Programación lineal

Jesús Getán y Eva Boj

Facultat d'Economia i Empresa
Universitat de Barcelona

Marzo de 2014

Un Programa lineal consta de:

- Función objetivo.
- Modeliza el problema económico.
- Restricciones.
- Nos marcan las limitaciones del modelo.
- Restricciones de positividad.
- Característica de los modelos económicos.

Un Programa lineal consta de:

- Función objetivo.
- Modeliza el problema económico.
- Restricciones.
- Nos marcan las limitaciones del modelo.
- Restricciones de positividad.
- Característica de los modelos económicos.

Un Programa lineal consta de:

- Función objetivo.
- Modeliza el problema económico.
- Restricciones.
- Nos marcan las limitaciones del modelo.
- Restricciones de positividad.
- Característica de los modelos económicos.

Un Programa lineal consta de:

- Función objetivo.
- Modeliza el problema económico.
- Restricciones.
- Nos marcan las limitaciones del modelo.
- Restricciones de positividad.
- Característica de los modelos económicos.

Un Programa lineal consta de:

- Función objetivo.
- Modeliza el problema económico.
- Restricciones.
- Nos marcan las limitaciones del modelo.
- Restricciones de positividad.
- Característica de los modelos económicos.

Un Programa lineal consta de:

- Función objetivo.
- Modeliza el problema económico.
- Restricciones.
- Nos marcan las limitaciones del modelo.
- Restricciones de positividad.
- Característica de los modelos económicos.

$$\left.\begin{array}{ll} \max & c_1x_1 + \cdots c_nx_n \\ \text{sujeta a:} & a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ & x_1, \ldots, x_n \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} \max & c^T x \\ \text{sujeta a:} & Ax \leq b \\ & x \geq 0. \end{array}\right.$$

El PL se presenta en forma estándar cuando todas sus restricciones son de igualdad y todas sus variables no negativas.
La formulación estándar del PL es como sigue:

$$\begin{array}{lll} \text{mín} & c^T x & \\ \text{sujeta a:} & Ax = b & \text{ó} \\ & x \geq 0 & \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{máx} & c^T x \\ \text{sujeta a:} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Para realizar el paso de canónica a estándar se seguirán las siguientes reglas:
1) Las desigualdades se transforman en igualdades introduciendo unas nuevas variables llamadas variables de holgura con el signo $+$ si la restricción es $\leq$ y con el signo - si la restricción es $\geq$.

Para realizar el paso de canónica a estándar se seguirán las siguientes reglas:
1) Las desigualdades se transforman en igualdades introduciendo unas nuevas variables llamadas variables de holgura con el signo $+$ si la restricción es $\leq$ y con el signo - si la restricción es $\geq$.

$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \longrightarrow a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + h_1 = b_1$$
$$\text{con } h_1 \geq 0$$
$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \geq b_1 \longrightarrow a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n - h_1 = b_1$$
$$\text{con } h_1 \geq 0$$

2) En el caso de las variables libres, es decir, el caso que no este sometida a restricciones de positividad, se introducirán dos variables positivas.

2) En el caso de las variables libres, es decir, el caso que no este sometida a restricciones de positividad, se introducirán dos variables positivas.

$$x_i \text{ libre} \longrightarrow x_i = h_i - p_i \text{ con que } h_i \geq 0, \quad p_i \geq 0$$

3) Si multiplicamos por -1 los dos miembros de la restricción de desigualdad, esta cambia de sentido.

Características del Programas lineal

El problema de PL lleva implícitos una serie de hipótesis sobre el comportamiento del fenómeno que permiten dar a este una representación lineal.

Suposición de **Aditividad** y **Proporcionalidad**.

1. Respecto a la función objetivo:
   El hecho de que la función objetivo en un PL sea lineal implica:
   a) La contribución a la función objetivo por parte de cada variable es proporcional al valor de la variable.
   b) La contribución a la función objetivo por parte de cada variable es independiente de los valores de las otras variables de decisión.
2. Respecto a las restricciones:
   El hecho de que las restricciones en un PL sea lineal implica:
   a) La contribución a parte izquierda de cada restricción por cada una de las variables es proporcional al valor de dicha variable.
   b) La contribución de una variable a la parte izquierda de cada restricción es independiente de los valores de las otras variables.

Suposición de **Aditividad y Proporcionalidad**.

1. Respecto a la función objetivo:
   El hecho de que la función objetivo en un PL sea lineal implica:
   a) La contribución a la función objetivo por parte de cada variable es proporcional al valor de la variable.
   b) La contribución a la función objetivo por parte de cada variable es independiente de los valores de las otras variables de decisión.
2. Respecto a las restricciones:
   El hecho de que las restricciones en un PL sea lineal implica:
   a) La contribución a parte izquierda de cada restricción por cada una de las variables es proporcional al valor de dicha variable.
   b) La contribución de una variable a la parte izquierda de cada restricción es independiente de los valores de las otras variables.

Suposición de **Divisibilidad y de Certeza.**

1. La suposición de divisibilidad en un problema de PL requiere que todas las variables puedan tomar valores fraccionarios. Frecuentemente no se satisface en los problemas reales. Si en un problema de programación lineal las variables (todas o en parte) deben tomar valores enteros no negativos, se debe pasar a un problema de programación entera.
   En muchas situaciones en las cuales la divisibilidad no está presente, el redondeo puede dar una solución aceptable. (e.i. número de coches a fabricar), sin embargo, si quisiéramos encontrar el número de silos a construir y el resultado fuese 0.4 no se puede redondear y, tenemos que pasar a programación entera.
2. La suposición de certeza indica que el valor de cada parámetro (coeficiente de la función objetivo, ...) se conoce con exactitud.

Suposición de **Divisibilidad y de Certeza.**

1. La suposición de divisibilidad en un problema de PL requiere que todas las variables puedan tomar valores fraccionarios. Frecuentemente no se satisface en los problemas reales. Si en un problema de programación lineal las variables (todas o en parte) deben tomar valores enteros no negativos, se debe pasar a un problema de programación entera.
   En muchas situaciones en las cuales la divisibilidad no está presente, el redondeo puede dar una solución aceptable. (e.i. número de coches a fabricar), sin embargo, si quisiéramos encontrar el número de silos a construir y el resultado fuese 0.4 no se puede redondear y, tenemos que pasar a programación entera.
2. La suposición de certeza indica que el valor de cada parámetro (coeficiente de la función objetivo, ...) se conoce con exactitud.

Sobre la región factible

La región factible para un problema de PL es el conjunto de todos los puntos que cumplen todas las restricciones, así como las restricciones de signo.

Es posible que la región factible sea vacía. También es posible que la región factible sea no acotada.

Una solución óptima para un PL es un punto de la región factible tal que se obtiene el valor ó máximo (mínimo) de la función objetivo.

Propiedades de los programas lineales

1. La función objetivo es siempre cóncava y convexa.
2. El dominio es un conjunto convexo.
3. Los óptimos locales son siempre globales.

Propiedades de los programas lineales

1. La función objetivo es siempre cóncava y convexa.
2. El dominio es un conjunto convexo.
3. Los óptimos locales son siempre globales.

Propiedades de los programas lineales

1. La función objetivo es siempre cóncava y convexa.
2. El dominio es un conjunto convexo.
3. Los óptimos locales son siempre globales.

Example

Resuelve de forma geométrica

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{sujeta a:} & 2x_1 + 1x_2 \leq 100 \\ & x_1 + x_2 \leq 80 \\ & x_1 \leq 40 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Existencia de solución

1. Si el dominio es cerrado y acotado siempre existen óptimos y se encuentran en los vértices o en combinaciones convexas de ellos.
2. Si el dominio no es compacto, el PL puede no tener óptimos.
3. Si el dominio no es compacto (no cerrado o no acotado) pero el PL tiene óptimos, estos están en los vértices o en combinaciones convexas de los mismos.
4. Si el dominio es vacío, el PL no tiene sentido.
5. El número de vértices del dominio es siempre menor o igual a $\binom{n}{m}$ donde n es el número de restriciones y m el número de restricciones necesarias para encontrar un vértice.

Existencia de solución

1. Si el dominio es cerrado y acotado siempre existen óptimos y se encuentran en los vértices o en combinaciones convexas de ellos.
2. Si el dominio no es compacto, el PL puede no tener óptimos.
3. Si el dominio no es compacto (no cerrado o no acotado) pero el PL tiene óptimos, estos están en los vértices o en combinaciones convexas de los mismos.
4. Si el dominio es vacío, el PL no tiene sentido.
5. El número de vértices del dominio es siempre menor o igual a $\binom{n}{m}$ donde n es el número de restriciones y m el número de restricciones necesarias para encontrar un vértice.

Existencia de solución

1. Si el dominio es cerrado y acotado siempre existen óptimos y se encuentran en los vértices o en combinaciones convexas de ellos.
2. Si el dominio no es compacto, el PL puede no tener óptimos.
3. Si el dominio no es compacto (no cerrado o no acotado) pero el PL tiene óptimos, estos están en los vértices o en combinaciones convexas de los mismos.
4. Si el dominio es vacío, el PL no tiene sentido.
5. El número de vértices del dominio es siempre menor o igual a $\binom{n}{m}$ donde n es el número de restriciones y m el número de restricciones necesarias para encontrar un vértice.

Existencia de solución

1. Si el dominio es cerrado y acotado siempre existen óptimos y se encuentran en los vértices o en combinaciones convexas de ellos.
2. Si el dominio no es compacto, el PL puede no tener óptimos.
3. Si el dominio no es compacto (no cerrado o no acotado) pero el PL tiene óptimos, estos están en los vértices o en combinaciones convexas de los mismos.
4. Si el dominio es vacío, el PL no tiene sentido.
5. El número de vértices del dominio es siempre menor o igual a $\binom{n}{m}$ donde n es el número de restriciones y m el número de restricciones necesarias para encontrar un vértice.

Existencia de solución

1. Si el dominio es cerrado y acotado siempre existen óptimos y se encuentran en los vértices o en combinaciones convexas de ellos.
2. Si el dominio no es compacto, el PL puede no tener óptimos.
3. Si el dominio no es compacto (no cerrado o no acotado) pero el PL tiene óptimos, estos están en los vértices o en combinaciones convexas de los mismos.
4. Si el dominio es vacío, el PL no tiene sentido.
5. El número de vértices del dominio es siempre menor o igual a $\binom{n}{m}$ donde n es el número de restriciones y m el número de restricciones necesarias para encontrar un vértice.

Sobre las soluciones

1. Los óptimos, si existen, se encuentran en los vértices o en combinaciones convexas de ellos.
2. En un Programa lineal pasa una de las siguientes afirmaciones: o no existe solución, o la solución es única, o tiene infinitas soluciones.

Sobre las soluciones

1. Los óptimos, si existen, se encuentran en los vértices o en combinaciones convexas de ellos.
2. En un Programa lineal pasa una de las siguientes afirmaciones: o no existe solución, o la solución es única, o tiene infinitas soluciones.

Solución del ejemplo

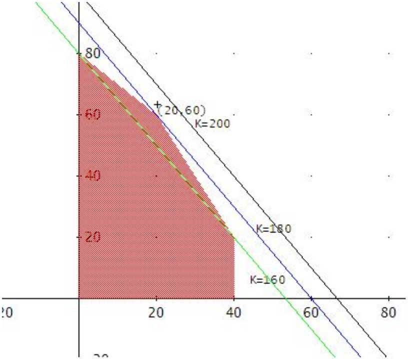

Figure: Dibujo

Hay 5 vértices.

$(0,0) \rightarrow f(0,0) = 0,$
$(40,0) \rightarrow f(40,0) = 120,$
$(0,80) \rightarrow f(0,80) = 160,$
$(\mathbf{20{,}60}) \rightarrow f(\mathbf{20{,}60}) = \mathbf{180},$
$(40,20) \rightarrow f(40,20) = 160.$

El máximo valor de la función objetivo es **180** y se alcanza para los valores de las variables de decisión $(x^*, y^*) = (\mathbf{20{,}60})$.