



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

FUNCIONS GAUSSIANES ALEATÒRIES

Autor: Cristina de Rocafiguera
Viladecans

Director: Dr. Francesc Xavier Massaneda Clares
Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 10 de juny de 2024

Abstract

This work analyzes point processes, focusing on the zeros of Gaussian Analytic Functions (GAFs) in the complex plane. The properties of the GAFs are explored, including the repulsion between zeros and their invariance under transformations. Preliminary concepts on complex Gaussian distributions and holomorphic functions are detailed, as well as studying the procedure leading to the results on the distribution and variance of the zeros of GAFs, comparing them with those of the Poisson process.

Resum

Aquest treball estudia els processos de punts obtinguts com a zeros de les funcions analítiques Gaussians (GAFs) en el pla complex. S'exploren les propietats dels GAFs, incloent-hi la repulsió entre zeros i la seva invariància sota transformacions. Es detallen conceptes preliminars sobre la Gaussiana complexa i les funcions holomorfes, i s'estudia el procediment que ens porta a obtenir resultats sobre la distribució i variància dels zeros dels GAFs, comparant-los amb els del procés de Poisson.

Índex

1	Introducció	1
2	Preliminars	7
2.1	Probabilitat	7
2.1.1	Gaussiana Complexa	7
2.2	Anàlisi complexa	10
2.2.1	Notació	10
2.2.2	Sèries de funcions holomorfes	11
2.2.3	Funcions harmòniques i el Laplacà	12
2.2.4	Distribucions i la mesura comptadora	13
2.2.5	Teorema de Green (notació complexa)	18
3	GAFs i construcció	21
3.1	Funcions analítiques Gaussianes	21
3.2	Presentació del GAF amb el nucli de covariància	25
3.2.1	El GAF al pla	26
3.3	Invariància per translacions	28
4	Primera Intensitat i fórmula d'Edelman-Kostlan	31
4.1	Fórmula d'Edelman-Kostlan	31
4.1.1	La primera intensitat al GAF del pla	33
4.2	Rigidesa de Calabi	34
5	Variància	37
5.1	Variància al pla	40
6	Conclusions	45

1 Introducció

Les successions aleatòries de punts, o també conegudes com a processos de punts, és un tema d'interès que s'ha estat estudiant durant molt de temps en els àmbits de les matemàtiques, l'estadística i la física. Aquests processos de punts són models matemàtics que descriuen la manera en què es distribueixen aleatòriament punts en un espai mètric, com el pla, tal que aquests formen conjunts comptables i sense punts d'acumulació. Aquests processos són essencials per modelar i analitzar molts fenòmens físics, com per exemple, la distribució d'estrelles d'una galaxia, l'arribada de persones en una cua, els brots d'una malaltia contagiosa en una província o la distribució de partícules amb la mateixa càrrega confinades en un camp extern.

En matemàtiques i estadística els estudis s'han centrat especialment en el procés de Poisson, el procés més important d'aquest tipus de models, que ha sigut àmpliament estudiat i aplicat. S'utilitza per modelar esdeveniments que passen de manera aleatòria en l'espai i el temps. La propietat més rellevant d'aquest procés és la independència entre els punts que cauen en diferents subconjunts disjunts. Això implica que si tens diferents subconjunts que no es solapen en l'espai on s'està estudiant aquest procés, el nombre de punts de cada subconjunt és independent dels altres. Anem a presentar breument el procés de Poisson a $\mathbb{C}$:

Donada una seqüència aleatòria Λ_ω en $\mathbb{C}$ i un obert $A \subset \mathbb{C}$. Definim $n(A) = \#(\Lambda_\omega \cap A)$. Aleshores Λ_ω és un procés de Poisson si es compleix:

1. $n(A)$ té una distribució de Poisson de paràmetre $\mu(A)$, és a dir,

$$\mathbb{P}(n(A) = k) = e^{-\mu(A)} \frac{(\mu(A))^k}{k!} \quad k \geq 0.$$

2. Si $A \cap B = \emptyset$, aleshores $n(A)$ i $n(B)$ són variables independents.

Aleshores se sap que $\mu(A)$ defineix una mesura a $\mathbb{C}$. A més a més, el recíproc és cert: si $\mu(A)$ és una mesura a $\mathbb{C}$, aleshores existeix un procés de Poisson Λ_ω tal que el paràmetre de $n(A)$ és $\mu(A)$. En particular, si agafem un múltiple de la mesura d'àrea

$$d\mu(z) = L \frac{dm(z)}{\pi}$$

amb $L > 0$, existeix un procés de Poisson associat a aquesta mesura. Recordem que la distribució de Poisson té la particularitat que l'esperança i la variància d'una variable aleatòria és el mateix paràmetre.

Per tant, si $A = \mathbb{D}(a, r)$, aleshores la variable

$$n(A) = \#(\Lambda_\omega \cap A)$$

té esperança

$$\mathbb{E}(n(A)) = L \frac{dm(A)}{\pi} = L \frac{\pi r^2}{\pi} = Lr^2$$

i variància també

$$\text{Var}(n(A)) = Lr^2.$$

No obstant, la suposició essencial de què els punts són independents per aplicar el procés de Poisson és raonable en molts casos, però no sempre és vàlida. Hi ha fenòmens els quals el nombre de punts en l'espai afecta a la probabilitat de la presència de punts en el seu voltant. Un exemple de dependència negativa, que estudiaven els físics, es produeix quan s'observa la distribució de partícules amb la mateixa càrrega confinades per un camp extern. Saber que hi ha una partícula en una ubicació específica fa menys probable que hi hagi altres a prop seu, ja que les partícules tenen una repulsió. En aquest cas, la suposició de la independència no és vàlida, per tant es necessita buscar altres models més complexos per descriure correctament aquests fenòmens.

Veurem que un possible procés amb repulsió per estudiar el cas que acabem de descriure surt de considerar el conjunt de zeros de funcions analítiques amb coeficients Gaussians aleatoris independents. En aquest treball estudiarem el procés de punts obtinguts com a zeros de les funcions analítiques Gaussians aleatòries en una variable i gairebé només en el pla. Una funció analítica Gaussiana, també anomenada GAF, és una sèrie de la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n(z)$$

on a_n són variables aleatòries Gaussians estàndard complexes i els e_n són funcions analítiques determinades. Aquestes funcions tenen propietats estadístiques i geomètriques que ens seran molt útils, com la invariància per translacions del seu conjunt de zeros, que facilita l'estudi de les seves propietats; la repulsió entre els zeros, ja que els zeros dels GAFs tendeixen a repel·lir-se; i l'estudi de la seva distribució, ja que podrem obtenir resultats específics de la distribució dels zeros i les seves fluctuacions. No obstant, ens trobarem amb diferents problemes tècnics que haurem de solucionar, com ara la convergència simultània de la sèrie per tots els z d'un domini, i veure com afecta aquestes variables aleatòries al radi de convergència per poder estudiar només allà on la funció convergeix.

Ara donarem una idea de perquè els zeros de funcions d'aquest tipus exhibeixen repulsió local. Ho fem en un cas senzill i amb un argument heurístic, sense entrar en consideracions tècniques. Si considerem un polinomi mònic

$$p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$$

tal que els coeficients són variables aleatòries, volem veure com es distribueixen les seves arrels. Recordem el següent lema:

Lema 1.1. *Sigui $p(z) = \prod_{k=1}^n (z - \zeta_k)$ amb coeficients a_k , $0 \leq k \leq n-1$. Diem $\{\zeta_k\}_{k=1}^n$ a les arrels de $p(z)$. Aleshores la transformació $T : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ definida per*

$$T(\zeta_1, \dots, \zeta_n) = (a_{n-1}, \dots, a_0)$$

té per determinant l'anomenat determinant de Vandermonde

$$\det T = \prod_{i < j} |\zeta_i - \zeta_j|^2.$$

El lema ens diu que hi ha una transformació entre els zeros del polinomi $(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ i els seus coeficients $(a_{n-1}, \dots, a_0)$. El determinant és important perquè ens mostra com es relacionen les mesures en l'espai dels zeros amb les mesures en l'espai dels coeficients. Per tant, si els coeficients a_k es distribueixen segons la mesura de Lebesgue en $\mathbb{C}^n$, la freqüència amb què apareixen les arrels en determinades regions de l'espai complex es veu afectada per aquest determinant $\prod_{i < j} |\zeta_i - \zeta_j|^2$. Això implica que les arrels no estan distribuïdes uniformement, sino que la densitat està determinada per aquest terme, per tant, les arrels tendeixen a repel·lir-se entre si, ja que aquest terme és petit quan les arrels estan a prop, i gran quan estan lluny.

En aquest treball explicarem aquest procés de punts, l'anàlisi dels zeros dels GAFs i les seves propietats. Paral·lelament tractarem el cas d'un GAF en el pla complex com exemple per analitzar i visualitzar els resultats que se'n treuen i les seves conseqüències. També compararem certs resultats amb el procés de Poisson per posar de manifest els avantatges que s'extreuen d'aquest procés.

Començarem, en els preliminars, fent un recordatori de les idees bàsiques i les tècniques necessàries per tractar aquest tema. Ens centrarem en la Gaussiana complexa en l'àmbit de la probabilitat, i per altra banda, l'estudi de les funcions holomòrfes i els seus conjunts de zeros tractat amb distribucions en l'àmbit de l'anàlisi complexa.

Un cop explorats aquests conceptes, introduïrem les funcions analítiques Gaussianes i les seves propietats. Després de veure que aquest tipus de funció

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n(z) \quad a_n \sim N_{\mathbb{C}}(0, 1) \quad i.i.d. \quad (1.1)$$

està ben definida a un cert domini $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, tindrem que $f(z)$ és una variable normal de mitjana 0. Això és així perquè tota combinació lineal de Gaussians és Gaussiana. A més, essent $f(z)$ una Gaussiana d'esperança 0, el seu comportament probabilístic queda determinat per la variància

$$\text{Var}(f(z)) = \mathbb{E}(|f(z)|^2).$$

Un càlcul directe a partir de (1.1) mostra que

$$\text{Var}(f(z)) = K(z, z) := \sum_{n=0}^{\infty} |e_n(z)|^2.$$

A partir d'aquí considerem el conjunt de zeros $\mathcal{Z}(f)$ de f , o més aviat la mesura aleatòria

$$dn_f = \sum_{\lambda \in \mathcal{Z}(f)} \delta_{\lambda}.$$

Al capítol 4 demostrarem l'anomenada fórmula d'Edelman-Kostlan, que diu que l'esperança de dn_f ve donada per

$$\mathbb{E}(dn_f) = \frac{1}{4\pi} \Delta \log K(z, z)$$

A aquesta mesura $\tau = \mathbb{E}(dn_f)$ se l'anomena primera intensitat del procés de punts, la qual, per la rigidesa de Calabi, veurem que determina el conjunt de zeros del GAF.

Mostrarem també com construir un procés de punts al pla que tingui per primera intensitat precisament la mesura de Lebesgue (o un múltiple seu), és a dir, la mesura $L \frac{dm(z)}{\pi}$ considerada anteriorment pel procés de Poisson. Per exemple, si el definim a un disc $\mathbb{D}(a, r)$ de radi $r > 0$, aleshores tenim que

$$\mathbb{E}(n_f(\mathbb{D}(a, r))) = Lr^2$$

i ens adonem que és la mateixa mitjana que teniem en el procés de Poisson.

Finalment, a l'últim capítol estudiarem la variància de la variable comptadora a un disc. És a dir, donat un disc $\mathbb{D}$ considerem la variable

$$n_f(\mathbb{D}) = \#(\mathcal{Z}(f) \cap \mathbb{D})$$

Estudiem aleshores la variància $Var(n_f(\mathbb{D}))$ i constatem, almenys al cas del pla, que aquesta variància és menor que al mateix cas amb el procés de Poisson, és a dir, que els zeros del GAF produeixen un procés de punts més rígid que el procés de Poisson.

Observem dues mostres d'aquests dos processos en el pla sota una translació, amb el mateix promig de punt per unitat d'àrea, extretes de [6]:

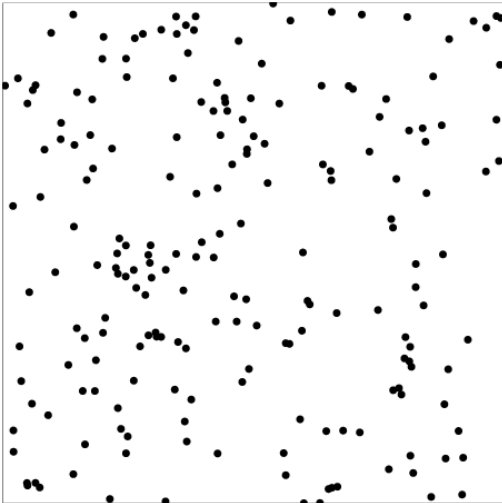


Figura 1: Procés de Poisson

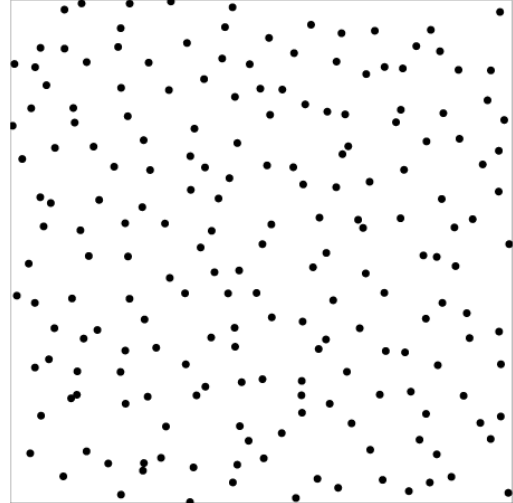


Figura 2: Zeros d'un GAF

Tot i que dues variables poden tenir la mateixa esperança, poden presentar diferents nivells de fluctuació. Per exemple, com veiem en el procés de Poisson, la

variable comptadora amb la mateixa mitjana que la d'un GAF mostra una distribució de punts més “irregular” i amb més fluctuació, malgrat tenir la mateixa mitjana. Això es deu al fet que la variància més petita d'un GAF implica que els seus valors estan més a prop de l'esperança, amb major probabilitat.

2 Preliminars

En aquest capítol recollim alguns elements de probabilitat i d'ànalisi complexa que seran utilitzats durant el treball, tot i que estrictament no són resultats sobre GAFs.

2.1 Probabilitat

En aquesta primera secció exposarem el concepte de la Gaussiana complexa i algunes de les seves propietats bàsiques.

2.1.1 Gaussiana Complexa

Abans de introduir la Gaussiana complexa, establim certa terminologia. Sigui X una variable aleatòria que segueix una distribució normal, amb funció de densitat

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

tal que $\mu \in \mathbb{R}$ i $\sigma \in (0, +\infty)$. Denotem $X \sim N_{\mathbb{R}}(\mu, \sigma^2)$ on μ representa la mitjana de la variable aleatòria i σ^2 la seva variància.

Definició 2.1. *La Gaussiana complexa estàndard $a \sim N_{\mathbb{C}}(0, 1)$ és una variable aleatòria complexa amb funció de densitat*

$$f(z) = \frac{1}{\pi} e^{-|z|^2} \quad z \in \mathbb{C}$$

respecte la mesura de Lebesgue en el pla complex.

Per trobar aquesta funció de densitat hem escrit la variable en part real i part imaginària $a = X + iY$, tal que $X, Y \sim N_{\mathbb{R}}(0, \frac{1}{2})$ i.i.d. Considerant el vector aleatori (X, Y) tenim que

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \quad f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-y^2}$$

i utilitzant que X i Y són independents, obtenim:

$$f_{(X,Y)}(x, y) = f_X(x)f_Y(y) = \frac{1}{\pi} e^{-(x^2+y^2)}.$$

Aleshores, si $z = x + iy$, tenim que $|z|^2 = x^2 + y^2$ i la funció densitat és

$$f_a(z) = \frac{1}{\pi} e^{-|z|^2}.$$

Veiem algunes propietats bàsiques d'aquestes variables:

Proposició 2.2. *Siguin $a, a_k \sim N_{\mathbb{C}}(0, 1)$ independents i idènticament distribuïdes per tot $k \in \mathbb{N}$. Aleshores*

1. $|a|^2$ és una variable exponencial amb paràmetre $\lambda = 1$.

$$2. \mathbb{E}(a_k \overline{a_j}) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k, \\ 1 & \text{si } j = k. \end{cases}$$

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ amb probabilitat 1.

Demostració:

1. Calculem directament la funció de distribució de $|a|^2$, passant a coordenades polars:

$$\mathbb{P}(|a|^2 \geq t) = \int_{|a|^2 \geq t} \frac{1}{\pi} e^{-|a|^2} dm(a) = \frac{1}{\pi} \int_{\sqrt{t}}^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r d\sigma dr = \int_{\sqrt{t}}^{\infty} e^{-r^2} 2r dr$$

Si fem un canvi de variable de $r^2 = s$, tenim

$$\mathbb{P}(|a|^2 \geq t) = \int_t^{\infty} e^{-s} ds,$$

que és la funció de distribució d'una exponencial de paràmetre $\lambda = 1$.

2. Utilitzem que $Var(a_k) = \mathbb{E}(|a_k - \mathbb{E}(a_k)|^2)$ per tot $k \in \mathbb{N}$. Com, per hipòtesis, a_k té mitjana 0, variància 1 i els diferents a_k són independents, aleshores

$$\mathbb{E}(a_k \overline{a_j}) = \begin{cases} \mathbb{E}(a_k) \mathbb{E}(\overline{a_j}) = 0 & \text{si } j \neq k, \\ \mathbb{E}(|a_k|^2) = Var(a_k) = 1 & \text{si } j = k. \end{cases}$$

3. Volem demostrar que

$$\mathbb{P}(\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} < 1) = 0 = \mathbb{P}(\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} > 1)$$

Això és equivalent a demostrar que, per tot $\epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} \leq 1 - \epsilon) = 0 = \mathbb{P}(\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} \geq 1 + \epsilon)$$

Fixem doncs $\epsilon > 0$ i demostrem aquestes igualtats.

a) $\mathbb{P}(\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} \leq 1 - \epsilon) = 0$:

Si succeeix l'esdeveniment $\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} \leq 1 - \epsilon$, aleshores existeix n_0 tal que per tot $n \geq n_0$

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq 1 - \frac{\epsilon}{2},$$

és a dir,

$$|a_n| \leq \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right)^n \quad \forall n \geq n_0.$$

Llavors, per la independència

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[|a_n| \leq \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right)^n \quad \forall n \geq n_0\right] &= \mathbb{P}\left[\bigcap_{n \geq n_0} \left\{|a_n| \leq \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right)^n\right\}\right] \\ &= \prod_{n \geq n_0} \mathbb{P}\left[|a_n|^2 \leq \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right)^{2n}\right].\end{aligned}$$

Utilitzem que $|a_n|^2$ és una exponencial de paràmetre $\lambda = 1$ (Proposició 2.2 apartat 1), tenim

$$\mathbb{P}\left[|a_n|^2 \leq \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right)^{2n}\right] = \int_0^{\left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right)^{2n}} e^{-t} dt = 1 - e^{-\left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right)^{2n}}.$$

Per veure la convergència del producte observem que aleshores

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[|a_n| \leq \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right)^n \quad \forall n \geq n_0\right] &= \prod_{n \geq n_0} \left[1 - e^{-\left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right)^{2n}}\right] \\ &= \exp\left\{\sum_{n \geq n_0} \log(1 - e^{-\left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right)^{2n}})\right\}.\end{aligned}$$

Aquesta és una sèrie de termes negatius amb un terme general que no tendeix a 0, de fet

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log(1 - e^{-\left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right)^{2n}}) = \log 0 = -\infty.$$

És a dir,

$$\mathbb{P}\left[|a_n| \leq \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right)^n \quad \forall n \geq n_0\right] = 0,$$

com volíem.

b) $\mathbb{P}(\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} \geq 1 + \epsilon) = 0$:

Anàlogament al cas anterior, si succeeix l'esdeveniment $\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} \geq 1 + \epsilon$, aleshores existeix una successió $\{n_k\} \rightarrow \infty$ tal que

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \geq 1 + \frac{\epsilon}{2},$$

és a dir,

$$|a_{n_k}|^2 \geq \left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right)^{2n_k} \quad \forall k.$$

Llavors, un altre cop per la independència

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[|a_{n_k}|^2 \geq \left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right)^{2n_k} \quad \forall k\right] &= \prod_k e^{-(1+\frac{\epsilon}{2})^{2n_k}} \\ &= e^{-\sum_k (1+\frac{\epsilon}{2})^{2n_k}}.\end{aligned}$$

La sèrie $\sum_k \left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right)^{2n_k}$ és de termes tots positius, i té un terme general que no tendeix a 0. Per tant, divergeix i

$$\mathbb{P}\left[|a_{n_k}|^2 \geq \left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right)^{2n_k} \quad \forall k\right] = 0,$$

com volíem. □

També es vol destacar el següent lema sobre les Gaussianes, el qual necessitarem per calcular la variància de la variable comptadora a una regió, al Capítol 5.

Lema 2.3 ([6]). *Sigui ξ i γ Gaussianes complexes i $\mathbb{E}(\xi\bar{\gamma}) = \theta$. Aleshores*

$$\text{Cov}(\log |\xi|, \log |\gamma|) = \frac{1}{4} Li_2(|\theta|^2) = \frac{1}{4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|\theta|^{2m}}{m^2}$$

La funció Li_2 s'anomena dilogaritme.

2.2 Anàlisi complexa

En aquesta secció farem un recull de resultats de la variable complexa que necessitarem als capítols successius.

2.2.1 Notació

Anunciem una sèrie de notacions que utilitzarem durant el treball.

Sigui $z = x + iy$ en notació complexa, es defineix

$$\begin{aligned}dz &= dx + idy \\ d\bar{z} &= dx - idy\end{aligned}$$

Recordem també que

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Aleshores

$$\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = i \frac{\partial}{\partial y}.$$

Equacions de Cauchy-Riemann:

Si definim una funció $f = u + iv : \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$. Aleshores f compleix les equacions de Cauchy-Riemann si

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

i aquesta condició equival a que f sigui holomorfa a Ω , que denotarem $f \in H(\Omega)$. En termes de $\frac{\partial}{\partial z}$ i $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, les equacions de Cauchy-Riemann són $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

Teorema de Morera:

Al capítol 3, per veure que el GAF està ben definit, haurem de veure que el límit uniforme sobre compactes d'una funció holomorfa és també holomorf, per la qual cosa necessitarem el teorema de Morera.

Teorema 2.4 (Teorema de Morera). *Si f és continua a Ω i*

$$\int_{\partial T} f(z) dz = 0$$

per a tot triangle $T \subseteq \Omega$, aleshores f és holomorfa a Ω .

Principi de prolongació analítica:

En el capítol 4, aquest principi serà essencial per poder tractar els zeros d'un GAF, ja que ens assegura que són punts aïllats i això facilita l'estudi de la seva distribució en el pla complex.

Teorema 2.5 (Principi de prolongació analítica). *sigui f una funció holomorfa en un domini connex Ω . Aleshores el conjunt $\mathcal{Z}(f) = \{\lambda \in \Omega : f(\lambda) = 0\}$ és un conjunt discret sense punts d'acumulació a Ω .*

Denotem $\mathcal{Z}(f) = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$

2.2.2 Sèries de funcions holomorfes

Ens interessarà construir sèries de funcions holomorfes, per això necessitem saber quan una sèrie d'aquest tipus defineix una funció holomorfa. La convergència que assegura que el límit sigui també holomorf és la convergència uniforme sobre compactes.

Definició 2.6. *sigui $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ obert. Una successió $\{f_n\}_n$ de funcions $f_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ convergeix uniformement sobre compactes de Ω , si per cada compacte $K \subseteq \Omega$ la successió de restriccions $\{f_n|_K\}_n$ convergeix uniformement.*

Lema 2.7. *sigui $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ obert. sigui $\{f_n\}_n$ una successió de funcions holomorfes $f_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ amb límit puntual $f(z) = \lim_n f_n(z)$, $z \in \Omega$. Si $\{f_n\}_n$ convergeix uniformement sobre compactes de Ω , aleshores f també és holomorfa a Ω .*

Demostració:

Per veure que f és holomorfa utilitzem el Teorema de Morera 2.4. Llavors, donat que el límit uniforme d'una funció contínua és contínua, només ens falta veure que

$$\int_{\partial T} f(z) dz = 0 \quad \forall T \subset \Omega$$

Tenint en compte el Teorema de Cauchy: si $f \in H(\Omega)$ i γ és un camí tancat, aleshores

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Llavors, com el límit és uniforme sobre compactes, $\{f_n\}$ és holomorfa a Ω i ∂T és un compacte, podem intercanviar límit i integral i deduir que

$$\int_{\partial T} f(z) dz = \int_{\partial T} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial T} f_n(z) dz = 0 \quad \forall T \subset \Omega$$

□

2.2.3 Funcions harmòniques i el Laplacà

Voldrem escriure la mesura $dn_f = \sum_{\lambda \in \mathcal{Z}(f)} \delta_{\lambda}$ com al Laplacà de $\log |f|$ en el sentit de les distribucions, per això volem tractar les funcions harmòniques i les seves propietats. Primer, recordem que quan tenim una funció holomorfa $f \in H(\Omega)$, les equacions de Cauchy-Riemann ens asseguren que

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

Definició 2.8. El Laplacà Δ es defineix com l'operador

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

En termes de z i $\bar{z}$ s'expressa com

$$\Delta = \frac{4\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$$

Definició 2.9. Una aplicació $\mathcal{U} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es diu harmònica si $\mathcal{U} \in \mathcal{C}^2(\mathbb{C})$ i $\Delta u = 0$.

Com exemple canònic de funcions harmòniques tenim les parts reals (o imaginàries) de les funcions holomorfes.

Lema 2.10. Sigui $f(z)$ una funció holomorfa a Ω . Aleshores, $\operatorname{Re}(f)$ i $\operatorname{Im}(f)$ són harmòniques.

Demostració:

Si definim $f = u + iv$ de classe $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{C})$ i $f \in H(\Omega)$, aleshores

$$\Delta f = \frac{4\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = 4 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right) = 0$$

ja que $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$. Llavors, tenint en compte aquesta propietat, queda

$$\Delta f = \Delta u + i\Delta v = 0$$

per tant $\Delta(\operatorname{Re} f) = \Delta(\operatorname{Im} f) = 0$.

□

Una altra propietat de les funcions harmòniques que utilitzarem serà la que se'ns mostra en el lema de Poincaré, que és una espècie de recíproc del Lema 2.10.

Lema 2.11 (Poincaré [7]). *Sigui Ω un obert simplement connex i $u(z)$ una funció harmònica en Ω . Aleshores existeix $h \in H(\Omega)$ tal que $u = \operatorname{Re}(h)$.*

Tornant al Lema 2.10 anterior, ens interessarà especialment el cas $u(z) = \log |f(z)|$, on f és holomorfa i $f(z) \neq 0$.

Corol·lari 2.12. *Sigui $f(z)$ una funció holomorfa a Ω . Aleshores, si $\mathcal{Z}(f)$ denota el conjunt de zeros de f , tenim*

$$\Delta \log |f(z)| = 0 \quad \text{si} \quad z \notin \mathcal{Z}(f) \quad (2.1)$$

Demostració:

Sigui $f \in H(\Omega)$. Per definició, si $f(z) \neq 0$ el logaritme de $f(z)$ té la forma

$$\log f(z) = \log |f(z)| + i \arg f(z)$$

on $\arg f(z)$ és un argument de $f(z)$. Per tant, $\log |f(z)| = \operatorname{Re}[\log f(z)]$.

Aplicant el Lema 2.10 a la funció $g(z) = \log f(z)$, que és holomorfa allà on $f(z) \neq 0$, tenim que $\operatorname{Re}[\log f(z)]$ és harmònica si $f(z) \neq 0$, és a dir,

$$\Delta \log |f(z)| = 0 \quad \text{si} \quad z \notin \mathcal{Z}(f)$$

com volíem.

□

Aquesta igualtat es pot generalitzar a tots els $z \in \Omega$ si entenem $\Delta \log |f(z)|$ en el sentit de les distribucions.

2.2.4 Distribucions i la mesura comptadora

Veurem que, en lloc de treballar amb successions de punts, és més convenient treballar amb distribucions que tenen per suport la successió. Això permet utilitzar totes les propietats de les distribucions.

Definició 2.13. Una distribució T és una aplicació

$$\begin{aligned} T : \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{C}) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\mapsto T(\varphi) = \langle T, \varphi \rangle \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

lineal i contínua. Aquí $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{C})$ indica les funcions infinitament derivables i amb suport compacte.

Ara veurem una sèrie d'exemples de distribucions que ens seran molt útils en els capítols següents.

Exemple 2.14. 1. La distribució associada a una funció $f \in L_{loc}^1$ (integrable a tot compacte) es defineix com

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int f(x) \varphi(x) dx \quad \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{C}).$$

És per aquesta raó que a les distribucions se'ls hi diuen de vegades “funcions generalitzades”.

2. Distribució associada a una mesura:

Recordem que una mesura positiva μ és una aplicació entre una σ -àlgebra de conjunts $\mathcal{B}$ i $\mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} \mu : \mathcal{B} &\longrightarrow [0, +\infty] \\ A &\mapsto \mu(A) \end{aligned}$$

tal que

- i) $\mu(\emptyset) = 0$,
- ii) $\mu(\bigcup_k A_k) = \sum_k \mu(A_k)$, si $A_k \in \mathcal{B}$ disjunts dos a dos,
- iii) $\mu(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{B}$.

Aleshores, una distribució associada a una mesura μ es defineix com

$$\langle T_\mu, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{C}} \varphi(x) d\mu(x) \quad \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{C})$$

La mesura que donarà sentit a la distribució dels zeros d'un GAF serà la mesura delta de Dirac a un punt $a \in \mathbb{R}^n$, que es defineix

$$\begin{aligned} \delta_a : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow [0, +\infty] \\ A &\mapsto \delta_a(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } a \notin A \\ 1 & \text{si } a \in A \end{cases} \end{aligned}$$

En particular,

$$\langle T_{\delta_0}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{C}} \varphi d\delta_0 = \varphi(0) \quad \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{C}).$$

Per donar sentit al Laplacà d'una distribució, ens interessarà comprendre també com es comporta la derivada d'una distribució.

Derivada d'una distribució:

Sigui $T \in D'(\mathbb{C})$ una distribució, aleshores la derivada $T' \in D'(\mathbb{C})$ també és una distribució i es defineix a partir de la igualtat

$$\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle \quad \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{C}).$$

Exemple 2.15. Sigui μ una mesura positiva. Aleshores μ' queda definida per:

$$\langle \mu', \varphi \rangle = -\int \varphi' d\mu.$$

En particular, δ_0 queda definida per

$$\langle \delta_0', \varphi \rangle = -\int \varphi' d\delta_0 = -\varphi'(0).$$

Iterant, es poden definir derivades successives d'aquesta manera

$$\langle T^{(k)}, \varphi \rangle = (-1)^{(k)} \langle T, \varphi^{(k)} \rangle \quad k \geq 1, \quad \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{C}).$$

En particular, per $T \in D'(\mathbb{C})$, tenim

$$\langle \Delta T, \varphi \rangle = \langle T, \Delta \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{C})$$

Farem servir això al cas particular $T = \log |z|$, amb $z \in \Omega$.

Lema 2.16. *Sigui $a \in \mathbb{C}$. Aleshores en el sentit de les distribucions, es compleix la següent igualtat*

$$\frac{1}{2\pi} \Delta \log |z - a| = \delta_a. \quad (2.2)$$

Es diu que $\frac{1}{2\pi} \Delta \log |z|$ és la solució fonamental del Laplacà.

Demostració:

Demostrem la igualtat en el centre, cas $a = 0$. El cas general surt per translació. Volem doncs

$$\frac{1}{2\pi} \Delta \log |z| = \delta_0,$$

o equivalentment que per tota $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{C})$, funció infinitament derivable i de suport compacte,

$$\left\langle \frac{1}{2\pi} \Delta \log |z|, \varphi \right\rangle = \langle \delta_0, \varphi \rangle.$$

És a dir, volem veure que

$$\langle \log |z|, \frac{1}{2\pi} \Delta \varphi \rangle = \int_{\mathbb{C}} (\log |z|) \frac{1}{2\pi} \Delta \varphi(z) dm(z) = \varphi(0) \quad (2.3)$$

Utilitzem la segona identitat de Green [2]: Donats $u, v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$, aleshores

$$\int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) dm = \int_{\partial \Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\zeta. \quad (2.4)$$

Definim $u(z) = \log |z|$ i $v(z) = \varphi(z)$. Llavors, triem un R suficientment gran per tal de construir un domini $\Omega_R = \mathbb{D}(0, R)$ que contingui el suport de φ . Observem que $\log |z|$ ha de ser de classe $\mathcal{C}^1$ a tot el domini, per tant és necessari excloure el punt $z = 0$. Per aquest motiu, considerem $\epsilon > 0$ i traiem el disc $\mathbb{D}(0, \epsilon)$ del nostre domini. En conclusió, utilitzarem la segona identitat de Green en el domini $\Omega_{R,\epsilon} = \mathbb{D}(0, R) \setminus \overline{\mathbb{D}(0, \epsilon)}$, amb $\epsilon > 0$ prou petit i $R > 0$ prou gran.

Aleshores apliquem la fórmula:

$$\int_{\Omega_{R,\epsilon}} (\log |z| \Delta \varphi(z) - \varphi(z) \cdot 0) dm(z) = \int_{\partial \Omega_{R,\epsilon}} \left(\log |\zeta| \frac{\partial \varphi}{\partial n}(\zeta) - \varphi(\zeta) \frac{\partial \log |\zeta|}{\partial n} \right) |d\zeta|$$

Si R és prou gran (suposem $\varphi(z) \subseteq \overline{\mathbb{D}(0, R)}$), llavors en la frontera $\partial \Omega_R$ el valor de φ és 0, i tenim

$$\int_{\Omega_{R,\epsilon}} \log |z| \Delta \varphi(z) dm(z) = - \int_{|\zeta|=\epsilon} \left(\log |\zeta| \frac{\partial \varphi}{\partial n}(\zeta) - \varphi(\zeta) \frac{\partial \log |\zeta|}{\partial n} \right) |d\zeta|$$

Com a la circumferència $|\zeta| = r$ el vector normal $\vec{n}$ té la mateixa direcció que el radi r , aleshores

$$\begin{aligned} \log r &= \log |\zeta| \\ \frac{\partial}{\partial n} \log |\zeta| &= \frac{\partial}{\partial r} \log r = \frac{1}{r}. \end{aligned}$$

Substituïm en la integral:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{R,\epsilon}} \log |z| \Delta \varphi(z) dm(z) &= - \int_{|\zeta|=\epsilon} \left(\log \epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n}(\zeta) - \varphi(\zeta) \frac{1}{\epsilon} \right) |d\zeta| \\ &= - \log \epsilon \int_{|\zeta|=\epsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial n}(\zeta) |d\zeta| + \frac{1}{\epsilon} \int_{|\zeta|=\epsilon} \varphi(\zeta) |d\zeta|. \end{aligned}$$

Si R és gran i $\epsilon \searrow 0$, la integral de l'esquerra ens queda

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{\Omega_{R,\epsilon}} \log |z| \Delta \varphi(z) dm(z) = \int_{\mathbb{C}} \log |z| \Delta \varphi(z) dm(z),$$

ja que $\log |z|$ té una singularitat integrable.

Ens falta determinar el limit quan $\epsilon \searrow 0$ de la part de la dreta de la igualtat anterior.

Per una banda, tenim que, la funció contínua $|\frac{\partial \varphi}{\partial n}(\zeta)|$ assoleix valor màxim al compacte $K := \overline{\mathbb{D}(0, 1/2)}$. És a dir, existeix M tal que

$$\max_K |\frac{\partial \varphi}{\partial n}| \leq M.$$

Per tant

$$\left| -\log \epsilon \int_{|\zeta|=\epsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial n}(\zeta) |d\zeta| \right| \leq |-\log \epsilon| \cdot M \cdot 2\pi\epsilon = 2\pi M(\epsilon \log \frac{1}{\epsilon}) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0.$$

Per arribar al resultat de la igualtat (2.3) només queda veure que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_{|\zeta|=\epsilon} \varphi(\zeta) |d\zeta| = \varphi(0),$$

equivalentment, que:

$$\frac{1}{2\pi\epsilon} \int_{|\zeta|=\epsilon} \varphi(\zeta) |d\zeta| - \varphi(0) = \frac{1}{2\pi\epsilon} \int_{|\zeta|=\epsilon} (\varphi(\zeta) - \varphi(0)) |d\zeta|$$

tendeix a 0 quan $\epsilon \searrow 0$.

Com φ és contínua, fixat $\eta > 0$ petit existeix $\epsilon > 0$ tal que si $|\zeta| \leq \epsilon$ aleshores

$$|\varphi(\zeta) - \varphi(0)| < \eta.$$

Llavors si $|\zeta| \leq \epsilon$,

$$\frac{1}{2\pi\epsilon} \int_{|\zeta|=\epsilon} |\varphi(\zeta) - \varphi(0)| |d\zeta| \leq \frac{1}{2\pi\epsilon} \int_{|\zeta|=\epsilon} \eta |d\zeta| \leq \frac{1}{2\pi\epsilon} \eta (2\pi\epsilon) = \eta.$$

□

Tenint en compte els resultats anteriors sobre les funcions holomorfes, ja podem comprendre la distribució dels zeros d'una funció holomorfa en el pla complex en relació amb el Laplaciana. Recordem que, pel principi de prolongació analítica, els zeros d'una funció holomorfa a un domini formen un conjunt finit o una successió de punts aïllats, sense punts d'acumulació. Definirem dn_f com la mesura comptadora dels zeros de f .

Teorema 2.17. *Si $f \in H(\Omega)$, on $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ és un domini, amb el conjunt dels seus zeros $\mathcal{Z}(f) = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$. Aleshores*

$$dn_f := \frac{1}{2\pi} \Delta \log |f(z)| = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{\lambda_k}, \quad (2.5)$$

on la igualtat s'entén en el sentit de les distribucions.

Demostració:

Hem demostrat en el Corol·lari 2.12 que

$$\Delta \log |f(z)| = 0 \quad \text{si } z \notin \mathcal{Z}(f),$$

i ara estudiarem el $\Delta \log |f(z)|$ en els $z \in \mathcal{Z}(f)$.

Si fixem un zero λ_k , en general té una multiplicitat m_{λ_k} i per tant, prenent el desenvolupament de Taylor,

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=m_{\lambda_k}}^{\infty} \frac{f^{(k)}(\lambda_k)}{k!} (z - \lambda_k)^k = c_{m_{\lambda_k}} (z - \lambda_k)^{m_{\lambda_k}} + \dots \\ &= (z - \lambda_k)^{m_{\lambda_k}} (c_{m_{\lambda_k}} + \dots). \end{aligned}$$

És a dir, podem escriure, en un entorn de λ_k ,

$$f(z) = (z - \lambda_k)^{m_k} g(z),$$

on g és una funció holomorfa i sense zeros. Llavors pels z propers a λ_k tenim

$$\log |f(z)| = m_k \log |z - \lambda_k| + \log |g(z)|,$$

i per tant, pel Lema 2.16,

$$\Delta \log |f(z)| = m_k \Delta \log |z - \lambda_k| + \Delta \log |g(z)| = m_k 2\pi \delta_{\lambda_k}.$$

Resumint, pels z propers a λ_k ,

$$\frac{1}{2\pi} \Delta \log |f(z)| = m_k \delta_{\lambda_k}.$$

Per tant, podem escriure

$$\frac{1}{2\pi} \Delta \log |f(z)| = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{\lambda_k},$$

on entenem que δ_{λ_k} apareix tantes vegades com la multiplicitat m_{λ_k} de λ_k .

□

2.2.5 Teorema de Green (notació complexa)

La darrera secció d'aquests preliminars es dedica a una reformulació del Teorema de Green amb $z, \bar{z}$.

Teorema 2.18 (de Green). *Sigui Ω un obert i sigui f, g dues funcions de classe $\mathcal{C}^1(\Omega)$. Aleshores es compleix*

$$\int_{\partial\Omega^+} f dz + g d\bar{z} = 2i \int_{\Omega} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial g}{\partial z} \right) dm(z), \quad (2.6)$$

Demostració:

Aquí es tindran en compte els conceptes vistos a la Notació 2.2.1.

Comencem passant la notació complexa de la integral de línia a variable real:

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} f dz + g d\bar{z} &= \int_{\partial\Omega} (f dx + i f dy) + (g dx - i g dy) \\ &= \int_{\partial\Omega} (f + g)dx + i(f - g)dy.\end{aligned}$$

Apliquem el Teorema de Green clàssic (a $\mathbb{R}^2$, amb notació real): donades $P, Q \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ aleshores

$$\int_{\partial\Omega} P dx + Q dy = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Ens dona

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} (f + g)dx + i(f - g)dy &= \int_{\Omega} \left\{ i \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) \right\} dx dy \\ &= i \int_{\Omega} \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial x} \right) + i \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) \right\} dx dy \\ &= i \int_{\Omega} \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial g}{\partial x} - i \frac{\partial g}{\partial y} \right) \right\} dx dy\end{aligned}$$

Si tornem a passar-ho a notació complexa, ens dona el resultat final

$$i \int_{\Omega} \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial g}{\partial x} - i \frac{\partial g}{\partial y} \right) \right\} dx dy = 2i \int_{\Omega} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial g}{\partial z} \right) dm(z)$$

□

3 GAFs i construcció

Finalment, un cop vist les idees bàsiques i les tècniques necessàries per tractar aquest tema, introduïm les funcions analítiques Gaussianes (GAFs) i analitzem la distribució aleatòria dels zeros d'aquestes funcions.

3.1 Funcions analítiques Gaussianes

Les funcions analítiques Gaussianes es representen com una sèrie de potències, o més generalment com una sèrie de funcions holomorfes, en un domini Ω que, pel que hem vist en el Lema 2.7, ha de convergir sobre conjunts compactes d'aquest domini per tal que estigui ben definida. Aquesta convergència no és evident que es compleixi de manera simultània per tots els punts de Ω .

Per tant, abans de veure com es defineixen aquestes funcions, veurem una manera general de construir funcions analítiques aleatòries i poder aplicar-ho als GAFs.

Teorema 3.1. *Sigui e_n una successió de funcions holomorfes a Ω . Suposem que $\sum_n |e_n(z)|^2$ convergeix uniformement sobre compactes de Ω . Siguin a_n variables aleatòries i.i.d. amb mitjana 0 i variància 1. Aleshores, amb probabilitat 1, $\sum_n a_n e_n(z)$ convergeix uniformement sobre subconjunts compactes en Ω i, per tant, defineix una funció analítica.*

Fixat z , podríem considerar la successió $e_n(z) = c_n$ i observar que si $\sum_n |c_n|^2$ convergeix uniformement sobre compactes i a_n són i.i.d. amb mitjana 0 i variància 1, aleshores la sèrie $\sum_n a_n c_n$ convergeix amb probabilitat 1, ja que per la desigualtat de Kolmogorov

$$\mathbb{P}[\sup_{k \geq N} |\sum_{j=N}^k a_j c_j| \geq t] \leq \frac{1}{t^2} \sum_{j=N}^{\infty} |c_j|^2 \rightarrow 0 \quad \text{quan } N \rightarrow \infty.$$

Però no és gens evident que la sèrie convergeixi per tot z simultàniament. És a dir, és clar que si $B_z = \{\omega : \sum_n a_n e_n(z) < +\infty\}$ aleshores $\mathbb{P}(B_z) = 1$, però no ho és gens que $\mathbb{P}(\bigcap_{z \in \Omega} B_z) = 1$.

La idea de la demostració és considerar la sèrie $\sum a_n e_n$ dins d'un espai de Hilbert i provar per aquesta sèrie una versió de la desigualtat de Kolmogorov. D'aquesta manera haurem demostrat la convergència i, en conseqüència, que el seu límit existeix en aquest espai. Després, per les fórmules de Cauchy, deduirem la convergència uniforme sobre compactes d'aquest límit, i finalment que és una funció holomorfa.

Demostració:

Sigui K un subconjunt compacte dins de Ω . Considerem la successió

$$X_n(z) = \sum_{k=1}^n a_k e_k(z)$$

i veiem que està continguda al conjunt $L^2(K)$ (respecte la mesura de Lebesgue).
Recordem que

$$L^2(K) = \left\{ f : K \rightarrow \mathbb{C} \mid \|f\|_2 := \left(\int_K |f|^2 \right)^{1/2} < +\infty \right\}$$

Aleshores, com que $\|\cdot\|_2$ és una norma, i per la desigualtat de Cauchy-Schwarz

$$\|X_n\|_2^2 = \int_K \left| \sum_{k=1}^n a_k e_k(z) \right|^2 dm(z) \leq \int_K \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n |e_k(z)|^2 \right) dm(z) < +\infty.$$

Volem demostrar que per a tot $k < n$ es compleix la següent igualtat:

$$\mathbb{E}[\|X_n\|^2 \mid a_j, j \leq k] = \|X_k\|^2 + \sum_{j=k+1}^n \|e_j\|^2. \quad (3.1)$$

Reescrivim $X_n = \sum_{j=1}^k a_j e_j + \sum_{j=k+1}^n a_j e_j$. Aleshores, fixat els a_j tal que $j \leq k$, tenim

$$\begin{aligned} \|X_n\|^2 &= \int_K X_n \overline{X_n} dm = \int_K \left(\sum_{j=1}^k a_j e_j + \sum_{j=k+1}^n a_j e_j \right) \left(\sum_{m=1}^k \overline{a_m e_m} + \sum_{m=k+1}^n \overline{a_m e_m} \right) dm \\ &= \int_K \left(\left| \sum_{j=1}^k a_j e_j \right|^2 + \sum_{j=1}^k \sum_{m=k+1}^n a_j \overline{a_m} e_j \overline{e_m} + \sum_{j=k+1}^n \sum_{m=1}^k a_j \overline{a_m} e_j \overline{e_m} + \sum_{m,j=k+1}^n a_j \overline{a_m} e_j \overline{e_m} \right) dm \\ &= \|X_k\|^2 + \sum_{j=1}^k \sum_{m=k+1}^n a_j \overline{a_m} \left(\int_K e_j \overline{e_m} dm \right) + \sum_{j=k+1}^n \sum_{m=1}^n a_j \overline{a_m} \left(\int_K e_j \overline{e_m} dm \right) \\ &\quad + \sum_{m,j=k+1}^n a_j \overline{a_m} \left(\int_K e_j \overline{e_m} dm \right). \end{aligned}$$

Llavors, per l'apartat 2 de la Proposició 2.2,

$$E(a_j \overline{a_m}) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq m, \\ 1 & \text{si } j = m, \end{cases}$$

i ens queda el resultat que volíem:

$$\mathbb{E}[\|X_n\|^2 \mid a_j, j \leq k] = \|X_k\|^2 + \sum_{j=k+1}^n \int_K |e_j|^2 dm = \|X_k\|^2 + \sum_{j=k+1}^n \|e_j\|^2.$$

Fixat $\epsilon > 0$, definim el “stopping time” $\tau = \inf \{n \in \mathbb{N} : \|X_n\| > \epsilon\}$. Utilitzant a la segona igualtat, la següent propietat de l'esperança condicionada

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y)) = \mathbb{E}(X),$$

escrivim

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\|X_n\|^2) &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(\|X_n\|^2 \mathbb{1}_{\tau=k}) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(\mathbb{E}(\|X_n\|^2 \mathbb{1}_{\tau=k} \mid a_j, j \leq k)) \\
&= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\tau=k} \mathbb{E}(\|X_n\|^2 \mid a_j, j \leq k)) \\
&= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\tau=k} \left(\|X_k\|^2 + \sum_{j=k+1}^n \|e_j\|^2 \right)) \quad \text{per} \quad (3.1) \\
&\geq \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\tau=k} \|X_k\|^2) \geq \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\tau=k} \epsilon^2) \\
&= \epsilon^2 \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\tau=k}) = \epsilon^2 \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(\tau = k) = \epsilon^2 \mathbb{P}(\tau \leq n).
\end{aligned}$$

Aleshores,

$$\mathbb{P}(\sup_{j \leq n} \|X_j\| \geq \epsilon) = \mathbb{P}(\tau \leq n) \leq \frac{1}{\epsilon^2} \mathbb{E}(\|X_n\|^2) = \frac{1}{\epsilon^2} \sum_{j=1}^n \|e_j\|^2. \quad (3.2)$$

Acabem de demostrar la desigualtat de Kolmogorov per variables aleatòries en l'espai de Hilbert.

A continuació, suposem $m < n$ i apliquem la desigualtat a la successió $\{X_n - X_m\}_n$. Per hipòtesi, $\sum_n |e_n(z)|^2$ convergeix uniformement sobre compactes K en Ω . Aleshores, per definició de suprem, tenim

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\sup_{m, n \geq N} \|X_n - X_m\| \geq 2\epsilon) &\leq \mathbb{P}(\exists m, n \geq N \text{ tq } \|X_n - X_m\| \geq \epsilon) \\
&\leq \frac{1}{\epsilon^2} \sum_{j=m+1}^n \|e_j\|^2 \leq \frac{1}{\epsilon^2} \sum_{j=N+1}^{\infty} \|e_j\|^2 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.
\end{aligned}$$

Amb això,

$$\mathbb{P}(\exists m, n \geq N \text{ tq } \|X_n - X_m\| \leq \epsilon) = 1,$$

és a dir, X_n és una successió de Cauchy a $L^2(K)$ amb probabilitat 1.

Com $L^2(K)$ és un espai complet, existeix $X = \lim_n X_n$ a $L^2(K)$, és a dir, existeix $X \in L^2(K)$ tal que $\|X - X_n\|_{L^2(K)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Ens falta veure que X també és holomorfa. Pel que hem vist en el Lema 2.7, serà suficient veure que $\{X_n\}_n \rightarrow X$ uniformement sobre compactes. Com X_n és una funció analítica a Ω per cada n , si $\overline{\mathbb{D}(z_o, r)} \subseteq \Omega$, la fórmula de Cauchy dona

$$X_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{X_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \forall z \in \mathbb{D}(z_o, r), \quad (3.3)$$

on C_r és la frontera del disc $\mathbb{D}(z_0, r)$. Llavors, fixem $z \in \mathbb{D}(z_0, R)$, prenem $r \in (2R, 3R)$ i integrem la igualtat anterior respecte $r \, dr$:

$$\int_{2R}^{3R} X_n(z) r \, dr = \frac{1}{2\pi i} \int_{2R}^{3R} \left(\int_{C_r} \frac{X_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right) r \, dr$$

Parametritzant $\zeta = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, tenim

$$\int_{2R}^{3R} X_n(z) r \, dr = \frac{1}{2\pi} \int_{2R}^{3R} \int_0^{2\pi} \frac{X_n(z_0 + re^{it})}{z_0 + re^{it} - z} re^{it} r \, dt \, dr.$$

Els punts $w = z_0 + re^{it}$ tal que $r \in (2R, 3R)$ i $t \in (0, 2\pi)$ recorren l'anell centrat a z_0

$$A = \{w : 2R < |w - z_0| < 3R\}.$$

De fet, la doble integral anterior és una integral d'àrea a A :

$$\frac{5}{2} R^2 X_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_A \frac{X_n(w)}{w - z} (w - z_0) dA(z)$$

Per tant,

$$X_n(z) = \frac{1}{5\pi R^2} \int_A X_n(w) \frac{w - z_0}{w - z} dA(z) = \int_A X_n(w) \varphi_z(w) dA(z),$$

on

$$\varphi_z(w) = \frac{1}{5\pi R^2} \frac{w - z_0}{w - z}.$$

A continuació veiem que la família $\{\varphi_z(w)\}_{z \in \mathbb{D}(z_0, r)}$ és uniformement acotada a $L^2(K)$. Si $w \in A$ i $z \in \mathbb{D}(z_0, R)$, tenim $|w - z_0| < 3R$ i $|w - z| \geq R$, per tant

$$\begin{aligned} \|\varphi_z\|_{L^2(K)}^2 &= \int_A |\varphi_z(w)|^2 dA(w) = \int_A \frac{1}{(5\pi R^2)^2} \frac{|w - z_0|^2}{|w - z|^2} dA(w) \\ &\leq \frac{1}{(5\pi R^2)^2} \int_A 9 dA(w) = C(R) \end{aligned}$$

Llavors, utilitzant la desigualtat de Cauchy-Schwarz, deduïm que, per tot $z \in \overline{\mathbb{D}(z_0, R)}$,

$$\begin{aligned} |X_n(z) - X_m(z)| &\leq \int_A |X_n(w) - X_m(w)| |\varphi_z(w)| dm(w) \\ &\leq C \left(\int_A |X_n - X_m|^2 dm(w) \right)^{1/2} = C \|X_n - X_m\|_{L^2(A)}^2. \end{aligned}$$

Per tant, $\{X_n(z)\}_n$ és uniformement de Cauchy a $\overline{\mathbb{D}(z_0, r)}$, que implica que X_n convergeix uniformement al límit $X(z) = \lim_n X_n(z)$ sobre conjunts de compactes en Ω i, aleshores, pel Lema 2.7, el límit $X(z)$ també és holomorf a $\mathbb{D}(z_0, r)$.

□

3.2 Presentació del GAF amb el nucli de covariància

Definició 3.2. Una funció analítica Gaussiana a un domini $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ és una combinació lineal

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n e_n(z)$$

de funcions analítiques $e_n : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ amb

$$\sum_{n \geq 0} |e_n(z)|^2 < +\infty \quad \text{uniformement sobre compactes de } \Omega,$$

i amb coeficients a_n aleatoris Gaussians complexos independents de mitjana 0 i variància 1, és a dir, $a_n \sim N_{\mathbb{C}}(0, 1)$ i.i.d.

Observem que l'apartat 3 de la Proposició 2.2 ens assegura que el radi de convergència no es veu afectat per les variables aleatòries a_n , ja que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, amb probabilitat 1. Això ens soluciona uns dels problemes que teniem alhora d'estudiar l'espai de convergència dels GAFs.

Veiem que el Teorema 3.1 que acabem de veure s'aplica a aquest tipus de sèrie de funcions $f(z)$, per tant ens garanteix que defineix una funció analítica a Ω .

Aleshores, si la sèrie que defineix $f(z)$ convergeix uniformement sobre compactes, les seves propietats probabilístiques queden determinades per la mitjana i la variància, ja que tota combinació lineal de Gaussians és Gaussiana.

Veiem que la mitjana és necessàriament zero:

$$\mathbb{E}(f(z)) = \sum_n e_n(z) \mathbb{E}(a_n) = 0$$

Per altra part, la variància, o més generalment, la covariància, queda determinada per les funcions $e_n(z)$.

Definició 3.3. Sigui X, Y dues variables aleatòries. La covariància de X i Y és

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Ara si tenim un GAF avaluat a dos punts $z, w \in \Omega$, és a dir, tenim $f(z)$ i $f(w)$, aleshores la covariància és:

$$\begin{aligned} K(z, w) &:= \text{Cov}(f(z), f(w)) = \mathbb{E}(f(z)\overline{f(w)}) = \mathbb{E}\left(\sum_n a_n e_n(z) \sum_m \overline{a_m e_m(w)}\right) \\ &= \sum_{n, m} e_n(z) \overline{e_m(w)} \mathbb{E}(a_n \overline{a_m}) = \sum_{n=0}^{\infty} e_n(z) \overline{e_n(w)}. \end{aligned}$$

Diem que $K(z, w)$ és el nucli de covariància.

En particular, tenim que:

$$\text{Var}(f(z)) = \text{Cov}(f(z), f(z)) = K(z, z).$$

3.2.1 El GAF al pla

Fixant un paràmetre real $L > 0$, considerem l'espai de Fock, que es defineix com

$$\mathcal{F}_L = \left\{ f \in H(\mathbb{C}) \mid \|f\|_{\mathcal{F}_L}^2 := \frac{L}{\pi} \int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 e^{-L|z|^2} dm(z) < +\infty \right\}.$$

Observem que la constant $\frac{L}{\pi}$ es tria per a que $\|1\|_{\mathcal{F}_L} = 1$ (és una normalització).

Denotem:

$$e_n(z) = \frac{\sqrt{L^n}}{\sqrt{n!}} z^n, \quad n \geq 0.$$

Lema 3.4. *La successió $\{e_n(z)\}_n$ és una base ortonormal de $\mathcal{F}_L$.*

Demostració: Fem en el cas $L = 1$, el cas general es faria de manera anàloga. Aleshores sigui

$$e_n(z) = \frac{z^n}{\sqrt{n!}}, \quad n \geq 0.$$

a) El sistema $\{e_n(z)\}_n$ és ortonormal:

$$\begin{aligned} \langle e_k, e_j \rangle &= \int_{\mathbb{C}} e_k(z) \overline{e_j(z)} e^{-|z|^2} \frac{dm(z)}{\pi} = \int_{\mathbb{C}} \frac{z^k \overline{z^j}}{\sqrt{k!} \sqrt{j!}} e^{-|z|^2} \frac{dm(z)}{\pi} \\ &= \frac{1}{\sqrt{k!} \sqrt{j!}} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} r^k e^{ik\theta} r^j e^{-ij\theta} e^{-r^2} \frac{r d\theta dr}{\pi} \\ &= \frac{1}{\sqrt{k!} \sqrt{j!}} \int_0^\infty r^{k+j} e^{-r^2} r \left(\int_0^{2\pi} e^{i(k-j)\theta} d\theta \right) \frac{dr}{\pi} \end{aligned}$$

Per una banda, si $k \neq j$ veiem que $\langle e_k, e_j \rangle = 0$ ja que la integral s'anul·la, demostrant l'ortogonalitat.

Per altra banda, si $k = j$ ens queda

$$\|e_k\|^2 = \langle e_k, e_k \rangle = \frac{1}{k!} \int_0^\infty r^{2k} e^{-r^2} 2r dr = \frac{1}{k!} \int_0^\infty t^k e^{-t} dt,$$

i utilitzant que $\Gamma(s+1) = \int_0^\infty t^s e^{-t} dt$, veiem que $\|e_k\|^2 = 1$.

b) $\{e_n(z)\}_n$ és un sistema generador: Sigui f una funció analítica en $\mathbb{C}$. Aleshores té un desenvolupament de Taylor convergent a tot $\mathbb{C}$.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sqrt{n!} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} = \sum_{n=0}^{\infty} (b_n \sqrt{n!}) e_n(z)$$

□

Un cop vist que $\{e_n(z)\}_n$ és ortonormal tenim que

$$\left\| \sum_k c_k e_k \right\|^2 = \sum_k |c_k|^2.$$

Per tant

$$\|f\|^2 = \sum_n |b_n|^2 n!$$

Cal veure també que $\sum_{n=0}^{\infty} |e_n(z)|^2$ convergeix uniformement sobre compactes en $\mathbb{C}$ per tal de construir el GAF. Però això és cert, ja que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L^n}{n!} |z|^{2n} = e^{L|z|^2}$ convergeix uniformement per tot disc en el pla complex degut a que el radi de convergència de la sèrie exponencial és $+\infty$.

Per tant, ja podem definir el GAF al pla.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\sqrt{L^n}}{\sqrt{n!}} z^n$$

per tot real $L > 0$ i amb variables $a_n \sim N_{\mathbb{C}}(0, 1)$ i.i.d.

Observació 3.5. El GAF f no pertany a $\mathcal{F}_L$ amb probabilitat 1, ja que

$$\|f_N\|^2 = \langle f_N, f_N \rangle = \left\langle \sum_{n=1}^N a_n e_n(z), \sum_{n=1}^N a_n e_n(z) \right\rangle = \sum_{n=1}^N |a_n|^2,$$

i quan a_n són Gaussians estàndard independents, aquesta sèrie divergeix amb probabilitat 1.

Per demostrar l'últim pas observem que

$$\left\{ \omega : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < +\infty \right\} \subseteq \left\{ \omega : \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0 \right\}.$$

Per tant, és suficient veure que $\mathbb{P} \left(\left\{ \omega : \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0 \right\} \right) = 0$:
Fixem un $\epsilon > 0$, aleshores per la independència dels a_n

$$\mathbb{P}[\forall n \geq n_0 \quad |a_n| < \epsilon] = \prod_{n=n_0}^{\infty} \mathbb{P}(|a_n| < \epsilon)$$

i per la Proposició 2.2 apartat 1,

$$\mathbb{P}(|a_n| < \epsilon) = \int_0^{\epsilon^2} e^{-s} ds < 1,$$

és a dir,

$$\mathbb{P}[\forall n \geq n_0 \quad |a_n| < \epsilon] = 0$$

com volíem.

Finalment, calculem el nucli de covariància de $f(z)$ en aquest cas:

$$K(z, w) = \sum_{n=0}^{\infty} e_n(z) \overline{e_n(w)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L^n}{n!} z^n \bar{w}^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Lz\bar{w})^n}{n!} = e^{Lz\bar{w}}.$$

3.3 Invariància per translacions

Una característica destacada d'aquestes funcions és la seva invariància sota transformacions adequades. En aquest cas, veurem que la distribució del conjunt $\mathcal{Z}(f)$ és invariant per translacions en el pla complex $\mathbb{C}$.

Primer necessitem el següent lema:

Lema 3.6. *Segui $a \in \mathbb{C}$. La transformació*

$$T_a f(z) = f(z - a) e^{L\bar{a}z - \frac{L}{2}|a|^2}$$

és una isometria de $\mathcal{F}_L$.

Observem que $T_a f$ té els mateixos zeros que la translació $f_a(z) = f(z - a)$.

Demostració:

Directament de la definició

$$\begin{aligned} \|T_a f(z)\|_{\mathcal{F}_L}^2 &= \frac{L}{\pi} \int_{\mathbb{C}} |T_a f(z)|^2 e^{-L|z|^2} dm(z) \\ &= \frac{L}{\pi} \int_{\mathbb{C}} |f(z - a)|^2 |e^{L\bar{a}z}|^2 e^{-L|a|^2} e^{-L|z|^2} dm(z) \\ &= \frac{L}{\pi} \int_{\mathbb{C}} |f(z - a)|^2 e^{-L|z-a|^2} dm(z) = \frac{L}{\pi} \int_{\mathbb{C}} |f(u)|^2 e^{-L|u|^2} dm(u) \end{aligned}$$

□

Això es transmet a la distribució del GAF.

Proposició 3.7. *Els GAFs $f(z)$ i $T_a f(z)$, on $a \in \mathbb{C}$, tenen la mateixa distribució.*

Ho denotem $f(z) \stackrel{d}{=} T_a f(z)$.

Demostració:

Per construcció, la transformació

$$T_a f(z) = f(z - a) e^{L\bar{a}z - \frac{L}{2}|a|^2} = \left(\sum_n a_n e_n(z - a) \right) e^{L\bar{a}z - L/2|a|^2}$$

és una Gaussiana centrada al 0, ja que el factor exponencial és determinista i els coeficients a_n no estan afectats per la translació. Per tant, com l'esperança és 0, el comportament probabilístic queda determinat per la covariància.

Aleshores, si $f(z)$ i $T_a f(z)$ són dues Gaussians centrades al 0 amb la mateixa covariància, tindrem que són variables amb la mateixa distribució.

Cal provar que

$$K_f(z, w) = K_{T_a f}(z, w).$$

Si $f_a(z) = f(z - a)$, aleshores

$$K_{f_a}(z, w) = K_f(z - a, w - a) = e^{L(z-a)\overline{(w-a)}} = e^{Lz\bar{w} - Lz\bar{a} - La\bar{w} + L|a|^2}.$$

Calculant veiem que

$$\begin{aligned} K_{T_a f}(z, w) &= K_{f_a}(z, w) e^{Lz\bar{a} - (L/2)|a|^2} e^{La\bar{w} - (L/2)|a|^2} = e^{Lz\bar{w} - Lz\bar{a} - La\bar{w} + L|a|^2} e^{Lz\bar{a} + La\bar{w} - L|a|^2} \\ &= e^{Lz\bar{w}} = K_f(z, w), \end{aligned}$$

tal com volíem.

□

Corol·lari 3.8. *Els zeros de f i de la traslladada*

$$f_a(z) = f(z - a) \quad a \in \mathbb{C}$$

tenen la mateixa distribució.

Això és immediat ja que, si diem $f_a(z) = f(z - a)$, tenim

$$\mathcal{Z}(T_a f) = \mathcal{Z}(f_a(z)) = \mathcal{Z}(f) + a$$

4 Primera Intensitat i fórmula d'Edelman-Kostlan

Un cop vistes les propietats de les funcions analítiques Gaussians, volem estudiar el conjunt de zeros d'aquests GAFs. Donada f una funció Gaussiana, hi tenim associada una mesura aleatòria; la mesura comptadora

$$dn_f = \sum_{\lambda \in \mathcal{Z}(f)} \delta_\lambda.$$

Volem donar sentit a la “mesura mitjana” d'aquestes dn_f , una nova mesura que digui com es distribueixen en mitjana els punts de $\mathcal{Z}(f)$. A aquesta mesura es diu “primera intensitat”.

Definició 4.1. *Donat un GAF f diem primera intensitat a la mesura $\mathbb{E}(dn_f)$ donada per*

$$\langle \mathbb{E}(dn_f), \varphi \rangle = \mathbb{E}(\langle dn_f, \varphi \rangle) \quad \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{C}).$$

Veurem que la primera intensitat està directament determinada pel nucli de covariància del GAF. També, una cosa més impressionant que veurem, que si dos GAFs tenen la mateixa primera intensitat, aleshores aquestes dues funcions són iguals en distribució (rigidesa de Calabi).

4.1 Fórmula d'Edelman-Kostlan

Veiem tot seguit com queda determinada la primera intensitat.

Teorema 4.2 (Fòrmula d'Edelman-Kostlan). *Sigui $\mathbf{f}$ un GAF en un obert Ω i sigui $dn_{\mathbf{f}}$ la mesura comptadora de $\mathcal{Z}(f)$ amb nucli de covariància $K(z, z)$, per tot $z \in \Omega$. Aleshores*

$$\mathbb{E}(dn_{\mathbf{f}}) = \frac{1}{4\pi} \Delta \log K(z, z), \quad (4.1)$$

on el Laplacà Δ s'ha d'interpretar en el sentit de les distribucions.

A aquesta igualtat també se l'anomena **fórmula d'Edelman-Kostlan**.

Demostració:

Com ja hem dit, si $\mathbf{f}$ és Gaussiana de mitjana 0, el seu comportament probabilístic queda determinat per

$$\text{Var}(f(z)) = K(z, z).$$

Volem veure com es descriu $\mathbb{E}(dn_{\mathbf{f}})$ en termes de $K(z, z)$.

Donada $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{C})$, per definició

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{E}(dn_{\mathbf{f}}), \varphi \rangle &= \mathbb{E}(\langle dn_{\mathbf{f}}, \varphi \rangle) = \mathbb{E} \left(\int_{\mathbb{C}} \varphi(z) dn_{\mathbf{f}}(z) \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\int_{\mathbb{C}} \Delta \varphi(z) \left(\frac{1}{2\pi} \log |\mathbf{f}(z)| \right) dm(z) \right) \end{aligned} \quad (1)$$

Aleshores, per poder utilitzar el Teorema de Fubini i passar l'esperança dins la integral al pla, hem de veure que $\Delta\varphi(z) \frac{1}{2\pi} \log |\mathbf{f}(z)|$ és integrable.

Pel Teorema de Tonelli

$$\mathbb{E} \left(\int_{\mathbb{C}} |\Delta\varphi(z)| \frac{1}{2\pi} |\log |\mathbf{f}(z)|| \, dm(z) \right) = \int_{\mathbb{C}} |\Delta\varphi(z)| \left(\frac{1}{2\pi} \mathbb{E}(|\log |\mathbf{f}(z)||) \right) dm(z).$$

Ara, fixat $z \in \mathbb{C}$, $\mathbf{f}(z)$ és una Gaussiana complexa amb mitjana 0 i variància $K(z, z)$. Aleshores,

$$\frac{f(z) - \mathbb{E}(f(z))}{\sqrt{\text{Var}(f(z))}} = \frac{f(z)}{\sqrt{K(z, z)}}$$

és una normal estàndard (normalitzada), que denotem a .

Llavors,

$$\log |\mathbf{f}(z)| = \log \left(\frac{|f(z)|}{\sqrt{K(z, z)}} \sqrt{K(z, z)} \right) = \log |a| + \log \sqrt{K(z, z)}.$$

Observem que el terme $\log \sqrt{K(z, z)}$ és determinista. Aplicant l'esperança i fent servir que la funció de densitat d' a és $\frac{1}{\pi} e^{-|z|^2}$, tenim

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|\log |\mathbf{f}(z)||) &\leq \mathbb{E}(|\log |a||) + |\log \sqrt{K(z, z)}| \\ &= \int_{\mathbb{C}} |\log(z)| \frac{1}{\pi} e^{-|z|^2} dm(z) + |\log \sqrt{K(z, z)}| \\ &= \int_0^\infty |\log(t)| \frac{1}{\pi} e^{-t^2} 2\pi t dt + |\log \sqrt{K(z, z)}| \\ &= \int_0^\infty |\log(r)| e^{-r} dr + |\log \sqrt{K(z, z)}| \\ &= C + |\log \sqrt{K(z, z)}| \end{aligned}$$

on C és una constant finita.

Observem que $|\log K(z, z)|$ és localment integrable per tot z . L'únic problema que podríem tenir és en els punts z_o tal que $K(z_o, z_o) = 0$. Tenint en compte que $K(z, w)$ és holomorfa en z , antiholomorfa en w i $K(w, z) = \overline{K(z, w)}$, els zeros de $K(z, z)$ són aïllats. Si z_o és un zero de multiplicitat p , llavors

$$K(z, z) = |z - z_o|^{2p} L(z, z)$$

amb $L(z_o, z_o) \neq 0$. Tenim doncs, a un entorn de z_o ,

$$\log K(z, z) = 2p \log |z - z_o| + \log L(z, z)$$

i com $\log |z - z_o|$ és integrable en un entorn de z_o , aleshores $\log K(z, z)$ també. En conclusió

$$\mathbb{E} \left(\int_{\mathbb{C}} |\Delta\varphi(z)| |\log |\mathbf{f}(z)|| \frac{dm(z)}{2\pi} \right) < +\infty.$$

Per tant podem aplicar al Teorema de Fubini, a (1) i deduir que

$$\begin{aligned}\langle \mathbb{E}(dn_{\mathbf{f}}), \varphi \rangle &= \mathbb{E} \left(\int_{\mathbb{C}} \Delta \varphi(z) \left(\frac{1}{2\pi} \log |\mathbf{f}(z)| \right) dm(z) \right) \\ &= \int_{\mathbb{C}} \Delta \varphi(z) \frac{1}{2\pi} \mathbb{E}(\log |\mathbf{f}(z)|) dm(z).\end{aligned}$$

Fent servir el mateix raonament que abans per calcular $\mathbb{E}(\log |\mathbf{f}(z)|)$ tenim,

$$\mathbb{E}(\log |\mathbf{f}(z)|) = A + \log \sqrt{K(z, z)}$$

on A és una constant finita. Substituïm a la integral anterior i tenim,

$$\langle \mathbb{E}(dn_{\mathbf{f}}), \varphi \rangle = \int_{\mathbb{C}} \Delta \varphi(z) \left(\frac{1}{2\pi} A + \frac{1}{2\pi} \log \sqrt{K(z, z)} \right) dm(z).$$

Aplicant la segona identitat de Green (2.4), veiem per una banda que

$$\int_{\mathbb{C}} \Delta \varphi(z) \frac{A}{2\pi} dm(z) = 0,$$

i finalment, per l'altra,

$$\langle \mathbb{E}(dn_{\mathbf{f}}), \varphi \rangle = \int_{\mathbb{C}} \varphi(z) \frac{1}{2\pi} \Delta \log \sqrt{K(z, z)} dm(z) = \langle \frac{1}{2\pi} \Delta \log \sqrt{K(z, z)}, \varphi \rangle$$

En conclusió, la primera intensitat és la mesura

$$\mathbb{E}(dn_{\mathbf{f}}) = \frac{1}{4\pi} \Delta \log K(z, z)$$

□

4.1.1 La primera intensitat al GAF del pla

Recordem que a $\mathbb{C}$ hi tenim el GAF:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\sqrt{L^n}}{\sqrt{n!}} z^n \in H(\mathbb{C}),$$

on $L > 0$ i $a_n \sim N_{\mathbb{C}}(0, 1)$ i.i.d. El nucli de covariància és

$$K(z, w) = e^{Lz\bar{w}},$$

i per tant,

$$\text{Var}(f(z)) = K(z, z) = e^{L|z|^2}.$$

Aleshores, per la fórmula d'Edelman-Kostlan, la primera intensitat del GAF és

$$\mathbb{E}(dn_f) := \frac{1}{4\pi} \Delta \log K(z, z) = \frac{1}{4\pi} \Delta L|z|^2 = \frac{L}{\pi} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} |z|^2 = \frac{L}{\pi} dm(z)$$

Recordem que havíem vist anteriorment que els zeros d'un GAF en l'espai de Fock són invariants per translacions. Aquesta invariància queda demostrada en la primera intensitat, que també és invariant per translacions en $\mathbb{C}$.

Apliquem aquest resultat als zeros dins un conjunt A . Recordem que

$$n_f(A) = \#\mathcal{Z}(f) \cap A = \int_A dn_f$$

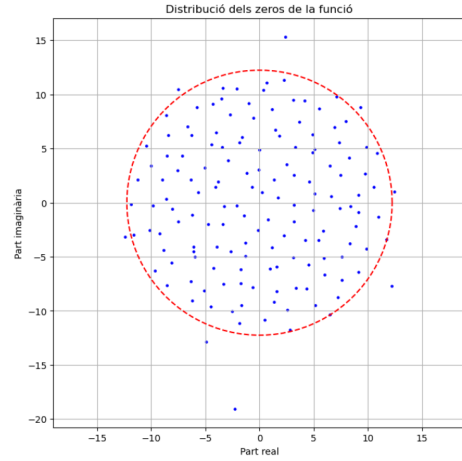
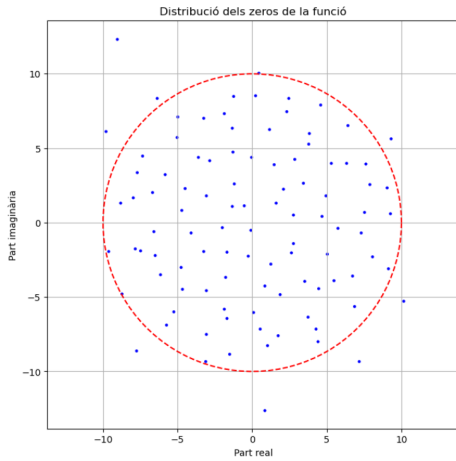
és la variable comptadora del conjunt A . Per exemple, si $A = \mathbb{D}(a, r)$, tenim que

$$\mathbb{E}(n_f(A)) = \int_A \frac{L}{\pi} dm(z) = \frac{L}{\pi} |A| = Lr^2.$$

A més a més, per visualitzar i entendre millor aquests resultats hem creat un programa amb Python que il·lustra la distribució dels zeros d'un polinomi truncat del GAF que estem estudiant

$$\sum_{n=0}^N a_n e_n(z),$$

al cas $L = 1$. Observem que, els zeros de les funcions estan distribuïts de manera “uniforme” en el disc $\mathbb{D}(0, \sqrt{N})$. A mesura que augmentem el valor de N el disc es va fent cada vegada més gran fins a omplir tot el pla complex. De tal manera que els zeros del GAF acaben tenint una distribució uniforme, i per tant, invariant per translacions per tot el pla. Observem els exemples del polinomi de grau $N = 100$ (esquerra) i $N = 150$ (dreta). Obtenim el següent dibuix:



4.2 Rigidesa de Calabi

La rigidesa de Calabi garanteix que dos GAFs que tenen la mateixa primera intensitat, aleshores també tenen la mateixa distribució. Per tant, aquest teorema d'unicitat conclueix que el conjunt de zeros d'un GAF ve determinat per la seva primera intensitat.

Per demostrar el teorema necessitem el següent lema:

Lema 4.3. *Sigui $F(z, w)$ una funció en un obert Ω tal que és holomorfa en z i antiholomorfa en w , per tot $z, w \in \Omega$. Si $F(z, z) = 0$ per tot $z \in \Omega$, aleshores $F(z, w) = 0$ per tot $z, w \in \Omega$.*

Demostració:

Utilitzant translacions si és necessari, hem de veure que F és 0 en un entorn de $(0, 0)$ en Ω . Com F és una funció analítica real holomorfa en z i antiholomorfa en w , la podem expressar com:

$$F(z, w) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_{n,m} z^n \bar{w}^m,$$

on $c_{n,m}$ són valors complexos. Llavors, tenim que

$$F(z, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_{n,m} z^n \bar{z}^m. \quad (4.2)$$

És clar que

$$\frac{\partial^{n+m}}{\partial z^n \partial \bar{z}^m} z^j \bar{z}^k \Big|_{z=0} = \delta_{(n,m)(j,k)} n! m!,$$

on

$$\delta_{(n,m)(j,k)} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = n \text{ i } k = m \\ 0 & \text{altres} \end{cases}$$

Reescrivim l'expressió (4.2) en aquests termes, i utilitzant la hipòtesis $F(z, z) = 0$, tenim:

$$0 = \frac{\partial^{n+m}}{\partial z^n \partial \bar{z}^m} F(z, z) \Big|_{z=0} = c_{(n,m)} n! m!,$$

Aleshores, $c_{n,m} = 0$ i $F(z, w) = 0$ per tot z i w en Ω .

□

Ja podem enunciar el teorema:

Teorema 4.4 (Rigidesa de Calabi). *Sigui Ω un obert simplement connex en $\mathbb{C}$ i siguin f i g dos GAFs. Si $\mathbb{E}(dn_f) = \mathbb{E}(dn_g)$, aleshores existeix una funció analítica determinista ψ en Ω tal que no s'anul·la en cap punt i per la qual $f \stackrel{d}{=} \psi g$. A més, $\mathcal{Z}_f \stackrel{d}{=} \mathcal{Z}_g$. En conclusió, la primera intensitat d'un GAF determina el seu conjunt de zeros.*

Demostració:

Suposem que $K_f(z, z), K_g(z, z) \neq 0$ en tot Ω . El cas general es fa de manera anàloga, amb alguna complicació tècnica afegida. Aplicant la fórmula d'Edelman-Kostlan a la primera intensitat de f i g tenim que

$$\frac{1}{4\pi} \Delta \log K_f(z, z) = \frac{1}{4\pi} \Delta \log K_g(z, z)$$

Així

$$\Delta(\log K_f(z, z) - \log K_g(z, z)) = 0,$$

o equivalentment

$$\Delta \log \left(\frac{K_f(z, z)}{K_g(z, z)} \right) = 0.$$

Així doncs, la funció

$$u(z) = \log \left(\frac{K_f(z, z)}{K_g(z, z)} \right)$$

és harmònica. Escrivim

$$K_f(z, z) = e^{u(z)} K_g(z, z). \quad (4.3)$$

Com Ω és un obert simplement connex, pel Lema de Poincaré 2.11, sabem que existeix $h \in H(\Omega)$ tal que $2\operatorname{Re}(h) = u$. Per tant,

$$e^{u(z)} = e^{2\operatorname{Re}(h(z))} = |e^{h(z)}|^2 = e^{h(z)} \overline{e^{h(z)}} = \psi(z) \overline{\psi(z)},$$

on $\psi = e^h$. Substituïm a (4.3)

$$K_f(z, z) = \psi(z) \overline{\psi(z)} K_g(z, z),$$

i pel Lema 4.3, necessàriament per tot $z, w \in \Omega$

$$K_f(z, w) = \psi(z) \overline{\psi(w)} K_g(z, w),$$

Això implica que $f \stackrel{d}{=} \psi g$. Com ψ és una funció exponencial, mai s'anul·la i per tant, $\mathcal{Z}_f \stackrel{d}{=} \mathcal{Z}_g$.

□

5 Variància

Finalment, veurem alguns resultats que mostren que aquest procés de punts que hem estudiat és molt més rígid que el procés de Poisson que hem vist al principi. Una manera de mesurar aquesta rigidesa és estudiar la variància de les variables comptadores $n_f(A) = \#(\mathcal{Z}(f) \cap A)$, per així, poder-la comparar amb la del procés de Poisson. Suposarem que $K(z, z) \neq 0$, que és el cas genèric i en la demostració del Teorema 3.1 ja s'ha tractat el cas contrari.

Primer recordar que, donat un obert $U \subseteq X$, tenim la variable comptadora

$$n_f(U) = \#(\mathcal{Z}(f) \cap U) = \int_U \frac{1}{2\pi} \Delta \log |f|$$

El teorema general en aquest capítol és:

Teorema 5.1. *Sigui $U \subseteq X$ un obert on ∂U és de classe $\mathcal{C}^1$. Sigui f un GAF i sigui $K(z, w)$ el seu nucli de covariància. Aleshores*

$$Var(n_f(U)) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\partial U} \int_{\partial U} \frac{1}{1-I} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{K(w, z)}{K(z, z)} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \left(\frac{K(z, w)}{K(w, w)} \right) d\bar{z} d\bar{w}, \quad (5.1)$$

$$\text{on} \quad I(z, w) = \frac{|K(z, w)|^2}{K(z, z)K(w, w)}$$

Observem que, com esperàvem, la variància només depèn del nucli de covariància.

Demostració:

Per definició,

$$Var(n_f(U)) = \mathbb{E}[(n_f(U) - \mathbb{E}(n_f(U)))^2] \quad (5.2)$$

Utilitzant la fórmula d'Edelman-Kostlan (4.1) :

$$\begin{aligned} n_f(U) - \mathbb{E}(n_f(U)) &= \int_U \frac{1}{2\pi} \Delta \log |f(z)| - \int_U \frac{1}{4\pi} \Delta \log K(z, z) \\ &= \int_U \frac{1}{2\pi} \Delta \log \frac{|f(z)|}{\sqrt{K(z, z)}}. \end{aligned}$$

Ara utilitzarem la fórmula de Green (2.6). Sigui Ω una regió oberta i U un obert tal que $\bar{U} \subseteq \Omega$ i de classe $\mathcal{C}^1$. Per $F \in \mathcal{C}^2(\Omega)$

$$\begin{aligned} \int_{\partial U} i \frac{\partial F}{\partial \bar{z}}(z) d\bar{z} &= 2i \int_U \left(0 - \frac{\partial}{\partial z} \left(i \frac{\partial F}{\partial \bar{z}}(z) \right) \right) dm(z) \\ &= 2 \int_U \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial \bar{z}}(z) dm(z) = \frac{1}{2} \int_U \Delta F(z) dm(z) \end{aligned}$$

Volem utilitzar aquest resultat a la funció $F(z) = \log \frac{|f(z)|}{\sqrt{K(z,z)}}$. Però $F \notin \mathcal{C}^2$ per culpa dels zeros de f . Com la probabilitat $\mathbb{P}[Z(f) \cap \partial U = \emptyset] = 1$, aleshores

$$\int_{\partial U} i \frac{\partial F}{\partial \bar{z}}(z) d\bar{z}$$

està ben definit quasi segurament. Però no és el cas de

$$\frac{1}{2} \int_U \Delta F(z) dm(z).$$

D'altra banda, si entenem aquesta integral en el sentit de les distribuciones, llavors sí que podem donar-li un sentit ja que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_U \Delta F(z) dm(z) &= \frac{1}{2} \int_U [\Delta \log |f(z)| - \frac{1}{2} \Delta \log K(z, z)] dm(z) \\ &= \pi \int_U \frac{1}{2\pi} \Delta \log |f(z)| - \pi \int_U \frac{1}{4\pi} \log \Delta K(z, z) dm(z) \\ &= \pi [n_f(U) - \mathbb{E}(n_f(U))]. \end{aligned}$$

Per tant utilitzant aquesta igualtat, escrivim

$$n_f(U) - \mathbb{E}(n_f(U)) = \frac{i}{\pi} \int_{\partial U} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \log \frac{|f(z)|}{\sqrt{K(z, z)}}.$$

Tal com hem fet per demostrar la fórmula d'Edelman-Kostlan, denotem la normalització del GAF com $\hat{f}(z) = \frac{f(z)}{\sqrt{K(z, z)}} \sim N_{\mathbb{C}}(0, 1)$. Aleshores,

$$\begin{aligned} Var(n_f(U)) &= \mathbb{E} \left[\int_{\partial U} \frac{i}{\pi} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \log \frac{|f(z)|}{\sqrt{K(z, z)}} \int_{\partial U} \frac{i}{\pi} \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \log \frac{|f(w)|}{\sqrt{K(w, w)}} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_{\partial U} \int_{\partial U} \left(\frac{i}{\pi} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \log |\hat{f}(z)| \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \log |\hat{f}(w)| \right] \end{aligned}$$

Com $\hat{f}(z)$ i $\hat{f}(w)$ segueixen una $N_{\mathbb{C}}(0, 1)$, aleshores el terme

$$\left(\frac{i}{\pi} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \log |\hat{f}(z)| \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \log |\hat{f}(w)|$$

és integrable a ∂U . Llavors, totes les condicions necessàries per aplicar el Teorema de Fubini es compleixen, per tant l'apliquem dues vegades:

$$Var(n_f(U)) = \int_{\partial U} \int_{\partial U} \mathbb{E} \left[\left(\frac{i}{\pi} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \log |\hat{f}(z)| \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \log |\hat{f}(w)| \right].$$

Com estem en un compacte on $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \log |\hat{f}(z)|$ és uniformament acotat a ∂U , aleshores pel Teorema de derivació sota el signe de la integral [5] podem intercanviar derivació i valor esperat:

$$Var(n_f(U)) = \int_{\partial U} \int_{\partial U} \left(\frac{i}{\pi} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \mathbb{E} [\log |\hat{f}(z)| \log |\hat{f}(w)|]. \quad (5.3)$$

Per calcular aquesta expressió farem servir el Lema 2.3:

En el nostre cas, tenim:

$$\theta(z, w) = \mathbb{E} \left[\hat{f}(z) \overline{\hat{f}(w)} \right] = \mathbb{E} \left[\frac{f(z)}{\sqrt{K(z, z)}} \frac{\overline{f(w)}}{\sqrt{K(w, w)}} \right] = \frac{K(z, w)}{\sqrt{K(z, z)} \sqrt{K(w, w)}}$$

Per simplificar-ho, denotem:

$$I(z, w) = |\theta(z, w)|^2 = \frac{|K(z, w)|^2}{K(z, z)K(w, w)} \quad (5.4)$$

Aleshores, si

$$Cov[\log \hat{f}(z), \log \hat{f}(w)] = \mathbb{E}[\log \hat{f}(z) \log \hat{f}(w)] - \mathbb{E}[\log \hat{f}(z)] \mathbb{E}[\log \hat{f}(w)],$$

com el segon terme és constant, tenim

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \mathbb{E}[\log |\hat{f}(z)| \log |\hat{f}(w)|] = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial \bar{w}} Cov[\log |\hat{f}(z)|, \log |\hat{f}(w)|]$$

Seguint pel punt (5.3), i fent servir el Lema 2.3, obtenim:

$$Var(n_f(U)) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial U} \int_{\partial U} \frac{\partial^2}{\partial \bar{z} \partial \bar{w}} Li_2(I(z, w)) d\bar{z} d\bar{w} \quad (5.5)$$

Ara recordem que

$$Li_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

per calcular $\frac{\partial^2}{\partial \bar{z} \partial \bar{w}} Li_2(I(z, w))$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \bar{z} \partial \bar{w}} Li_2(I(z, w)) &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[Li_2'(I(z, w)) \frac{\partial I}{\partial \bar{w}} \right] \\ &= Li_2''(I(z, w)) \frac{\partial I}{\partial \bar{z}} \frac{\partial I}{\partial \bar{w}} + Li_2'(I(z, w)) \frac{\partial^2 I}{\partial \bar{z} \partial \bar{w}}. \end{aligned}$$

Substituïm la sèrie que defineix Li_2

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \bar{z} \partial \bar{w}} Li_2(I(z, w)) &= \left(\sum_{m=2}^{\infty} \frac{m-1}{m} I^{m-2} \right) \frac{\partial I}{\partial \bar{z}} \frac{\partial I}{\partial \bar{w}} + \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{I^{m-1}}{m} \right) \frac{\partial^2 I}{\partial \bar{z} \partial \bar{w}} \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n+2} I^n \right) \frac{\partial I}{\partial \bar{z}} \frac{\partial I}{\partial \bar{w}} + \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{I^n}{n+1} \right) \frac{\partial^2 I}{\partial \bar{z} \partial \bar{w}} \end{aligned}$$

A continuació veiem que

$$\frac{\partial^2 I}{\partial \bar{z} \partial \bar{w}} = \frac{1}{I} \frac{\partial I}{\partial \bar{z}} \frac{\partial I}{\partial \bar{w}}$$

De (5.4) traiem que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial I}{\partial \bar{z}} &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[\frac{K(w, z)}{K(z, z)} \right] \frac{K(z, w)}{K(w, w)} \\ \frac{\partial I}{\partial \bar{w}} &= \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \left[\frac{K(z, w)}{K(w, w)} \right] \frac{K(w, z)}{K(z, z)}\end{aligned}$$

Aleshores,

$$\frac{\partial I}{\partial \bar{z}} \frac{\partial I}{\partial \bar{w}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[\frac{K(w, z)}{K(z, z)} \right] \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \left[\frac{K(z, w)}{K(w, w)} \right] \frac{K(z, w)K(w, z)}{K(w, w)K(z, z)} = \frac{\partial^2 I}{\partial \bar{z} \partial \bar{w}} I. \quad (5.6)$$

Si ho apliquem al resultat anterior ens queda

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial \bar{z} \partial \bar{w}} Li_2(I(z, w)) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n+2} I^n \right) \frac{\partial I}{\partial \bar{z}} \frac{\partial I}{\partial \bar{w}} + \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{I^n}{n+1} \right) \frac{1}{I} \frac{\partial I}{\partial \bar{z}} \frac{\partial I}{\partial \bar{w}} \\ &= \frac{1}{I} \frac{\partial I}{\partial \bar{z}} \frac{\partial I}{\partial \bar{w}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n+2} I^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} I^n \right) \\ &= \frac{1}{I} \frac{\partial I}{\partial \bar{z}} \frac{\partial I}{\partial \bar{w}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} I^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} I^n \right) \\ &= \frac{1}{I} \frac{\partial I}{\partial \bar{z}} \frac{\partial I}{\partial \bar{w}} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} I^n \right) = \frac{1}{I(1-I)} \frac{\partial I}{\partial \bar{z}} \frac{\partial I}{\partial \bar{w}}.\end{aligned}$$

Tornant a (5.5), obtenim:

$$Var(n_f(U)) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial U} \int_{\partial U} \frac{\partial^2}{\partial \bar{z} \partial \bar{w}} = \frac{1}{I(1-I)} \frac{\partial I}{\partial \bar{z}} \frac{\partial I}{\partial \bar{w}} d\bar{z} d\bar{w}.$$

Finalment, com hem calculat a (5.6):

$$\frac{1}{I} \frac{\partial I}{\partial \bar{z}} \frac{\partial I}{\partial \bar{w}} = \frac{\partial^2 I}{\partial \bar{z} \partial \bar{w}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{K(w, z)}{K(z, z)} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \left(\frac{K(z, w)}{K(w, w)} \right),$$

i substituint arribem al resultat desitjat:

$$Var(n_f(U)) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\partial U} \int_{\partial U} \frac{1}{1-I} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{K(w, z)}{K(z, z)} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \left(\frac{K(z, w)}{K(w, w)} \right) d\bar{z} d\bar{w}$$

□

5.1 Variància al pla

Ara podem aplicar aquesta fórmula general (5.1) al pla complex. Per simplificar-ho, considerem l'obert $U = \mathbb{D}(a, r)$, amb $r > 0$. Degut a la invariància per translacions de la primera intensitat $dv = L \frac{dm(z)}{\pi}$, la distribució de la variable $n_f(\mathbb{D})$ no depèn d' a , i podem escollir $a = 0$.

Utilitzant que $K(z, w) = e^{Lz\bar{w}}$ obtenim:

$$I(z, w) = \frac{K(z, w)K(w, z)}{K(z, z)K(w, w)} = \frac{e^{Lz\bar{w}}e^{Lw\bar{z}}}{e^{Lz\bar{z}}e^{Lw\bar{w}}} = e^{Lz(\bar{w}-\bar{z})}e^{Lw(\bar{z}-\bar{w})} = e^{-L|z-w|^2}.$$

Calculant les derivades de la fórmula (5.1) i substituint, arribem a

$$Var(n_f(U)) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\partial U} \int_{\partial U} \frac{1}{1 - e^{-L|z-w|^2}} e^{Lz\bar{w}} e^{L\bar{z}w} e^{-L|z|^2} e^{-L|w|^2} L^2 (z-w)^2 d\bar{z} d\bar{w}.$$

Parametrizant ∂U en l'angle, tenim

$$\begin{aligned} Var(n_f(U)) &= -\frac{L^2}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-Lr^2|e^{i\theta}-e^{i\psi}|^2}}{1 - e^{-Lr^2|e^{i\theta}-e^{i\psi}|^2}} r^2 (e^{i\theta} - e^{i\psi})^2 r e^{-i\theta} (-i) d\theta r e^{-i\psi} (-i) d\psi \\ &= \frac{L^2 r^4}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-Lr^2|1-e^{i(\psi-\theta)}|^2}}{1 - e^{-Lr^2|1-e^{i(\psi-\theta)}|^2}} e^{i(\theta-\psi)} (1 - e^{i(\psi-\theta)})^2 d\theta d\psi. \end{aligned}$$

Fem el canvi de variable $t = \psi - \theta$, tal que $\theta, \psi \in (0, \pi)$

$$Var(n_f(r)) = -\frac{L^2 r^4}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{e^{-Lr^2|1-e^{it}|^2}}{1 - e^{-Lr^2|1-e^{it}|^2}} e^{-it} (1 - e^{it})^2 dt \right\} d\theta$$

i sabent que $e^{-it}(1 - e^{it})^2 = -(2 - 2\cos t) = -2|1 - e^{it}|^2$ obtenim:

$$Var(n_f(r)) = \frac{L^2 r^4}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-Lr^2|1-e^{it}|^2}}{1 - e^{-Lr^2|1-e^{it}|^2}} |1 - e^{it}|^2 dt.$$

Aleshores per simetria,

$$Var(n_f(r)) = \frac{L^2 r^4}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{e^{-Lr^2|1-e^{it}|^2}}{1 - e^{-Lr^2|1-e^{it}|^2}} |1 - e^{it}|^2 dt.$$

Apliquem ara el canvi de variable $x = 2Lr^2(1 - \cos(t)) = Lr^2|1 - e^{it}|^2$. Aïllant t obtenim $t = \arccos(1 - \frac{x}{2Lr^2})$ i fent les derivades corresponents tenim

$$dt = \frac{\sqrt{Lr}}{2Lr^2} \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1 - x/(4Lr^2)}}.$$

Substituint a l'expressió d'abans ens queda:

$$\begin{aligned} Var(n_f(r)) &= \frac{L^2 r^4}{\pi} \int_0^{4Lr^2} \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} \frac{x}{Lr^2} \frac{\sqrt{Lr^2}}{2Lr^2} \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1 - x/(4Lr^2)}} \\ &= \frac{\sqrt{Lr^2}}{2\pi} \int_0^{4Lr^2} \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1 - x/(4Lr^2)}} dx. \end{aligned}$$

Si sabem que

$$\frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx},$$

obtenim

$$Var(n_f(r)) = \frac{\sqrt{Lr^2}}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{4Lr^2} e^{-nx} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x/(4Lr^2)}} dx.$$

Volem veure què passa quan $\mathbb{E}(n_f(r)) = Lr^2 \rightarrow \infty$.

Mirem primer quina és la part dominant de la integral:

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{4Lr^2} e^{-nx} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x/(4Lr^2)}} dx \\ &= \int_0^{4Lr^2} e^{-nx} \sqrt{x} dx + \int_0^{4Lr^2} e^{-nx} \left(\frac{1}{\sqrt{1-x/(4Lr^2)}} - 1 \right) \sqrt{x} dx \\ &= \int_0^{4Lr^2} e^{-nx} \sqrt{x} dx + \int_0^{4Lr^2} e^{-nx} \sqrt{x} \frac{1 - \sqrt{1-x/(4Lr^2)}}{\sqrt{1-x/(4Lr^2)}} dx \end{aligned}$$

Comprovem que la segona integral és $o(1)$ de la primera quan $Lr^2 \rightarrow \infty$. En general

$$1 - \sqrt{1-y} = \frac{(1 - \sqrt{1-y})(1 + \sqrt{1-y})}{1 + \sqrt{1-y}} = \frac{1 - (1-y)}{1 + \sqrt{1-y}} = \frac{y}{1 + \sqrt{1-y}}$$

Així

$$\begin{aligned} &\int_0^{4Lr^2} e^{-nx} \sqrt{x} \frac{1 - \sqrt{1-x/(4Lr^2)}}{\sqrt{1-x/(4Lr^2)}} dx \\ &= \int_0^{4Lr^2} e^{-nx} \sqrt{x} \frac{x/(4Lr^2)}{\sqrt{1-x/(4Lr^2)}(1 + \sqrt{1-x/(4Lr^2)})} dx \\ &\leq \frac{1}{4Lr^2} \int_0^{4Lr^2} \frac{e^{-nx} x^{3/2}}{\sqrt{1-x/(4Lr^2)}} dx \xrightarrow{Lr^2 \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

ja que

$$\int_0^{\infty} e^{-nx} x^{3/2} dx < +\infty.$$

Amb això,

$$I_n = \int_0^{4Lr^2} e^{-nx} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x/(4Lr^2)}} dx = \left(\int_0^{4Lr^2} e^{-nx} \sqrt{x} dx \right) (1 + o(1)).$$

Ara, posem

$$\int_0^{4Lr^2} e^{-nx} \sqrt{x} dx = \int_0^{\infty} e^{-nx} \sqrt{x} dx - \int_{4Lr^2}^{\infty} e^{-nx} \sqrt{x} dx.$$

Com que $\int_0^{\infty} e^{-nx} \sqrt{x} dx$ és una integral finita (convergent), la integral

$$\int_{4Lr^2}^{\infty} e^{-nx} \sqrt{x} dx \xrightarrow{Lr^2 \rightarrow \infty} 0.$$

Així, podem escriure

$$\int_0^{4Lr^2} e^{-nx} \sqrt{x} dx = \left(\int_0^\infty e^{-nx} \sqrt{x} dx \right) (1 + o(1)).$$

Substituint a la integral i fent el canvi de variable $nx = t$ ens dona

$$I_n = (1 + o(1)) \int_0^\infty e^{-nx} \sqrt{x} dx = (1 + o(1)) \int_0^\infty e^{-t} \sqrt{\frac{t}{n}} \frac{dt}{n}$$

Fent servir la definició de la funció Gamma

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \quad x > 0,$$

tenim

$$I_n = (1 + o(1)) \frac{\Gamma(3/2)}{n^{3/2}}.$$

Finalment ens queda que la variància és:

$$\begin{aligned} \text{Var}(n_f(r)) &= \frac{\sqrt{Lr^2}}{2\pi} \sum_{n=1}^\infty \frac{\Gamma(3/2)}{n^{3/2}} (1 + o(1)) = \frac{\sqrt{Lr^2}}{2\pi} \Gamma(3/2) \zeta(3/2) (1 + o(1)) \\ \text{on} \quad \zeta(x) &= \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^x}, \quad x > 1. \end{aligned}$$

Fent servir que $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$, tenim doncs

$$\text{Var}(n_f(r)) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \zeta(3/2) \sqrt{Lr^2} (1 + o(1)) \sim \sqrt{Lr^2}.$$

Tenint en compte que la variància de $n_f(r)$ en el procés de Poisson és exactament Lr^2 , veiem que aquest procés de punts associat als zeros de les funcions analítiques Gaussianes en el pla complex és més “rígid”, en el sentit en què la variància és d'ordre menor.

6 Conclusions

En conclusió, hem resolt els problemes inicials demostrant que el radi de convergència no depèn dels valors aleatoris i que la convergència uniforme simultània per a tot z es compleix sota certes condicions que les funcions analítiques Gaussiannes (GAFs) compleixen. Els resultats indiquen que les propietats probabilístiques d'aquestes funcions estan determinades pel nucli de covariància $K(z, w)$ i que les funcions són invariants sota certes transformacions, facilitant el càlcul dels seus zeros.

Aquesta invariància per translació, que em vist en el cas del pla complex, és especialment útil en el context de models amb repulsió, com el descrit en la introducció, on la distribució de partícules amb la mateixa càrrega crea una distribució uniforme degut a la repulsió entre partícules. Estudiant els zeros d'aquestes funcions, hem trobat que la primera intensitat està directament relacionada amb la variància. Aquesta relació ens proporciona un model matemàtic rigorós per descriure fenòmens de repulsió on la suposició d'independència entre punts no és vàlida, oferint una alternativa al procés de Poisson. A més, la rigidesa de Calabi ens permet concloure que GAFs amb la mateixa primera intensitat són iguals en distribució, millorant la precisió alhora de predir comportament complexos.

Finalment, hem observat que la distribució dels zeros dels GAFs presenta menys fluctuacions que el procés de Poisson, donant estabilitat i fiabilitat a aquest model per descriure fenòmens amb repulsió.

Referències

- [1] Azagra, R.: *Material de docencia*,
<https://www.mat.ucm.es/~dazagrar/docencia/cap11.pdf>, 2024.
- [2] Wikipedia contributors: *Identidades de Green*,
https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Identidades_de_Green&oldid=149025459, Wikipedia, la enciclopedia libre, 2023.
- [3] Correll, N.: *Combinaciones lineales de variables aleatorias gaussianas independientes*,
[https://espanol.libretexts.org/Ingenieria/Ingenier%C3%ADa_Mec%C3%A1nica/Introducci%C3%B3n_a_los_Robots_Aut%C3%B3nomos_\(Correll\)/15%3A_Estad%C3%ADsticas/15.04%3A_Combinaciones_lineales_de_variables_aleatorias_gaussianas_independientes](https://espanol.libretexts.org/Ingenieria/Ingenier%C3%ADa_Mec%C3%A1nica/Introducci%C3%B3n_a_los_Robots_Aut%C3%B3nomos_(Correll)/15%3A_Estad%C3%ADsticas/15.04%3A_Combinaciones_lineales_de_variables_aleatorias_gaussianas_independientes), LibreTexts, 2024.
- [4] Maximenko, E.: *Análisis de núcleos*,
https://esfm.egormaximenko.com/analysis/kernels_es.pdf, 2023.
- [5] Hernández-Coronado, E. R.: *Derivación de Integrales*,
https://sistemas.fciencias.unam.mx/~erhc/calculo4_2015_1/derivacion_de_integrales.pdf.
- [6] Peres, Y.: *Game-theoretic Analysis of Voting in Committees*,
https://web.archive.org/web/20120310052153id_/http://research.microsoft.com/en-us/um/people/peres/GAF_book.pdf, 2012.
- [7] Ransford, Thomas: *Potential Theory in the Complex Plane*, Press Syndicate of the University of Cambridge, Cambridge [England] ; New York, 1995.
- [8] Sodin, Mikhail: *Zeros of Gaussian Analytic Functions*, Mathematical Research Letters, Vol. 7, 2000.
- [9] Hough, J. Ben; Krishnapur, Manjunath; Peres, Yuval; Virág, Bálint: *Zeros of Gaussian Analytic Functions and Determinantal Point Processes*, HBK Capital Management, New York, NY; Indian Institute of Science, Bangalore, India; Microsoft Research, Redmond, WA; University of Toronto, Toronto, ON, Canada, Volume 51, 2009, 154 pp.
- [10] Kabluchko, Zakhar; Zaporozhets, Dmitry: *Universality for Zeros of Random Analytic Functions*, 2012.
- [11] Morera, F.: *Apuntes de Teoría de Funciones I*, Universidad de Granada, 2016. Disponible en: <https://www.ugr.es/~rpaya/documentos/VariableCompleja/2016-17/Morera.pdf>.
- [12] Pye, C. D.: *Función Gamma*, Universidad de Granada, [Fecha de acceso], Disponible en: https://www.ugr.es/~cdpye/CursoProbabilidad/pdf/P_T05_FuncionGamma.pdf.

- [13] Berrendero, J. R.: *Apuntes de Probabilidad II*, Universidad Autónoma de Madrid, 2019. Disponible en: <https://verso.mat.uam.es/~joser.berrendero/cursos/Matematicas-prob2/pr2-tema7-19.pdf>.
- [14] Payá, R.: *Armonicas*, Universidad de Granada, 2014. Disponible en: <https://www.ugr.es/~rpaya/documentos/VariableCompleja/2014-15/Armonicas.pdf>.
- [15] Chong, J.: *Métodos Complejos para las Ciencias: Las ecuaciones de Cauchy-Riemann*, LibreTexts, Disponible en: [https://espanol.libretexts.org/Fisica/F%C3%ADsica_Matem%C3%A1tica_y_Pedagog%C3%ADa/M%C3%A9todos_Complejos_para_las_Ciencias_\(Chong\)/07%3A_Derivados_complejos/7.03%3A_Las_ecuaciones_de_Cauchy-Riemann](https://espanol.libretexts.org/Fisica/F%C3%ADsica_Matem%C3%A1tica_y_Pedagog%C3%ADa/M%C3%A9todos_Complejos_para_las_Ciencias_(Chong)/07%3A_Derivados_complejos/7.03%3A_Las_ecuaciones_de_Cauchy-Riemann).