



UNIVERSITAT_{DE}
BARCELONA

Contribución al estudio de la dinámica de los sistemas estelares a simetría cilíndrica

M. Asunción Catalá Poch, 1925-2009



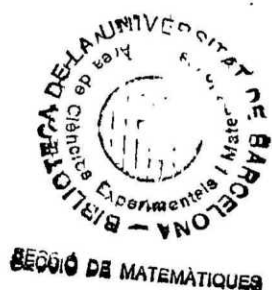
Aquesta tesi doctoral està subjecta a la llicència **Reconeixement 4.0. Espanya de Creative Commons.**

Esta tesis doctoral está sujeta a la licencia **Reconocimiento 4.0. España de Creative Commons.**

This doctoral thesis is licensed under the **Creative Commons Attribution 4.0. Spain License.**

CONTRIBUCIÓN AL ESTUDIO DE LA DINÁMICA
DE LOS
SISTEMAS ESTELARES A SIMETRÍA CILÍNDRICA

A. 14.587



Memoria que presenta la Licenciada
en Ciencias, Ma Asunción Catalá Poch,
para obtener el grado de Doctor en
Ciencias, Sección de Matemáticas.



Cátedra de Astronomía. Departamento
de Física de la Tierra y del Cosmos.
Facultad de Ciencias. Universidad
de Barcelona. X



I N D I C E

	<u>Páginas</u>
Introducción	1
1.- Postulados y ecuaciones fundamentales.	6
2.- Determinación de A a simetría cilíndrica. Consideración de $\mathcal{V}$.	8
3.- Determinación de $\underline{\Delta}$ y de $\underline{V}_0$ a simetría cilíndrica.	14
4.- Determinación de $\mathcal{B}$ y de χ	19
5.- Determinación de σ y relaciones entre los coeficientes y funciones del tiempo.	23
6.- Trayectorias de los centroides locales.	26
7.- Estudio de la curva velocidad-distancia.	30
8.- Dinámica galáctica.	44
Bibliografía	51

INTRODUCCION

El estudio de la dinámica de los sistemas estelares fue iniciado por Kapteyn⁽¹⁾, con su modelo de dos corrientes estelares, según el cual los vectores velocidad de las estrellas no están distribuidos isotrópicamente como se había supuesto hasta entonces, y Schwarzschild⁽²⁾ que demostró que las dos corrientes de Kapteyn podían ser consideradas como consecuencia de una ley de distribución elipsoidal de velocidades residuales

$$\varphi(u,v,w) = C e^{(-h^2u^2 - k^2v^2 - l^2w^2)}$$

donde u , v , w son las componentes de la velocidad residual, según tres ejes de coordenadas convenientemente elegidos, y C , h , k , l , coeficientes que dependen de la posición y del tiempo.

Puede decirse que hasta el descubrimiento de la rotación galáctica la única propiedad experimental que la astronomía estelar aporta a la teoría es la ley de distribución de velocidades residuales, sobre la cual fundamentan sus trabajos Eddington⁽³⁾, Jeans⁽⁴⁾ y Charlier⁽⁵⁾, desarrollando tanto Eddington como Jeans teorías matemáticas encaminadas no tanto a cimentar la ley de distribución elipsoidal cuanto a investigar las posibles formas de sistemas estelares en que se cumple rigurosamente la ley de Schwarzschild e intentando Charlier explicarla por analogía con la ley de Maxwell de la teoría cinética de los gases.

Posteriormente, Strömberg⁽⁶⁾ pone en evidencia el fenómeno llamado de la corriente asimétrica, demostrando que la población estelar de la Galaxia no es cinemáticamente homogénea sino que consta de dos subsistemas de estrellas con distintas dispersiones para las velocidades residuales.

Lindblad⁽⁷⁾ obtiene una inmediata explicación del fenómeno de la corriente asimétrica de la Galaxia basándose en la hipótesis de la existencia de subsistemas que se encuentran animados de un movimiento de rotación alrededor de su eje común de simetría. La velocidad de rotación es tanto mayor y la dispersión de las velocidades residuales tanto menor cuanto más achatado sea el subsistema.

Esta teoría de la rotación galáctica fue inmediatamente confirmada por Oort⁽⁸⁾ con su estudio de los movimientos diferenciales de los centroides, refundiendo su interpretación y la de las propiedades de la distribución de velocidades en una teoría única, válida en el disco galáctico para movimientos poco diferentes del movimiento circular uniforme.⁽⁹⁾

Esta línea de investigación que hemos trazado a grandes rasgos culmina en las obras de Lindblad⁽¹⁰⁾ y Chandrasekhar⁽¹¹⁾. Este último en su obra "Principles of Stellar Dynamics", en la que hemos basado fundamentalmente nuestro trabajo, recogiendo la obra de sus antecesores, con la introducción de un campo de movimientos diferenciales y la consideración de una función de distribución cuadrática en las velocidades residuales que satisface la ecuación fundamental de la dinámica estelar, permite considerar un sistema estelar como un medio continuo en el que se verifican las ecuaciones hidrodinámicas de continuidad y de movimiento⁽¹²⁾.

Más modernamente, algunos autores opinan que las fuerzas de gravitación no son las únicas que rigen la estructura y evolución de los sistemas estelares. Esto supondría la presencia en la ecuación fundamental de la dinámica estelar de un potencial vector además del potencial escalar, como puede verse en nuestro trabajo "A Note on Stellar Dynamics"⁽¹³⁾.

Actualmente el estudio de la dinámica de los sistemas estelares se lleva a cabo, también, con la ayuda de ordenadores electrónicos, tratando el sistema estelar numéricamente. Este método numérico consiste en dar las masas, las posiciones y las velocidades iniciales de todas las estrellas que componen el sistema estelar; dichas cantidades se obtienen en la práctica por medio de números aleatorios, convenientemente transformados de modo que se reproduzca una distribución determinada. A partir de este estado inicial se calcula exactamente la evolución dinámica del sistema integrando numéricamente las ecuaciones del movimiento⁽¹⁴⁾.

En la presente Memoria, basándonos, como hemos dicho, en los métodos clásicos, nos proponemos ampliar el estudio de la dinámica de los sistemas estelares, haciendo la hipótesis de simetría cilíndrica y la de estado no estacionario.

Hemos dividido nuestro trabajo en ocho capítulos. En el primero damos los postulados y ecuaciones fundamentales de la dinámica de los sistemas estelares. Utilizamos la notación tensorial que fue introducida por el Dr. J.J. de Orús en su trabajo "Contribución a la Teoría de Chandrasekhar sobre la Dinámica de los sistemas estelares"(15), indicando los vectores con letras subrayadas.

En el capítulo segundo la determinación del tensor A a simetría cilíndrica de eje z nos lleva a una forma distinta de la obtenida por los autores clásicos que citamos en la bibliografía(16). Introducimos en él el término $f = k_6 \bar{\omega} \neq 0$, que nos conduce a resultados muy interesantes. Suponemos para las galaxias un plano ecuatorial de simetría, limitándonos con ello al estudio de las galaxias regulares.

Obtenemos en el capítulo 3 una primera expresión de las componentes del vector $\underline{\Delta}$ y la velocidad $\underline{v}_0$, componentes que luego podemos escribir en el capítulo 5 en forma más sencilla al imponer la hipótesis anterior de que σ sea simétrica respecto al plano ecuatorial.

En el capítulo 4, debido al valor $k_6 \neq 0$, obtenemos para la función potencial $\mathcal{B}$ una expresión mucho más restringida que la que habían obtenido hasta ahora Camm, Oort, Lindblad, etc., según indicamos en la bibliografía(17). A partir de la función potencial encontrada determinamos completamente las funciones χ y σ . La determinación de σ , suponiéndola simétrica respecto al plano ecuatorial, impone que k_6 sea constante, lo cual, a su vez, simplifica notablemente las expresiones, tanto del potencial como de la función χ . Finalmente, al imponer que la función potencial $\mathcal{B}$, la función χ y el vector $\underline{\Delta}$ sean compatibles con la cuarta ecuación del sistema fundamental de la dinámica de los sistemas estelares, acaban de quedar relacionados los coeficientes y funciones del tiempo que intervienen en los tensores y funciones utilizados.

Las consecuencias más interesantes de la consideración del coeficiente $k_6 \neq 0$ las tenemos en los capítulos 6 y 7.

En el 6, con la determinación de las trayectorias de los centroides locales, que en el caso de ser $k_6 = 0$ se reducen a las circunferencias $\bar{\omega} = I_1$, $z = I_2$ y en cambio aquí, con $k_6 \neq 0$, se obtienen curvas alabeadas cuyas proyecciones son hipérbolas y curvas espirales con ramas asintóticas.

También aquí se cumple el teorema " $\bar{\omega}$ se mantiene constante a lo largo de las trayectorias de cada centroide local", demostrado por el Dr. Orús en su trabajo ya citado ((15), p. 14 T.I).

En el capítulo 7 estudiamos la variación de la velocidad con la distancia. Obtenemos una gran concordancia entre las curvas que expresan gráficamente esta variación y las obtenidas experimentalmente. Presentamos tres ejemplos: M 33, en la cual la concordancia es casi perfecta; M 31, en la que prescindimos del núcleo por presentar unas características muy especiales, objeto de estudio por parte de muchos autores⁽¹⁸⁾; nuestra Galaxia, en la que se aprecia también diferencias en ordenadas en las proximidades del núcleo que interpretamos como debidas a la existencia de gas interestelar en esta región, lo cual da origen a una distribución de velocidades distinta de la elipsoidal.

El ajuste lo hemos realizado para valores muy sencillos de los parámetros, y a un grado de libertad, a fin de obtener asimismo un modelo lo más sencillo posible, lo cual nos ha llevado al valor $k_6 = 0$. para la Galaxia. Con esto queremos significar que en nuestra teoría incluimos, como caso particular, el modelo clásico que servía para explicar los hechos de observación de nuestra Galaxia, pero que no explicaba, en cambio, fenómenos observados en sistemas extragalácticos. Así la teoría clásica no explicaba la concavidad de la curva velocidad-distancia hacia la parte positiva del eje $(H)_0$, en el origen, por consiguiente no consideraba curvas como la observada en M 33, para la cual, como hemos dicho, existe concordancia perfecta con nuestro modelo.

Para llevar a cabo todos los cálculos, el detalle de los cuales hemos omitido, nos hemos ayudado del calculador electrónico de mesa Olivetti Programma 101 de la Cátedra de Astronomía. Agradecemos al Sr. Piqueres la confección de los programas.

En el capítulo 8 estudiamos la función de distribución de velocidades de tipo elipsoidal, haciendo aplicación a nuestra Galaxia de la teoría desarrollada. Es de destacar que con la introducción del término $k_6 \neq 0$, y suponiendo $Z \neq 0$, obtenemos un modelo que explica la desviación del vértex que se observa experimentalmente. En este mismo capítulo estudiamos las constantes de Oort y el término K.

Para no distraer la atención del lector hemos omitido, en nuestra exposición, los desarrollos que nos han conducido a la obtención de la mayoría de las fórmulas, que no tienen más dificultad que la de ser largos y penosos.

Finalmente me creo en el deber de agradecer al Dr. Orús su eficaz y valiosa colaboración y ayuda sin la cual estoy segura de que mi labor hubiera resultado estéril.

1.- POSTULADOS Y ECUACIONES FUNDAMENTALES

La dinámica de los sistemas estelares se fundamenta en los tres postulados siguientes: ((11), p. 89)

I.- En todo punto $\underline{r}$ está definido un sistema de coordenadas que es función continua de la posición $\underline{r}$ y del tiempo t , respecto al cual las estrellas se encuentran, en media, en reposo.

Si designamos por $\underline{v}$ la velocidad de una estrella respecto al sistema inercial de referencia, y por $\underline{V}_0(\underline{r}, t)$ la velocidad, respecto al sistema inercial, del centroide local (origen de coordenadas del sistema local) relativo al punto $\underline{r}$, la velocidad residual $\underline{v}$ de dicha estrella respecto al sistema local relativo al mencionado punto será:

$$\underline{v} = \underline{V} - \underline{V}_0 \quad (1.1)$$

II.- La función de distribución $\psi(\underline{r}, \underline{v}, t)$ es del tipo de Schwarzschild generalizado, es decir:

$$\psi(\underline{r}, \underline{v}, t) \equiv \psi(Q + \sigma) \quad (1.2)$$

$$\text{con} \quad Q = A \cdot \underline{v}^2 \quad (1.3)$$

y el tensor simétrico de segundo orden A y el escalar σ son funciones continuas de la posición $\underline{r}$ y del tiempo t .

III.- Los movimientos de las estrellas vienen regidos por un potencial $\mathcal{B}(\underline{r}, t)$ por unidad de masa, y la función de distribución ψ satisface la ecuación fundamental de la dinámica estelar:

$$\frac{d\psi}{dt} \equiv \frac{\partial \psi}{\partial t} + \underline{v} \cdot \text{grad } \psi - \text{grad } \mathcal{B} \cdot \text{Grad } \psi = 0 \quad (1.4)$$

Con estas hipótesis el problema dinámico que se plantea es:
¿ En qué condiciones la ecuación (1.4) considerada como una ecuación diferencial en ψ , admite una solución de la forma (1.2)?.

Sustituyendo la función $\psi (Q + \phi)$ en la ecuación de continuidad se tiene:

$$\frac{d\psi}{d(Q + \phi)} \cdot \frac{d(Q + \phi)}{dt} = 0 \quad (1.5)$$

y por tanto:

$$\frac{d(Q + \phi)}{dt} = 0 \quad (1.6)$$

Haciendo ahora

$$\underline{\Delta} = A \underline{v}_0 \quad (1.7)$$

$$-\chi = A \cdot \underline{v}_0^2 + \phi \quad (= \underline{\Delta} \cdot \underline{v}_0 + \phi), \quad (1.8)$$

según (1.1) y (1.3) se tiene:

$$Q + \phi = A \cdot \underline{v}^2 - 2 \underline{\Delta} \cdot \underline{v} - \chi \quad (1.9)$$

y llevando este valor de $Q + \phi$ a (1.4) e identificando se obtienen las relaciones: ((15), p. 8)

$$\left. \begin{aligned} \text{def } A &= 0 \\ \text{def } \underline{\Delta} &= \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial t} \\ A \text{ grad } \underline{B} + \frac{\partial \underline{\Delta}}{\partial t} &= -\frac{1}{2} \text{grad } \chi \\ \underline{\Delta} \cdot \text{grad } \underline{B} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \chi}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

que constituyen el sistema de veinte ecuaciones diferenciales, fundamental en el estudio de la dinámica de los sistemas estelares. ((11), p. 93).

2.- DETERMINACION DE A A SIMETRIA CILINDRICA. CONSIDERACION DE ∇

Al resolver la ecuación $\text{def } A = 0$, para los elementos del tensor simétrico de segundo orden

$$A = \begin{pmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

se obtienen, en forma cartesiana, las siguientes expresiones:
((11), p. 96-97).

$$\begin{aligned} a &= -2(h_{20} + h_{21} z) y - h_{40} y^2 - (a_0 + 2g_{30} z + g_{40} z^2) \\ b &= -2(f_{20} + f_{21} x) z - f_{40} z^2 - (b_0 + 2h_{30} x + h_{40} x^2) \\ c &= -2(g_{20} + g_{21} y) x - g_{40} x^2 - (c_0 + 2f_{30} y + f_{40} y^2) \\ f &= (f_{10} + f_{11}x - h_{21}x^2) + (f_{20} + f_{21}x)y + (f_{30} + g_{21}x)z + f_{40}yz \\ g &= (g_{10} + g_{11}y - f_{21}y^2) + (g_{20} + g_{21}y)z + (g_{30} + h_{21}y)x + g_{40}zx \\ h &= (h_{10} + h_{11}z - g_{21}z^2) + (h_{20} + h_{21}z)x + (h_{30} + f_{21}z)y + h_{40}xy \end{aligned} \quad (2.2)$$

donde los coeficientes $f_{40}, g_{40}, h_{40}, f_{21}, g_{21}, h_{21}$ son constantes y los restantes funciones del tiempo.

Como es sabido, el tensor A en forma cilíndrica (eje z) viene dado por:

$$S A S^{-1} \quad (2.3)$$

donde:

$$S = \begin{pmatrix} \frac{x}{\omega} & \frac{y}{\omega} & 0 \\ -\frac{y}{\omega} & \frac{x}{\omega} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con $\omega^2 = x^2 + y^2$, obteniéndose:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\bar{\omega}^2} (ax^2+by^2+2hxy) & \frac{1}{\bar{\omega}^2} [xy(b-a)+h(x^2-y^2)] & \frac{1}{\bar{\omega}} (fy+gx) \\ \frac{1}{\bar{\omega}^2} [(b-a)xy+h(x^2-y^2)] & \frac{1}{\bar{\omega}^2} (ay^2+bx^2-2hxy) & \frac{1}{\bar{\omega}} (fx-gy) \\ \frac{1}{\bar{\omega}} (fy + gx) & \frac{1}{\bar{\omega}} (fx - gy) & c \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Teniendo en cuenta en (2.4) las expresiones (2.2) e imponiendo la condición de simetría cilíndrica, de eje z, el tensor A toma la forma:

$$A = \begin{pmatrix} k_1+k_4z^2+2k_5z & 0 & -(k_4z+k_5) \\ 0 & k_1+k_2\bar{\omega}^2+k_4z^2+2k_5z & k_6\bar{\omega} \\ -(k_4z + k_5)\bar{\omega} & k_6\bar{\omega} & k_3+k_4\bar{\omega}^2 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

en donde los nuevos coeficientes vienen dados en función de los antiguos por las relaciones:

$$\begin{aligned} k_1 &= -a_0 = -b_0 & k_4 &= -g_{40} = -f_{40} \\ k_2 &= -h_{40} & k_5 &= -g_{30} = -f_{20} \\ k_3 &= -c_0 & k_6 &= f_{11} = -g_{11} \end{aligned} \quad (2.6)$$

siendo además:

$$\begin{aligned} h_{10} &= h_{11} = g_{21} = 0 \\ h_{20} &= h_{21} = f_{21} = h_{30} = 0 \\ f_{30} &= g_{20} = 0 \\ f_{10} &= g_{10} = 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Según (2.2), k_1 , k_3 , k_5 , k_6 son funciones del tiempo y k_2 , k_4 constantes arbitrarias.

Si siguiendo a Camm⁽¹⁹⁾ efectuamos la traslación

$$z = Z - \frac{k_5}{k_4} \quad (2.8)$$

el tensor A tomará la forma:

$$A = \begin{pmatrix} K_1 + k_4 Z^2 & 0 & -k_4 \bar{\omega} Z \\ 0 & K_1 + k_2 \bar{\omega}^2 + k_4 Z^2 & k_6 \bar{\omega} \\ -k_4 \bar{\omega} Z & k_6 \bar{\omega} & k_3 + k_4 \bar{\omega}^2 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

con

$$K_1 = k_1 - \frac{k_5^2}{k_4} \quad (2.10)$$

suponiendo $k_4 \neq 0$, ya que en caso contrario A no dependería de Z. El determinante de A es:

$$|A| = (K_1 + k_2 \bar{\omega}^2 + k_4 Z^2)(K_1 k_3 + K_1 k_4 \bar{\omega}^2 + k_3 k_4 Z^2) - (K_1 + k_4 Z^2) k_6^2 \bar{\omega}^2 \quad (2.11)$$

Teniendo en cuenta que el plano $z = z_1$ con

$$z_1 = -\frac{k_5}{k_4} \quad (2.12)$$

se desplaza con el tiempo, según (2.8) Z es función del tiempo y solamente podremos operar con el tensor A en la forma (2.9) si suponemos el sistema estacionario, como hace Camm en el artículo que hemos mencionado, o cuando las operaciones que verifiquemos con A sean de carácter algebraico, siendo entonces $z = z_1$ un plano coordenado. Dicho plano es de simetría para $|A|$.

La forma (2.5) que hemos obtenido para el tensor A difiere de la dada por los autores que hasta ahora se han dedicado al estudio de la dinámica de los sistemas estelares en el término $f = k_6 \bar{\omega}$, para los cuales es $f = 0$. (Ver citas bibliográficas indicadas en (16)). La consideración de este coeficiente nos ha llevado, como hemos indicado en la introducción, a interesantes resultados que expondremos en los capítulos que siguen.

La forma cuadrática Q que aparece en (1.3) debe ser definida positiva ((12), p. 43), lo cual impone las condiciones: ((15), p. 15)

$$\begin{aligned} (K_1 + k_4 Z^2) |A| &> 0 \\ (K_1 + k_4 Z^2)(K_1 + k_2 \bar{\omega}^2 + k_4 Z^2) &> 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

De la segunda inecuación de (2.13) se deduce que los dos factores que en ella figuran han de tener el mismo signo cualesquiera que sean $\bar{\omega}$ y Z . Si suponemos $Z = 0$, K_1 y k_2 tendrán el mismo signo. Por otra parte, de la primera de dichas relaciones (2.13), desarrollando, se tiene:

$$(K_1 + k_4 Z^2)(K_1 + k_2 \bar{\omega}^2 + k_4 Z^2)(K_1 k_3 + K_1 k_4 \bar{\omega}^2 + k_3 k_4 Z^2) > (K_1 + k_4 Z^2)^2 k_6^2 \bar{\omega}^2$$

para cualquier valor de $\bar{\omega}$ y Z . En particular, para $\bar{\omega} = 0$ $Z = 0$ es: $K_1^3 k_3 > 0$ y como K_1^2 es esencialmente positivo, será $K_1 k_3 > 0$ y por tanto K_1 y k_3 del mismo signo.

Si consideramos $Z = 0$ $\bar{\omega} \neq 0$ y dividimos por K_1^2 , teniendo en cuenta que $k_6^2 \bar{\omega}^2 > 0$ cualquiera que sea $\bar{\omega}$, también para cualquier $\bar{\omega}$ será: $(K_1 + k_2 \bar{\omega}^2)(K_3 + k_4 \bar{\omega}^2) > 0$. De aquí y de las condiciones anteriores se deduce que los coeficientes K_1, k_2, k_3, k_4 deben tener el mismo signo, o sea los cuatro deben ser positivos o los cuatro negativos, cualesquiera que sean $\bar{\omega}$ y Z para que la forma Q sea definida positiva.

Ahora bien, la densidad estelar $\mathcal{V}$, o número de estrellas por unidad de volumen, la función ϕ que aparece en la función de distribución y el determinante $|A|$ están relacionados por la fórmula ((15), p. 16):

$$\mathcal{V} = \frac{\phi(\sigma)}{\sqrt{|A|}} \quad (2.14)$$

con

$$\phi(\sigma) = 4\pi \int_0^{\infty} \psi(r^2 + \sigma) r^2 dr \quad (2.15)$$

y para $\bar{\omega} = 0$ y $Z = 0$ es $|A| = K_1^2 k_3$. Para que dicha densidad estelar $\mathcal{V}$ sea real debe ser $k_3 > 0$, y ésto unido a las consideraciones anteriores, implica que los coeficientes K_1, k_2, k_3, k_4 sean todos positivos cualesquiera que sean $\bar{\omega}$ y Z , o sea, en cualquier punto del sistema estelar que consideremos, no siendo entonces $\mathcal{V}$ infinita para ningún valor de $\bar{\omega}$, Z incluido el origen.

Si designamos por J la cantidad de luz emitida por unidad de volumen y suponemos que todas las estrellas tienen igual luminosidad, $\mathcal{V}$ será proporcional a J . La fórmula que relaciona J y la densidad luminosa I sobre la placa fotográfica es⁽²⁴⁾:

$$I(x, z) = 2 \int_x^{\infty} \frac{J(\bar{\omega}, z) \bar{\omega}}{\sqrt{\omega^2 - x^2}} d\bar{\omega} \quad (2.16)$$

o aplicando la fórmula de inversión de Abel⁽²⁵⁾:

$$J(\bar{\omega}, z) = -\frac{1}{\pi} \int_{\bar{\omega}}^{\infty} \frac{\frac{\partial I}{\partial x}}{\sqrt{x^2 - \bar{\omega}^2}} dx \quad (2.17)$$

Se observa que en el 95% de las galaxias las isofotas, o curvas de igual densidad luminosa I sobre la placa fotográfica,⁽²⁶⁾

presentan simetría ecuatorial.⁽²⁷⁾ De la fórmula (2.17) se deduce que si I es función par en Z , también lo será J y, por consiguiente, V también será función par en Z . Por otra parte, la fórmula (2.14) nos dice que si V presenta plano de simetría, siendo también el determinante $|A|$ simétrico respecto a un plano, a menos que $\phi(\sigma)$ sea divisible por $\sqrt{|A|}$, $\phi(\sigma)$ deberá presentar plano de simetría ecuatorial y éste será el mismo plano de simetría de $|A|$. En virtud de estas consideraciones supondremos, en nuestro trabajo, que σ es simétrica respecto a un plano ecuatorial y que éste es el $z_1 = -\frac{k_5}{k_4}$ que es el de

simetría de $|A|$, limitándonos con ello al estudio de las galaxias regulares. El caso de que σ no fuera a simetría ecuatorial correspondería al 5% de las galaxias irregulares que se observan.

3.- DETERMINACION DE $\underline{\Delta}$ Y $\underline{V}_0$ A SIMETRIA CILINDRICA

Al resolver la segunda ecuación del sistema (1.10) se obtienen para $\underline{\Delta}$ las siguientes componentes cartesianas: ((11), p. 99)

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= y(yh'_{30} - xh'_{20}) - z(xg'_{30} - zg'_{20}) - f'_{11}yz - \frac{1}{2}a'_0x + \beta_3y + \gamma_2z + \delta_1 \\ \Delta_2 &= z(zf'_{30} - yf'_{20}) - x(yh'_{30} - xh'_{20}) - g'_{11}zx - \frac{1}{2}b'_0y + \beta_1z + \gamma_3x + \delta_2 \\ \Delta_3 &= x(xg'_{30} - zg'_{20}) - y(zf'_{30} - yf'_{20}) - h'_{11}xy - \frac{1}{2}c'_0z + \beta_2x + \gamma_1y + \delta_3\end{aligned}\quad (3.1)$$

donde los acentos denotan derivación respecto del tiempo, siendo

β_i y δ_i ($i = 1, 2, 3$) funciones arbitrarias del tiempo y

$$\beta_1 + \gamma_1 = f'_{10} \quad \beta_2 + \gamma_2 = g'_{10} \quad \beta_3 + \gamma_3 = h'_{10} \quad (3.2)$$

Imponiendo la condición de simetría cilíndrica, para lo cual basta tener en cuenta que las dos primeras componentes de $\underline{\Delta}$ deben ser de la forma:

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= x F(\bar{\omega}, z) - y G(\bar{\omega}, z) \\ \Delta_2 &= y F(\bar{\omega}, z) + x G(\bar{\omega}, z)\end{aligned}\quad (3.3)$$

expresándolas en coordenadas cilíndricas^(*) y recordando además (2.6) y (2.7) se obtiene en nuestro caso:

$$\begin{aligned}\Delta_{\bar{\omega}} &= \bar{\omega} \left(\frac{1}{2} k'_1 + k'_5 z \right) \\ \Delta_{\theta} &= -\beta \bar{\omega} + k'_6 z \bar{\omega} \\ \Delta_z &= -k'_5 \bar{\omega}^2 + \frac{1}{2} k'_3 z + \delta_3\end{aligned}\quad (3.4)$$

(*) Las fórmulas de paso son:

$$\Delta_{\bar{\omega}} = \frac{1}{\bar{\omega}} (y \Delta_2 + x \Delta_1) \quad \Delta_{\theta} = \frac{1}{\bar{\omega}} (x \Delta_2 - y \Delta_1) \quad \Delta_z = \Delta_3$$

Podemos calcular las componentes de la velocidad $\underline{v}_0$ despejándola de (1.7)

$$\underline{v}_0 = A^{-1} \underline{\Delta} \quad (3.5)$$

Teniendo en cuenta que hemos adoptado el plano $z_1 = -\frac{k_5}{k_4}$ de simetría para la galaxia, lo cual equivale a haber definido el centro de la galaxia, podemos referir las componentes de la velocidad a dicho centro efectuando en (3.5) la traslación $z = Z - \frac{k_5}{k_4}$ introducida ya en (2.8), lo cual equivale a tomar $\underline{\Delta}$ de componentes:

$$\begin{aligned} \Delta_{\bar{\omega}} &= \bar{\omega} \left(-\frac{1}{2} K_1' + k_5' Z \right) \\ \Delta_{\theta} &= \bar{\omega} \left(-\beta - \frac{k_5 k_6'}{k_4} + k_6' Z \right) \\ \Delta_z &= (-k_5' \bar{\omega}^2 + \frac{1}{2} k_3' Z - \frac{1}{2} \frac{k_3' k_5}{k_4} + \delta_3) \end{aligned} \quad (3.6)$$

De esta forma las componentes de la velocidad $\underline{U}_0 = \underline{v}_0 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{k_5'}{k_4} \end{bmatrix}$

referidas al centro de la galaxia, serán, ordenando respecto a $\bar{\omega}$ y Z :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_0 &= \frac{\bar{\omega}}{|A|} \left\{ \frac{1}{2} k_2 k_4 K_1' \bar{\omega}^4 + \frac{1}{2} k_4 (k_4 K_1' - 2k_6 k_6' + k_2 k_3') \bar{\omega}^2 Z^2 + \frac{1}{2} k_4^2 k_3' Z^4 + \right. \\ &+ (k_2 k_3 k_5' - k_6^2 k_5' + k_4 k_6 \beta + k_5 k_6 k_6' - \frac{1}{2} k_2 k_3' k_5 + k_2 k_4 \delta_3) \bar{\omega}^2 Z + \\ &+ k_4 (k_3 k_5' - \frac{1}{2} k_3' k_5 + k_4 \delta_3) Z^3 + \frac{1}{2} K_1' (K_1 k_4 + k_2 k_3 - k_6^2) \bar{\omega}^2 + \\ &+ \frac{1}{2} k_4 (k_3 K_1' + K_1 k_3') Z^2 + K_1 (k_3 k_5' - \frac{1}{2} k_3' k_5 + k_4 \delta_3) Z + \frac{1}{2} K_1 K_1' k_3 \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \Theta_0 = \frac{\bar{\omega}}{|A|} \left\{ \frac{1}{2} k_4 (-k_6 K_1' + 2K_1 k_6') \bar{\omega}^2 Z + \frac{1}{2} k_4 (2k_3 k_6' - k_6 k_3') Z^3 + \right. \\ + K_1 (-k_4 \beta - k_5 k_6' + k_6 k_5') \bar{\omega}^2 + (-k_3 k_4 \beta - k_3 k_5 k_6' + \frac{1}{2} k_5 k_6 k_3' - k_4 k_6 \delta_3) Z^2 + \\ \left. + \frac{1}{2} K_1 (2k_3 k_6' - k_6 k_3') Z + \frac{K_1}{k_4} (-k_3 k_4 \beta - k_3 k_5 k_6' + \frac{1}{2} k_5 k_6 k_3' - k_4 k_6 \delta_3) \right\} \quad (3.8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi_0 = \frac{1}{|A|} \left\{ \frac{1}{2} k_2 k_4 K_1' \bar{\omega}^4 Z + \frac{1}{2} k_4 (k_4 K_1' - 2k_6 k_6' + K_1 k_3' + k_2 k_3') \bar{\omega}^2 Z^3 + \right. \\ + \frac{1}{2} k_4^2 k_3' Z^5 + (\beta k_4 k_6 + k_5 k_6 k_6' - \frac{1}{2} k_2 k_5 k_3' + k_2 k_4 \delta_3 + k_2 k_3 k_5' - k_5 k_6^2) \bar{\omega}^2 Z^2 + \\ + k_4 (-\frac{1}{2} k_3' k_5 + k_4 \delta_3 + k_3 k_5') Z^4 + \frac{1}{2} K_1 (k_4 K_1' - 2k_6 k_6' + k_2 k_3') \bar{\omega}^2 Z + \\ + \frac{1}{2} K_1 k_4 k_3' Z^3 + \frac{K_1}{k_4} (k_4 k_6 \beta + k_5 k_6 k_6' - \frac{1}{2} k_2 k_5 k_3' + k_4 k_2 \delta_3 + k_2 k_3 k_5' - k_5 k_6^2) \bar{\omega}^2 + \\ + 2 K_1 (-\frac{1}{2} k_3' k_5 + k_4 \delta_3 + k_3 k_5') Z^2 + \frac{1}{2} K_1^2 k_3' Z - \frac{1}{2} \frac{K_1^2}{k_4} (k_3' k_5 - 2k_3 k_5') + \\ \left. + K_1^2 \delta_3 \right\} \quad (3.9) \end{aligned}$$

Para que dichas componentes no tomen valor infinito para $\bar{\omega}$ constante y Z tendiendo a infinito, o para Z constante y $\bar{\omega}$ tendiendo a infinito, y la tercera componente de la velocidad

$$\xi_0 = Z_0 + \frac{k_5'}{k_4} \quad \text{no sea finita para } \bar{\omega} \text{ constante y } Z \text{ tendiendo}$$

a infinito, siendo la forma $|A|$ del denominador de signo constante, según hemos indicado en el capítulo 2, anularemos los coeficientes de los términos en $\bar{\omega}^5$ y Z^5 del numerador de Π_0 y ξ_0 y el coeficiente del término en Z^4 del numerador de la tercera componente.

Con ello tendremos las condiciones:

$$k_2 K_1' = 0 \quad (3.10)$$

$$\delta_3 = - \frac{k_3 k_5'}{k_4} \quad (3.12)$$

$$k_3' = 0 \quad (3.11)$$

De (3.10) se deduce que, o bien es $k_2 = 0$ o bien es $K_1' = 0$. Si supusiéramos $k_2 = 0$, el determinante $|A|$ quedaría reducido a:

$$|A| = (K_1 + k_4 z^2) \left[K_1 k_3 + (K_1 k_4 - k_6^2) \bar{\omega}^2 + k_3 k_4 z^2 \right] \quad (3.13)$$

expresión de segundo grado en $\bar{\omega}$. Igual que antes, para que las componentes de la velocidad no fueran infinitas para z constante y $\bar{\omega}$ infinito, anularíamos los coeficientes de los términos en

$\bar{\omega}^3$, con lo cual sería nulo el coeficiente $(K_1 k_4 - k_6^2)$ de $\bar{\omega}^2$ en $|A|$. Entonces $|A|$ no dependería de $\bar{\omega}$, por cuya razón deberían anularse los términos en $\bar{\omega}$ de las tres componentes de la velocidad y, como después de las condiciones (3.11) y (3.12)

$\bar{\omega}$ es factor común en todas ellas, la galaxia no giraría. El modelo no tendría sentido físico y por consiguiente en (3.10) supondremos siempre $K_1' = 0$ $k_2 \neq 0$.

Sustituyendo pues (3.10), (3.11) y (3.12) en las componentes (3.7), (3.8) y (3.9) obtendremos las nuevas componentes de la velocidad $\underline{U}_0$:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_0 &= - \frac{\bar{\omega}^3 z}{|A|} k_6 \left[k_4 k_6' z - (k_4 \beta + k_5 k_6' - k_6 k_5') \right] \\ \mathcal{H}_0 &= \frac{\bar{\omega}}{|A|} (K_1 \bar{\omega}^2 + k_3 z^2 + \frac{K_1 k_3}{k_4}) \left[k_4 k_6' z - (k_4 \beta + k_5 k_6' - k_6 k_5') \right] \\ \mathcal{Z}_0 &= - \frac{\bar{\omega}^2}{|A|} (k_6 z^2 + \frac{k_6 K_1}{k_4}) \left[k_4 k_6' z - (k_4 \beta + k_5 k_6' - k_6 k_5') \right] \end{aligned} \quad (3.14)$$

Y sustituyendo en (3.6), las nuevas componentes de $\underline{\Delta}$:

$$\Delta_0 = k_5' \bar{\omega} z$$

$$\Delta_\theta = \left[-\left(\beta + \frac{k_5 k_6'}{k_4} \right) + k_6' z \right] \bar{\omega} \quad (3.15)$$

$$\Delta_z = -k_5' \left(\bar{\omega}^2 + \frac{k_3}{k_4} \right)$$

4.- DETERMINACION DE β Y DE χ

Desarrollando la tercera ecuación del sistema (1.10) de ecuaciones diferenciales

$$A \text{ grad } \beta + \frac{\partial \Delta}{\partial t} = -\frac{1}{2} \text{ grad } \chi$$

teniendo en cuenta que limitamos nuestro estudio a sistemas estelares a simetría cilíndrica, y que por tanto supondremos

$$\frac{\partial \beta}{\partial \theta} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial \chi}{\partial \theta} = 0,$$

que la variable z es una función del tiempo dada por (2.8), y sustituyendo A y Δ respectivamente por (2.9) y (3.15), tendremos

$$\left. \begin{aligned} (K_1 + k_4 z^2) \frac{\partial \beta}{\partial \bar{\omega}} - k_4 \bar{\omega} z \frac{\partial \beta}{\partial z} + \left(\frac{k_5'^2}{k_4} + k_5'' z \right) \bar{\omega} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial \chi}{\partial \bar{\omega}} \\ k_6 \frac{\partial \beta}{\partial z} + k_6'' z - \left(\beta' + \frac{k_6'' k_5}{k_4} \right) &= 0 \\ -k_4 \bar{\omega} z \frac{\partial \beta}{\partial \bar{\omega}} + (k_3 + k_4 \bar{\omega}^2) \frac{\partial \beta}{\partial z} - \frac{k_5''}{k_4} (k_3 + k_4 \bar{\omega}^2) &= -\frac{1}{2} \frac{\partial \chi}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

De la segunda ecuación de este sistema (4.1), integrando, se obtiene:

$$\beta = -\frac{k_6''}{2k_6} z^2 + \frac{1}{k_6} \left(\beta' + \frac{k_6'' k_5}{k_4} \right) z + \varphi(\bar{\omega}, t) \quad (4.2)$$

Eliminando χ entre las ecuaciones 1ª y 3ª del sistema (4.1) se tiene:

$$k_4 \bar{\omega} z \left(\frac{\partial^2 B}{\partial \bar{\omega}^2} - \frac{\partial^2 B}{\partial z^2} \right) + \left[k_1 - k_3 + k_4 (z^2 - \bar{\omega}^2) \right] \frac{\partial^2 B}{\partial \bar{\omega} \partial z} + 3k_4 z \frac{\partial B}{\partial \bar{\omega}} - \\ - 3k_4 \bar{\omega} \frac{\partial B}{\partial z} + 3k_5^* \bar{\omega} = 0 \quad (4.3)$$

y sustituyendo en esta última (4.3) el potencial (4.2) y operando:

$$k_4 z \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{\omega}^2} \bar{\omega} + 3 \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\omega}} + 4 \frac{k_6^*}{k_6} \bar{\omega} \right) - 3 \left(\frac{k_4}{k_6} \beta' + \frac{k_6^* k_5}{k_6} - k_5^* \right) \bar{\omega} = 0 \quad (4.4)$$

Como φ es sólo función de $\bar{\omega}$ y de t debe ser:

$$k_4 \beta' + k_6^* k_5 - k_6 k_5^* = 0 \quad (4.5)$$

y como hemos supuesto $k_4 \neq 0$:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{\omega}^2} \bar{\omega} + 3 \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\omega}} + 4 \frac{k_6^*}{k_6} \bar{\omega} = 0 \quad (4.6)$$

La ecuación (4.5) nos da una nueva relación entre los coeficientes que deben verificar idénticamente, y de ella, integrando, obtenemos:

$$k_4 \beta - k_5^* k_6 + k_6^* k_5 = c_1 \quad (4.7)$$

siendo el primer miembro el coeficiente que aparece en las componentes de la velocidad (3.14).

Integrando ahora (4.6) resulta:

$$\varphi = \frac{K(t)}{\bar{\omega}^2} - \frac{k_6^*}{2k_6} \bar{\omega}^2 + B(t) \quad (4.8)$$

y sustituyendo este valor de φ en (4.2), teniendo en cuenta la

relación (4.5), obtenemos la función potencial:

$$B = \frac{k_5^*}{k_4} z + \frac{K(t)}{\bar{\omega}^2} - \frac{k_6^*}{2k_6} (\bar{\omega}^2 + z^2) + B(t) \quad (4.9)$$

Si $k_6 = 0$ la segunda ecuación del sistema (4.1) no determina el potencial B ; nos dice solamente que β es constante. La primera y tercera ecuaciones nos dan la ecuación (4.3) que, en el caso de sistemas estelares en estado estacionario y simetría cilíndrica fue estudiada por Oort ((9), p.), Camm ((19), p. 202), Fricke⁽²⁸⁾ y Lindblad ((20), p. 33), obteniendo la solución más general de la forma

$$B = \frac{\phi(u) - \phi(v)}{u - v} \quad (4.10)$$

donde u y v son raíces de la ecuación

$$u^2 - (\bar{\omega}^2 + z^2)u + a(\bar{\omega}^2 - z^2) - a^2 = 0$$

con

$$a = \frac{K_1 - k_3}{2k_4}$$

En el caso de un sistema no estacionario, con $k_6 = 0$ al resolver la ecuación (4.3), hemos hallado la solución:

$$B = \frac{\phi(u, t) - \phi(v, t)}{u - v} + \frac{k_5^* z}{k_4} \quad (4.11)$$

En efecto, la primera parte de (4.11) corresponde a la solución general de la ecuación sin segundo miembro cuya resolución es la ya conocida en caso estacionario ya que en ella no intervienen

derivadas respecto al tiempo. El segundo término de (4.11), que aparece al resolver la ecuación con segundo miembro, verifica idénticamente la ecuación (4.3).

Observamos que el introducir en el tensor A el coeficiente $k_6 \neq 0$ lleva como consecuencia obtener una expresión mucho más restringida del potencial, de acuerdo con las consideraciones de Chandrasekhar ((11), p. 136) por las cuales para obtener la máxima generalidad en la forma de $B(\bar{\omega}, z)$ debe imponerse las máximas restricciones en los coeficientes del elipsoide de velocidades. El término $k_6 \neq 0$ supone un grado más de libertad en dichos coeficientes.

De la expresión (4.9) del potencial deducimos que éste no es simétrico con respecto al plano de simetría de la galaxia mas que en el caso de ser $k_5'' = 0$, es decir, que k_5 sea una función lineal del tiempo y, por tanto, el sistema $(\bar{\omega}, z)$ sea un sistema inercial.

Para determinar la función χ , sustituimos la expresión (4.9) de B en las ecuaciones primera y tercera del sistema (4.1); así obtenemos, teniendo en cuenta además (4.5):

$$\left. \begin{aligned} \frac{4K}{\bar{\omega}^3} (K_1 + k_4 z^2) + 2(K_1 \frac{k_6''}{k_6} - \frac{k_5'^2}{k_4}) \bar{\omega} &= \frac{\partial \chi}{\partial \bar{\omega}} \\ -\frac{4K}{\bar{\omega}^2} k_4 z + 2 k_3 \frac{k_6''}{k_6} z &= \frac{\partial \chi}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

e integrando:

$$\chi = -\frac{2K}{\bar{\omega}^2} (K_1 + k_4 z^2) + (K_1 \frac{k_6''}{k_6} - \frac{k_5'^2}{k_4}) \bar{\omega}^2 + k_3 \frac{k_6''}{k_6} z^2 + D(t) \quad (4.13)$$

siendo χ función par en z y por tanto simétrica respecto al plano que hemos supuesto de simetría para la galaxia.

5.- DETERMINACION DE σ Y RELACIONES ENTRE LOS COEFICIENTES Y FUNCIONES DEL TIEMPO

Obtendremos σ de la relación (1.8)

$$\sigma = - \chi - \underline{\Delta} \cdot \underline{v}_0 \quad (5.1)$$

teniendo en cuenta (3.14), (3.15), (4.13) y la relación (4.7) que nos simplificará las anteriores:

$$\begin{aligned} \sigma = & \frac{2K}{\bar{\omega}^2} (K_1 + k_4 z^2) - \frac{k_6^2}{k_6} (K_1 \bar{\omega}^2 + k_3 z^2) - D(t) - \\ & - \frac{\bar{\omega}^2}{k_4 |A|} (K_1 \bar{\omega}^2 + k_3 z^2 + \frac{K_1 k_3}{k_4}) (k_4 k_6' z - c_1)^2 - \frac{k_5'^2 k_3}{k_4^2} \end{aligned} \quad (5.2)$$

En el apartado 2 hemos hecho la hipótesis que σ fuera simétrica respecto al plano ecuatorial $z = -k_5/k_4$ o lo que es lo mismo $Z = 0$. Anularemos pues los términos impares en Z , para lo cual bastará que se verifique

$$k_6' = 0 \quad (5.3) \quad \text{o bien} \quad c_1 = 0 \quad (5.4)$$

Ahora bien, para $c_1 = 0$ y $Z = 0$ la velocidad $\underline{U}_0$ es idénticamente nula, lo cual no parece expresar de un modo demasiado satisfactorio la realidad física de los sistemas estelares. Por ello, supondremos en nuestros razonamientos $c_1 \neq 0$, $k_6' = 0$.

Para $k_6' = 0$, σ se reduce a:

$$\sigma = \frac{2K}{\bar{\omega}^2} (K_1 + k_4 z^2) - D(t) - \frac{\bar{\omega}^2 c_1^2}{k_4 |A|} (K_1 \bar{\omega}^2 + k_3 z^2 + \frac{K_1 k_3}{k_4}) - \frac{k_5'^2 k_3}{k_4^2} \quad (5.5)$$

siendo las componentes de $\underline{\Delta}$ y $\underline{U}_0$:

$$\Delta_{\bar{\omega}} = k_5' \bar{\omega} z$$

$$\Delta_{\theta} = \frac{-1}{k_4} (k_5' k_6 + c_1) \bar{\omega} \quad (5.6)$$

$$\Delta_z = -k_5' (\bar{\omega}^2 + \frac{k_3}{k_4})$$

$$\mathcal{M}_0 = \frac{c_1 k_6}{|A|} \bar{\omega}^3 z$$

$$\mathcal{H}_0 = -\frac{c_1}{|A|} \bar{\omega} \left(\frac{K_1 k_3}{k_4} + K_1 \bar{\omega}^2 + k_3 z^2 \right) \quad (5.7)$$

$$\xi_0 = \frac{c_1 k_6}{|A|} \bar{\omega}^2 \left(\frac{K_1}{k_4} + z^2 \right)$$

y el potencial $\mathcal{B}$ y la función χ tomarán la forma:

$$\mathcal{B} = \frac{k_5''}{k_4} z + \frac{K}{\bar{\omega}^2} + B(t) \quad (5.8)$$

$$\chi = -\frac{2K}{\bar{\omega}^2} (K_1 + k_4 z^2) - \frac{k_5'^2}{k_4} \bar{\omega}^2 + D(t) \quad (5.9)$$

Los coeficientes constantes K_1, k_2, k_3, k_4, k_6 y las funciones del tiempo k_1, k_5, δ_3, K, B , y D que hemos ido considerando a lo largo de nuestro trabajo no son independientes entre sí.

En efecto, ya hemos encontrado entre ellos las relaciones (2.10) y (3.12). Obtendremos otras al imponer que la función potencial $\mathcal{B}$ y la función χ sean compatibles con la cuarta ecuación del sistema (1.10),

$$\underline{\Delta} \cdot \text{grad } \mathcal{B} = \frac{1}{2} \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

Teniendo en cuenta (5.6), (5.8) y (5.9), operando e identificando obtenemos

$$K' = 0$$

(5.10)

$$D'(t) = - \frac{2 k_3 k_5' k_5''}{k_4^2}$$

La primera ecuación nos dice que K no depende del tiempo. De la segunda se deduce para $D(t)$ el valor:

$$D(t) = - \frac{k_3 k_5'^2}{k_4^2} + c_5$$

con c_5 constante.

6.- TRAYECTORIAS DE LOS CENTROIDES LOCALES

Sean las ecuaciones del movimiento de un centroide local:

$$\frac{d\bar{\omega}}{\pi_0} = \frac{\bar{\omega} d\theta}{\Theta_0} = \frac{dz}{z_0} = dt \quad (6.1)$$

Sustituyamos en ellas π_0 , Θ_0 , z_0 por sus expresiones en función de $(\bar{\omega}, z)$ y hagamos luego, de acuerdo con (2.8), el cambio

$$z = Z - \frac{k_5}{k_4} \quad dz = dZ - \frac{k_5}{k_4} dt$$

Obtenemos:

$$\frac{d\bar{\omega}}{c_1 k_6 \bar{\omega}^3 Z} = \frac{\bar{\omega} d\theta}{-c_1 \bar{\omega} \left(\frac{K_1 k_3}{k_4} + K_1 \bar{\omega}^2 + k_3 Z^2 \right)} = \frac{dZ}{c_1 k_6 \bar{\omega}^2 \left(\frac{K_1}{k_4} + Z^2 \right)} = \frac{dt}{|A|} \quad (6.2)$$

Integrando la igualdad formada por las razones primera y tercera se obtiene:

$$\frac{K_1 + k_4 Z^2}{\bar{\omega}^2} = C_1 \quad (6.3)$$

Integrando la formada por las razones segunda y tercera, después de sustituir el valor de C_1 hallado en (6.3), o sea:

$$\frac{-d\theta}{k_3 C_1 + K_1 k_4} = \frac{dZ}{k_6 (K_1 + k_4 Z^2)},$$

siendo $\frac{K_1}{k_4} > 0$, (cap. 2, p.12), obtenemos:

$$\frac{-k_6 \theta}{k_3 C_1 + K_1 k_4} - \frac{1}{\sqrt{k_4 K_1}} \arctan \sqrt{\frac{k_4}{K_1}} Z = C_2 \quad (6.4)$$

Integrando la igualdad formada por las razones tercera y cuarta de (6.2), teniendo en cuenta el valor de C_1 de (6.3), después de dividir por $\bar{\omega}^4$, o sea:

$$\frac{dz}{\frac{c_1 k_6}{k_4} C_1} = \frac{dt}{(C_1 + k_2)(C_1 k_3 + K_1 k_4) - k_6^2 C_1}$$

se obtiene:

$$\frac{k_4 Z}{c_1 k_6 C_1} - \frac{t}{(C_1 + k_2)(C_1 k_3 + K_1 k_4) - k_6^2 C_1} = C_3 \quad (6.5)$$

Si en (6.4) despejamos Z y sustituimos Z en función de $\bar{\omega}$, deducido de (6.3), tendremos:

$$\sqrt{\frac{C_1}{K_1} \bar{\omega}^2 - 1} = \arctan \left(-C_2 \sqrt{\frac{K_1 k_4}{C_1 k_3 + K_1 k_4}} - \frac{k_6 \sqrt{K_1 k_4}}{C_1 k_3 + K_1 k_4} \theta \right) \quad (6.6)$$

Las ecuaciones (6.3) y (6.6) nos dan la proyección sobre el plano $\bar{\omega}$, Z , y sobre $Z = 0$ en coordenadas polares de eje polar $\bar{\omega}$ y argumento θ , respectivamente, de las trayectorias de los centroides locales. La ecuación (6.5) es la ecuación horaria del movimiento.

Estudiemos ahora la forma de estas trayectorias. Como según hemos dicho, $\frac{k_4}{K_1} > 0$, si $\frac{c_1}{K_1} > 0$,^(*) la curva integral (6.3) es una hipérbola de semieje real $a = \sqrt{\frac{K_1}{c_1}}$ y asíntotas $z = \pm \sqrt{\frac{c_1}{k_4}} \bar{\omega}$.

Para estudiar en la misma hipótesis la segunda curva integral (6.6) hagamos, por comodidad,

$$c_2 \sqrt{K_1 k_4} = m \theta_0 \quad - \frac{k_6 \sqrt{K_1 k_4}}{c_1 k_3 + K_1 k_4} = m$$

y llamemos $\pm \sqrt{\frac{K_1}{c_1}} = \pm R$, con lo cual se podrá escribir en

la forma:

$$\bar{\omega} = \frac{R}{\cos m(\theta - \theta_0)} \quad (6.7)$$

siendo fácil ver que es una curva con ramas infinitas, dependiendo la forma de sus ramas del valor de m . Si $m = \pm 1$, son rectas. Si $m > |1|$ son ramas hiperbólicas y el número de ellas depende de dicho valor de m . En cambio si $m < |1|$, son curvas espirales con ramas infinitas y el número de vueltas hasta alcanzar $\bar{\omega}$ un valor infinito depende del valor de m . En las figuras damos un ejemplo para $m = 2$ y para $m = 1/10$.

Si $k_6 = 0$, a partir de (6.2) deducimos que las trayectorias de los centroides locales son circunferencias $\bar{\omega} = I_1$, $z = I_2$ de acuerdo con teorías anteriores ((12), p. 241). En cambio, si

(*) $\frac{c_1}{K_1} \leq 0$ no tiene sentido físico.

$k_6 \neq 0$, se obtienen las trayectorias de los centroides locales como intersección de las superficies cilíndricas (6.3) y (6.7).

Se demuestra en dinámica estelar ((15), p.14) a partir de las ecuaciones (1.10) que $\underline{V}_0$ y σ verifican la ecuación diferencial

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \underline{V}_0 \cdot \text{grad } \sigma = 0 \quad (6.8)$$

lo cual es fácil comprobar en nuestro caso.

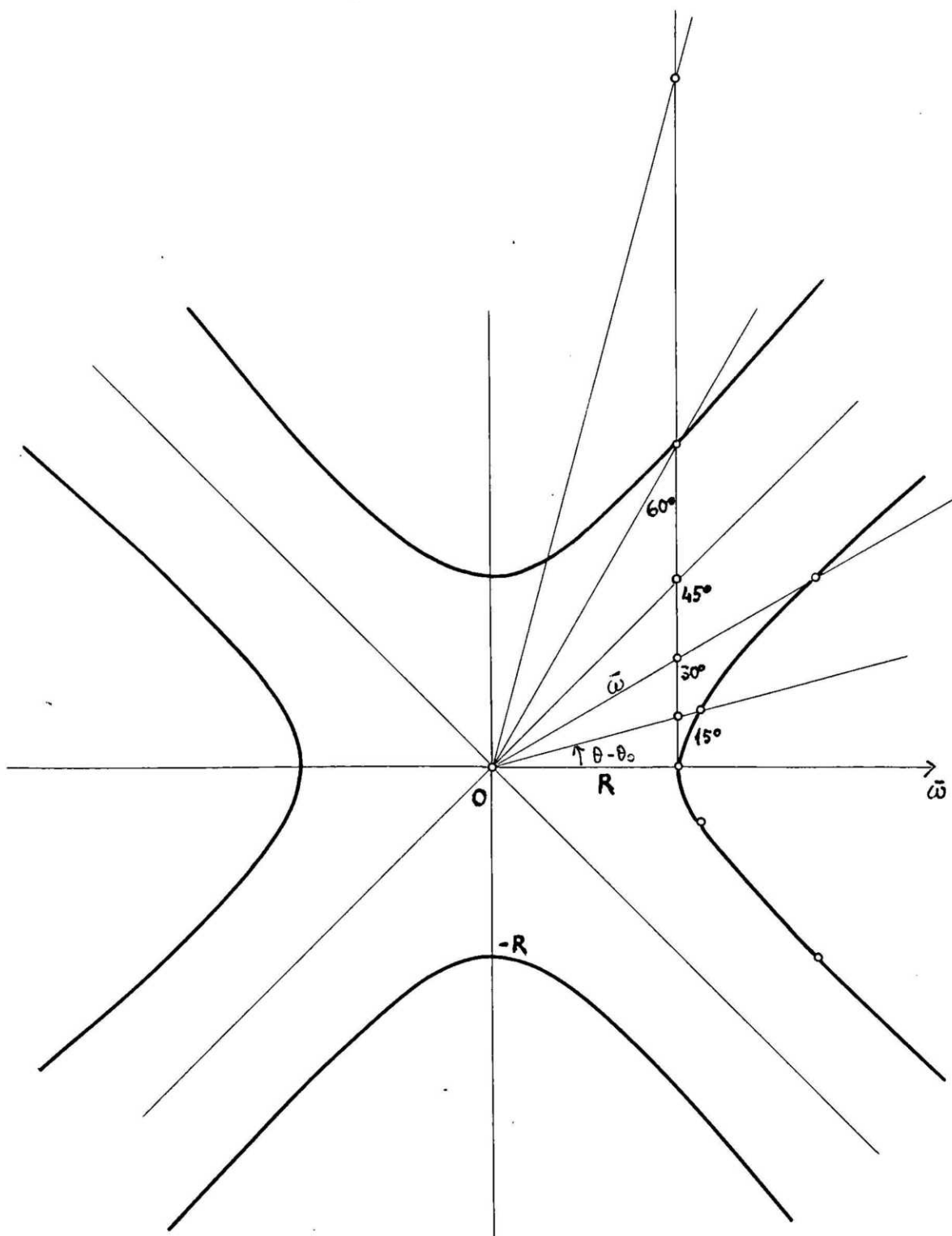
Aplicando el método de resolución de Lagrange, si C_1 y C_2 son dos integrales primeras independientes del sistema

$$\frac{d\tilde{\omega}}{\mathcal{H}_0} = \frac{dz}{z_0} = dt \quad (6.9)$$

la integral general de (6.8) será de la forma

$$\sigma = \sigma (C_1, C_2) \quad (6.10)$$

Pero, (6.9) son precisamente las ecuaciones del movimiento de un centroide local, podemos enunciar que " σ se mantiene constante a lo largo de la trayectoria de cada centroide local", análogamente a lo que ocurre en el caso de ser $k_6 = 0$. ((15), p.14).

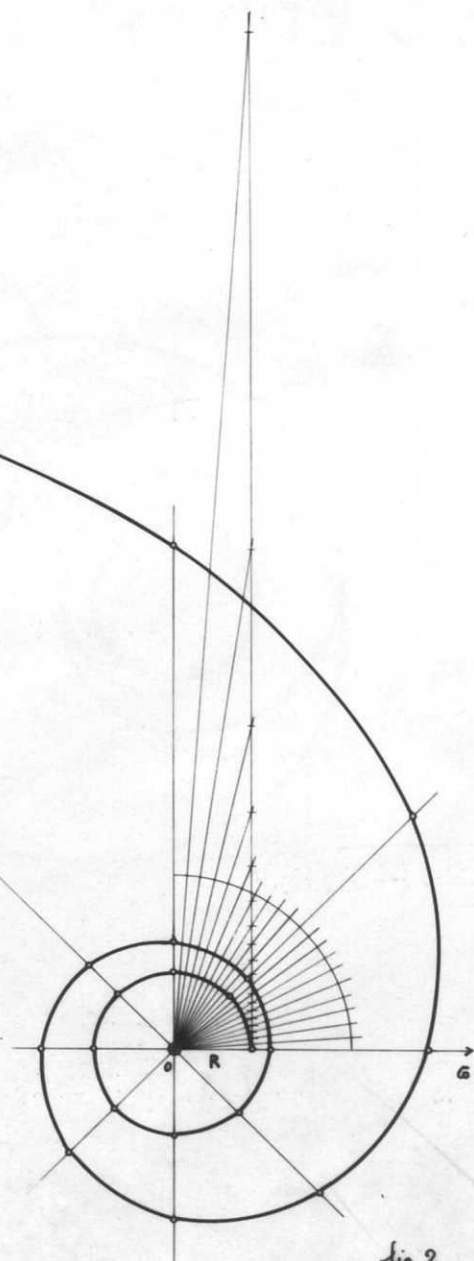


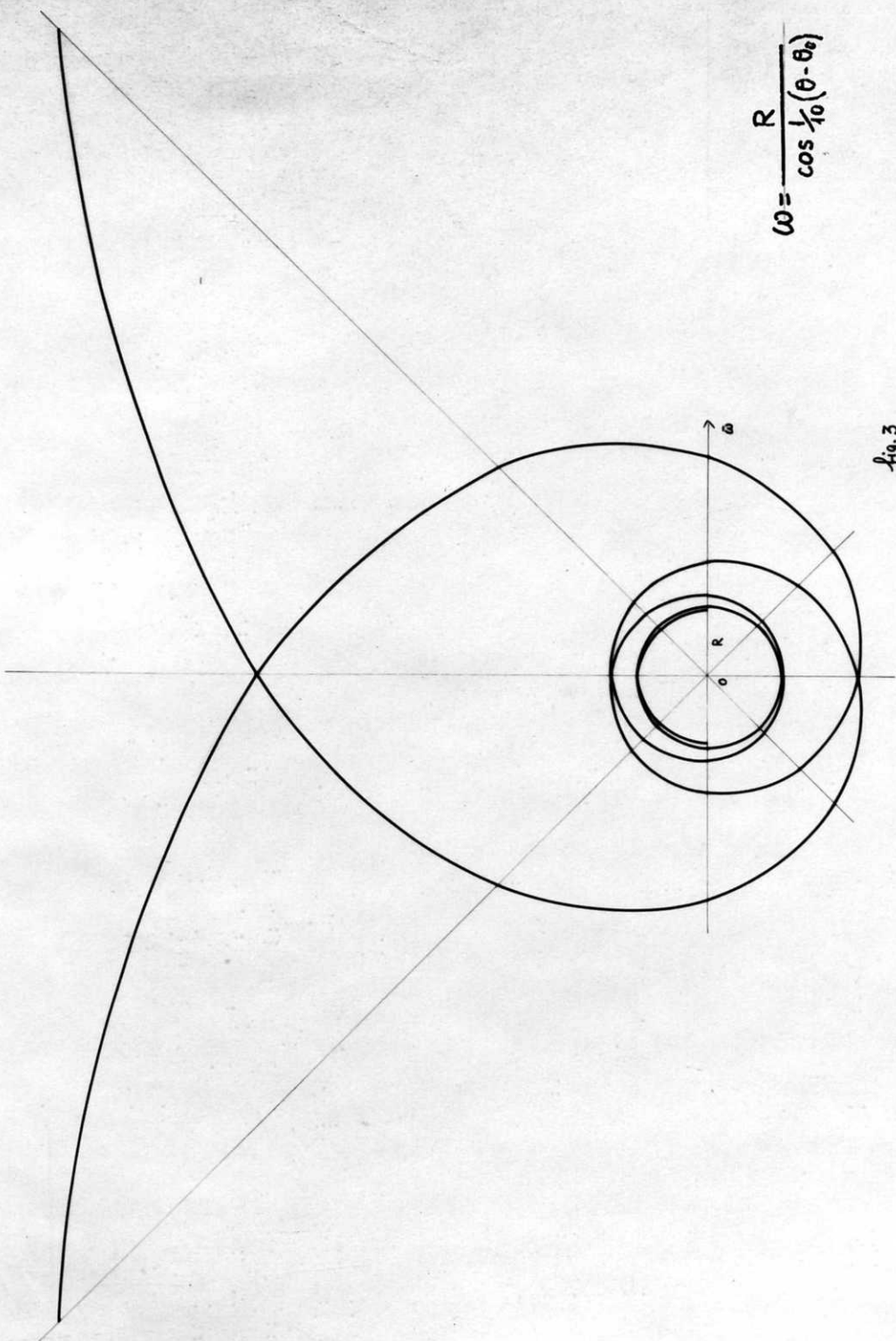
$$\bar{\omega} = \frac{R}{\cos 2(\theta - \theta_0)}$$

fig.1

Construcción de la curva integral

$$\bar{\omega} = \frac{R}{\cos \frac{1}{10}(\theta - \theta_0)}$$





$$\omega = \frac{R}{\cos \frac{1}{10}(\theta - \theta_0)}$$

fig. 3

7.- ESTUDIO DE LA CURVA VELOCIDAD-DISTANCIA

Si en las componentes (5.7) de la velocidad hacemos $k_6 = 0$, obtendremos: $\pi_0 = \xi_0 = 0$,

$$(\text{H})_0 = \frac{-\frac{c_1}{k_4} \bar{\omega}}{K_1 + k_2 \bar{\omega}^2 + k_4 z^2} \quad (7.1)$$

Esta segunda componente coincide con la dada por J.H.Oort((22),p.465) En nuestro trabajo el término $k_6 \neq 0$ hace aparecer las dos componentes π_0 y ξ_0 de la velocidad, en dirección radial y perpendicular respectivamente.

Chandrasekhar ((11), p. 122) en el estudio que hace del caso de sistemas estelares con simetría axial obtiene, trabajando en dos dimensiones, además de la componente tangencial $(\text{H})_0$, de la cual (7.1) es una generalización, una componente radial π_0 de la velocidad, que corresponde a un movimiento radial de expansión o contracción, ya que es $\pi_0 \neq 0$ sólo si es función del tiempo. Llega a la conclusión que "el campo de movimientos radiales está directamente relacionado con el carácter no estacionario del sistema".

Igualmente en el caso de tres dimensiones la tercera componente de $\underline{V}_0$ que obtiene Chandrasekhar es función del tiempo. Es de notar, que nosotros, aun en caso estacionario, obtenemos una componente radial $\pi_0 \neq 0$ y otra perpendicular $\xi_0 \neq 0$ de la velocidad, al considerar $k_6 \neq 0$, ya que, en efecto, en las componentes (5.7) el único coeficiente que depende del tiempo es k_5 . El signo de k_6 nos da una idea de la forma que va tomando el sistema estelar al girar alrededor del eje Z. En efecto, si observamos la resultante de las dos componentes radial y perpendicular de la velocidad veremos que tanto si k_6 es positivo como si es negativo el sistema sufre una dilatación en una parte

del plano ecuatorial y una contracción en la parte opuesta, invirtiéndose al cambiar el signo.

Nos interesa estudiar la segunda componente $\odot_0$ de la velocidad en función de la distancia $\bar{\omega}$, para hacer aplicación de la teoría desarrollada en los capítulos anteriores, comparando los resultados que obtengamos con datos experimentales.

Si $k_6 = 0$, para $Z = 0$, teniendo en cuenta la expresión (2.9) de $|A|$ y simplificando, obtenemos:

$$\odot_0 = \frac{-c_1/k_4 \bar{\omega}}{K_1 + k_2 \bar{\omega}^2} \quad (7.2)$$

que fue estudiada por Chandrasekhar((11), p.123)

Si $k_6 \neq 0$, es, también para $Z = 0$:

$$\odot_0 = \frac{-\frac{c_1}{k_4} \bar{\omega} (k_3 + k_4 \bar{\omega}^2)}{(K_1 + k_2 \bar{\omega}^2)(k_3 + k_4 \bar{\omega}^2) - k_6^2 \bar{\omega}^2} \quad (7.3)$$

o haciendo:

$$\rho_0 = \frac{-c_1}{K_1 k_4} \quad (7.4)$$

$$\rho = \frac{K_1 k_4 + k_2 k_3 - k_6^2}{K_1 k_3} \quad (7.5)$$

$$\tau = \frac{k_2 k_4}{K_1 k_3} \quad (7.6)$$

$$\mu = \frac{k_4}{k_3} \quad (7.7)$$

la misma (7.3) se escribirá:

$$\odot_0 = \rho_0 \frac{(1 + \mu \bar{\omega}^2) \bar{\omega}}{1 + \rho \bar{\omega}^2 + \tau \bar{\omega}^4} \quad (7.8)$$

Para representar gráficamente (7.8) tengamos en cuenta que para $\bar{\omega} = 0$ es $\mathbb{H}_0 = 0$ y para $\bar{\omega} = \infty$ es $\mathbb{H}_0 = 0$.

La forma del denominador ha de ser de signo constante, para lo cual, o todos los coeficientes son positivos ($\rho > 0, \tau > 0$) o con $\rho < 0, \tau > 0$, deberá ser

$$\rho^2 < 4\tau \quad (7.9)$$

La derivada de $\mathbb{H}_0$ respecto a $\bar{\omega}$ es:

$$\frac{d\mathbb{H}_0}{d\bar{\omega}} = -\int_0^{\bar{\omega}} \frac{\mu\tau\bar{\omega}^6 - (\mu\rho - 3\tau)\bar{\omega}^4 - (3\mu - \rho)\bar{\omega}^2 - 1}{(1 + \rho\bar{\omega}^2 + \tau\bar{\omega}^4)^2} d\bar{\omega} \quad (7.10)$$

y para que $\mathbb{H}_0$ presente extremos debe anularse el numerador de (7.10), o lo que es lo mismo, haciendo $\bar{\omega}^2 = x$, debe verificarse

$$\mu\tau x^3 - (\mu\rho - 3\tau)x^2 - (3\mu - \rho)x - 1 = 0 \quad (7.11)$$

dependiendo los extremos de la función $\mathbb{H}_0(\bar{\omega})$ de la naturaleza de las raíces de esta ecuación en x .

Teniendo en cuenta la hipótesis que hemos hecho de distribución elipsoidal, esta ecuación (7.11) posee una raíz real positiva (ya que el producto de las raíces es positivo y no puede poseer tres raíces reales positivas); en consecuencia, $\mathbb{H}_0$ posee un solo extremo positivo. En efecto la condición necesaria para que las tres raíces de (7.11) fueran positivas sería que se verificaran las limitaciones

$$\frac{\mu\rho - 3\tau}{\mu\tau} > 0 \quad - \frac{3\mu - \rho}{\mu\tau} > 0 \quad \frac{1}{\mu\tau} > 0 \quad (7.12)$$

y como según (7.6), (7.7) y (cap. 2, pág. 12) es $\mu > 0, \tau > 0$, la última se verificaría siempre y las dos primeras se reducirían a

$$\mu\rho > 3\tau \quad \rho < 3\mu \quad (7.13)$$

y de ellas obtendríamos $\varphi > 3/2 \left(\mu + \frac{\tau}{\mu} \right)$ en contradicción con (7.5).

Estudiamos ahora la concavidad de la curva (7.8) en el origen.

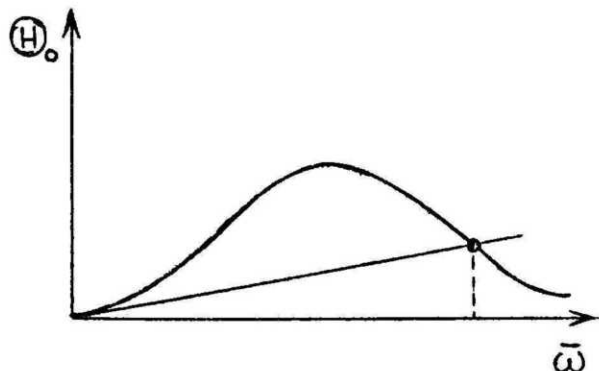
Para $\bar{\omega} = 0$ es $\frac{d\mathbb{H}_0}{d\bar{\omega}} = \mathbb{J}_0$. La pendiente de $\mathbb{H}_0$ en el origen es $\mathbb{J}_0$ y la ecuación de la tangente a la curva $\mathbb{H}_0(\bar{\omega})$ en el origen $\mathbb{H}_0 = \mathbb{J}_0 \bar{\omega}$. Para ver si la curva es cóncava o convexa en dicho punto basta estudiar las intersecciones de esta tangente con la curva. En la intersección se verificará:

$$\mathbb{J}_0 \bar{\omega} = \mathbb{J}_0 \frac{(1 + \mu \bar{\omega}^2) \bar{\omega}}{1 + \varphi \bar{\omega}^2 + \tau \bar{\omega}^4}$$

cuyas soluciones son:

$$\bar{\omega} = 0 ;$$

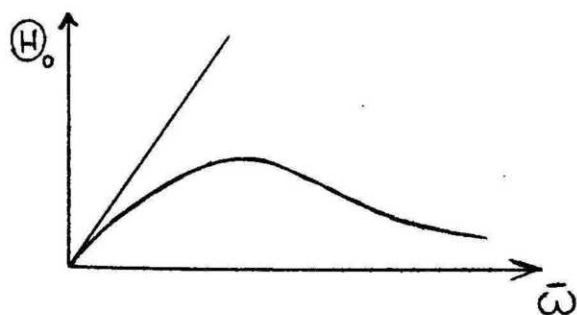
$$\bar{\omega} = \pm \sqrt{\frac{\mu - \varphi}{\tau}} \quad (7.14)$$



De esta (7.14) se deduce fácilmente que para $\varphi > 0$, la intersección es real si $\mu > \varphi$ y es imaginaria si $\mu < \varphi$. En el primer caso la concavidad va dirigida hacia la parte positiva del eje de las $\mathbb{H}_0$; en el segundo caso la concavidad va dirigida hacia la parte negativa del eje de las $\mathbb{H}_0$.

Para $\varphi < 0$ la intersección es siempre real y la concavidad va dirigida hacia la parte positiva del eje de las $\mathbb{H}_0$.

Para $\mu = \varphi$, es $\bar{\omega} = 0$ y no hay segunda intersección.



Si $k_6 = 0$, para $Z = 0$, tal como hemos indicado en la pági-

na 31, obtenemos la componente $(H)_0$ dada por (7.2), que coincide con la dada por Chandrasekhar en su Monografía tantas veces citada. La curva (7.2) presenta un solo extremo y su concavidad en el origen va dirigida hacia la parte negativa del eje $(H)_0$. La importancia de haber introducido el término $k_6 \neq 0$ radica, principalmente, en que se pueden explicar, con nuestra teoría, las formas de las curvas que relacionan la velocidad con la distancia obtenidas experimentalmente en gran número de galaxias, incluyendo, como caso particular, las explicadas en la teoría de Chandrasekhar.

Estudiemos ahora la variación de la velocidad angular

$$\frac{(H)_0}{\bar{\omega}} = \Omega_0 \frac{1 + \mu \bar{\omega}^2}{1 + \rho \bar{\omega}^2 + \tau \bar{\omega}^4} \quad (7.15)$$

que en el origen, $\bar{\omega} = 0$, coincide con el valor Ω_0 de la pendiente de la tangente en él; para $\bar{\omega} \rightarrow \infty$, es nula; y para un punto cualquiera de la curva coincide con la pendiente de la recta que lo une con el origen de coordenadas ($\bar{\omega} = 0$, $(H)_0 = 0$).

Derivando (7.15) respecto a $\bar{\omega}$ e igualando a cero la derivada se obtiene:

$$\begin{aligned} \mu \tau \bar{\omega}^4 + 2 \tau \bar{\omega}^2 - \mu + \rho &= 0 \\ \bar{\omega} &= 0 \end{aligned}$$

siendo las soluciones de la primera:

$$\bar{\omega} = \pm \sqrt{\frac{-\tau \pm \sqrt{\tau^2 + \mu \tau (\mu - \rho)}}{\mu \tau}} \quad (7.16)$$

Sustituyendo en la derivada segunda de (7.15) llegamos a los siguientes resultados:

Para $\bar{\omega} = 0$, si $\rho > 0$, la velocidad angular presenta máximo si $\mu \leq \rho$ y mínimo si $\mu > \rho$. Si $\rho < 0$, presenta mínimo.

Obsérvese que el caso de máximo corresponde al de concavidad

hacia la parte negativa del eje $(H)_0$, y el de mínimo al de concavidad hacia la parte positiva.

Para los valores de $\bar{\omega}$ dados por (7.16) hemos de tener en cuenta que al sustituir en la segunda derivada para determinar los máximos y mínimos deberemos considerar sólo la determinación positiva de las dos raíces y además deberá ser

$$\tau^2 + \mu\tau(\mu - \rho) > 0$$

y

$$\sqrt{\tau^2 + \mu\tau(\mu - \rho)} > \tau$$

para que $\bar{\omega}$ sea real y positiva. O sea, elevando al cuadrado y simplificando:

$$\mu\tau(\mu - \rho) > 0$$

y como $\mu\tau > 0$, será: $\mu > \rho$.

Sustituyendo pues (7.16) en la segunda derivada obtenemos que para este valor la función velocidad angular presenta máximo. Observamos que este máximo relativo de la velocidad angular para $\bar{\omega} \neq 0$ lo encontramos sólo en el caso de curvas velocidad-distancia con mínimo en el origen (concavidad hacia arriba), y por consiguiente explicable por la introducción del término $k_6 \neq 0$. Por otra parte, la presencia de dicho máximo explicaría el fenómeno que fue observado por primera vez en las nebulosas espirales N.G.C. 2681 y N.G.C. 3190 según el cual la estructura espiral de una galaxia consta de dos partes, una interior, hasta una determinada distancia crítica (7.16), en la que los brazos se desarrollan en el sentido de la rotación del núcleo y otra exterior en la que se desarrollan en sentido contrario⁽²⁹⁾.

Aplicaremos ahora a tres ejemplos concretos la teoría que acabamos de desarrollar, pero antes debemos advertir que nuestra curva velocidad-distancia ha sido obtenida, en cada caso, para $Z = 0$. Al crecer Z la velocidad $(H)_0$ disminuye. En efecto, para verlo derivemos $(H)_0$ respecto a Z , o lo que es lo mismo, teniendo en cuenta que $K_1 + k_4 Z^2$ ha de tener signo constante, halle-

mos $\frac{d(H)_0}{dZ}$ con $X = K_1 + k_4 Z^2$, o sea:

$$\frac{d\Theta_0}{dX} = -\frac{c_1\bar{\omega}}{k_4} \frac{-[K_1k_4(K_1k_4 - k_6^2)\bar{\omega}^4 + 2K_1k_3k_4\bar{\omega}^2X + k_3^2X^2]}{[(k_2\bar{\omega}^2 + X)(K_1k_4\bar{\omega}^2 + k_3X) - k_6^2\bar{\omega}^2X]^2} \quad (7.17)$$

e igualando a cero obtendremos:

$$X = \frac{-K_1k_4\bar{\omega}^2 \pm \sqrt{-K_1k_4k_6^2\bar{\omega}^4}}{k_3}$$

y como $K_1k_4 > 0$, es X imaginaria cualquiera que sea $\bar{\omega}$, lo cual nos indica que $\Theta_0(X)$ no posee extremos reales. Esto quiere decir que, no siendo $\Theta_0(X)$ constante, será constantemente creciente o decreciente. Para averiguarlo acudiremos a la misma función ya que aunque en (7.17) el denominador sea positivo es difícil saber cual es el signo del numerador a causa del término $K_1k_4 - k_6^2$.

Sea pues,

$$\Theta_0(X) = -\frac{c_1\bar{\omega}}{k_4} \frac{k_3X + K_1k_4\bar{\omega}^2}{(k_2\bar{\omega}^2 + X)(k_3X + K_1k_4\bar{\omega}^2) - k_6^2\bar{\omega}^2X}$$

para $X \rightarrow 0$, es $\Theta_0(X) \geq 0$, ya que hemos supuesto positiva la pendiente de $\Theta_0(\bar{\omega})$ en el origen y por tanto $-c_1/k_4 > 0$.

En cambio, para $X \rightarrow \infty$ es $\Theta_0(X) = 0$, ya que el grado del denominador respecto a X es superior al del numerador. Luego la función $\Theta_0(X)$ y, en consecuencia la $\Theta_0(Z)$ es decreciente.

Esto explicará las pequeñas diferencias que encontramos en ordenadas entre las curvas obtenidas a partir de las observaciones ópticas y radioeléctricas y las obtenidas a partir de nuestra fórmula (7.8), en el sentido $0 - C < 0$, sobre todo en el intervalo en que se puede estimar mejor las medidas, ya que las nebulosidades observadas no están, como hemos supuesto nosotros en el plano del ecuador⁽³⁰⁾.

Para simplificar la construcción de la curva velocidad-distancia escribiremos la ecuación (7.8) en forma reducida, de tal manera

que para un valor determinado de $\bar{\omega}^2 = x_1$ que supondremos igual a la unidad, obtengamos un valor de $\odot_0 = \odot_{01}$ también unitario.

De esta manera obtendremos:

$$P = \frac{1 + q + r}{1 + p} \frac{(1 + p y^2) y}{1 + q y^2 + r y^4} \quad (7.18)$$

donde $y^2 = \frac{x}{x_1}$ con $x = \bar{\omega}^2$; $p = \mu x_1$; $q = \rho x_1$;

$$r = \tau x_1^2; \quad P = \frac{\odot_0}{\odot_{01}}$$

Las relaciones (7.9), (7.13) y las que pueden deducirse de comparar (7.5), (7.6) y (7.7), se verificarán también análogamente entre p , q , r . Para simplificar aun más el problema supondremos que $y = 1$ corresponde a un máximo de la función P , de manera que (7.18) presentará máximo en el punto $M(1,1)$. De este modo, la condición

$$p r y^6 - (p q - 3r) y^4 - (3p - q) y^2 - 1 = 0$$

análoga a la (7.11), obtenida anulando la primera derivada de (7.18) respecto a y , se verificará para $y^2 = 1$; por tanto entre p , q , r tendremos la nueva relación

$$p(r - q) + 3(r - p) + q - 1 = 0 \quad (7.19)$$

que se verifica, en particular, para $p = r = 1$ cualquiera que sea q .

Esto nos sugiere un modelo sencillo que nos permite el ajuste de nuestra ecuación a las curvas observadas, con un grado de libertad. En efecto, haciendo en (7.18) $p = r = 1$ y tomando q como parámetro, construimos la familia de curvas a un parámetro

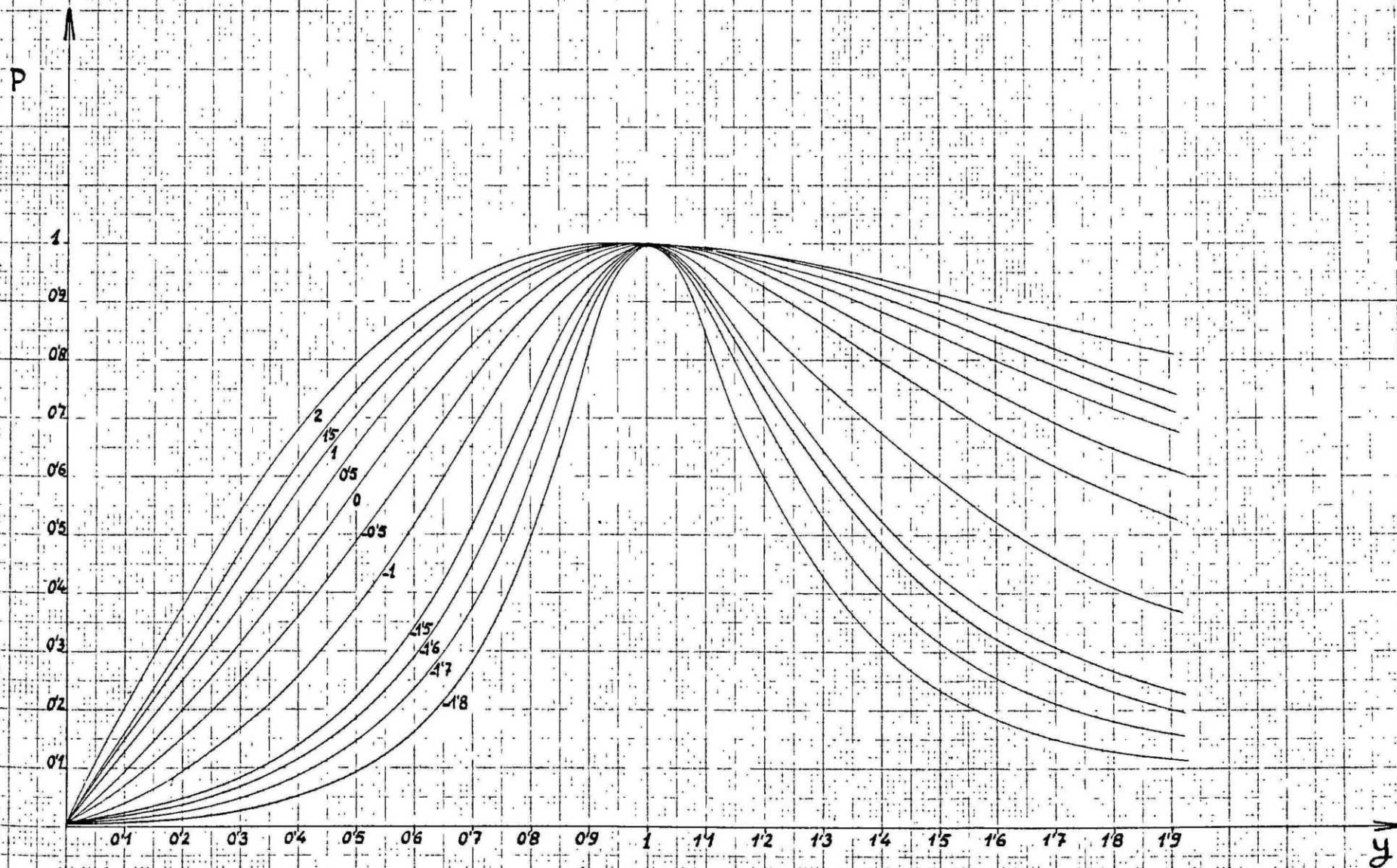


fig. 4

de la figura 4. e entre ellas, la que corresponde al valor $q = -1,5$ ajusta muy satisfactoriamente la nebulosa del Triángulo (M 33), la que corresponde a $q = +1$, la de Andrómeda (M 31), y la que corresponde a $q = +2$, nuestra Galaxia, como justificamos a continuación, comparando para cada una los valores observados y los calculados.

De las consideraciones de la página 33 y las relaciones (7.5), (7.6), (7.7), teniendo en cuenta, además, las relaciones entre p, q, r , y μ, φ, τ , resulta que si $q > 0$, $k_6 \neq 0$ y $p = r = 1$, debe verificarse $1 \leq q < 2$. Si $k_6 = 0$, es $q = 2$ y entonces la curva es del tipo (7.2).

El tomar q como parámetro siendo $p = r = 1$ equivale, teniendo en cuenta (7.5), (7.6) y (7.7), a considerar en (7.3) k_6

como parámetro, siendo $\frac{k_2}{k_1} = \frac{k_4}{k_3}$, igualdad que responde a la

observación y a la que nos referiremos al hacer aplicación a la Galaxia.

APLICACION A M 33. La galaxia M 33 es de tipo espiral normal Sc, se halla en la constelación del Triángulo y es uno de los objetos extragalácticos más estudiados debido a sus grandes dimensiones y favorable inclinación. (31)

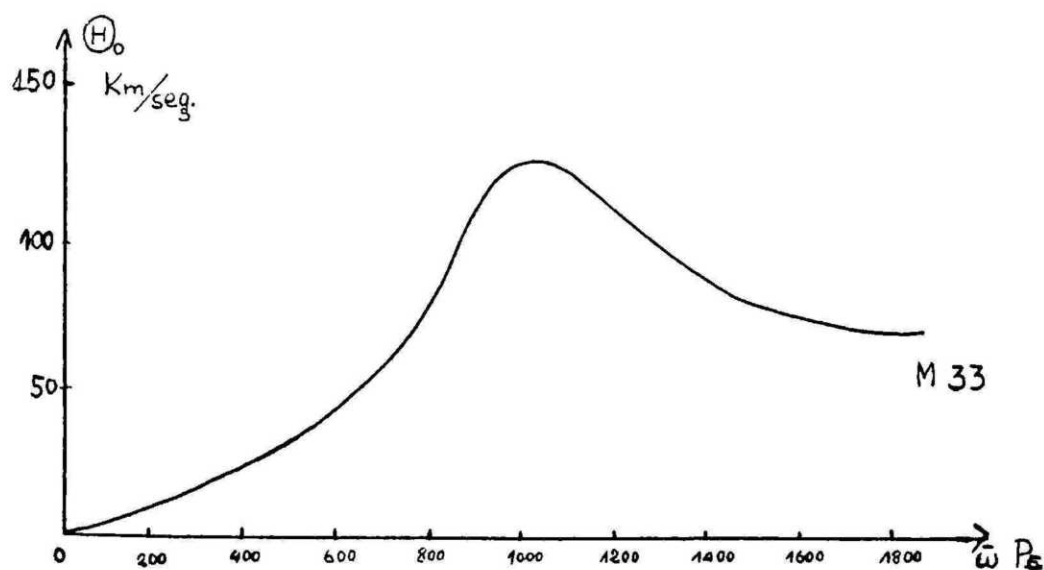


fig. 5

$P \wedge$

1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1

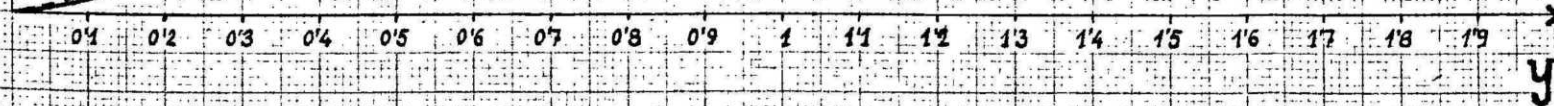
0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1 1.1 1.2 1.3 1.4 1.5 1.6 1.7 1.8 1.9

y

M 33

— calculada
- - - observada

fig. 6



A partir de la curva velocidad-distancia dada por Mayall⁽³²⁾ que reproducimos en la figura 5, obtenemos los valores de las P observadas de la tabla I. Las P calculadas las obtenemos a partir de la fórmula (7.18) con $p = r = 1$, $q = -1,5$. Tanto las abscisas como las ordenadas son valores reducidos, teniendo en cuenta que el máximo (1060,125) coincide con el punto (1,1). En el gráfico (fig. 6) hemos dibujado de trazos la misma curva de la figura 3 reducida a nuestro sistema, y continúa la curva calculada con nuestro modelo.^(*)

TABLA I

$\bar{\omega}$ en pcs.	y	P obs.	P calc.	$O - C$
100	0,094	0,035	0,024	0,011
200	0,188	0,061	0,051	0,010
300	0,283	0,094	0,086	0,008
400	0,377	0,141	0,133	0,008
500	0,472	0,212	0,201	0,011
600	0,566	0,306	0,300	0,006
700	0,660	0,435	0,442	- 0,007
800	0,755	0,611	0,631	- 0,020
900	0,849	0,799	0,833	- 0,034
1000	0,943	0,940	0,975	- 0,035
1100	1,038	0,975	0,989	- 0,014
1200	1,132	0,870	0,896	- 0,026
1300	1,226	0,740	0,764	- 0,024
1400	1,321	0,635	0,635	0,000
1500	1,415	0,564	0,530	0,034
1600	1,509	0,519	0,446	0,073
1700	1,604	0,494	0,381	0,113

(*) Por fidelidad al modelo de Mayall no hemos reducido las distancias al nuevo módulo, lo cual no afecta al resultado de la comparación con nuestro modelo, ya que trabajamos con una ecuación reducida.

APLICACION A M 31. Para el estudio de la rotación de la nebulosa de Andrómeda, de tipo espiral Sb, generalmente se distingue entre la parte correspondiente al núcleo $\bar{\omega} < 12'$ y la parte exterior al mismo $\bar{\omega} \geq 12'$. La primera presenta unas características muy especiales y no es posible estudiar el campo de velocidades en esta región central por métodos ópticos. Para ajustar nuestro modelo a la parte exterior de dicha región central hemos tomado como base la curva velocidad-distancia de la figura 7, dada en recientes estudios por Rubin y Ford⁽³³⁾

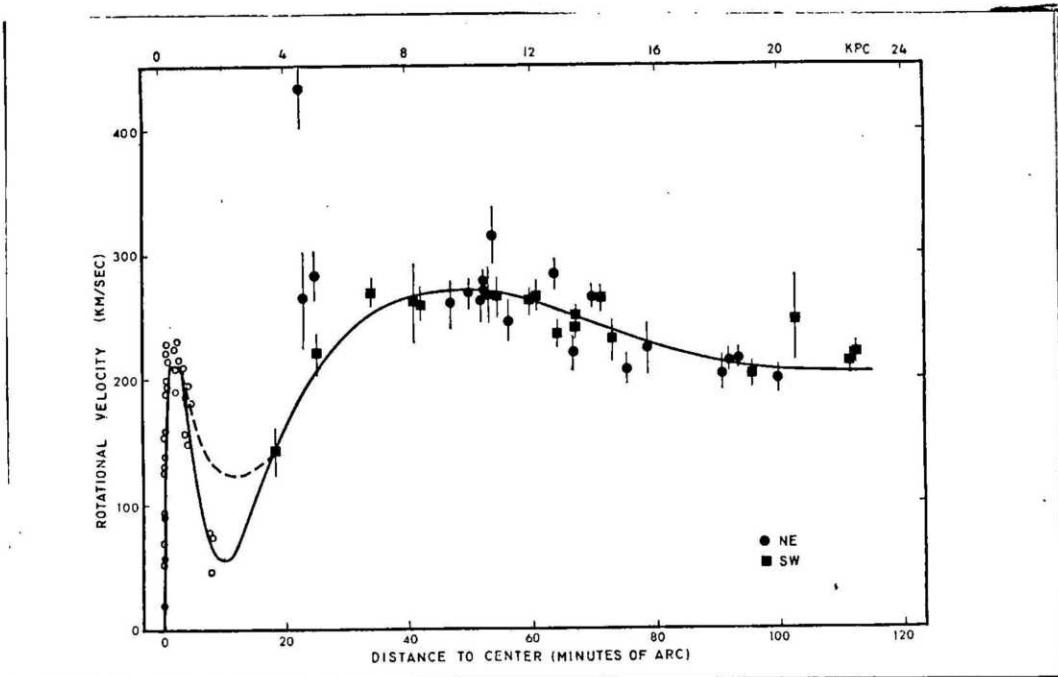


fig. 7

A partir de esta curva obtenemos los valores de las P observadas de la tabla II, teniendo en cuenta que al máximo (9,5;273) le corresponde en nuestra curva el punto (1,1). Los valores de P calculados se han obtenido para $p = r = 1$ y $q = 1$, de la fórmula (7.18).

En el gráfico (figura 8) que acompaña el texto comparamos la curva que tomamos como comparación, reducida a nuestro sistema

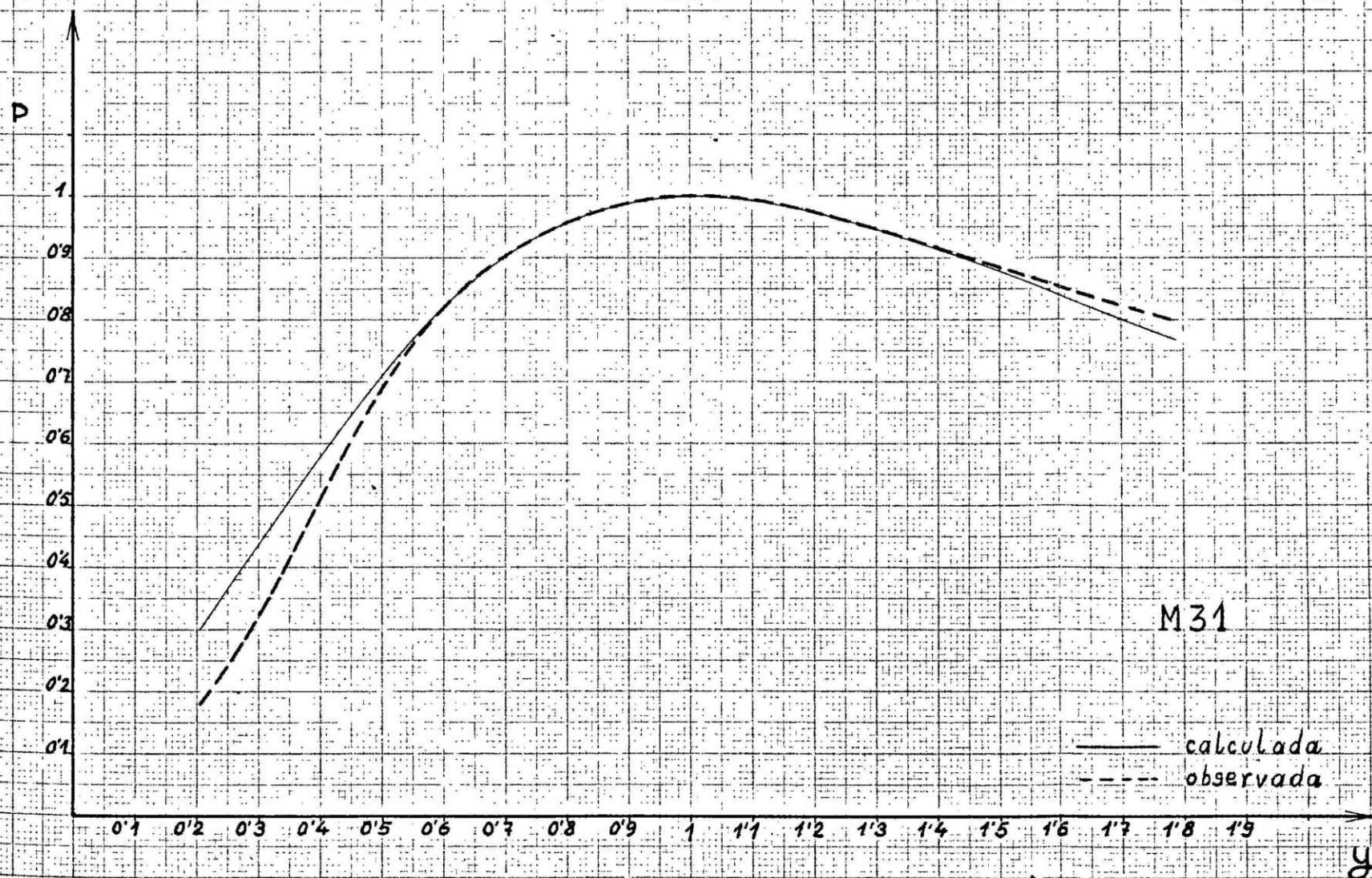


fig. 8

y que hemos dibujado de trazos y la que obtenemos con nuestro modelo, dibujada continua.

TABLA II

$\bar{\omega}$ en Kpc.	y	P obs.	P calc.	O - C
2	0,210	0,194	0,313	- 0,119
3	0,316	0,363	0,469	- 0,103
4	0,421	0,575	0,614	- 0,039
5	0,526	0,736	0,744	- 0,008
6	0,632	0,850	0,851	- 0,001
7	0,737	0,927	0,928	- 0,001
8	0,842	0,974	0,976	- 0,002
9	0,947	0,996	0,997	- 0,001
10	1,053	0,996	0,997	- 0,001
11	1,158	0,982	0,982	- 0,000
12	1,263	0,960	0,956	0,004
13	1,368	0,930	0,924	0,006
14	1,474	0,897	0,888	0,009
15	1,579	0,864	0,852	0,012
16	1,684	0,832	0,815	0,017

APLICACION A LA GALAXIA. Para la Galaxia tomamos, para ajustar nuestro modelo, la curva de la figura 7, basada en el modelo de Schmidt (1965) ((33), p. 397). Haciendo corresponder el máximo (8,5; 253) al punto (1,1) de nuestra curva, obtenemos las coordenadas reducidas de la tabla III. Como en el caso de M 31 nuestro modelo no ajusta las proximidades del núcleo, donde además observamos las desviaciones de sentido contrario al que, según la teoría, deberíamos obtener. La causa de este hecho hemos de buscarla en la función de distribución de la velocidad del gas interestelar en esta región, donde no es elipsoidal, y donde, además, la observación óptica debe ser sustituida por la radioeléctrica.⁽³⁴⁾

Hemos calculado los valores de P a partir de nuestra fórmula (7.18), tomando para los parámetros los valores $p = r = 1$, $q = 2$. En la gráfica (figura 9) comparamos los valores observados y los calculados.

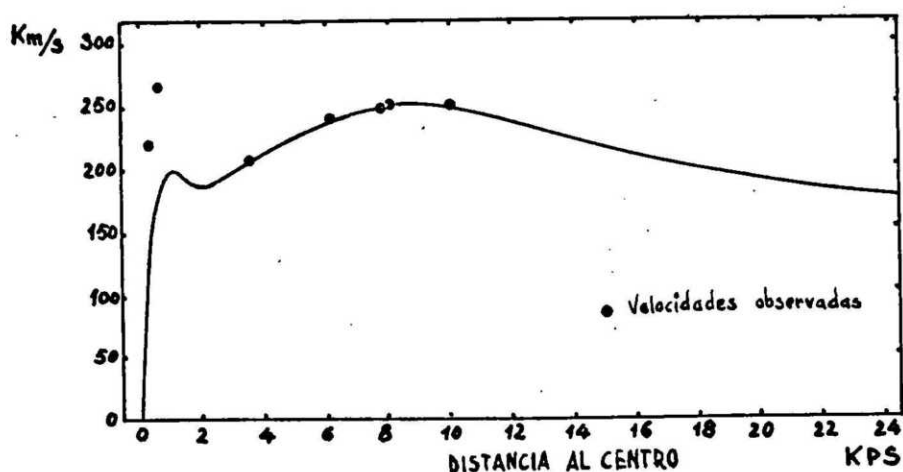


fig. 9

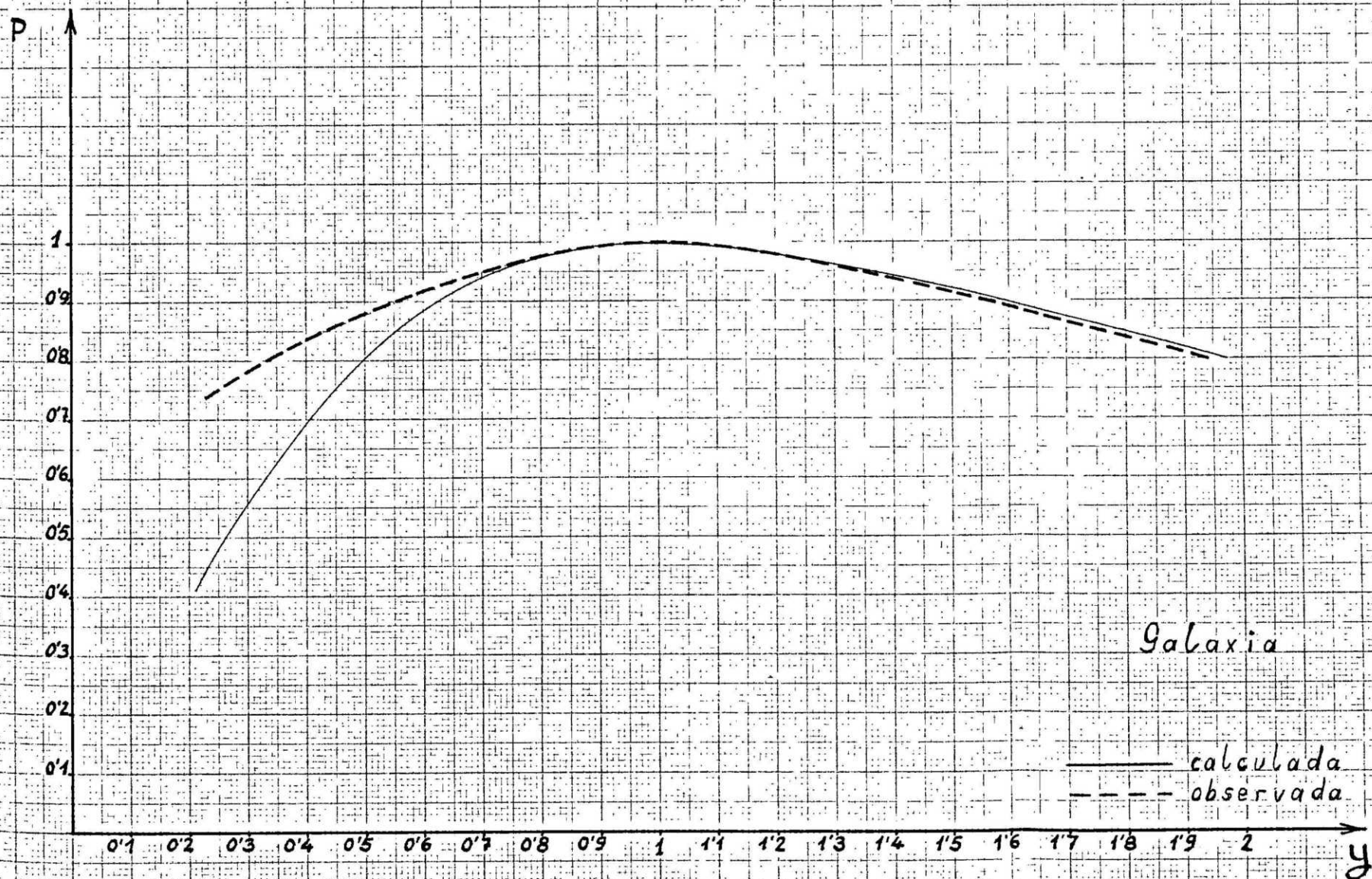


fig. 10

TABLA III

$\bar{\omega}$ en Kpc.	y	P obs.	P calc.	O - C
1	0,118			
2	0,235	0,743	0,443	0,300
3	0,353	0,813	0,627	0,186
4	0,471	0,862	0,769	0,093
5	0,588	0,910	0,873	0,037
6	0,706	0,941	0,942	- 0,001
7	0,824	0,975	0,981	- 0,006
8	0,941	0,988	0,988	0,000
9	1,059	0,990	0,998	- 0,008
10	1,176	0,986	0,987	- 0,001
11	1,294	0,966	0,967	- 0,001
12	1,412	0,941	0,943	- 0,002
13	1,529	0,910	0,916	- 0,006
14	1,647	0,886	0,887	- 0,001
15	1,765	0,850	0,857	- 0,007
16	1,882	0,827	0,828	- 0,001

8.- DINAMICA GALACTICA

Si suponemos la función de distribución (1.2) de tipo elipsoidal, Q debe ser una forma cuadrática homogénea de signo definido en las velocidades residuales, como ya hemos indicado (página 11). El tensor A se puede suponer de la forma (2.9) ya que, en lo que sigue, todos los razonamientos son algebraicos.

La expresión de Q será:

$$\begin{aligned}
 Q = & (K_1 + k_4 z^2)(\Pi - \Pi_0)^2 + (K_1 + k_2 \bar{\omega}^2 + k_4 z^2)(H - H_0)^2 + \\
 & + (k_3 + k_4 \bar{\omega}^2)(z - z_0)^2 - 2k_4 \bar{\omega} z(\Pi - \Pi_0)(z - z_0) + \\
 & + 2k_6 \bar{\omega}(H - H_0)(z - z_0)
 \end{aligned} \tag{8.1}$$

verificando los coeficientes las condiciones (2.13).

La ecuación de las superficies de nivel $\psi(Q + \sigma) = C$, con C constante, es equivalente a $Q = C$, determinando el valor del parámetro C las distintas superficies de nivel de la función de distribución de velocidades residuales. Al suponer que la ley de distribución es elipsoidal dichas superficies de nivel, en cada punto y para cada instante, constituyen una familia de elipsoides concéntricos, semejantes y semejantemente dispuestos.

Refiriendo el elipsoide (8.1) a sus ejes principales tendremos:

$$Q = s_1(\Pi - \Pi_0)^2 + s_2(H - H_0)^2 + s_3(z - z_0)^2 \tag{8.2}$$

donde s_1, s_2, s_3 son, según la teoría general de las cuádricas, las raíces de la ecuación característica:

$$s^3 - I s^2 + J s - A_{44} = 0 \tag{8.3}$$

siendo

$$I = 2K_1 + k_3 + 2k_4 z^2 + (k_2 + k_4) \bar{\omega}^2$$

$$J = (K_1 + k_2 \bar{\omega}^2 + k_4 z^2)(K_1 + k_3 + k_4(\bar{\omega}^2 + z^2)) + k_3(K_1 + k_4 z^2) + (K_1 k_4 - k_6^2) \bar{\omega}^2$$

$$A_{44} = (K_1 + k_2 \bar{\omega}^2 + k_4 z^2)(K_1 k_3 + K_1 k_4 \bar{\omega}^2 + k_3 k_4 z^2) - (K_1 + k_4 z^2) k_6^2 \bar{\omega}^2$$

Los cosenos directores L, M, N , de cada eje se obtendrán del sistema

$$\left. \begin{aligned} (K_1 + k_4 z^2 - s)L - k_4 \bar{\omega} z N &= 0 \\ (K_1 + k_2 \bar{\omega}^2 + k_4 z^2 - s)M + k_6 \bar{\omega} N &= 0 \\ -k_4 \bar{\omega} z L + k_6 \bar{\omega} M + (k_3 + k_4 \bar{\omega}^2 - s)N &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.4)$$

donde s es cada uno de los valores s_1, s_2, s_3 , soluciones de (8.3).

Suponiendo en primera aproximación $z = 0$, tendremos:

$$\left. \begin{aligned} (K_1 - s)L &= 0 \\ (K_1 + k_2 \bar{\omega}^2 - s)M + k_6 \bar{\omega} N &= 0 \\ k_6 \bar{\omega} M + (k_3 + k_4 \bar{\omega}^2 - s)N &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.5)$$

siendo la ecuación característica (8.3):

$$s^3 - (2K_1 + k_3 + (k_2 + k_4) \bar{\omega}^2) s^2 + \left[(K_1 + k_2 \bar{\omega}^2) K_1 + 2(K_1 k_3 + K_1 k_4 \bar{\omega}^2) + k_2 k_4 \bar{\omega}^4 + k_2 k_3 \bar{\omega}^2 - k_6^2 \bar{\omega}^2 \right] s - (K_1 + k_2 \bar{\omega}^2)(K_1 k_3 + K_1 k_4 \bar{\omega}^2) + K_1 k_6^2 \bar{\omega}^2 = 0 \quad (8.6)$$

cuyas soluciones son $s_1 = K_1$,

y

$$s_{2,3} = \frac{K_1 + k_3 + (k_2 + k_4)\bar{\omega}^2 \pm \sqrt{[K_1 - k_3 + (k_2 - k_4)\bar{\omega}^2]^2 - 4k_6^2\bar{\omega}^2}}{2}$$

Para $s_1 = K_1$ el sistema (8.5) nos da $L \neq 0$, $M = N = 0$ ("

El eje irá dirigido en la dirección de $(\Pi - \Pi_0)$.

Para $s = s_2$ las soluciones de (8.5) serán $L = 0$ y M y N distintos de cero y el eje estará situado en el plano $(\Theta - \Theta_0)$, $(Z - Z_0)$.

Análogamente, para $s = s_3$ obtendremos $L = 0$, M , N distintos de cero y el eje será perpendicular al anterior, también situado en $(\Theta - \Theta_0)$, $(Z - Z_0)$.

Si $k_6 = 0$, las soluciones de la ecuación característica son:

$$s_1 = K_1 \quad s_2 = K_1 + k_2\bar{\omega}^2$$

$$s_3 = k_3 + k_4\bar{\omega}^2 \quad \text{y los ejes de}$$

la cuádrica coinciden con los ejes coordenados. En efecto, para que se verifique el sistema (8.5) con $s = s_1$ debe ser $M = N = 0$, $L \neq 0$; para que se verifique con $s = s_2$ será $M \neq 0$, $N = L = 0$; y para que se verifique con $s = s_3$ será $N = 0$, $M = L = 0$.

Vemos que en ninguno de los dos casos el modelo explica la desviación del vértex que se observa experimentalmente en nuestra Galaxia(") Sin embargo, recordemos que las hipótesis hechas hasta ahora eran

$$Z = 0, \quad k_6 \neq 0 \quad \text{ó} \quad Z = 0, \quad k_6 = 0$$

(") Las soluciones distintas de cero corresponderían a una cuádrica degenerada.

(") Llamamos vértex a la dirección del eje mayor del elipsoide de velocidades. La diferencia de longitudes entre el vértex y la dirección del centro recibe el nombre de desviación del vértex.

y supongamos $Z \neq 0$, $k_6 \neq 0$. La solución del sistema (8.4) será:

$$\frac{L}{k_4 \bar{\omega} Z (K_1 + k_2 \bar{\omega}^2 + k_4 Z^2 - s)} = \frac{M}{-k_6 \bar{\omega} (K_1 + k_4 Z^2 - s)} = \frac{N}{(K_1 + k_4 Z^2 - s)(K_1 + k_2 \bar{\omega}^2 + k_4 Z^2 - s)}$$

no siendo nulos los denominadores para las soluciones s_1, s_2, s_3 de la ecuación (8.3), ya que ni $K_1 + k_4 Z^2$ ni $K_1 + k_2 \bar{\omega}^2 + k_4 Z^2$ son soluciones de la misma. Existirán, pues, para cada s_i ($i=1,2,3$) tres valores L, M, N , distintos de cero, y los ejes del elipsoide estarán situados oblicuamente respecto a los ejes de coordenadas. En este caso el modelo presentará desviación del vértex ya que la dirección del eje mayor del elipsoide no coincide con la dirección del centro de la Galaxia.

Si $k_6 = 0$, en la misma hipótesis de $Z \neq 0$, con

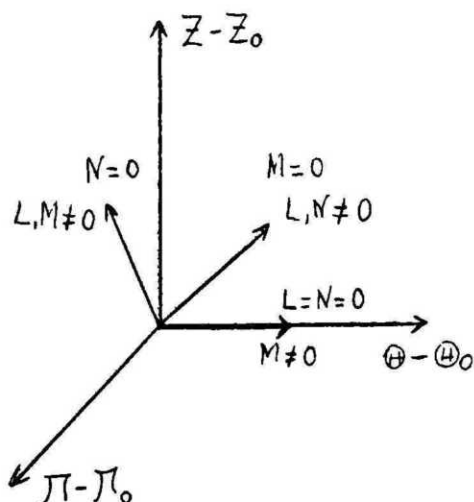
$s \neq K_1 + k_2 \bar{\omega}^2 + k_4 Z^2$ será

$M = 0, N \neq 0, L \neq 0$ y con

$s = K_1 + k_2 \bar{\omega}^2 + k_4 Z^2$ será

$M \neq 0, L = 0, N = 0$. Uno de los ejes del elipsoide irá dirigido hacia $(\oplus - \oplus_0)$ y los otros estarán situados oblicuamente en el plano $(\Pi - \Pi_0)$, $(Z - Z_0)$. En este caso tampoco se obtiene pues desviación del vértex. De esta forma generaliz-

zamos el resultado obtenido por G.G. Kuzmin, expuesto por P. Parenago en su obra resumen de los estudios de Astronomía Estelar en la U.R.S.S. (35)



Vemos pues, en resumen, que el único caso en que se puede explicar esta desviación observada experimentalmente es aquél en que siendo $Z \neq 0$ es $k_6 \neq 0$.

Otro hecho experimental es que, en las proximidades del Sol, $\bar{\omega} = R_{\odot} = 10$ Kps. ((27), p. 29), $Z = 0$, entre los semiejes ξ, η, ζ del elipsoide de velocidades residuales se verifica⁽³⁶⁾

$$\eta \simeq \zeta \qquad \frac{\xi}{\eta} = 1,656 \qquad (8.7)$$

Teniendo en cuenta el valor de dichos semiejes, obtenemos, de la primera relación:

$$(K_1 - k_3 + (k_2 - k_4) \bar{\omega}^2)^2 - 4k_6^2 \bar{\omega}^2 \simeq 0$$

que se verifica en el caso particular

$$k_6 = 0 \qquad K_1 = k_3 \qquad k_2 = k_4$$

Haciendo uso de esta solución particular, la segunda de las relaciones (8.7) nos da, sustituyendo ξ y η por sus valores:

$$\frac{s_2}{s_1} = \frac{K_1 + k_2 R_{\odot}^2}{K_1} = 1,656^2 \qquad (8.9)$$

Teniendo en cuenta que en este caso la curva $\oplus_0(\bar{\omega})$ viene dada por (7.2), y sustituyendo en (8.9) $R_{\odot}$ por 10 Kps., obtenemos para la abscisa del máximo

$$\bar{\omega}_M = \sqrt{\frac{K_1}{k_2}} = 7,7 \text{ Kps.}$$

valor que difiere en 0,8 Kps. del adoptado por Schmidt y al que nos hemos referido anteriormente (pág. 42).

Si $k_6 \neq 0$ y suponemos, siempre en nuestro modelo,

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{k_4}{k_3} \quad (\text{pág. 38}) , \text{ las relaciones experimentales } (8.7)$$

nos dicen que para la Galaxia k_6 debe ser muy pequeño, o dicho de otra forma, $q \simeq 2$. Estas consideraciones nos han llevado a tomar $q = 2$ en el ajuste que hemos hecho de nuestra Galaxia.

Al estudiar la rotación diferencial de la Galaxia encontramos los coeficientes llamados constantes de Oort ((12), p. 77) que se expresan por las fórmulas:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Theta_0}{\partial \bar{\omega}} - \frac{\Theta_0}{\bar{\omega}} + \frac{1}{\bar{\omega}} \frac{\partial \Pi_0}{\partial \theta} \right) \\ B &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Theta_0}{\partial \bar{\omega}} + \frac{\Theta_0}{\bar{\omega}} - \frac{1}{\bar{\omega}} \frac{\partial \Pi_0}{\partial \theta} \right) \\ C &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Pi_0}{\partial \bar{\omega}} - \frac{\Pi_0}{\bar{\omega}} - \frac{1}{\bar{\omega}} \frac{\partial \Theta_0}{\partial \theta} \right) \\ K &= \frac{1}{2} \operatorname{div} \underline{V}_0 \end{aligned} \quad (8.10)$$

El término $k_6 \neq 0$ determina que el campo de velocidades $\underline{V}_0$ sea no solenoidal. En efecto, sustituyendo en

$$\operatorname{div} \underline{V}_0 = \frac{1}{\bar{\omega}} \Pi_0 + \frac{\partial \Pi_0}{\partial \bar{\omega}} + \frac{\partial Z_0}{\partial \bar{z}}$$

los valores (5.7), obtenemos:

$$\operatorname{div} \underline{V}_0 = \frac{2 \beta k_4 k_6 z \bar{\omega}^2}{|A|}$$

que no es idénticamente nulo más que en el caso de ser $k_6 = 0$. En consecuencia, el término K que aparece en la componente ra-

dial de la velocidad es $K \neq 0$ en el caso de ser $k_6 \neq 0$ para puntos no situados en el plano ecuatorial, y en cambio es $K = 0$ cuando $k_6 = 0$ aun con $Z \neq 0$. Recordando los resultados de la página 47, podemos decir que en el único caso en que explicamos la desviación del vértex es $K \neq 0$.

Los valores más recientes de A y B, adoptados en el "Symposium" de la U.A.I. de marzo de 1963, son: ((26), p. 29)

$$A = + 15 \text{ Km/s por Kps.}$$

(8.11)

$$B = - 10 \text{ Km/s por Kps.}$$

En virtud de la definición de estas constantes hacemos $Z = 0$, con lo cual será $\mathcal{M}_0 = 0$ y $\mathcal{H}_0$ vendrá dada por (7.8). Sustituyendo estos valores y sus derivadas en (8.10), y operando convenientemente, obtenemos la relación

$$\sqrt{\frac{B}{B-A}} = \sqrt{\frac{1 + 2\mu\bar{\omega}^2 + (\mu\varphi - \tau)\bar{\omega}^4}{(1 + \varphi\bar{\omega}^2 + \tau\bar{\omega}^4)(1 + \mu\bar{\omega}^2)}}$$

que coincide con la relación η/ξ entre los semiejes del elipsoide, como es fácil comprobar.

Tomando $\bar{\omega} = 10 \text{ Kps.}$, $p = r = 1$, $q = 2$, obtenemos, con nuestro ajuste $\eta/\xi = 0,65$, siendo 0,64 el que se obtiene a partir de los valores (8.11). La diferencia es completamente aceptable dada la aproximación con que vienen dadas las constantes A y B, la cual no permite, por otra parte, tomar nuestros parámetros con mayor aproximación.

BIBLIOGRAFIA

- (1).- Kapteyn, J.C. 1905. "Star streaming". British Association for the Advancement of Science. Report 257.
- (2).- Schwarzschild, K. 1907. "Über die Eigenbewegungen der Fixsterne". Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematischphysikalische Klasse, 614.
- (3).- Eddington, A.S. 1913. "The dynamics of a globular stellar system". Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 74, 5, 1913; 75, 366, 1915; 76, 37, 1915.
- (4).- Jeans, J.H. 1915. "On the theory of star-streaming and the structure of the universe". Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 76, 70.
- (5).- Charlier, C.U.L. 1917. "Notes on statistical mechanics". Meddelanden från Lunds Astronomiska Observatorium, Series II, n° 16.
- (6).- Strömberg, G. 1924. "The asymetry of stellar motions and the existence of a velocity restriction in space". Astrophysical Journal, 59, 228.
- (7).- Lindblad, B. 1925. "Star-streaming and the structure of the stellar system". Arkiv för matematik, astronomi och fysik, 19 A, n° 21, 1925; 19 B, n° 7, 1926.
- (8).- Oort, J.H. 1927. "Observational evidence confirming Lindblad's hypothesis of a rotation of the galactic system". Bulletin of the Astronomical Institutes of the Netherlands, 3, 275.
1927. "Investigations concernings the rotational motion of the galactic system, together with new determinations of secular parallaxes, precession and motion of the equinox". Bulletin of the Astronomical Institutes of the Netherlands, 4, 79.

- (9).- Oort, J.H. 1928. "Dynamics of the galactic system in the vicinity of the Sun". Bulletin of the Astronomical Institutes of the Netherlands, 4, 269.
- (10).- Lindblad, B. 1933. "Die Milchstrasse". Handbuch der Astrophysik. Das Sternsystem. Tomo I/II. Ed. Springer. Berlin.
- (11).- Chandrasekhar, S. 1942. "Principles of Stellar Dynamics". The University of Chicago Press, Chicago.
- (12).- Ogorodnikov, K.F. 1965. "Dynamics of Stellar Systems". Ed. Pergamon Press, Oxford, pág. 4.
- (13).- Catalá, M^a A. 1965. "A Note on Stellar Dynamics". Boletín de la Sección de Astronomía del Seminario Matemático de Barcelona, Vol. IV, nº 1.
- (14).- Hénon, M. 1966. "Les nouvelles méthodes de la Dynamique Stellaire". Colloque de Besançon. Editions du Centre National de la Recherche Scientifique, pág. 45.
- (15).- Orús, J.J. de 1952. "Contribución a la teoría de Chandrasekhar sobre la dinámica de los sistemas estelares". Collectanea Mathematica. Barcelona. Vol. V, fasc. 2.
- (16).- Ver notas bibliográficas ((11), p. 116), ((19), p.201), (20), (21), (22), (23).
- (17).- Ver notas bibliográficas ((9), p.159), ((19), p.202), ((20), p.33), (28).
- (18).- Kinman, T.D. 1965. "The Nucleus of M 31". The Astrophysical Journal, 142, 4, 1376.
- (19).- Camm, G.L. 1941 "The ellipsoidal distribution of stellar velocities". Monthly Notices of the Astronomical Society, 101, 4.
- (20).- Lindblad, B. 1959. "Galactic Dynamics", Handbuch der Physik, Vol. LIII, Ed. Springer, Berlin, p.33.
- (21).- Ollongren, A. 1962. "Three-dimensional galactic stellar orbits". Bulletin of the Astronomical Institutes of the Netherlands, 16, 521.

- (22).- Oort, J.H. 1965. "Stellar Dynamics". Galactic Structure. Ed. A. Blaauw, Vol. V of Stars and Stellar Systems, Chicago, pág. 455.
- (23).- Mihalas, D. 1968, "Galactic Astronomy". Ed. J.H. Freeman, San Francisco, pág. 214.
- (24).- Prendergast, K.H. 1961. "Masses of Galaxies". Problems of Extra-Galactic Research. I.A.U. Symposium nº 15, Ed. G.C. McVittie, New York, pág. 134.
- (25).- Goursat, E. 1942. "Cours d'Analyse Mathématique". Ed. Gauthier-Villars, París, pág. 340.
- (26).- Van Houten, C.J. 1961. "Surface photometry of extragalactic nebulae". Bulletin of the Astronomical Institutes of the Netherlands, 16, 509.
- (27).- Lequeux, J. 1967. "Physique et évolution des galaxies". Ed. Dunod, París, pág. 95.
- (28).- Fricke, . 1951. " Astronomische Nachrichten, 280, 193.
- (29).- Lindblad, B. 1948. "On the dynamical theory of spiral structure". Stockholms Observatorium Annaler, 15, 4.
- (30).- Abetti, G. & Hack, M. 1964. "Nebulae and Galaxies". Ed. Faber and Faber, London, pág. 209.
- (31).- Gordon, P.J. 1969. "History of our Understanding of a Spiral Galaxy: Messier 33". The Quarterly Journal of the Royal Astronomical Society, 10, 4.
- (32).- Mayall, N.U. & Aller, L.H. 1942. "The rotation of spiral nebula Messier 33". The Astrophysical Journal, 52, 425.
- (33).- Rubin, V.C. & Ford, W.F. Jr. 1970. "Rotation of Andromeda nebulae". The Astrophysical Journal, 159, 1-2.

- (34).- Kaplan, S.A. 1966. "Interstellar gas dynamics". Vol 3 of International Series of Monographs in Natural Philosophy, Ed. Pergamon Press, Oxford, p.8.
- (35).- Parenago, P.P. 1955. "Studies in Stellar Astronomy in the USSR". To the IX General Assembly of the I.A.U. Dublin, 1955. Publ. House of the Academy of Sciences of the USSR, Moscow, p. 74.
- (36).- Armellini, G. 1947. "I Fondamenti scientifici della Astronomia". Ed. U. Hoepli, Milán, pág. 278.

Obras y artículos consultados que no se han citado en el texto:

- 1.- Ohlsson, J. 1927. "A review of stellar dynamics". Meddelanden från Lunds Astronomiska Observatorium, Serie II, 48.
- 2.- Von der Pahlen, E. 1937. "Lehrbuch der Stellarstatistik". Ed. A. Barth, Leipzig.
- 3.- Babcock, H.W. 1938. "The rotation of the Andromeda nebula". Publications of the Astronomical Society of the Pacific, 50, 174.
- 4.- Lindblad, B. 1940. "On the dynamics of stellar systems". Stockholms Observatoriums Annaler, 13, 5.
- 5.- Von der Pahlen, E. 1947. "Einführung in die Dynamik von Sternsystemen". Ed. Birkhäuser, Basel.
- 6.- Coutrez, R. 1949. "Contribution a l'étude de la dynamique des systèmes stellaires". Annales de L'Observatoire Royal de Belgique", 3, 4 (3).
- 7.- Camm, G.L. 1950. "Self-gravitating star systems". Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 110, 4, pág. 305. 112, 2, pág. 155.
- 8.- Oort, J. 1952. "Problems of galactic structure". The Astrophysical Journal, 116, 2, pág. 233.

- 9.- Prendergast, F.H. 1954. "One dimensional self-gravitating star systems". The Astronomical Journal, 59, 7, pág. 260.
- 10.- Weaver, H. 1955. "Mathematical bias in the Oort A and B parameters derived from proper motions". The Astronomical Journal, 60, 6, pág. 211.
- 11.- Kurth, R. 1957. "Introduction to the Mechanics of Stellar Systems". Ed. Pergamon Press, London.
- 12.- Delhaye, J. 1957. "Astronomía Estelar". Ed. Vergara, Barcelona.
- 13.- Vaucouleurs, G. 1958. "L'exploration des galaxies voisines par les méthodes optiques et radio-électriques". Ed. Masson & Cie, París.
- 14.- Oort, J.H., Kerre, F.T., Westerhout, G. 1958. "Reports on the progress of astronomy". Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 118, 4, pág. 379.
- 15.- Wayman, P.A. 1959. "Velocity ellipsoids and the gravitational potential of the Galaxy". Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 119, 1, pág. 34.
- 16.- Ed. A. Blaauw y otros. 1959. "Second conference on co-ordination of galactic research". I.A.U. Symposium nº 7, Held at Saltsjöbaden near Stockholm, June 1957, Cambridge.
- 17.- 1960. "Les recherches galactiques et extragalactiques et la photographie électronique". Colloque International du Centre National de la Recherche Scientifique, Annales d'Astrophysique, 23, 3, pág. 305 a 466.
- 18.- Woolley, R. v.d. L. 1960. "The Dynamics of Stars in the Neighbourhood of the Sun". Vistas in Astronomy. Ed. A. Beer, Vol. 3. Pergamon Press, Oxford.

- 19.- Brandt, J.C. 1960. "On the distribution of mass in galaxies. I. The large-scale structure of ordinary spirals with applications to M 31". The Astrophysical Journal, 131, 2, pág. 293.
- 20.- Brandt, J.C. 1960. "On the distribution of mass in galaxies. II. A discussion of the mass of the Galaxy. The Astrophysical Journal, 131, 3, pág. 553.
- 21.- Lallemand, A. y otros. 1960. "The rotation of the Nucleus of M 31". Publications of the Astronomical Society of the Pacific, 72, 425, pág. 76.
- 22.- Kerr, F.J. 1962. "Galactic velocity models and the interpretation of 21-cm. surveys", Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 123, 4, pág. 327.
- 23.- Belton, R. and Brandt, J.C. 1962. "On the local surface density and the scale of the Galaxy". Publications of the Astronomical Society of the Pacific, 74, 441, pág. 515.
- 24.- King, I.R. 1963. "The Dynamics of galaxies". Annual Review of Astronomy and Astrophysics, Vol. 1,
- 25.- Rougoor, G.J. 1964. "The neutral hydrogen in the central region of the Galactic System". Bulletin of the Astronomical Institutes of the Netherlands, 16, 6, pág. 331.
- 26.- Wallace, J.L. and Copeland, J. 1964. "Velocity field in a model of a spiral galaxy". Publications of the Astronomical Society of the Pacific, 76, 452, pág. 315.
- 27.- Goldstein, R. 1965. "Classical mechanics". Addison-Wesley, London.
- 28.- Schmidt, R. 1965. "Rotation parameters and distribution of mass in the Galaxy". Galactic Structure. Ed. A. Blaauw, Vol. V of Stars and Stellar Systems, Chicago.

- 29.- Contopoulos, G. Ed. 1966. "The theory of orbits in the solar system and in stellar systems". I.A.U., Symposium nº 25.
- 30.- Shane, W.W. & Bieger-Smith, G.P. 1966. "The galactic rotation curve derived from observations of neutral hydrogen". Bulletin of the Astronomical Institutes of the Netherlands, 18, 4, pág. 263.
- 31.- Innanen, F.A. 1966. "Mass models of the galactic system". The Astrophysical Journal, 143, 1, pág. 153.
- 32.- Kurth, R. 1967. "Introduction to Stellar Statistics". International Series of Monographs in Natural Philosophy, Vol. 10. Pergamon Press, Oxford.
- 33.- Shoji Kato. 1968. "Hydrodynamic equations of differentially rotating stellar systems and the velocity ellipsoid". Astrophysics and Space Science, 2, 1, pág. 37.
- 34.- Mikhailov, A.A. Ed. 1969. "Physics of Stars and Stellar Systems". Israel Program for Scientific Translations, Jerusalén.
- 35.- Becker, W. & Contopoulos, G. 1970. "The Spiral Structure of Our Galaxy". I.A.U., Symposium nº 38. Held in Basel, Switzerland, 29 august-4 sept., 1969.
- 36.- Hohl, F. 1970. "Dynamical Evolution of disk galaxies". I.A.S.A. TR-R 343.
- 37.- Burbidge, G.R. 1970. "The nuclei of galaxies". Annual Review of Astronomy and Astrophysics, Vol. 8, pág. 369.