciones que posiblemente se encontrarán en exámenes estandarizados en un futuro.

D7 Dialéctica de los medio y los media

La gestión de la *mesogénesis* corresponde a la construcción del medio experimental para el progreso del proceso de indagación. Dicha construcción se hace a partir de los elementos de respuesta encontrados en los distintos media ($R^{\lozenge}$), su estudio, deconstrucción y reconstrucción para incorporarlos en el medio. De ahí que se asocie con la dialéctica de los medio y los media. En los REI experimentados, hemos puesto a disposición de los estudiantes una variedad amplia de media, recursos que han permitido que la indagación condujera hacia un medio didáctico más específico – en el caso del REI finalizado – o más abierto.

Para el REI finalizado (candados) se optó inicialmente por un trabajo sin dispositivos electrónicos y, por lo tanto, sin acceso a Internet. Tanto en esta primera experimentación como en la última realizada en una escuela diferente, se limitaron mucho los medias disponibles. Los estudiantes solo disponían del libro de texto para investigar, aunque en la mayoría de los casos no lo utilizaron. Los que sí lo hicieron se encontraron con fórmulas y definiciones que no entendían por sí mismos. Aun así, los estudiantes pudieron desarrollar sus respuestas y estrategias sin la necesidad de ningún media específico. Los estudiantes pueden elaborar su propio medio didáctico sin la necesidad de ninguna o demasiada intervención de respuestas existentes a través de posibles media. Esto es posible debido a que la cuestión inicial está muy acotada y no requiere una investigación abierta. Al ser un REI finalizado, se conocen de antemano las respuestas y estrategias esperadas y, en general, los alumnos son capaces de llegar a ellas usando el razonamiento individual y colectivo.

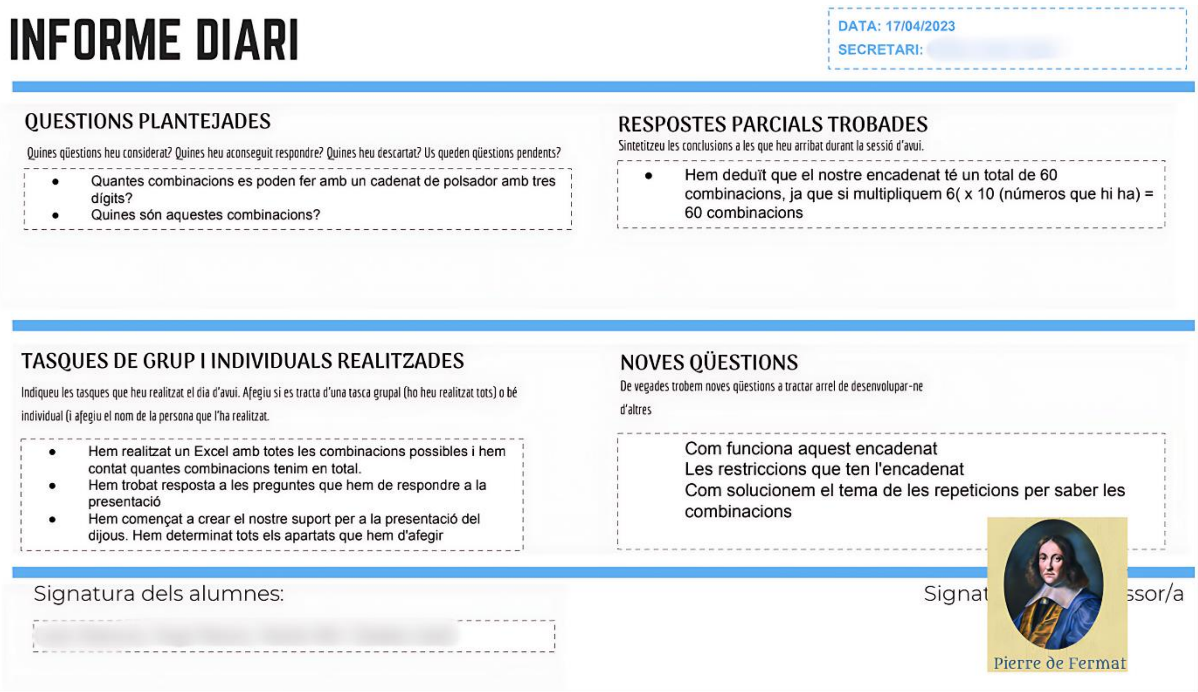
También merece una mención especial el cambio en el contrato didáctico por lo que respecta a la gestión del medio didáctico por parte del profesor. Este no hace de media principal – el que aporta las respuestas válidas – como en las propuestas tradicionales, sino que proporciona dispositivos y actúa con unos gestos didácticos que propician la dinámica de la indagación.

En el caso concreto del REI sobre combinatoria, es importante recalcar un aspecto importante del medio de la indagación que son los candados como dispositivo tangible que facilita el razonamiento y la generación de modelos. Hemos encontrado que el uso y la gestión manipulativa de los candados ha sido crucial en las experimentaciones. Su uso no solo se restringe a su manipulación o la identificación de sus características, sino que los estudiantes también los necesitan para compararlos o como elemento para facilitar la comunicación y demostración de argumentos.

D8 Dialéctica de la lectura y de la escritura

En el caso de la dialéctica de la lectura y de la escritura, tanto en las experimentaciones realizadas en el Col·legi Natzaret, donde se promueven dispositivos digitales, como en Santa Anna, donde se trabaja sin ellos, se han utilizado diarios (digitales o manuales) para recoger las producciones (Figura 17 y Figura 18). En ambos casos, los dispositivos utilizados los conocemos como “diarios” y “dosieres”. Estos instrumentos tampoco han sufrido cambios significativos desde las primeras implementaciones.

Su uso, en general, es provechoso, tanto para sintetizar información, como para permitir una retroacción por parte del profesor. Se incluyen en los apéndices ejemplos de los diarios utilizados.



INFORME DIARI

DATA: 17/04/2023
SECRETARI:

QUESTIONS PLANTEJADES

Quines qüestions heu considerat? Quines heu aconseguit respondre? Quines heu descartat? Us queden qüestions pendents?

- Quantes combinacions es poden fer amb un cadenat de polsador amb tres dígits?
- Quines són aquestes combinacions?

RESPOSTES PARCIALS TROBADES

Sintetitzeu les conclusions a les que heu arribat durant la sessió d'avui.

- Hem deduït que el nostre encadenat té un total de 60 combinacions, ja que si multipliquem 6(x 10 (números que hi ha) = 60 combinacions

TASQUES DE GRUP I INDIVIDUALS REALITZADES

Indiqueu les tasques que heu realitzat el dia d'avui. Afegiu si es tracta d'una tasca grupal (ho heu realitzat tots) o bé individual (i afegiu el nom de la persona que l'ha realitzat.

- Hem realitzat un Excel amb totes les combinacions possibles i hem contat quantes combinacions tenim en total.
- Hem trobat resposta a les preguntes que hem de respondre a la presentació
- Hem començat a crear el nostre suport per a la presentació del dijous. Hem determinat tots els apartats que hem d'afegir

NOVES QÜESTIONS

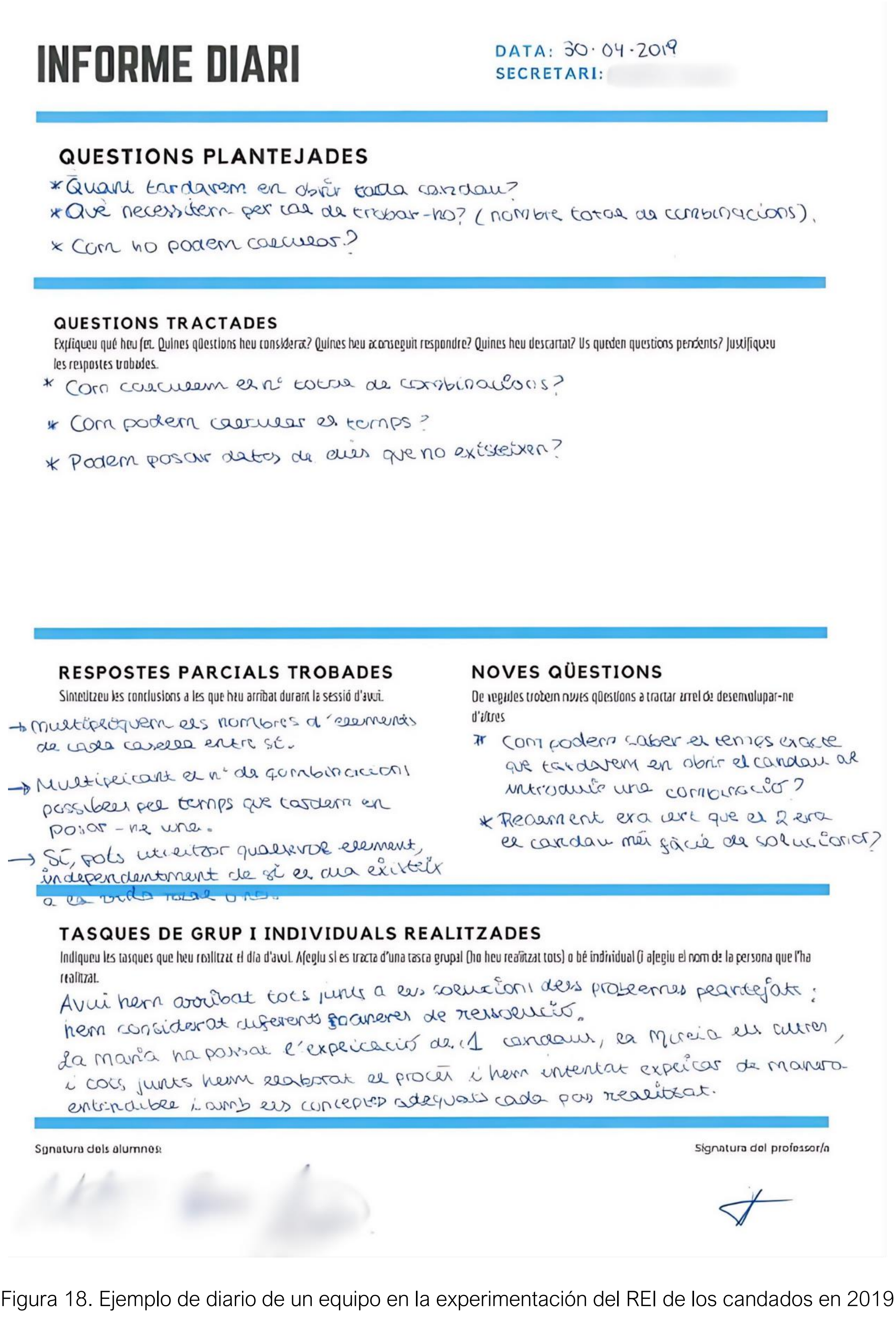
De vegades trobem noves qüestions a tractar arrel de desenvolupar-ne d'altres

Com funciona aquest encadenat
Les restriccions que ten l'encadenat
Com solucionem el tema de les repeticions per saber les combinacions

Signatura dels alumnes:

Signat[...]ssor/a

Figura 17. Ejemplo de diario de un equipo en la experimentación del REI de los candados en 2023



INFORME DIARI

DATA: 30·04·2019
SECRETARI:

QUESTIONS PLANTEJADES

*Quant tardarem en obrir cada candau?
*Què necessitem per tal de trobar-ho? (nombre total de combinacions).
* Com ho podem calcular?

QUESTIONS TRACTADES

Expliqueu què heu fet. Quines qüestions heu considerat? Quines heu aconseguit respondre? Quines heu descartat? Us queden qüestions pendents? Justifiqueu les respostes trobades.

* Com calculem el nº total de combinacions?
* Com podem calcular el temps?
* Podem posar dates de dies que no existeixen?

RESPOSTES PARCIALS TROBADES

Sintetitzeu les conclusions a les que heu arribat durant la sessió d'avui.

→ Multipliquem els nombres d'elements de cada casella entre sí.
→ Multiplicant el nº de combinacions possibles pel temps que tardem en posar-ne una.
→ Sí, pots utilitzar qualsevol element, independentment de si el dia existeix a la vida real o no.

NOVES QÜESTIONS

De vegades trobem noves qüestions a tractar arrel de desenvolupar-ne d'altres

* Com podem saber el temps exacte que tardarem en obrir el candau al introduir una combinació?
* Realment era cert que el 2 era el candau més fàcil de solucionar?

TASQUES DE GRUP I INDIVIDUALS REALITZADES

Indiqueu les tasques que heu realitzat el dia d'avui. Afegiu si es tracta d'una tasca grupal (ho heu realitzat tots) o bé individual (i afegiu el nom de la persona que l'ha realitzat.

Avui hem arribat tots junts a les solucions dels problemes plantejats; hem considerat diferents maneres de resolució. La Maria ha passat l'explicació del 1 candau, la Mireia els altres, i tots junts hem elaborat el procés i hem intentat explicar de manera entenedora i amb els conceptes adequats cada pas realitzat.

Signatura dels alumnes:

Signatura del professor/a

Figura 18. Ejemplo de diario de un equipo en la experimentación del REI de los candados en 2019

D10 Dialéctica de los sistemas y los modelos

Finalmente, formulamos que los dispositivos que han permitido la generación de los modelos intermedios han sido los candados físicos y las herramientas digitales, como el software de simulación y hojas de cálculo.

Como esta dialéctica tiene un peso importante en esta tesis y está muy relacionada con el segundo bloque de preguntas de investigación (PI2) sobre modelización matemática, dejaremos para la siguiente sección las conclusiones al respecto de los modelos y sistemas.

Restricciones identificadas

Con respecto a las restricciones encontradas, comentaremos para empezar, el tema de la evaluación. En nuestra investigación no hemos trabajado con profundidad este punto y no le hemos dado importancia en el diseño del REI, dejando a libertad y criterio del profesorado su gestión. Aun así, se han propuesto algunos dispositivos para incentivar la participación, para valorar la participación individual en el trabajo en equipo, para cuantificar el grado de competencia en la resolución de problemas de contar o para valorar las competencias en exposición oral y trabajo en equipo, entre otras. La evaluación de los alumnos y del propio trabajo de indagación merece ser tratado de forma específica y excede nuestra investigación. Por un lado, la evaluación es un aspecto esencial en todo proceso de indagación y debe asociarse a las dialécticas media-medio y cajas negras-cajas claras. También es importante en la dialéctica individuo-colectivo para gestionar el reparto de responsabilidades y que cada cual asume la suya de forma productiva. Finalmente, estos aspectos deben vincularse con la evaluación como dispositivo escolar – incluyendo la calificación de los estudiantes – y, en consecuencia, con los contratos pedagógicos, escolares y sociales.

Otra restricción que también proviene del nivel de la sociedad y de la escuela es el currículum, que ya hemos comentado anteriormente. Hemos visto que las condiciones impuestas por el currículum hicieron que el REI de candados se tuviera que extender hacia los problemas de contar colecciones en general para cumplimentar estos requisitos, convirtiéndolo en un REI finalizado. En cambio, en el REI sobre el COVID no se pretende llegar a ninguna obra concreta, lo que genera unos procesos de investigación muy abiertos y libres según muchos factores (profesor que lo implemente, grado de implicación de estudiantes, medias disponibles…).

Finalmente, una restricción importante a nivel escolar ha surgido en cuanto al profesorado participante, no a las personas sino a las posiciones que ocupan en cada escuela. Las condiciones laborales comentadas en la introducción, en el contexto de una escuela concertada, representan una restricción muy importante en este tipo de propuestas. La falta de tiempo del profesorado, la variedad de tareas que deben asumir, los cambios de roles que se necesitan y la carga de horas lectivas hacen que implementar los dos REI haya supuesto un esfuerzo personal sustancial para los profesores implicados.

PI1.2 ¿Qué condiciones son necesarias para asegurar un desarrollo sostenible de estas propuestas?

PI1.3 ¿Qué restricciones limitan la participación de la comunidad docente en la implementación de los REI?

Agruparemos estas dos cuestiones de investigación por estar fuertemente relacionadas. Asumimos, además, que los estudios realizados solo pueden aportar respuestas provisionales, aunque también útiles.

Ambos REI han sido experimentados durante varios años consecutivos, con una variedad de profesores. Incluso, la última experimentación se llevó a cabo con la investigadora con el rol de observadora y facilitadora (no profesora) y recientemente se ha llevado a cabo en el mismo centro, pero sin la investigadora. Además, en este último curso 2023/24 también se ha experimentado en varios centros de Barcelona, con resultados prometedores, pero que están en proceso de ser analizados.

De estas experimentaciones hemos podido analizar en profundidad el REI y sus dialécticas, ya que el hecho de que la investigadora haya tenido el rol de profesora principal u observadora/facilitadora ha sido determinante para observar, con la mirada de la TAD, las dialécticas involucradas y así poder identificar las condiciones de la PI1.1. En cambio, analizar las condiciones y restricciones para el desarrollo sostenible y la adherencia a la comunidad docente es un reto que aún está en una fase de desarrollo muy temprana.

Aun así, podemos hacer conjeturas sobre ello y enfocar la investigación futura hacia nuevas líneas de desarrollo. Una de ellas, enmarcada en el proyecto LABINQUIRY, cuyo objetivo es difundir las infraestructuras matemáticas y didácticas de los REI entre la comunidad educativa, la comentaremos en el Capítulo 6.3.

Una primera condición favorable por mencionar sería la inclusión que ofrece el currículum actual hacia las propuestas basadas en la indagación. Se le pueden añadir los últimos cambios en el currículum de Bachillerato añaden saberes matemáticos relacionados con la estadística y la probabilidad. Esto representa un atractivo adicional para los profesores de etapas anteriores que quieran implementar propuestas basadas en la indagación, como el REI de los candados, ya que cumplen los requisitos que determina el currículum. Cabe mencionar, por otro lado, que el currículum catalán ha incluido asignaturas trimestrales y optativas en 1.º de Bachillerato en Catalunya cuya formulación curricular no incluye listas de “obras” sino de cuestiones relevantes, más en la línea del paradigma del cuestionamiento del mundo. Con esto determinamos que desde las instituciones superiores se están destensando las restricciones curriculares y nos permiten, por lo tanto, proponer e implementar procesos de estudio que apuntan hacia un cambio de paradigma.

Respecto a propuestas como el REI de candados, consideramos que las condiciones que han facilitado la adherencia en el centro han sido importantes y diversas. Principalmente, el hecho de que sea una propuesta ya experimentada varias veces da confianza suficiente al profesorado; no lo ve como una experimentación piloto, sino como una propuesta que, en condiciones parecidas, ha tenido éxito y tanto estudiantes como profesores la repetirían. Por otro lado, la infraestructura didáctica que se puede ofrecer al profesorado es extensa: plantillas de trabajo, presentaciones, guías didácticas o ejemplos de calendarización, además de experiencias previas y la posibilidad de interactuar con profesorado que ya ha gestionado su experimentación. Se ha elaborado muchos recursos (disponibles en los apéndices) para facilitar el trabajo al profesorado y que este pueda centrarse en llevarlo al aula sin que le suponga un tiempo adicional la generación de materiales. Además, el trabajo conjunto entre investigadores y profesores ha sido clave: dispositivos como las reuniones de preparación o chats entre los profesores involucrados parecen dar una buena respuesta. Finalmente, el apoyo del equipo directivo de los centros a la innovación y al trabajo cooperativo entre investigación y docentes, resulta también una variable clave para la ecología de los REI. Obviamente, dentro de este conjunto de condiciones, resulta totalmente indispensable la disposición e interés del profesorado, asociados a sus condiciones laborales.

Aunque inicialmente resultó una condición facilitadora, la gestión del profesorado en las clases de matemáticas en el Col·legi Natzaret ha aportado también algunas limitaciones. Las clases de matemáticas suelen estar compuestas por los estudiantes y el profesor/a. Que en una clase aparezca más de un profesor es una circunstancia muy inusual. En el Col·legi Natzaret, como explicamos en la sección 1.4.3, es habitual que las clases de matemáticas sean responsabilidad de más de un profesor. En las primeras experimentaciones esto representó una condición facilitadora, ya que los tres profesores se podían organizar para rotar entre las clases y así enriquecer las discusiones. Además, la investigadora podía aconsejar al resto de los profesores en el momento como en reuniones de coordinación. Este hecho ha actuado también como una limitación porque en los últimos años, los profesores involucrados en la experimentación han ido cambiando. Solo hay un profesor, a parte de la investigadora, de un total de siete participantes, que haya podido realizar el REI durante dos años diferentes. Esto ha generado que cada año los profesores tengan que esforzarse para llevar a cabo lo que, para ellos, es su primera implementación. Las consecuencias de esta organización suelen ser que la responsabilidad y papel principal recaigan en el profesor experimentado, haciendo que los profesores nuevos al REI tomen un papel de aprendiz y se mantengan al margen. Esto, obviamente, supone un esfuerzo extra para el profesor principal, que tiene que asumir el peso de organizar, guiar y dinamizar una clase de 60 alumnos durante las aproximadamente 10 sesiones. En este último curso, además de que la investigadora ya no ha participado, dos de los profesores están a cargo de las cuatro sesiones semanales y los otros dos se combinan entre las dos clases adicionales. Por lo tanto, hay tres profesores para 60 estudiantes en cada sesión, pero uno de los profesores puede ser diferente. Esto, según los profesores, genera problemas logísticos en general; ha sido perjudicial de manera más concreta en el REI. El rol del profesor es muy importante en la gestión del REI; este hace de guía y orienta a los estudiantes en la investigación. Esta organización y la falta de tiempo de coordinación han generado problemas para hacer un buen seguimiento del trabajo de los estudiantes. Los estudiantes de secundaria tienen, en general, poca experiencia investigadora y las dinámicas que se han observado en los REI experimentados, por ejemplo, en universidad, no aparecen aquí. Por lo tanto, consideramos una restricción institucional muy limitante para la gestión de los REI esta organización de profesorado confusa si se incluyen profesores nuevos a la propuesta.

Finalmente, en el caso particular del Col·legi Natzaret, identificamos que los cambios en las personas que conforman el equipo directivo han generado modificaciones en la cultura y políticas del centro. Como ejemplo, debido a que la última dirección ha priorizado los resultados de los estudiantes en la selectividad, los profesores, en especial los nuevos, han enfocado su práctica docente a la transmisión de saberes útiles para ese fin, tanto en las clases de bachillerato como en las etapas inferiores y, en particular, se podría interpretar que ha habido un retorno o acercamiento hacia una enseñanza de las matemáticas más basadas en el paradigma de visita de las obras que las propuestas anteriores, aunque experimentadas y establecidas durante cursos anteriores, que habían permitido crear condiciones institucionales en una transición o cambio de paradigma. Por ello, se debe destacar cuánto sensible es la "supervivencia" de cualquier propuesta a las decisiones escolares y pedagógicas emprendidas.

5.2. PI2 Modelización matemática como núcleo del REI

Tanto el REI finalizado sobre combinatoria como el REI abierto sobre el COVID han dado lugar a procesos de modelización muy interesantes y con una potencialidad para la discusión sobre el papel de los modelos, sistemas y simulaciones dentro de los procesos de indagación.

PI2.1 ¿Cómo interviene la modelización matemática en la dinámica de la indagación en un REI? ¿Cuál es la función de las dialécticas en la dinámica de los REI?

Retomamos aquí la discusión de la pregunta anterior, sobre la ecología de los REI en general, para aterrizar más concretamente en la contribución de los REI a los procesos de modelización. Hemos podido comprobar y recrear la propuesta de cómo evolucionan las praxeologías de modelización en los procesos de indagación, vistos según la TAD (Figura 19), que introdujimos en la sección 1.3.2.

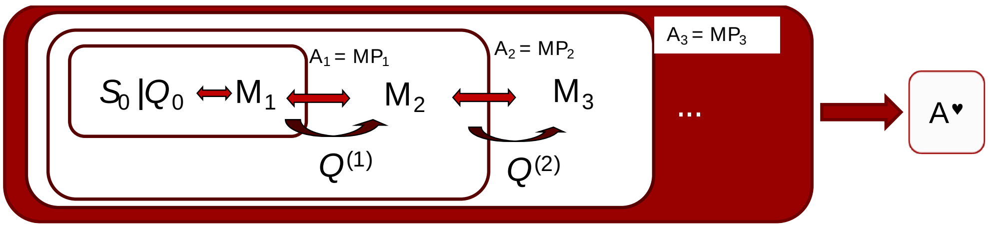


Figura 19. Representación del proceso de modelización en la TAD (Barquero, 2023)

Por un lado, en el REI de candados, como vemos en la Figura 20 y analizamos en Vásquez et al. (2021c), hemos puesto en disposición de la comunidad de estudio el sistema inicial S_0 – un conjunto de candados a estudiar – y una Q_0: *de esta colección de candados, ¿qué candado es más seguro?* Este sistema inicial ha sido lo suficientemente accesible a los estudiantes; han podido analizar su funcionamiento y han sido capaces de generar unas cuestiones derivadas que han permitido proceder con una investigación fructífera.

En este proceso, se han generado unos primeros modelos, M_1, muy iniciales, con modelos basados en la elaboración de listas o listados (con o sin orden), donde, por ejemplo, algunos se ayudaban de hojas de cálculo para hacer el recuento más viable. En seguida surge la Q_1: *¿Cuántos códigos admite cada candado?* Este primer modelo revela muchas limitaciones, especialmente para validar el resultado final (¿Cómo saber si falta una combinación?). Entonces los estudiantes cogen estos primeros listados (generados a partir de los primeros modelos) y los estudian como si el conjunto de candado y modelo M_1 constituyera un nuevo sistema S_1 a estudiar. En su estudio, desarrollan el nuevo modelo M_2, más evolucionado y con estrategias más completas, como la creación de modelos basados en cálculos aritméticos que permiten recontar el número de combinaciones. Este proceso se repite cuando emerge la Q_2: *Nos han dado nueva información sobre los candados ¿Se puede encontrar el número de códigos con la nueva información?* Lo que convierte M_2 y S_1 en el nuevo sistema S_2. Los diferentes modelos de cálculos aritméticos, con su correspondiente candado, constituirán el nuevo sistema S_2 a estudiar; junto con la nueva información, los estudiantes indagarán sobre ellos y estudiarán la validez de los modelos anteriores, encontrando por lo tanto un modelo M_3, formado por fórmulas numéricas (prealgebráicas en algunos casos) asociadas a cada familia de candados.

Cabe señalar que los modelos intermedios (M_1 y M_2, en este caso) son fundamentales para explicar, justificar y estudiar la validez tanto del modelo propuesto (M_3) como de las respuestas que ayudan a obtener. Estos modelos intermedios adquieren así un papel tecnológico en la praxeología de la combinatoria final centrada en las fórmulas algebraicas.

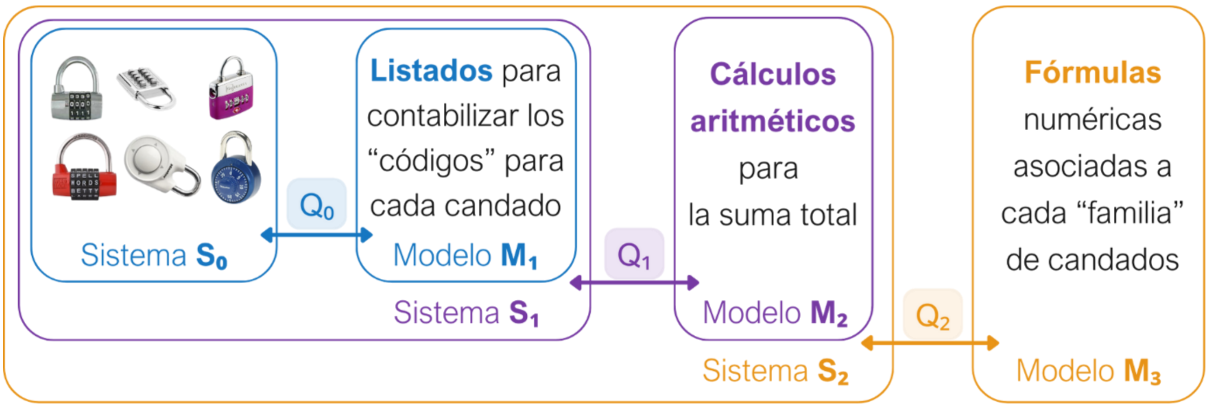


Figura 20. Representación del proceso de modelización en el REI de los candados

En el caso del REI experimentado en 1.º de Bachillerato, descrito en el capítulo 3.2 encontramos un proceso de modelización similar (Figura 21). En este caso se parte de un sistema S_0 representado por el COVID y los datos e información disponible a nivel global. La investigación se separa en dos líneas. Por un lado, se extraen los datos numéricos alrededor de la evolución del COVID en Cataluña y se pregunta qué información podemos extraer de ellos (Q_0). Las praxeologías conocidas por los alumnos son muy limitadas y para abordar esta cuestión utilizan unas técnicas de análisis de datos muy sencillas, como tablas de frecuencias y gráficos comparativos (modelo M_1). Por otro lado, se decide trabajar con otro sistema proporcionado S'_0, que consiste en un software de simulación sencillo (NetLogo), con el que los estudiantes pueden investigar y hacer pruebas de simulaciones, haciendo cambios en algunos parámetros y obteniendo tablas de número de casos en función del tiempo y cuestionándose también su representación (Q'_1), de las que consiguen sacar algunas respuestas (M'_1), pero además surgen algunas cuestiones relacionadas con las relaciones entre variables (Q'_2). Es en este momento donde la profesora decide hacer el rol de media y proporciona a los estudiantes las técnicas para interpretar las correlaciones entre variables bidimensionales; los estudiantes son capaces de elaborar este modelo M'_2, formado por estudios sencillos de correlación entre dos variables. Finalmente, los estudiantes recuperan el sistema S_2 y este modelo más avanzado y elaboran un nuevo modelo M_2, que aborda la cuestión relativa al sistema original, pudiendo así dar una respuesta más evolucionada, con unas estrategias mucho más desarrolladas que las iniciales.

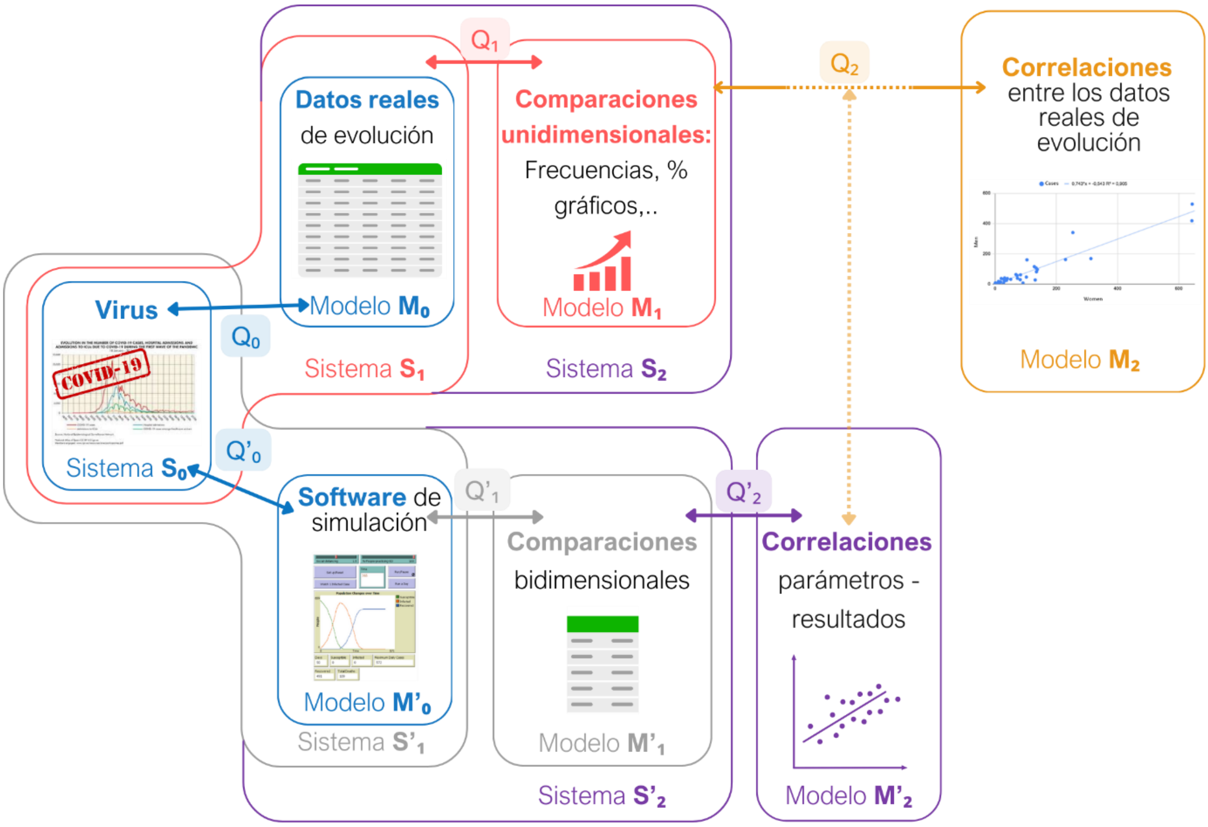


Figura 21. Representación del proceso de modelización en el REI del COVID (Bachillerato)

Vemos en este caso como el proceso de modelización es más complejo que en el caso de la combinatoria, ya que no solo existen estas características de reversibilidad de los roles entre sistemas y modelos y de recursividad de modelos iniciales que evolucionan, sino que estos modelos más avanzados necesitan de la existencia de modelos auxiliares (indicados con el símbolo ') que nacen de un sistema simplificado que permite, gracias a esta simplicidad, un cuestionamiento más asequible y un crecimiento del medio didáctico. Esta evolución del medio didáctico permite, finalmente, poder aplicar el modelo auxiliar (sin caer en el aplicacionismo) al sistema original, encontrando un modelo final avanzado, que el sistema original por sí solo no lo hubiera permitido.

PI2.2 ¿Qué condiciones se requiere para que un REI pueda promover el trabajo de modelización sostenido?

En primer lugar, identificamos como una condición facilitadora la formulación de Q_0 y la elección de un sistema inicial S_0 que ejerza el papel de media, para permitir la evolución en el proceso de indagación y que así los estudiantes puedan construir sus propias respuestas sin una intervención demasiado aplicacionista del profesor. Este sistema ha de ser suficientemente sencillo para la comprensión de los estudiantes, pero a su vez real y sin una respuesta evidente.

En las caracterizaciones anteriores descubrimos también la importancia del papel definido que tienen las cuestiones, los sistemas y los modelos asociados. Además, es de gran relevancia el papel recursivo (progreso en la consideración de modelos de modelos) y de reversible (sistemas y modelos pueden intercambiar su función) en el proceso de modelización matemática. Vemos que en esta caracterización aparecen las dialécticas D10 (sistemas y modelos), D1 (cuestiones y respuestas) y D7 (medias y medios). Por lo tanto, determinamos que es esencial para la gestión de un REI en modelización sostenido, una buena caracterización de estas dialécticas. Hemos encontrado que en la evolución de las diferentes experimentaciones se le ha ido dando más peso a este *logos* didáctico y esto ha contribuido a un mejor trabajo de modelización.

En ambas experimentaciones huimos del aplicacionismo (Barquero, Bosch & Gascón, 2013), ya que los modelos no aparecen como excusa para aplicarlos a un problema artificial y académico, sino que se parte de una cuestión de interés, construyendo y haciendo evolucionar los modelos a medida que se necesitan, para resolver una cuestión importante. Asimismo, gracias a esta evolución natural entre las cuestiones, sistemas, modelos y respuestas, se consigue mantener viva la razón de ser de los saberes que están en juego.

PI2.3 ¿Las propuestas de los REI permiten desarrollar la capacidad recursiva y reversible de los modelos/sistemas matemáticos?

En la caracterización que hemos hecho de los procesos de modelización, según la TAD en PI2.1 podemos identificar las características de recursividad y reversibilidad de los modelos y sistemas involucrados como propone Barquero (2023).

En el caso del REI de candados (Figura 20), identificamos la característica de reversibilidad en el momento en el que los modelos y sistemas intercambian sus roles. Esto aparece cuando un sistema se convierte en el modelo (o representante) de su modelo. Por ejemplo, el sistema formado por los candados S_0, una vez estudiado, pasa a ser representante de las fórmulas de cada familia de candados, y por lo tanto modelo. En el caso del REI del COVID (Figura 21) el sistema formado por los resultados de las simulaciones, cuando se estudia su correlación, pasa a formar parte del modelo.

Esta caracterización de la reversibilidad está profundamente conectada con la característica de recursividad, que entendemos cuando un modelo es estudiado y, por lo tanto, considerado como un sistema a estudiar, del cual se derivará un nuevo modelo, más evolucionado que el anterior. Hemos de mencionar que, si bien la reversibilidad y la recursividad han aparecido en los dos procesos de modelización analizados, relacionamos la potencialidad de su aparición a las dinámicas de la indagación y al estudio sostenido de las cuestiones que originan el proceso de modelización.

Por ejemplo, en el caso del REI de los candados vemos la recursividad al considerar los candados (sistemas originales S_0) que han sido estudiados y se tienen unos modelos intermedios para representarlos. A partir de ese modelo intermedio, se hace un nuevo estudio de las familias de candados y consigue llegar a un nuevo modelo, más evolucionado, que permite describir mejor los sistemas iniciales. Esta potencialidad de la recursividad sucede cuando ampliamos el REI e introducimos nuevas cuestiones como Q_4: ¿Cómo resolver situaciones de conteo generales? En esta nueva situación los candados (antes sistema) ahora son modelos que representan los modelos de secuencias de códigos, que permitirán modelizar los problemas de conteo generales (nuevo sistema mayor, S'_0) y utilizar los modelos intermedios anteriores para dar respuesta. Vemos que este proceso recursivo va ocurriendo a lo largo del REI original y también en su ampliación a los problemas de contar.

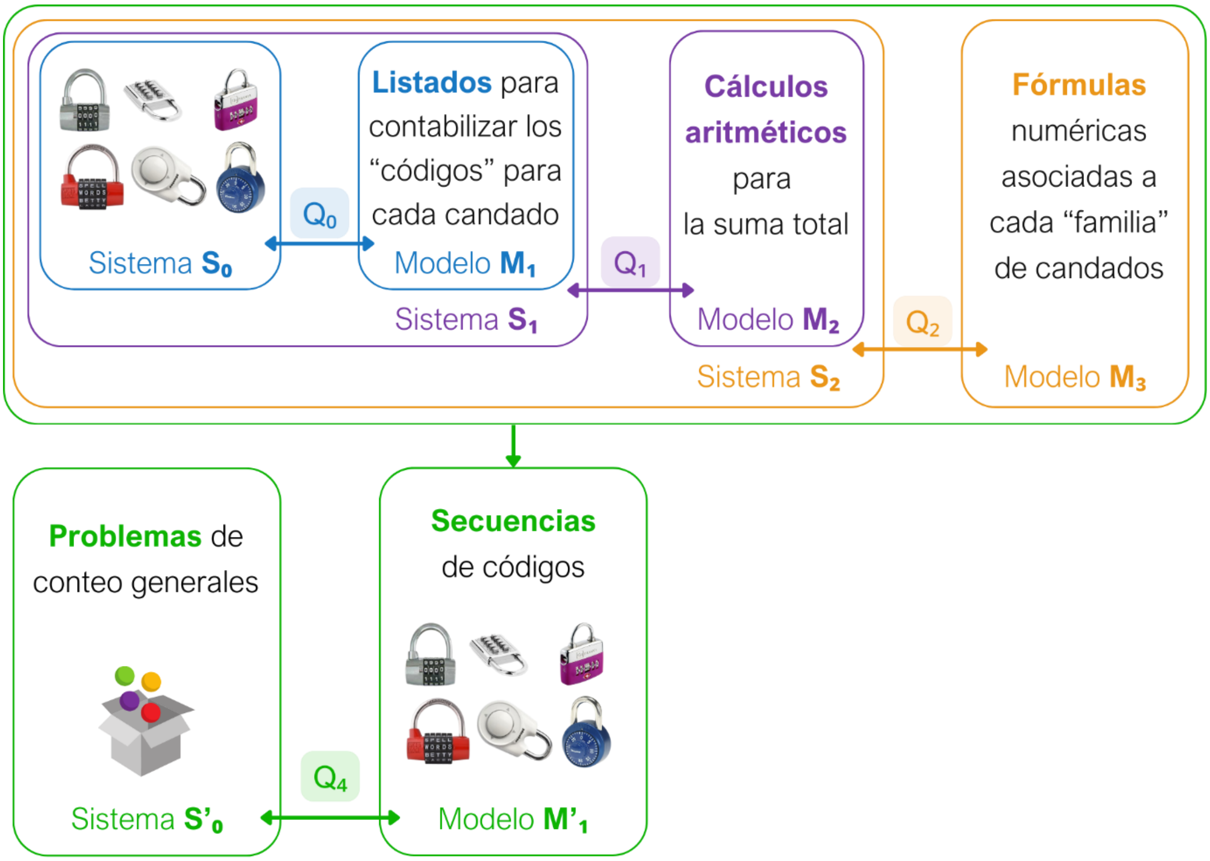


Figura 22. Representación del proceso de modelización en el REI de los candados con la ampliación a otras situaciones con problemas de contar.

PI2.4 ¿Qué posibles contribuciones aportan los REI finalizados al estudio de las praxeologías?

En el caso concreto del REI finalizado, de los candados y la combinatoria, se consigue hacer una aportación significativa al trabajo de Juberó (2022), en este se criticaban la completitud praxeológica de las propuestas en combinatoria según unos índices (Bosch et al., 2004) y se indicaba que estas no permitían abordar tareas más abiertas.

En el caso de los REI, se consigue llegar al mismo tipo de organizaciones matemáticas propuestos en el libro de Bosch et al. (1997), con praxeologías muy parecidas (*logos* y técnicas muy similares). La aportación de los REI por lo tanto está relacionada sobre todo con la *mesogénesis*. La construcción del medio didáctico no proviene de un libro, sino que es posible gracias al propio sistema inicial (los candados). Los estudiantes pueden elaborar las técnicas iniciales, que más adelante refinarán con ayuda del profesor (u otros media). Estos candados representan un modelo preliminar al modelo de las cadenas de símbolos, construidos por los propios estudiantes y esto promueve un bloque de *praxis* que el estudiante podrá identificar más claramente. Por ejemplo, se evidenció que los estudiantes un año después, aún recordaban las técnicas que habían visto el curso anterior; no recordaban las fórmulas concretas, pero sabían relacionar los problemas de contar con algún candado.

Además, gracias al REI se mantiene viva la cuestión inicial y, por lo tanto, la razón de ser de los saberes que están involucrados no se pierde en ningún momento del proceso de aprendizaje. Sino al contrario, los objetos matemáticos aparecen ya que se despierta una necesidad para conseguir dar respuesta a unas cuestiones.

5.3. PI3 Interdisciplinariedad en los REI

PI3.1 ¿Cómo intervienen las disciplinas en la dinámica de la indagación en un REI? ¿Qué restricciones establecen en la enseñanza disciplinar en un REI?

En el paradigma del cuestionamiento del mundo, los procesos de enseñanza y aprendizaje están centrados y organizados en las cuestiones que generan los procesos de indagación. Estas no tienen una disciplina asignada, aunque su formulación pueda enraizarse más o menos en algún campo del saber. En el contexto escolar actual, especialmente bajo las condiciones pedagógicas de la educación secundaria que separa los procesos de enseñanza por disciplinas o materias, el momento en el que la comunidad de estudio se decide a investigar una cuestión, la disciplina queda en general bastante determinada, por ejemplo, si la cuestión se plantea en el marco de una asignatura escolar. Si, por ejemplo, nos mantenemos externos a los contextos escolares y nos situamos en un contexto investigador, la identificación de las disciplinas que pueden ayudar a elaborar respuestas es una parte importante del proceso de indagación. Esto es útil para las propuestas basadas en el cuestionamiento porque las praxeologías más desarrolladas las encontramos enmarcadas en las disciplinas actuales. Por lo tanto, para el estudio de cuestiones derivadas, puede ser muy útil ser capaz de determinar con acierto la disciplina que podrá proporcionar las organizaciones praxeológicas más productivas para generar las respuestas.

El caso del REI sobre el COVID-19 es un ejemplo de REI que no se enmarca inicialmente en un contexto disciplinar concreto o que, por lo menos, se enmarca en un contexto pluridisciplinar. De la experimentación realizada en el curso 2020/21 y del análisis realizado en el capítulo 4.1, se destacaron varias condiciones favorables de esta situación inicial. En primer lugar, las preguntas iniciales planteadas por los alumnos eran socialmente relevantes y la utilidad de las respuestas finales estaba clara. Además, el enfoque multidisciplinario y el tratamiento de las preguntas eran evidentes para el alumnado, reflejando las controversias entre científicos y responsables políticos durante la pandemia. En segundo lugar, la escuela proporcionó condiciones facilitadoras para llevar a cabo el REI, permitiendo la colaboración entre profesores de diferentes asignaturas. Por último, la experiencia de la profesora a cargo y la familiaridad de los estudiantes con el trabajo en equipo y el aprendizaje basado en proyectos contribuyeron al éxito del REI.

Ahora bien, este REI también muestra que, en un proceso multidisciplinario, aunque las condiciones parezcan favorables, no siempre garantizan una interacción efectiva entre las disciplinas para generar interdisciplinariedad. Una restricción es la resistencia de los profesores para guiar a los estudiantes en áreas ajenas a su disciplina, como si solo el profesor de matemáticas pudiera guiar en las cuestiones que involucraban las matemáticas o el de biología en los temas de tipo médico. Lo que en el paradigma de la visita de las obras funciona como fuente de legitimidad – el profesor es el experto que garantiza la autenticidad de la obra estudiada –, en el paradigma del cuestionamiento del mundo aparece como una limitación para dirigir una indagación: uno debe asumir guiar indagaciones más allá de su zona de experiencia.

Además, la falta de tiempo para compartir y reflexionar también afectó la coordinación entre los profesores en el proyecto interdisciplinario. Como resultado, los docentes conocían principalmente el trabajo de los alumnos durante sus propias clases y asesoraban en función de su especialidad. La organización escolar también limitaba la posibilidad de que los profesores de diferentes disciplinas guiaran el proyecto simultáneamente. Esto influyó en las preguntas que los alumnos elegían abordar, ya que se inclinaban hacia las áreas de conocimiento de sus profesores.

El trabajo interdisciplinario requiere tiempo de calidad para que los profesores compartan opiniones y tomen decisiones. Es fundamental superar la tradición monodisciplinaria en la enseñanza secundaria y reflexionar sobre los conocimientos que se encuentran en las fronteras entre disciplinas. Durante la aplicación del REI, la colaboración entre profesores e investigadores y la reflexión colectiva sobre el diseño y su gestión, son esenciales para determinar las necesidades de conocimiento disciplinario e interdisciplinario.

PI3.2 ¿Qué condiciones se requieren para que un REI pueda promover la interdisciplinariedad?

PI3.3 ¿Qué función tiene la interdisciplinariedad dentro del paradigma del cuestionamiento del mundo?

Como se explica en el capítulo 4.2, la indagación en la segunda implementación del REI sobre COVID, con los ajustes realizados respecto a la primera, han facilitado la interacción entre las disciplinas, favoreciendo así al estudio de la cuestión generatriz. Paradójicamente, la separación entre disciplinas del REI2 ha promovido la dinámica de la indagación, promoviendo más intercambio entre disciplinas y mayor retroalimentación de las cuestiones. La interdisciplinariedad es aquí un medio para otro fin y facilita la complementariedad entre disciplinas. Los grupos monodisciplinares del REI2 y la dedicación de cada profesor especialista facilitaron el desarrollo del cuestionamiento y generación de respuestas y nuevas cuestiones.

Aunque la propuesta de los REI se ajusta bien al enfoque multidisciplinario bajo las condiciones pedagógicas e institucionales actuales, la transición al trabajo interdisciplinar es posible cuando se mejoran las dinámicas de la indagación.

Algunos dispositivos diseñados para esta mejora han sido, por un lado, la formación de grupos monodisciplinares y la distribución de tareas según disciplinas. Esto no solo ha facilitado la dinámica de la indagación para los estudiantes, sino que para los profesores también ha sido un elemento facilitador, ya que han podido aportar asesoramiento en su propia especialidad, sin tener las dificultades de gestión de la primera experimentación. El mapa CR también ha sido un dispositivo clave para facilitar la indagación, de manera que los estudiantes tenían una visión clara de cuál era su contribución al proceso de investigación colectivo y cómo sus respuestas podían conectar con otras disciplinas. Asimismo, este dispositivo ha repercutido en la coordinación de los propios profesores, que de la misma manera que los equipos monodisciplinares, podían dedicarse durante gran parte del REI a la investigación particular, teniendo que dedicar mucho menos tiempo a la gestión colectiva de todo el proceso.

La interdisciplinariedad y la transdisciplinariedad son una consecuencia directa del paradigma del cuestionamiento del mundo y de los procesos de indagación de cuestiones que, por naturaleza, no se inscriben en ninguna disciplina de forma exclusiva y permanente. Incluso cuando las cuestiones surgen dentro de un trabajo disciplinar, no hay garantías que el cambio de ámbito o de disciplina no arroje nueva luz sobre el proceso de indagación. Son las restricciones institucionales, académicas o escolares y pedagógicas, las que pueden limitar su emergencia permitiendo, en el mejor de los casos, que se acabe convergiendo en un trabajo multidisciplinar. Ahora bien, la apertura disciplinar en la indagación de cuestiones no nos debe hacer olvidar que, como en la dialéctica de los sistemas y los modelos, la problematización de cuestiones en determinados ámbitos praxeológicos puede ser necesario en muchos casos para que la elaboración efectiva de respuestas a las cuestiones indagadas.

Capítulo 6: Reflexiones finales y nuevas líneas de desarrollo

6.1. Cambios en la praxeología docente

En la TAD, las organizaciones matemáticas se modelizan mediante praxeologías, formadas por un bloque de *logos* y un bloque de *praxis.* Pero la TAD no se identifica únicamente como una teoría para estudiar las organizaciones matemáticas, sino que se utiliza para representar cualquier modelo de actividad humana. En este caso, también podemos estudiar la actividad docente y la actividad investigadora en términos de praxeologías.

Hemos iniciado esta memoria a partir de las cuestiones sobre su propia profesión que se formulaba una profesora de secundaria y que la condujeron a la realización de una investigación doctoral. ¿En qué aspectos las praxeologías de investigación desarrolladas han podido incidir en sus praxeologías docentes y viceversa? Desarrollaremos en lo que sigue esta reflexión antes de proponer nuevas líneas de trabajo para investigaciones futuras.

Mi punto de partida fue una cuestión generatriz difícil de formular con una única pregunta, pero que podríamos englobar como el "estudio de la ecología de los REI en secundaria": qué condiciones se necesitan para implementar y desarrollar un proceso de indagación en el aula de secundaria y qué restricciones lo dificultan. La importancia de esta cuestión es indiscutible: podríamos decir que es la pregunta más importante a la que he tenido que enfrentarme en mi carrera y sin duda, es de gran interés para la comunidad educativa e investigadora. Además, esta cuestión generatriz ha derivado en diversas cuestiones derivadas, que conformarían las preguntas de investigación, que se han presentado y abordado en este trabajo de tesis doctoral. Durante esta investigación, la comunidad de estudio ha estado formada por mí, la investigadora, en primera instancia, pero también por las directoras y los diferentes colaboradores que han ido apareciendo al abordar las diferentes cuestiones derivadas. En este caso, los roles tan marcados en las instituciones escolares quedan más diluidos, pero podríamos identificar a la investigadora con el rol de estudiante y a las directoras con el rol de profesor, aunque ha habido momentos en los que todas éramos estudiantes, ya que el objeto por estudiar era desconocido para toda la comunidad.

Hemos podido encontrar todas las dialécticas de la indagación. Los medias han sido diversos: publicaciones, libros, expertos, congresos, etc. Ha habido momentos de lectura y escritura al escribir publicaciones; se han expuesto respuestas provisionales en presentaciones o las cajas negras cada vez son más claras (¡aunque no del todo!).

Después del largo REI que supone la realización de una tesis doctoral, encontramos que, además de aportar elementos de respuesta a la importante cuestión inicial, la comunidad de estudio ha visto una evolución clara en su praxeología docente e investigadora. El bloque de *praxis* y el bloque de *logos* en este caso están muy conectados. Si los entendemos como el “saber hacer” en el aula y el “saber”, respectivamente, podemos ver que ambos bloques han sufrido una gran evolución.

Para empezar, el cambio más importante ha sido la toma de consciencia, y la toma de distancia necesaria para asimilar lo que implica moverse en un paradigma o en otro y qué instituciones o elementos limitan más la transición. Existen tensiones evidentes en esta transición, pero ¿quién tensa más? o ¿a quién le interesa más esta tensión? Por ejemplo, podríamos evaluar el grado de comodidad y el grado de economía didáctica que representa moverse en el paradigma de la visita de las obras. Por ejemplo, si pensamos en un sistema que tiene como objetivo preparar a los estudiantes para superar unas pruebas, en este paradigma solo requiere que el profesor sea conocedor de las obras a visitar. Por lo tanto, ha de conocer parcialmente el bloque de *praxis* de la praxeología docente: ha de saber los tipos de ejercicios y problemas que les pueden aparecer y cómo se resuelven. A veces, según el tipo de alumnado, en este paradigma también se pueden explicar algunas justificaciones a las técnicas o incluso alguna teoría, pero sin duda estas no suelen aparecer como elementos clave (no se preguntan en los exámenes) y son los primeros elementos en desaparecer si los alumnos presentan algún tipo de dificultades. La práctica docente se convierte, por lo tanto, en una serie de elementos praxeológicos (explicaciones y recetas) útiles para superar unos exámenes, pero que carecen de un bloque de *logos* consistente, inexistente para el estudiante ni importante para el profesor. Por ello, el esfuerzo que implica vivir en este paradigma es mínimo para profesores y, en realidad, también lo es para el estudiante cuando su objetivo es únicamente superar los exámenes.

Esto nos lleva a plantearnos reflexiones importantes en cuanto al sistema educativo: ¿hemos de preparar a los estudiantes para superar unas pruebas? Si es así, vivir en el paradigma de la visita de las obras es la opción más económica didácticamente: fácil de gestionar y sin gastar muchos recursos para todos los que intervienen. Ahora bien, en un sistema motivado por el cuestionamiento del mundo, la praxeología docente ha de ir mucho más allá. Entender la razón de ser del conocimiento a enseñar y saber renunciar o priorizar aquello que sea de real relevancia se convierte en una competencia docente básica.

Por otro lado, otro de los cambios en la praxeología ha sido reconocer todos aquellos conocimientos matemáticos que tienen mucha importancia en el proceso de aprendizaje y que muchas veces no se reconocen como saberes institucionales, como por ejemplo el uso y estatus de los modelos intermedios para modelizar situaciones matemáticas o las técnicas de recogida y gestión de datos. A esto hay que añadir que para el profesorado solo existen y son importantes los saberes reconocidos oficialmente como matemáticos por la institución sabia. Todo lo demás se identifica como “pérdida de tiempo”, dado que la *cronogénesis* solo se tiende a medir en base al número y valor de las obras visitadas. En mi práctica docente anterior, por ejemplo, hubiera saltado directamente a ofrecer a los estudiantes las técnicas de conteo de la combinatoria clásica para poder ir a parar a los problemas de contar rápidamente. Ahora, sin embargo, creo que dedicar esas sesiones a la construcción colectiva de modelos y técnicas asociadas propias y auténticas, así como modelos intermedios útiles, que provienen únicamente de su razonamiento, les ofrece una oportunidad de desarrollar habilidades de modelización que, sin duda, podrán volver a aplicar en otros contextos u otros REI.

Evidentemente, el bloque de *logos* en mi praxeología docente ha evolucionado. En la práctica esto se hace evidente en mi clases ya que soy más consciente de la importancia de este bloque también en las praxeologías de los estudiantes. Por ejemplo, ahora, intento que los estudiantes elaboren sus reflexiones y procedimientos, tanto por escrito como oralmente. Les insisto que la respuesta es importante, pero que también lo es la justificación de esa respuesta. En mi propia práctica, soy capaz de analizar y entender mejor las situaciones que ocurren en clase y, de esta manera, puedo analizar mejor la ecología de estas situaciones. Cuando antes simplemente provocaba en mí una señal de alerta que no sabía interpretar o interpretaba de manera borrosa, ahora puedo tomar distancia, identificar mejor el fenómeno subyacente y, cuando puedo, intervenir de manera consecuente.

Aun así, he de remarcar que, aunque mi equipamiento praxeológico docente haya evolucionado, tanto en su *logos* como en la *praxis*, las restricciones que limitan la profesión docente en los contextos escolares actuales y que nos anclan al paradigma de la visita de las obras siguen siendo muy persistentes.

6.2. Evanescencia de los modelos intermedios

Un importante fenómeno que se ha identificado en el desarrollo de esta investigación corresponde a la invisibilidad de algunos objetos matemáticos cuya función es crítica para elaborar respuestas a cuestiones problemáticas y, en particular, durante los procesos de modelización que permiten llevar a estas cuestiones, pero que las instituciones matemáticas y escolares aún no reconocen. En los REI hemos manifestado la necesidad de romper con la transparencia de estos modelos, mostrando su relevancia dentro del proceso general de modelización y, por lo tanto, de aprendizaje o construcción de las praxeologías. En el caso de la combinatoria, los candados han podido jugar este papel de modelo intermedio, de una forma análoga a lo que otros investigadores han propuesto como la elaboración de listas de códigos (Juberó, 2022), la búsqueda de relaciones y fórmulas aritméticas, entre otros.

En el caso del REI sobre COVID, nos ha quedado pendiente acabar de profundizar en esta caracterización. Al ser un REI no finalizado, las producciones de los estudiantes son muy variadas y abiertas y se hace más complicado analizar modelos matemáticos concretos sin obligar a los estudiantes a dirigir su investigación concretamente hacia ellos. En particular, queda pendiente hacer una caracterización epistemológica mejor fundamentada y más extensa alrededor del papel de las simulaciones en los procesos de modelización.

Finalmente, este fenómeno requiere mayor exploración para relacionarlo con otras situaciones similares que se dan en otros procesos de indagación y situaciones matemáticas. La didáctica de las matemáticas como disciplina tiene aquí un papel importante en cuanto a su participación y propulsión de los procesos de transposición didáctica para que dichos modelos adquieran un estatuto epistemológico y didáctico legítimo.

6.3. Formación del profesorado

Finalmente, esta investigación se propone como un punto crítico entre el antes y el después de las experimentaciones en los REI. Como hemos mencionado anteriormente, hasta el inicio de esta tesis el equipo de investigación sobre la TAD en España no había experimentado mucho las propuestas de los REI en las aulas de secundaria más allá de experimentaciones puntuales y muy controladas. Esta tesis ha brindado la oportunidad de ofrecer una experiencia sólida y larga en este tipo de experimentaciones, dando luz a una posible continuación en otras escuelas.

Con este objetivo nació el proyecto LABINQUIRY, como un proyecto de transferencia que se propone crear la infraestructura matemática y didáctica necesaria para dar soporte a los profesores que pretendan desarraigarse del paradigma de la visita de las obras y participar en el empuje hacia la transición hacia el nuevo paradigma.

El nuevo currículum, con la introducción de las *situaciones de aprendizaje*, plantea un escenario favorable en la línea de esta transición. Así pues, la aparición de este nuevo marco curricular requiere del desarrollo de nuevas infraestructuras didácticas. Luego, no se pretende indicar al profesorado cómo debe desarrollar su docencia, pues no es función de la didáctica hacerlo, pero sí colaborar entre profesores e investigadores para contribuir en la evolución de las infraestructuras matemáticas y didácticas que faciliten el diseño e implementación de estas propuestas basadas en la indagación.

Referencias

Artigue, M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherches en didactique des mathématiques, 9*(3), 281–308. https://revue-rdm.com/1988/ingenierie-didactique-2/

Artigue, M. (2014). Didactic engineering in mathematics education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 159–162). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_44

Artigue, M. y Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM–Mathematics Education, 45*, 797–810. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0506-6

Ausubel, D. P. (1968). *Educational psychology: A cognitive view*. Holt, Rinehart & Winston.

Arzarello, F., Robutti, O., Sabena, C., Cusi, A., Garuti, R., Malara, N., y Martignone, F. (2014). Meta-Didactical Transposition: A Theoretical Model for Teacher Education Programs. En A. Clark-Wilson, O. Robutti y N. Sinclair (Eds.), *The mathematics teacher in the digital era: an international perspective on technology focused professional development* (pp. 347–372). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4638-1_15

Barquero, B. (2009). *Ecología de la Modelización Matemática en la enseñanza universitaria de las Matemáticas* (Tesis doctoral). http://www.tdx.cat/handle/10803/3110

Barquero, B. (2024). Mathematical modelling as a research field: Transposition challenges and future directions. En P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi y E. Kónya (Eds.), *Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)* (pp. 6–30). Alfréd Rényi Institute of Mathematics and ERME. https://hal.science/hal-04427884

Barquero, B., y Bosch, M. (2015). Didactic engineering as a research methodology: from fundamental situations to study and research paths. En A. Watson y M. Ohtani (Eds.), *Task design in mathematics* education*. New ICMI Study Series* (pp. 249–272). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-09629-2_8

Barquero, B., Bosch, M., y Florensa, I. (2022). Contribuciones de los recorridos de estudio e investigación en la universidad: el caso de la formación del profesorado. *Avances de Investigación en Educación Matemática,* (21), 87–106. https://doi.org/10.35763/aiem21.4232

Barquero, B., Bosch, M., Florensa, I., y Ruiz-Munzón, N. (2021). Study and research paths in the frontier between paradigms. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 53*(5), 1213–1229. https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1988166

Barquero, B., Bosch, M., y Gascón, J. (2007). Using research and study courses for teaching mathematical modelling at university level. En D. Pitta-Pantazi y G. Philppou (Eds.), *European Research in Mathematics Education V, Proceedings of CERME5* (pp. 2050–2059). University of Cyprus.

Barquero, B., Bosch, M., y Gascón, J. (2011). Los recorridos de estudio e investigación y la modelización matemática en la enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias, 29*(3), 339–352. https://doi.org/10.5565/rev/ec/v29n3.519

Barquero, B., Bosch, M., y Gascón, J. (2013). The ecological dimension in the teaching of mathematics at university level. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 13*(3), 307–338. https://revue-rdm.com/2013/the-ecological-dimension-in-the/

Barquero, B., Bosch, M., y Vásquez, S. (2023). Teacher education in modelling: models, simulation and new epistemological needs. *The 21th International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications (ICTMA)*. OCAMI Reports. Vol. 6, Osaka Central Advanced Mathematical Institute, Osaka Metropolitan University. https://doi.org/10.24544/omu.20231219-001

Barquero, B., Bosch, M., y Wozniak, F. (2019). Modelling praxeologies in teacher education: The cake box. En U. T. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen, y M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the CERME 11* (pp. 1144–1152). Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME. https://hal.science/hal-02408705

Benito, R. N. (2019). *Construção de um percurso de estudo e pesquisa para formação de professores: o ensino de cônicas* (Tesis doctoral). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Blum, W. y Niss, M. A. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects? State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics, 22*(1), 37–68. https://doi.org/10.1007/bf00302716

Blum, W., y Leiß, D. (2007). How do students and teachers deal with mathematical modelling problems? The example Sugarloaf and the DISUM project. En C. Haines, P. L. Galbraith, W. Blum, y S. Khan (Eds.), *Mathematical modelling: Education, engineering and economics. ICTMA 12* (pp. 222–231). Horwood.

Bono, E. (1970). *El Pensamiento Lateral*. Vasa, 186.

Borromeo Ferri, R. (2007). Modeling from a cognitive perspective: Individual modeling routes of pupils. En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, y S. Khan (Eds.), *Mathematical modeling: Education, engineering and economics* (pp. 260–270). Horwood.

Bosch, M. (2018). Study and Research Paths: A model for inquiry. En B. Sirakov, P. N. De Souza, y M. Viana (Eds.), *International Congress of Mathematicians, 3* (pp. 4001–4022). World Scientific Publishing Co.

Bosch, M. (2019). Les modèles praxéologiques de référence: réflexions méthodologiques en TAD. En Pilet, J. y Vendeira C. (Eds.), *Actes du séminaire de didactique des mathématiques de 2019* (pp. 87–98). Université de Paris. https://hal.science/hal-03041140

Bosch, M., y Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(1), 77–124. https://revue-rdm.com/1999/la-sensibilite-de-l-activite/

Bosch, M., Chevallard, Y., García, F. y Monaghan, J. (Eds.) (2019). *Working with the Anthropological Theory of the Didactic in mathematics education: a comprehensive Casebook.* Routledge. https://doi.org/10.4324/9780429198168

Bosch, M., Compta, A., Gascón, J., Lamarca, J. M., y Urbaneja, P. (1997). *Matemáticas 4º ESO (Opción B)* (1.ª ed.). Almadraba.

Bosch, M., Fonseca, C., y Gascón, J. (2004). Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches en Didactique des Mathematiques, 24*(2–3), 205–250. https://revue-rdm.com/2004/incompletitud-de-las/

Bosch, M., y Gascón, J. (2006). Twenty-five years of the didactic transposition. *ICMI Bulletin, 58*, 51–63.

Bosch, M., y Gascón, J. (2009). Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria. En M. J. González, M. T. González, y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 89–113). SEIEM. https://documat.unirioja.es/descarga/articulo/3628647.pdf

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics: didactique des mathématiques 1970–1990*. Kluwer.

Brousseau, G., Brousseau, N., y Warfield, V. (2002). An experiment on the teaching of statistics and probability. *Journal of Mathematical Behavior, 20*, 363–441. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(02)00078-0

Cai, J., Cirillo, M., Pelesko, J.A., Ferri, R.B., Borba, M.D., Geiger, V., Stillman, G.A., English, L.D., Wake, G. y Kaiser, G. (2014). Mathematical modeling in school education: Mathematical, cognitive, curricular, instructional and teacher educational perspectives. En P. Liljedahl, S. Oesterle y C. Nicol (Eds.), *Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 36th Conference of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education* (pp. 145–172). Springer. http://www.pme38.com/wp-content/uploads/2014/05/RF-Cai-et-al.pdf

Chappaz, J., y Michon, F. (2003). Il était une fois... La boîte du pâtissier. *Grand N, 72*, 19–32. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/72n3_1555577318663-pdf

Chervel, A. (1991). *Historia de las disciplinas escolares: Reflexiones sobre un campo de investigación.*

Chevallard, Y. (1985/1991). *La transposition didactique: Du savoir savant au savoir enseigné* (2.ª ed.). La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège – Deuxième partie. Perspectives curriculaires: la notion de modélisation. *Petit x, 19*, 43–72. https://revistas.pucsp.br/emp/article/download/61803/42158/195470

Chevallard, Y. (1999a). La recherche en didactique et la formation des professeurs: Problématiques, concepts, problèmes. *Actes de la Xe École d'Été de Didactique des Mathématiques* (pp. 81–108). Houlgate.

Chevallard, Y. (1999b). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(2), 221–266. https://revue-rdm.com/1999/l-analyse-des-pratiques/

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude: 3. Ecologie & régulation. En J. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berhelot y R. Floris (Eds.), *Actes de la XIe École d'Été de Didactique des Mathématiques* (pp. 41–56). La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (2004). Vers une didactique de la codisciplinarité: Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire. *Journées de Didactique Comparée 2004*. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=45

Chevallard, Y. (2007). Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. En Ruiz-Higueras, L., Estepa, A., y García, F. J. (Eds.), *Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la teoría Antropológica de la Didáctica* (pp. 705–746). Servicio de publicaciones de la Universidad de Jaén.

Chevallard, Y. (2013). Enseñar matemáticas en la sociedad de mañana: Alegato a favor de un contraparadigma emergente. *Journal of Research in Mathematics Education, 2*(2), 161-182. https://doi.org/10.4471/redimat.2013.26

Chevallard, Y. (2015). Teaching mathematics in tomorrow's society: A case for an oncoming counter paradigm. En S. Cho (Ed.), *The proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-12688-3_13

Chevallard, Y. (2022). Toward a scientific understanding of a possibly upcoming civilizational revolution. En Y. Chevallard, B. Barquero, M. Bosch, I. Florensa, J. Gascón, P. Nicolás, y N. Ruiz-Munzón (Eds.), *Advances in the Anthropological Theory of the Didactic* (pp. 179–228). Birkhäuser. https://doi.org/10.1007/978-3-030-76791-4_16

Chevallard, Y. (2024). *L'humble séminaire 2023-2024* (manuscrito no publicado).

Departament d'Educació (2022a). Decret 175/2022, de 27 de setembre, d'ordenació dels ensenyaments de l'educació bàsica. *Diari official de la Generalitat de Catalunya, 8762*. https://dogc.gencat.cat/ca/document-del-dogc/?documentId=938401

Departament d'Educació (2022b). Decret 171/2022, de 20 de setembre, d'ordenació dels ensenyaments de batxillerat. *Diari official de la Generalitat de Catalunya, 8758*. https://dogc.gencat.cat/ca/document-del-dogc/?documentId=938056

English, L. D. (2009). Promoting interdisciplinarity through mathematical modelling. *ZDM–Mathematics Education, 41*, 161–181. https://doi.org/10.1007/s11858-008-0106-z

Freudenthal, H. (1968). Por qué enseñar matemáticas para que sean útiles. *Estudios Educativos en Matemáticas, 1*(1/2), 3–8.

Galbraith, P., y Stillman, G. (2006). A framework for identifying student blockages during transitions in the modelling process. *ZDM–Mathematics Education, 38*(2), 143–162. https://doi.org/10.1007/BF02655886

Gascón, J. (1993). Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico: Del patrón análisis-síntesis a la génesis del lenguaje algebraico. *Recherches en Didactique* *des Mathématiques, 13*(3), 295–332. https://revue-rdm.com/1993/desarrollo-del-conocimiento/

García, F. J. (2005). *La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales* (Tesis doctoral). Universidad de Jaén.

García, F. J., Barquero, B., Florensa, I., y Bosch, M. (2019). Diseño de tareas en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 15*, 75–94. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i15.267

García, F. J., Gascón, J., Higueras, L. R., y Bosch, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics. *ZDM–Mathematics Education, 38*(3), 226–246. https://doi.org/10.1007/BF02652807

Gardner, H. (1983). *Frames of Mind.* Basic Books.

Jefatura del Estado (2020). Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. *Boletín Oficial del Estado, 340*, 122868–122953. https://www.boe.es/eli/es/lo/2020/12/29/3

Johnson, D. W. y Johnson, R. T. (1989). *Cooperation and competition: Theory and research*. Central European.

Julia, D. (2000). Construcción de las disciplinas escolares en Europa. En J. Ruiz Berrio (Ed.), *La cultura escolar de Europa. Tendencias históricas emergentes* (pp. 45–78). Biblioteca Nueva.

Juberó, G. (2022). Análisis de la organización matemática escolar en torno a los problemas de contar. (Trabajo final de Grado). Universitat Autònoma de Barcelona.

Hansen, B., y Winsløw, C. (2010). Research and study course diagrams as an analytic tool: The case of bi-disciplinary projects combining mathematics and history. En M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage y M. Larguier (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 685–694). https://ddd.uab.cat/pub/llibres/2011/hdl_2072_200617/Documents10.pdf

Houston, K. (2009). *How to think Like a mathematician: A companion to undergraduate mathematics*. Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511808258

Jessen, B. (2016). *Study and research paths at upper secondary mathematics education – a praxeological and explorative study* (Tesis doctoral). University of Copenhagen. https://www.ind.ku.dk/begivenheder/2017/study-and-research-paths-at-upper-secondary-mathematics-education/BEJessen_PhD_Thesis.pdf

Kaiser, G., y Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modeling in mathematics education. *ZDM–Mathematics Education, 38*, 302–310. https://doi.org/10.1007/BF02652813

Lucas, C. (2015). *Una posible razón de ser del cálculo diferencial elemental en el ámbito de la modelización funcional* (Tesis doctoral). Universidad de Vigo.

Monreal, N., Ruiz-Munzón, N., y Barquero, B. (2018). Central dialectics for mathematical modelling in the experience of a study and research path at university level. En V.

Durand-Guerrier, R. Hochmuth, S. Goodchild, y N. M. Hogsta (Eds.), *Proceedings of the INDRUM 2018* (pp. 155–164). University of Agder and INDRUM. https://hal.science/hal-01849928
OECD. (2019). *PISA 2018 Assessment and Analytical Framework*. OECD Publishing. https://doi.org/10.1787/b25efab8-en
Parra, V., y Otero, M. R. (2018). Antecedentes de los Recorridos de Estudio e Investigación (REI): características y génesis. *Revista Electrónica De Investigación En Educación En Ciencias, 13*(2), 1–18. https://doi.org/10.54343/reiec.v13i2.239
Perkins, D. (1992). *La escuela inteligente*. The Free Press.
Perrenet, J., y Zwaneveld, B. (2012). The many faces of the mathematical modeling cycle. *Journal of Mathematical Modelling and Application, 1*(6), 3–21. https://research.tue.nl/files/3584468/397091290505369.pdf
Pollack, H. (1968). Sobre algunos de los problemas de la enseñanza de las aplicaciones de las matemáticas. *Estudios educativos en matemáticas, 1*(1/2), 24–30.
Pollak, H. (1979). The interaction between mathematics and other school subjects. En UNESCO (Eds.), *New Trends in Mathematics Teaching IV* (pp. 232–248). UNESCO. https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000124827
Rodríguez, E. (2005). *Metacognición, resolución de problemas y enseñanza de matemáticas: Una propuesta integradora desde el enfoque antropológico* (Tesis doctoral). Universidad Complutense de Madrid. https://hdl.handle.net/20.500.14352/56054
Rojas C. y Sierra T. (2021). Restricciones institucionales que dificultan la modelización espacio-geométrica en la enseñanza secundaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 20*, 41–63. https://doi.org/10.35763/aiem20.4031
Serrano, L., Bosch, M., y Gascón, J. (2013). Recorridos de estudio e investigación en la enseñanza universitaria de ciencias económicas y empresariales. *UNO: Revista de didáctica de las matemáticas, 62*, 39–48.
Stefanakis, E. H. (2002). *Multiple intelligences and portfolios: a window into the learner's mind*. Heinemann.
Swartz, R. J. (2013). *El aprendizaje basado en el pensamiento: cómo desarrollar en los alumnos las competencias del siglo XXI*. SM.
Niss, M., y Blum, W. (2020). *The learning and teaching of mathematical modelling*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315189314
Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2021a). How long would it take to open a padlock? A study and research path with grade 10 students. En B. Barquero, I. Florensa, P. Nicolás, y N. Ruiz-Munzón (Eds.), *Extended Abstracts Spring 2019: Advances in the Anthropological Theory of the Didactic*. Birkhäuser. https://doi.org/10.1007/978-3-030-76413-5_12
Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2021b). La gestión de un REI en secundaria: ¿Cuánto tiempo se tarda en abrir un candado? En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T.

González-Astudillo, y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 621–628). SEIEM. https://www.seiem.es/docs/actas/24/Comunicaciones/621.pdf

Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2021c). Teaching and learning combinatorics in secondary school: a modelling approach based on the Anthropological Theory of the Didactic. *Quadrante, 30*(2), 200–219. https://doi.org/10.48489/quadrante.23878

Vásquez, S., Barquero, B. y Romero, O. (2021d). Recorridos de estudio e investigación interdisciplinares: ¿Cómo llevar la problemática actual sobre la COVID-19 al aula? *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas, 93*, 23–29. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=8029529

Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2022). The role of models and modelling in the pandemics' evolution: transposing an 'study and research path' to secondary school. En J. Hodgen, E. Geraniou, G. Bolondi y F. Ferretti (Eds.), *Proceedings of the Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12)* (pp. 1177–1186). Free University of Bozen-Bolzano and ERME. https://hal.science/hal-03758988/document

Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2023a). A Study and Research Path about the Evolution of Pandemics at Secondary School: Conditions for an Interdisciplinary Approach. *Rivista Matematica della Università di Parma, 14*(2), 281–298. http://www.rivmat.unipr.it/vols/2023-14-2/04-barquero.html

Vásquez, S., Balat, F. y Orlandi, G. (2023b). Gestión y evaluación de un proyecto multidisciplinar sobre el estudio e impacto de la pandemia. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas, 99*, 23–32. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=8970749

Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2023c). Modelling COVID-19 data with simulations: A recursive process. En P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi y E. Kónya (Eds.). *Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)* (pp. 1363–1370). Alfréd Rényi Institute of Mathematics and ERME. https://hal.science/hal-04416538

Vásquez, S. Barquero, B. y Bosch, M. (aceptado) Interdisciplinariedad en educación secundaria: un recorrido de estudio e investigación. *Enseñanza de las Ciencias*. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.6029

Verbisck, J., Bittar, M., Bosch, M., Barquero, B., y Benito, R. (2022). Study and research paths for statistics teacher education at secondary school level: An exploratory study. En S. A. Peters, L. Zapata-Cardona, F. Bonafini, y A. Fan (Eds.), *Bridging the Gap: Empowering & Educating Today's Learners in Statistics. Proceedings of the 11th International Conference on Teaching Statistics (ICOTS11 2022)*. International Association for Statistical Education. https://doi.org/10.52041/iase.icots11.t2a2

Viñao, A. (2013). La historia de las disciplinas escolares. *Historia de la Educación, 25*, 243–269. https://revistas.usal.es/tres/index.php/0212-0267/article/view/11181

Winsløw, C., Matheron, Y., y Mercier, A. (2012). Study and research courses as an epistemological model for didactics. *Educational Studies in Mathematics, 83*(2), 267–284. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9453-3

Apéndices

Apéndice 1. Otros artículos

Apéndice 1.1. Diseño *a priori* y análisis *in vivo* de la primera experimentación del REI de los candados

Referencia

Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2021a). How long would it take to open a padlock? A study and research path with grade 10 students. En B. Barquero, I. Florensa, P. Nicolás, y N. Ruiz-Munzón (Eds.), Extended Abstracts Spring 2019: Advances in the Anthropological Theory of the Didactic (pp. 105–115). Birkhäuser. https://doi.org/10.1007/978-3-030-76413-5_12

How long would it take to open a padlock? A study and research path with grade 10 students

Abstract. We present the first implementation of a finalised study and research path (SRP) related to basic enumerative combinatorics. The SRP starts with a generating question about “How long would it take to open different kinds of padlocks?”. This paper describes the main steps of the SRP as implemented with secondary school students of grade 10. We want to stress some specific features of the SRP: the role of the empirical milieu and its enrichment through the collective construction of specific terminology; the students’ use of question-answer maps to organise and describe their inquiry; the experimental validation of the final answers; and the use of padlocks as models to solve combinatorics problems. We implemented the SRP in a secondary school with a long tradition in “active methodologies”. It is interesting to study these particular institutional conditions and their effects in the evolution of the SRP.

Introduction

This paper presents an empirical study on the implementation of a study and research path (SRP) in secondary education. This study belongs to a research line developed within the framework of the anthropological theory of the didactic (ATD) about the conditions and constraints affecting the paradigm shift described by Chevallard (2015) from the paradigm of the visiting works towards the paradigm of questioning the world. Considered as didactic proposals, SRPs try to get as close as possible to the paradigm of questioning the world by starting study processes from open generating questions. Our research team has been working in this research line for the past 15 years, with many experimentations at the university level, including teacher education (Bosch 2018; Florensa 2018). The implementation of SRPs in secondary education is much less studied, although there are specific investigations in Argentina, Denmark, France, and Japan (Jessen et al. 2020; Parra and Otero 2018). One possible reason would be the institutional constraints that weigh on this education level. Our study, which is part of an ongoing Ph.D. thesis, consists precisely in analysing the conditions for the implementation of SRPs in Spanish secondary education. More specifically, we are considering a school with a long innovative pedagogical tradition and an educational project based on project-based learning that, at first glance, seems supportive to the paradigm of questioning the world.

Research Questions and Methodology

The aim of the design and implementation of SRP is multiple. On the one hand, we want to analyse the conditions favouring SRPs implementation at the secondary school level. On the other hand, we want to observe if the expected secondary school institutional constraints seem weaker in this particular school and what facilitating pedagogical devices teachers and students use spontaneously.

Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2021a). How long would it take to open a padlock? A study and research path with grade 10 students. En B. Barquero, I. Florensa, P. Nicolás, y N. Ruiz-Munzón (Eds.), *Extended Abstracts Spring 2019: Advances in the Anthropological Theory of the Didactic* (pp. 105–115). Birkhäuser. https://doi.org/10.1007/978-3-030-76413-5_12

We decided to design a finalised SRP associated with a particular mathematics theme because of the regular curriculum. To better fit the academic calendar, we chose the theme of combinatorics and reviewed the research carried out in our country (Millán 2013; Navarro et al. 1996; Roa et al. 1997). We initially thought of a generating question about password breaking. This topic very much concerns today citizens' use of technological devices: "Why do they always ask us to use capital letters, numbers and special characters in passwords?". Instead of starting with this question, the teacher-researcher proposed a more concrete one about padlocks, to create a material milieu that could provide feedback, given the facility for students to hand the padlocks and test possible combinations. The question related to the password breaking appeared later at a second stage of the SRP. In the following sections, we first present the SRP institutional context and describe its implementation and analysis. The results obtained will help us answer the following research questions: (1) What aspects of the SRP have been implemented according to its a *priori* design and which ones have not? What are the consequences for a new design of this same SRP? (2) What didactic devices facilitated the SRP's development, and how did teachers and students manage them? (3) What conditions favoured the existence and development of these devices?

Institutional Context and Conditions for the Implementation

The SRP was carried out in April-May 2019 with 58 grade 10 students at *Col·legi Natzaret,* in Esplugues de Llobregat, a town near Barcelona. In this school, there is a team of three teachers for grade 10 mathematics, one being a researcher in didactics and the first author of the paper. The other two teachers were new in the profession and without any specific training in didactics. The SRP methodology was new for the students, as well as for the teachers. Usually, in this school, the kind of work done in the mathematics classroom is based on lists of problems from an online textbook related to each thematic unit. For each unit, students must solve lists of problems within three weeks. If needed, they can attend one or two lectures— called "master classes"—where a teacher presents the unit contents and answers the students' doubts. When students think they are ready, they choose a day to perform an exam, with the possibility of taking a second-chance exam some days later. Once all the students have taken the exam, the class carry out a one-week project related to the unit.

We decided to implement the SRP during the last weeks of the course, according to the syllabus. The students participating in this implementation are good at working autonomously and in teams because they have been doing it since grade 7.

Conditions and Methodology of the Implementation

We kept the regular organisation of the mathematics grade 10 course. There were 58 students, divided into three large groups and, within the groups, in teams of three or four persons. Teachers organised the teams beforehand following this criterion. Students were sorted by their marks in the last teaching unit and were grouped into four levels; teams contained at least one student from each level. Each of the three classroom groups was

Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2021a). How long would it take to open a padlock? A study and research path with grade 10 students. En B. Barquero, I. Florensa, P. Nicolás, y N. Ruiz-Munzón (Eds.), *Extended Abstracts Spring 2019: Advances in the Anthropological Theory of the Didactic* (pp. 105–115). Birkhäuser. https://doi.org/10.1007/978-3-030-76413-5_12

guided by one teacher and teachers rotated at every session. In this way, the three teachers were able to work with all the groups. Also, in most of the sessions, one of the groups had an external observer who was a researcher in didactics.

The proposed assessment had to match with the current pedagogical organisation of the course, with some small variations for the SRP. We decided to mark the students according to the teams' workbook and daily reports (12%), their elaboration of the question-answer map (12%), a video of the experimental validation (12%), a final oral exposition (12%), the teamwork self-evaluation (12%), and an exam (40%). Furthermore, teachers were allowed to give positive and negative points for interesting contributions or wrong attitudes, directly impacting the individual mark of each student. The learning material prepared for this SRP included: a guided workbook for the students to show their investigation about the padlocks; diary templates to fill by the groups; an assessment rubric; a summary about the different combinatory formulas; a list of problems related to the combinatorial unit; two versions of a written exam; and an online questionnaire.

In Vivo Analysis of the SRP

Presentation of the Generating Question and First Answers of the Students

In the first session of the SRP, the teachers presented five padlocks, each with different features and functions. The generative question Q_0 that served as a guide for the whole project was: *How long would it take to open each padlock?.* In the workbook, students could find an image of the padlocks and an explanation. Some of them were also physically available in the classroom (Fig. 1).

The first task proposed to the group was to choose a padlock to start with (Q_1). To do this, students had a template where they had to select a padlock, begin working and explain their choice. They also had to make a first classification of the five locks and explain their criteria.

Most of the students thought they should start with padlock number 2 (the one that allows pressing different buttons at the same time). The main reason they gave was that it would depend on the number of combinations. Some groups did not know how to explain their choice, but they had some hint that it had to do with the padlock's difficulty. Teachers had previously thought that the students would choose other padlocks that seamed easier to compute the number of combinations. Curiously, padlock number 2 is one of the most challenging cases.

A critical limitation showed up in the first sessions. Teachers observed that students were using different expressions, such as "combinations", "options", "cases", "numbers", among others. They lack a common vocabulary to describe their work and to be able to understand other groups. In the second session, the team of teachers agreed to introduce the following terminology: "combination" is the password that can be entered in the padlock; "cell" is each element of the combination; "cell elements" are the values that can be inserted in a cell. The teachers gave examples to fix this common terminology, for

Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2021a). How long would it take to open a padlock? A study and research path with grade 10 students. En B. Barquero, I. Florensa, P. Nicolás, y N. Ruiz-Munzón (Eds.), *Extended Abstracts Spring 2019: Advances in the Anthropological Theory of the Didactic* (pp. 105–115). Birkhäuser. https://doi.org/10.1007/978-3-030-76413-5_12

instance: “for padlock 1, we can set different statements to exemplify these definitions: A possible combination is 1234. Padlock 2 has four cells. All boxes in padlock 2 have 10 cell elements.” This clarification helped the communication but was not immediately adopted. Teachers have to continuously remind students to use the specific vocabulary whenever they wanted to participate in a classroom discussion.

#1 #2 #3 #4 #5

Fig. 1 Presentation of the first padlocks

Padlock Combinations

During the following sessions, the students tried to solve the initial question for each of the padlocks. The most common resource for validation was the class discussion: students defended their answers until all groups agreed. The teacher’s role was to guide the process, reminding the established vocabulary and clarifying, questioning or dismissing some of the students’ contributions. Students quickly concluded that the time needed to open each padlock depends on the padlock and the person trying to open it. Therefore, the different group decided to assign an additional value for the time it took to change passwords. Even so, they had to have the same number of possible combinations for each padlock. While they were inquiring about the different padlocks, teachers led the discussions to share results and try to identify mistakes in the students’ arguments. A padlock was considered resolved when all the students and the teachers were satisfied with the final reasoning. It was more important for all the teams to come to a consensual answer than to have the teacher’s validation. Once a padlock was resolved, all groups expressed the reasoning on the padlock’s worksheet.

Padlocks with New Restrictions

Once the first five padlocks were resolved, teachers proposed to repeat the experience including some restrictions to the padlocks: for example, cell numbers cannot be repeated in a combination; the letters of all cells are the same; etc. This second part was much more agile, as most new padlocks reproduce the first ones’ conditions already solved.

Classification of Padlocks and the Elaboration of the Question-Answer Map

Once all padlocks were studied, teachers proposed to sort them into groups, depending on the method used to find the total number of combinations. There were three general groups. *Group 1* with the padlocks in which the elements’ order was essential and elements can be repeated [1, 3, 4, 5]. *Group 2* with the padlocks in which the elements’ order was essential, but elements cannot be repeated [1, 3, 4, 5 with restrictions]. *Group*

Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2021a). How long would it take to open a padlock? A study and research path with grade 10 students. En B. Barquero, I. Florensa, P. Nicolás, y N. Ruiz-Munzón (Eds.), *Extended Abstracts Spring 2019: Advances in the Anthropological Theory of the Didactic* (pp. 105–115). Birkhäuser. https://doi.org/10.1007/978-3-030-76413-5_12

3 with the padlocks in which the elements' order did not matter [2 and 2 with restrictions]. Padlock 4 was left without a general answer because we could not find a pattern for the letters that appeared.

Once the classification was established, students were asked to synthesise their work in a question-answer map, a diagram indicating the questions raised during the research process and the partial and final answers provided. Students were used to making mind-maps as a way to organise the contents of subject units; teachers introduce this tool by stressing the new some specificities and elements to include. In particular, the teacher stressed some common traits for the elaboration of the questions and answer maps may. In particular, it was asked that this map might:

- Highlight the questions addresses instead of defining mathematical contents.
- Aesthetically differentiate the questions, strategies, and answers.
- Relate the questions and answers one to each other.
- Show a hierarchy among the different questions by using subscripts: $Q_1 \rightarrow E_1 \rightarrow R_1$.
- Questions must be understandable without a context.
- Use of the agreed vocabulary (cells, cell elements, combination, order, repetition, etc.).
- Unanswered questions and/or incorrect answers may also be included (this should be indicated).
- Show the chronology of questions addressed and the relationship with the padlock's inquiry.
- Include all the padlock cases worked in class must be reflected.

Three sessions were devoted to this activity. In this time, teachers and researchers asked students to make many changes in their maps, and the suggestions were not sometimes well welcomed by the students, who believed their maps did comply with the instructions given initially.

Institutionalisation Moment and the Evaluation

A masterclass followed, where teachers reviewed the padlocks classification and reminded how to find the number of combinations in each case. For the first time, solutions were officially validated by teachers. When finished, the teachers proposed a new question Q_2 to the class about "How can we find a general technique for solving any padlock?". And the following derived questions and to discuss the following sub-questions:

$Q_{2.1}$: Two combinations with the same elements but arranged in different ways, count as two combinations or as one? That is, does the order of the elements influence?
$Q_{2.2}$: Can two or more elements be repeated in a combination?
$Q_{2.3}$: How many cells does each combination have?
$Q_{2.4}$: How many elements are available in each cell?

Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2021a). How long would it take to open a padlock? A study and research path with grade 10 students. En B. Barquero, I. Florensa, P. Nicolás, y N. Ruiz-Munzón (Eds.), *Extended Abstracts Spring 2019: Advances in the Anthropological Theory of the Didactic* (pp. 105–115). Birkhäuser. https://doi.org/10.1007/978-3-030-76413-5_12

Variable *m* was proposed to name the answer the total number of combinations and variable *n* the number of elements in each cell. Then, the teachers introduced some formulas and related them to the students' proposed methods to find the number of combinations. Also, the teachers presented a list of typical combinatorial cases taken from the textbook. They then recommended linking every case to a specific padlock before trying to solve it. In the following session, students brought the list of exercises partially resolved individually. That same day, the solutions to all the problems were uploaded to the course' online platform. Finally, students took an exam containing ten questions about different situations (ice creams of different flavours, shirts of different colours, etc.) with the same structure: "In how many different ways can we…?" The next day the exam was corrected and, a week later, a second-chance exam was proposed, with the same structure.

Experimental Validation and Elaboration of the Final Answer

In this last step, students were asked to validate their answers using experimental testing. Each group was assigned one specific padlock (there were repetitions as there were only four padlocks available). Students had to check that the time they predicted matched with the experimental time and that eventually, the padlock opened. Students were asked to elaborate a video in which they had to show the strategy they used to introduce all the combinations in the padlock, a time-lapse showing all the combinations, and the comparison between the time it took and the one they had predicted.

During this experimental work, many new questions raised. In particular, students found that one padlock could be opened with three different combinations. Then they search for information on the web about this type of padlocks and the possibility of restarting it with new passwords. A second generating question was also proposed at this moment about the time needed to break a WiFi password of a fixed number of elements (to be determined in advance). Finally, students made an oral presentation in front of the three teachers and the rest of the class to show their question-answer map, their video and a proposal of WiFi password structure. They were told to find a structure that represented all the different situations studied in the previous weeks. In this exposition, the rest of the groups had to evaluate their classmates using the same rubrics the teachers used.

Some Feedback from the Students

As usual in this school, at the end of the topic students filled a questionnaire with items to be rated on a 1-4 scale and some open comments. Students valued the organisation, the duration, and the variety of activities positively. Above all, they appreciated the session with the master class and agreed that they would surely not have been able to solve the list of problems or the exam without it. They also affirmed that the timing was adjusted to the class hours, and they appreciated the flexibility and changes generated by their own needs. In general, they would be willing to exchange the classes' mechanics for this kind of projects. Regarding the more negative comments, the students considered that the question-and-answer map was redundant, even unnecessary. As they were asked to fill in the work diary daily, they considered the issue of the map to be a reiteration of the

Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2021a). How long would it take to open a padlock? A study and research path with grade 10 students. En B. Barquero, I. Florensa, P. Nicolás, y N. Ruiz-Munzón (Eds.), *Extended Abstracts Spring 2019: Advances in the Anthropological Theory of the Didactic* (pp. 105–115). Birkhäuser. https://doi.org/10.1007/978-3-030-76413-5_12

previous work. Even assuming that the general feeling was positive, some students, although a minority (12%), stated that anything that departs from class explanations and the practice of book exercises is unnecessary and preferred the traditional methodology. Also, a group of students indicated that the padlock questions resolution was not useful for the exam, yet they needed the master class.

As for the teachers, all three ended up with a positive feeling at the end of the SRP. They recognised that the manipulative work with the locks increased the master class fluidity. They were surprised by some students' intuitive reasoning (sometimes considered weak students), who had no previous combinatorics notions. Some of them arrived at correct answers and reasonings, even without having the formulas. Besides, the teachers rated it as a challenge for not being able to validate (accept or reject) the students' responses. Asking questions to get the students seeing weaknesses in the demonstrations by themselves was difficult. Besides, teachers recognised they struggled to write the daily classroom activity. The shared diary tool, where teachers had to write down what happened every session, sometimes remained empty and teachers did not find time to fill it in until some days later. Thus, as the classroom activity was very dynamic and required almost daily planning changes, finding the spaces to coordinate these changes was difficult. These tasks occurred between corridors and without the ideal reflection time. Teachers had the impression of a lack of control over the work of each group. To this was added the fact of rotating groups among the teachers. It happened that, in some sessions, students raised questions or remarks regarding their work with another teacher.

Conclusions and Perspective

We go back to the main research questions, we have introduced before, by considering the different stages of implementing the SRP about padlocks. About the a priori design, we can conclude that the generating question about the padlocks and the use of the physical padlocks in the classroom, as an initial *milieu*, had a positive effect. Usually, the field of combinatorics appears in a forced way at school, with unrealistic types of problems far from the students' concerns. This SRP introduced these tools in a functional way, for addressing the problem of the padlocks' security. A critical issue in this respect is having enough padlocks for the experimental work. This was not the case here and, as there were three groups, sometimes one of them could not have all the locks or had to wait long for them to be available. Further experiments will require more padlocks available.

However, the way the generating question was posed, and the padlocks supplied to the students, did not favour the students' search for information about the padlock's security, for instance, on the Internet. This is a very evident inquiry gesture that did not appear in the SRP. A problematic issue that was not foreseen—and is also a typical research issue—was the need to establish a common vocabulary to talk about the padlocks' combinations. This terminology problem frequently appears in the development of SRPs as far as the activities carried out do not fill into the traditional mathematical activities. The didactic transposition work provides a vocabulary to elaborate on problems statements

Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2021a). How long would it take to open a padlock? A study and research path with grade 10 students. En B. Barquero, I. Florensa, P. Nicolás, y N. Ruiz-Munzón (Eds.), *Extended Abstracts Spring 2019: Advances in the Anthropological Theory of the Didactic* (pp. 105–115). Birkhäuser. https://doi.org/10.1007/978-3-030-76413-5_12

and resolution techniques when dealing with traditional mathematics organisations, but not for the type of (non-prepared) works mobilised during SRPs.

As for the use of the question-and-answer map, we can conclude that it did not have the expected results. The students did not find it useful because teachers proposed to use it without the students' needing it. It would be preferable that teachers use it from the beginning, to share the students' contributions during debate moments, introduce the vocabulary and institutionalise the work done.

The experimental validation was also a profitable activity for the students: it helped complete counting combinations and analyse the most efficient strategies. We suggest for future implementations of the SRP to give more space to the strategy of counting the number of combinations one by one, for instance, by writing them all on a piece of paper. The strategy appeared at the end of the SRP (when preparing the videos) and was much richer than expected. Students who used it had to discover different patterns to write all the combinations without forgetting anyone, an interesting preliminary combinatorial technique.

Students found the *masterclass* very useful. It seems a pertinent way to institutionalise the knowledge built in previous sessions. It also provided students with tools to corroborate the results obtained and to count faster. Moreover, it expanded the situations that are similar to those with padlocks. Performing standard exercises and a standardised examination gave both students and teachers a sense of peace of mind regarding the standard curriculum.

About recording tools, we find that students' diaries favoured their work and their organisation, potentiating teamwork. The student who often encompasses all the reasonings and leads the research could not keep the logbook up to date at the same time. This forces the rest of the group to distribute this task and be aware of the inquiry progress. The teachers' journal helped ensure a common consensus. Even so, team meetings and talks between aisles were required to reach agreements. However, this tool meant extra work for the teachers, who sometimes could not have it in time. Lack of collaborative working hours and coordination is a significant constraint for the group of teachers.

Finally, it is necessary to mention the possibility that, in future implementations, we could change the generating question to an opener or less "finalised" one (Chevallard2009). We might consider changing Q_0 to, for instance: "Which of these padlocks do you think it is more secure?". However, this might open the possibility for students to move their research towards more technological lines of inquiry and, consequently, overpass (o be forced to use) the combinatorial tools to be studied.

The last research question we formulated is about the favourable conditions for the SRP that emerged from the school pedagogical tradition. We can mention the students' spontaneity to work cooperatively and adopt new roles during the teamwork. Another element is their ease to analyse and refer to the learning process critically and constructively. The school's infrastructure is also to be mentioned. Students were familiar

Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2021a). How long would it take to open a padlock? A study and research path with grade 10 students. En B. Barquero, I. Florensa, P. Nicolás, y N. Ruiz-Munzón (Eds.), *Extended Abstracts Spring 2019: Advances in the Anthropological Theory of the Didactic* (pp. 105–115). Birkhäuser. https://doi.org/10.1007/978-3-030-76413-5_12

with the use of digital tools to report their activities, interact with the teachers through the online campus, and create their own digital materials.

Finally, we want to mention the importance for teachers and researchers to work more collaboratively on the SRP design. In this first experience, researchers proposed many decisions about the SRP development that teachers assumed too easily. We have already mentioned the use of questions-answers maps to present the work done, that students saw as a pure pedagogical imposition. There might be other aspects, maybe less visible, that correspond to this same situation. Time empirical validation using video recordings, assessment rubrics, planning the work to be done in each session, were aspects that had been decided beforehand by the researchers. Our future research needs to put special attention to the evolution of the didactic contract, which determines the teachers' and students' sharing of responsibilities and requires specific means to establish it. This evolution appears as a crucial aspect of the move to the new paradigm of questioning the world.

Acknowledgements This research has been possible thanks to "Col·legi Natzaret" and to the Spanish ministry projects RTI2018-101153-B-C21 and RTI2018-101153-A-C22 (MCIU/AEI/FEDER, UE).

References

Bosch, M. (2018). Study and Research Paths: a model for inquiry. In B. Sirakov, P. N. de Souza, & M. Viana (Eds.), *International Congress of Mathematicians* (Vol. 3, pp. 4001–4022). Rio de Janeiro: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.

Chevallard, Y. (2015). Teaching mathematics in tomorrow's society: a case for an oncoming counter paradigm. In S. Cho (Ed.), *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 173–187). Seoul: Springer International Publishing.

Chevallard, Y. (2009). La notion de PER : problèmes et avancées. *Plenary presented in the IUFM in Toulouse (April 28th, 2009)*. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/La_notion_de_PER___problemes_et_avancees.pdf.

Florensa, I. (2018). *Contributions of the epistemological and didactic analysis: question-answer maps in engineering and teacher education.* PhD thesis. Universitat Ramon Llull.

Jessen, B., Otaki, K., Miyakawa, T., Hamanaka, H., Mozoguchi, T., Shinno, M., & Winsløw, C. (2020). The ecology of study and research paths in upper secondary school. In M. Bosch, Y. Chevallard, F. J. García, & J. Monaghan (Eds.), *Working with the Anthropological Theory of the Didactic in Mathematics Education: A Comprehensive Casebook* (pp. 118-138). Routledge.

Millán, E. F. (2013). Razonamiento Combinatorio y el currículo español. Probabilidad Condicionada: *Revista de didáctica de la Estadística, 1,* 539–554.

Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2021a). How long would it take to open a padlock? A study and research path with grade 10 students. En B. Barquero, I. Florensa, P. Nicolás, y N. Ruiz-Munzón (Eds.), *Extended Abstracts Spring 2019: Advances in the Anthropological Theory of the Didactic* (pp. 105–115). Birkhäuser. https://doi.org/10.1007/978-3-030-76413-5_12

Navarro, V., Batanero, C., & Godino, J. D. (1996). Razonamiento combinatorio en alumnos de Secundaria. *Educación matemática, 8*(1), 26–39.

Parra, V., & Otero, M. R. (2018). Antecedentes de los Recorridos de Estudio e Investigación (REI): características y génesis. Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias, 13, 1–18.

Roa, R., Batanero, C., Godino, J. D., & Cañizares, M. J. (1997). Estrategias de resolución de problemas combinatorios por estudiantes con preparación matemática avanzada. *Epsilon, 36,* 433–446.

Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2021a). How long would it take to open a padlock? A study and research path with grade 10 students. En B. Barquero, I. Florensa, P. Nicolás, y N. Ruiz-Munzón (Eds.), *Extended Abstracts Spring 2019: Advances in the Anthropological Theory of the Didactic* (pp. 105–115). Birkhäuser. https://doi.org/10.1007/978-3-030-76413-5_12

Apéndice 1.2. Primer ciclo de experimentación del REI de los candados

Referencia

Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2021b). La gestión de un REI en secundaria: ¿Cuánto tiempo se tarda en abrir un candado? En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo, y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 621–628). SEIEM. https://www.seiem.es/docs/actas/24/Comunicaciones/621.pdf

La gestión de un REI en secundaria: ¿Cuánto tiempo se tarda en abrir un candado?

Managing an SRP at Secondary school: How long would it take to open a padlock?

Resumen. Presentamos una propuesta didáctica basada en la implementación de un recorrido de estudio e investigación (REI) para la educación secundaria obligatoria en el área de la combinatoria. Los resultados corresponden al análisis a posteriori de una primera experimentación del REI con alumnos de 4º de la ESO en un centro educativo con larga experiencia en la innovación educativa. El análisis de esta primera experimentación nos sirve de base para la descripción de algunas condiciones institucionales que han favorecido la gestión del REI y la detección de restricciones institucionales que han afectado su evolución prevista inicialmente. Intentamos en particular identificar qué aspectos de la tradición educativa del centro podrían explicar estas condiciones y restricciones, para poder avanzar en el estudio de la ecología de los REI en la enseñanza secundaria. Palabras clave: recorridos de estudio e investigación, secundaria, combinatoria, ecología didáctica

Abstract. We present a didactic proposal based on the implementation of a study and research path (SRP) for compulsory secondary education in the area of combinatorics. The results correspond to the a posteriori analysis of a first experiment of the SRP with grade 10 students in a school with a long experience in educational innovation. The analysis of this first experimentation serves as a basis for the description of some institutional conditions that have favoured the management of the SRP and the detection of institutional restrictions that have affected its initially foreseen evolution. In particular, we try to identify what aspects of the educational tradition of the centre could explain these conditions and restrictions, in order to progress in the study of the ecology of SRPs in secondary education.

Keywords: study and research paths, secondary, combinatorics, didactic ecology

Introducción

Presentamos aquí un estudio empírico sobre la implementación de los recorridos de estudio e investigación (REI) en la enseñanza secundaria española. Este estudio se inscribe en la línea de investigación desarrollada en el marco de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) sobre lo que (Chevallard, 2013) designa como el cambio de paradigma pedagógico que se está iniciando en nuestros sistemas educativos, desde el "monumentalismo" o paradigma de la visita de las obras hacia el paradigma del cuestionamiento del mundo. Los REI pueden considerarse como propuestas didácticas que intentan aproximarse lo más posible al paradigma del cuestionamiento del mundo, caracterizado por considerar que el objetivo del proceso de enseñanza y aprendizaje no serían conocimientos – u "obras" – sino cuestiones abiertas a las que hay que aportar una respuesta colectiva, evaluarla y difundirla. Esta línea de investigación se está

Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2021b). La gestión de un REI en secundaria: ¿Cuánto tiempo se tarda en abrir un candado? En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo, y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 621–628). SEIEM. https://www.seiem.es/docs/actas/24/Comunicaciones/621.pdf

desarrollando desde hace años especialmente en el ámbito de la enseñanza universitaria, incluyendo la formación del profesorado (Florensa, 2018). Aunque existen investigaciones puntuales en Argentina, Dinamarca, Francia y Japón (Jessen et al., 2020; Parra y Otero, 2018), la implementación de REI en la enseñanza secundaria está mucho menos estudiada. Un posible motivo sería las restricciones institucionales – especialmente curriculares – que pesan en este nivel de enseñanza. Nuestro estudio, que forma parte de una tesis doctoral en curso, consiste precisamente en analizar las condiciones para la implementación de REI en la enseñanza secundaria española y experimentar algunas propuestas, en el caso concreto de un centro educativo marcado por una larga tradición pedagógica innovadora, con un proyecto educativo basado en la investigación y el aprendizaje por proyectos, muy alejado en principio del paradigma “monumentalista” imperante (Chevallard, 2013). Nuestra estrategia consiste en dotarnos de un medio empírico que parece inicialmente facilitador del tipo de propuestas didácticas que representan los REI. De este modo, se neutralizarían algunas de las restricciones institucionales que pesan sobre este tipo de dispositivo didáctico, al tiempo que nos permitirá identificar nuevos dispositivos o estrategias pedagógicas facilitadoras.

Por motivos de calendario académico, se decidió diseñar un REI sobre combinatoria, un área que no ha sido demasiado estudiada en didáctica de las matemáticas, aunque sí existen algunos trabajos importantes en nuestro país (Millán, 2013; Navarro, Batanero y Godino, 1996; Roa, Batanero, Godino y Cañizares, 1997). Se pensó inicialmente en una cuestión generatriz sobre contraseñas y seguridad (“¿Por qué nos piden siempre que utilicemos mayúsculas, números y caracteres especiales?”), pero al final se decidió proponer una cuestión sobre un ámbito más sencillo (los candados) para ampliar en una segunda etapa al caso de las contraseñas.

En las próximas secciones, presentamos el contexto institucional en el que se ha llevado a cabo la implementación del REI, para describir posteriormente su desarrollo y análisis. Los resultados obtenidos nos servirán para responder a las siguientes cuestiones de investigación: (1) Qué aspectos del REI se han implementado según el diseño previsto y cuáles no? ¿Qué consecuencias se desprenden de cara a un nuevo diseño del mismo REI? (2) ¿Cuáles han sido los principales dispositivos didácticos que han favorecido el desarrollo del REI y cómo los han gestionado los profesores y alumnos? (3) ¿Qué condiciones han favorecido la existencia y desarrollo de estos dispositivos?

Contexto institucional y condiciones para la implementación

La primera experimentación del REI sobre candados se llevó a cabo en un colegio concertado de Esplugues (Barcelona), el Col·legi Natzaret, entre abril y mayo de 2019, en la asignatura de matemáticas. Participaron un total de 58 alumnos de 4º de la ESO y los tres profesores de matemáticas de este curso, una de ellos investigadora en didáctica de la matemática, primera autora de este trabajo y coordinadora de la experimentación, y los otros dos profesores con poca experiencia docente. Los 58 estudiantes se organizaron en tres grupos-clase y se dividieron en equipos de trabajo de 3 a 4 personas. Los equipos se formaron de forma heterogénea según los criterios acordados por los

Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2021b). La gestión de un REI en secundaria: ¿Cuánto tiempo se tarda en abrir un candado? En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo, y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 621–628). SEIEM. https://www.seiem.es/docs/actas/24/Comunicaciones/621.pdf

profesores: los estudiantes se ordenaron según sus calificaciones en la última unidad y fueron clasificados en 4 niveles. Cada equipo de trabajo se formó por estudiantes de cada uno de los niveles. En la escuela, los tres grupos-clase estaban en salas separadas y los profesores iban rotando de grupo en cada sesión. Los profesores compartían un diario de seguimiento de la experimentación que actualizaban al finalizar cada sesión. De esta manera, los tres profesores iban siguiendo la evolución de todos los grupos y, al menos una vez por semana, guiaban presencialmente el trabajo de uno de ellos. Además, en prácticamente todas las sesiones, uno o dos de los grupos tuvo un observador investigador externo que completó el diario de seguimiento de la experimentación.

La nueva metodología introducida con el REI era nueva tanto para estudiantes como para el profesorado. Aunque cabe destacar que la escuela tiene instaurados en las etapas de educación primaria y secundaria, ciertos dispositivos didácticos que favorecieron notablemente su experimentación. Los estudiantes están habituados a trabajar en equipos, a organizar los grupos clase de distintas formas, y a la rotación de docentes o la participación de varios de ellos en sesiones de clase. En el caso particular de matemáticas en 4º de la ESO, la asignatura de matemáticas se estructura en distintas unidades. En general, cada unidad tiene un listado de problemas y ejercicios que los estudiantes van realizando. Voluntariamente, los estudiantes pueden atender a las denominadas “masterclass”, unas clases magistrales donde los docentes presentan los contenidos específicos de la unidad y resuelven dudas. Cuando los estudiantes se sienten capacitados, realizan un examen el día de su elección y tienen la oportunidad de realizar un examen de recuperación una semana después. Cuando todos los alumnos han realizado el examen, toda la clase se organiza en grupos cooperativos, para desarrollar, durante una semana, un proyecto relacionado con la unidad.

En este contexto, se decidió implementar el REI en las últimas tres semanas del curso ya que, respetando la programación realizada al inicio del curso, durante ese tiempo se debía trabajar la unidad de combinatoria. El sistema de evaluación planteado debía encajar con la organización pedagógica de la asignatura, por eso, mantuvimos el sistema de evaluación previsto en la programación, aunque se introdujeron algunas variaciones para dar cabida a los dispositivos y instrumentos específicos de seguimiento y evaluación que se usaron durante la implementación del REI. Más concretamente, para realizar el seguimiento del trabajo de los estudiantes se prepararon y se fueron recogiendo distintos materiales que fueron específicamente diseñados para este REI. Más concretamente, se solicitó a los estudiantes que fueran entregando: los dossiers de trabajo (en formato papel) que los grupos rellenaban al finalizar cada sesión; el diario de la experimentación (también en formato papel) que los grupos actualizaban al finalizar cada sesión de experimentación; un mapa de cuestiones y respuestas que se solicitó a cada grupo como análisis del proceso desarrollado; informe final grupal y video con la validación experimental; una exposición oral y su autoevaluación del trabajo cooperativo y, finalmente, un examen individual sobre el trabajo desarrollada en las sesiones de experimentación del REI. La evaluación de todas estas entregas tenía el mismo peso en la nota final, excepto el examen individual que contaba un 40%. Los profesores disponían de rúbricas de evaluación para poder valorar las entregas y, durante las sesiones de

Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2021b). La gestión de un REI en secundaria: ¿Cuánto tiempo se tarda en abrir un candado? En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo, y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 621–628). SEIEM. https://www.seiem.es/docs/actas/24/Comunicaciones/621.pdf

clase, podían añadir puntos positivos y negativos por buenas o malas contribuciones o comportamientos, que tenían un impacto directo en el resultado final de cada estudiante.

Análisis a posteriori del REI

Devolución de la cuestión generatriz del REI

En la primera sesión del REI, los profesores introdujeron el contexto de los candados con el que se trabajaría durante toda la unidad y se explicó la forma de trabajo y calendario aproximado. Empezaron por presentar cinco tipos diferentes de candados, cada uno con sus instrucciones particulares. En el dossier de trabajo los estudiantes tenían las imágenes de dichos candados, cada uno con sus instrucciones particulares. Algunos de ellos, además, se tenían físicamente en el aula para que los estudiantes pudieran manipularlos. Los profesores presentaron la cuestión generatriz Q0 que guiaría todo el proceso sobre ¿cuánto tardaríamos en abrir cada uno de estos candados? y que rápidamente suscitó que los estudiantes empezaran a interesarse y a dar respuestas muy espontáneas.

La primera cuestión que los profesores propusieron a los estudiantes fue decidir ¿por cuál de los candados proponemos empezar? (Q0.1). La mayoría de los estudiantes respondieron que deberían empezar con el segundo candado. En este, se permite apretar diferentes números sin tener en cuenta el orden. La principal razón que dieron fue que creían que era el que tenía menos combinaciones posibles. Aunque la mayoría de los grupos no supieron dar una explicación bien fundamentada sobre su elección, sí introdujeron la idea de que el número de combinaciones tendría que ver con la dificultad del candado para abrirse. Esto supuso una sorpresa para los profesores, quienes esperaban que los estudiantes escogieran el candado que fuera más fácil de calcular su número de combinaciones y precisamente, el segundo candado era el que tiene asociado un cálculo más complejo, pero, aun así, menor número de combinaciones. Antes las dudas abiertas, se propuso a los estudiantes proponer una clasificación de los cinco candados y explicar el criterio que utilizaban para clasificarlos. Antes de terminar la primera sesión, se dio a los estudiantes un primer dossier a rellenar para cada candado donde se les pedía dar su respuesta a Q0 en cada caso particular y la justificación de sus respuestas. Durante las siguientes sesiones, los estudiantes fueron elaborando respuesta a Q0 para cada candado y, al inicio, esperaban por la validación de los profesores, aunque esta nunca llegó. Las herramientas más comunes para la validación fueron las discusiones en clase: los grupos de estudiantes exponían y defendían sus respuestas hasta que se llegaba a un acuerdo con el grupo clase. El rol del profesor consistía en guiar el proceso, resaltar cuestiones que iban surgiendo, establecer un vocabulario específico y clarificar y cuestionar las contribuciones de los alumnos. Así se consiguió que fuera el estudio de Q0 y la construcción conjunta y consensuada de respuestas parciales tomaran la legitimidad necesaria. Cuando el grupo clase acordaba que el candado había quedado resuelto, cada equipo explicaba sus justificaciones en el dossier de trabajo.

Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2021b). La gestión de un REI en secundaria: ¿Cuánto tiempo se tarda en abrir un candado? En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo, y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 621–628). SEIEM. https://www.seiem.es/docs/actas/24/Comunicaciones/621.pdf

Necesidad de establecer un *logos* sobre la actividad matemática desarrollada

Desde las primeras sesiones apareció una limitación importante. Los profesores y las observadoras notaron que los estudiantes empezaban a utilizar expresiones diversas para comunicar sus hipótesis, respuestas y razonamientos. Se evidenció la necesidad de establecer una terminología común y específica para referirse a la actividad matemática que estaban desarrollando – un *logos* en la terminología de la TAD (Chevallard, 2013) –, y que fuera compartida por estudiantes y profesorado para poder avanzar en las puestas en común.

Por este motivo, a partir de la segunda sesión, se decidió que los profesores institucionalizaran un vocabulario especifico. Así, se hablaba de combinación, para referirse a la contraseña que se puede introducir en un candado; de casilla o celda, para nombrar a cada elemento de una combinación concreta; y, de los elementos de la casilla, al grupo de valores que pueden introducirse en una casilla o celda. Aunque esta terminología no fue asimilada inmediatamente, permitió mejorar las condiciones bajo las cuales se compartían, comparaban y consensuaban las respuestas y justificaciones de los grupos de trabajo y entre grupos clase. Para facilitar su adopción, en las puestas en común, los profesores se refirieron constantemente a este vocabulario consensuado para poder avanzar y describir los resultados obtenidos. También sirvió para facilitar la institucionalización de los resultados parciales que se obtenían y las nuevas cuestiones que surgían.

Evolución del medio didáctico en la gestión del REI

A lo largo de la experimentación del REI, hubo etapas y decisiones importantes sobre qué media (entendidos como medios de información) poner a disposición de los estudiantes, qué conocimientos matemáticos y extra-matemáticas presentar, cómo compartir las cuestiones y respuestas que aparecían, etc. Todo ello entra en juego en el enriquecimiento progresivo del medio didáctico necesario para la gestión del REI. Comentamos a continuación las principales etapas y decisiones que se tomaron. Como hemos comentado sobre la devolución de la cuestión generatriz, queremos destacar que el uso físico-manipulativo de los candados en el aula tuvo un impacto muy positivo en los estudiantes. Poder manipular los candados aportó a los estudiantes un medio experimental excelente, tanto en las primeras sesiones para poder caracterizar cada uno de los candados, como en las últimas con la validación experimental de sus respuestas finales (ver en la siguiente sección). En consecuencia, fue una desventaja el no tener suficientes candados para todos los grupos. Como los tres grupos-clase estaban separados, a veces algún grupo no podía disponer de alguna tipología de candados para poder manipularlos.

Un aspecto que no se integró en el estudio fue la búsqueda de respuestas previamente disponible sobre los candados, sus estrategias de apertura y de robo. Desconocemos si los estudiantes llevaron a cabo esta indagación por su cuenta, pero en todo caso no tuvo su espacio en el aula. En cierta manera, el diseño del REI se adaptó a una cierta tradición escolar en la que es el profesor el que "controla" el medio inicial de los alumnos.

Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2021b). La gestión de un REI en secundaria: ¿Cuánto tiempo se tarda en abrir un candado? En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo, y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 621–628). SEIEM. https://www.seiem.es/docs/actas/24/Comunicaciones/621.pdf

Otra decisión importante fue que, una vez se dio respuesta para los cinco primeros candados, se propuso repetir la tarea con estos mismos cinco candados, pero ahora con restricciones añadidas. Por ejemplo, en el primer candado quedaba prohibido que la combinación estuviera formada por números repetidos. Esta segunda etapa se desarrolló de forma mucho más ágil, ya que dicha variación en los candados introducía pequeñas variaciones respecto a su resolución, y permitió a los estudiantes y al profesorado institucionalizar algunas técnicas de resolución y su justificación, así como el vocabulario usado, es decir, institucionalizar parte del *logos* justificativo de la práctica desarrollada.

Una vez terminadas estas dos primeras fases del REI, se planteó realizar una clase magistral a cada grupo. Cada uno de los profesores se encargó de llevar la clase magistral a cada uno de los grupos. Para empezar la sesión, se repasó la clasificación que habían hecho los estudiantes de los candados. Se recordó las explicaciones que habían dado en general para encontrar el número de combinaciones en cada uno de los casos. Esta fue la primera ocasión en la que los profesores validaban oficialmente las soluciones. Una vez hecho esto, se les propuso a los estudiantes la cuestión: ¿Cómo podemos encontrar una técnica general para encontrar el número de combinaciones de cada candado?

Para poder resolver esta cuestión, se platearon a los estudiantes las siguientes cuestiones derivadas que tendrían respuestas diferentes según el candado que se escogiera: ¿Dos combinaciones con los mismos elementos ordenados de maneras diferentes, cuentan como dos combinaciones o como una? ¿Pueden repetirse dos o más elementos en cada combinación? ¿Cuántas casillas tiene cada combinación? ¿Cuántos elementos están disponibles en cada una de las casillas? Estas cuestiones permitieron a los profesores, en esta clase magistral, formalizar el lenguaje para hablar de combinatoria y los métodos y fórmulas para poder calcular rápidamente el número de combinaciones. Al acabar la sesión, los profesores propusieron a los estudiantes que revisaran sus respuestas anteriores para asociar sus respuestas a la clasificación y métodos ahora formalizados. Se decidió también entregar un listado de problemas típicos de combinatoria en diferentes contextos. Se pidió a los estudiantes que, al empezar cada problema de combinatoria, relacionaran sus características y resolución con los tipos de candados estudiados. Finalmente, los estudiantes se evaluaron individualmente mediante un examen tipo test. Este examen contenía 10 preguntas con diferentes situaciones de combinatoria (sabores de helados, camisetas de colores, etc.) pero con la misma estructura: “¿De cuántas maneras diferentes podemos contar…?” Al día siguiente se les entregó el examen corregido y una semana después los estudiantes que querían podían presentarse a un segundo intento de este examen, con la misma estructura.

Los mapas de cuestiones y respuestas para describir el proceso seguido

En las últimas sesiones de experimentación del REI, y una vez los estudiantes habían elaborado una respuesta final a Q0, los profesores plantearon una nueva tarea a los estudiantes. Se les pidió elaborar un mapa de cuestiones y respuestas para analizar y describir el proceso de estudio que habían seguido. En esta escuela, los estudiantes

Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2021b). La gestión de un REI en secundaria: ¿Cuánto tiempo se tarda en abrir un candado? En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo, y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 621–628). SEIEM. https://www.seiem.es/docs/actas/24/Comunicaciones/621.pdf

están habituados a trabajar con mapas mentales para organizar los contenidos de la unidad, tarea que habitualmente se plantea en el cierre de la unidad. En esta ocasión, se les solicitó no solamente describir los conceptos que habían intervenido, si no poner especial atención a la dinámica entre las cuestiones, las respuestas, y las estrategias que habían ido usando durante en su "recorrido" particular.

Se dedicaron dos sesiones para que los grupos pudieran avanzar en la elaboración del mapa de cuestiones y respuestas, pero se tuvo que alargar un día la fecha de entrega, dada la dificultad que suponía esta nueva tarea. Los mapas que entregaron inicialmente los estudiantes no eran del todo satisfactorios, en la opinión de los profesores e investigadores. Se pidió a los estudiantes que, para la entrega final, los completaran en caso de que lo consideraran necesario.

Validación experimental de la respuesta final y su evaluación

En la etapa final de REI, se propuso a los estudiantes trabajar en una validación experimental de las respuestas que habían elaborado. A cada grupo se le asignó un candado diferente. Al haber pocos candados disponibles, hubo grupos que trabajaron con el mismo caso. Cada grupo tenía que comprobar si el tiempo que había predicho se aproximaba correctamente al tiempo real que tardaban en abrirlo. Para cerrar esta última etapa, se les pidió a los grupos que elaboraran un vídeo donde cada grupo explicara cómo han descubierto todas las posibles combinaciones del candado, el tiempo que habían pronosticado que era necesario para abrir el candado, el video en time-lapse mostrando cuánto tardaban en realidad en abrir, y la comparación entre el tiempo pronosticado y el tiempo real. Durante este proceso aparecieron nuevas preguntas. Por ejemplo, los estudiantes encontraron que uno de los candados admitía hasta tres combinaciones diferentes que lo abrían. Ofrecieron una variedad de hipótesis sobre el funcionamiento interno del candado y buscaron información para describir por qué debía ocurrir esto. Además, los profesores plantearon una nueva cuestión derivada, ¿cuánto tiempo se tardaría en descifrar una contraseña de WiFi con un número fijo de elementos? para hacerles pensar en cómo el estudio con los candados ayudaría a estudiar esta nueva cuestión. Aún así, esta nueva cuestión es mucho más amplia que la que ha guiado este REI sobre candados, pero se quería probar la reacción de los estudiantes para estudiar su posible potencialidad para futuras experimentaciones.

Finalmente, los estudiantes tuvieron que hacer una presentación oral delante de los tres profesores y del resto de los grupos de las tres clases. En esta presentación debían presentar su mapa de cuestiones y respuestas, el vídeo con la validación experimental de sus respuestas y una primera propuesta sobre cómo abordarían la cuestión de la contraseña de la WiFi. En estas exposiciones, todos los equipos tenían que evaluar a sus compañeros utilizando la misma rúbrica que los profesores.

Primeros resultados: reacciones de estudiantes y profesores

Al finalizar la unidad, se pidió a los estudiantes que rellenaran un cuestionario de evaluación del REI, valorando del 1 al 4 su grado de acuerdo con las afirmaciones.

Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2021b). La gestión de un REI en secundaria: ¿Cuánto tiempo se tarda en abrir un candado? En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo, y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 621–628). SEIEM. https://www.seiem.es/docs/actas/24/Comunicaciones/621.pdf

Además, tenían la opción de expresar sus opiniones sobre diferentes aspectos del proceso. Los estudiantes valoraron positivamente tanto la organización, la duración como la variedad de actividades. Sobretodo agradecieron la sesión con la clase magistral y coincidieron en pensar que sin ella seguramente no hubieran sido capaces de resolver el listado de problemas ni el examen. Afirman también que el tiempo de trabajo demandado por el profesorado se ajustaba a las horas de clase y agradecen la flexibilidad y los cambios generados por sus propias necesidades. Por lo general, estarían dispuestos a cambiar la mecánica de las clases por proyectos útiles para la comprensión de las matemáticas. En cuanto a las valoraciones más negativas, los alumnos consideraron que el mapa de cuestiones fue una actividad demasiado forzada, incluso innecesaria. Como se les pedía rellenar diariamente el diario de trabajo, consideraron que el mapa de cuestiones era una reiteración de ese trabajo ya hecho. Aun sintiendo que la sensación general era positiva, algunos estudiantes, aunque en minoría, siguen opinando que todo aquello que se aleje de las explicaciones de clase y la práctica de ejercicios de libro es innecesario y prefieren la metodología tradicional. Además, un grupo considerable de estudiantes opina que la resolución de las preguntas relativas a los candados no ha sido útil para el examen, pero si la clase magistral.

En cuanto a los profesores, los tres acabaron con una sensación positiva al finalizar el REI. Manifestaron que, gracias al trabajo manipulativo con los candados, la sesión de clase magistral fue mucho más fluida que si se hubiera empezado por ésta. Se sorprendieron con algunos razonamientos intuitivos de algunos alumnos (a veces los considerados peores estudiantes), que a priori no tenían nociones previas de combinatoria, cómo algunos llegaban a respuestas y razonamientos correctos, aun sin tener las fórmulas. Además, los profesores calificaron como reto el no poder validar (dar por buena o rechazar) las respuestas de los alumnos. El tener que conseguir, mediante preguntas, que fueran los propios compañeros los que vieran flaquezas en las demostraciones, supuso momentos difíciles de gestionar por los profesores en el aula.

Por otro lado, reconocieron que fue un esfuerzo añadido el tener que documentar la actividad diaria del aula. La herramienta del diario compartido, donde los profesores tenían que apuntar lo ocurrido en el aula, a veces quedaba vacía y los profesores no encontraban momento para rellenarla hasta pasados unos días. Así pues, como la actividad del aula era muy dinámica y requería que se hicieran cambios en la planificación casi diariamente, encontrar los espacios para poder coordinar estos cambios fue prácticamente imposible y estas tareas sucedían entre pasillos y sin el tiempo de reflexión ideal. Esto hacía que, además, los profesores con menos experiencia tuvieran la impresión de descontrol o falta de seguridad. A esto se le sumaba el hecho de ir rotando de grupo entre el profesorado. Ocurría en alguna sesión, con algún grupo, que se generaban dudas por parte de los alumnos referentes a otras sesiones, con otro docente. Este tipo de situaciones, reconocen los profesores, eran difíciles de gestionar, ya que muchas veces se vivían con incomodidad profesional, al tener que poner en cuestión el buen hacer de un compañero.

Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2021b). La gestión de un REI en secundaria: ¿Cuánto tiempo se tarda en abrir un candado? En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo, y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 621–628). SEIEM. https://www.seiem.es/docs/actas/24/Comunicaciones/621.pdf

Conclusiones y discusión sobre el rediseño del REI

Intentaremos dar respuesta a los objetivos iniciales de esta primera investigación. En relación con los “imprevistos” o deficiencias del diseño inicial del REI, queremos mencionar dos puntos que consideramos importantes. El primero tiene que ver con el medio inicial que se proporcionó a los estudiantes. Como hemos mencionado antes, no dispusimos de suficientes candados materiales para proporcionar a los alumnos, un detalle que puede parecer menor que afectó sin duda el desarrollo de las primeras sesiones. Tampoco se contempló la posibilidad inicial de buscar en la web posible información disponible sobre la cuestión que se planteaba: un gesto de investigador muy evidente pero que no surge de forma espontánea en la cultura escolar tradicional. Finalmente, el aspecto más determinante a nuestro entender fue la necesidad terminológica que se evidenció en los primeros días del REI: la falta de vocabulario común y específico para una situación nueva y compleja para los estudiantes es una complicación que en futuras experimentaciones requerirá de una respuesta más temprana. Es, además, una limitación que ya ha surgido en investigaciones previas sobre los REI pero que todavía no se ha abordado de forma sistemática (Bosch, 2018; Florensa, 2018).

En relación con los dispositivos didácticos que instrumentan el REI, distinguiremos también varios aspectos. En cuanto a los mapas de preguntas y respuestas, podemos concluir que no se consiguieron los resultados esperados. Los estudiantes no le encontraron utilidad ya que apareció de una manera demasiado artificial y muy tardía en el proceso de investigación. Para futuras experimentaciones será el profesor el que disponga de esta herramienta y, con las contribuciones de los alumnos, irá construyéndolo durante los momentos de debate.

La validación experimental fue una actividad muy provechosa para los alumnos: tuvieron la oportunidad de completar el cómputo del número de combinaciones y analizar las estrategias más eficientes. Para futuras experimentaciones se valorará el poder alternar momentos de contaje con momentos de validación experimental y quizás, introducir herramientas informáticas para realizar el contaje más rápidamente. En cuanto a la clase magistral, fue muy útil también para los estudiantes. Basándose en la premisa que los estudiantes ya habían encontrado el número total de combinaciones para cada candado y teniendo claro que no habían necesitado de ninguna herramienta externa, la institucionalización del contaje de casos apareció como una manera de corroborar que los resultados obtenidos eran válidos y que existen alternativas más rápidas, pero no más eficaces, para realizar este contaje. El haber hecho también práctica de la técnica con problemas estándar y una evaluación típica ofreció a los estudiantes y a los profesores la sensación de tranquilidad en cuanto a los aprendizajes y contenidos adquiridos. Aunque no se siguió la estructura tradicional de las clases, los estudiantes eran capaces de saber cómo utilizar las técnicas de la combinatoria para múltiples situaciones.

Sobre las herramientas de observación y seguimiento, se observa que los diarios de los alumnos fueron útiles para la distribución y organización del trabajo cooperativo. Normalmente los estudiantes que suelen llevar el mando del equipo y de dirigir los

Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2021b). La gestión de un REI en secundaria: ¿Cuánto tiempo se tarda en abrir un candado? En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo, y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 621–628). SEIEM. https://www.seiem.es/docs/actas/24/Comunicaciones/621.pdf

razonamientos era incapaces de rellenar el diario. Esto forzaba a que el resto del grupo se tuviera que repartir las tareas diarias y que, por lo tanto, todos los miembros tuvieran que ser conocedores del proceso del equipo. El diario de los profesores también fue útil para asegurar un consenso común. Aun así, también fueron necesarias reuniones de departamento organizadas o espontáneas para llegar a decisiones comunes. Como suele ser habitual, la falta de disposición de horas de coordinación es una gran restricción para el grupo de profesores.

Finalmente, es necesario mencionar la posibilidad de que en futuras experimentaciones del REI se pueda cambiar la cuestión generatriz por una más abierta y menos "finalizada". Se considerará la opción de plantear: ¿Cuál de los siguientes candados es más seguro? En el caso que se decida utilizar ésta, se introducirán restricciones añadidas, ya que no es del todo natural que esta cuestión se relacione con la condición institucional más importante que supone el tener que tratar el tema de combinatoria. Quizás, si la cuestión generatriz se cambia, los estudiantes podrán verse motivados a unas líneas de investigación más tecnológicas, lo que puede provocar que los profesores tengan que dirigir más la investigación y los estudiantes pierdan protagonismo en la investigación. En relación con la última cuestión de investigación, las condiciones favorables al REI proporcionadas por la tradición pedagógica del centro, es importante resaltar la naturalidad con la que los estudiantes trabajaban de manera cooperativa, adoptaban nuevos roles, y la facilidad con la que eran capaces de analizar y referenciarse al proceso de aprendizaje, de manera crítica y constructiva. Además, la infraestructura del centro, con disposición de herramientas digitales, facilitó a los estudiantes distintas maneras de interactuar a lo largo del proceso y evidenció su habilidad para crear materiales digitales.

Agradecimientos

Esta investigación se ha financiado en el marco de los proyectos I+D+i: RTI2018-101153-A-C22 (MCIU/AEI/FEDER, UE) y RTI2018-101153-B-C21 (MCIU/AEI/FEDER, UE)

Referencias

Bosch, M. (2018). Study and Research Paths: a model for inquiry. In B. Sirakov, P. N. de Souza y M. Viana (Eds.), *International congress of Mathematicians* (Vol. 3, pp. 4001–4022). Rio de Janeiro: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd https://eta.impa.br/dl/121.pdf

Chevallard, Y. (2013). Enseñar Matemáticas en la Sociedad de Mañana: Alegato a Favor de un Contraparadigma Emergente. REDIMAT - *Journal of Research in Mathematics Education, 2*(2), 161-182. http: //dx.doi.org/1 0.4471 /redimat.201 3.26

Florensa, I. (2018). *Contributions of the epistemological and didactic analysis: question-answer maps in engineering and teacher education*. Tesis doctoral. Universitat Ramon Llull.

Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2021b). La gestión de un REI en secundaria: ¿Cuánto tiempo se tarda en abrir un candado? En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo, y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 621–628). SEIEM. https://www.seiem.es/docs/actas/24/Comunicaciones/621.pdf

Jessen, B., Otaki, K., Miyakawa, T., Hamanaka, H., Mozoguchi, T., Shinno, M. y Winsløw, C. (2020). The ecology of study and research paths in upper secondary school. En M. Bosch, Y. Chevallard, F. J. García y J. Monaghan (Eds*.), Working with the Anthropological Theory of the Didactic in Mathematics Education: A Comprehensive Casebook* (pp. 118-138). Routledge.

Millán, E. F. (2913). Razonamiento Combinatorio y el currículo español. *Probabilidad Condicionada: Revista de didáctica de la Estadística*, 1, 539-554.

Navarro, V., Batanero, C. y Godino, J. D. (1996). Razonamiento combinatorio en alumnos de Secundaria. *Educación matemática, 8*(1), 26-39.

Roa, R., Batanero, C., Godino, J. D. y Cañizares, M. J. (1997). Estrategias de resolución de problemas combinatorios por estudiantes con preparación matemática avanzada. *Epsilon, 36*, 433-446.

Parra, V. y Otero, M. R. (2018). Antecedentes de los Recorridos de Estudio e Investigación (REI): características y génesis. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias, 13*, 1–18.

Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2021b). La gestión de un REI en secundaria: ¿Cuánto tiempo se tarda en abrir un candado? En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo, y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 621–628). SEIEM. https://www.seiem.es/docs/actas/24/Comunicaciones/621.pdf

Apéndice 1.3. Análisis preliminar del REI sobre el COVID

Referencia

Vásquez, S., Barquero, B. y Romero, O. (2021d). Recorridos de estudio e investigación interdisciplinares: ¿Cómo llevar la problemática actual sobre la COVID-19 al aula? *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, 93, 23–29. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=8029529

Recorridos de estudio e investigación interdisciplinares: ¿Cómo llevar la problemática actual sobre la COVID-19 al aula?

Resumen. En este trabajo partimos de la problemática sobre cómo llevar prácticas interdisciplinares STEM a las aulas. La temática escogida corresponde al análisis de cómo las diferentes disciplinas han interactuado y han difundido sus avances a la sociedad en el proceso de modelización de la evolución de la COVID-19. Presentamos brevemente dos casos de estudio: la implementación de un recorrido de estudio e investigación experimentado en secundaria y algunas reflexiones sobre la formación del profesorado para avanzar en las herramientas necesarias para llevar al aula estas prácticas interdisciplinares.

Palabras clave: Datos, modelos, pandemia, interdisciplinariedad, formación profesorado.

Introducción

En la actualidad, parece no haber duda sobre la necesidad de introducir al alumnado en una actividad científica que haga interactuar disciplinas e integrar conocimientos disciplinares de manera útil y funcional, es decir, que permitan actuar, estudiar e indagar en problemáticas sociales y escolares relevantes.

Más allá de los avances en educación, la comunidad científica nos muestra la necesidad del trabajo interdisciplinar para abordar conjuntamente retos y problemáticas ante las cuales la sociedad necesita respuestas. Durante los últimos meses, hemos formado parte de un sistema muy complejo frente al cual esta comunidad científica ha ido desplegando muchos esfuerzos, así como proporcionando y difundiendo numerosos avances. De este proceso, podemos ver la evolución de las preguntas estudiadas por la comunidad científica, así como las herramientas usadas, y cómo el diálogo entre disciplinas no solo del ámbito STEM (matemática, física, ciencias de computación, biología, epidemiologia, medicina, sociología, etc.) se ha vuelto indispensable.

En este trabajo nos planteamos una cuestión amplia sobre cómo transponer estas prácticas interdisciplinares a la realidad educativa que, posteriormente, concretaremos en el diseño y experimentación de una propuesta didáctica sobre la evolución de la pandemia: ¿Cómo podemos llevar a las aulas de secundaria un trabajo interdisciplinar de estudio de cuestiones abiertas a este debate disciplinar y que tengan una relevancia social? ¿Qué papel juegan las distintas disciplinas y cómo podemos analizar esta interdisciplinariedad?

En el marco de la teoría antropológica de lo didáctico, para superar algunos de los fenómenos didácticos dominantes ligados a un paradigma “monumentalista” y “unidisciplinario”, centrado en la exposición de obras disciplinares, se propone indagar en la transición hacia un paradigma pedagógico, el *paradigma de cuestionamiento de*

Vásquez, S., Barquero, B. y Romero, O. (2021d). Recorridos de estudio e investigación interdisciplinares: ¿Cómo llevar la problemática actual sobre la COVID-19 al aula? *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, 93, 23–29. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=8029529

mundo (Chevallard, 2013) el cual quiere situar en el corazón de la actividad el estudio de cuestiones a partir de las cuales las herramientas y conocimientos disciplinares sean construidos y considerados en la medida que ayuden a aportar respuestas a las cuestiones estudiadas. Para estudiar el diseño e implementación de actividades dentro de este paradigma, se proponen los llamados *recorridos de estudio e investigación* (REI) (Serrano, Bosch y Gascón, 2013; Barquero, Bosch y Gascón, 2011).

Presentamos a continuación algunos resultados sobre la implementación de un REI que parte de una cuestión generatriz sobre la evolución de la COVID-19. A partir de esta primera experiencia, comentamos algunos cambios que se han decidido incorporar en implementaciones posteriores, debido en parte a los avances sobre la pandemia e incorporando la componente interdisciplinaria de forma más explícita. Seguidamente presentamos el diseño de una propuesta de formación de profesorado, inspirada en el REI anterior, que tiene por objetivo dar respuesta a distintas necesidades detectadas en el diseño y análisis de propuestas de enseñanza interdisciplinar.

Resultados principales de la implementación del REI sobre la evolución de la COVID

La primera experimentación del REI sobre la evolución de la pandemia se llevó a cabo en un colegio concertado de Esplugues (Barcelona), el Col·legi Natzaret, entre abril y junio de 2020, con la población en confinamiento domiciliario ante la primera ola de la pandemia. Su experimentación se realizó totalmente en línea, con una dedicación de 4 horas a la semana, en el marco de la asignatura de matemáticas. Veintitrés estudiantes de 1º de bachillerato (1617 años) participaron en esta experimentación. La profesora de la asignatura, y primera autora de este trabajo, guió la experimentación bajo las condiciones de docencia que se estaban estableciendo.

La cuestión generatriz que se propuso a los estudiantes, central durante toda la experimentación, fue la siguiente: *¿El número de personas afectadas por la COVID-19 está evolucionando de manera similar en diferentes países?*

A nivel organizativo, los estudiantes trabajaban en grupos de tres y debían ir entregando las tareas, gestionadas a través de *Google Classroom*, al final de cada una de las tres fases en las que se organizó la experimentación de este REI. Estas tareas consistían en la entrega de un vídeo expositivo con el progreso y resultados parciales de su investigación, la hoja de cálculo que hubieran utilizado y una publicación en una página web colaborativa (*Google Sites*) que cada grupo tenía compartida, todo ello comentado posteriormente por la profesora. Las explicaciones de cada tarea se enviaban en vídeo y se organizaba una videollamada con toda la clase para comentar posibles dudas. Durante las sesiones de trabajo, había disponible una videollamada abierta, donde el alumnado, en caso de dificultades, se conectaba para ser asesorado por la profesora. Periódicamente se organizaban videollamadas con todo el grupo para hacer puestas en común del progreso de los equipos y, derivado de estas reuniones, se fue trazando un

Vásquez, S., Barquero, B. y Romero, O. (2021d). Recorridos de estudio e investigación interdisciplinares: ¿Cómo llevar la problemática actual sobre la COVID-19 al aula? *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, 93, 23–29. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=8029529

mapa de cuestiones y respuestas[8] para describir y organizar las *trayectorias de estudio e investigación* seguidas por los distintos grupos.

En la primera fase los diferentes equipos tenían como objetivo común hacer una primera búsqueda de información en relación con la cuestión generatriz y de respuestas externas sobre la temática. Encontraron así noticias en medios de comunicación donde se hacían comparativas entre países afirmando que *la crisis no afecta de la misma manera a los diferentes países.*

El objetivo de la segunda fase era trabajar con la base de datos que ofrecía el Ministerio sobre el número de casos positivos de COVID por fecha y comunidad autónoma. Primero se recogieron preguntas que los equipos consideraban interesantes de estudiar a partir del análisis de estos datos y, en este momento, apareció una de las principales dificultades de la experimentación ante el hecho que no parecía haber una manera estándar ni un buen protocolo de recogida de datos. Una vez se debatió cuáles de estas preguntas eran "investigables" a partir de los datos que tenían, la profesora realizó una sesión demostrativa de las funcionalidades de las hojas de cálculo. Así pues, cada equipo eligió y se encargó del estudio de una de estas preguntas que empezaron a abordar trabajando con las herramientas de las hojas de cálculo y actualizando día a día los datos disponibles sobre la pandemia. La mayoría de las preguntas trataban de hacer comparativas entre comunidades autónomas: *¿Cuál es el número máximo de muertos en las distintas comunidades autónomas? ¿cómo comparar el número de infectados y recuperados? ¿qué nos dicen los gráficos sobre la evolución de contagios en las distintas comunidades?* Los equipos elaboraron un vídeo explicativo del proceso seguido y de las respuestas elaboradas, gran parte de ellas basadas en la comparación e interpretación gráfica de los datos.

La mayoría de los equipos hicieron sus comparativas sin considerar el número total de habitantes de la comunidad autónoma y añadieron preguntas sobre el tipo de crecimiento, en particular el crecimiento exponencial, que seguían las curvas. Por ello, la profesora realizó una nueva sesión explicativa sobre cómo representar el número total de casos relativos a la población y cómo ajustar y simular la función exponencial. A continuación, los grupos plantearon muchas nuevas cuestiones sobre el uso de estas funciones para proporcionar un buen ajuste y realizar previsiones futuras. De nuevo, se distribuyeron las cuestiones entre los distintos grupos, por ejemplo: *¿Coinciden los datos reales con las previsiones? ¿Qué significado tienen cada uno de los parámetros del modelo de ajuste? ¿Qué diferencias (relativas) ha habido entre comunidades autónomas en los últimos días en relación con el número de recuperados?*

En la tercera y última fase, cada equipo eligió un nuevo país del cual se encargarían, buscaron datos y los compararon con los datos de la evolución de la pandemia en

[8] Se puede consulta el mapa de cuestiones y respuestas derivado de la primera experimentación del REI sobre la evolución de la COVID-19 en el enlace siguiente: https://miro.com/app/board/o9J_ksHxUXw=/

Vásquez, S., Barquero, B. y Romero, O. (2021d). Recorridos de estudio e investigación interdisciplinares: ¿Cómo llevar la problemática actual sobre la COVID-19 al aula? *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, 93, 23–29. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=8029529

España. Los equipos volvieron a estudiar numérica y gráficamente esta comparación y el ajuste de distintos modelos para comparar la incidencia en ambos países (imagen 1), dando así la investigación por acabada.

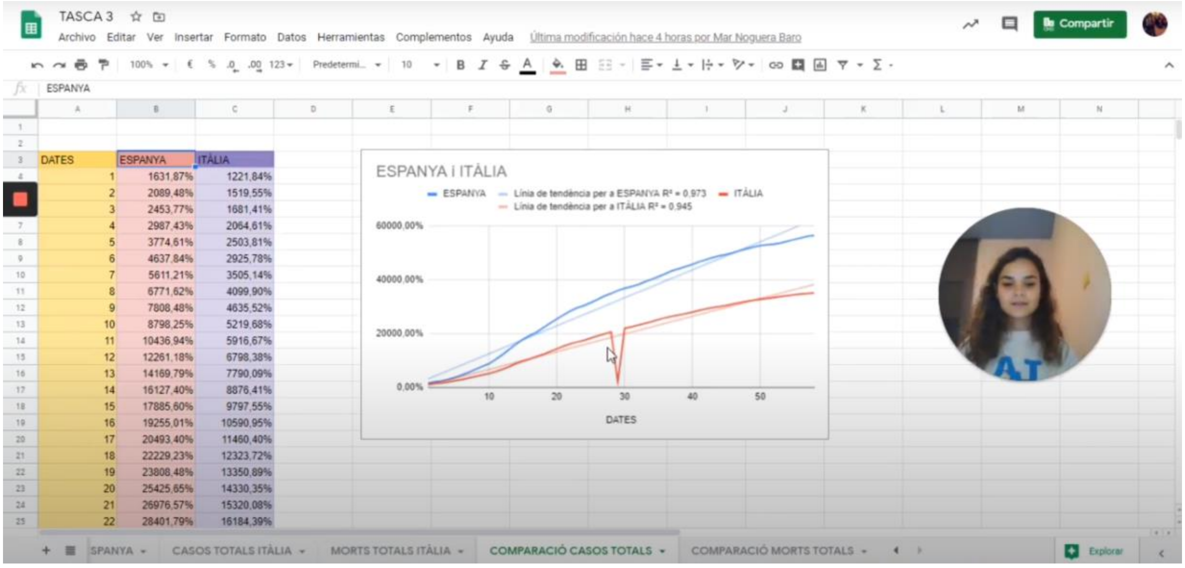


Imagen 1: Ejemplo del trabajo realizado en la tercera fase

Cuando se preguntó a los estudiantes que seleccionaran los aspectos más importantes de entre todo lo que habían aprendido durante el proyecto, éstos no identificaron ningún concepto nuevo de matemáticas, pero sí en herramientas de análisis de datos con hojas de cálculo para resolver las cuestiones tratadas. Explicaron que habían surgido dificultades en acceder a datos reales que fueran "aprovechables" para su estudio, en organizarlos y en extraer información (todas ellas tareas nuevas para ellos), además de familiarizarse con los nuevos conceptos y terminología relativa a la enfermedad (grupos de población, parámetros usados, etc.).

Utilizando esta primera experimentación, en el curso 2020/21, se ha vuelto a experimentar este mismo REI con algunas modificaciones. Su experimentación se realiza con estudiantes de 4º de ESO, esta vez en el marco de un proyecto interdisciplinar entre las asignaturas de matemáticas, biología y expresión oral y escrita. Además, el enfoque inicial se ha modificado: los estudiantes son ahora los encargados de realizar una campaña de divulgación sobre la enfermedad para la escuela. Para ello, parten de recoger las inquietudes de la comunidad educativa, empezando por las suyas y haciendo un sondeo a compañeros y familias (imagen 2), luego definen la problemática que quieren abordar y elaboran una investigación, con el asesoramiento de las profesoras de biología y matemáticas. Finalmente, tendrán que elaborar un artículo y vídeo divulgativo, que se publicará y presentará a toda la comunidad escolar (resto de alumnado, profesorado y familiares).

Vásquez, S., Barquero, B. y Romero, O. (2021d). Recorridos de estudio e investigación interdisciplinares: ¿Cómo llevar la problemática actual sobre la COVID-19 al aula? *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, 93, 23–29. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=8029529

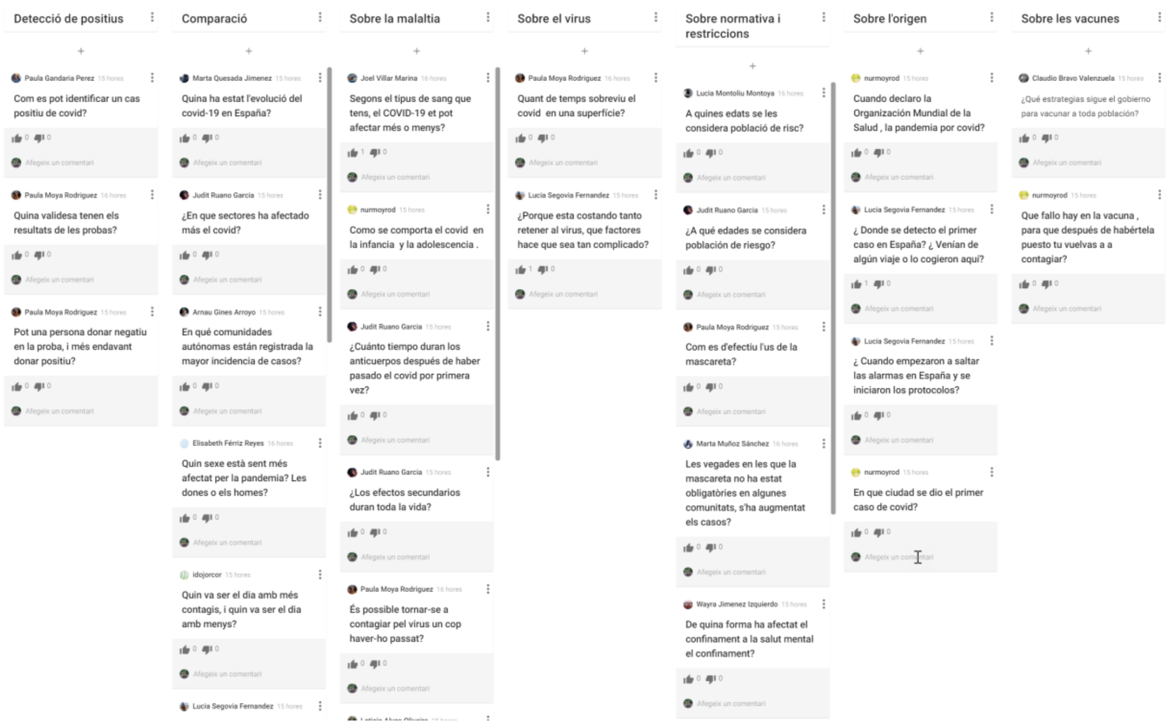


Imagen 2: Preguntas de investigación planteadas por los estudiantes en el curso 2020/21

Necesidades para una propuesta de formación para el profesorado sobre interdisciplinariedad

Partiendo de la experimentación que acabamos de resumir y de las necesidades detectadas por el profesorado que está implementando esta tipología de proyectos, las autoras de este trabajo, con la colaboración del equipo del proyecto europeo Erasmus+ IDENTITIES, elaboramos una propuesta para la formación del profesorado para tratar las cuestiones profesionales sobre cómo llevar al aula prácticas interdisciplinares. Presentamos brevemente algunas de las necesidades detectadas juntamente con algunas de las actividades propuestas.

Una de las necesidades manifestadas corresponde al hecho de detectar conjuntamente, profesorado en formación y formadores, “buenas problemáticas interdisciplinarias” para llevar al aula de secundaria, susceptibles a un estudio interdisciplinar y que sean relevantes social y escolarmente. La evolución de la pandemia ha supuesto un contexto muy rico debido a la rápida evolución y difusión de los avances científicos, que ha requerido la colaboración constante de equipos mixtos de investigación. Para ello, se plantea una primera actividad, bajo el rol de “exploradores interdisciplinarios”, en la que se propone analizar un amplio conjunto de noticias y artículos de divulgación científica para detectar cómo las distintas disciplinas S-T-E-M han interactuado, qué cuestiones han tratado, qué respuestas han elaborado, y qué terminología se ha creado para difundir sus avances a la sociedad.

Una segunda necesidad detectada es que el profesorado pueda experimentar en primera persona proyectos interdisciplinares en grupos mixtos de profesorado de distintas

Vásquez, S., Barquero, B. y Romero, O. (2021d). Recorridos de estudio e investigación interdisciplinares: ¿Cómo llevar la problemática actual sobre la COVID-19 al aula? *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, 93, 23–29. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=8029529

especialidades (matemáticas, ciencias, tecnología, entre otras). Para ello el equipo de personas investigadoras-formadoras hemos diseñado tres posibles recorridos de estudio e investigación derivados de tres grandes problemáticas detectadas a partir del análisis precedente. Estas tres líneas interdisciplinares tratan sobre (1) la complejidad de delimitar el sistema a ser estudiado: selección, organización y análisis de datos; (2) el papel de los modelos matemáticos en el estudio de la pandemia; y (3) la simulación de escenarios para la toma de decisiones políticas. El objetivo es hacer experimentar a los participantes una actividad interdisciplinaria, relativamente nueva para ellos, que podría existir en las aulas de secundaria y, con ello, crear un medio suficientemente rico para introducir posteriormente herramientas de análisis y de diseño de estas prácticas interdisciplinares.

La tercera necesidad trata de transponer a la formación del profesorado herramientas epistemológicas y didácticas para analizar el conocimiento disciplinar e interdisciplinar que entra en juego. Este es un paso clave en el proceso de formación que partirá del análisis de las propias vivencias con los proyectos vividos, junto con la reflexión y propuesta de diseño de cómo estas líneas interdisciplinares se pueden llevar a las aulas de secundaria.

La cuarta y última necesidad que queremos abordar es conocer y analizar proyectos desarrollados en las aulas sobre temáticas cercanas a las aquí emprendidas. Para ello, se introducen distintos casos de estudio. Partimos del caso de REI experimentado en la escuela Natzaret que narramos en este trabajo (muy cercano a las línea interdisciplinares (1) y (2)) y el proyecto de simulación de escenarios (García et al. 2021) que se incluye en este mismo monográfico y que suponen dos casos de estudio excelentes para ampliar el análisis epistemológico y didáctico iniciado en etapas anteriores, para emprender el análisis de las condiciones creadas por dichas experimentaciones, así como las limitaciones que se han detectado para un buen desarrollo de las prácticas escolares interdisciplinares.

Referencias bibliográficas

BARQUERO, B.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. (2011): «Los recorridos de estudio e investigación y la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las ciencias experimentales». *Enseñanza de las Ciencias: Revista de Investigación y Experiencias Didácticas, 29*(3), pp. 339-352.

CHEVALLARD, Y. (2013): «Enseñar Matemáticas en la Sociedad de Mañana: Alegato a Favor de un Contraparadigma Emergente». *REDIMAT - Journal of Research in Mathematics Education, 2*(2), pp. 61–1. https://doi.org/10.4471/redimat.2013.26

GARCIA, C.; MACIP, S.; HUERTA, P. (2021): «Aula COVID-19 matemáticas e interdisciplinariedad». UNO, este mismo número.

SERRANO, L.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. (2013): «Recorridos de estudio e investigación en la enseñanza universitaria de ciencias económicas y empresariales». UNO, vol. 62, pp. 39-48.

Vásquez, S., Barquero, B. y Romero, O. (2021d). Recorridos de estudio e investigación interdisciplinares: ¿Cómo llevar la problemática actual sobre la COVID-19 al aula? *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, 93, 23–29. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=8029529

Apéndice 1.4. Segunda experimentación del REI sobre el COVID

Referencia

Vásquez, S., Balat, F. y Orlandi, G. (2023b). Gestión y evaluación de un proyecto multidisciplinar sobre el estudio e impacto de la pandemia. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas, 99*, 23–32. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=8970749

Gestión y evaluación de un proyecto multidisciplinar sobre el estudio e impacto de la pandemia

Resumen. Utilizamos los Recorridos de Estudio e Investigación para abordar un trabajo interdisciplinar con estudiantes de 4º de ESO incluyendo las disciplinas de matemáticas, biología, tecnología y expresión plurilingüe. Describimos las actividades realizadas en el aula así como algunas producciones de los estudiantes y las herramientas docentes de gestión y evaluación del proyecto.

Palabras clave: Datos, modelos, pandemia, interdisciplinariedad, secundaria.

Introducción

A raíz de la pandemia ocasionada por el COVID19, la comunidad educativa ha visto la necesidad y riqueza del análisis de datos para la toma de decisiones y cómo este contexto puede generar un aprendizaje profundo en nuestros estudiantes.

Este foco de atención, lo encontramos también reflejado en el nuevo currículum de Bachillerato en Cataluña. En las indicaciones de la asignatura de nueva creación “Matemática Aplicada” podemos leer:

“¿Qué datos estadísticos son claves en la evolución de una pandemia? Qué herramientas estadísticas se utilizan para analizar los datos y tomar decisiones? (Los datos: claves en las pandemias).” (DECRET 171/2022)

Además, representa un contexto excelente para la implementación de proyectos interdisciplinares. Siguiendo la línea de experimentaciones anteriores (Vásquez et al, 2021), durante el curso 2021-22 realizamos el proyecto con el objetivo de integrar cuatro disciplinas: matemáticas, biología, tecnología y expresión plurilingüe.

Seguimos la teoría antropológica de lo didáctico para explorar la transición entre el paradigma *monumentalista* de la visita de las obras, aún dominante en muchos niveles escolares, hacia un paradigma del cuestionamiento del mundo (Chevallard, 2013). En este nuevo paradigma, los estudiantes se centran en el estudio de cuestiones para aportar y construir respuestas y, durante el proceso colectivo de estudio e investigación, es cuando emergen y se ponen en uso ciertas herramientas y conocimientos disciplinares para abordar dichas cuestiones. Para implementar en el aula este proceso de cambio, se proponen los *Recorridos de estudio e investigación* (REI) (Serrano, Bosch y Gascón, 2013; Barquero, Bosch y Gascón, 2011). Nuestro proyecto presenta un REI interdisciplinar centrado en el estudio e impacto de la pandemia generada por el COVID.

Contexto escolar

La experimentación se lleva a cabo durante el tercer trimestre del curso 2021-22 con 54 estudiantes de dos grupos de 4º de ESO del Colegio Nazaret de Esplugues de Llobregat (Barcelona). Se dedicaron un total de 14 sesiones de una hora durante 2 semanas

Vásquez, S., Balat, F. y Orlandi, G. (2023b). Gestión y evaluación de un proyecto multidisciplinar sobre el estudio e impacto de la pandemia. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas, 99*, 23-32. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=8970749

consecutivas. Intervinieron 6 profesores: 3 de matemáticas y 3 de asignaturas optativas: biología, tecnología y expresión plurilingüe. Todos los estudiantes cursan la asignatura de matemática y una de las 3 optativas.

En esta escuela, los estudiantes están acostumbrados a realizar proyectos y a compartir herramientas como, por ejemplo:

- *Padlet* para compartir las preguntas iniciales.
- *Plantillas de diario de trabajo*: cada día los estudiantes han de rellenar el *diario de trabajo*. En este espacio los alumnos describen las preguntas abordadas, las respuestas encontradas, las preguntas que quedan por resolver y las tareas realizadas.
- Elaboración y grabación de *exposiciones orales*

Forma parte de la cultura y hábitos de los estudiantes, así como de toda la comunidad educativa de la escuela, el uso de herramientas propias del *Project Zero,* de la Universidad de Harvard, siguiendo a autores como David Perkins, Howard Gardner o Ron Ritchhart. Dentro de estas herramientas encontramos la *cultura de pensamiento*, el trabajo teniendo en cuenta *las inteligencias múltiples,* proyectos de *design thinking,* el *trabajo cooperativo* y sobre todo el trabajo con herramientas digitales.

Los profesores del centro reciben cada curso formación de estas herramientas. Además, se fomentan momentos de cooperación entre profesores para poder coordinar proyectos interdisciplinares o compartir prácticas educativas. Aún así, los profesores del centro valoran que estos momentos y facilidades son insuficientes en muchas ocasiones y que el éxito de las herramientas dependen en gran medida de la implicación y motivación personal.

Desarrollo de la experimentación y resultados

Motivación inicial

El proyecto empieza con los profesores de matemáticas explicando la motivación del proyecto: "Desde el principio de la pandemia la comunidad científica ha tomado un papel fundamental: la toma de decisiones. Estas decisiones han sido equivocadas en algunos casos, pero siempre han estado basadas en los datos y evidencias disponibles. En muchas ocasiones, la población general ha tenido que convivir con información muy diversa, incluso, contradictoria. En este contexto, se les propuso a los estudiantes investigar sobre cuál de esta información ha acabado siendo cierta y si podemos reproducir el análisis de datos que pueda justificar estas decisiones y, por lo tanto, comprenderlas mejor."

Observación de los datos y lecturas

En la primera sesión se mostró a los alumnos el portal de *datos abiertos de Cataluña*, una plataforma donde la administración pública pone a disposición de la ciudadanía los

Vásquez, S., Balat, F. y Orlandi, G. (2023b). Gestión y evaluación de un proyecto multidisciplinar sobre el estudio e impacto de la pandemia. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas, 99*, 23-32. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=8970749

datos recopilados por organismos públicos[9]. A partir de estos datos (en formato .csv) se pidió a los estudiantes que hicieran un listado de preguntas que creyeran que se podrían abordar con los datos disponibles.

Durante la sesión de la asignatura optativa los estudiantes tuvieron que leer y comentar unos artículos seleccionados por los profesores. Esta actividad serviría para orientar a los equipos sobre la elección de aspectos y cuestiones más concretas a investigar.

Generación de preguntas

A continuación, los equipos debían concretar 10 preguntas de investigación, elegidas de aquellas que propusieron en las sesiones anteriores y clasificarlas según la disciplina. Se compartieron en un *Padlet* (ver Figura 1) con las preguntas investigables asociadas a cada disciplina.

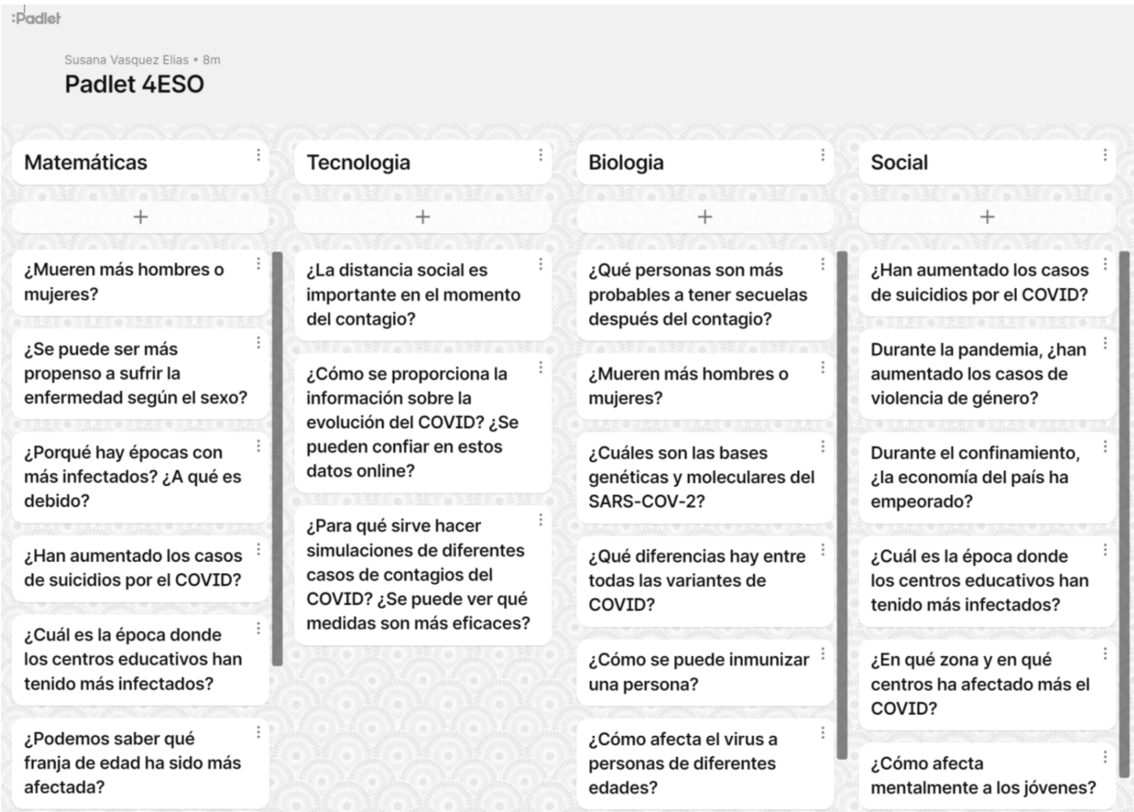


Figura 1: Padlet construido por toda la clase

Planteamiento de la línea de investigación

A continuación, los equipos debían decidir su línea de investigación. Para esta actividad se les pedía a los estudiantes que formularan una *cuestión inicial*. Dicha cuestión debía reflejar la temática central de la investigación. Los equipos tenían que formular 4 preguntas de investigación secundarias, una para cada disciplina. Para cada subpregunta, los estudiantes tenían que intentar anticipar sus respuestas generando las

[9] Web del Catálogo de Datos Abiertos: https://governobert.gencat.cat/ca/dades_obertes/inici/

que consideraran como hipótesis de investigación. Finalmente, se les pedía empezar a elaborar un mapa de cuestiones y respuestas, añadiendo estas primeras preguntas.

Investigación

En las horas de matemáticas y tecnología los alumnos realizaban el trabajo experimental y en las de biología y expresión plurilingüe hacían la investigación documental y escribían el marco teórico, donde debían sintetizar la información encontrada y hacer referencia a las fuentes de consulta.

Durante las sesiones de investigación los alumnos consultaban noticias y trabajos previos con el fin de ayudarles a formular hipótesis para sus preguntas. Empezada la parte práctica del proyecto, las sesiones de investigación también tomaron un papel importante en la interpretación de los resultados y el contraste de los mismos en vista a las hipótesis planteadas previamente.

En cuanto a la investigación práctica –parte experimental– los equipos tenían dos tareas: por un lado, debían organizar los datos y analizarlos y, por otro lado, debían trabajar con las simulaciones ofrecidas en el programa NetLogo.

Cada grupo, según su línea de investigación, escogía un registro de la página de *open data* que les permitiera responder a sus preguntas de investigación con dichos datos. Durante estas sesiones los profesores de matemáticas añadían algunas clases *magistrales* sobre cómo usar las herramientas de Excel para poder ordenar y representar los datos. Además, se generaban debates de clase donde algún equipo exponía el progreso de su investigación y el resto de equipos intentaban proponer sugerencias y puntos de mejora. Estas intervenciones se tenían en cuenta en la evaluación individual del proyecto.

El equipo 1, que investigaba la cuestión inicial Q_0: *¿Qué variante del COVID es más contagiosa?,* construyó los siguientes gráficos de evolución (ver Figura 2).

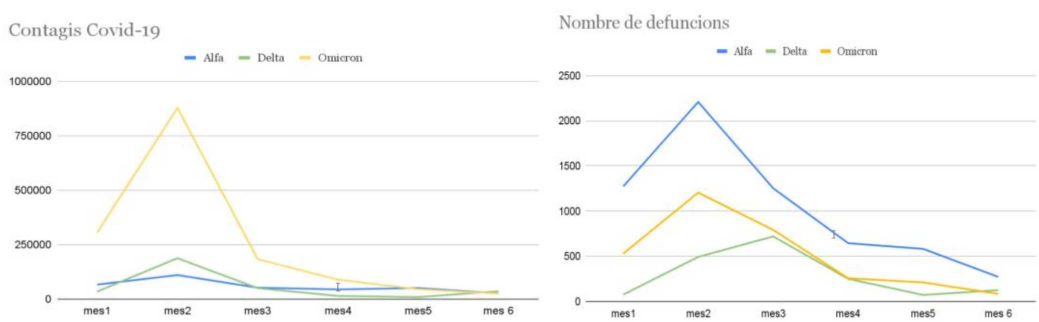


Figura 2: Representaciones gráficas realizadas por el equipo 1 en su artículo

Por lo que respecta a la simulación, los estudiantes de Tecnología eran los responsables de esta parte del trabajo. Tenían que ejecutar simulaciones, extraer los datos del programa e interpretarlos, siempre intentando seguir la línea de investigación general del equipo.

Vásquez, S., Balat, F. y Orlandi, G. (2023b). Gestión y evaluación de un proyecto multidisciplinar sobre el estudio e impacto de la pandemia. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas, 99*, 23-32. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=8970749

El equipo 2 se propuso investigar Q_0: *¿Cómo ha afectado el COVID en el sector turístico?* En esta parte del trabajo modificaron el código del programa NetLogo y añadieron una población de turistas infectados, para ver cómo variaban los contagios si se añadía una población diferente contagiada.

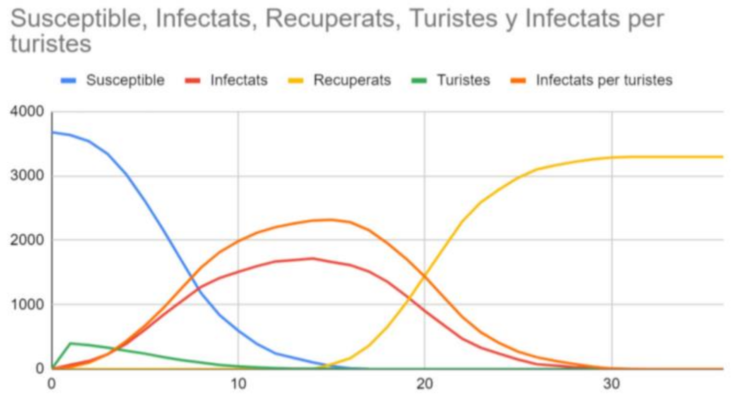


Figura 3: Representación gráfica creada por el equipo 2.

Elaboración de respuestas finales grupales

Los equipos sintetizaban todo el proceso en varios productos finales. La producción principal debía ser un *artículo científico* completo. A partir de este, los equipos debían generar un póster científico. Se ofreció varios ejemplos de posters, ya que era la primera vez que se introducía este nuevo formato a los estudiantes. Los estudiantes, además, tenían que elaborar un vídeo corto (entre 3 y 5 minutos) explicando un resumen de su investigación. Este vídeo estaría enfocado a un público menos experto y debía tener el formato correspondiente para poder ser visualizado en un teléfono móvil (vídeo de redes sociales).

La última producción que se solicitó fue la elaboración de un mapa de cuestiones y respuestas, que sintetizara el recorrido de estudio e investigación particular del grupo en abordar la cuestión investigable escogida. Esta herramienta fue utilizada por los equipos durante todo el proceso de la investigación, por lo tanto, no era una actividad a la que tuvieran que dedicar mucho tiempo en esta etapa del proyecto.

A continuación mostramos ejemplos de los mapas construidos:

Vásquez, S., Balat, F. y Orlandi, G. (2023b). Gestión y evaluación de un proyecto multidisciplinar sobre el estudio e impacto de la pandemia. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas, 99*, 23-32. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=8970749

Figura 4: Mapa de cuestiones y respuestas del equipo 1

El equipo 1 presentaba de forma esquemática el conjunto de cuestiones centrales, organizadas por disciplinas:

Q_0: ¿Qué variante del COVID es más contagiosa?

Q_{Biologia}: ¿Qué diferencias hay entre las variantes de COVID?

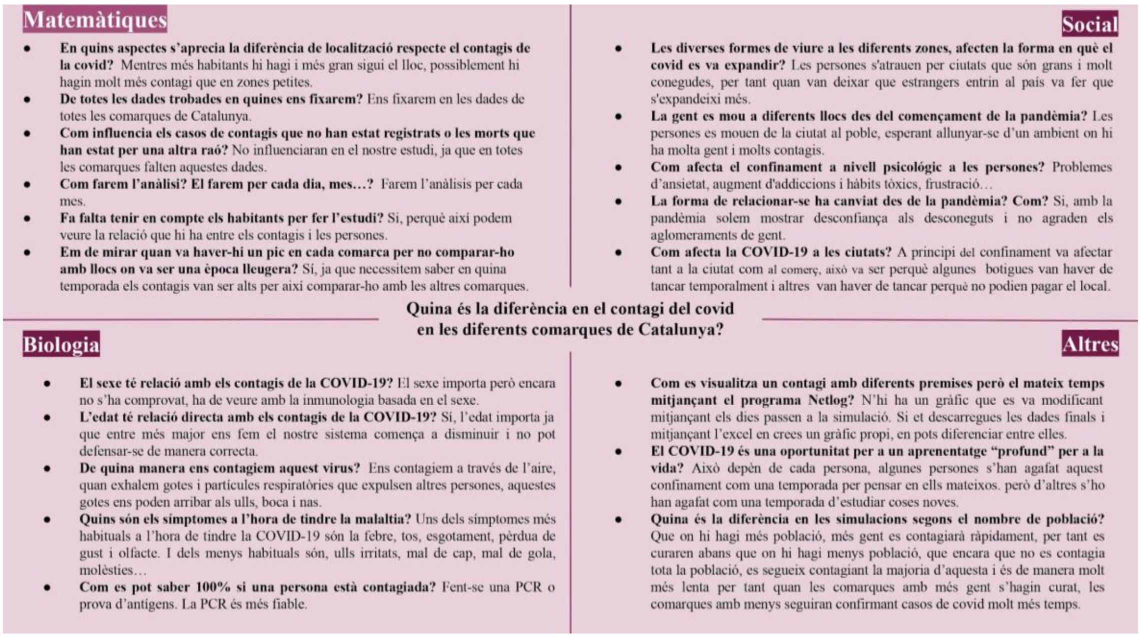
Q_{Social}: ¿Qué variante ha afectado más a la economía de España?

$Q_{\text{Tecnologia}}$: ¿Las restricciones ayudaron a parar a las diferentes variantes?

$Q_{\text{Matemáticas}}$: Según los datos y la época del año, ¿qué variante de COVID ha sido más contagiosa y mortal?

Los estudiantes construyeron sus mapas de cuestiones y respuestas. En general, todos los equipos clasificaban las preguntas que aparecieron en el proceso de investigación y las ordenaban. Para cada pregunta intentaban sintetizar una respuesta. Si esta respuesta se encontró utilizando algún recurso en línea, los estudiantes añadían un enlace o si era una respuesta encontrada mediante la manipulación de hojas de cálculo, adjuntaban el archivo. Se puede ver que las disciplinas aparecen claramente diferenciadas pero no se plantearon si sus preguntas pueden pertenecer a más de una disciplina o qué aporta la interacción entre dichas disciplinas.

Vásquez, S., Balat, F. y Orlandi, G. (2023b). Gestión y evaluación de un proyecto multidisciplinar sobre el estudio e impacto de la pandemia. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas, 99*, 23-32. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=8970749



Matemàtiques

- **En quins aspectes s'aprecia la diferència de localització respecte el contagis de la covid?** Mentres més habitants hi hagi i més gran sigui el lloc, possiblement hi hagin molt més contagi que en zones petites.
- **De totes les dades trobades en quines ens fixarem?** Ens fixarem en les dades de totes les comarques de Catalunya.
- **Com influencia els casos de contagis que no han estat registrats o les morts que han estat per una altra raó?** No influenciaran en el nostre estudi, ja que en totes les comarques falten aquestes dades.
- **Com farem l'anàlisi? El farem per cada dia, mes…?** Farem l'anàlisis per cada mes.
- **Fa falta tenir en compte els habitants per fer l'estudi?** Si, perquè així podem veure la relació que hi ha entre els contagis i les persones.
- **Em de mirar quan va haver-hi un pic en cada comarca per no comparar-ho amb llocs on va ser una època lleugera?** Sí, ja que necessitem saber en quina temporada els contagis van ser alts per així comparar-ho amb les altres comarques.

Social

- **Les diverses formes de viure a les diferents zones, afecten la forma en què el covid es va expandir?** Les persones s'atrauen per ciutats que són grans i molt conegudes, per tant quan van deixar que estrangers entrin al país va fer que s'expandeixi més.
- **La gent es mou a diferents llocs des del començament de la pandèmia?** Les persones es mouen de la ciutat al poble, esperant allunyar-se d'un ambient on hi ha molta gent i molts contagis.
- **Com afecta el confinament a nivell psicològic a les persones?** Problemes d'ansietat, augment d'addiccions i hàbits tòxics, frustració…
- **La forma de relacionar-se ha canviat des de la pandèmia? Com?** Si, amb la pandèmia solem mostrar desconfiança als desconeguts i no agraden els aglomeraments de gent.
- **Com afecta la COVID-19 a les ciutats?** A principi del confinament va afectar tant a la ciutat com al comerç, això va ser perquè algunes botigues van haver de tancar temporalment i altres van haver de tancar perquè no podien pagar el local.

Quina és la diferència en el contagi del covid en les diferents comarques de Catalunya?

Biologia

- **El sexe té relació amb els contagis de la COVID-19?** El sexe importa però encara no s'ha comprovat, ha de veure amb la inmunologia basada en el sexe.
- **L'edat té relació directa amb els contagis de la COVID-19?** Sí, l'edat importa ja que entre més major ens fem el nostre sistema comença a disminuir i no pot defensar-se de manera correcta.
- **De quina manera ens contagiem aquest virus?** Ens contagiem a través de l'aire, quan exhalem gotes i partícules respiratòries que expulsen altres persones, aquestes gotes ens poden arribar als ulls, boca i nas.
- **Quins són els símptomes a l'hora de tindre la malaltia?** Uns dels símptomes més habituals a l'hora de tindre la COVID-19 són la febre, tos, esgotament, pèrdua de gust i olfacte. I dels menys habituals són, ulls irritats, mal de cap, mal de gola, molèsties…
- **Com es pot saber 100% si una persona està contagiada?** Fent-se una PCR o prova d'antígens. La PCR és més fiable.

Altres

- **Com es visualitza un contagi amb diferents premises però el mateix temps mitjançant el programa Netlog?** N'hi ha un gràfic que es va modificant mitjançant els dies passen a la simulació. Si et descarregues les dades finals i mitjançant l'excel en crees un gràfic propi, en pots diferenciar entre elles.
- **El COVID-19 és una oportunitat per a un aprenentatge "profund" per a la vida?** Això depèn de cada persona, algunes persones s'han agafat aquest confinament com una temporada per pensar en ells mateixos. però d'altres s'ho han agafat com una temporada d'estudiar coses noves.
- **Quina és la diferència en les simulacions segons el nombre de població?** Que on hi hagi més població, més gent es contagiarà ràpidament, per tant es curaren abans que on hi hagi menys població, que encara que no es contagia tota la població, es segueix contagiant la majoria d'aquesta i és de manera molt més lenta per tant quan les comarques amb més gent s'hagin curat, les comarques amb menys seguiran confirmant casos de covid molt més temps.

Figura 5: Mapa de cuestiones y respuestas del equipo 2

En este caso, el equipo 2 no ha generado ninguna pregunta representativa para cada disciplina, sino que han hecho un listado de preguntas para cada una de ellas, relacionadas con su pregunta central Q0: *¿Qué diferencias han habido en el contagio del COVID entre las diferentes comarcas de Cataluña?*

En ambos ejemplos podemos ver que los estudiantes popusieron clasificar las preguntas según la disciplina a la que pertenecen, pero en sus mapas no se puede ver la evolución de las preguntas ni las relaciones entre las disciplinas.

Durante las sesiones de trabajo los estudiantes sugerían preguntas mucho más profundas y elaboradas que las que aparecieron luego en los mapas. Creemos que esto se ha debido a la distribución del trabajo de los estudiantes.

Presentaciones y evaluación

Finalmente, los estudiantes tuvieron que enfrentarse a una exposición que sería evaluada por el profesorado. Los estudiantes debían mostrar su vídeo y presentar oralmente un resumen de su investigación utilizando como soporte visual el póster científico y el mapa de cuestiones y respuestas.

Los profesores evaluaron la globalidad del proyecto utilizando una rúbrica de evaluación compartida previamente con los estudiantes (ver Figura 6).

Participación diaria individual	Dosier de trabajo	Artículo y póster			Vídeo (10%)	
		Corrección en el análisis	Contenido	Exposición oral	Contenido	Formato
10%	10%	20%	20%	30%	5%	5%
Individual	Grupal	Grupal	Grupal	Individual	Grupal	Grupal
A partir de las participaciones en los debates de clase	Contiene los diarios de todos los días. Aparece el progreso del trabajo, con todas las actividades trabajadas en clase.	Las afirmaciones y conclusiones están fundamentadas en un análisis de datos con rigor- Se citan las fuentes de información (artículos, bases de datos, etc.) que se han utilizado para elaborar las conclusiones. Se utiliza correctamente el lenguaje matemático.	Contiene todos los apartados: - Introducción (Cuestiones, hipótesis, metodología) - Marco teórco - Marco experimental - Análisis de los datos del cóvido - Simulación: capturas del programa - Conclusiones y bibliografía	Muestra un grado excelente de confianza y se aprecia que se lo ha preparado.	- Preguntas iniciales e hipótesis. - resultados finales - Explicación coherente. - Vocabulario adecuado	Orientación vertical Buena iluminación Formato y estructura creativa En catalán Con subtítulos Duración entre 3 y 5 minutos. No es obligatorio salir al vídeo, pero si no sale, que al menos utilice sus voces. También se admite utilizar animaciones Todos los miembros deben salir o hablar. Utiliza material audiovisual propio

Figura 6: Rúbrica de evaluación

Vásquez, S., Balat, F. y Orlandi, G. (2023b). Gestión y evaluación de un proyecto multidisciplinar sobre el estudio e impacto de la pandemia. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas, 99*, 23-32. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=8970749

Esta rúbrica fue utilizada en la sesión de exposición de las presentaciones. Se hicieron 3 grupos de evaluación, con un profesor en cada grupo y 2 horas de dedicación, de manera que cada profesor evaluaba a 2 o 3 equipos. Además, se dedicó una reunión del profesorado para compartir impresiones sobre las exposiciones y consensuar las notas finales. La rúbrica incluía los aspectos del trabajo en clase (participación diaria y diarios de trabajo), el contenido del póster y del vídeo y la exposición oral individual de los estudiantes. Los profesores valoraron que la rúbrica fue acertada, ya que unificaba los diferentes criterios y les permitía valorar el trabajo de manera global.

Los profesores han valorado que la propuesta es una buena experiencia para poner en práctica los proyectos interdisciplinares en el centro. De su implementación han valorado que el proyecto tuviera un objetivo común y trabajado de manera equilibrada entre las diferentes asignaturas. También han criticado que aún y elaborando las herramientas para poder implantarlo con las restricciones escolares impuestas (los profesores solo participaban en sus horas de clase, los estudiantes no cursaban todas las asignaturas, etc) la restricción más limitante ha sido *el tiempo*. Como aspecto de mejora clave, por lo tanto, los profesores añadirían tiempo para preparar con antelación, coordinar en el proceso y reflexionar posteriormente.

Referencias bibliográficas

BARQUERO, B.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. (2011): «Los recorridos de estudio e investigación y la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las ciencias experimentales». *Enseñanza de las Ciencias: Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, 29(3), pp. 339-352.

CHEVALLARD, Y. (2013): «Enseñar Matemáticas en la Sociedad de Mañana: Alegato a Favor de un Contraparadigma Emergente». *REDIMAT - Journal of Research in Mathematics Education*, 2(2), pp. 61–1. https://doi.org/10.4471/redimat.2013.26

DECRET 171/2022, de 20 de setembre, d'ordenació dels ensenyaments de batxillerat. *Diari oficial de la Generalitat de Catalumya.* https://projectes.xtec.cat/nou-curriculum/batxillerat/#

SERRANO, L.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. (2013): «Recorridos de estudio e investigación en la enseñanza universitaria de ciencias económicas y empresariales». UNO, vol. 62, pp. 39-48.

Vásquez, S., Barquero, B. & Romero, O. (2021). Recorridos de estudio e investigación interdisciplinares: : ¿Cómo llevar la problemática actual sobre la COVID-19 al aula? *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, 93, 23-29.

Vásquez, S., Balat, F. y Orlandi, G. (2023b). Gestión y evaluación de un proyecto multidisciplinar sobre el estudio e impacto de la pandemia. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas, 99*, 23-32. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=8970749

Apéndice 1.5. Segunda experimentación del REI sobre el COVID y perspectiva de modelización

Referencia

Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2022). The role of models and modelling in the pandemics' evolution: transposing an 'study and research path' to secondary school. En J. Hodgen, E. Geraniou, G. Bolondi y F. Ferretti (Eds.), *Proceedings of the Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12)* (pp. 1177–1186). Free University of Bozen-Bolzano and ERME. https://hal.science/hal-03758988/document

The role of models and modelling in the pandemics' evolution: transposing an 'study and research path' to secondary school

Abstract. *This paper discusses the design of a teacher education proposal aiming to provide tools to secondary school teachers to deal with the teaching of modelling in interdisciplinarity contexts. We start by briefly presenting the case of a study and research path for teacher education (SRP-TE) about disseminating the fundamental role of models and modelling when interacting in the modelling process of the pandemics. We then focus more specifically on the last modules of the SRP-TE, when some of the interdisciplinary research projects are adapted and transposed to secondary school. We present an experience during the academic years 2020/21 with an open teaching project to inquire into the impact of the COVID-19 led by a team of teachers from different disciplines intervene. We analyze the conditions that facilitate the development of this project and the limitations that hinder its progress as a richer modelling activity.*

Keywords: *Modelling, interdisciplinarity, study and research paths, secondary school, pandemics.*

Introduction

Research in mathematics education has recognised the importance of including applications and mathematical modelling in mathematics teaching and learning (Blum, 2015). Pollak (1969, p. 401) introduces the importance of problem posing stating that "the student has as much right to participate in the derivation for the mathematical model and in checking the degree of its validity as he has to repeat any experiment to satisfy himself of its validity". In this sense, including mathematical modelling applications involve finding genuine problems for students to pose good questions to study.

Besides all the progress made in research and the support of educational policies and curriculum reforms, implementing a well-established activity on modelling must confront big constraints for its long-term and large-scale dissemination. In this respect, we have several examples of major issues in our society that require a collective scientific effort working across the boundaries of the scientific disciplines, where mathematics and mathematical modelling can be seen and act as service subjects.

The COVID-19 pandemic has shown more than ever that students and, more in general, citizens need to understand how mathematical and scientific advances contribute to understanding societal phenomena. In addition, "the pandemic illustrates how the operation of science changes when questions of urgency, stakes, values and uncertainty collide (Saltelli et al., 2020). People feel the need to understand what mathematical models can provide, how we may interpret the predictions and, more generally, how they help understand complex systems such as the pandemics' evolution.

Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2022). The role of models and modelling in the pandemics' evolution: transposing an 'study and research path' to secondary school. En J. Hodgen, E. Geraniou, G. Bolondi y F. Ferretti (Eds.), *Proceedings of the Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12)* (pp. 1177–1186). Free University of Bozen-Bolzano and ERME. https://hal.science/hal-03758988/document

There is no doubt about the critical constraints that hinder the long-term "survival" of modelling activities in interdisciplinarity contexts in schools. They can be interpreted as a consequence of important didactic phenomena that exist in school institutions, such as the isolation of disciplines and the prevalence of monodisciplinary curricula (Michelsen, 2006, p. 269), the dominant way to organise the teaching and learning of school disciplines (based on the logic of concepts rather than the logic of problems), and the inexistence of epistemological and didactic tools to approach modelling in the interaction among disciplines.

When discussing interdisciplinary education, it is clearly related to the importance of STEM education (Maass et al., 2019) in three different approaches: twenty-first-century skills, mathematical modelling, and education for responsible citizenship. English (2016, p. 362) makes the role of modelling in STEM education clear "modelling is a powerful vehicle for bringing features of 21st century problems into the mathematics classroom".

Within the framework of the anthropological theory of the didactic (ATD), a change of school paradigm (Chevallard, 2015) is proposed to overcome some of the main didactic phenomena linked to the "monumentalisation" of the taught knowledge. This change has been described in terms of a paradigm shift, from the paradigm of visiting works to the paradigm of questioning the world. Chevallard characterises the transformation in mathematics education not only at the pedagogical level ("how to teach?") but also includes the changes the paradigm shift may have on the didactic level, dealing with the question about "what and how to teach?" In the paradigm of questioning the world, the knowledge to be taught is associated with the inquiry of relevant questions. Approaching these questions includes moments of study (searching for available answers in the media) and moments of inquiry (deconstruction and reconstruction of knowledge to generate one's answer). Implementing question-led study processes helps the knowledge to be taught to become dynamic, provisional, and collective (compared to the traditional notion of knowledge in school institutions). In the ATD, the so-called *study and research paths* have been introduced to facilitate the inclusion of mathematical modelling in educational systems and, more importantly, to explicitly situate mathematical modelling problems at the centre of teaching and learning practices (see Bosch, 2018). More recently, our research team have been working with the proposal of *study and research paths for teacher education* (SRP-TE) (Barquero et al., 2018), an inquiry-based process combining practical and theoretical questioning of outside and inside school scientific activities.

Given the fundamental role of models and modelling in the understanding and social dissemination of the pandemics, we present our experience with the design of an SRP-TE about decoding the evolution of the pandemics. Its design and implementation, developed in the framework of the European project IDENTITIES, wanted to work with teachers to question the necessary tools for the analysis and design of interdisciplinary projects in secondary school. We then focus on the last modules of the SRP-TE when some of the interdisciplinary research projects are adapted and transposed into secondary school. We focus on the experience during the academic years 2020/21 with an open teaching project inquiring into the impact of the evolution of the COVID-19 where

Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2022). The role of models and modelling in the pandemics' evolution: transposing an 'study and research path' to secondary school. En J. Hodgen, E. Geraniou, G. Bolondi y F. Ferretti (Eds.), *Proceedings of the Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12)* (pp. 1177–1186). Free University of Bozen-Bolzano and ERME. https://hal.science/hal-03758988/document

a team of teachers from different disciplines intervened. In this paper, we continue the study to answer the research questions: *What are the conditions facilitating the development of this project and the limitations hindering its progress towards a more prosperous interdisciplinary modelling activity?*

First contact with the experience with an SRP-TE about the COVID-19 evolution

In the context of the IDENTITIES project (https://identitiesproject.eu), it has been proposed the design of an instructional proposal for preservice secondary school teachers based on an adaptation of the structure of the SRP-TE (Barquero et al., 2018). One of the four proposals has focused on the role of models and modelling to understand the COVID-19 evolution. It was developed in a local implementation in the University of Barcelona and in an international Summer School, where the first two authors were involved, as a participant and as an educator, respectively. The adaptation of the general structure of the SRP-TE consisted of four modules. Participants had to assume different roles to facilitate questioning together (teachers and educators) the way to describe, analyse and design possible modelling activities that could be transposed to secondary schools to address live societal questions that emerged during the scientific approach of the pandemics.

In *module 1*, participants might act as “explorers” to analyse a set of news and research dissemination papers that the researchers-designers had selected to see the evolution of the problems addressed by the scientific community and analyse the role assigned to the disciplines, in particular, to mathematics. From this first analysis, participants with educators delimited some possible lines of inquiry that involved models and modelling and the interaction among different disciplines. The topic addressed in each line were: (1) The complexity of delimiting the system to model: analysing data,

(2) The role of the equation-based models: what can we consider a ‘good’ model? what are models for?; and (3) Agent-based models and simulations: Simulating scenarios to help make decisions about societal restrictions. *Module 2* asked participants to experience an SRP, previously designed by the researcher-educators, about the lines mentioned above of inquiry. Participants had to assume the role of “student”. The main goal of this module is to make participants carry out an unfamiliar activity that could, to a certain extent, exist in an ordinary secondary school classroom. *Module 3* refers to the collective analysis of the SRP that they come to be experienced as students, but now adopting a role of “analyst”. Some specific tools were here introduced to help teachers carry out the analysis of the activity carried out. For instance, one of the provided tools takes the form of a questions-answers map (Winsløw et al., 2013) which help to make explicit the kind of disciplinary and interdisciplinary questions and answers that emerged in their experience with the SRP. In *module 4*, teachers in training worked in the design of an adaptation of the experienced SRP. And, in case they had the chance, they implemented them in real secondary school classrooms. The work developed with one of

Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2022). The role of models and modelling in the pandemics' evolution: transposing an 'study and research path' to secondary school. En J. Hodgen, E. Geraniou, G. Bolondi y F. Ferretti (Eds.), *Proceedings of the Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12)* (pp. 1177–1186). Free University of Bozen-Bolzano and ERME. https://hal.science/hal-03758988/document

the participants (researcher in didactics and the paper's first author) is the case study we focus on in the following sections.

Design of an SRP about modelling the COVID-19 evolution for secondary school

Institutional context and conditions for the implementation

The SRP about modelling the COVID-19 evolution has been implemented twice, in April-June 2020, with the beginning of the pandemic, and in February-March 2021. Due to the exceptional conditions of the first implementation, this paper focuses on the second implementation as its design was improved and the conditions for implementation were more stable (at least, than during the confinement). The implementation was carried out at Col·legi Natzaret, in Esplugues de Llobregat, a town near Barcelona (Spain), with 60 students of grade 10 (15-17 years old) distributed in two parallel groups. It was developed as an interdisciplinary project involving the subjects of mathematics, biology, and oral and written expression. Students were organised in working teams of six members, with heterogeneity in relation to their academic performance. The SRP run over 17 sessions of 1 hour during the official hours of mathematics, biology and plurilingual expression. It ran under relatively regular conditions, although the limitations due to the pandemics: the parallel groups could not interact, and each teacher was assigned to only one of the groups. Four teachers participated in the implementation: two mathematics teachers (one being the paper's first author), a biology teacher, and an English teacher (both teachers of optional subjects, who each had half of the students). In collaboration with her research team, the first author developed the *a priori* design of the SRP. The rest of the teachers had no direct involvement in the design. Still, they got actively engaged in deciding how to present the project to students and in the *in vivo* analysis during its implementation. Some special sessions were organised with all the teachers to agree on how to introduce the project, the timing, the way to distribute the students and the strategy to manage the SRP. Then, during the implementation, the teachers shared a journal where they daily reported their work with the class and the teaching materials (their presentations, students' reports, evaluation criteria, among other aspects).

Students worked collaboratively with online and digital tools. The teachers used a shared google presentation to report the progress of each working team. In addition, after each session, the working teams worked with the same template to document the advances of their inquiry. They had to report on the questions they had addressed, the temporary answers found, the tasks developed individually and in groups, and the new questions to follow with. Besides these shared documents, students had access to a presentation with some common instructions, indicating what was expected from their work and the steps to follow. From the start, the students were informed that they were responsible for defining the questions to address and the hypothesis they had about the pandemic evolution. They had to update their question-answer map regularly and, in the end, prepare an informative video presenting the results from their research to be distributed

Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2022). The role of models and modelling in the pandemics' evolution: transposing an 'study and research path' to secondary school. En J. Hodgen, E. Geraniou, G. Bolondi y F. Ferretti (Eds.), *Proceedings of the Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12)* (pp. 1177–1186). Free University of Bozen-Bolzano and ERME. https://hal.science/hal-03758988/document

to the school community. The SRP teachers evaluated the students' presentations, with some invited teachers from other subjects.

The openness of the generating question of the SRP and its devolution

One crucial difference with other previous implemented SRP is that this one did not start from the same common generating question. On the contrary, students were asked to confront a more general extra-mathematical problem of particular social relevance with an excess of news related to the pandemic. As the older students in the compulsory secondary school level, they were asked to run an awareness campaign for the school about the pandemic and its impact on society. They were responsible for providing contrasted and scientifically founded information and defining what they wanted to address.

In the beginning, the working teams were told to approach their research from three complementary points of view: from the available data (accessible through the Spanish government website) and the mathematical models they could use (*Which data may be selected to understand the evolution of the pandemic? How can mathematics and mathematical models help us to understand the pandemics evolution?*); from the biological knowledge of the disease (*How is the virus behaving?*); and from the societal impact of the pandemic (*What impact and effects are the pandemics having on our society?*). The working teams were asked to delimit their focus by always keeping in mind these three complementary general questions. Students started by gathering the concerns of the educational community, starting with their own and surveying their classmates and families. This helped them define the questions they wanted to address and plan the first steps of their particular SRP. At the end of these first steps, each team had to present the general topic and identify three interrelated

"researchable" questions concerning the mathematical, biological and societal aspects. Some examples of the researchable questions they posed are: *How long does the COVID-19 survive on a surface? What are the characteristics of the virus that make it so deadly? What age groups are the ones more affected? What are the physical sequelae of the disease?* About the societal questions, examples of the ones proposed by the students were: *How has the pandemic affected tourism in Barcelona? How has confinement affected people's daily lives? What restrictions were implemented in Madrid during the three waves in comparison to Barcelona?* Concerning the mathematics questions, those with a descriptive nature were more frequent: *Which autonomic communities in Spain have been more affected? How can we measure if the first wave was worse than the rest? Are there important differences between the evolution of the case numbers (infected, death, recovered) among the two consecutive years?* Moreover, there were also some groups that included questions about the evolution of the data: *How has COVID evolved in Catalonia? How has it evolved in the different counties?* As it can be read in the project presentation (available at https://bit.ly/3tRQpPz), the whole implementation followed three main phases. The first phase with the (a) generation of researchable questions, (b) exploration of databases, and (c) presentation of specific

Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2022). The role of models and modelling in the pandemics' evolution: transposing an 'study and research path' to secondary school. En J. Hodgen, E. Geraniou, G. Bolondi y F. Ferretti (Eds.), *Proceedings of the Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12)* (pp. 1177–1186). Free University of Bozen-Bolzano and ERME. https://hal.science/hal-03758988/document

questions and hypotheses to address. A second one is where they focus more on (a) looking for and organising the most relevant data for their inquiry, and (b) analysing data and proposing models to fit data and/or predict the evolution of the pandemics. A third and last step, where students had to work on the informative video. In the following section, we focus on the students' work in the first two phases, paying special attention to the researchable questions with a mathematics intervention.

Results of the experienced SRP about the COVID-19 evolution

During the sessions guided by the mathematics teachers, the different working groups addressed their researchable questions. To facilitate their work, the mathematics teachers were asked to follow a structured report. On the one hand, each working team had to make explicit the main questions they wanted to address, their hypothesis or preliminary answers, and the data they worked with. On the other hand, they had to fill out their *map of questions and answers* to describe the particular study and research trajectory they were following. This device, which was used during the whole implementation, took a crucial role for several reasons. First, it allowed students to have a common instrument for all the sessions and make explicit the evolution of the inquiry. Second, it facilitated that the teachers from the different disciplines could follow the work of the working teams. Moreover, students used this organisation to address the questions of each discipline with the corresponding teachers. Additionally, at the end of the implementation, the assessment of these maps considers the completeness and classification of all the elements, the relevance of the questions, their creativity and accuracy.

Five sessions were devoted to the first phase of the project. During these sessions, students were provided with a database from the Spanish ministry that regularly updated the data about the evolution of the pandemic since its beginning. Students found different spreadsheets with accumulated data on cases, deaths, ICU admissions. These worksheets also included information by sex, age groups, provinces, and communities. This large amount of data created important limitations. On the one hand, they had to be very careful in defining what they were interested in looking at, that is, to delimit and construct the *system*, as well as the particular questions they wanted to address. That is why the teachers were especially attentive to help them on delimiting the system by selecting the variables to consider, formulating the initial hypothesis to contrast, etc. On the other hand, they needed to learn some techniques to work with Excel to manipulate big spreadsheets easily. They had some experience with Excel but as beginners' users. Then, the mathematics teachers had to dedicate some common sessions to respond to these necessities. For instance, students were asked how to sort a list of data by value, how to filter by defining some criteria (e.g., provinces or age groups), among other utilities.

In the particular case of *Team A*, they were first interested in this initial question: "$Q_{0\text{-Team A}}$: *Which has been the "worst" wave of the pandemics in Spain? Has the second wave been worse than the first one* (as said in the media)*?*". In these first steps, they started to

Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2022). The role of models and modelling in the pandemics' evolution: transposing an 'study and research path' to secondary school. En J. Hodgen, E. Geraniou, G. Bolondi y F. Ferretti (Eds.), *Proceedings of the Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12)* (pp. 1177–1186). Free University of Bozen-Bolzano and ERME. https://hal.science/hal-03758988/document

define what they wanted to address (length, number of infections, hospitalise and death, in global and by different groupings):

Q_{1_dates}: How long did each wave take?

$Q_{1.1}$: When do we start counting the beginning of a wave and its ending?

$Q_{2\_infections}$: How many infections have there been in each wave?
$Q_{2.1}$: How many deaths by sex were there? In total? By sex? By age group?
$Q_{2.2}$: Which was the age group more infected?
$Q_{2.2.1}$: How many are infected between 0-9 years old? Between 10-19? Between 20-29?...
$Q_{3\_hospitalizations}$: How many people were hospitalised during the first wave?
$Q_{3.1}$: How many deaths by sex were there? In total? By sex? By age group?
$Q_{4\_deathss:}$ What is the number of deaths in each wave?
$Q_{4.1:}$ How many deaths by sex were there? In total? By sex? By age group?
$Q_{4.1.1:}$ What can explain that men seem more likely to die?
$Q_{4.1.2:}$ Do we have the same tendency of deaths growth by each group age?

These questions mainly correspond to delimiting the system and representing the data numerically and graphically. The same happened with the rest of the groups, who mostly worked on the graphical representation of the data (once selected and manipulated). For groups who pose some questions about the pandemic evolution, the most common was the graphical representation of data concerning time. For instance, we present the questions made by *Team B*:

$Q_{0\text{-Team B}}$: Which wave has affected Madrid the most?
Q_1: Which wave shows the highest speed in the increase in the number of cases? And less?
$Q_{1.1}$: What is the date with the most cases registered? $Q_{1.2}$: How long has each wave lasted? $Q_{1.3}$: Why are there fewer registered cases on the weekends? $Q_{1.4}$: How do restrictions affect the registration of cases?
$Q_{2:}$ Which wave has the highest number of cases, regardless of its duration?
$Q_{3:}$ Which wave presents the highest number of cases, considering its duration?

This team wanted to analyse the variation in the number of cases. They defined and calculated the *speed* of the number of cases using variation taxes. However, none of them started to propose equation-based models to fit the data and forecast what can happen in the future. All the groups posed questions to describe the data or compare them by age or place, but none of them tried to go further.

In the last session, the teams made presentations to their peers. They discussed questions and suggestions. Interesting ideas emerged: which is the correct way of comparing the data from two or more provinces? From this discussion, they concluded that it was necessary to introduce *relative variables*, dividing the cases by the population, to compare them with accuracy.

Vásquez, S., Barquero, B., y Bosch, M. (2022). The role of models and modelling in the pandemics' evolution: transposing an 'study and research path' to secondary school. En J. Hodgen, E. Geraniou, G. Bolondi y F. Ferretti (Eds.), *Proceedings of the Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12)* (pp. 1177–1186). Free University of Bozen-Bolzano and ERME. https://hal.science/hal-03758988/document

Conclusions and discussion for future implementations

In this paper. we want to focus on the ecology of the SRP. More concretely, about what conditions and limitations the SRP reveals. About the conditions that facilitate the implementation of the SRP, we can detect three different aspects: (1) the *a priori* design of the SRP, (2) the SRP's management tools, and (3) the questions and answers maps.

When preparing the design of the SRP, the choice of the initial question is essential, but so can be the development of the path that will lead to the potential mathematical activity. For this, teachers must develop the pathway in advance: mastering, at a professional level, the activity of mathematical modelling, so that they can identify the student's processes and know-how to redirect them without forcing them or giving them the feeling that they are being deprived of the ability to decide the process of the research. But also, to identify when students open different lines of inquiry and distinguish whether these will lead to a rich mathematical activity. About the SRP management tools, we note the shared teacher diary as a tool that helped teachers keep an overview of the process, even when they did not share it with all the students. On the other hand, the scoring system for student contributions, where teachers had a daily record of which students had made a positive contribution, helped generate class discussions where students shared their progress and commented on their opinions of other students' work. Finally, the *questions and answer map* was found by the students as a rich tool. These students were used to working with this kind of tool, so they had no problems or difficulties understanding what was being asked of them. Also, as it was recommended to build since the beginning of their research, they used this tool to keep track of their daily progress and to present the final product.

Related to the constraints that hindered the progress of the SRP, we can identify (1) the lack of coordination time available, (2) the awareness of the interdisciplinary concept, and (3) the time slots available to do the project. We can highlight the lack of coordination time available to teachers, who rarely have time to share and reflect on what happened in class and have to use moments between corridors or before entering the classroom. Interdisciplinary work needs quality time for the teachers to share opinions and make decisions. The responsibility of this aspect belongs to the school, which has to provide teachers with resources to facilitate the success of the teaching activity. Besides, teachers also have some responsibility for the success of the SRP. They need to be aware of the difference between carrying out a multidisciplinary project or an interdisciplinary one. In this study case, teachers had not been explicitly given this difference. In the next experimentations, we will try to introduce this difference to see if teachers become more involved in disciplines other than their own. Finally, the last constraint to be considered was the time organisation of the project. All the students were taking mathematics, but others were not taking biology or multilingual expression.

They were taking technology, which was not involved in the project. Therefore, some students dedicated more hours than others to the development of the project. In the same way, the mathematics teachers spent 4 hours per week and the teachers of the optional subjects only 3 hours per week. This was an important constraint for both teachers and students, who were unequally involved. This causes hierarchies in the project production and sometimes results in students not being able to participate as they feel disconnected from their team's progress.

Acknowledgment

This research was made thanks to "Col·legi Natzaret", the Spanish ministry projects RTI2018101153-B-C21 and RTI2018-101153-A-C22 (MCIU/AEI/FEDER, UE) and the Erasmus+ Programme IDENTITIES (Grant Agreement n°2019-1- IT02-KA203- 063184).

References

Barquero, B., Bosch, M., & Romo, A. (2018). Mathematical modelling in teacher education: dealing with institutional constraints. *ZDM - Mathematics Education, 50*(1-2), 31-43. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0907-z

Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do?

In S. J. Cho (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 73–96). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-12688-3_9

Bosch, M. (2018). Study and Research Paths: a model for inquiry. In B. Sirakov, P. N. de Souza, & M. Viana (Eds.), *International Congress of Mathematicians* (Vol. 3, pp. 4001–4022). World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.

Chevallard, Y. (2015). Teaching mathematics in tomorrow's society: A case for an oncoming counter paradigm. In S. J. Cho (Ed.), *Proceedings of the 12th international congress on mathematical education* (pp. 173–187). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-12688-3_13

English, L. (2016). Advancing mathematics education research within a STEM environment. In K. Fry, S. Dole, M. Goos, K. Maker, A. Bennison, & J. Visnovska (Eds.), *Research in mathematics education in Australasia 2012-2015* (pp. 353-371). Springer. https://doi.org/10.1007/978-981-101419-2_17

Maass, K., Geiger, V., Ariza, M.R., et al. (2019). The Role of Mathematics in interdisciplinary STEM education. *ZDM Mathematics Education*, *51,* 869–884. https://doi-org/10.1007/s11858-01901100-5

Michelsen, C. (2006). Functions: a modelling tool in mathematics and science. *ZDM - Mathematics Education, 38*(3), 269-280. https://doi-org/10.1007/BF02652810

Pollak, H.O. (1969). How can we teach applications of mathematics? *Educ Stud Math, 2,* 393–404. https://doi.org/10.1007/BF00303471

Saltelli, A., et al. (2020). Five ways to ensure that models serve to society: a manifesto. *Nature, 582,* 482-582. https://doi.org/10.1038/d41586-020-01812-9

Winsløw, C., Matheron, Y., & Mercier, A. (2013). Study and research courses as an epistemological model for didactics. *Educ Stud Math*, *83*(2), 267–284. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9453-3

Apéndice 2. Cartas de aceptación de las publicaciones aprobadas

Apéndice 2.1. Enseñanza de las Ciencias

ENSEÑANZA
DE LAS CIENCIAS
Revista de investigación y experiencias didácticas

Edelmira Badillo Jiménez y Jordi Solbes Matarredona, como editores de la revista Enseñanza de las Ciencias,

C E R T I F I C A N:

Que Susana Vásquez, Berta Barquero y Marianna Bosch son autores del artículo:

Interdisciplinariedad en educación secundaria: un recorrido de estudio e investigación

Dicho artículo ha sido aceptado para su publicación en Enseñanza de las Ciencias, ISSN (digital) 2174-6486, revista internacional editada por la Universitat Autònoma de Barcelona y la Universitat de València (JCR Q4-2020, índices).

Su DOI asignado, que no será funcional hasta que se publique, es: https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.6029

Y para que conste a los efectos oportunos y a petición de la persona interesada, firman el presente documento.

Edelmira Badillo Jiménez

Jordi Solbes Matarredona

Bellaterra (Cerdanyola del Vallès), 9 de julio de 2024

Apéndice 2.1. Extended Abstracts 2022: Proceedings of the 7th International Conference of the Anthropological Theory of the Didactic (CITAD7)

Ignasi Florensa Ferrando como editor del libro "Extended Abstracts 2022: Proceedings of the 7th International Conference on the Anthropological Theory of the Didactic (CITAD7)" con ISBN 978-3-031-55941-9,

C E R T I F I C O:

Que Susana Vásquez, Berta Barquero y Marianna Bosch son autores del capítulo:

Managing an SRP in secondary school: Which padlock is more secure?

Su DOI asignado, que no será funcional hasta que se publique, es: https://doi.org/10.1007/978-3-031-55939-6_33

Dicho artículo ha sido aceptado para su publicación en el libro "Extended Abstracts 2022: Proceedings of the 7th International Conference on the Anthropological Theory of the Didactic (CITAD7)" publicado por Birkhäuser – SpirngerNature.

Y para que conste a los efectos oportunos y a petición de la persona interesada, firma el presente documento.

Firmado por FLORENSA
FERRANDO IGNASI -
***9826** el día
10/07/2024 con un

Dr. Ignasi Florensa Ferrando

Barcelona, 10 de julio 2024

Apéndice 3. Materiales diseñados

Apéndice 3.1. REI del COVID (4º ESO)

Enlace al material:

https://www.canva.com/design/DAGIwWB4dvg/Q1gvcFKvA3HozfH9-8JFcA/view?utm_content=DAGIwWB4dvg&utm_campaign=designshare&utm_medium=link&utm_source=editor

Recorregut d'estudi i investigació

LA COVID I LES SEVES VARIANTS

Què en sabem fins ara?

Matemàtiques
Biologia
Expressió plurilingüe
Tecnologia

4ESO - 2022/23

OBJECTIU

Quina variant de la COVID ha estat la pitjor?

15 de març de 2020 es va produir a tot el mon un fenòmen únic: el confinament absolut de la població. La raó? Una malaltia respiratòria, la COVID19. Des d'aleshores aquesta paraula, COVID, ens ha envoltat i ha limitat totes les nostres activitats: des de les més simples, com anar al supermercat, com les més complexes: la feina, els estudis o les relacions socials.

Des del principi de la pandèmia la comunitat científica ha pres un paper fonamental: la presa de desicions. Moltes vegades, equivocades, però sempre basades en les dades disponibles i a partir de les evidències.

La població general (nosaltres) hem hagut de conviure en aquest mon d'informacions variades i desconcertantment contradictòries: "les vacunes no funcionen! cal una dosi de reforç! les mascaretes no serveixen de res! El que s'ha de tenir és un sistema inmune fort... Ens hem de vacunar! La gent gran és la més susceptible... "
Quanta de tota aquesta informació ha acabat sent certa? Estem en el moment i amb la informació suficient com per a poder estar-ne segurs de tenir les respostes?

PROCÉS D'INVESTIGACIÓ

Observació de les dades

Tenim a la nostra disposició les dades de l'evolució de la malaltia. **Genereu preguntes: Què ens poden revelar les dades sobre les diferents variants del virus?**

Generació de preguntes

Haureu de fer una **pluja de preguntes**, amb les preguntes interessants a estudiar

Lectura d'articles

Ara que "ja ha passat", podem mirar enrere i buscar les notícies d'aquest parell d'anys, què es deia al principi de la COVID? Quines de les afirmacions fetes durant la pandèmia sobre les variants han resultat certes? quines falses?

Recerca experimental

Organitzeu les dades, **exploreu-les i contrasteu** les vostres hipòtesis.

Les eines de simulació, ens poden ajudar a prendre decisions?

Recerca d'informació

Utilitzeu les eines disponibles per fer una investigació i així poder donar resposta a la vostra **qüestió inicial** i a les **qüestions derivades** d'aquesta

Presentació d'especialistes

Feu una exposició parcial de la vostra investigació especialitzada de la vostra optativa.
Utilitzeu els descobriments/resultats dels altres grups en la vostra pròpia investigació.

Elaboració d'un article científic

Heu d'escriure un article científic descrivint els vostres resultats.

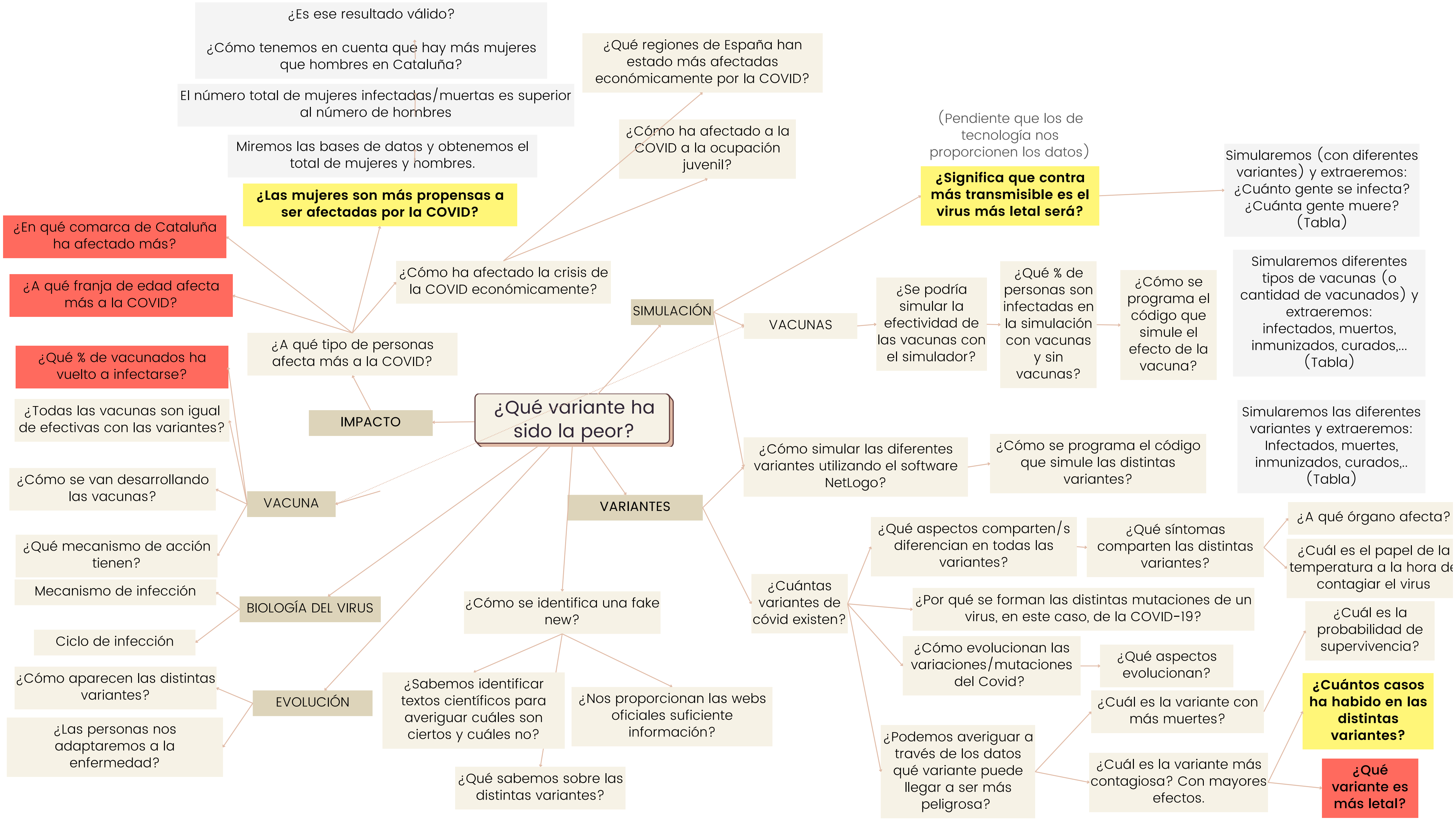
El vostre article ha d'incloure totes les disciplines treballades

Elaboració d'un pòster científic

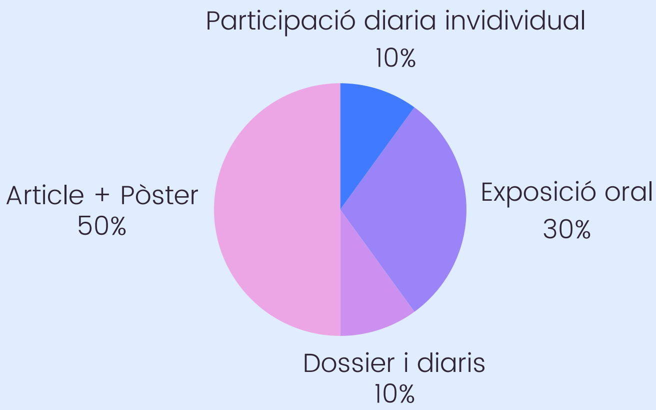
A partir del vostre article, elaboreu un pòster científic que sintetitzi la informació.

Presenteu els resultats

Defenseu oralment el póster del vostre article en una **exposició oral.**


¿Es ese resultado válido?
¿Cómo tenemos en cuenta que hay más mujeres que hombres en Cataluña?
El número total de mujeres infectadas/muertas es superior al número de hombres
Miremos las bases de datos y obtenemos el total de mujeres y hombres.
¿Las mujeres son más propensas a ser afectadas por la COVID?
¿Qué regiones de España han estado más afectadas económicamente por la COVID?
¿Cómo ha afectado a la COVID a la ocupación juvenil?
¿Cómo ha afectado la crisis de la COVID económicamente?
(Pendiente que los de tecnología nos proporcionen los datos)
¿Significa que contra más transmisible es el virus más letal será?
Simularemos (con diferentes variantes) y extraeremos: ¿Cuánto gente se infecta? ¿Cuánta gente muere? (Tabla)
¿En qué comarca de Cataluña ha afectado más?
¿A qué franja de edad afecta más a la COVID?
¿A qué tipo de personas afecta más a la COVID?
SIMULACIÓN
VACUNAS
¿Se podría simular la efectividad de las vacunas con el simulador?
¿Qué % de personas son infectadas en la simulación con vacunas y sin vacunas?
¿Cómo se programa el código que simule el efecto de la vacuna?
Simularemos diferentes tipos de vacunas (o cantidad de vacunados) y extraeremos: infectados, muertos, inmunizados, curados,... (Tabla)
¿Qué % de vacunados ha vuelto a infectarse?
¿Todas las vacunas son igual de efectivas con las variantes?
IMPACTO
¿Qué variante ha sido la peor?
Simularemos las diferentes variantes y extraeremos: Infectados, muertes, inmunizados, curados,.. (Tabla)
¿Cómo simular las diferentes variantes utilizando el software NetLogo?
¿Cómo se programa el código que simule las distintas variantes?
¿Cómo se van desarrollando las vacunas?
VACUNA
VARIANTES
¿Qué mecanismo de acción tienen?
¿Qué aspectos comparten/s diferencian en todas las variantes?
¿Qué síntomas comparten las distintas variantes?
¿A qué órgano afecta?
¿Cuál es el papel de la temperatura a la hora de contagiar el virus
Mecanismo de infección
BIOLOGÍA DEL VIRUS
¿Cómo se identifica una fake new?
¿Cuántas variantes de cóvid existen?
¿Por qué se forman las distintas mutaciones de un virus, en este caso, de la COVID-19?
Ciclo de infección
¿Cuál es la probabilidad de supervivencia?
¿Cómo aparecen las distintas variantes?
EVOLUCIÓN
¿Sabemos identificar textos científicos para averiguar cuáles son ciertos y cuáles no?
¿Nos proporcionan las webs oficiales suficiente información?
¿Cómo evolucionan las variaciones/mutaciones del Covid?
¿Qué aspectos evolucionan?
¿Cuál es la variante con más muertes?
¿Cuántos casos ha habido en las distintas variantes?
¿Las personas nos adaptaremos a la enfermedad?
¿Qué sabemos sobre las distintas variantes?
¿Podemos averiguar a través de los datos qué variante puede llegar a ser más peligrosa?
¿Cuál es la variante más contagiosa? Con mayores efectos.
¿Qué variante es más letal?

AVALUACIÓ



Participació diaria individual

Cada vegada que feu una **participació** a les posades en comú, guanyaras 1 punt. Tothom comença amb 5 punts.

Els comportaments incorrectes, no portar el material, no participar al grup... també poden implicar punts negatius.

Dossier i diaris

Durant la sessió de treball, un membre de l'equip ha d'omplir el diari amb tot allò que hagi passat a la sessió.

En el vostre dossier de treball ha de contenir:

- Diaris
- Recull d'informació.
- Article (enllaç)
- Póster (enllaç)

Presentació oral

Avaluació individual

Article científic i pòster

Avaluació grupal

LECTURA D'ARTICLES

Què s'ha dit sobre la COVID?

Tasca

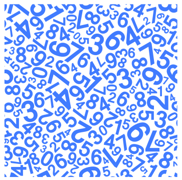
Llegiu tots els articles.
Escolliu-ne 3 que hagueu trobat interessants.
En el vostre dossier de treball, completeu:

- Títol de l'article
- Data de publicació
- Idees principals de l'article
- Reflexió: Quines qüestions es podrien traslladar a la vostra investigació?

OBSERVACIÓ DE DADES

Quina informació ens poden revelar les dades sobre les diferents variants?

Dades obertes de Catalunya



Dades

Quina informació en podem extreure d'aquestes dades?

Matemàtiques
Estadística
Fulls de càlcul
Anàlisi de dades

Informació

Tasca

Seleccioneu un registre, i inspeccioneu les dades.

Afegiu preguntes que es puguin estudiar al vostre dossier de treball.

Exemples:
Amb les dades disponibles podem mirar...?

GENERACIÓ DE PREGUNTES

Pluja de preguntes

Les nostres preguntes

Cada grup, haureu de fer una pluja de preguntes, relacionades amb les variants de la COVID.

- Què m'interessa saber?
- Què em preocupa?
- Què he sentit que voldria comprovar?
- ...

Tasca

En el vostre document de treball elaboreu un llistat amb un mínim de 10 preguntes i **classifiqueu-les segons les disciplines** que treballem:
Matemàtiques - Biologia - Tecnologia - Social

*Una pregunta pot estar en més d'una disciplina!!

Feu-ne una selecció de les més interessants i compartiu-les al padlet de la classe.

DESENVOLUPAMENT DE LA INVESTIGACIÓ

Investigació

MARC TEÒRIC

Recerca d'informació

PART EXPERIMENTAL

Anàlisi de dades
Simulació

MARC TEÒRIC

Recerca d'informació

Redacció pròpia

No feu copiar-enganxar!

Fonts fiables

No tot és vàlid!!

Referències

Guardeu l'adreça de la font consultada.

Tasca

En el vostre document de treball elaboreu un llistat amb les diferents fonts trobades (mínim 8) i escriviu-ne un **resum de 5 línies** amb les vostres paraules.

Afegiu sempre l'**adreça de la font consultada** per a respondre cada pregunta!

PART EXPERIMENTAL

Anàlisi de dades

Selecció de les dades

No necessitareu totes les dades disponibles. Creeu un full de càlcul nou copiant **només** les dades que creieu que us aportaran la informació necessària.

Descripció de les dades

Amb les dades que heu seleccionat, elaboreu diferents tipus de gràfics. Com a mínim

- 1 gràfic d'evolució (x = temps)
- 1 gràfic comparatiu

Analitzeu les dades

Utilitzeu les eines dels fulls de càlcul per donar resposta a les vostres subpreguntes d'investigació.

Simulació

NetLogo

Treballeu amb el programa per fer la simulació de diferents escenaris i reflexioneu sobre:

Com ens poden ajudar les eines de simulació per a prendre desicions?

PRESENTACIONS D'ESPECIALISTES

Ara que ja heu investigat sobre el tema haureu de preparar una presentació per compartir amb la resta del grup el que heu trobat.

Només haureu d'exposar la investigació relacionada amb la optativa!

La resta de grups haureu d'utilitzar la informació compartida d'algun dels grups que exposen.

Tasca

Presentació

Entregueu el document de la presentació en format .pdf al **classroom i al padlet!**

Al document heu de deixar escrit tots els detalls i respostes, per a que els altres grups ho puguin consultar després!

ELABORACIÓ D'UN ARTICLE CIENTÍFIC

Comunicació dels resultats

Introducció

- Resum de 10 línies del contingut del treball.
- Enunciat de les qüestions de recerca.
- Enunciat de les hipòtesis de recerca.
- Explicació del mètode utilitzat (qué heu fet, com us heu organitzat, quines eines heu utilitzat,...)

Conclusions i bibliografia

- 10 línies de resum de les conclusions
- Bibliografia amb el llistat de referències (organitzades per seccions) al final del treball.

Marc teòric

- Els títols han de ser les preguntes d'investigació.
- Ordenat per disciplines.
- Redacció pròpia.
- Referències indicades en notes al peu de pàgina.
- Informació de biologia: No només pels que fan biologia. És un apartat que heu de tenir TOTS!

Marc Experimental

- La vostra part experimental serà l'anàlisi numèrica de les dades de l'evolució de la COVID.
- Ha de contenir els següents apartats:
  - Descripció de les dades. Com son les dades? Per descriure les dades podeu utilitzar gràfics.
  - Anàlisi de les dades. Quines conclusions podem extreure a partir de les dades?
  - Simulació: captures del programa, explicació de la simulació realitzada i conclusions. (Informació de Tecno. No només pels que fan Tecno. És un apartat que heu de tenir TOTS!)

PRESENTACIÓ DELS RESULTATS

Comunicació dels resultats

Elaboració d'un pòster científic

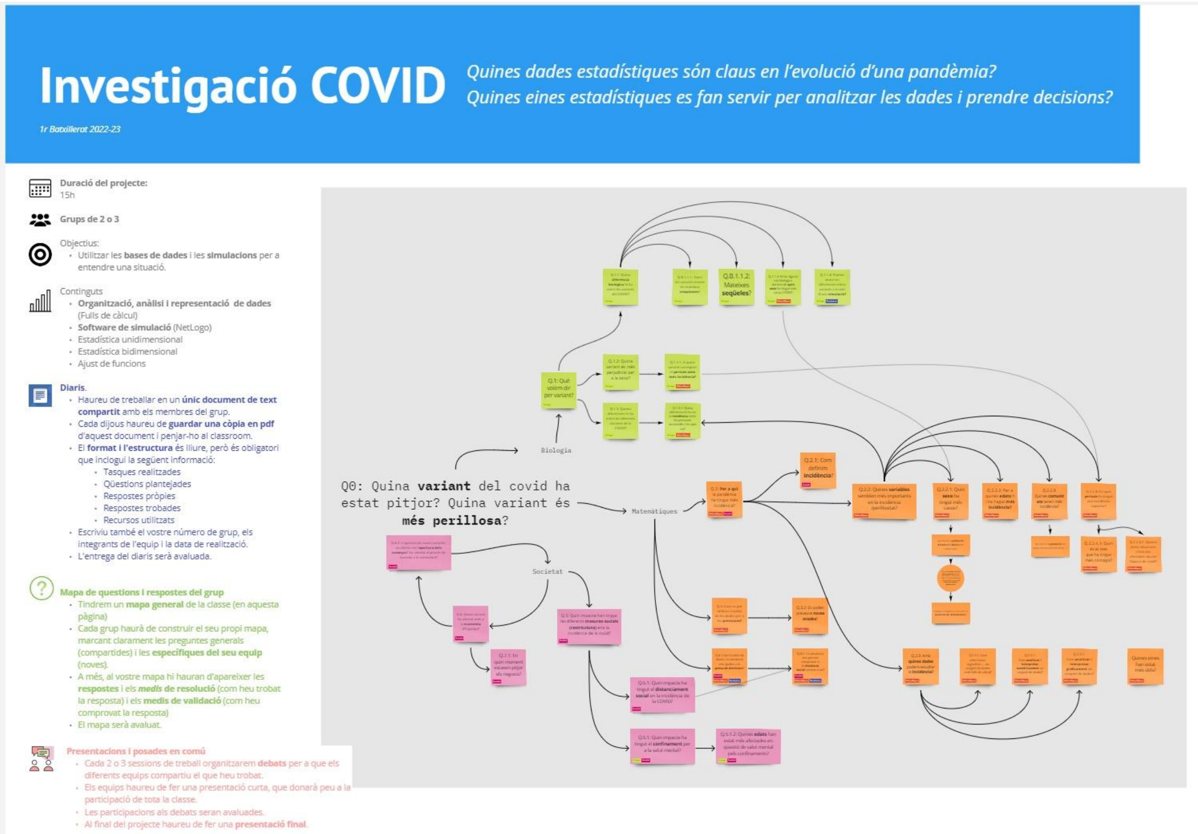
A partir del vostre article, elaboreu un póster científic.

Exposició oral

només haureu de presentar el vostre pòster, a partir d'aquest, exposeu la vostra investigació.

Apéndice 3.2. REI sobre el COVID (1.º de Bachillerato)

https://miro.com/app/board/uXjVPYuMo5A=/?share_link_id=676652292638&shareablePresentation=1



Apéndice 3.3. Materiales del REI “¿Qué candado es más seguro?” (4.º ESO)

Enlace al material:

https://www.canva.com/design/DAGITq0V9-A/QTNhkOm4hCeLGnrZD9OaNQ/view?utm_content=DAGITq0V9-A&utm_campaign=designshare&utm_medium=link&utm_source=editor

Membres de l'equip:

- ______________________________
- ______________________________
- ______________________________
- ______________________________
- ______________________________

Quin cadenat és més segur?

Matemàtiques

4t d'ESO 2023-24

Labinquiry

Objectiu del problema

De la següent col·lecció de cadenats, quin cadenat és més **segur**?

Quines preguntes o qüestions proposeu abordar a partir de la presentada?

1 Informació sobre els cadenats

Cadenat 1: Cadenat de numeració de ruleta

- Es pot escollir qualsevol contrasenya de 4 nombres.
- Les caselles són discos que giren, amb 10 nombres compresos del 0 al 9.
- Per poder obrir el cadenat, cal que es moguin els discos de manera que la contrasenya aparegui correctament situada en cadascuna de les 4 caselles.

Cadenat 2: Cadenat polsador

- Es pot escollir una contrasenya de com a màxim 3 xifres: 1, 2 o 3 xifres.
- El cadenat no detecta l’ordre amb el que polsem les xifres.
- Per obrir-lo s’ha de desplaçar la pestanya inferior.

Cadenat 3: Cadenat amb dates

- La contrasenya pot ser qualsevol data que tingui el format DD – M – AA
- Són permeses també dates irreals: 35 – GENER – 24
- Per obrir-lo cal moure els discos per a que la data quedi visible, en les posicions que corresponen a DD, M o AA.

Cadenat 4: Cadenat de paraules

- Es pot escollir qualsevol contrasenya amb paraules de 5 lletres.
- Només hi ha disponibles 10 lletres a cada disc.
- El cadenat no té manera de comprovar si la paraula introduïda té sentit o no. Per tant, la contrasenya pot ser una paraula sense sentit.
- Hi ha lletres repetides als diferents discos.
- Per obrir-lo cal que es moguin els discos de manera que la contrasenya aparegui en la posició contigua a la pestanya.

Cadenat 5: Cadenat direccional

- Es pot escollir qualsevol contrasenya de 4 direccions (dalt, baix, dreta, esquerra)
- Una contrasenya pot tenir elements repetits.
- Per introduir una nova contrasenya s’ha de pressionar 2 vegades contra el cadenat.
- Quan el codi sigui correcte, el cadenat es podrà obrir.

Cadenat 6: Cadenat de caixa forta

- Es pot escollir qualsevol contrasenya amb 3 nombres, entre 0 i 39.
- La contrasenya no admet xifres repetides

Vocabulari sobre els cadenats

VOCABULARI

Codi:
Possible contrasenya que es pot introduir al cadenat.

Elements del codi:
Nombres, lletres, símbols,... que composen un codi.

Casella:
Espai (físic o no) del cadenat on s'introdueixen els elements del codi.

Elements de la casella:
Nombres, lletres, símbols,... que es poden inserir en una casella.

Clau o contrasenya:
Codi correcte. Quan l'introduïm, el cadenat s'obre.

Codi:
1234, 2930, 1240, ... entre d'altres possibilitats.

Elements del codi:
El codi 1234 té 4 elements: 1, 2, 3 i 4.

Casella:
Té 4 caselles. Cada espai on inserim una xifra

Elements de la casella:
Números entre 0 i 9. Opcions que tenim a cada casella.

Clau o contrasenya:
4921 (Perquè quan l'inserim, s'obre)

2 Quants codis admet cada cadenat?

Cadenat número:

INFORMACIÓ DEL CADENAT

Quines són les característiques del cadenats que esteu estudiant?

SIMULACIÓ DE POSSIBLES CODIS

- Com generar la llista (encara que sigui parcial) de possibles codis que admet el cadenat?
- Quin és el total de codis que admet el vostre cadenat?
- Si cal, afegiu el vostre treball en fulls extra

Espai per càlculs/diagrames/idees...

Quants codis admet cada cadenat?

Espai per càlculs/diagrames/idees...

3 Quants codis admet cada cadenat?

Cadenat número: Nombre de codis:

JUSTIFICACIÓ DE COM S'HA TROBAT EL NOMBRE DE CODIS

- Quines estratègies o tècniques de recompte s'han utilitzat?

- Com ens hem assegurat que no n'hem comptat codis de més o de menys?

Quants codis admet cada cadenat?

- Si hem d'obrir el cadenat provant tots els codis, quant temps estimeu que tardaríeu per obrir el cadenat?

- Si tenim el mateix cadenat amb una casella més, quants codis totals té?

- I si tenim un elements més per casella? Què passaria llavors?

4 Quants codis admet cada cadenat?

Ompliu la taula amb els resultats de la resta de cadenats, si ho necessiteu, pregunteu a l'equip encarregat.

Cadenat	**Càlcul** del nombre de codis	**Resultat** del nombre de codis	**Temps** aproximat per obrir-lo
			
			
			
			
			
			

Quin cadenat és més segur?

Cadenat 1: Cadenat de numeració de ruleta

Cadenat 2: Cadenat polsador

Cadenat 3: Cadenat amb dates

Cadenat 4: Cadenat de paraules

Cadenat 5: Cadenat direccional

Cadenat 6: Cadenat de caixa forta

RESPOSTA FINAL

Elaboreu una resposta final, completa, a la pregunta objectiu

6 Modelització de cadenats

Comparem les tècniques utilitzades a cada cas...

Què caracteritza un model de cadenat?

r = nombre de caselles   n = nombre d'elements de caselles

Cadenat	**Variables**	**Càlcul** particular	**Fórmula escrita** (explicació)	**Fórmula algebraica** (m,n)
	r = n =			
	r = n =			
	r = n =			

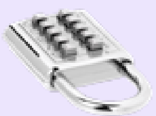
5 Cadenats amb nova informació

Ens han donat més informació sobre la contrasenya...

Podem trobar el nombre de codis amb la nova informació?

Cadenat	Nova informació	**Resultat** del nombre de codis
	**Cadenat 7:** Cadenat 1 de numeració de ruleta, del que sabem que la contrasenya no conté xifres repetides.	

Justificació i càlculs

	**Cadenat 8:** Cadenat 2 polsador, del que sabem amb seguretat que la contrasenya té 7 xifres.	

Justificació i càlculs

Modelització de cadenats

Comparem les tècniques utilitzades a cada cas...

Què caracteritza un model de cadenat?

r = nombre de caselles   n = nombre d'elements de caselles

Cadenat	**Variables**	**Càlcul** particular	**Fórmula escrita** (explicació)	**Fórmula algebraica** (m,n)
	r = n =			
	r = n =			
	r = n =			

Cadenats amb nova informació

Cadenat 9:
Cadenat 3 amb dates, del que sabem que ni els dies ni els anys contenen xifres repetides.

Justificació i càlculs

Cadenat 10:
Cadenat 5 direccional, del que sabem que la contrasenya no conté direccions repetides.

Justificació i càlculs

Cadenat 11:
Cadenat 6 de caixa forta, del que sabem que la contrasenya té 2 xifres repetides.

Justificació i càlculs

r caselles
n elements a cada casella

INFLUEIX L'ORDRE?

- **Si** →  **ES PODEN REPETIR?**
  - **Si**  → **Variació amb repetició**
  - **No**  → **Variació sense repetició** → (Cas particular) $n = r$ **Permutació de n elements**
- **No**  → **Combinació**

Nom del model	Fórmula	Respon a la pregunta...
Variació amb repetició de n elements considerats de r en r.	$VR_{n,r} = n^r$	De quantes maneres diferents podem elegir codis amb r caselles i n elements a cada casella i si **podem repetir elements**?
Variació sense repetició de n elements considerats de r en r.	$P_{n,r} = \dfrac{n!}{(n-r)!}$	De quantes maneres diferents podem elegir codis amb r caselles i n elements a cada casella, si **no podem repetir elements**?
(Cas particular) $n = r$ **Permutació de n elements**	$P_{n,n} = P_n = n!$	De quantes maneres diferents podem **ordenar una determinat codi** de n elements?
Combinació de n elements considerats de r en r.	$C_{n,r} = \binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$	De quantes maneres diferents podem elegir **combinacions** amb r caselles i n elements a cada casella, si les combinacions **no poden repetir elements i és indiferent l'ordre dels elements**?

Cadenat de numeració de ruleta

Es poden triar combinacions de 4 números.
Cada casella té 10 elements.
Una combinació pot tenir elements repetits.

$$10^4$$

Cadenat de caixa forta

Es poden triar combinacions de 3 números.
Cada casella té 40 elements.
Una combinació no pot tenir elements repetits.

$$\frac{40!}{(40-3)!} = \frac{40!}{37!} = \frac{40\cdot 39\cdot 38\cdot \cancel{37\cdot 36\cdot 35 \ldots \cdot 1}}{\cancel{37\cdot 36\cdot 35\cdot \ldots \cdot 1}} = 40\cdot 39\cdot 38$$

Cadenat direccional (restriccions)

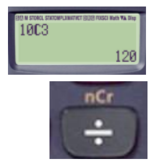
Es poden triar combinacions de 4 elements ⬆⬇➡⬅
Una combinació no pot tenir elements repetits.

$$4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$$

Cadenat pulsador

Hi ha 10 tecles per elegir, de les quals s'han de triar només 3
Combinacions amb les mateixes xifres, però desordenades compten com la mateixa combinació.

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!\,(10-3)!} = \frac{10!}{3!\cdot 7!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot \cancel{7!}}{3!\cdot \cancel{7!}} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2} = \frac{720}{6}$$



7 Problemes de combinatòria

Nom i cognoms: ___________________________________

Funcionen aquests models per resoldre més problemes amb contextos diferents de cadenats?

r = nombre de caselles   n = nombre d'elements de caselles

Quantes maneres diferents hi ha de... ?	Exemples de codis	Influeix l'ordre? Es poden repetir?	r = ? n = ?	Procediment	Resposta
Elegir president, secretari i portaveu d'un grup de 12 persones si una persona no pot tenir més d'un càrrec.	Presi. Secr. Port: 1 2 3 3 2 1	Influeix l'ordre? Sí 123 (President 1) 321 (Presiden 3) Es poden repetir? No ~~111~~	r = 3 (caselles) n = 12 (elements)		
Elegir president, secretari i portaveu d'un grup de 12 persones si una persona pot tenir més d'un càrrec.					
Formar paraules de tres lletres diferents amb les lletres de la paraula PERMUTACIÓ.					
Pintar una bandera amb 3 colors disponibles en disposició horitzonal i hem de utilitzar un mínim de 2 i un màxim de 3 ino es poden repetir els colors.					
Elegir un gelat si hi ha 6 sabors diferents i ens permeten elegir-ne 2 sabors diferents.					
Amb 4 pots de pintura de colors diferents, quantes mescles de 2 colors diferents en podem fer.					
Contestar-ne 4 preguntes d'un llistat de 5.					
Assignar 2 germans bessons de manera que no coincideixin a la mateixa classe si l'escola té 4 classes de 3r d'ESO.					
Muntar una polsera de boles si tenim disponibles 10 boles, totes de colors diferents.					
Organitzar els deures de 3 assignatures durant una tarda.					

Problemes de combinatòria

Quantes maneres diferents hi ha de... ?	Exemples de codis	Influeix l'ordre? Es poden repetir?	r = ? n = ?	Procediment	Resposta
Combinar 10 samarretes durant una setmana per tal de no repetir samarreta cap dia de la setmana.					
Combinar les samarretes del cas anterior amb 3 pantalons					
Fer matrícules de vehicles que consten de 4 nombres i 3 lletres de l'alfabet, excloent-ne les vocals.					
Seleccionar 6 nombres diferents d'un total de 50.					
Situar-se 5 integrants d'un equip de bàsquet si s'han de col·locar en fila per fer un tir a la cistella.					
Fer grups diferents de 5 persones en una classe de 25 alumnes.					
Formar nombres de 4 xifres diferents amb els dígits 0,2,3,4,5,8 i 9.					
Fer grups diferents de treballadors si en total hi treballen 20 persones i s'han de fer grups de 4.					
Elegir el nombre PIN d'un telèfon mòbil format per 4 dígits.					
Fer creuaments de partits de futbol si n'hi ha 20 equips i tots han de jugar contra tots a l'anada i a la tornada.					
Es poden seure 5 amics en un cotxe si n'hi ha 2 amb carnet.					
Elegir 3 entrepans diferents d'un total de 6 tipus d'entrepans.					

Apéndice 3.4. Adaptación del PBL: Apocalipsis Zombi (3.º ESO)

Enlace al material:

https://www.canva.com/design/DAGIwZHaBTY/WJji6It67tICfKEiBWd5Rw/view?utm_content=DAGIwZHaBTY&utm_campaign=designshare&utm_medium=link&utm_source=editor

MEMBRES DE L'EQUIP

APOCALIPSI ZOMBI

SERÀ LA FI DE LA HUMANITAT?

Matemàtiques

3r d'ESO 2023-24

ENUNCIAT DEL PROBLEMA

APOCALIPSI ZOMBI

Subratlleu allò que considereu més important del text

Després del terratrèmol d'Haití, un brot de còlera es va expandir ràpidament pel país. El doctor Crosby va reunir un equip de metges, infermeres i voluntaris a l'Hospital Universitari de Port-au-Prince i de seguida van començar a tractar els milers de persones afectades. Els mitjans de comunicació van dir que era "l'epidèmia de còlera més greu dels últims anys".

En un dels llits de l'hospital, una pacient estava rebent sals de rehidratació per via oral. Al principi, responia satisfactòriament al tractament, però, de sobte, va començar a tenir convulsions molt violentes. Després, la seva expressió es va tornar seriosa, es va aixecar com un autòmat i se'n va anar caminant. L'endemà va mossegar un metge amb què es va creuar a la sala d'operacions i dos homes que van intentar reduir-la sense èxit. Un dia més tard, aquestes tres persones també van patir convulsions i van mossegar tres persones més cadascuna.

El doctor Crosby hi va estar present i va entendre que allò era pitjor que el còlera. El mite dels morts vivents s'havia fet realitat.

S'havia d'afanyar. Va anar a buscar uns companys i van córrer a tancar-se al laboratori del soterrani. Allà treballarien en un antídot que contrarestés els efectes de la mossegada i curés els zombis.

En deu dies el van trobar i funcionava! L'havien provat en una persona infectada i aquesta havia tornat a la normalitat, així que ara havien de produir-lo ràpidament en grans quantitats. Per això es van posar en contacte amb altres hospitals; els van donar la fórmula de l'antídot i els van demanar que la donessin a conèixer.

Serà la fi de la humanitat?

PREMISSES DEL MODEL

Informació del problema que utilitzeu o suposicions que feu

SIMULACIÓ PER A ____ DIES

Elaboreu una taula de la simulació

Dies	**Noves** persones infectades	**Total** persones infectades

REPRESENTACIÓ GRÀFICA

A partir de la taula anterior, representeu les dades en un gràfic

CONCLUSIONS

A partir de l'estudi de les dades, quines conclusions extraieu?

PREMISSES DEL MODEL

semblances

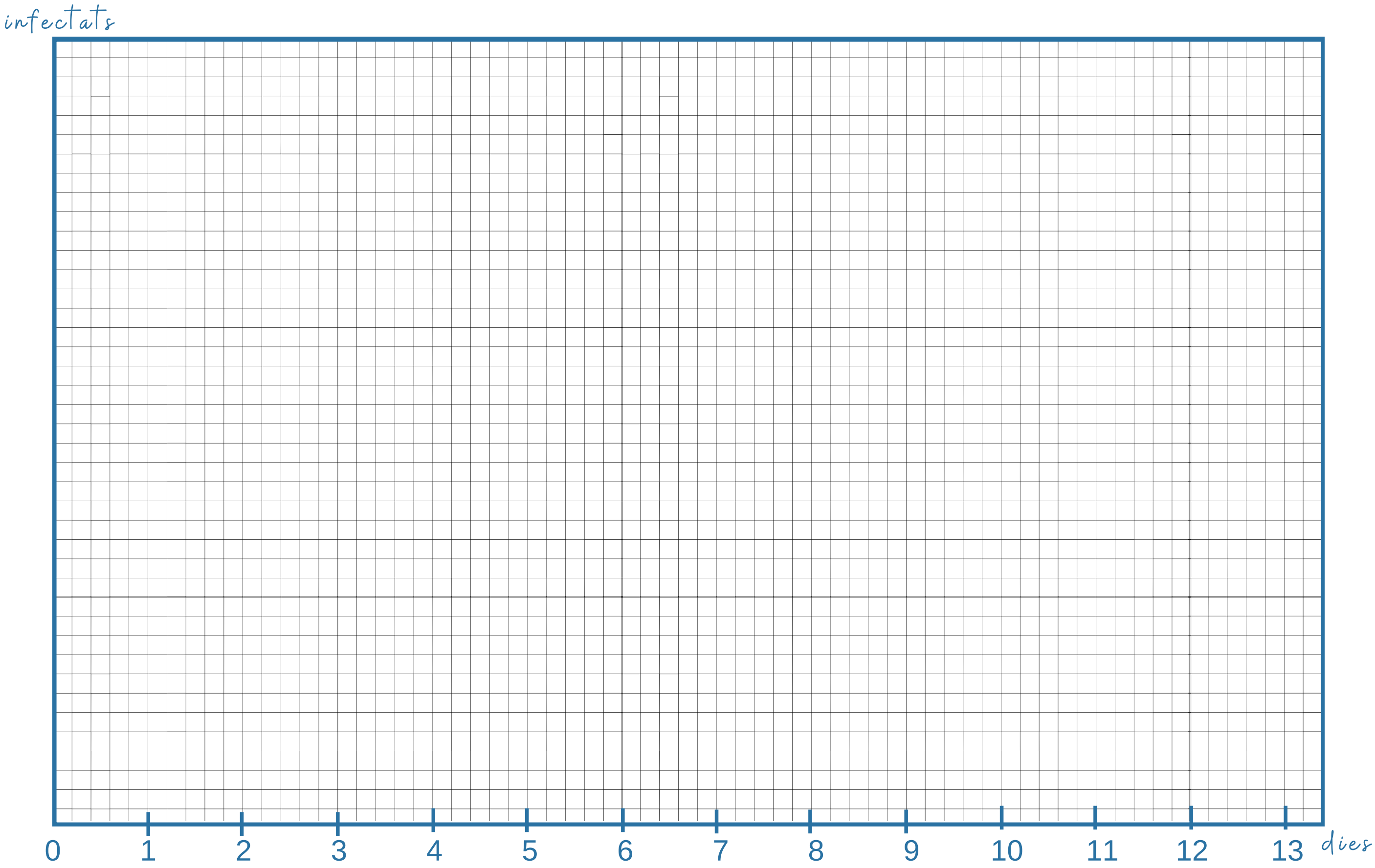
diferències

SIMULACIÓ PER A ____ DIES

Elaboreu una taula de la simulació, amb les dades de tots els models

REPRESENTACIÓ GRÀFICA

A partir de la taula anterior, representeu les dades en un gràfic



FÓRMULA ALGEBRÀICA DEL MODEL

*Per a cada model, deduïu una **fórmula** que **modelitzi** les dades*

EL MODEL AMB ANTÍDOT

PREMISSES DEL MODEL

Informació del problema que utilitzeu o suposicions que feu

SIMULACIÓ PER A ____ DIES

Elaboreu una taula de la simulació

Dies	**Noves** persones infectades	**Total** persones infectades	**Nombre** de malalts curats	**Total** persones infectades

EL MODEL AMB ANTÍDOT

REPRESENTACIÓ GRÀFICA

A partir de la taula anterior, representeu les dades en un gràfic

infectats

dies

CONCLUSIONS

A partir de l'estudi de les dades, quines conclusions extraieu?

RESPOSTA FINAL

SERÀ LA FI DE LA HUMANITAT?

Després de tot l'estudi realitzat, expliqueu el procés seguit i sintetizeu una resposta final.

VALORACIÓ DEL TREBALL COOPERATIU

Escriviu les vostres impressions, com a grup, del com heu treballat com a grup. Us heu entés? Quines dificultats heu tingut? Com les heu superat?

CONTINGUT MATEMÀTIC TREBALLAT

Quin contingut matemàtic identifiqueu al vostre treball? Quines estratègies, tècniques, operacions, raonaments... matemàtics heu desenvolupat?

GUIÓ DE PRESENTACIÓ

DIARI DE TREBALL

DATA:

QÜESTIONS I RESPOSTES

Escriviu les qüestions que heu treballat avui i les respostes que heu trobat. Si hi ha alguna qüestió que no heu acabat, afegiu un asterisc a la resposta.

TASQUES REALITZADES

Descriviu les tasques que heu realitzat avui. Afegiu si es tracta d'una tasca grupal o individual.

MEMBRES PRESENTS

DIARI REVISAT

A omplir només per la professora

DIARI DE TREBALL

DATA:

QÜESTIONS I RESPOSTES

Escriviu les qüestions que heu treballat avui i les respostes que heu trobat. Si hi ha alguna qüestió que no heu acabat, afegiu un asterisc a la resposta.

TASQUES REALITZADES

Descriviu les tasques que heu realitzat avui. Afegiu si es tracta d'una tasca grupal o individual.

MEMBRES PRESENTS

DIARI REVISAT

A omplir només per la professora

Alumnes avaluats	1.	2.	3.	4.

VALORACIÓ INDIVIDUAL

1 (no assolit) - 2(satisfactori) - 3(notable) - 4(excel•lent)

Criteri	Alumne 1	Alumne 2	Alumne 3	Alumne 4
Promig de les notes de la coavaluació				
Aportacions i treball a classe				

VALORACIÓ DE L'EXPOSICIÓ ORAL

Criteri	Valoració
Estructura del treball (10%) • S'identifica un ordre clar per l'estruturació tant del treball com de l'exposició. • Es demostra que s'ha seguit un procés d'indagació (preguntes, hipòtesis, conclusions,...)	
Correcció matemàtica (20%) • No hi ha errors de càlcul • S'utilitza la notació matemàtica adeqüada	
Vocabulari matemàtic (25%) • S'utilitzen correctament i es demostra domini de les paraules i del seu significat: premisses, model, hipòtesis, resultats, càlculs, conclusions, representació gràfica, fòrmula, potència,...	
Profundiment de la resposta final (25%) • Es comparen els diferents models sense antídot. Cadascun dels models és interessant i aporta valor a la comparació i l'estudi del model general. • Es comparen diferents models sense antídot, donant una resposta final completa, amb escenaris variats.	
Originalitat (20%) • El treball conté material propi i original • Es fan aportacions úniques, interessants i significatives	

COMENTARIS DE LA PROFESSORA

Punts forts

Aspectes a millorar

CO-AVALUACIÓ

Alumnes avaluadors	1.	2.	3.	4.
Alumnes avaluats	1.	2.	3.	4.

VALORACIÓ DE L'EXPOSICIÓ ORAL

1 (no assolit) - 2(satisfactori) - 3(notable) - 4(excel•lent)

Criteri	Alumne 1	Alumne 2	Alumne 3	Alumne 4
Aportació significativa: el que diu té importància pel treball i és interessant.				
Estructura del discurs i preparació prèvia: no llegeix o llegeix poc i es nota que s'ho ha preparat.				
Llenguatge verbal (fluidesa, pronúncia i correcció lingüística)				
Llenguatge no verbal (postura, mirada, gestos, moviment, to de veu,...)				

COMENTARIS GENERALS DEL GRUP

Punts forts

Aspectes a millorar

COMENTARIS INDIVIDUALS

ALUMNE 1

Punts forts

Aspectes a millorar

ALUMNE 2

Punts forts

Aspectes a millorar

ALUMNE 3

Punts forts

Aspectes a millorar

ALUMNE 4

Punts forts

Aspectes a millorar