Universitat de Barcelona

Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

# Matrius de Jacobi i Equacions en diferències

**Autora:** Paula Falcón González

**Directores:** Dra. M. José Jiménez Jiménez, Dra. M. Eulàlia Montoro López

**Realitzat a:** Departament de Matemàtiques i Informàtica

**Barcelona,** 10 de juny de 2024

## Abstract

This document explores the Jacobi matrices topic and their invertibility, as well as second-order difference equations with both variable and constant coefficients. These two subjects are linked by the fact that solving a difference equation can aid in determining the inverse of a Jacobi matrix. This document offers an alternative method for inverting Jacobi matrices, highlighting the significance of difference equations in this area.



## Resum

Aquest document estudia les matrius de Jacobi i la seva invertibilitat, així com les equacions en diferències de segon ordre tant en coeficients variables com constants. Ambdues estan vinculades pel fet que la inversa d'una matriu de Jacobi es pot trobar resolent una equació en diferències. En aquest document s'ofereix un mètode alternatiu per invertir matrius de Jacobi, destacant la importància de les equacions en diferències en aquest àmbit.



2020 Mathematics Subject Classification. 47B36, 39A06, 39A60

## Agraïments

El treball de fi de grau marca el final d'una etapa molt important per mi, i vull agrair a tots els qui han estat amb mi en aquest camí.

Vull expressar el meu sincer agraïment a les Dres. M. José Jiménez i M. Eulàlia Montoro, les meves tutores en aquest treball, per la seva dedicació i suport durant el procés de desenvolupament. La seva orientació i el seu compromís han estat essencials per a l'èxit d'aquest projecte.

Als meus pares, Santiago i Victòria, pel suport incondicional i per creure sempre en mi.

A la meva àvia, Lola, per estar sempre al meu costat i estimar-me tant.

Als meus amics i amigues, per recolzar-me sempre en els moments importants.

I al Jordi, sense ell, no hauria arribat fins aquí.

# Índex

# Capítol 1

# Introducció

La motivació principal d'aquest treball de fi de grau és introduir i analitzar les matrius de Jacobi, centrant-nos especialment en la seva invertibilitat. Ens proposem trobar la inversa d'aquestes matrius i examinar-ne les propietats. Abordant aquest problema, ens adonem que resoldre la inversa de les matrius de Jacobi és equivalent a resoldre una equació en diferències de segon ordre amb coeficients variables. Aquesta observació ens introdueix a l'estudi de les equacions en diferències. Es tracta d'un camp que, tot i rebre certa atenció actualment tal com demostra l'article [1] recentment publicat a Special Matrices, encara no presenta una metodologia estructurada i universal per a la seva resolució.

A continuació, trobarem un sumari de cada part del nostre estudi, el qual hem dividit en tres capítols diferents.

En el segon capítol, definirem les matrius de Jacobi, distingint els casos en què aquestes són simètriques i no simètriques. També estudiarem la seva invertibilitat. A més, en el cas de les matrius simètriques, analitzarem les propietats dels seus valors propis i els de les seves submatrius principals. Finalment, farem una concisa introducció sobre les matrius de Toeplitz.

En el tercer capítol, farem una breu exposició dels polinomis ortogonals, centrant-nos en un dels exemples més coneguts, els polinomis de Txebixov.

En el quart capítol, introduirem les equacions en diferències de segon ordre amb coeficients variables. Estudiarem la seva definició, propietats i les condicions que garanteixen l'existència i la unicitat de les seves solucions. Analitzarem la base de l'espai de solucions de l'equació homogènia i les seves propietats. Així, demostrarem que trobant dues solucions linealment independents de l'equació homogènia, podem obtenir la solució homogènia i, mitjançant la funció de Green, la solució particular.

No obstant això, reconeixerem que trobar aquesta base no és una tasca senzilla. Per tant, en l'abast d'aquest treball, plantejarem la mateixa estructura que hem trobat en el cas dels coeficients variables, centrant-nos ara en un cas més senzill amb coeficients constants. Així doncs, la relació que havíem esmentat abans amb les matrius de Jacobi implica que en aquest cas també ha de complir les condicions d'una matriu de Toeplitz.

Continuarem explicant el funcionament de la resolució estàndard que s'utilitza habitualment, basat en l'equació característica associada. A més, presentarem una altra via de resolució que no depèn de trobar les arrels d'una equació característica ni tampoc del tipus d'aquestes arrels. Finalment, definirem la relació entre les solucions d'una equació en diferències amb coeficients constants i la seva corresponent autoadjunta, i demostrarem que els polinomis de Txebixov són els vectors de la base de la solució homogènia.

# Capítol 2

# Preliminars

## 2.1 Notació

En primer lloc, establirem algunes notacions i terminologia que es faran servir al llarg del treball.

Sigui $\mathbb{K}$ un cos arbitrari. Sovint assumirem que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

- $\mathbb{K}[x]$ denota l'anell de polinomis en una variable amb coeficients a $\mathbb{K}$.
- $\mathbb{K}^{n\times m}$ denota el conjunt de les matrius de $n$ files i $m$ columnes amb coeficients a $\mathbb{K}$.
- La matriu $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$ amb elements $a_{ij}$ s'escriu com $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq m}$. És a dir,
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times m}.$$
- Sigui $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $\det(A)$ denota el determinant de la matriu quadrada $A$. Aleshores $A$ és singular $\Leftrightarrow \det(A) = 0$.
- Sigui $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$, $A^t$ representa la matriu transposada de $A$. Aleshores, $A$ és simètrica $\Leftrightarrow A^t = A$.
- $I \in \mathbb{K}^{n\times n}$ representa la matriu identitat.
- Sigui $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$ i $k \leq \min(n, m)$, $A_k$ denota la submatriu principal d'ordre $k$ de la matriu $A$. És a dir,
$$A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2k} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{k\times k}.$$

- Sigui $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$ i $k \leq \min(n,m)$, $\theta_k$ denota el menor principal d'ordre $k$ de la matriu $A$. És a dir,

$$\theta_k = \det(A_k) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2k} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}.$$

- Sigui $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$ i $k \leq \min(n,m)$, $P_k^c(x) \in \mathbb{K}[x]$ denota el polinomi característic de $A_k$. És a dir,
$$P_k^c(x) = \det(A_k - xI).$$
A més, diem que $x_0$ és un valor propi de $A_k \Leftrightarrow P_k^c(x_0) = 0$.

- Sigui $p(x) \in \mathbb{K}[x]$, $\deg(p(x))$ denota el grau de $p(x)$.

- Siguin $p(x), q(x) \in \mathbb{K}[x]$. Aleshores, $\langle p(x), q(x)\rangle$ denota el producte escalar de $p(x)$ i $q(x)$.

- Sigui $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ i $p(x) \neq 0$, aleshores $\|p(x)\| = \sqrt{\langle p(x), p(x)\rangle}$.

- Sigui $p(x) \in \mathbb{K}[x]$, aleshores $\frac{d}{dx}(p(x))$ denota la derivada respecte de $x$ de $p(x)$.

- Sigui $x_0 \in \mathbb{K}$, aleshores denotem $x_0^-$ com el límit a $x_0$ per l'esquerre i $x_0^+$ com el límit a $x_0$ per la dreta. És a dir,

$$x_0^- = \lim_{x\to x_0^-} x, \qquad x_0^+ = \lim_{x\to x_0^+} x.$$

- Sigui $I = \mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ o $\{0,\dots,n+1\}$. Conseqüentment
  - Si $I = \mathbb{Z}$ o $\mathbb{N}$, llavors $\mathring{I} = I$.
  - Si $I = \{0,\dots,n+1\}$, aleshores $\mathring{I} = \{1,\dots,n\}$ i $\delta(I) = \{0, n+1\}$.

- Sigui $I = \mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ o $\{0,\dots,n+1\}$, $\mathcal{C}(I)$ denota l'espai vectorial de les funcions amb valors a $\mathbb{R}$ i variable a $I$. És a dir,

$$\mathcal{C}(I) = \{f : I \to \mathbb{R}\}.$$

## 2.2 Matrius de Jacobi

El terme "matriu de Jacobi"prové del teorema formulat pel matemàtic alemany Carl Gustav Jakob Jacobi l'any 1848. Aquest teorema estableix que tota matriu simètrica sobre un domini d'ideals principals pot ser transformada, mitjançant una congruència, en una matriu tridiagonal.
Les matrius tridiagonals s'utilitzen en diverses àrees de les matemàtiques aplicades, la física i l'enginyeria. Una de les seves aplicacions més comunes és en l'anàlisi d'errors de les solucions de problemes de valor de frontera de dos punts, associats a equacions diferencials ordinàries que utilitzen mètodes de diferències finites [2].

**Definició 2.2.1.** ([2]) *Una matriu de Jacobi és una matriu tridiagonal de la forma*

$$J = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & \\ & a_3 & b_3 & c_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & a_n & b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}. \tag{2.2.1}$$

**Exemple 2.2.2.**

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}$$

és una matriu de Jacobi.

**Definició 2.2.3.** *Sigui $J \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriu de Jacobi. Denotem per $\{\theta_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathbb{R}$ la successió de menors principals de $J$. És a dir,*

$$\theta_1 = b_1, \quad \theta_2 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \theta_3 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \quad \ldots \quad , \theta_n = \det(J). \tag{2.2.2}$$

Emprant la Regla de Laplace [8], una eina que simplifica el càlcul de determinants en matrius de dimensions elevades, arribem al següent resultat.

**Proposició 2.2.4.** ([2]) *La successió $\{\theta_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathbb{R}$ definida a (2.2.2) satisfà la relació de recurrència de tres termes*

$$\theta_i = b_i\theta_{i-1} - a_i c_{i-1}\theta_{i-2}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.2.3}$$

*on*

$$\theta_{-1} = 0, \quad \theta_0 = 1.$$

**Lema 2.2.5.** ([2]) *Considerem $\{\theta_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathbb{R}$ la successió definida a (2.2.2). Si dos termes consecutius d'aquesta successió són zero, llavors la matriu $J$ és singular.*

**Demostració 2.2.6.** La demostració resulta immediata de la relació de recurrència descrita a (2.2.3). □

A partir d'aquest moment, assumim que la matriu de Jacobi $J \in \mathbb{R}^{n\times n}$, definida per l'equació (2.2.1), és no singular. Seguidament, definirem una altra successió amb l'objectiu de determinar les expressions dels elements de la seva matriu inversa a les seccions 2.2.1, quan $J$ no és simètrica, i a la 2.2.2, si $J$ és simètrica.

**Definició 2.2.7.** ([2]) *La successió* $\{\phi_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathbb{R}$ *és definida com*

$$\phi_i = b_i\phi_{i+1} - a_{i+1}c_i\phi_{i+2}, \quad i = n, n-1, \dots, 1, \tag{2.2.4}$$

*on*

$$\phi_{n+1} = 1, \quad \phi_{n+2} = 0.$$

**Lema 2.2.8.** ([2]) *Siguin* $\{\theta_i\}_{i=1}^n$, $\{\phi_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathbb{R}$ *les successions definides a* (2.2.2) *i* (2.2.4), *respectivament. Es compleix que,*

$$\theta_k\phi_{k+1} - a_{k+1}c_k\theta_{k-1}\phi_{k+2} = \theta_n, \quad k = n, n-1, \dots, 1. \tag{2.2.5}$$

**Demostració 2.2.9.** Utilitzarem inducció sobre $k$.

- Cas inicial, $k = n$:

$$\theta_n\phi_{n+1} - a_{n+1}c_n\theta_{n-1}\phi_{n+2} = \theta_n \cdot 1 - a_{n+1}c_n\theta_{n-1} \cdot 0 = \theta_n. \tag{2.2.6}$$

- Pas inductiu: Suposem que l'equació (2.2.5) se satisfà per $k = n, n-1, \dots, i$, aleshores provem que és cert per $k = i-1$.

$$\begin{aligned}
\theta_{i-1}\phi_i - a_ic_{i-1}\theta_{i-2}\phi_{i+1} &= \theta_{i-1}\phi_i - (b_i\theta_{i-1} - \theta_i)\phi_{i+1}, \quad \text{per (2.2.3)},\\
&= \theta_{i-1}\phi_i - b_i\theta_{i-1}\phi_{i+1} + \theta_i\phi_{i+1},\\
&= \theta_{i-1}\phi_i - b_i\theta_{i-1}\phi_{i+1} + a_{i+1}c_i\theta_{i-1}\phi_{i+2} + \theta_n, \quad \text{per (2.2.6)},\\
&= \theta_{i-1}\phi_i - \theta_{i-1}(b_i\phi_{i+1} - a_{i+1}c_i\phi_{i+2}) + \theta_n,\\
&= \theta_{i-1}\phi_i - \theta_{i-1}\phi_i + \theta_n,\\
&= \theta_n.
\end{aligned}$$

$\square$

### 2.2.1 Cas no simètric

En aquesta secció, considerarem una matriu de Jacobi $J \in \mathbb{R}^{n\times n}$ no simètrica. L'objectiu és calcular la seva inversa $J^{-1} = (\alpha_{ij})_{1\le i,j\le n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

**Exemple 2.2.10.**

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}$$

és una matriu de Jacobi no simètrica.

Prèviament, és necessari demostrar alguns resultats previs que ens conduiran a la nostra conclusió final.

**Lema 2.2.11.** ([2]) *Sigui $J \in \mathbb{R}^{n\times n}$, una matriu de Jacobi no simètrica, i sigui $J^{-1} = (\alpha_{ij})_{1\le i,j\le n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la seva inversa. Aleshores,*

$$\alpha_{1j} = \left(\prod_{k=1}^{j-1} \frac{c_k}{a_{k+1}}\right) \alpha_{j1}, \quad j = 2,3,\dots,n. \tag{2.2.7}$$

**Demostració 2.2.12.** Primerament, tenim que $J^{-1}J = I$, on $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és la matriu identitat. Així doncs, en multiplicar la primera fila de $J^{-1}$ per les columnes de $J$, obtenim

$$c_{p-1}\alpha_{1,p-1} + b_p\alpha_{1p} + a_{p+1}\alpha_{1,p+1} = \begin{cases} 1, & p = 1, \\ 0, & p = 2,3,\dots,n, \end{cases} \tag{2.2.8}$$

on

$$\alpha_{10} = 0, \quad \alpha_{1,n+1} = 0.$$

A partir de l'equació (2.2.8), deduïm que

$$\alpha_{1j} = (-1)^{j+1} c_1 c_2 \cdots c_{j-1} \frac{\phi_{j+1}}{\theta_n}, \quad j = 2,3,\dots,n. \tag{2.2.9}$$

De manera anàloga, multiplicant les files de $J$ per la primera columna de $J^{-1}$,

$$a_p\alpha_{p-1,1} + b_p\alpha_{p1} + c_p\alpha_{p+1,1} = \begin{cases} 1, & p = 1, \\ 0, & p = 2,3,\dots,n, \end{cases} \tag{2.2.10}$$

on

$$\alpha_{01} = 0, \quad \alpha_{n+1,1} = 0.$$

A partir de l'equació (2.2.10) deduïm que

$$\alpha_{j1} = (-1)^{j+1} a_2 a_3 \cdots a_j \frac{\phi_{j+1}}{\theta_n}, \quad j = 2,3,\dots,n. \tag{2.2.11}$$

Segons les expressions dels termes $\alpha_{1j}$ i $\alpha_{j1}$ definits a (2.2.9) i (2.2.11) respectivament, concloem que

$$\frac{\alpha_{1j}}{\alpha_{j1}} = \frac{c_1 c_2 \cdots c_{j-1}}{a_2 a_3 \cdots a_j} = \prod_{k=1}^{j-1} \frac{c_k}{a_{k+1}}.$$

A partir de la qual es dedueix el resultat. $\square$

**Lema 2.2.13.** ([2]) *Sigui $J \in \mathbb{R}^{n\times n}$, una matriu de Jacobi no simètrica, i sigui $J^{-1} = (\alpha_{ij})_{1\le i,j\le n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la seva inversa. Si $i < j$,*

$$\alpha_{ij} = \left(\prod_{k=i}^{j-1} \frac{c_k}{a_{k+1}}\right) \alpha_{ji}.$$

**Demostració 2.2.14.** En primer lloc, tenim que $J^{-1}J = I$, on $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és la matriu identitat. Multiplicant les files de $J$ per la columna *j-èssima* de $J^{-1}$

$$a_i\alpha_{i-1,j} + b_i\alpha_{ij} + c_i\alpha_{i+1,j} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, j-1, \tag{2.2.12}$$

on

$$\alpha_{0j} = 0.$$

Segons l'equació (2.2.12), deduïm que

$$\alpha_{ij} = \frac{(-1)^{i-1}\theta_{i-1}\alpha_{1j}}{c_1c_2\cdots c_{i-1}}, \quad i = 1, 2, \dots, j-1. \tag{2.2.13}$$

Anàlogament, multiplicant la fila *j-èssima* de $J^{-1}$ per les columnes de $J$

$$c_{i-1}\alpha_{j,i-1} + b_i\alpha_{ji} + a_{i+1}\alpha_{j,i+1} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, j-1. \tag{2.2.14}$$

Aleshores, la solució de l'equació (2.2.14) és expressada per

$$\alpha_{ji} = \frac{(-1)^{i-1}\theta_{i-1}\alpha_{j1}}{a_2a_3\cdots a_i}, \quad i = 1, 2, \dots, j-1. \tag{2.2.15}$$

Tenint en compte les expressions dels termes $\alpha_{ij}$ i $\alpha_{ji}$ definits a (2.2.13) i (2.2.15), respectivament, tenim que si $i < j$

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha_{ij}}{\alpha_{ji}} &= \frac{a_2a_3\cdots a_i}{c_1c_2\cdots c_{i-1}} \cdot \frac{\alpha_{1j}}{\alpha_{j1}}, \\
&= \frac{a_2a_3\cdots a_i}{c_1c_2\cdots c_{i-1}} \cdot \frac{c_1c_2\cdots c_{j-1}}{a_2a_3\cdots a_j}, \quad \text{pel Lema 2.2.11,} \\
&= \frac{c_ic_{i+1}\cdots c_{j-1}}{a_{i+1}a_{i+2}\cdots a_j} = \prod_{k=i}^{j-1} \frac{c_k}{a_{k+1}}.
\end{aligned}$$

□

Finalment, arribem al següent teorema, el qual, donada una matriu de Jacobi $J \in \mathbb{R}^{n\times n}$ no simètrica ens dona les expressions dels coeficients de la seva matriu inversa, $J^{-1} = (\alpha_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

**Teorema 2.2.15.** ([2]) *Sigui $J \in \mathbb{R}^{n\times n}$, una matriu de Jacobi no simètrica, i sigui $J^{-1} = (\alpha_{ij})_{1\le i,j\le n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la seva inversa. Si $i \ge j$ i $a_i \ne 0$ $\forall i = 1, 2, \dots, n$,*

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} (-1)^{i+j} a_{j+1}a_{j+2}\cdots a_i \frac{\theta_{j-1}\phi_{i+1}}{\theta_n}, & j = 1, 2, \dots, i-1, \\ \frac{\theta_{i-1}\phi_{i+1}}{\theta_n}, & j = i. \end{cases}$$

A continuació, presentem un exemple del càlcul de la matriu inversa d'una matriu de Jacobi no simètrica utilitzant els resultats obtinguts anteriorment.

**Exemple 2.2.16.** ([2]) Considerem la següent matriu de Jacobi no simètrica

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 6 & 7 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}. \tag{2.2.16}$$

Volem calcular la seva matriu inversa $J^{-1} = (\alpha_{ij})_{1\le i,j\le 3} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Utilitzant les definicions de les successions $\{\theta_i\}_{i=1}^{3}$, $\{\phi_i\}_{i=1}^{3} \subseteq \mathbb{R}$ descrites a (2.2.2) i (2.2.4) respectivament, veiem que

- $\theta_{-1} = 0, \quad \theta_0 = 1, \quad \theta_1 = 2, \quad \theta_2 = 9, \quad \theta_3 = -11,$
- $\phi_1 = -2, \quad \phi_2 = 2, \quad \phi_3 = 5, \quad \phi_4 = 1, \quad \phi_5 = 0.$

Utilitzant el Teorema 2.2.15, podem calcular l'última fila de $J^{-1}$. És a dir,

$$\alpha_{31} = (-1)^4 a_2 a_3 \frac{\theta_0\phi_4}{\theta_3} = \frac{1\cdot 4\cdot 1}{-11} = -\frac{4}{11},$$
$$\alpha_{32} = (-1)^5 a_3 \frac{\theta_1\phi_4}{\theta_3} = -\frac{4\cdot 2\cdot 1}{-11} = \frac{8}{11},$$
$$\alpha_{33} = \frac{\theta_2\phi_4}{\theta_3} = \frac{9\cdot 1}{-11} = -\frac{9}{11}.$$

Aplicant el Lema 2.2.13, calculem els elements restants de $J^{-1}$.

$$\alpha_{13} = \left(\prod_{k=1}^{2} \frac{c_k}{a_{k+1}}\right)\alpha_{31} = \frac{c_1c_2}{a_2a_3}\alpha_{31} = \frac{3\cdot 7}{1\cdot 4}\cdot\left(\frac{-4}{11}\right) = -\frac{21}{11},$$
$$\alpha_{23} = \left(\prod_{k=2}^{2} \frac{c_k}{a_{k+1}}\right)\alpha_{32} = \frac{c_2}{c_3}\alpha_{32} = \frac{7}{4}\left(\frac{8}{11}\right) = \frac{14}{11}.$$

Novament, segons el Teorema 2.2.15,

$$\alpha_{21} = (-1)^3 a_2 \frac{\theta_0\phi_3}{\theta_3} = \frac{-1\cdot 1\cdot 5}{-11} = \frac{5}{11},$$
$$\alpha_{22} = \frac{\theta_1\phi_3}{\theta_3} = \frac{2\cdot 5}{-11} = -\frac{10}{11}.$$

Ara, a partir del Lema 2.2.13,

$$\alpha_{12} = \left(\prod_{k=1}^{1} \frac{c_k}{a_{k+1}}\right)\alpha_{21} = \frac{c_1}{a_2}\alpha_{21} = \frac{3}{1}\left(\frac{5}{11}\right) = \frac{15}{11}.$$

En darrer terme, usant el Teorema 2.2.15,

$$\alpha_{11} = \frac{\theta_0\phi_2}{\theta_3} = \frac{1\cdot 2}{-11} = -\frac{2}{11}.$$

En conclusió, la matriu inversa de $J \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ definida a (2.2.16) és

$$J^{-1} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -2 & 15 & -21 \\ 5 & -10 & 14 \\ -4 & 8 & -9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

### 2.2.2 Cas simètric

En aquesta secció, considerarem una matriu de Jacobi $J \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simètrica. En primer lloc, estudiarem les propietats dels valors propis de $J$ i de les seves submatrius principals $J_k$. Posteriorment, analitzarem com calcular la seva matriu inversa. Aquest estudi ens permetrà obtenir una comprensió més profunda de les característiques de les matrius de Jacobi simètriques.

**Definició 2.2.17.** *Una matriu de Jacobi*

$$J = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & \\ & a_3 & b_3 & c_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & a_n & b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n} \tag{2.2.17}$$

*és simètrica si es compleix que*

$$a_i = c_{i-1}, \quad i = 2, 3 \dots, n.$$

*És a dir,*

$$J = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & & \\ c_1 & b_2 & c_2 & & & \\ & c_2 & b_3 & c_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & c_{n-2} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & c_{n-1} & b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}. \tag{2.2.18}$$

**Definició 2.2.18.** *Sigui $J \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriu de Jacobi simètrica. Denotem per $\{P_k^c(x)\}_{k=0}^n \subseteq \mathbb{R}[x]$ la successió de polinomis característics de les matrius $J_k$. És a dir,*

$$P_1^c(x) = b_1, \quad P_2^c(x) = \begin{vmatrix} b_1 - x & c_1 \\ c_1 & b_2 - x \end{vmatrix}, \quad \dots \quad , P_n^c(x) = \det(J - xI), \tag{2.2.19}$$

*on*

$$P_0^c(x) = 1.$$

**Observació 2.2.19.** Sigui $\{P_k^c(x)\}_{k=0}^n \subseteq \mathbb{R}[x]$ la successió definida a (2.2.19). Aleshores, $\forall k = 1, 2, \dots, n$, els zeros de $P_k^c(x)$ són reals, ja que és el polinomi característic d'una matriu simètrica.

**Exemple 2.2.20.** Considerem la següent matriu de Jacobi simètrica

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 7 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 9 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

Utilitzant la definició de la successió $\{P_k^c(x)\}_{k=0}^n \subseteq \mathbb{R}[x]$ descrita a (2.2.19), tenim

$$P_0^c(x) = 1, \quad P_1^c(x) = 2 - x, \quad P_2^c(x) = x^2 - 5x + 5, \quad P_3^c(x) = -x^3 + 9x^2 + 24x - 78,$$
$$P_4^c(x) = x^4 - 14x^3 - 60x^2 + 603x - 795.$$

Ara, aplicant la Regla de Laplace [8], obtenim el següent resultat.

**Proposició 2.2.21.** [3]) *La successió* $\{P_k^c(x)\}_{k=0}^n \subseteq \mathbb{R}[x]$ *definida a* (2.2.19) *satisfà la relació de recurrència de tres termes*

$$P_{k+1}^c(x) = (b_{k+1} - x)P_k^c(x) - c_k^2 P_{k-1}^c(x), \quad k = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{2.2.20}$$

Ara presentarem una definició que ens servirà per a estudiar els valors propis de $J$ i de les seves submatrius principals $J_k$.

**Definició 2.2.22.** ([3]) *Una successió* $\{P_k(x)\}_{k=0}^n \subseteq \mathbb{R}[x]$ *és una successió de Sturm si compleix les següents condicions:*

*(a)* $\deg(P_0(x)) \geq \deg(P_1(x)) \geq \cdots \geq \deg(P_n(x))$,

*(b) Si* $\exists k \in \{1, \ldots, n-1\}$ *i* $x_0 \in \mathbb{R}$ *tal que* $P_k(x_0) = 0$, *llavors* $P_{k+1}(x_0)P_{k-1}(x_0) < 0$.

**Observació 2.2.23.** La segona condició de la Definició 2.2.22 implica que dos polinomis consecutius no tenen cap arrel real comuna.

**Teorema 2.2.24.** ([3]) *La successió* $\{P_k^c(x)\}_{k=0}^n \subseteq \mathbb{R}[x]$ *definida a* (2.2.19) *és una successió de Sturm.*

**Demostració 2.2.25.**

(a) Resulta immediata de la relació de recurrència definida a (2.2.20).

(b) Ho provarem per reducció a l'absurd. Suposem que $\exists k \in \{1, \ldots, n-1\}$ i $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $P_k^c(x_0) = 0$ i $P_{k+1}^c(x_0) = 0$. A conseqüència de la relació de recurrència definida a (2.2.20), tenim $P_{k-1}^c(x_0) = 0$. Recursivament, arribem a $P_1^c(x_0) = 0$ i $P_0^c(x_0) = 0$. No obstant això, per la Definició 2.2.19, $P_0^c(x_0) = 1$ el que ens porta a contradicció. A més,

$$\begin{aligned} P_{k+1}^c(x_0)P_{k-1}^c(x_0) &= (b_{k+1} - x_0)P_{k-1}^c(x_0)P_k^c(x_0) - c_k^2(P_{k-1}^c(x_0))^2, \quad \text{per (2.2.20)}, \\ &= (b_{k+1} - x_0)P_{k-1}^c(x_0) \cdot 0 - c_k^2(P_{k-1}^c(x_0))^2, \\ &= -c_k^2(P_{k-1}^c(x_0))^2 < 0. \end{aligned}$$

□

Abans de continuar amb els següents resultats, és necessari definir la funció de canvi de signe $s_k(x)$.

**Definició 2.2.26.** ([3]) *Sigui* $\{P_k^c(x)\}_{k=0}^n \subseteq \mathbb{R}[x]$ *la successió definida a* (2.2.19). *Donat* $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, *anomenem funció de canvi de signe a la funció*

$$s_k : \mathbb{R} \to \mathbb{N} \cup \{0\}, \tag{2.2.21}$$

*tal que* $\forall x \in \mathbb{R}$

$$s_k(x) = \textit{nombre de canvis de signe acumulats en la seqüència } P_0^c(x), \ldots, P_k^c(x).$$

Tot seguit, presentarem un exemple per il·lustrar el funcionament de la funció de canvi de signe.

**Exemple 2.2.27.** Considerem la següent matriu de Jacobi simètrica

$$J = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

Ara, apliquem la definició de la successió de polinomis $\{P_k^c(x)\}_{k=0}^3 \subseteq \mathbb{R}[x]$, que s'ha definit a (2.2.19). Aquesta successió és la següent

$$P_0^c(x) = 1, \quad P_1^c(x) = 2 - x, \quad P_2^c(x) = x^2 - 5x + 5, \quad P_3^c(x) = -x^3 + 9x^2 - 21x + 12.$$

En primer lloc, considerarem el cas en què $x = 0$ per determinar el valor de la funció de canvi de signe en aquest punt per als diferents valors de $k \in \{1, 2, 3\}$. Primer, trobem els valors dels polinomis en aquest punt

$$P_0^c(0) = 1, \quad P_1^c(0) = 2, \quad P_2^c(0) = 5, \quad P_3^c(0) = 12.$$

Com podem observar, no hi ha cap canvi de signe; així,

$$s_k(0) = 0, \quad k = 1, 2, 3.$$

Ara considerem $x = 3$ i avaluem els polinomis en aquest punt per obtenir els seus valors

$$P_0^c(3) = 1, \quad P_1^c(3) = -1, \quad P_2^c(3) = -1, \quad P_3^c(3) = 3.$$

És evident que hi ha un canvi de signe entre $P_0^c(3)$ i $P_1^c(3)$, així com entre $P_2^c(3)$ i $P_3^c(3)$. Per tant,

$$s_1(3) = s_2(3) = 1, \quad s_3(3) = 2.$$

**Teorema 2.2.28.** ([3]) *Sigui $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ i $s_k(x)$ la funció de canvi de signe definida a* (2.2.21). *Aleshores*

$$\exists a, b \in \mathbb{R} : s_k(a) \neq s_k(b) \Rightarrow \exists x_0 \in (a, b) : P_k^c(x_0) = 0.$$

**Demostració 2.2.29.** Sigui $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ i $s_k(x)$ la funció de canvi de signe definida a (2.2.21). Considerem $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $s_k(a) \neq s_k(b)$. Sabem que $\exists x_0 \in (a, b)$ i $r \leq k$ tal que $P_r^c(x_0) = 0$. L'objectiu és demostrar que $r = k$. Per tant, si suposem que $r < k$, només cal comprovar que $s_r(a) = s_r(b)$. Pel Teorema 2.2.24, tenim que

$$P_{r-1}^c(x_0) P_{r+1}^c(x_0) < 0.$$

Ara, podem distingir dos casos

- $P_{r-1}^c(x_0) > 0$ i $P_{r+1}^c(x_0) < 0$,
- $P_{r-1}^c(x_0) < 0$ i $P_{r+1}^c(x_0) > 0$.

Només demostrarem el primer cas, ja que l'altre és anàleg. Suposem, sense pèrdua de generalitat, que $P_r^c(a) < 0$ i $P_r^c(b) > 0$, és a dir, que $P_r^c(x)$ és creixent a l'interval $(a, b)$. Aleshores,

$$\begin{aligned} P_{r-1}^c(a) > 0, &\quad P_r^c(a) < 0, \quad P_{r+1}^c(a) < 0, \\ P_{r-1}^c(b) > 0, &\quad P_r^c(b) > 0, \quad P_{r+1}^c(b) < 0. \end{aligned}$$

Observem que en tots dos hi ha un canvi de signe, per tant $s_r(a) = s_r(b)$. □

Ara presentarem un exemple per il·lustrar l'aplicació del Teorema 2.2.28.

**Exemple 2.2.30.** Considerant l'Exemple 2.2.27, prèviament mostrat, els dos primers polinomis de la successió $\{P_k^c(x)\}_{k=0}^n \subseteq \mathbb{R}[x]$ definida a (2.2.19) són

$$P_0^c(x) = 1, \quad P_1^c(x) = 2 - x.$$

Si prenem $x = 1$, aleshores

$$P_0^c(1) = 1, \quad P_1^c(1) = 1.$$

Com podem veure no hi ha cap canvi de signe, així doncs $s_1(1) = 0$.

Ara, si prenem $x = 3$

$$P_0^c(3) = 1, \quad P_1^c(3) = -1.$$

En aquest cas, hi ha un canvi de signe, de manera que $s_1(3) = 1$.

Aplicant el Teorema 2.2.28, es dedueix que $\exists x_0 \in (1, 3)$ tal que $P_1^c(x_0) = 0$. En particular, $x_0 = 2$.

**Teorema 2.2.31.** ([3]) *Sigui* $\{P_k^c(x)\}_{k=0}^n \subseteq \mathbb{R}[x]$ *la successió definida a* (2.2.19). *Aleshores,* $\forall k \in 1, 2, \ldots, n$, *es compleixen les següents propietats*

*(a) Els zeros de* $P_k^c(x)$ *tenen multiplicitat 1.*

*(b) Si* $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ *tal que* $P_k^c(x_0) \neq 0$ *i* $s_k(x_0) = m$, *on* $s_k(x)$ *és la funció de canvi de signe definida a* (2.2.21), *aleshores* $P_k^c(x)$ *té* $m$ *zeros menors que* $x_0$.

A conseqüència del Teorema 2.2.31, es deriven els següents resultats.

**Corol·lari 2.2.32.** ([3]) *Una matriu de Jacobi* $J \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *simètrica no té valors propis múltiples.*

**Demostració 2.2.33.** Sigui $J \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriu de Jacobi simètrica. Per definició, els valors propis de $J$ són els zeros de $P_n^c(x) \in \mathbb{R}[x]$. Com que $P_n^c(x) \in \{P_k^c(x)\}_{k=0}^n$, la successió definida a (2.2.19), aplicant la primera propietat del Teorema 2.2.31 arribem al resultat. □

**Corol·lari 2.2.34.** ([3]) *Sigui* $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *i* $\{P_k^c(x)\}_{k=0}^n \subseteq \mathbb{R}[x]$ *la successió definida a* (2.2.19). *Llavors,*

$$\#\{x_0 \in (a, b) \mid P_k^c(x_0) = 0\} = s_k(b) - s_k(a),$$

*on* $s_k(x)$ *és la funció de canvi de signe definida a* (2.2.21).

**Demostració 2.2.35.** La demostració resulta immediata aplicant la segona propietat del Teorema 2.2.31. □

**Corol·lari 2.2.36.** ([3]) *Sigui* $\{P_k^c(x)\}_{k=0}^n \subseteq \mathbb{R}[x]$ *la successió definida a* (2.2.19)*,* $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ *i* $x_0 \in \mathbb{R}$ *tal que* $P_k^c(x_0) = 0$*. Aleshores,*

$$P_{k-1}^c(x_0^-)P_k^c(x_0^-) > 0, \quad P_{k-1}^c(x_0^+)P_k^c(x_0^+) < 0.$$

*A més,* $s_k(x)$ *augmenta una unitat a* $(x_0^-, x_0^+)$*, on* $s_k(x)$ *és la funció de canvi de signe definida a* (2.2.21)*.*

**Teorema 2.2.37.** ([3]) *Sigui* $\{P_k^c(x)\}_{k=0}^n$*, la successió definida a* (2.2.19)*,* $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ *i* $x_0,\ x_1 \in \mathbb{R}$ *dos zeros consecutius de* $P_k^c(x)$*. Aleshores,* $P_{k-1}^c(x)$ *i* $P_{k+1}^c(x)$ *tenen un únic zero a* $(x_0, x_1)$*.*

**Demostració 2.2.38.** Sigui $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ i $x_0,\ x_1 \in \mathbb{R}$ dos zeros consecutius de $P_k^c(x)$. Podem suposar, sense pèrdua de generalitat que,

$$P_k^c(x_0^-) > 0, \quad P_k^c(x_0^+) < 0. \tag{2.2.22}$$

Per tant, com que $x_0$ i $x_1$ són dos zeros consecutius de $P_k^c(x)$,

$$P_k^c(x_1^-) < 0, \quad P_k^c(x_1^+) > 0. \tag{2.2.23}$$

Ara, aplicant el Corołari 2.2.36, tenim que

$$P_{k-1}^c(x_0^-)P_k^c(x_0^-) > 0, \quad P_{k-1}^c(x_0^+)P_k^c(x_0^+) < 0,$$

$$P_{k-1}^c(x_1^-)P_k^c(x_1^-) > 0, \quad P_{k-1}^c(x_1^+)P_k^c(x_1^+) < 0.$$

Utilitzant les expressions descrites a (2.2.22) i (2.2.23), tenim

$$P_{k-1}^c(x_0^+) > 0, \quad P_{k-1}^c(x_1^-) < 0,$$

el que implica que $P_{k-1}^c(x)$ té com a mínim un zero a $(x_0, x_1)$. Ara volem veure que és únic. Suposem que $P_{k-1}^c(x)$ té més d'un zero a $(x_0, x_1)$, aleshores $P_k^c(x)$ té un zero a $(x_0, x_1)$, fet que contradiu que $x_0$ i $x_1$ són dos zeros consecutius de $P_k^c(x)$. Per tant, $P_{k-1}^c(x)$ té un únic zero a $(x_0, x_1)$.

Finalment, com que

$$P_{k-1}^c(x_0) > 0, \quad P_{k-1}^c(x_1) < 0,$$

aplicant el Teorema 2.2.24, obtenim que

$$P_{k+1}^c(x_0^+) < 0, \quad P_{k-1}^c(x_1^-) > 0,$$

el que implica que $P_{k+1}^c(x)$ té com a mínim un zero a $(x_0, x_1)$. Per a demostrar la unicitat, s'aplica un raonament anàleg al cas de $P_{k-1}^c(x)$. $\square$

Després d'estudiar els valors propis, continuem investigant com calcular la inversa d'una matriu de Jacobi $J \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simètrica. En el següent lema trobem una expressió de la *n-èssima* fila de $J^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

**Lema 2.2.39.** ([2]) *Sigui* $J \in \mathbb{R}^{n\times n}$*, una matriu de Jacobi simètrica, i sigui* $J^{-1} = (\alpha_{ij})_{1\le i,j\le n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *la seva inversa. Aleshores,*

$$\alpha_{nj} = \begin{cases} (-1)^{n+j} c_j c_{j+1} \cdots c_{n-1} \frac{\theta_{j-1}}{\theta_n}, & j = 1, 2, \ldots, n-1, \\ \frac{\theta_{n-1}}{\theta_n}, & j = n. \end{cases}$$

**Demostració 2.2.40.** Primerament, tenim que $J^{-1}J = I$, on $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és la matriu identitat. Així doncs, en multiplicar l'última fila de $J^{-1}$ per les columnes de $J$, obtenim

$$c_{p-1}\alpha_{n,p-1} + b_p\alpha_{np} + c_p\alpha_{n,p+1} = \begin{cases} 0, & p = 1, 2, \ldots, n-1, \\ 1, & p = n, \end{cases} \tag{2.2.24}$$

on

$$\alpha_{n0} = 0, \quad \alpha_{n,n+1} = 0.$$

Quan $p \neq n$, a partir de l'equació (2.2.24), deduïm que

$$\alpha_{nj} = \frac{(-1)^{j-1}\theta_{j-1}\alpha_{n1}}{c_1 c_2 \cdots c_{j-1}}, \quad j = 2, 3, \ldots, n, \quad c_j \neq 0. \tag{2.2.25}$$

Ara considerem el cas $p = n$ de l'equació definida a (2.2.24) per obtenir l'expressió de $\alpha_{n1}$.

$$\begin{aligned} c_{n-1}\alpha_{n,n-1} + b_n\alpha_{nn} &= 1, \\ \left(\frac{(-1)^{n-2}c_{n-1}\theta_{n-2}}{c_1c_2\cdots c_{n-2}} + \frac{(-1)^{n-1}b_n\theta_{n-1}}{c_1c_2\cdots c_{n-1}}\right)\alpha_{n1} &= 1, \quad \text{per (2.2.25)}, \\ \frac{(-1)^{n-1}}{c_1c_2\cdots c_{n-1}}(b_n\theta_{n-1} - c_{n-1}^2\theta_{n-2})\alpha_{n1} &= 1, \\ \frac{(-1)^{n-1}\theta_n\alpha_{n1}}{c_1c_2\cdots c_{n-1}} &= 1, \quad \text{per (2.2.3)}. \end{aligned}$$

En conseqüència, arribem a

$$\alpha_{n1} = \frac{(-1)^{n-1}c_1c_2\cdots c_{n-1}}{\theta_n}, \tag{2.2.26}$$

on $\theta_n \neq 0$ ja que $J$ és no singular.
Aleshores, substituint l'expressió de $\alpha_{n1}$ descrita a (2.2.26) a l'equació (2.2.25), obtenim el resultat que volíem demostrar. □

**Teorema 2.2.41.** ([2]) *Sigui* $J \in \mathbb{R}^{n\times n}$*, una matriu de Jacobi simètrica, i sigui* $J^{-1} = (\alpha_{ij})_{1\le i,j\le n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *la seva inversa. Si* $i \geq j$ *i* $c_i \neq 0$ $\forall i = 1, 2, \ldots, n-1,$

$$\alpha_{i,j} = \begin{cases} (-1)^{i+j} c_j c_{j+1} \cdots c_{i-1} \frac{\theta_{j-1}\phi_{i+1}}{\theta_n}, & j = 1, 2, \ldots, i-1, \\ \frac{\theta_{i-1}\phi_{i+1}}{\theta_n}, & j = i, \end{cases} \tag{2.2.27}$$

$\forall i = n, n-1, \ldots, 1.$

**Demostració 2.2.42.** Utilitzarem inducció sobre $i$.

- Cas inicial, $i = n$: Es compleix pel Lema 2.2.39.
- Pas inductiu: Suposem que l'equació (2.2.27) se satisfà per $i = k+1$, és a dir,

$$\alpha_{k+1,j} = \begin{cases} (-1)^{k+1+j} c_j c_{j+1} \cdots c_k \frac{\theta_{j-1}\phi_{k+2}}{\theta_n}, & j = 1, 2, \ldots, k, \\ \frac{\theta_k \phi_{k+2}}{\theta_n}, & j = k+1. \end{cases} \tag{2.2.28}$$

Aleshores provem que és cert per $i = k$. Si multipliquem la *k-èssima* fila de $J^{-1}$ per les columnes de $J$, obtenim

$$c_{p-1}\alpha_{k,p-1} + b_p \alpha_{kp} + c_p \alpha_{k,p+1} = \begin{cases} 0, & p = 1, 2, \ldots, k-1, \\ 1, & p = k, \end{cases} \tag{2.2.29}$$

on $\alpha_{k0} = 0$. Quan $p \neq k$, la solució de (2.2.29) és

$$\alpha_{kj} = \frac{(-1)^{j-1}\theta_{j-1}\alpha_{k1}}{c_1 c_2 \cdots c_{j-1}}, \quad j = 2, 3, \ldots, k, \quad c_j \neq 0. \tag{2.2.30}$$

Ara considerem el cas $p = k$ de l'equació definida a (2.2.29) per obtenir l'expressió de $\alpha_{k1}$.

$$\begin{aligned} c_{k-1}\alpha_{k,k-1} + b_k \alpha_{kk} + c_k \alpha_{k,k+1} &= 1, \\ \left( \frac{(-1)^{k-2} c_{k-1}\theta_{k-2}}{c_1 c_2 \cdots c_{k-2}} + \frac{(-1)^{k-1} b_k \theta_{k-1}}{c_1 c_2 \cdots c_{k-1}} \right) \alpha_{k1} + c_k \alpha_{k,k+1} &= 1, \quad \text{per (2.2.30)}, \\ \frac{(-1)^{k-1}}{c_1 c_2 \cdots c_{k-1}} (b_k \theta_{k-1} - c_{k-1}^2 \theta_{k-2}) \alpha_{k1} + c_k \alpha_{k,k+1} &= 1. \end{aligned}$$

Aleshores,

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^{k-1}\theta_k}{c_1 c_2 \cdots c_{k-1}} \alpha_{k1} &= 1 - c_k \alpha_{k+1,k}, \\ &= 1 + \left( c_k^2 \frac{\theta_{k-1}\phi_{k+2}}{\theta_n} \right), \quad \text{per (2.2.28)} \\ &= \frac{\theta_n + c_k^2 \theta_{k-1}\phi_{k+2}}{\theta_n}, \\ &= \frac{\theta_k \phi_{k+1}}{\theta_n}, \quad \text{pel Lema 2.2.5.} \end{aligned}$$

Conseqüentment,

$$\alpha_{k1} = (-1)^{k-1} c_1 c_2 \cdots c_{k-1} \frac{\phi_{k+1}}{\theta_n}. \tag{2.2.31}$$

Així, substituint l'expressió de $\alpha_{k1}$ descrita a (2.2.31) a l'equació (2.2.30) tenim que es compleix per $i = k$. $\square$

A continuació, presentem un exemple del càlcul de la matriu inversa d'una matriu de Jacobi simètrica utilitzant els resultats obtinguts anteriorment.

**Exemple 2.2.43.** ([2]) Considerem la següent matriu de Jacobi simètrica

$$J = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5} \tag{2.2.32}$$

Volem calcular la seva matriu inversa $J^{-1} = (\alpha_{ij})_{1\le i,j\le 5} \in \mathbb{R}^{5\times 5}$. Utilitzant les definicions de les successions $\{\theta_i\}_{i=1}^5$, $\{\phi_i\}_{i=1}^5 \subseteq \mathbb{R}$ descrites a (2.2.2) i (2.2.4) respectivament, veiem que

- $\theta_{-1} = 0, \quad \theta_0 = 1, \quad \theta_1 = 5, \quad \theta_2 = 19, \quad \theta_3 = 37, \quad \theta_4 = 230, \quad \theta_5 = -563,$
- $\phi_1 = -563, \quad \phi_2 = -120, \quad \phi_3 = -37, \quad \phi_4 = -7, \quad \phi_5 = 1, \quad \phi_6 = 1, \quad \phi_7 = 0.$

Utilitzant el Lema 2.2.39, podem calcular l'última fila de $J^{-1}$. És a dir,

$$\alpha_{5j} = \begin{cases} (-1)^{5+j} c_j c_{j+1} \cdots c_4 \frac{\theta_{j-1}}{\theta_5}, & j = 1, 2, \ldots, 4, \\ \frac{\theta_4}{\theta_5}, & j = 5. \end{cases}$$

Per tant,

$$\begin{aligned} \alpha_{51} &= c_1 c_2 c_3 c_4 \frac{\theta_0}{\theta_5} = \frac{1\cdot 2\cdot 4\cdot 3\cdot 1}{-563} = -\frac{24}{563}, \\ \alpha_{52} &= -c_2 c_3 c_4 \frac{\theta_1}{\theta_5} = -\frac{2\cdot 4\cdot 3\cdot 5}{-563} = \frac{120}{563}, \\ \alpha_{53} &= c_3 c_4 \frac{\theta_2}{\theta_5} = \frac{4\cdot 3\cdot 19}{-563} = -\frac{228}{563}, \\ \alpha 54 &= -c_4 \frac{\theta_3}{\theta_5} = -\frac{3\cdot 37}{-563} = \frac{111}{563}, \\ \alpha_{55} &= \frac{\theta_4}{\theta_5} = -\frac{230}{563}. \end{aligned}$$

De manera anàloga, utilitzant el Teorema 2.2.27, podem calcular els elements restants de la matriu $J^{-1} \in \mathbb{R}^{5\times 5}$. Per tant, la matriu inversa de $J \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ definida a (2.2.32) és

$$J^{-1} = \frac{1}{563} \begin{pmatrix} 120 & -37 & 14 & 8 & -24 \\ -37 & 185 & -70 & -40 & 120 \\ 14 & -70 & 133 & 76 & -228 \\ 8 & -40 & 76 & -37 & 111 \\ -24 & 120 & -228 & 111 & 230 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}.$$

## 2.3 Matrius de Toeplitz

En aquesta secció ens limitarem a fer una breu exposició de les matrius de Toeplitz, ja que no és el nostre objectiu d'estudi. Per a un tractament més complet del tema, recomanem al lector consultar [4].

Les matrius de Toeplitz es caracteritzen per ser constants al llarg de les diagonals paral·leles a la diagonal principal. El seu nom prové d'Otto Toeplitz, un matemàtic alemany que va treballar en l'àrea de l'anàlisi funcional.
És sabut que moltes matrius són similars a les matrius de Toeplitz, i s'ha demostrat que qualsevol matriu pot ser expressada com a producte de matrius de Toeplitz [4]. Tenen moltes aplicacions, com per exemple en el processament de senyals, l'anàlisi de dades temporals i les equacions integrals, així com en la teoria de grafs i l'àlgebra.

**Definició 2.3.1.** *$T = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és una matriu de Toeplitz quadrada si*

$$a_{i,j} = a_{i+1,j+1}, \quad \forall\, a_{ij} \in T,$$

*és a dir,*

$$T = \begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots & \cdots & a_{-(n-1)} \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & \ddots & & \vdots \\ a_2 & a_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{-1} & a_{-2} \\ \vdots & & \ddots & a_1 & a_0 & a_{-1} \\ a_{n-1} & \cdots & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

*és una matriu de Toeplitz.*

**Observació 2.3.2.** Una matriu de Toeplitz no és necessàriament quadrada.

**Exemple 2.3.3.**

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 9 & 7 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}$$

és una matriu de Toeplitz.

# Capítol 3

# Polinomis Ortogonals

En aquest capítol, farem una breu exposició dels polinomis ortogonals i examinarem un dels exemples més coneguts, els polinomis de Txebixov. Aquest estudi té com a objectiu establir les bases per a la comprensió de la seva relació i utilitat en les equacions en diferències de segon ordre, concretament en aquelles amb coeficients constants.

Els polinomis ortogonals són polinomis que compleixen la propietat d'ortogonalitat respecte a una mesura o pes específic. Aquesta ortogonalitat és fonamental en camps tan diversos com l'anàlisi funcional, la teoria de l'aproximació, la mecànica quàntica i l'estadística.
La seva investigació es remunta a matemàtics com Txebitxov i Legendre, i té aplicacions pràctiques per resoldre equacions diferencials, aproximar distribucions de probabilitat i analitzar dades. En resum, els polinomis ortogonals són eines molt versàtils en matemàtiques i ciències aplicades.

A continuació, presentarem la definició i algunes propietats bàsiques.

**Definició 3.0.1.** ([3]) *Siguin $p(x),\ q(x) \in \mathbb{R}[x]$. Diem que $p(x)$ i $q(x)$ són ortogonals respecte a $w(x) \in \mathbb{R}[x]$ a l'interval $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ si*

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_a^b w(x)p(x)q(x)\,dx = 0.$$

*En canvi, si considerem el cas discret, tenim que $p(x)$ i $q(x)$ són ortogonals respecte a $\{w_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathbb{R}^+$ si*

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \sum_{i=1}^n w_i p(\varepsilon_i) q(\varepsilon_i) = 0,$$

*on $\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \ldots < \varepsilon_n$.*

**Teorema 3.0.2.** ([3]) *Existeix una única successió de polinomis mònics ortogonals $\{q_i(x)\}_{i=0}^n \subseteq \mathbb{R}[x]$ tal que*

$$\deg(q_i(x)) = i, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

**Demostració 3.0.3.** Considerant el conjunt de polinomis linealment independents $\{x^i\}_{i=0}^{n-1} \subseteq \mathbb{R}[x]$, podem construir la successió $\{q_i(x)\}_{i=0}^n$, usant el mètode de Gram-Schmidt. D'aquesta manera,

$$q_0(x) = 1, \quad q_i(x) = x^i - \sum_{j=0}^{i-1} \alpha_{ij} q_j(x), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Fixat $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, volem determinar l'expressió dels coeficients $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$, $\forall j \in \{0, 1, \ldots, i-1\}$. Per aconseguir-ho, imposarem que la successió de polinomis $\{q_i(x)\}_{i=0}^n$ sigui ortogonal, és a dir,

$$\langle q_i(x), q_j(x)\rangle = \langle x^i, q_j(x)\rangle - \alpha_{ij}\langle q_j(x), q_j(x)\rangle = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, i-1.$$

Així doncs,

$$\alpha_{ij} = \frac{\langle x^i, q_j(x)\rangle}{\|q_j(x)\|}, \quad j = 0, 1, \ldots, i-1.$$

□

**Corol·lari 3.0.4.** *La successió de polinomis $\{q_i(x)\}_{i=0}^n \subseteq \mathbb{R}[x]$ definida al Teorema 3.0.2 és de la forma*

$$q_i(x) = x^i - \sum_{j=0}^{i-1} \alpha_{ij} q_j(x), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

*on*

$$q_0(x) = 1.$$

**Teorema 3.0.5.** ([3]) *La successió de polinomis $\{q_i(x)\}_{i=0}^n \subseteq \mathbb{R}[x]$ definida al Teorema 3.0.2 satisfà la relació de recurrència de tres termes*

$$q_i(x) = (x - \mu_i)q_{i-1}(x) - \beta_{i-1}^2 q_{i-2}(x), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.0.1}$$

*on*

$$q_{-1}(x) = 0, \quad q_0(x) = 1,$$

*i $\mu_i, \beta_i \in \mathbb{R}$.*

**Demostració 3.0.6.** Sigui $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. En primer lloc, podem observar que

$$\deg(q_i(x) - xq_{i-1}(x)) = i - 1.$$

Per tant, ho podem expressar de la següent manera

$$q_i(x) - xq_{i-1}(x) = \sum_{k=0}^{i-1} c_k q_k(x), \tag{3.0.2}$$

on $c_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, 1, \ldots, i-1$.

Prenent el producte escalar $\langle , \rangle$ de l'equació (3.0.2) amb $q_j(x)$, $j = 0, 1, \ldots, i-1$, obtenim

$$\langle q_i(x), q_j(x)\rangle - \langle q_{i-1}(x), xq_j(x)\rangle = \sum_{k=0}^{i-1} c_k \langle q_k(x), q_j(x)\rangle = c_j \|q_j(x)\|^2, \quad j = 0, 1, \ldots, i-1. \tag{3.0.3}$$

Per definició, la successió $\{q_i(x)\}_{i=0}^n \subseteq \mathbb{R}[x]$ és ortogonal, per tant, tenim que

$$\langle q_i(x), q_j(x)\rangle = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, i-1. \tag{3.0.4}$$

A més, com que $\deg(xq_j(x)) \leq i - 2$,

$$\langle q_{i-1}(x), xq_j(x)\rangle = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, i-3. \tag{3.0.5}$$

Aplicant les equacions (3.0.4) i (3.0.5) a l'equació (3.0.3),

$$c_j \|q_j(x)\|^2 = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, i-3.$$

Això implica que,

$$c_j = 0, \quad j = 0, 1, 2 \ldots, i-3.$$

Conseqüentment, l'equació (3.0.2) és equivalent a

$$q_i(x) - xq_{i-1}(x) = c_{i-2}q_{i-2}(x) + c_{i-1}q_{i-1}(x).$$

on

$$\mu_i = -c_{i-1} = \frac{\langle q_{i-1}(x), xq_{i-1}(x)\rangle}{\|q_{i-1}(x)\|^2}$$

$$c_{i-2} = -\frac{\langle q_{i-1}(x), xq_{i-2}(x)\rangle}{\|q_{i-2}(x)\|^2}$$

Com que $xq_{i-2}(x) \in \mathbb{R}[x]$ es mònic i $\deg(xq_{i-2}(x)) = i-1$ , podem expressar-lo com

$$xq_{i-2}(x) = q_{i-1}(x) + \sum_{j=0}^{i-2} d_j q_j(x). \tag{3.0.6}$$

Ara, prenent el producte escalar $\langle , \rangle$ de l'equació (3.0.6) amb $q_{i-1}(x)$, obtenim

$$\langle q_{i-1}(x), xq_{i-2}(x)\rangle = \|q_{i-1}(x)\|^2.$$

Per tant,

$$c_{i-2} < 0, \quad c_{i-2} = -\beta_{i-1}^2,$$

on

$$\beta_i = \frac{\|q_i(x)\|^2}{\|q_{i-1}(x)\|^2}.$$

□

## 3.1 Polinomis de Txebixov

En aquesta secció, el nostre objectiu és descriure les propietats fonamentals dels polinomis de Txebixov atès que, resultaran una eina molt eficient per resoldre equacions en diferències de segon ordre amb coeficients constants. La relació entre aquestes equacions i els polinomis de Txebixov es determina mitjançant la llei de recurrència de tres termes que compleixen aquests polinomis.
Aquesta família de polinomis va ser introduïda per Pafnuty Txebitxov a mitjan segle XIX i s'han convertit en un element fonamental en la resolució de problemes en àrees com l'aproximació de funcions.
Aquests polinomis es poden definir de dues maneres diferents: a través de relacions trigonomètriques o mitjançant una recurrència específica. En aquest cas, optarem per utilitzar l'última opció.

**Definició 3.1.1.** ([5]) *Una successió $\{P_n(x)\}_{n=-\infty}^{+\infty} \subseteq \mathbb{C}[x]$ s'anomena successió de polinomis de Txebixov si satisfà*

$$P_{n+2}(x) = 2xP_{n+1}(x) - P_n(x), \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{3.1.1}$$

Les següents propietats són conseqüència directa la relació vista a l'equació (3.1.1).

**Lema 3.1.2.** ([5]) *Si $\{P_n(x)\}_{n=-\infty}^{+\infty} \subseteq \mathbb{C}[x]$ és una successió de polinomis de Txebixov, aleshores, $\forall k \in \mathbb{Z}$,*

$$P_k(x) - xP_{k+1}(x) = \frac{1}{2}(P_k(x) - P_{k+2}(x)), \quad P_k(x) - xP_{k-1}(x) = \frac{1}{2}(P_k(x) - P_{k-2}(x)).$$

**Demostració 3.1.3.** Per demostrar la primera identitat, prenem $n = k$ i per definició tenim

$$P_k(x) - 2xP_{k+1}(x) = -P_{k+2}(x), \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \tag{3.1.2}$$

Sumant $P_k(x)$ a ambdues bandes de l'equació (3.1.2)

$$2P_k(x) - 2xP_{k+1}(x) = P_k(x) - P_{k+2}(x), \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$\Leftrightarrow$

$$P_k(x) - xP_{k+1}(x) = \frac{1}{2}(P_k(x) - P_{k+2}(x)), \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

que és la identitat que buscàvem. L'altre cas és anàleg agafant $n = k - 2$. □

A continuació, explorarem com podem construir una successió de polinomis de Txebixov utilitzant dues successions de Txebixov i dos polinomis arbitraris.

**Lema 3.1.4.** ([5]) *Siguin $\{P_n(x)\}_{n=-\infty}^{+\infty}$, $\{Q_n(x)\}_{n=-\infty}^{+\infty} \subseteq \mathbb{C}[x]$ dues successions de Txebixov i dos polinomis qualssevol $P(x), Q(x) \in \mathbb{C}[x]$. Fixats $k, m \in \mathbb{Z}$, la successió de polinomis $\{R_n(x)\}_{n=-\infty}^{+\infty} \subseteq \mathbb{C}[x]$ definida com*

$$R_n(x) = P(x)P_{k+n}(x) + Q(x)Q_{m+n}(x), \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

*és una successió de Txebixov.*

**Demostració 3.1.5.** Fixats $k, m \in \mathbb{Z}$, hem de veure que $\{R_n(x)\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ satisfà l'equació (3.1.1) , $\forall n \in \mathbb{Z}$. Per definició de la successió,

$$R_{n+2}(x) = P(x)P_{k+n+2}(x) + Q(x)Q_{m+n+2}(x), \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Com que $\{P_n(x)\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ i $\{Q_n(x)\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ són dues successions de Txebitxov podem aplicar la relació descrita a l'equació (3.1.1),

$$R_{n+2}(x) = P(x)(2xP_{k+n+1} - P_{k+n}(x)) + Q(x)(2xQ_{m+n+1}(x) - Q_{m+n}(x)), \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

$\Leftrightarrow$

$$R_{n+2}(x) = 2x(P(x)P_{k+n+1} + Q(x)Q_{m+n+1}) - (P(x)P_{k+n}(x) + Q(x)Q_{m+n}(x)), \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

$\Leftrightarrow$

$$R_{n+2}(x) = 2xR_{n+1}(x) - R_n(x), \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

$\square$

En el següent lema veurem que, coneguts els termes de la successió $\{P_n(x)\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ d'ordre 0 i d'ordre 1 i la seva paritat, podem deduir la paritat dels altres termes.

**Lema 3.1.6.** ([5]) *Si* $\{P_n(x)\}_{n=-\infty}^{+\infty} \subseteq \mathbb{C}[x]$ *és una successió de Txebixov tal que*

- $P_0(-x) = P_0(x)$ *i* $P_1(-x) = -P_1(x)$, *o bé*
- $P_0(-x) = -P_0(x)$ *i* $P_1(-x) = P_1(x)$

$\forall x \in \mathbb{C}$. *Aleshores,*

- $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$, *o respectivament*
- $P_n(-x) = (-1)^{n+1} P_n(x)$,

$\forall n \in \mathbb{Z}$ *i* $\forall x \in \mathbb{C}$.

**Demostració 3.1.7.** Demostrarem només el primer cas, ja que l'altre es pot demostrar de manera anàloga.
Utilitzarem inducció sobre $k$.

- Cas inicial, $k = 0, 1$. Se satisfà per hipòtesi.

- Pas inductiu: Suposem que se satisfà per $k = n$ i per $k = -n$,

  $$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x), \quad P_{-n}(-x) = (-1)^{-n} P_{-n}(x).$$

  Aleshores provem que és cert per $k = n + 1$ i $k = -(n + 1)$.

  $$\begin{aligned} P_{n+1}(-x) &= -2xP_n(-x) - P_{n-1}(-x), \\ &= -2x(-1)^n P_n(x) - (-1)^{n-1} P_{n-1}(x), \\ &= (-1)^{n+1}(2xP_n(x) - P_{n-1}(x)), \\ &= (-1)^{n+1} P_{n+1}(x), \end{aligned}$$

  $$\begin{aligned} P_{-(n+1)}(-x) &= -2xP_{-n}(-x) - P_{-(n-1)}(-x), \\ &= -2x(-1)^{-n} P_{-n}(x) - (-1)^{1-n} P_{-(n-1)}(x), \\ &= (-1)^{-(n+1)}(2xP_{-n}(x) - P_{-(n-1)}(x)), \\ &= (-1)^{-(n+1)} P_{-(n+1)}(x). \end{aligned}$$

□

Abans d'abordar les definicions dels polinomis de Txebixov de primera, segona, tercera i quarta espècie, és necessari familiaritzar-nos amb alguns conceptes.

**Definició 3.1.8.** ([5]) *Una successió de Txebixov* $\{P_n(x)\}_{n=-\infty}^{+\infty} \subseteq \mathbb{C}[x]$ *es diu normalitzada si* $\forall x \in \mathbb{C}$ *satisfà*

$$P_0(x) = 1, \quad \frac{d}{dx}P_1(x) = 1.$$

**Corol·lari 3.1.9.** ([5]) *Si* $\{P_n(x)\}_{n=-\infty}^{\infty} \subseteq \mathbb{C}[x]$ *és una successió de Txebixov normalitzada, llavors* $\{P_n(x)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ *és simple, és a dir,*

$$\frac{d}{dx}P_n(x) = n, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{C}. \tag{3.1.3}$$

**Demostració 3.1.10.** Utilitzarem inducció sobre $k$.

- Cas inicial, $k = 0, 1$: Clarament es satisfà per definició.

- Pas inductiu: Suposem que l'equació (3.1.3) se satisfà fins a $k = n$, aleshores provem que és cert per $k = n + 1$. En primer lloc, per hipòtesi,

$$\frac{d}{dx}(xP_n(x)) = n + 1, \quad \frac{d}{dx}P_{n-1}(x) = n - 1, \qquad \forall x \in \mathbb{C}.$$

  En conseqüència, $\forall x \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}P_{n+1}(x) &= \frac{d}{dx}(2xP_n(x) - P_{n-1}(x)), \\ &= \frac{d}{dx}(2xP_n(x)) - \frac{d}{dx}P_{n-1}(x), \\ &= 2n + 2 - n - 1 = n + 1. \end{aligned}$$

□

**Observació 3.1.11.** Per tant, podem observar que una successió de Txebixov normalitzada està unívocament determinada per l'elecció del polinomi de Txebixov de primer ordre.

**Definició 3.1.12.** ([5]) *Denominarem successions de Polinomis de Txebixov de primera, segona, tercera i quarta espècie i les denotarem per* $\{T_n(x)\}_{n=-\infty}^{\infty}$, $\{U_n(x)\}_{n=-\infty}^{\infty}$, $\{V_n(x)\}_{n=-\infty}^{\infty}$, $\{W_n(x)\}_{n=-\infty}^{\infty} \subseteq \mathbb{C}[x]$, *respectivament, a les successions de Txebixov normalitzades corresponents a les següents eleccions del polinomi d'ordre 1,*

$$T_1(x) = x, \quad U_1(x) = 2x, \quad V_1(x) = 2x - 1, \quad W_1(x) = 2x + 1$$

# Capítol 4

# Equacions en diferències

L'estudi d'aquest capítol s'ha basat en [5], on ens enfocarem en l'anàlisi d'equacions en diferències de segon ordre. Com es va exposar a la Introducció, aquestes equacions tenen una relació directa amb la determinació de la matriu inversa d'una matriu de Jacobi.

Les equacions en diferències serveixen com a eina fonamental per modelar processos discrets en àrees tan diverses com l'economia, l'enginyeria i la física.
En primer lloc, introduirem la seva definició, les propietats bàsiques així com la determinació de les seves solucions. Per a un tractament més complet del tema, remetem el lector a [5] i [6].
A més, analitzarem les equacions en diferències amb coeficients constants i la seva relació amb els polinomis de Txebitxov.

## 4.1 Equacions en diferències de segon ordre

En primer lloc, introduirem la definició i les seves diverses caracteritzacions.

**Definició 4.1.1.** ([5]) *Donats $a(k)$, $b(k)$, $c(k)$, $f(k) \in \mathcal{C}(I)$, anomenem equació en diferències de segon ordre amb coeficients $a(k)$, $b(k)$, $c(k)$ i dada $f(k)$, a l'equació*

$$a(k)u(k+1) - b(k)u(k) + c(k-1)u(k-1) = f(k), \quad k \in \overset{\circ}{I}. \tag{4.1.1}$$

**Exemple 4.1.2.**

$$u(k+1) - u(k-1) = k^2 - 3, \quad k \in \overset{\circ}{I},$$

és una equació en diferències de segon ordre.

**Definició 4.1.3.** *Les solucions de l'equació descrita a* (4.1.1) *són les funcions $u(k) \in \mathcal{C}(I)$ que verifiquen la igualtat $\forall k \in \overset{\circ}{I}$.*

**Observació 4.1.4.** ([5])

- Clarament, les solucions no depenen del valor que tenen els coeficients $a(k)$, $b(k)$, $c(k)$, ni tampoc de la dada $f(k)$ quan $k \in \delta(I)$.
- Quan $n+1 \in \delta(I)$, els valors $c(n)$ i $a(n+1)$ no condicionen a l'equació (4.1.1) (més endavant podrem imposar que a(n+1)=c(n) i c(n+1)=a(n)).

**Definició 4.1.5.** ([5]) *El coeficient $a(k) \in \mathcal{C}(I)$ de l'equació* (4.1.1) *s'anomena coeficient principal. Direm que l'equació* (4.1.1) *està en forma explícita $\Leftrightarrow a(k) = 1\ \forall k \in I$.*

**Definició 4.1.6.** *Podem caracteritzar les equacions en diferències mitjançant dues propietats.*

- *Si $f(k) = 0\ \forall k \in I$, direm que l'equació* (4.1.1) *està en forma homogènia,*

$$a(k)u(k+1) - b(k)u(k) + c(k-1)u(k-1) = 0, \quad k \in \overset{\circ}{I}. \tag{4.1.2}$$

  *En cas contrari, completa.*

- *Si $\exists a, b, c \in \mathbb{R}$ tal que els coeficients de l'equació* (4.1.1) *compleixen que*

$$a(k) = a,\ b(k) = b \text{ i } c(k) = c, \quad \forall k \in \overset{\circ}{I},$$

  *aleshores direm que l'equació* (4.1.1) *té coeficients constants. En cas contrari, no constants.*

**Exemple 4.1.7.** Aquest és un exemple senzill d'equació en diferències de segon ordre, completa amb coeficients constants.

$$u(k+1) + u(k-1) = 2k, \quad k \in \overset{\circ}{I}.$$

En aquest cas, la solució és

$$u(k) = k, \quad \forall k \in \overset{\circ}{I}.$$

A continuació, volem analitzar les condicions sota les quals l'equació (4.1.1) té solució i determinar la seva unicitat.

**Teorema 4.1.8.** ([5])*(Teorema d'existència i unicitat). Donats $m \in \overset{\circ}{I} \cup \{0\}$ i $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$, l'equació definida a* (4.1.1) *té una única solució $u(k) \in \mathcal{C}(I)$ tal que $u(m) = x_0$ i $u(m+1) = x_1$.*

**Demostració 4.1.9.** En primer lloc, per definició tenim que $u(k) \in \mathcal{C}(I)$ és solució de l'equació (4.1.1) $\Leftrightarrow$

$$u(k+1) = \frac{b(k)}{a(k)}u(k) - \frac{c(k-1)}{a(k)}u(k-1) + \frac{f(k)}{a(k)},$$

$$u(k-1) = \frac{b(k)}{c(k-1)}u(k) - \frac{a(k)}{c(k-1)}u(k+1) + \frac{f(k)}{c(k-1)},$$

$\forall k \in \overset{\circ}{I}$. En particular,

$$u(m+2) = \frac{b(m+1)}{a(m+1)}x_1 - \frac{c(m)}{a(m+1)}x_0 + \frac{f(m+1)}{a(m+1)},$$

$$u(m-1) = \frac{b(m)}{c(m-1)}x_0 - \frac{a(m)}{c(m-1)}x_1 + \frac{f(m)}{c(m-1)}.$$

Aleshores, raonant inductivament, tant regressivament com progressivament, obtenim que els valors de la funció $u(k) \in \mathcal{C}(I)$ queden unívocament determinats per $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ i $f(k) \in \mathcal{C}(I)$. $\square$

Podem concloure que, donats $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ i $m \in \overset{\circ}{I} \cup \{0\}$, el problema consisteix a trobar una funció $u(k) \in \mathcal{C}(I)$ que verifiqui l'equació (4.1.1) i les condicions inicials $u(m) = x_0$ i $u(m+1) = x_1$. Aquest problema l'anomenem problema de valor inicial per l'equació (4.1.1) amb $m \in \overset{\circ}{I} \cup \{0\}$.

Addicionalment, com es demostra en el Teorema 4.1.8, aquesta solució és existent i única. Per tant, com a corol·lari, deduïm el següent resultat.

**Corol·lari 4.1.10.** ([5]) *Sigui $u(k) \in \mathcal{C}(I)$ una solució que satisfà l'equació* (4.1.2)*, llavors,*

$$u(k) = 0,\ \forall k \in I \Leftrightarrow \exists m \in \overset{\circ}{I} \cup \{0\} \text{ tal que } u(m) = u(m+1) = 0.$$

**Definició 4.1.11.** ([5]) *Denotarem els conjunts de solucions de les equacions* (4.1.2) *i* (4.1.1) *de la següent manera*

- $S = \{u(k) \in \mathcal{C}(I) \,|\, a(k)u(k+1) - b(k)u(k) + c(k-1)u(k-1) = 0,\ k \in \overset{\circ}{I}\}$,

- $S(f) = \{u(k) \in \mathcal{C}(I) \,|\, a(k)u(k+1) - b(k)u(k) + c(k-1)u(k-1) = f(k),\ k \in \overset{\circ}{I}\}$.

**Corol·lari 4.1.12.** ([5]) *El conjunt $S$ és un espai vectorial de dimensió 2. D'altra banda, $\forall f(k) \in \mathcal{C}(I)$, $S(f) \neq \emptyset$, agafant $u(k) \in S(f)$ podem escriure l'espai $S(f)$ com*

$$S(f) = u(k) + S$$

El nostre pròxim objectiu és caracteritzar quan dues solucions de l'equació en diferències homogènia (4.1.2) formen una base per a $S$. Això es pot aconseguir mitjançant els següents conceptes.

**Definició 4.1.13.** ([5])*(Wronskià). Anomenem Wronskià a l'aplicació*

$$w : \mathcal{C}(I) \times \mathcal{C}(I) \to \mathcal{C}(I)$$

*que $\forall u(k), v(k) \in \mathcal{C}(I)$ assigna l'aplicació $w[u,v](k) \in \mathcal{C}(I)$ definida com*

$$w[u,v](k) = \begin{vmatrix} u(k) & v(k) \\ u(k+1) & v(k+1) \end{vmatrix} = u(k)v(k+1) - v(k)u(k+1), \quad \forall k \in I. \tag{4.1.3}$$

**Observació 4.1.14.** Si $n+1 \in \delta(I)$ es compleix

$$w[u,v](n+1) = w[u,v](n).$$

**Corol·lari 4.1.15.** ([5]) *El Wronskià és una aplicació bilineal i antisimètrica. D'altra banda, $\forall k \in \overset{\circ}{I} \cup \{0\}$ i $\forall u(k), v(k) \in \mathcal{C}(I)$ es verifica que,*

$$w[u,v](k) = \begin{vmatrix} u(k) & v(k) \\ u(k+1) - u(k) & v(k+1) - v(k) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u(k+1) & v(k+1) \\ u(k+1) - u(k) & v(k+1) - v(k) \end{vmatrix}.$$

**Demostració 4.1.16.** Desenvolupant els dos determinants podem veure clarament que arribem a l'expressió definida a l'equació (4.1.3). $\square$

**Proposició 4.1.17.** ([5]) *Donats $u(k), v(k) \in \mathcal{C}(I)$, llavors*

$$u(k), v(k) \text{ són linealment dependents} \Leftrightarrow \; w[u,v](k) = 0, \quad \forall k \in I.$$

La definició del Wronskià ens permet expressar la solució de qualsevol problema de valor inicial per a l'equació homogènia (4.1.2), utilitzant una base donada $S$.

**Corol·lari 4.1.18.** ([5]) *Donada $\{u(k), v(k)\}$ una base de l'espai $S$, $\forall m \in \overset{\circ}{I} \cup \{0\}$ i $\forall x_0, x_1 \in \mathbb{R}$, tenim que l'única solució de l'equació homogènia (4.1.2) que compleix $z(m) = x_0$ i $z(m+1) = x_1$ és expressada com*

$$z(k) = \frac{1}{w[u,v](m)}[(x_0 v(m+1) - x_1 v(m))u(k) + (x_1 u(m) - x_0 u(m+1))v(k)], \quad k \in \overset{\circ}{I}.$$

**Demostració 4.1.19.** Sigui $z(k) \in \mathcal{C}(I)$ una solució de l'equació (4.1.2). Com que $z(k) \in S$ i $\{u(k), v(k)\}$ és una base de $S$, podem escriure

$$z(k) = \lambda u(k) + \mu v(k), \quad \forall k \in I, \tag{4.1.4}$$

on $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
A més, com que $z(k)$ compleix les condicions inicials $z(m) = x_0$ i $z(m+1) = x_1$, substituint $k = m$ i $k = m+1$ a l'expressió (4.1.4) tenim

$$\begin{pmatrix} u(m) & v(m) \\ u(m+1) & v(m+1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Per la Proposició 4.1.17 tenim que

$$w[u,v](k) \neq 0 \;\forall k \in I,$$

ja que $u(k)$ i $v(k)$ són linealment independents i, per tant,

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \frac{1}{w[u,v](m)} \begin{pmatrix} v(m+1) & -v(m) \\ -u(m+1) & u(m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{w[u,v](m)} \begin{pmatrix} x_0 v(m+1) - x_1 v(m) \\ x_1 u(m) - x_0 u(m+1) \end{pmatrix}.$$

□

A continuació, introduirem un nou tipus d'equació en diferències de segon ordre i explicarem com transformar l'equació definida a l'equació (4.1.1) en aquest format. L'objectiu principal d'aquesta introducció és preparar-nos per a futures aplicacions, concretament en la simplificació de la resolució d'equacions en diferències de segon ordre amb coeficients constants.

**Definició 4.1.20.** ([5]) *Definim l'equació en diferències adjunta associada a*

$$a(k)u(k+1) - b(k)u(k) + c(k-1)u(k-1) = f(k), \quad k \in \overset{\circ}{I},$$

*com l'equació,*

$$c(k)u(k+1) - b(k)u(k) + a(k-1)u(k-1) = 0, \quad k \in \overset{\circ}{I}. \tag{4.1.5}$$

*En particular, si $c(k) = a(k)$, $\forall k \in I$, direm que l'equació és autoadjunta.*

**Exemple 4.1.21.** Aquest és un exemple senzill d'equació en diferències de segon ordre autoadjunta.

$$ku(k+1) + (k-1)u(k-1) = 2k+1, \quad k \in \overset{\circ}{I}.$$

En aquest cas, $a(k) = c(k) = k$, $\forall k \in \overset{\circ}{I}$.

**Definició 4.1.22.** ([5]) *Si $S$ és l'espai de solucions de l'equació* (4.1.2)*, escriurem $S^*$ per l'espai de solucions de l'equació* (4.1.5)*.*

**Observació 4.1.23.** ([5]) Clarament, l'equació adjunta associada a (4.1.5) és l'equació homogènia (4.1.2), és a dir,

$$S^{**} = S.$$

A més, si l'equació (4.1.1) és autoadjunta aleshores,

$$S = S^*.$$

Ara estudiarem la relació que hi ha entre els espais $S$ i $S^*$ i per fer-ho introduirem la funció d'acompanyament $\rho(k) \in \mathcal{C}(I)$ i les seves propietats. Prèviament, definim la funció signe que utilitzarem ara endavant.

**Definició 4.1.24.** ([5]) *La funció signe $s(k) \in \mathcal{C}(I)$ la podem definir com*

$$s(k) = \begin{cases} 1 & si\ k > 0, \\ 0 & si\ k = 0, \\ -1 & si\ k < 0. \end{cases} \tag{4.1.6}$$

**Definició 4.1.25.** ([5]) *Definim la funció d'acompanyament $\rho(k) \in \mathcal{C}(I)$ per l'equació* (4.1.1) *com*

$$\rho(k) = \left[ \prod_{s=\min(k,0)}^{\max(k,0)-1} \frac{a(s)}{c(s)} \right]^{s(k)}, \quad \forall k \in I. \tag{4.1.7}$$

*On $s(k) \in \mathcal{C}(I)$ és la funció signe definida a* (4.1.6)*. Per tant,*

- *$\rho(0)$=1,*
- $\rho(k) = \prod_{s=0}^{k-1} \frac{a(s)}{c(s)}, \quad k > 0,$
- $\rho(k) = \prod_{s=k}^{-1} \frac{c(s)}{a(s)}, \quad k < 0.$

**Observació 4.1.26.** ([5]) Denotarem per $\rho^*(k) \in \mathcal{C}(I)$ la funció d'acompanyament per l'equació adjunta associada a l'equació (4.1.1), és a dir, la funció d'acompanyament per l'equació (4.1.5). Observem que, de fet,

$$\rho^*(k) = \rho^{-1}(k), \quad \forall k \in I.$$

Ara exposarem un exemple que il·lustra l'aplicació de la funció d'acompanyament d'una equació en diferències de segon ordre.

**Exemple 4.1.27.** Donada la següent equació en diferències de segon ordre,

$$(k^2 - 1)u(k + 1) + (k - 1)u(k - 1) = 2k + 1, \quad k \in \overset{\circ}{I}. \tag{4.1.8}$$

Segons (4.1.7), tenim que la funció d'acompanyament $\rho(k) \in \mathcal{C}(I)$ de l'equació (4.1.8) està definida com

- $\rho(0)$=1,

- $\rho(k) = \prod_{s=0}^{k-1} \frac{s^2-1}{s}, \quad k > 0,$
- $\rho(k) = \prod_{s=k}^{-1} \frac{s}{s^2-1}, \quad k < 0.$

**Lema 4.1.28.** ([5]) *Sigui $\rho(k) \in \mathcal{C}(I)$ la funció d'acompanyament definida a* (4.1.7) *associada a l'equació* (4.1.1)*, aleshores*

$$\rho(k)a(k) = \rho(k+1)c(k), \quad \forall k \in \overset{\circ}{I} \cup \{0\}.$$

*A més, l'equació* (4.1.1) *és autoadjunta $\Leftrightarrow \rho(k) = 1 \ \forall k \in I$.*

**Demostració 4.1.29.** Per demostrar la primera identitat, podem suposar sense perdre generalitat que $k > 0$, ja que l'altre cas és anàleg. Llavors per definició,

$$\frac{a(k)}{c(k)}\rho(k) = \frac{a(k)}{c(k)} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{a(s)}{c(s)} = \prod_{s=0}^{k} \frac{a(s)}{c(s)} = \rho(k+1), \quad \forall k \in \overset{\circ}{I} \cup \{0\}.$$

El cas de la segona identitat és immediat. Utilitzant la Definició 4.1.20 tenim que l'equació (4.1.1) es autoadjunta $\Leftrightarrow$

$$a(k) = c(k), \ \forall k \in I \ \Leftrightarrow \ \frac{a(s)}{c(s)} = 1, \ \forall s = 0, \ldots, k-1 \ \Leftrightarrow \ \rho(k) = 1, \ \forall k \in I.$$

□

**Observació 4.1.30.** ([5]) Sigui $\rho(k) \in \mathcal{C}(I)$ la funció d'acompanyament definida a (4.1.7) associada a l'equació (4.1.1). Si $n+1 \in \delta(I)$, podem suposar que $a(n+1) = c(n)$ i, per tant,

$$a(n+1)\rho(n+1) = a(n+1)\left[\prod_{s=0}^{n} \frac{a(s)}{c(s)}\right] = a(n)\left[\prod_{s=0}^{n-1} \frac{a(s)}{c(s)}\right] = a(n)\rho(n).$$

A més,

$$\rho(n+1)a(n+1)w[u,v](n+1) = \rho(n)a(n)w[u,v](n).$$

**Proposició 4.1.31.** ([5]) *Si $u(k), v(k) \in S$, llavors*

$$a(k)w[u,v](k) = c(k-1)w[u,v](k-1), \quad \forall k \in \overset{\circ}{I}.$$

*Per tant, l'aplicació $\rho(k)a(k)w[u,v](k) = ct \ \forall k \in \overset{\circ}{I}$, i val 0 $\Leftrightarrow$ $u(k)$,$v(k)$ són linealment dependents.*

**Demostració 4.1.32.** Com que $u(k), v(k) \in S$, per definició

$$a(k)u(k+1) = b(k)u(k) - c(k-1)u(k-1), \quad \forall k \in \overset{\circ}{I},$$

$$a(k)v(k+1) = b(k)v(k) - c(k-1)v(k-1), \quad \forall k \in \overset{\circ}{I}.$$

Llavors,

$$\begin{aligned} a(k)w[u,v](k) &= u(k)[b(k)v(k) - c(k-1)v(k-1)] - v(k)[b(k)u(k) - c(k-1)u(k-1)], \\ &= c(k-1)[v(k)u(k-1) - u(k)v(k-1)], \\ &= c(k-1)w[u,v](k-1). \end{aligned}$$

Multiplicant per $\rho(k)$ a banda i banda obtenim la igualtat que buscàvem.

A més, utilitzant el Lema 4.1.28 obtenim que $\rho(k)a(k)w[u,v](k) = ct \ \forall k \in \overset{\circ}{I} \cup \{0\}$. Per tant $\rho(k)a(k)w[u,v](k) = ct$ a $\forall k \in I$. □

Ara ja podem descriure la relació entre els espais de solucions S i $S^*$.

**Corol·lari 4.1.33.** ([5])$\{u(k), v(k)\}$ *és una base de* $S \Leftrightarrow \{\rho(k)u(k), \rho(k)v(k)\}$ *és una base de* $S^*$. *És a dir,*

$$S^* = \rho S.$$

**Demostració 4.1.34.** Donada $u(k) \in \mathcal{C}(I)$,

$$u(k) \in S \;\Leftrightarrow\; a(k)u(k+1) - b(k)u(k) + c(k-1)u(k-1) = 0, \quad \forall k \in \overset{\circ}{I}. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \rho(k)a(k)u(k+1) - \rho(k)b(k)u(k) + \rho(k)c(k-1)u(k-1) = 0, \quad \forall k \in \overset{\circ}{I}.$$

Definim u'(k)=$\rho(k)u(k)$ i tenim

$$\frac{\rho(k)a(k)}{\rho(k+1)}u'(k+1) - b(k)u'(k) + \frac{\rho(k)c(k-1)}{\rho(k-1)}u'(k-1) = 0, \quad \forall k \in \overset{\circ}{I}.$$

Pel Lema 4.1.28, tenim que

$$\rho(k-1)a(k-1) = \rho(k)c(k-1), \quad \forall k \in \overset{\circ}{I},$$

llavors,

$$c(k)u'(k+1) - b(k)u'(k) + a(k-1)u'(k-1) = 0, \quad \forall k \in \overset{\circ}{I},$$

és a dir, $u'(k) = \rho(k)u(k) \in S^*$.

Finalment, donats $u(k), v(k) \in \mathcal{C}(I)$, es verifica que

$$w[\rho u, \rho v](k) = \rho(k)\rho(k+1)w[u,v](k), \quad \forall k \in \overset{\circ}{I} \cup \{0\}.$$

Per tant, $w[\rho u, \rho v](k) = 0 \Leftrightarrow w[u,v](k) = 0$. $\square$

En poques paraules, si coneixem una base de l'espai de solucions de S, podem obtenir totes les solucions de l'equació (4.1.1) amb una solució particular del problema de valor inicial de l'equació (4.1.1). Concretament, fixant $m \in \overset{\circ}{I} \cup \{0\}$, $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ i $f(k) \in \mathcal{C}(I)$, podem fer més precís el Corolari 4.1.12 i assolim el resultat següent.

**Proposició 4.1.35.** ([5]) *(Principi de Superposició). Si* $u(k) \in \mathcal{C}(I)$ *és l'única solució del problema de valor inicial*

$$a(k)u(k+1) - b(k)u(k) + c(k-1)u(k-1) = f(k), \quad k \in \overset{\circ}{I}, \tag{4.1.9}$$

*amb* $u(m) = x_0$ *i* $u(m+1) = x_1$*. Aleshores*

$$u(k) = z(k) + v(k), \quad k \in \overset{\circ}{I},$$

*on*

- $z(k)$ *és la solució del problema de valor inicial de l'equació homogènia*

$$a(k)u(k+1) - b(k)u(k) + c(k-1)u(k-1) = 0;\; k \in \overset{\circ}{I}, \quad u(m) = x_0,\; u(m+1) = x_1,$$

- $v(k)$ *és la solució del problema de valor inicial*

$$a(k)u(k+1) - b(k)u(k) + c(k-1)u(k-1) = f(k);\ k \in \overset{\circ}{I}, \quad u(m) = u(m+1) = 0.$$

L'objectiu és, per cada $f(k) \in \mathcal{C}(I)$ i $m \in \overset{\circ}{I} \cup \{0\}$, trobar l'única solució del problema de valor inicial definit a l'equació (4.1.9). El procediment consisteix a substituir les condicions inicials de la no homogènia a l'equació homogènia i a la completa imposar que siguin 0, ja que simplifica enormement les operacions.
Aleshores, donada una base de S, podem trobar la solució $z(k) \in \mathcal{C}(I)$ utilitzant el Wronskià, com es va concretar en el Corol·lari 4.1.18.
D'altra banda, el següent concepte que ara introduirem serà la clau per poder trobar la solució $v(k) \in \mathcal{C}(I)$ de la Proposició 4.1.35 (Principi de Superposició).

**Definició 4.1.36.** ([5])*(Funció de Green). Anomenem Funció de Green per l'equació en diferències* (4.1.1)*, a la funció $g(\cdot, s) \in \mathcal{C}(I \times I)$, definida $\forall s \in I$ com l'única solució de l'equació en diferències homogènia* (4.1.2) *que satisfà $g(s,s) = 0$ $\forall s \in I$ i compleix*

- $g(s+1, s) = \frac{1}{a(s)}, \quad \forall s \in \overset{\circ}{I} \cup \{0\}$ *o bé,*
- $g(n, n+1) = \frac{-1}{a(n+1)}, \quad n+1 \in \delta(I).$

Donat que $g(\cdot, s) \in S$ $\forall s \in I$, es pot escriure en funció d'una base de $S$.

**Proposició 4.1.37.** ([5]) *Sigui $\{u(k), v(k)\}$ una base de S, aleshores*

$$g(k,s) = \frac{-1}{a(s)w[u,v](s)}[v(s)u(k) - u(s)v(k)], \quad k, s \in I.$$

*I a més, es compleix $g(s, s+1) = \frac{-1}{c(s)}, \quad \forall s \in \overset{\circ}{I} \cup \{0\}.$*

A continuació, presentarem el càlcul de la funció de Green amb un exemple detallat.

**Exemple 4.1.38.** Considerem la següent equació en diferències de segon ordre amb coeficients constants,

$$u(k+1) - 7u(k) + 12u(k-1) = 2k+1, \quad k \in \overset{\circ}{I}. \tag{4.1.10}$$

Per començar, hem de trobar una base de $S$, és a dir, un parell de solucions linealment independents de l'equació homogènia associada a (4.1.10),

$$u(k+1) - 7u(k) + 12u(k-1) = 0, \quad k \in \overset{\circ}{I}. \tag{4.1.11}$$

En aquest cas tenim que,

$$u(k) = 3^k, \quad v(k) = 4^k, \qquad k \in \overset{\circ}{I},$$

són una base de $S$.
Ara, d'acord amb la Definició 4.1.13, procedim a calcular el Wronskià.

$$w[u,v](s) = u(s)v(s+1) - v(s)u(s+1) = 3^s 4^{s+1} - 4^s 3^{s+1}, \quad \forall s \in I.$$

Finalment, aplicant la Proposició 4.1.37, la Funció de Green associada a (4.1.10) és

$$g(k,s) = \frac{-1}{3^s 4^{s+1} - 4^s 3^{s+1}}[4^s 3^k - 3^s 4^k], \quad k, s \in I.$$

Amb l'ús de la Funció de Green, arribem al punt clau que ens indica com obtenir l'expressió de $v(k)$, és a dir, la solució del problema de valor inicial definit a la Proposició 4.1.35 (Principi de Superposició).

**Proposició 4.1.39.** ([5]) *Donada $f(k) \in \mathcal{C}(I)$ i $m \in \overset{\circ}{I} \cup \{0\}$ aleshores l'única solució de l'equació*

$$a(k)u(k+1) - b(k)u(k) + c(k-1)u(k-1) = f(k), \quad k \in \overset{\circ}{I},$$

*que satisfà $u(m) = u(m+1) = 0$ és*

$$u(k) = \sum_{s=m+1}^{k} g(k,s)f(s) \quad k \in \overset{\circ}{I}.$$

**Demostració 4.1.40.** Evidentment tenim que,

$$u(m) = 0 \text{ i } u(m+1) = g(m+1, m+1)f(m+1).$$

D'altra banda, donat $k \in \overset{\circ}{I}$

$$\begin{aligned} & a(k)\sum_{s=m+1}^{k+1} g(k+1,s)f(s) - b(k)\sum_{s=m+1}^{k} g(k,s)f(s) + c(k-1)\sum_{s=m+1}^{k-1} g(k-1,s)f(s) \\ &= \sum_{m+1}^{k-1}(a(k)g(k+1,s) - b(k)g(k,s) + c(k-1)g(k-1,s))f(s) + \\ &\quad + \sum_{s=k-1}^{k}(a(k)g(k+1,s) - b(k)g(k,s))f(s) + a(s)\sum_{s=k}^{k+1} g(k+1,s)f(s) \\ &= (a(k)g(k+1,k) - b(k)g(k,k))f(k) + a(k)g(k+1,k+1)f(k+1) = f(k). \end{aligned}$$

□

Tenint en compte ara la Proposició 4.1.35 (Principi de Superposició), el Corol·lari 4.1.18 i la Proposició 4.1.39, obtenim a continuació l'expressió de la solució única per a cada problema de valor inicial per a l'equació (4.1.1).

**Teorema 4.1.41.** ([5]) *(Fórmula de Lagrange). Fixats $m \in \overset{\circ}{I} \cup \{0\}$, $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ i $f(k) \in \mathcal{C}(I)$, aleshores l'única solució $y(k) \in \mathcal{C}(I)$ de l'equació (4.1.1) que satisfà $y(m) = x_0$ i $y(m+1) = x_1$ està determinada per l'expressió*

$$y(k) = z(k) + \sum_{s=m+1}^{k} g(k,s)f(s), \quad k \in \overset{\circ}{I},$$

*on $z(k) \in S$ satisfà $z(m) = x_0$ i $z(m+1) = x_1$. A més, si $\{u(k), v(k)\}$ és una base de $S$ aleshores,*

$$\begin{aligned} y(k) = {} & \frac{a(m)\rho(m)}{a(0)w[u,v](0)}[(x_0 v(m+1) - x_1 v(m))u(k) + (x_1 u(m) - x_0 u(m+1))v(k)] - \\ & - \frac{1}{a(0)w[u,v]v(0)}[u(k)\sum_{s=m+1}^{k} v(s)\rho(s)f(s) - v(k)\sum_{s=m+1}^{k} u(s)\rho(s)f(s)], \quad k \in I. \end{aligned}$$

**Demostració 4.1.42.** Només ens cal observar que donada $\{u(k), v(k)\}$ una base de S, la funció $\rho(k)a(k)w[u,v](k) = ct \ \forall k \in I$. $\square$

Podem concloure que utilitzant la Funció de Green no cal aplicar cap mètode que depengui del terme independent com ara el mètode dels coeficients indeterminats. És a dir, un cop hem trobat una base de S, tenim la solució tant de l'equació homogènia (4.1.2) com una particular de l'equació completa (4.1.1).

**Observació 4.1.43.** ([5]) És clar que la Fórmula de Lagrange definida a la Proposició 4.1.41 no depèn de la base escollida.

Ara presentarem un exemple per mostrar com aplicar el Teorema 4.1.41. Utilitzarem una equació en diferències amb coeficients constants senzilla per facilitar la determinació d'una base.

**Exemple 4.1.44.** Considerem el següent problema de valor inicial,

$$u(k+1) - 9u(k) + 20u(k-1) = 3k; \ k \in \mathring{I}, \quad u(0) = 1, \ u(1) = 4. \tag{4.1.12}$$

En primer, hem de trobar una base de $S$, és a dir, un parell de solucions linealment independents de l'equació homogènia associada a (4.1.10). És a dir,

$$.u(k+1) - 9u(k) + 20u(k-1) = 0, \quad k \in \mathring{I}. \tag{4.1.13}$$

En aquest cas tenim que,

$$u(k) = 4^k, \quad v(k) = 5^k, \qquad k \in \mathring{I},$$

són una base de $S$.
Ara, utilitzant la Definició 4.1.13, calculem el Wronskià.

$$w[u,v](s) = u(s)v(s+1) - v(s)u(s+1) = 4^s 5^{s+1} - 5^s 4^{s+1}, \quad \forall s \in I.$$

Ara, aplicant la Proposició 4.1.37, la Funció de Green associada a (4.1.10) és

$$g(k,s) = \frac{-1}{4^s 5^{s+1} - 5^s 4^{s+1}} [5^s 4^k - 3^s 5^k], \quad k, s \in I. \tag{4.1.14}$$

Finalment, hem de trobar una solució $z(k)$ de l'equació homogènia (4.1.13) tal que $z(0) = 1$ i $z(1) = 4$. Tanmateix, veiem que

$$u(k) = 4^k, \quad k \in \mathring{I},$$

satisfà que

$$u(0) = 4^0 = 1, \quad u(1) = 4^1 = 4.$$

Aleshores, aplicant el Teorema 4.1.41 tenim que la solució del problema de valor inicial definit a (4.1.12) és

$$y(k) = 4^k + \sum_{s=m+1}^{k} g(k,s)3s, \quad k \in \mathring{I},$$

on $g(k,s)$ l'hem definit a (4.1.14).

D'altra banda, podem utilitzar $\{u(k), v(k)\}$ per obtenir la relació entre la Funció de Green per l'equació (4.1.1) i la Funció de Green de l'adjunta.

**Proposició 4.1.45.** ([5]) *Si* $g(k,s),\ g^*(k,s) \in \mathcal{C}(I \times I)$ *denoten les funcions de Green de les equacions* (4.1.1) *i* (4.1.5) *respectivament, aleshores*

$$g^*(k,s) = -g(s,k), \quad k, s \in I.$$

**Demostració 4.1.46.** Si considerem $\{u(k), v(k)\}$ una base de $S$, aleshores pel Corol·lari 4.1.33 sabem que $\{\rho(k)u(k), \rho(k)v(k)\}$ és una base de $S^*$.
A més, usant la Proposició 4.1.37 s'obté que, $\forall k, s \in I$:

$$\begin{aligned}
g^*(k,s) &= \frac{-\rho(s)\rho(k)}{c(s)w[\rho u, \rho v](s)}[v(s)u(k) - u(s)v(k)] \\
&= \frac{-\rho(k)}{\rho(s)a(s)w[u,v](s)}[v(s)u(k) - u(s)v(k)] \\
&= \frac{\rho(k)}{\rho(k)a(k)w[u,v](k)}[u(s)v(k) - v(s)u(k)] \\
&= -g(s,k).
\end{aligned}$$

On hem considerat que $\rho(s)a(s)w[u,v](s) = \rho(k)a(k)w[u,v](k)$. $\square$

## 4.2 Equacions en en diferències amb coeficients constants

En aquesta secció, examinarem les equacions en diferències de segon ordre amb coeficients constants, les quals es relacionen directament amb la determinació de la matriu inversa d'una matriu Jacobi-Toeplitz, com s'ha esmentat a la Introducció.

Considerem $I = \mathbb{Z}$. Recordem que la següent equació,

$$a(k)u(k+1) - b(k)u(k) + c(k-1)u(k-1) = f(k), \quad k \in \overset{\circ}{I}, \tag{4.2.1}$$

té coeficients constants $\Leftrightarrow$ $a(k) = a$, $b(k) = b$ i $c(k) = c$, $\forall k \in \overset{\circ}{I}$.

### 4.2.1 Resolució estàndard

En aquesta secció, per explicar el funcionament de la resolució estàndard, hem extret tota la informació de [7]. Considerem l'equació en diferències a coeficients constants

$$au(k+1) - bu(k) + cu(k-1) = f(k), \quad k \in \overset{\circ}{I}, \tag{4.2.2}$$

on $a$, $b$, $c \in \mathbb{R}$ i $f(k) \in \mathcal{C}(I)$. La solució general de l'equació (4.2.2) és

$$u(k) = z(k) + v(k), \quad k \in \overset{\circ}{I},$$

on

- $z(k)$ és la solució general de l'equació homogènia associada a l'equació (4.2.2),
- $v(k)$ és una solució particular de l'equació (4.2.2).

Conseqüentment, per tal de determinar la solució general de l'equació (4.2.2), cal seguir els passos següents.

**1. Determinació de la solució general de l'equació homogènia.**

L'equació homogènia associada a l'equació (4.2.2) és

$$au(k+1) - bu(k) + cu(k-1) = 0, \quad k \in \overset{\circ}{I}, \tag{4.2.3}$$

on $a$, $b$, $c \in \mathbb{R}$.

Considerem $\{z_1(k), z_2(k)\}$, una base de $S = \{u(k) \in \mathcal{C}(I) \,|\, au(k+1) - bu(k) + cu(k-1) = 0,\ k \in \overset{\circ}{I}\}$, és a dir, un conjunt de dues solucions linealment independents de l'equació (4.2.3). Aleshores la solució general de l'equació (4.2.3) és

$$z(k) = Az_1(k) + Bz_2(k), \quad k \in \overset{\circ}{I},$$

on $A$, $B \in \mathbb{R}$.
Per trobar la base $\{z_1(k), z_2(k)\}$, podem observar que una solució de la forma $z_1(k) = m^k$,

on $m \in \mathbb{R}$ o $m \in \mathbb{C}$, podria ser adequada. Si substituïm $z_1(k) = m^k$ a l'equació (4.2.3) obtenim que $\forall k \in \overset{\circ}{I}$

$$am^{k+1} - bm^k + cm^{k-1} = 0 \Leftrightarrow m^{k-1}(am^2 - bm + c) = 0.$$

Si $m^{k-1} \neq 0$, tenim que $z_1(k) = m^k$ és una solució si es compleix

$$am^2 - bm + c = 0. \tag{4.2.4}$$

L'equació (4.2.4) s'anomena equació característica. En particular, les característiques de les arrels $m_1$, $m_2$ de l'equació (4.2.4) determinaran la configuració de la base. Podem distingir tres casos.

1. Cas $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$, tal que $m_1 \neq m_2$.

   La base $\{z_1(k), z_2(k)\}$ correspon a $z_1(k) = m_1^k$ i $z_2(k) = m_2^k$. És clar que són independents, ja que,

   $$\begin{vmatrix} m_1^0 & m_1^0 \\ m_1^1 & m_2^1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix} = m_2 - m_1 \neq 0.$$

   Així doncs, la solució general de l'equació (4.2.3) és

   $$z(k) = Am_1^k + Bm_2^k \ , \quad k \in \overset{\circ}{I},$$

   on $A$, $B \in \mathbb{R}$.

2. Cas $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$ tal que $m_1 = m_2$.

   En aquest cas, només tenim una solució independent $z_1(k) = m_1^k$ però es pot veure fàcilment que $z_2(k) = km_1^k$ és també una solució i és independent de $z_1(k) = m_1^k$. De manera que, la solució general de l'equació (4.2.3) és

   $$z(k) = Am_1^k + Bkm_1^k = (A + Bk)m_1^k \ , \quad k \in \overset{\circ}{I},$$

   on $A$, $B \in \mathbb{R}$.

3. Cas $m_1, m_2 \in \mathbb{C}$.

   La base $\{z_1(k), z_2(k)\}$ correspon a $z_1(k) = r^k cos(k\theta)$ i $z_2(k) = r^k sin(k\theta)$ on $r = \sqrt{\frac{c}{a}}$ i $\theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{b}\right)$. Aleshores la solució general de l'equació (4.2.3) és

   $$z(k) = Ar^k cos(k\theta) + Br^k sin(k\theta) \ , \quad k \in \overset{\circ}{I},$$

   on $A$, $B \in \mathbb{R}$.

Introduïm un exemple per il·lustrar aquest mètode.

**Exemple 4.2.1.** Donada la següent equació homogènia,

$$u(k+1) - 5u(k) + 6u(k-1) = 0, \quad k \in \overset{\circ}{I}. \tag{4.2.5}$$

En aquesta circumstància, l'equació característica de l'equació (4.2.5) és

$$m^2 - 5m + 6 = 0.$$

i té d'arrels $m_1 = 2$ i $m_2 = 3$. Per tant, correspon al primer cas en què $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$ i $m_1 \neq m_2$. Així, la solució general de l'equació (4.2.5) és

$$z(k) = A2^k + B3^k \ , \quad k \in \overset{\circ}{I},$$

on $A$, $B \in \mathbb{R}$.

.

**2. Determinació d'una solució particular de l'equació completa.**

En el cas d'una equació completa, per trobar una solució particular $v(k) \in \mathcal{C}(I)$ podem comprovar si $v(k)$ té la mateixa forma que $f(k) \in \mathcal{C}(I)$, que és la dada de l'equació (4.2.2). A continuació, exposem alguns exemples de possibles formes per a $v(k)$, en funció de la forma de $f(k)$.

1. Si $f(k) = r^k$, on $r \in \mathbb{R}$, en aquest cas, cercarem una solució de la forma $v(k) = Cr^k$, amb $C \in \mathbb{R}$.

2. Si $f(k) \in P_n$, on $P_n = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(p(x)) \leq n\}$, considerarem $v(k)$ com un polinomi de coeficients indeterminats tal que $\deg(v(k)) = \deg(f(k))$.

3. Si $f(k) = k^r$, on $r \in \mathbb{R}$, aleshores buscarem una solució de la forma $v(k) = Ck^r$, amb $C \in \mathbb{R}$.

### 4.2.2 Resolució amb polinomis de Txebitxov i la Funció de Green

En aquesta secció presentarem un mètode per al càlcul de les equacions en diferències amb coeficients constants utilitzant equacions en diferències autoadjuntes. Demostrarem que les solucions de les equacions en diferències autoadjuntes amb coeficients constants són una combinació lineal de polinomis de Txebitxov. Aleshores, determinant la relació entre les solucions d'una equació en diferències amb coeficients constants i la seva corresponent autoadjunta obtindrem un mètode més simple per trobar les solucions.

En primer lloc, cal destacar un resultat que ens indica que per trobar la solució del problema de valor inicial

$$a(k)u(k+1) - b(k)u(k) + c(k-1)u(k-1) = 0;\ k \in \mathring{I}, \quad u(m) = x_0,\ u(m+1) = x_1,$$

on $m \in \mathring{I}$ i $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$, és suficient resoldre el mateix problema de valor inicial per a $m = 0$.

**Proposició 4.2.2.** ([5]) *Fixats $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$, si $v(k) \in \mathcal{C}(I)$ és l'única solució de*

$$a(k)u(k+1) - b(k)u(k) + c(k-1)u(k-1) = 0;\ k \in \mathring{I}, \quad u(0) = x_0,\ u(1) = x_1,$$

*llavors $\forall m \in \mathring{I}$, la funció $z(k) \in \mathcal{C}(I)$ definida com $z(k) = v(k-m)$ és l'única solució de*

$$a(k)u(k+1) - b(k)u(k) + c(k-1)u(k-1) = 0;\ k \in \mathring{I}, \quad u(m) = x_0,\ u(m+1) = x_1.$$

**Definició 4.2.3.** ([5]) *Donat $q \in \mathbb{R}$ i l'equació en diferències autoadjunta amb coeficients constants*

$$2qu(k) - u(k-1) - u(k+1) = 0, \quad k \in \mathring{I}, \tag{4.2.6}$$

*denotem per $S_q$ l'espai de les seves solucions.*

**Definició 4.2.4.** ([5]) *Donat $q \in \mathbb{R}$, l'única solució del problema de valor inicial*

$$2qu(k) - u(k-1) - u(k+1) = 0;\ k \in \mathring{I}, \quad u(0) = 0,\ u(1) = 1, \tag{4.2.7}$$

*s'anomena solució fonamental i la denotarem com $\varphi_q(k)$.*

**Observació 4.2.5.** ([5]) Donat $q \in \mathbb{R}$, si definim $\hat{\varphi}_q(k) \in \mathcal{C}(I)$ com $\hat{\varphi}_q(k) = \varphi_q(k-1)$, llavors $\{\varphi_q(k), \hat{\varphi}_q(k)\}$ és una base de $S_q$.

**Proposició 4.2.6.** ([5]) *La Funció de Green per l'equació autoadjunta amb coeficients constants*

$$au(k+1) - bu(k) + au(k-1) = f(k), \quad k \in \mathring{I}, \tag{4.2.8}$$

*és*

$$g(k,s) = \frac{1}{a}\varphi_q(k-s), \quad k, s \in I,$$

*on $q = \frac{b}{a}$.*

**Demostració 4.2.7.** Per definició, la Funció de Green per l'equació (4.2.8) és una solució específica de l'equació homogènia associada a (4.2.8). Per tant, ha de ser proporcional a $\varphi_q(k)$, on $q = \frac{b}{a}$.

Com hem vist a l'equació (4.2.7), les condicions inicials de la solució fonamental estan fixades en $m = 0$. En canvi, les condicions inicials de la Funció de Green estan fixades en $m = s$. Per tant, utilitzant la Proposició 4.2.2, podem concloure que la Funció de Green per l'equació (4.2.8) serà proporcional a $\varphi_q(k-s)$.
Finalment, multiplicant pel factor $\frac{1}{a}$, veiem que $g(k,s) = \frac{1}{a}\varphi_q(k-s)$ compleix $g(s+1,s) = 1/a$. $\square$

Per conseqüent, es dedueix la següent versió de la Fórmula de Lagrange conforme a la definició proporcionada pel Teorema 4.1.41.

**Teorema 4.2.8.** ([5]) *(Fórmula de Lagrange per a equacions autoadjuntes amb coeficients constants). Fixats $m \in \overset{\circ}{I} \cup \{0\}$, $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ i $f(k) \in \mathcal{C}(I)$, aleshores l'única solució del problema de valor inicial*

$$au(k+1) - bu(k) + au(k-1) = f(k); \; k \in \overset{\circ}{I}, \quad u(m) = x_0, \; u(m+1) = x_1,$$

*és*

$$u(k) = x_1\varphi_q(k-m) - x_0\varphi_q(k-1-m) + \frac{1}{a}\sum_{s=m+1}^{k}\varphi_q(k-s)f(s)\,ds, \quad k \in \overset{\circ}{I}.$$

A continuació, donats $a, b, c \in \mathbb{R}$ i $f(k) \in \mathcal{C}(I)$, analitzarem com transformar l'equació en diferències amb coeficients constants

$$au(k+1) - bu(k) + cu(k-1) = f(k), \quad k \in \overset{\circ}{I}, \tag{4.2.9}$$

en una equació autoadjunta amb coeficients constants i establirem la relació entre les solucions de totes dues respectivament.

**Lema 4.2.9.** ([5]) *Sigui $\rho(k) \in \mathcal{C}(I)$, la funció d'acompanyament definida a* (4.1.7). *Aleshores, l'equació* (4.2.9) *té les mateixes solucions que l'equació autoadjunta*

$$a\rho(k)u(k+1) - b\rho(k)u(k) + a\rho(k-1)u(k-1) = \rho(k)f(k), \quad k \in \overset{\circ}{I}, \tag{4.2.10}$$

**Demostració 4.2.10.** En primer lloc, és evident que podem assumir, sense pèrdua de generalitat, que $a > 0$. Si considerem la funció d'acompanyament $\rho(k) \in \mathcal{C}(I)$, definida a (4.1.7), obtenim que l'equació (4.2.9) és equivalent a l'equació

$$a\rho(k)u(k+1) - b\rho(k)u(k) + c\rho(k)u(k-1) = \rho(k)f(k), \quad k \in \overset{\circ}{I}.$$

Finalment, utilitzant el Lema 4.1.28, tenim que, $\forall k \in \overset{\circ}{I}$ $c\rho(k) = a\rho(k-1)$, demostrant així el resultat. $\square$

Encara que hem demostrat que l'equació (4.2.9) és equivalent a una equació autoadjunta, aquesta no presenta coeficients constants. No obstant això, exposarem com és possible transformar l'equació (4.2.9) en una equació autoadjunta amb coeficients constants, de manera que les solucions d'aquesta nova equació es puguin relacionar fàcilment amb les de l'equació original.

Per fer-ho, considerarem els següents valors

$$r = \sqrt{\frac{|c|}{a}}, \qquad q = \frac{b}{2\sqrt{a|c|}}. \tag{4.2.11}$$

**Proposició 4.2.11.** ([5]) *$u(k) \in \mathcal{C}(I)$ és solució de l'equació* (4.2.9) $\Leftrightarrow$

$$u(k) = r^{k-1}v(k), \quad k \in \overset{\circ}{I},$$

*on $v(k) \in \mathcal{C}(I)$ és solució de l'equació en diferències amb coeficients constants*

$$v(k+1) - 2qv(k) + s(c)v(k-1) = a^{-1}r^{-k}f(k), \quad k \in \overset{\circ}{I}, \tag{4.2.12}$$

*tal que $s(k) \in \mathcal{C}(I)$ és la funció signe definida a* (4.1.6).

**Demostració 4.2.12.** Segons el Lema 4.2.9, $u(k) \in \mathcal{C}(I)$ és solució de l'equació (4.2.9) $\Leftrightarrow$

$$a\rho(k)u(k+1) - b\rho(k)u(k) + a\rho(k-1)u(k-1) = \rho(k)f(k), \quad k \in \overset{\circ}{I}. \tag{4.2.13}$$

Considerant $r$ definit a (4.2.11), tenim que

$$\rho(k) = (c^{-1}a)^k = s(c)^k r^{-2k}. \tag{4.2.14}$$

Per tant, substituint l'expressió (4.2.14) a l'equació (4.2.13),

$$as(c)^k r^{-2k}u(k+1) - bs(c)^k r^{-2k}u(k) + as(c)^{k-1}r^{-2(k-1)}u(k-1) = s(c)^k r^{-2k}f(k), \quad k \in \overset{\circ}{I}.$$

Ara, multiplicant pel factor $s(c)^{-k}r^k$, obtenim

$$ar^{-k}u(k+1) - br^{-k}u(k) + s(c)ar^{2-k}u(k-1) = r^{-k}f(k), \quad k \in \overset{\circ}{I}$$

$\Leftrightarrow$

$$av(k+1) - br^{-1}v(k) + s(c)av(k-1) = r^{-k}f(k), \quad k \in \overset{\circ}{I}, \tag{4.2.15}$$

on $v(k) = r^{1-k}u(k)$.
Finalment multiplicant l'equació (4.2.15) pel factor $\frac{1}{a}$ i considerant $q$ definit a (4.2.11), obtenim el que volíem demostrar. $\square$

**Corol·lari 4.2.13.** ([5]) *Quan $c > 0$, $u(k) \in \mathcal{C}(I)$ és solució de l'equació* (4.2.9) $\Leftrightarrow$

$$u(k) = r^{k-1}v(k), \quad k \in \overset{\circ}{I},$$

*on $v(k) \in \mathcal{C}(I)$ és solució de l'equació autoadjunta amb coeficients constants*

$$v(k+1) - 2qv(k) + v(k-1) = a^{-1}r^{-k}f(k), \quad k \in \overset{\circ}{I}. \tag{4.2.16}$$

Aplicant la Fórmula de Lagrange per a equacions autoadjuntes amb coeficients constants definida al Teorema 4.2.8, per trobar la solució $v(k) \in \mathcal{C}(I)$ de l'equació (4.2.16) només cal calcular la solució fonamental $\varphi_q(k)$.

**Lema 4.2.14.** ([5]) *Donat $q \in \mathbb{R}$, l'equació autoadjunta amb coeficients constants*

$$2qu(k) - u(k-1) - u(k+1) = 0, \quad k \in \overset{\circ}{I}, \tag{4.2.17}$$

*és una equació de Txebixov amb paràmetre $q$, i les seves solucions són successions de Txebixov amb paràmetre $q$.*

**Lema 4.2.15.** ([5]) *Donat $q \in \mathbb{R}$, qualsevol successió de Txebitxov amb paràmetre $q$ es pot expressar com a combinació lineal de polinomis de Txebitxov de segona espècie. És a dir, si $u(k) \in \mathcal{C}(I)$ és solució de l'equació (4.2.17), aleshores $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que*

$$u(k) = \alpha U_{k-1}(q) + \beta U_{k-2}(q), \quad k \in \overset{\circ}{I}. \tag{4.2.18}$$

**Corol·lari 4.2.16.** ([5]) *La solució fonamental $\varphi_q(k) \in \mathcal{C}(I)$ del problema de valor inicial definit a (4.2.7) és*

$$\varphi_q(k) = U_{k-1}(q), \quad k \in \overset{\circ}{I}.$$

**Demostració 4.2.17.** La demostració és immediata. Pel Lema 4.2.15, tenim que $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\varphi_q(k) = \alpha U_{k-1}(q) + \beta U_{k-2}(q), \quad k \in \overset{\circ}{I}.$$

Finalment, aplicant les condicions inicials del problema de valor inicial definit a (4.2.7), obtenim que $\alpha = 1$ i $\beta = 0$. $\square$

Conseqüentment aplicant la Fórmula de Lagrange per a equacions autoadjuntes amb coeficients constants definida al Teorema 4.2.8 i el Corol·lari 4.2.16 obtenim el següent resultat.

**Corol·lari 4.2.18.** ([5]) *Fixats $m \in \overset{\circ}{I} \cup \{0\}$, $q, x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ i $f(k) \in \mathcal{C}(I)$, aleshores l'única solució del problema de valor inicial*

$$v(k+1) - 2qv(k) + v(k-1) = f(k);\ k \in \overset{\circ}{I}, \quad v(m) = x_0,\ v(m+1) = x_1,$$

*és*

$$v(k) = x_1 U_{k-m-1}(q) - x_0 U_{k-m-2}(q) + \sum_{s=m+1}^{k} U_{k-s-1}(q) f(s), \quad k \in \overset{\circ}{I}.$$

Finalment, a conseqüència del Corol·lari 4.2.18 i el Corol·lari 4.2.13 podem escriure la Fórmula de Lagrange per a equacions en diferències amb coeficients constants.

**Teorema 4.2.19.** ([5]) *(Fórmula de Lagrange per a equacions en diferències amb coeficients constants). Fixats $m \in \overset{\circ}{I} \cup \{0\}$, $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ i $f(k) \in \mathcal{C}(I)$, aleshores l'única solució del problema de valor inicial*

$$a(k)u(k+1) - b(k)u(k) + c(k-1)u(k-1) = f(k);\ k \in \overset{\circ}{I}, \quad u(m) = x_0,\ u(m+1) = x_1.$$

*és*

$$u(k) = x_1(\sqrt{a^{-1}c})^{k-m-1} U_{k-m-1}(q) - x_0(\sqrt{a^{-1}c})^{k-m} U_{k-m-2}(q) +$$
$$+ \frac{1}{a} \sum_{s=m+1}^{k} (\sqrt{a^{-1}c})^{k-s-1} U_{k-s-1}(q) f(s)\, ds, \quad k \in \overset{\circ}{I},$$

*on $q = \frac{b}{2\sqrt{ac}}$.*

A continuació, presentarem un exemple per mostrar l'aplicació del Teorema 4.2.19.

**Exemple 4.2.20.** Considerem el següent problema de valor inicial,

$$5u(k+1) - 4u(k) + 3u(k-1) = k^2 - 3;\ k \in \overset{\circ}{I}, \quad u(4) = 1,\ u(5) = 4. \tag{4.2.19}$$

En aquest cas, tenim que $m = 4$, $x_0 = 1$, $x_1 = 4$ i $q = \frac{4}{2\sqrt{15}} = \frac{2}{\sqrt{15}}$. Aleshores aplicant el Teorema 4.2.19, l'única solució del problema de valor inicial definit a (4.2.19) és

$$u(k) = 4(\sqrt{5^{-1}3})^{k-5}U_{k-5}(q) - (\sqrt{5^{-1}3})^{k-4}U_{k-6}(q) + \frac{1}{5}\sum_{s=5}^{k}(\sqrt{5^{-1}3})^{k-s-1}U_{k-s-1}(q)(s^2-3)\,ds,$$

on $\{U_n(x)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ és la successió de polinomis de Txebixov de segona espècie i $q = \frac{2}{\sqrt{15}}$, $\forall k \in \overset{\circ}{I}$.

# Capítol 5

# Conclusions

En el marc d'aquest treball de fi de grau, he aconseguit establir amb èxit la relació entre l'estudi de la invertibilitat d'una matriu de Jacobi i la resolució d'equacions en diferències. Un resultat clau és la constatació que, només amb el coneixement de la base de la solució homogènia, podem abordar la resolució completa de qualsevol equació en diferències amb coeficients variables. A més, en el cas particular dels coeficients constants, hem demostrat que els polinomis de Txebitxev constitueixen la base de les solucions de l'equació homogènia. Això implica que podem proporcionar una solució per a qualsevol equació en diferències amb coeficients constants sense la necessitat d'utilitzar l'equació característica per trobar la base.

En el terreny personal, aquesta experiència m'ha ajudat a desenvolupar habilitats com l'elaboració de definicions formals i la redacció de demostracions organitzades i rigoroses, capacitant-me per trobar maneres més clares d'explicar els conceptes complexos. A més, ha reforçat les meves aptituds a l'hora d'entendre de manera eficaç els articles acadèmics, una habilitat clau per al meu creixement acadèmic i professional. Estic profundament agraïda d'haver tingut l'oportunitat de dur a terme aquest projecte, que ha esdevingut una gran part dels fonaments sobre els que començar a construir la meva carrera laboral.

# Bibliografia


[1] Kaddoura, I., Mourad, B; On a unified approach to homogeneous second-order linear difference equations with constant coefficients and some applications, Special Matrices, 2024.

[2] Usmani, R.A; Inversion of Jacobi's Tridiagonal Matrix, Computers Math. Applic. Vol. 27, University of Manitoba, Canada, 1994.

[3] Gladwell, G.M.L; Solid Mechanics and its applications, Volume 119, Kluwer Academic Publishers, University of Waterloo, 2004.

[4] Kucerovsky, D., Mousavand, K., Sarraf, A., Katzourakis, N; On some properties of Toeplitz matrices. Cogent Mathematics, 2016.
https://doi.org/10.1080/23311835.2016.1154705

[5] Jiménez, M.J ; Ecuaciones en diferencias lineales de segundo orden y su aplicación al Anàlisis Matricial, Tesis doctoral, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, 2015.
http://hdl.handle.net/10803/387126

[6] Goldberg, S; Introduction to Difference Equations, John Wiley and Sons Inc, 1958.

[7] Viader, P ; Notes Maths III, Second order Difference Equations, Universitat Pompeu Fabra, Barcelona, 2013.

[8] Rodó, P; Economipedia, Regla de Laplace, 2020.
https://economipedia.com/definiciones/regla-de-laplace.html