UNIVERSITAT DE BARCELONA

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

UN ESTUDIO DEL CAOS EN MODELOS FÍSICOS

Autor: Jose Ferrer-Bonsoms Castan

Director: Dr. Angel Jorba
Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica
Factultad de Matemáticas

Barcelona, 10 de junio de 2024

Abstract

Throughout this work you will find the beginning of the chaos theory together with the Lorenz path in the development of the Lorenz attractor. This will be introduced by some basic notions of the most used numerical methods to solve systems of differential equations. Finally, the development of the double pendulum model and the chaotic behavior in this model is discussed.

Resumen

En este trabajo se encontrará el inicio de la teoría del caos junto con el recorrido de Lorenz en el desarrollo del Atractor de Lorenz. Esto será introducido por unas nociones básicas de los métodos numéricos más utilizados para resolver sistema de ecuaciones diferenciales. Por último se trabaja el desarrollo del modelo del doble péndulo y el comportamiento caótico en este.

2020 Mathematics Subject Classification. 11G05, 11G10, 14G10

Agradecimientos

A mi familia, que durante estos años me ha apoyado siempre con su paciencia y cariño. A Ana, la alegría de mis días. Al mejor wingman que he tenido, Álvaro. A mi tutor Angel, que me ha enseñado y guiado durante estos meses. Por último, a Dios que me mantiene vivo cada día.

Índice

1. Introducción **1**

2. Métodos numéricos **2**

2.1. Problema del Valor Inicial 2

2.2. Modelización de EDOs 3

2.3. Método de Euler 4

2.4. Método de Taylor 8

2.5. Método de Runge-Kutta 11

2.6. Métodos Lineales Multipaso 18

3. El caos en modelos físicos **21**

3.1. ¿Qué es el caos? 21

3.2. El atractor de Lorenz 22

3.3. Mapa de Lorenz 29

4. El doble péndulo **31**

4.1. Las ecuaciones de movimiento 31

4.2. El caos en el doble péndulo 35

1. Introducción

El caos, como rama de la física y la matemática, ha revolucionado nuestra comprensión de los sistemas dinámicos no lineales y complejos. A pesar de que estos sistemas obedecen a leyes deterministas, su comportamiento puede ser extremadamente sensible a las condiciones iniciales, lo que da lugar a una evolución aparentemente aleatoria y desordenada. Este fenómeno, conocido como caos, se manifiesta en una amplia variedad de contextos, desde la meteorología hasta la dinámica de fluidos, la biología y la economía. En este trabajo se aborda el estudio del caos en modelos físicos, combinando teoría, métodos numéricos y aplicaciones prácticas.

Primero veremos un estudio de los métodos numéricos más utilizados para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias, que son fundamentales para la simulación y el análisis de sistemas dinámicos. Los métodos de Euler, Taylor, Runge-Kutta y los métodos lineales multipaso se presentan en detalle. Estos métodos permiten aproximar soluciones a ecuaciones diferenciales que, en muchos casos, no pueden resolverse de forma analítica. La comprensión y correcta aplicación de estos métodos es crucial para el estudio de sistemas caóticos, ya que la precisión y estabilidad de las soluciones numéricas influyen directamente en la interpretación de los resultados.

La segunda sección introduce la teoría del caos. Se explica cómo sistemas deterministas simples pueden producir comportamientos impredecibles y complejos debido a su sensibilidad a las condiciones iniciales. Se analiza el concepto de atractores caóticos y el conocido efecto mariposa, que son pilares fundamentales de la teoría del caos. En este contexto, se presenta el trabajo de Edward Lorenz, quien descubrió el atractor que lleva su nombre mientras estudiaba un modelo simplificado de convección atmosférica.

Por último, la tercera sección se dedica al análisis del modelo del doble péndulo, un sistema físico clásico que exhibe un comportamiento caótico. Se describen las ecuaciones de movimiento del doble péndulo y se discuten las características de su dinámica.

2. Métodos numéricos

A lo largo de esta sección explicaré y demostraré algunos de los métodos numéricos más importantes a la hora de resolver ecuaciones diferenciales complejas. Para ello, seguiremos las explicaciones de [1].

2.1. Problema del Valor Inicial

Definición 2.1. *Llamamos Problema de Cauchy o Problema del Valor Inicial (PVI)*[1] *a la resolución de*

$$\begin{cases} x'(t) = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{2.1}$$

donde $f(t,x)$ es una función dada, $x'(t)$ representa la derivada de la variable $x(t)$ en función del tiempo y x_0 representa el valor de $x(t)$ en el tiempo inicial t_0.

Si consideramos el sistema de EDOs y valores iniciales que constituyen un Problema de Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = p(t,u,v), \quad u(t_0) = \eta_0, \\ v'(t) = q(t,u,v), \quad v(t_0) = \eta_1, \end{cases} \tag{2.2}$$

donde tenemos que $u = u(t)$ y $v = v(t)$. Podemos agrupar estas ecuaciones en vectores, de manera que obtendríamos el siguiente problema de valor inicial de vectores

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t,\mathbf{x}(t)), \quad t > t_0, \\ \mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\eta}, \end{cases} \tag{2.3}$$

teniendo en cuenta que

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t,\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} p(t,u,v) \\ q(t,u,v) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \eta_0 \\ \eta_1 \end{bmatrix}$$

Gracias al resultado de Picard-Lindelöf, visto en la asignatura de Ecuaciones Diferenciales, podemos afirmar que cada PVI tiene solución, y además esta es única si la función $f(t,x)$ satisface las siguientes condiciones:

1. $f(t,x(t))$ es continua sobre un compacto
2. f es Lipschitziana en x, es decir existe N > 0 de modo que

$$||f(t,x) - f(t,y)||_\infty \leq N||x-y||_\infty.$$

Este resultado se conoce como el Teorema de Existencia y Unicidad. Por simplicidad, supondremos que las siguientes funciones pertenecen a C^2.

Veremos más adelante como los métodos numéricos que aquí presentamos se aplican tanto para resolver problemas de valor inicial de la forma de (2.1) como de (2.2).

[1] Esta definición es del caso unidimensional

2.2. Modelización de EDOs

A continuación siguen una serie de ejemplos en los que veremos como mediante sistemas de ecuaciones diferenciales y el problema del valor inicial, podemos modelizar diferentes comportamientos que ocurren en el mundo.

Ejemplo 2.2.1

En este primer ejemplo consideraremos el comportamiento de una taza de té caliente que está expuesta a una sala con menor temperatura. Pretendemos modelizar la temperatura de esta taza suponiendo que se enfría de acuerdo con la ley del enfriamiento de Newton.

Denotaremos por $u(t)$ la temperatura de de la taza de té, que consideramos está hirviendo en tiempo $t_0 = 0$; el tiempo t lo mediremos en horas; α denotará el coeficiente de intercambio de calor, que dejaremos constante a $8°Ch^{-1}$ y por último, v representará la temperatura de la habitación. De esta manera, siguiendo la ecuación de enfriamiento de Newton obtenemos la siguiente ecuación

$$u'(t) = -\alpha(u(t) - v). \tag{2.4}$$

Para estudiar esta situación propongo dos casos:

1. En el primer caso, la temperatura de la habitación está fija a una constante k, por ejemplo $k = 15°$. En este caso, obtenemos la ecuación

   $$u'(t) = -8(u(t) - 15), \quad u(0) = 100. \tag{2.5}$$

   Y resolviendo mediante el método de separación de variables obtenemos la solución

   $$u(t) = 80e^{-8t} + 20. \tag{2.6}$$

   Observamos que la temperatura decrece con carácter exponencial en los primeros minutos, y después se mantiene constante a $20°$.

2. En el segundo caso suponemos que la habitación también se está enfriando según la ley de enfriamiento de Newton, y tiene la ecuación de enfriamiento

   $$v'(t) = -1/8(v(t) - 5), \quad v(0) = 20. \tag{2.7}$$

   Esto suponiendo que la temperatura exterior es de $5°$. Por lo tanto, nos encontramos con el sistema de ecuaciones diferenciales, que se constituye de dos problemas de valor inicial

   $$\begin{cases} u'(t) = -8(u(t) - v(t)), & u(0) = 100, \\ v'(t) = -1/8(v(t) - 5), & v(0) = 20. \end{cases} \tag{2.8}$$

   Igual que en el primer caso, la segunda ecuación se puede resolver de manera directa con el método de separación de variables. Obtenemos

   $$v(t) = 15e^{-t/8} + 5. \tag{2.9}$$

Si sustituimos esta ecuación en la que describe el cambio de $u(t)$, tenemos la ecuación

$$u'(t) = -8(u(t) - 15e^{-t/8} - 5, \quad v(0) = 100. \tag{2.10}$$

Con lo que obtenemos una ecuación diferencial de primer grado que depende únicamente del tiempo. Resolviendo por separación de variables obtenemos la solución

$$u(t) = \frac{1675}{21}e^{-8t} + \frac{320}{21}e^{-t/8} + 5. \tag{2.11}$$

Observamos que la en este caso la temperatura de la taza también decrece con carácter exponencial, solo que en este caso lo hará hasta llegar a los 5 grados, que es la temperatura exterior. Si miramos a la ecuación que nos mide la temperatura de la habitación, vemos que de igual manera su temperatura disminuirá exponencialmente hasta mantenerse en 5°.

En este ejemplo vemos como las ecuaciones diferenciales y el problema del valor inicial nos permiten modelizar el comportamiento de cierta magnitud a lo largo de un tiempo t. En este caso sin embargo, se trata de un ejemplo simple con un comportamiento que se puede expresar con una ecuación diferencial resoluble por procedimientos matemáticos más conocidos y sencillos. Lo que presento a continuación son una serie de métodos que nos permitirán resolver aquellas ecuaciones diferenciales con las que modelizaremos comportamientos más complejos.

2.3. Método de Euler

El primer método que mostraré será el de Euler, seguramente el más conocido y sencillo de los que presentaré en este trabajo. Recuerdo que la motivación detrás de estos métodos es resolver problemas de valor inicial de la forma

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & t \in [t_0, t_f], \\ x(t_0) = \eta. \end{cases} \tag{2.12}$$

Estos problemas tienen una solución única para un intervalo concreto de tiempo $t \in [t_0, t_f]$ por el teorema de Existencia y Unicidad, ya que por simplicidad vamos a asumir que $f(t, x(t)) \in C^2$ y que f cumple la condición de Lipschitz con constante L.

La idea detrás de este método consiste en que mediante pequeños saltos de tiempo h, podemos calcular la soluciones para $x(t_{i+1}) = x(t_i + h)$, para todo i de manera que $t_i \in [t_0, t_f]$. Para calcular $x(t_{i+1})$ utilizaremos la recta tangente al punto encontrado $P_i(t_i, p_i)$. Podemos ver como el tamaño del salto h determinará tanto la cantidad de pasos que debemos hacer como el error que cometemos. Esto lo veremos matemáticamente más adelante.

Veamos el caso general del método y un ejemplo concreto. Como hemos dicho, pretendemos resolver el caso general del problema del valor inicial en (2.12). Para ello, consideramos la serie de Taylor de $x(t + h)$ con resto:

$$x(t + h) = x(t) + hx'(t) + R_1(t). \tag{2.13}$$

Donde denotamos por R_1 al resto de términos de grado mayor a 1 que llamamos *error local de truncamiento* (siglas LTE en inglés) . Como estamos considerando que $x(t) \in C^2$ (para

aplicar el teorema de Existencia y Unicidad de soluciones), entonces podemos utilizar el término $x''(t)$ para formular $R_1(t)$ de la siguiente manera

$$R_1(t) = \frac{1}{2!}h^2 x''(\beta), \quad \beta \in (t, t+h), \tag{2.14}$$

y si tomamos una constante M tal que $|x``(t)| \leq M \forall t \in (t_0, t_f)$, entonces tenemos que

$$|R_1(t)| \leq \frac{1}{2}Mh^2,$$

de lo que se desprende que $R_1(t) = O(h^2)$. Como h puede ser arbitrariamente pequeño, tenemos que $R_1(t)$ puede ser omitido. Una vez visto esto, podemos obtener el método de Euler reescribiendo (2.13) utilizando que $R_1(t)$ es negligible y que $x + (t) = f(t, x(t))$ visto en (2.12), obtenemos así que

$$x(t+h) = x(t) + hf(t, x(t)). \tag{2.15}$$

Ahora, dividimos el espacio de tiempo en intervalos de tiempo h. De esta manera, obtenemos $N = [(t_f - t_0)/h]$[1] intervalos de tiempo. Utilizaremos la siguiente notación para referirnos a cada uno de estos tiempos

$$t_n = t_0 + nh, \quad n = 1 : N,$$

con $t_N = t_f$.

Con esta división del intervalo de t, obtenemos N ecuaciones de la forma de (2.15), de manera que con las condiciones iniciales podemos solucionar la primera y con esta las siguientes de manera recursiva. Esto es lo que se conoce como el método de Euler

$$x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n), \quad n = 0 : N, \tag{2.16}$$

donde x_n es la solución obtenida para el tiempo t_n. En el libro de David F. Griffiths y Desmond J. Highman se nos presenta la notación

$$f_n = f(t_n, x_n),$$

de manera que la solución se expresa como

$$x_{n+1} = x_n + hf_n. \tag{2.17}$$

Aunque en un principio podemos despreciar el error local de truncamiento, a medida que iteramos las soluciones, este error irá creciendo y debemos entender bien como lo hace. Hasta ahora hemos acotado el error local de truncamiento por Mh^2 en cada solución local y ahora queremos encontrar una formula para el error global.

El siguiente teorema y su demostración están extraídos de [2].

Teorema 2.2. *Si f cumple la condición de Lipschitz con constante L, entonces el error global de truncamiento esta acotado de la siguiente manera*

$$||x(t) - \tilde{x}(t)|| \leq \begin{cases} ||x(t_0) - \tilde{x}(t_0)|| + hM(t - t_0), & L = 0, \\ \exp((t - t_0)L)||x(t_0) - \tilde{x}(t_0)|| + \exp((t - t_0)L = -1\frac{hM}{L}, & L > 0. \end{cases} \tag{2.18}$$

Donde $\tilde{x}(t)$ es la solución de (2.12) para un intervalo $[t_0, t_n]$ con $n = 1 : N$,M es una constante tal que $|R_1(t)| \leq \frac{1}{2}Mh^2$ para todo $t \in [t_0, t_N]$.

[1] Utilizamos la notación $[\cdot]$ para referirnos a la parte integral de una cantidad, omitiendo la parte decimal

Demostración. Como indica el teorema, denotamos por $\tilde{x}(t)$ a la solución de (2.12) para un intervalo $[t_0, t_n]$ con $n = 1 : N$. Esta solución es de la forma

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}(t_{k-1}) + hf(t_{k-1}, \tilde{x}(t_{k-1})), \tag{2.19}$$

para cierto intervalo (t_o, t_k).

Por otro lado, tomamos la serie de Taylor de la solución $x(t)$

$$x(t) = x(t_{k-1}) + hf(t_{k-1}, x(t_{k-1})) + R_1(t), \quad t \in (t_{k-1}, t_k], \tag{2.20}$$

con $R_1(t) = \frac{1}{2!}h^2x''(\epsilon), \epsilon \in (t, t+h]$. Sea M una constante tal que $|R_1(t)| \leq \frac{1}{2}Mh^2$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned} x(t) = x(t_{k-1}) + hf(t_{k-1}, x(t_{k-1})) + R_1(t) &\leq x(t_{k-1}) + hf(t_{k-1}, x(t_{k-1})) + \frac{1}{2!}Mh^2 \\ &\leq x(t_{k-1}) + hf(t_{k-1}, x(t_{k-1})) + Mh^2. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Denotamos por $\alpha(t)$ el error cometido en la aproximación a la solución real $x(t)$ y por $\beta(t)$ al error en la aproximación de $x'(t)$, es decir, en $f(t, x(t))$. Es decir, tenemos que

$$\alpha(t) = x(t) - \tilde{x}(t), \tag{2.22}$$

$$\beta(t) = f(t, x(t)) - f(t, \tilde{x}(t)). \tag{2.23}$$

De esta manera, utilizando que f cumple la condición de Lipschitz con constante L,

$$||f(t, x(t)) - f(t, \tilde{x}(t))|| \leq ||x(t) - \tilde{x}(t)||, \tag{2.24}$$

y sustituyendo con (2.19) y (2.20)

$$||\beta(t)|| \leq L||\alpha(t)||. \tag{2.25}$$

Si restamos las ecuaciones (2.21) y 2.19) obtenemos que

$$\alpha(t) \leq (x(t_{k-1}) + hf(t_{k-1}, x(t_{k-1})) + Mh^2) - (\tilde{x}(t_{k-1}) + hf(t_{k-1}, \tilde{x}(t_{k-1}))) \tag{2.26}$$

$$= (x(t_{k-1}) - \tilde{x}(t_{k-1})) + h(f(t_{k-1}, x(t_{k-1})) - f(t_{k-1}, \tilde{x}(t_{k-1}))) + Mh^2 \tag{2.27}$$

$$= \alpha(t_{k-1}) + h\beta(t_{k-1}) + Mh^2. \tag{2.28}$$

Por lo tanto utilizando la ecuación (2.25)

$$||\alpha(t)|| \leq ||\alpha(t_{k-1})|| + h||\beta(t_{k-1})|| + Mh^2 \tag{2.29}$$

$$\leq ||\alpha(t_{k-1})|| + hL||\alpha(t_{k-1})|| + Mh^2 \tag{2.30}$$

$$\leq (1 + hL)||\alpha(t_{k-1})|| + Mh^2 \tag{2.31}$$

Distinguimos dos casos

1. Si $L = 0$ tenemos que $||\alpha(t)|| \leq ||\alpha(t_0)|| + Mh^2 \leq ||\alpha(t_0)|| + hM(t - t_0)$
2. Si $L > 0$ entonces

$$||\alpha(t)|| + \frac{hM}{L} \leq (1 + hL)(||\alpha(t_{k-1})|| + \frac{hM}{L}) \tag{2.32}$$

$$\leq \exp(hL)(||\alpha(t_{k-1})|| + \frac{hM}{L}) \tag{2.33}$$

$$\leq \exp((t - t_0)L)(||\alpha(t_{k-1})|| + \frac{hM}{L}). \tag{2.34}$$

$\square$

Visto esto, podemos afirmar el siguiente teorema

Teorema 2.3. *Bajo las condiciones descritas en el teorema anterior*

$$||x(t_n) - \tilde{x}(t_n)|| \longrightarrow 0 \text{ cuando } n \longrightarrow \infty.$$

Es decir, el método de Euler converge a la solución del problema del valor inicial cuando iteramos n a infinito.

Ejemplo 2.3.1

Veamos ahora una aplicación concreta del método de Euler. Tomamos el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = (1-2t)x(t), & t > 0, \\ x(0) = 1. \end{cases} \tag{2.35}$$

tomando un salto de $h = 0{,}3$ y con $0 \leq t \leq 0{,}9$. En este caso en particular tenemos que $f(t, x(t)) = (1-2t)x(t)$.

Para $t = 0$, tenemos que $x(0) = 1$ y si sustituimos en la EDO, obtenemos que $x'(0) = (1 - 2 \times 0)x(0) = 1$. Es decir, tenemos un primer punto de la solución aproximada $P_0(t_0, x(t_0)) = (0, 1)$. De esta manera, utilizando el método de Euler y en particular la ecuación (2.17) podemos calcular el segundo punto

$$\begin{aligned} t_1 &= t_0 + h = 0{,}3, \\ x_1 &= x_0 + hf_0 = x_0 + hx_0' = 1 + 0{,}3 = 1{,}3, \\ x_1' &= (1 - 2t_1)x(t_1) = 0{,}52. \end{aligned}$$

Para $t = 2h$ y $t = 3h$ el procedimiento es análogo

$$\begin{aligned} t_2 &= t_1 + h = 0{,}6, \\ x_2 &= x_1 + hx_1' = 1{,}456, \\ x_2' &= (1 - 2t_2) = x(t_2) = -0{,}2912, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_3 &= t_2 + h = 0{,}9, \\ x_3 &= x_2 + hx_2' = 1{,}3686, \\ x_3' &= (1 - 2t_3)x(t_3) = -1{,}0949. \end{aligned}$$

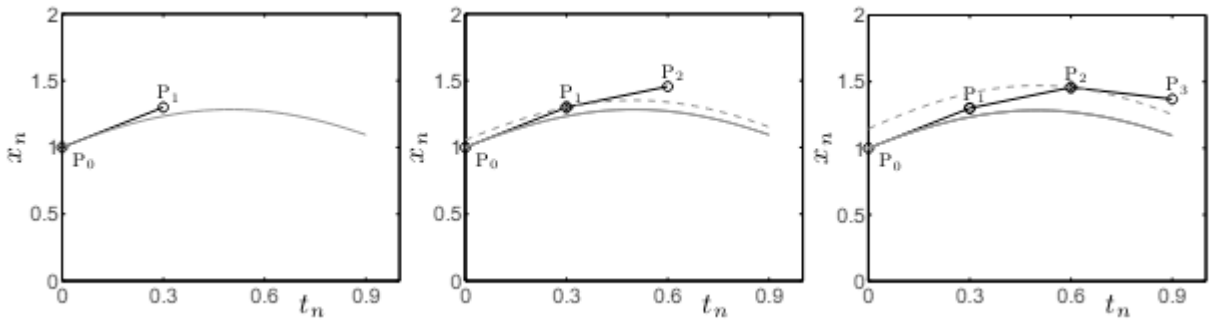
Hemos obtenido los puntos

$$\begin{aligned} P_0 &= (0, 1), \\ P_1 &= (0{,}3, 1{,}3), \\ P_2 &= (0{,}6, 1{,}456), \\ P_3 &= (0{,}9, 1{,}3686). \end{aligned}$$

Es interesante ver como compara estos puntos con la solución exacta del problema del valor inicial. En este caso en concreto, la solución es

$$x(t) = \exp[\frac{1}{4} - (\frac{1}{2} - t)^2],$$

y en la siguiente figura podemos ver la comparación entre ambos, donde la línea continua más clara es la solución exacta



2.4. Método de Taylor

En el método de Euler utilizamos la serie de Taylor truncada en los términos de grado dos y posteriores, mostrando que siguen un comportamiento equivalente a $O(h^2)$ y omitiéndolos bajo el argumento que son arbitrariamente pequeños. Sin embargo, esto implica que la precisión del método se controla con el tamaño del salto h, lo cual no es del todo eficiente. El método de Taylor pretende acabar con este problema incluyendo más términos en la serie de Taylor, siendo de esta manera más precisos o igual de precisos con menos pasos. Veremos primero como se puede implementar este método con los términos de grado uno y dos, y más adelante pasaremos al caso p. Antes, recuerdo que siempre estamos tratando de resolver el problema de valor inicial de la forma

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & t \in [t_0, t_f], \\ x(t_0) = \eta. \end{cases} \tag{2.36}$$

Método de Taylor para grado 2

Al igual que en el método de Euler, empezamos desarrollando la serie de Taylor para $x(t+h)$ pero esta vez con elementos de grado dos

$$x(t+h) = x(t) + hx'(t)\frac{1}{2!}h^2x''(t) + R_2(t).$$

De nuevo denotamos por $R_2(t)$ al error local de truncamiento que se comportará como $O(h^3)$. Por tanto, si tomamos un salto de h y dividimos el intervalo de tiempo (t_o, t_f) en $N = [(t_f - t_o)/h]$, dado un $n \in 0, h, 2h, ..., N$, tenemos que para $t = t_n$ y $t_{n+1} = t_n + h$

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + hx'(t_n) + \frac{1}{2!}h^2x''(t_n) + O(h^3),$$

y al igual que en el método anterior, podemos negligir el error local de truncamiento ya que este está acotado y se puede hacer arbitrariamente pequeño. De esta manera, obtenemos la aproximación $\tilde{x}(t_{n+1})$ de $x(t_{n+1})$ de la siguiente manera

$$\tilde{x}(t_{n+1}) = \tilde{x}(t_n) + h\tilde{x}'(t_n) + \frac{1}{2!}h^2\tilde{x}''(t_n), \tag{2.37}$$

donde $\tilde{x}(t_n), \tilde{x}'(t_n), \tilde{x}''(t_n)$ son las aproximaciones de $x(t_n), x'(t_n), x''(t_n)$ respectivamente. Sin embargo, aunque para la primera derivada si tenemos una manera de calcularla mediante t y $x(t)$ (recuerdo que $x'(t) = f(t, x(t))$), no la tenemos para la segunda derivada. Por eso, para ir calculando las aproximaciones de x, debemos derivar ambos lados de la EDO en (2.36)

$$\frac{d}{dt}x'(t) = \frac{d}{dt}f(t, x(t)) \Longrightarrow x''(t) = \frac{d}{dt}f(t, x(t)). \tag{2.38}$$

Finalmente, obtenemos el método de Taylor con las siguiente ecuaciones que nos permiten aproximar la solución para cada $t = t_n$

$$t_{n+1} = t_n + h, \quad n = 0 : N, \tag{2.39}$$

$$\tilde{x}(t_{n+1}) = \tilde{x}(t_n) + h\tilde{x}'(t_n) + \frac{1}{2!}h^2\tilde{x}''(t_n), \tag{2.40}$$

$$\tilde{x}`(t_{n+1}) = f(t_n, \tilde{x}(t_n)), \tag{2.41}$$

$$\tilde{x}''(t_{n+1}) = \frac{d}{dt}f(t_n, \tilde{x}(t_n)). \tag{2.42}$$

A continuación veremos que este método se puede extender al caso general de grado p

Método de Taylor para grado p

El procedimiento es análogo al anterior, pero esta vez requeriremos de $(p + 1)$ términos en la serie de Taylor. Por ello, es necesario que nuestra función $f(t, x(t))$ pertenezca al conjunto C^p, es decir, que sea p veces derivable y sus derivadas sean continuas. Igual que los casos anteriores, lo supondremos por simplicidad.

Tomamos la partición del intervalo de tiempo hecha en el caso de grado 2, donde tomamos un salto h pequeño y una división del intervalo (t_o, t_f) en $N = [(t_f - t_o)/h]$ partes iguales de longitud h. Hacemos el desarrollo de la serie de Taylor para un $t = t_{n+1}$ con $t_{n+1} = t_n + h$

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + hx'(t_n) + \frac{1}{2!}h^2x''(t_n) + ... + \frac{1}{p!}h^px^{(p)}(t_n) + R_p(t_n), \quad n = 0 : N,$$

al igual que en casos anteriores, $R_p(t)$ se puede omitir bajo el argumento de que está acotado y es arbitrariamente pequeño según el tamaño de h, ya que se comportará como $0(h^{p+1})$.

Aunque este método reduce considerablemente el número de pasos para llegar a determinada precisión de la solución exacta, es necesario derivar $(p - 1)$ veces la ecuación diferencial en (2.36) para obtener los términos diferenciales de $x(t)$. Por eso, aunque se puede presentar como un método preciso, no es posible utilizarlo con cálculos de *papel y lápiz*.

Presento ahora dos ejemplos de aplicaciones del método de Taylor. El primer ejemplo es el mismo que hemos enseñado en el método de Euler, de esta manera podremos comparar las distinas precisiones y sobre todo, la diferencia en número de iteraciones necesarias.

Ejemplo 2.4.1

Se trata del problema de valor inicial siguiente

$$\begin{cases} x'(t) = (1 - 2t)x(t), & t > 0, \\ x(0) = 1. \end{cases} \tag{2.43}$$

Al igual que en el método de Euler, utilizaremos un salto de $h = 0.3$ pero esta vez tomaremos por tiempo final el $t_f = 1{,}2$. Empezamos haciendo el desarrollo de la serie de Taylor para $x(t_{n+1})(n = 0 : N)$ incluyendo el término de grado dos

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + hx'(t_n) + \frac{1}{2!}h^2x''(t_n).$$

Por otro lado, ya tenemos la ecuación (2.43) que nos permitirá calcular la primera derivada, y nos falta únicamente una ecuación que nos permita calcular la segunda derivada. Como hemos explicado en el método, haremos esto derivando la ecuación diferencial del ejemplo.

$$\begin{aligned} x'(t) = (1-2t)x(t) &\Longrightarrow \frac{d}{dt}x'(t) = \frac{d}{dt}[(1-2t)x(t)] \\ &\Longrightarrow x''(t) = -2x(t) + (1-2t)x'(t) \end{aligned}$$

teniendo en cuenta que $x'(t) = (1-2t)x(t)$ obtenemos

$$\begin{aligned} x''(t) = -2x(t) + (1-2t)[(1-2t)x(t)] &\Longrightarrow x''(t) = -2x(t) + (1-2t)^2x(t) \\ &\Longrightarrow x''(t) = (-2 + (1-2t)^2)x(t) \end{aligned}$$

De esta manera, tenemos una ecuación para aproximar cada uno de los términos de la serie de Taylor, y partiendo de la condición inicial $t_0 = 0, \quad x(0) = 1$ podemos calcular tanto $x'(0)$ como $x''(0)$:

$$\begin{aligned} x'(0) &= (1 - 2 * 0)x(0) = 1, \\ x''(0) &= (-2 + (1 - 2 * 0)^2x(0) = -1. \end{aligned}$$

Con estos cálculos ya podemos aproximar el resto de soluciones iterando para $n = 0 : N$. En este caso $N = [(1,2 - 0)/0{,}3] = 4$.

$n = 1 :$

$$\begin{aligned} t_1 &= t_0 + h = 0{,}3, \\ \tilde{x}(t_1) &= x(t_0) + hx'(t_0) + \frac{1}{2!}h^2x''(t_0) = 1{,}2550, \\ \tilde{x}'(t_1) &= (1 - 2t_1)\tilde{x}(t_1) = 0{,}5020, \\ \tilde{x}''(t_1) &= (-2 + (1 - 2t_1)^2)\tilde{x}(t_1) = -2{,}3092. \end{aligned}$$

Repetimos estos mismo cálculamos para $n = 2, n = 3$ y por último para $n = 4$. Es importante entender que al utilizar más términos en la serie de Taylor, el error que cometemos en cada paso disminuye considerablemente, por lo que suele utilizarse un salto h menor al aumentar el grado del método de Taylor. En la siguiente figura podemos ver la diferencia numérica entre el método de Euler y el método de Taylor para $h = 0{,}15$ y $h = 0{,}30$

	Solutions at $t = 1.2$		GEs at $t = 1.2$		
h	Euler: TS(1)	TS(2)	Euler: TS(1)	TS(2)	GE for TS(2)/h^2
0.30	1.0402	0.7748	−0.2535	0.0118	0.131
0.15	0.9014	0.7836	−0.1148	0.0031	0.138

Donde GE es el error global de truncamiento. Vemos que el error disminuye más de 20 veces con el método de Taylor, y además, esto lo hace disminuyendo considerablemente el número de iteraciones necesarias.

A continuación observamos la diferencia entre estas aproximaciones y la solución exacta del problema (2.43). La línea continua es la gráfica de la solución:

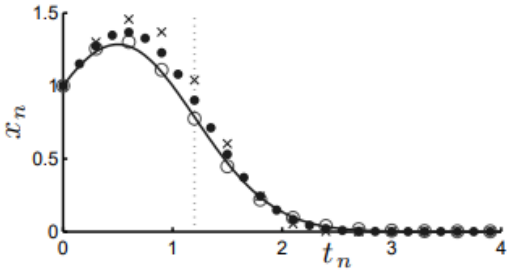


Fig. 3.1 Numerical solutions for Example 3.1
× : Euler's method, $h = 0.3$,
• : Euler's method, $h = 0.15$,
∘ : TS(2) method, $h = 0.15$.

2.5. Método de Runge-Kutta

A continuación presentaré el método de Runge-Kutta, un método desarrollado en los inicios del siglo veinte por los matemáticos C. Runge y M. W. Kutta. El método de Runge-Kutta no es un único método, sino que consiste de una familia de métodos. Entre ellos, se hace una clara distinción entre el método de Runge-Kutta clásico o explícito y el método de Runge-Kutta implícito. El métod que explicaré a continuación será el método de Runge-Kutta clásico. Al igual que los anteriores métodos, el método de Runge-Kutta nos permitirá resolver problemas de valor inicial de la forma de (2.36).

Método general de Runge-Kutta

Para el método de Runge-Kutta, primero consideramos una partición equidistante del intervalo de tiempo, de manera que dados el punto inicial x_0 del intervalo y el punto final x_f obtenemos la partición

$$x_{i+1} = x_i + h = x_0 + ih \quad i = 0, 1, ..., N,$$

donde $N = [(x_f - x_0)/h]$[1] y cada x_i representa la solución de $x(t)$ para el problema del valor inicial en un determinado tiempo t_i. Con estos métodos obtendremos una serie de aproximaciones de cada uno de los elementos de esta partición. La aproximación para un resultado x_i la denotaremos por $\tilde{x}_i$.
Las ecuaciones generales del método de Runge-Kutta de s etapas son las siguientes

$$\tilde{x}_{i+1} = \tilde{x}_i + h\phi(t_i, \tilde{x}_i, h), \tag{2.44}$$

$$\phi(t_i, x_i, h) = b_1k_1 + b_2k_2 + b_3k_3 + ... + b_nk_n, \quad b_i \in \mathbb{R}, \quad i = 0 : s. \tag{2.45}$$

Donde cada k_p viene dada por la siguiente ecuación

$$k_p = f(t_i + c_ph, \tilde{x}_i + h\sum_{j=1}^{s} a_{p,j}k_j), \quad p = 1 : s. \tag{2.46}$$

[1]Recuerdo que $[\cdot]$ se utiliza para especificar que se toma unicamente la parte entera del resultado de la operación

y se suelen llamar etapas del método de Runge-Kutta. Notamos que de estas ecuaciones obtenemos un sistema de ecuaciones de la forma

$$\begin{cases} k_1 = f(t_i + c_1 h, \tilde{x}_i + h \sum_{j=1}^{s} a_{1,j} k_j), \\ k_2 = f(t_i + c_2 h, \tilde{x}_i + h \sum_{j=1}^{s} a_{2,j} k_j), \\ . \\ . \\ . \\ k_s = f(t_i + c_s h, \tilde{x}_i + h \sum_{j=1}^{s} a_{s,j} k_j). \end{cases} \tag{2.47}$$

Es importante anotar que ya desde su primera formulación, Kutta asumió la condición

$$c_i = \sum_{j=1}^{s} a_{i,j}. \tag{2.48}$$

Definición 2.4. *Se define la tabla de Butcher asociada a la definición del método de Runge-Kutta con (2.44-47) como*

$$\begin{array}{c|cccc} & c_1 & c_2 & \cdots & c_s \\ \hline a_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_s & a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{ss} \\ \hline & b_1 & b_2 & \cdots & b_s \end{array}$$

donde

- *La matriz* $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{s}$ *es la matriz de coeficientes del Runge-Kutta*
- *El vector* $c = (c_1, ..., c_s)$ *se llama el vector de nodos del Runge-Kutta*
- *El vector* $b^T = (b_1, ..., b_s)^T$ *es el vector de pesos del Runge-Kutta*

Esta notación nos permiten trabajar matricialmente con los componentes del método. Es en las condiciones de la matriz A donde se diferencia el método explícito e implícito de Runge-Kutta:

- Si la matriz A no es triangular inferior, es decir, $a_{ij} \neq 0$ para algún $j \geq i$, entonces nos encontramos en el caso implícito del método de Runge-Kutta, y para resolver el problema deberemos resolver el sistema implícito (2.47).
- Si por el contrario A es una matriz triangular superior, las etapas k_i se obtienen de manera recursiva ya que obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones teniendo en cuenta que $a_{ij} = 0 \ \forall j \geq i$

$$\begin{cases} k_1 = f(t_i, \tilde{x}_i), \\ k_2 = f(t_i + c_2 h, \tilde{x}_i + h k_1), \\ . \\ . \\ . \\ k_s = f(t_i + c_s h, \tilde{x}_i + h \sum_{j=1}^{s-1} k_j). \end{cases} \tag{2.49}$$

Sistema al que añadimos la ecuación general del método de Runge-Kutta (2.44):

$$\tilde{x}_{i+1} = \tilde{x}_i + h \sum_{j=1}^{s} b_j k_j. \tag{2.50}$$

Como he especificado a principios de la explicación, en este trabajo nos centraremos en los métodos explícito o clásicos de Runge-Kutta, y dejaremos de lado los métodos implícitos.

Hemos definido el método de Runge-Kutta no como un único método, sino como una familia de métodos distintos y parecidos. Para hacer una distinción en este sentido, primero debemos considerar el error cometido en cada una de las aproximaciones

Definición 2.5. *En un método de Runge-Kutta, se define el error local de truncamiento R_i como la diferencia entre la aproximación $\tilde{x}_i$ y la solución exacta x_i en un tiempo concreto t_i. Es decir, tenemos que*

$$R_i = \tilde{x}_i - x_i = \tilde{x}(t_i) - x(t_i).$$

El estudio del error local de truncamiento nos llevará a hacer distinciones entre un método u otro:

Definición 2.6. *Dado un método de Runge-Kutta, si para una serie de problemas suficientemente regulares tenemos que*

$$R_i = \tilde{x}_i - x_i \leq Ch^{p+1} \quad p > 0,$$

entonces decimos que el método de Runge-Kutta es de orden p[1].

En otras palabras, un método de RK es de orden p si la aproximación coincide hasta el término p en la serie de Taylor de la solución exacta. En su libro, Butcher explica extensamente la diferencia entre métodos de orden $p \leq 4$ y métodos de orden $p > 4$, y de hecho el estudio de métodos de Runge-Kutta de orden mayor que 4 sigue siendo hoy en día objeto de estudio e investigación. Butcher demuestra que para los métodos de orden $p = 1, 2, 3$ y 4, son necesarias únicamente $s = p$ etapas, mientras que para métodos mayores el número de etapas es siempre superior al orden p. Pese a que el propio Butcher demostró este resultado hace décadas, hoy en día se conocen únicamente el número de etapas necesarias para métodos de RK de orden $p = 8$, y se sabe que para los métodos de orden $p = 9$ son necesarias entre 12 y 17 etapas, y el sistema debe satisfacer hasta 486 ecuaciones algebraicas no lineales. Nos encontramos por tanto ante un problema que aunque pueda parecer inmediato para métodos de orden pequeño, alcanza una complejidad importante a medida que aumentamos el orden.

A continuación presentaré métodos de Runge-Kutta explícitos de orden 1 y 2, y daré la expresión matricial de los métodos de 3 y 4 ya que estos últimos tienen un desarrollo extenso fuera de los objetivos de este trabajo. Veremos la utilidad del siguiente teorema formulado por Butcher

Teorema 2.7. *Dado un método de Runge-Kutta, si este es de orden $p \leq 4$, entonces como mínimo son necesarias $s = p$ etapas*

[1] Es importante notar que esta p no tiene relación alguna con la p utilizada en el índice de las ecuaciones de (2.46)

Método de Runge-Kutta de orden $p = 1$

Para $p = 1$, si $s = 1$ tenemos que

$$\tilde{x}_{i+1} = \tilde{x}_i + hb_1k_1, \tag{2.51}$$
$$k_1 = f(t_i + c_1h, \tilde{x}_i + a_{1,1}k_1). \tag{2.52}$$

Estamos tomando únicamente los métodos explícitos de Runge-Kutta y estos cumplen que $a_{i,,j} = 0 \ \forall j \leq i$, por tanto $a_{1,1} = 0$. Por otro lado, como ya hemos dicho, el mismo Runge en los inicios de sus formulaciones utilizaba la igualdad (2.48) por lo que sabemos que $c_1 = a_{1,1} = 0$. De esta manera, obtenemos finalmente que

$$\tilde{x}_{i+1} = \tilde{x}_i + hb_1k_1, \tag{2.53}$$
$$k_1 = f(t_i, \tilde{x}_i). \tag{2.54}$$

Lo cual implica que

$$\tilde{x}_{i+1} = \tilde{x}_i + hb_1f(t_i, \tilde{x}_i). \tag{2.55}$$

Y vemos que esto se parece razonablemente al método de Euler presentado en el capítulo (2.3). Hacemos ahora la serie de Taylor de grado 2 de la solución exacta $x(t_{i+1})$. Recordamos que siempre $t_{i+1} = t_i + h$.

$$x(t_{i+1}) = x(t_i) + hx'(t_i) + \frac{1}{2!}h^2x''(t_i) + 0(h^3). \tag{2.56}$$

Si derivamos respecto la variable t la primera ecuación del problema del valor inicial donde $x'(t) = f(t, x(t))$ obtenemos que

$$\frac{d}{dt}x'(t) = \frac{d}{dt}f(t, x(t)) \Longrightarrow x''(t) = f_t(t, x(t)) + x'(t)f_x(t, x(t)). \tag{2.57}$$

Donde f_t y f_x son las derivadas parciales de f respecto a t y x respectivamente. Podemos sustituir esta ecuación en (2.56) de manera que tenemos una expresión para $x(t_{i+1})$ que no depende de la segunda derivada de $x(t)$

$$x(t_{i+1}) = x(t_i) + hx'(t_i) + \frac{1}{2!}h^2(f_t(t, x(t)) + x'(t)f_x(t, x(t))) + 0(h^3). \tag{2.58}$$

Utilizamos ahora la definición del error local de truncamiento, y suponiendo que localmente $x(ti + 1) = \tilde{x}_i$ tenemos

$$\begin{aligned}
R_{i+1} &= x(t_{i+1}) - \tilde{x}_{i+1} = \\
&= x(t_i) + hx'(t_i) + \frac{1}{2!}h^2(f_t(t, x(t)) + x'(t)f_x(t, x(t))) + 0(h^3) - [\tilde{x}_i + hb_1f(t_i, \tilde{x}_i)] = \\
&= (x(t_i) - \tilde{x}_i) + h(1 - b_1)(x'(t_i) - f(t_i, \tilde{x}_i)) + \frac{1}{2!}h^2(f_t(t, x(t)) + x'(t)f_x(t, x(t))) + 0(h^3) = \\
&= h(1 - b_1)(x'(t_i) - f(t_i, \tilde{x}_i)) + \frac{1}{2!}h^2(f_t(t, x(t)) + x'(t)f_x(t, x(t))) + 0(h^3)
\end{aligned}$$

De acuerdo con la definición (2.6), para que este método de Runge-Kutta sea de orden $p = 1$ se debe satisfacer que $R_i \leq Ch^{p+1}$, por lo que es necesario que el término $h(1 - b_1)(x'(t_i) - f(t_i, \tilde{x}_i))$ sea nulo, y por tanto, que $b_1 = 1$, con lo que obtenemos el método

$$\tilde{x}_{i+1} = \tilde{x}_i + hf(t_i, \tilde{x}_i), \tag{2.59}$$

que es exactamente el método de Euler, el único método de Runge-Kutta de orden $p = 1$.

Método de Runge-Kutta de orden p = 2

Para $s = 2$ tenemos el método explícito general con las siguiente ecuaciones

$$\begin{cases} k_1 = f(t_i, \tilde{x}_i), \\ k_2 = f(t_i + c_2 h, \tilde{x}_i + ahk_1). \end{cases} \tag{2.60}$$

Además de la ecuación de la predicción de x_{i+1}

$$\tilde{x}_{i+1} = \tilde{x}_i + h(b_1 k_1 + b_2 k_2), \tag{2.61}$$

de la que obtenemos

$$\tilde{x}_{i+1} = \tilde{x}_i + h(b_1 f(t_i, \tilde{x}_i) + b_2 f(t_i + c_2 h, \tilde{x}_i + ahk_1)). \tag{2.62}$$

Para resolver esto, utilizaremos un procedimiento análogo al caso anterior, pero esta vez requerimos de la serie de Taylor de k_2 lo que implica que necesitamos la serie de Taylor para dos variables. Obtenemos[1]

$$f(t_i + c_2 h, \tilde{x}_i + ahk_1) = f(t_i, \tilde{x}_i) + ah(f_t + ff_x)|_{t=t_i} + O(h^2). \tag{2.63}$$

Utilizamos esta igualdad para obtener una ecuación para $\tilde{x}_{i+1}$ en función de h. Si en la ecuación (2.61) utilizamos (2.62) y (2.63) obtenemos

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{i+1} &= \tilde{x}_i + h(b_1 k_1 + b_2 k_2) = && (2.64) \\ &= \tilde{x}_i + h[b_1 f(t_i, \tilde{x}_i) + b_2 f(t_i + c_2 h, \tilde{x}_i + ahk_1)] = && (2.65) \\ &= \tilde{x}_i + h[b_1 f(t_i, \tilde{x}_i) + b_2 (f(t_i, \tilde{x}_i) + ah(f_t + ff_x)|_{t=t_i} + O(h^2))] = && (2.66) \\ &= \tilde{x}_i + h(b_1 + b_2) f(t_i, \tilde{x}_i) + ab_2 h^2 (f_t + ff_x)|_{t=t_i} + O(h^3) && (2.67) \end{aligned}$$

Sabemos por otro lado que la serie de Taylor de la solución exacta x_{i+1} es (2.58). De esta manera, podemos calcular el error local de truncamiento utilizando su definición, lo cual nos da que

$$\begin{aligned} R_{i+1} &= x(t_{i+1}) - \tilde{x}_{i+1} = \\ &= [x(t_i) + hx'(t_i) + \frac{1}{2!} h^2 (f_t(t, x(t)) + x'(t) f_x(t, x(t))) + 0(h^3)] \\ &- [\tilde{x}_i + h(b_1 + b_2) f(t_i, \tilde{x}_i) + ab_2 h^2 (f_t + ff_x)|_{t=t_i} + O(h^3)] = \\ &= (x(t_i) - \tilde{x}_i) + hx'(t_i) - h(b_1 + b_2) f(t_i, \tilde{x}_i) \\ &+ h^2((f_t(t, x(t)) + x'(t) f_x(t, x(t))) - ab_2 (f_t + ff_x)|_{t=t_i}) + O(h^3) \end{aligned}$$

Y al igual que en el caso de $p = s = 1$, suponemos que $\tilde{x}_i = x(t_i)$ localmente, es decir, para $t = t_i$. Por esto y por la definición del problema tenemos que $x'(t_i) = f(t_i, \tilde{x}_i)$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow R_{i+1} &= hx'(t_i) - h(b_1 + b_2) f(t_i, \tilde{x}_i) + \\ &+ h^2[(f_t(t, x(t)) + x'(t) f_x(t, x(t))) - ab_2 (f_t + ff_x)|_{t=t_i}] + O(h^3) = \\ &= hf(t_i, \tilde{x}_i)(1 - b_1 - b_2) + h^2[(f_t(t, x(t)) + x'(t) f_x(t, x(t))) - ab_2 (f_t + ff_x)|_{t=t_i}] \\ &+ O(h^3) \end{aligned}$$

[1] Utilizamos que $c_2 = a$ por (2.48) y el hecho de que trabajamos con métodos explícitos

De nuevo tenemos que según las constantes $a, b1 y b2$ el método puede ser de orden 1 o 2:

$$\begin{aligned} b1 + b2 = 1 \ \& \ \forall a &\Longrightarrow R_{i+1} = h^2[(f_t(t, x(t)) + x'(t) f_x(t, x(t))) - ab_2(f_t + f f_x)|_{t=t_i}] + O(h^3) \\ &\Longrightarrow R_{i+1} = 0(h^2) \\ b1 + b2 = 1 \ \& \ ab_2 = \frac{1}{2} &\Longrightarrow R_{i+1} = O(h^3) \end{aligned}$$

Uno podría pensar que existe una manera de hacer que este método sea de orden 3, i.e que $R_{i+1} = 0(h^4)$. Sin embargo, si hacemos los cálculos de la serie de Taylor incluyendo las componentes de grado 3 veríamos que existe un término de grado 3 que no depende de ninguna componente, por lo que no es posible que $R_{i+1} = 0(h^4)$.

Tomamos el caso en que $R_{i+1} = O(h^3)$, es decir, cuando $(b_1 + b_2) = 1$ y $ab_2 = \frac{1}{2}$. A este método se le llama el *método de Euler modificado*, y se puede poner de forma matricial mediante la tabla de Butcher de la siguiente manera

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ a & a & 0 \\ \hline 1-\theta & \theta & \end{array} \quad \text{donde} \quad b_2 = \theta, \quad a = \frac{1}{2\theta}$$

Como he indicado al inicio, debido a la extensión del desarrollo de los métodos de orden 3 y 4, presentaremos únicamente las ecuaciones y la tabla de Butcher para estos métodos.

Método de Runge-Kutta de orden p = 3

Las ecuaciones generales del método de Runge-Kutta de orden $p = 3$ son

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_i, \tilde{x}_i), \\ k_2 &= f(t_i + c_2 h, \tilde{x}_i + a_{2,1} h k_1), \\ k_3 &= f(t_i + c_3 h, \tilde{x}_i + a_{3,1} h k_1 + a_{3,2} h k_2), \\ \tilde{x}_{i+1} &= \tilde{x}_i + h(b_1 k_1 + b_2 k_2 + b_3 k_3). \end{aligned}$$

Por lo que obtenemos la expresión matricial

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & a_{2,1} & 0 & 0 \\ c_3 & a_{3,1} & a_{3,2} & 0 \\ \hline b_1 & b_2 & b_3 & \end{array}$$

Método de Runge-Kutta de orden p = 4

Por último, contemplaremos el caso de $p = 4$. En este caso partimos de las ecuaciones

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_i, \tilde{x}_i), \\ k_2 &= f(t_i + c_2 h, \tilde{x}_i + a_{2,1} h k_1), \\ k_3 &= f(t_i + c_3 h, \tilde{x}_i + a_{3,1} h k_1 + a_{3,2} h k_2), \\ k_4 &= f(t_i + c_4 h, \tilde{x}_i + a_{4,1} h k_1 + a_{4,2} h k_2 + a_{4,3} h k_3), \\ \tilde{x}_{i+1} &= \tilde{x}_i + h(b_1 k_1 + b_2 k_2 + b_3 k_3 + b_4 k_4). \end{aligned}$$

De estas ecuaciones obtenemos la tabla de Butcher siguiente

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & a_{2,1} & 0 & 0 & 0 \\ c_3 & a_{3,1} & a_{3,2} & 0 & 0 \\ c_4 & a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & 0 \\ \hline b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \end{array}$$

Antes de pasar al siguiente método numérico que trataremos, veremos un ejemplo clásico de como opera el método de Runge-Kutta de orden 2

Ejemplo 2.5.1

Utilizaremos el mismo ejemplo que hemos estado viendo para el resto de métodos, de esta manera podremos comparar la precisión y complejidad de este método con el de Euler y el de Taylor. Se trata del problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) & = (1-2t)x(t), \quad t > 0, \\ x(0) & = 1. \end{cases}$$

En este caso, utilizaremos $h = 0{,}15$ y calcularemos hasta $t = 0{,}3$. De (2.60) obtenemos las ecuaciones generales de los métodos de Runge-Kutta de orden $p = 2$, sustituyendo en estas ecuaciones nuestros valores concretos del PVI presentado obtenemos

$$\begin{aligned} k_1 &= ft_i, \tilde{x}_i) = (1-2t_i)\tilde{x}_i, \\ k_2 &= f(t_i + c_2 h, \tilde{x}_i + ahk_1) = (1 - 2t_i - 2c_2 h)(\tilde{x}i + ahk_1). \end{aligned}$$

Recuerdo que tras el desarrollo de este método, hemos concluido que para que se trate de un método de orden 2, es decir, para que $R_{i+1} = O(h^3)$, debemos tener que $b_1 + b_2 = 1$ y que $ab_2 = \frac{1}{2}$. Por tanto, podemos tomar el caso en que $b_1 = 0, b_2 = 1$ y $a = \frac{1}{2}$, y aprovechando la igualdad en (2.48) concluimos que $c_2 = a = \frac{1}{2}$. Por tanto

$$\begin{aligned} k_1 &= ft_i, \tilde{x}_i) = (1-2t_i)\tilde{x}_i, \\ k_2 &= (1 - 2t_i - h)(\tilde{x}_i + \frac{1}{2}hk_1). \end{aligned}$$

De esta manera, dadas las condiciones iniciales de problema $t_0 = 0, x(0) = 1$ podemos calcular la primera iteración de aproximaciones con $h = 0{,}15$.

$$\begin{aligned} k_1 &= (1-2t_0)x(0) = (1 - 2 \times 0) \times 1 = 1, \\ k_2 &= (1 - 2t_0 - 0{,}15)(x(0) + \frac{1}{2}0{,}15k_1) = (1 - 2 \times 0 - 0{,}15)(1 + \frac{1}{2} \times 0{,}15 \times 1) = 0{,}91, \\ \tilde{x}_1 &= x_0 + hk_2 = 1 + 0{,}15 \times 0{,}88 = 1{,}14, \\ t_1 &= t_0 + h = 0 + 0{,}15 = 0{,}15. \end{aligned}$$

Donde la ecuación para la aproximación $\tilde{x}_1$ está extraída de la ecuación general del método de RK de orden 2, que es $\tilde{x}_{i+1} = \tilde{x}_i + h(b_1 k_1 + b_2 k_2)$. Como hemos decidido que $b_1 = 0$ y que $b_2 = 1$, tenemos la ecuación $\tilde{x}_{i+1} = \tilde{x}_i + hk_2$. Iterando de nuevo dos veces, conseguimos

la aproximación para el segundo salto $2h = 0{,}30$

$$k_1 = (1 - 2t_1)\tilde{x}_1 = (1 - 2 \times 0{,}15) \times 1{,}14 = 1{,}798,$$
$$k_2 = (1 - 2t_1 - 0{,}15)(\tilde{x}_1 + \frac{1}{2}0{,}15k_1) = (1 - 2 \times 0{,}15 - 0{,}15)(1{,}14 + \frac{1}{2}0{,}15 \times 1{,}798) = 0{,}701,$$
$$\tilde{x}_2 = \tilde{x}_1 + hk_2 = 1{,}14 + 0{,}15 \times 0{,}701 = 1{,}245,$$
$$t_2 = t_1 + h = 0{,}15 + 0{,}15 = 0{,}3.$$

2.6. Métodos Lineales Multipaso

En los tres métodos que hemos explicado hasta ahora, hemos calculado la aproximación de la solución en un determinado tiempo t_i utilizando la aproximación a la solución del momento de tiempo anterior y sus derivadas. Hemos visto que el método de Euler es un caso concreto de los métodos de Runge-Kutta y que el método de Taylor es eficiente para órdenes pequeños. Sin embargo, para órdenes mayores el método de Taylor tiene la desventaja de que se necesita diferenciar la parte derecha de la ecuación. Esto lo convierte en un método poco eficiente a la hora de resolver problemas reales. Quizá motivados por este problema, Adams y Bashforth recurrieron a lo que hoy llamamos Métodos Lineales Multipaso (en inglés se abrevian por LMMs), una serie de métodos que pretenden utilizar las aproximaciones de la solución y las derivadas de varios pasos anteriores para calcular la solución en cierto punto t_i.

La ecuación general de los métodos lineales para un $t = t_{i+1}$ viene dada por la ecuación

$$\begin{aligned} x(t_{i+1}) = \alpha_1 x(t_i) + \alpha_2 x(t_{i-1}) + ... + \alpha_k x(t_{i+1-k}) + h(\beta_0 f(t_{i+1}, x_{i+1}) + \\ + \beta_1 f(t_i, x_i) + \beta_2 f(t_{i-1}, x_{i-1}) + ... + \beta_k f(t_{i+1-k}, x_{i+1-k})) + 0(h^{p+1}), \end{aligned}$$

donde p determinará el orden del método. Si se especifica el orden p del método, entonces se deberán escoger las constantes $\alpha_1, \alpha 2, ..., \alpha_{i+1-k}$ y $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_{i+1-k}$ de manera que obtengamos un resto que se comporte como $O(h^{p+1})$; en caso de que el orden no se concrete, mediante estas constantes se deberá procurar obtener el mayor orden p posible. Con tal de formalizar la noción de orden y determinar las constantes, recurrimos a la definición del Operador Diferencial Lineal

Definición 2.8. *Definimos el operador diferencial lineal L_h asociado a un método lineal multipaso como*

$$L_h x(t) = x(t_{i+1}) - \alpha_1 x(t_i) + \alpha_2 x(t_{i-1}) + ... + \alpha_k x(t_{i+1-k}) + h(\beta_0 f(t_{i+1}, x_{i+1}) + \quad (2.68)$$
$$+ \beta_1 f(t_i, x_i) + \beta_2 f(t_{i-1}, x_{i-1}) + ... + \beta_k f(t_{i+1-k}, x_{i+1-k})) + 0(h^{p+1}). \quad (2.69)$$

Es decir, se trata de la diferencia entre ambas partes de la igualdad en la ecuación general de los métodos lineales multipaso. Se dice que el operador es Lineal porque satisface que para todas las constantes a y b

$$L_h(ax(t) + by(t)) = aL_h x(t) + bL_h y(t).$$

Definición 2.9. *Se dice que un operador diferencial lineal L_h es consistente de orden p si satisface que*

$$L_h x(t) = O(h^{p+1}), \quad p > 0.$$

Definición 2.10. *Un método lineal multipaso cuyo operador diferencial es consistente de orden p para un $p > 0$ es consistente, y si no, es inconsistente.*

En el libro de Griffiths y Higham[1] se continua con una descripción más numérica de la consistencia de los métodos y se extraen condiciones que las constantes de los métodos lineales multipaso deben cumplir con tal de que estos sean consistentes. El procedimiento es más bien notacional y no lo explicaremos en este estudio.

Como hemos ido explicando, los métodos lineales multipaso son una familia de métodos, de la cual destacamos dos métodos: La regla trapezoidal y el método de Adams-Bashford.

La regla trapezoidal

Como hemos dicho, en estos métodos no pretendemos calcular explícitamente las derivadas de $x(t)$, pues caeríamos en el mismo problema que tiene el método de Taylor y que lo hace impracticable para problemas de aplicaciones reales. Por ello, debemos encontrar una expresión que nos permita aproximar $x''(t)$. Si desarrollamos la serie de Taylor de $x'(t+h)$ obtenemos

$$x'(t+h) = x'(t) + hx''(t) + O(h^2), \tag{2.70}$$

con lo cual tenemos que

$$hx''(t) = x'(t+h) - x'(t) + O(h^2). \tag{2.71}$$

Utilizamos ahora la serie de Taylor de $x(t+h)$ que hemos utilizado en métodos anteriores, y sustituimos esta igualdad en ella

$$x(t+h) = x(t) + hx'(t) + \frac{1}{2}h^2x''(t) + O(h^3) = \tag{2.72}$$

$$= x(t) + hx'(t) + \frac{1}{2}h[x'(t+h) - x'(t) + O(h^2)] + O(h^3) = \tag{2.73}$$

$$= x(t) + \frac{1}{2}h(x'(t+h) + x'(t) + O(h^2)) + O(h^3) \tag{2.74}$$

Podemos reformular la igualdad teniendo en cuenta que $x'(t) = f(t, x(t))$ y tomando un $t = t_i$ concreto. Además, podemos negligir los términos de orden h^2 y h^3 bajo el argumento que son arbitrariamente pequeños según el tamañao de h. De esta manera, obtenemos la ecuación de la regla trapezoidal

$$x(t_i + h) = x(t_{i+1}) = x(t_i) + \frac{1}{2}h(x'(t_i + h) + x'(t_i) + O(h^2)) + O(h^3) = \tag{2.75}$$

$$= x(t_i) + \frac{1}{2}h(f(t_{i+1}, x_{i+1}) + f(t_i, x_i)). \tag{2.76}$$

Vemos que el término $x(t_{i+1})$ se encuentra tanto a la izquierda como a la derecha de la igualdad, en estos casos se dice que el método de implícito ya que como explica Griffith *"no disponemos de una expresión directa para x_{i+1} en términos de datos de pasos anteriores"*. En términos de las constantes, dada la ecuación general de los métodos lineales de orden p

$$\begin{aligned} x(t_{i+1}) = \alpha_1 x(t_i) + \alpha_2 x(t_{i-1}) + ... + \alpha_k x(t_{i+1-k}) + h(\beta_0 f(t_{i+1}, x_{i+1}) + \\ + \beta_1 f(t_i, x_i) + \beta_2 f(t_{i-1}, x_{i-1}) + ... + \beta_k f(t_{i+1-k}, x_{i+1-k})) + 0(h^{p+1}), \end{aligned}$$

se deduce claramente que los métodos serán implícitos cuando $\beta_0 \neq 0$, y serán explícitos en caso contrario.

Método de Adams-Bashford

El método de Adams-Bashford es similar a la regla trapezoidal, ya que también trata de sustituir la segunda derivada por una expresión con tal de no tener que diferenciar. En este caso lo haremos mediante la serie de Taylor de la primera derivada de un tiempo anterior, es decir, de un momento de tiempo con salto negativo $x'(t-h)$. La idea detrás de esta decisión es que como hemos dicho, estos métodos pretenden utilizar términos de pasos anteriores para sustituir los cálculos que requiere por ejemplo el método de Taylor de orden $p > 1$. El desarrollo de la serie de Taylor es el siguiente

$$x'(t-h) = x'(t) - hx''(t) + O(h^2).$$

Por lo tanto tenemos que $hx''(t) = x'(t) - x'(t-h) + O(h^2)$ y al sustituir esta expresión en la serie de Taylor de $x(t+h)$ con elementos de hasta grado 2 obtenemos

$$x(t+h) = = x(t) + hx'(t) + \frac{1}{2}h^2x''(t) + O(h^3) = \tag{2.77}$$

$$= x(t) + hx'(t) + \frac{1}{2}h[x'(t) - x'(t-h) + O(h^2)] + O(h^3) \tag{2.78}$$

$$= x(t) + \frac{3}{2}hx'(t) - \frac{1}{2}hx'(t-h) + O(h^3). \tag{2.79}$$

De nuevo siguiendo un procedimiento análogo al método anterior, concretamos un momento de tiempo $t = t_i$ y denotamos por $t_{i+1} = t_i + h$ y $t_{i-1} = t_i - h$. De esta manera, obtenemos una aproximación de la solución para un tiempo concreto, lo cual nos da el método de Adams-Bashford de orden 2

$$x(t+h) = x(t_{i+1}) = x(t_i) + \frac{3}{2}hx'(t_i) - \frac{1}{2}hx'(t_{i-1}) + O(h^3) = \tag{2.80}$$

$$= x(t_i) + \frac{3}{2}hf(t_i, x_i) - \frac{1}{2}hf(t_{i-1}, x_{i-1}) + O(h^3) = \tag{2.81}$$

$$= x(t_i) + \frac{3}{2}hf(t_i, x_i) - \frac{1}{2}hf(t_{i-1}, x_{i-1}) \tag{2.82}$$

Como he dicho, esta es la ecuación del método de Adams-Bashford de orden 2, es importante la especificación porque aunque no lo veremos en este trabajo, existen métodos de Adams-Bashford de orden $p > 2$. Deducimos de esta ecuación que el método es explícito.

Ejemplo 2.5.2

Veamos que el método de Euler es un método consistente de orden 1, es decir, veamos que su operador diferencial lineal se comporta como $O(h^{p+1})$ para algún $p > 1$.

Recordamos que la ecuación del método de Euler es

$$x(t_{i+1}) = x(t_i) + hx'(t_i),$$

por lo que su operador diferencial lineal es

$$L_h x(t) = x(t_{i+1}) - x(t_i) - hx'(t_i),$$

y si tomamos la serie de Taylor de $x(t_{i+1})$ en (2.72) obtenemos que

$$L_h x(t) = \frac{1}{2!}h^2x''(t) + O(h^3),$$

con lo que verificamos que el operador del método de Euler satisface que $L_h x(t) = O(h^2)$ por lo que el método de Euler es un método consistente de orden 1.

3. El caos en modelos físicos

Hasta ahora hemos visto algunos de los métodos numéricos más utilizados a la hora de resolver ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) con tal de estudiar el caos en algunos modelos físicos conocidos. Antes de entrar en esta materia debemos conocer que es el caos en un modelo y donde aparece. ¿Existen condiciones concretas que se deben dar para que aparezca el caos? ¿Supone una aleatoriedad incontrolable? ¿O es más bien una inexactitud que no sabemos resolver?

Es sabido que uno de los primeros matemáticos que le puso nombre a este caos fue Henri Poincaré a finales del siglo XIX. Poincaré fue uno de los primeros en explorar el comportamiento de sistemas dinámicos complejos, específicamente a través del problema de los tres cuerpos en la mecánica celeste. Este problema trata de predecir el movimiento de tres cuerpos que interactúan gravitacionalmente, como por ejemplo, el Sol, la Tierra y la Luna. Poincaré descubrió que, a pesar de seguir las leyes deterministas de Newton, estos sistemas podían mostrar comportamientos extremadamente complejos y sensibles a las condiciones iniciales.

Pese al estudio y trabajo de Poincaré, la teoría del caos no tomó forma hasta mediados del siglo XX. Fue en 1963 cuando Edward Lorenz hizo una contribución crucial a este área. Lorenz era meteorólogo y estudiando modelos simplificados de la atmósfera para predecir el clima, se dio cuenta de que pequeñas diferencias en las condiciones iniciales podían provocar grandes diferencias en el comportamiento del sistema. Lorenz vio que al redondear los números de las condiciones iniciales las predicciones climáticas eran completamente distintas en cada cálculo. Este comportamiento se denominó como el *efecto mariposa*, que hace referencia a la famosa frase: *el aleteo de una mariposa en Brasil podría, teóricamente, desencadenar un tornado en Texas.*[5]

Es a partir de Lorenz cuando arranca lo que hoy llamamos caos. Steven Strogatz, matemático en la universidad de Cornell y autor del libro *Nonlinear Dynamics and Chaos*[3] explicó así el efecto del trabajo de Lorenz y el caos:

> ≪Antes de Lorenz, determinismo era sinónimo de previsibilidad. Después de Lorenz, nos dimos cuenta de que el determinismo podía ser predecible a corto plazo, pero a largo plazo las cosas podían ser impredecibles. Eso es lo que asociamos con la palabra 'caos'.≪

3.1. ¿Qué es el caos?

Antes de empezar con el estudio del caos en los diferentes sistemas y sobre todo en el de Lorenz, debemos entender que es y que no es caos. Desde los inicios del estudio del caos no se ha dado una definición globalmente aceptada de lo que conforma el caos, y matemáticos como Devaney, Yorke o Michaikow tienen su propia definición de caos.

En este trabajo consideramos el caos en sistemas determinísticos, es decir, en aquellos sistemas en los que el azar no está involucrado. Estos sistemas son completamente predecibles en el corto plazo y en caso de repetir exactamente una iteración, se obtiene el mismo resultado ya que se definen mediante algoritmos. Es por esto que el caos no es azar, ya que este último es impredecible en el corto y largo plazo. Puede entonces parecer una contradicción que exista el caos en estos sistemas, sin embargo, no lo es si entendemos el caos de la siguiente manera:

Definición 3.1. *El caos es un comportamiento aperiódico a largo plazo en un sistema determinista que muestra una dependencia sensible de las condiciones iniciales*

Aunque como hemos dicho no existe una definición mundialmente aceptada del caos, esta contiene tres ingredientes que casi todo el mundo acepta:

1. El caos es aperiódico a largo plazo: Esto se debe a que en los sistemas caóticos, como veremos en la sección 3.4 con el sistema de Lorenz, existen trayectorias que no tienden a un puntos fijos, ni a órbitas periódicas o cuasiperiódicas cuando $t \longrightarrow \infty$.

2. El caos se da en sistemas deterministas, por lo que podemos hacer la distinción entre caos y azar. No nos interesan los sistemas completamente impredecibles.

3. El caos se da en sistemas sensibles a las condiciones iniciales, es decir, sistemas cuyas trayectorias similares se alejan exponencialmente.

Dada esta definición, uno podría pensar que cualquier sistema determinista cuyas trayectorias se alejan exponencialmente contiene caos, pero esto no es cierto. Veamos por ejemplo que el sistema

$$x'(t) = x(t)$$

no es caótico. La solución de este sistema es $x(t) = e^t$, por lo que sus trayectorias se alejan exponencialmente, y claramente es un sistema determinista. Sin embargo, cuando $t \longrightarrow \infty$ todas las trayectorias tienden a infinito, por lo que el infinito actúa como un punto fijo atractor. Vemos entonces que no es tan sencillo determinar que un sistema es caótico, no sirve con que sea inestable o difícil de predecir. Sin embargo, existen múltiples sistemas caóticos en todas las ramas de la ciencia, e incluso en economía.

Antes de continuar, definimos algunas herramientas necesarias

Definición 3.2. *Un conjunto cerrado A es un atractor si satisface las siguientes propiedades:*

1. *A es un conjunto invariante, es decir, toda trayectoria $x(t)$ que empieza en A se mantiene en A para todo t.*

2. *A atrae a un conjunto abierto de trayectorias: existe un conjunto abierto U tal que $A \subset U$ y tal que $x(0) \in U$, entonces $d(x, A)$[1] $\longrightarrow 0$ cuando $t \longrightarrow \infty$. Es decir, A atrae a todas las trayectorias suficientemente cercanas.*

3. *A es minimal. No existe un subconjunto propio de A que cumpla las condiciones 1 y 2.*

Definición 3.3. *Un atractor extraño es un atractor que muestra una dependencia sensible a condiciones iniciales.*

3.2. El atractor de Lorenz

A continuación veremos en profundidad el trabajo de Lorenz, en concreto el conocido 'Atractor de Lorenz', que es una de las estructuras más icónicas y estudiadas de la teoría del caos.

[1] d es la función distancia

Seguiremos los pasos del mismo Lorenz en el estudio del *Atractor de Lorenz*. Como hemos dicho, Lorenz era meteorólogo y en un intento de simplificar un modelo de rollos de convección en la atmósfera, se topo con las siguientes ecuaciones

$$\begin{cases} x' = \sigma(y - x), \\ y' = rx - y - xz, \\ z' = xy - bz. \end{cases} \tag{3.1}$$

x', y', z' determinan las derivadas de x, y, z y por otro lado $\sigma, r, b > 0$ son parámetros. En concreto, σ es el número de Prandtl, r es el número de Rayleigh y b no tiene nombre. El sistema más estudiado es aquel con las constantes $\sigma = 10, r = 28, b = \frac{8}{3}$.

Lorenz estudió a fondo estas ecuaciones descartando poco a poco todas las posibilidades de los comportamiento futuros, veremos que finalmente se topo con un atractor extraño (3.3). Hemos visto en la sección (3.1) que un atractor es un conjunto que atrae a un conjunto abierto de trayectorias, como es lógico, lo contrario de atractor es un conjunto repulsor, cuyas trayectorias que empiezan suficientemente cerca se alejan a medida que $t \longrightarrow \infty$. Veamos que el sistema de Lorenz no contiene puntos fijos repulsores ni órbitas repulsoras.

Definición 3.4. *Decimos que un sistema $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ es simétrico si dada una solución (x, y, z) tenemos que $(-x, -y, z)$ también lo es.*

Proposición 3.5. *El sistema de Lorenz es simétrico*

Demostración. Es inmediato que las ecuacioens del sistema de Lorenz no varían si cambiamos (x, y) por $(-x, -y)$. Por tanto, si (x, y, z) es una solución, también lo es $(-x, -y, z)$. □

Proposición 3.6. *Es imposible la presencia de puntos fijos repulsores o órbitas repulsoras en el sistema de Lorenz.*

Para demostrar este enunciado debemos demostrar antes que el sistema de Lorenz es un sistema disipativo:

Definición 3.7. *Un sistema es disipativo si todos los volúmenes en el espacio de fase se contraen bajo el flujo. Es decir, dado un dado un volumen $V(t)$, tenemos que $V(t) \longrightarrow 0$ cuando $t \longrightarrow \infty$.*

Demostración. A continuación procedemos a demostrar la siguiente afirmación

El sistema de Lorenz es un sistema disipativo.

Demostración. Supongamos un caso general de un sistema tri-dimensional $\mathbf{x'} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$[1] y tomamos una área cerrada $S(t)$ con volumen $V(t)$ en el espacio de fase. Dado un punto en S, lo podemos considerar como una condición inicial para trayectorias del sistema, después de un espacio de tiempo infinitesimal dt la superficie de S será ahora $S(t + dt)$ y por tanto su volumen $V(t)$ también cambiará.

En concreto, el volumen $V(t+dt)$ será igual al volumen previo $V(t)$ más la suma de las pequeñas unidades de espacio que se han recorrido a lo largo de toda la superficie. En el

[1] La notación en negrita nos indica que se trata de un vector y no de una única variable

libro de Strogatz, el volumen $V(dt)$ se nos presenta como una simple multiplicación de la velocidad de los puntos $\mathbf{f}$, la dirección que toman n, el tiempo que transcurre dt y el área que se crea en el tiempo dt: dA. Haciendo la integral de todas estas pequeñas superficies obtendremos el aumento en volumen

$$V(t+dt) = V(t) + \int_S (\mathbf{f} \times \mathbf{n} dt) dA \tag{3.2}$$

$$\Longrightarrow V' = \frac{V(t+dt) - V(t)}{dt} = \int_S \mathbf{f} \times \mathbf{n}\, dA. \tag{3.3}$$

Por el teorema de la divergencia de Gauss[1], tenemos que

$$V' = \int_V \nabla \times \mathbf{f}\, dV \tag{3.4}$$

Como sabemos en el sistema de Lorenz (3.1) tenemos la función

$$\mathbf{f} = (\sigma(y-x), rx - y - xz, xy - bz)$$

y por tanto tenemos

$$\begin{aligned}
\nabla \mathbf{f} &= (\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz}) \times (\sigma(y-x), rx - y - xz, xy - bz) = \\
&= \frac{d}{dx}[\sigma(y-x)] + \frac{d}{dy}[rx - y - xz] + \frac{d}{dz}[xy - bz] = \\
&= -\sigma - 1 - b < 0
\end{aligned}$$

Esta última desigualdad se debe a que desde un inicio hemos tomado σ como positivo. De esta manera tenemos la ecuación diferencial

$$V' = \int_V (\sigma - 1 - b)\, dV = (\sigma - 1 - b)V,$$

cuya solución es inmediata

$$V(t) = V_0 \times e^{(-\sigma-1-b)t}.$$

Por tanto vemos que el volumen del área $S(t)$ en el espacio de fase decrece exponencialmente en el sistema de Lorenz, es decir, el volumen ocupado por el flujo de una trayectoria decrece cuando $t \longrightarrow \infty$. Por lo tanto, el sistema de Lorenz es un sistema disipativo. □

Supongamos ahora que el sistema de Lorenz si contiene un punto fijo o una órbita repulsor/a. En ese caso, tomamos un volumen alrededor del flujo de uno de estos dos. En el caso del punto fijo puede ser una pequeña esfera y en el caso de la órbita puede ser un tubo. En cualquiera de los dos casos, al ser repulsores las trayectorias de los puntos pertenecientes a los volúmenes correspondientes serán expulsados hacia fuera, haciendo que estos volúmenes crezcan a medida que pasa el tiempo, lo cual es una contradicción con el hecho de que el sistema de Lorenz es un sistema disipativo. □

Antes de profundizar en los distintos puntos fijos del sistema, introducimos algunas nociones más.

Proposición 3.8. *El sistema de Lorenz no contiene órbitas cuasiperiódicas*

[1]Enunciado y demostrado en asignaturas de cálculo de la carrera de matemáticas

Demostración. Se puede ver en Sección 8.6 de [3] que si existen estas órbitas, entonces deben estar en una superficie invariante de un Toro. Pero el hecho de ser invariante implica que su volumen es constante para todo tiempo t, lo cual es una contradicción con el hecho de que el sistema de Lorenz es disipativo. □

Definición 3.9. *Un punto fijo x^* es estable si para toda condición inicial x_0 suficientemente cercana, la trayectoria correspondiente a este punto existe y se mantiene próxima al punto fijo x^*. Es decir, $\forall \epsilon > 0$ existe un $\delta(\epsilon) > 0$ tal que si $||x^*$ - $x_0|| < \delta$ entonces $||x^*$ - $x_0(t)|| < \epsilon$ donde $x_0(t)$ representa la trayectoria correspondiente a la condición inicial x_0.*

Definición 3.10. *Un punto x_i es un punto globalmente estable si toda trayectoria se acerca a este punto cuando $t \longrightarrow \infty$. Si ocurre lo contrario decimos que es inestable.*

Definición 3.11. *Decimos que una función $V(x)$ es Liapunov si es continua diferenciable, real y cumple las siguientes propiedades:*

1. *$V(x) > 0 \ \forall x \neq x^*$ y $V(x*) = 0$ donde x^* es un punto fijo del sistema $x' = f(x)$ (i.e. $f(x^*) = x^*$)*
2. *$V' < 0 \ \forall x \neq x^*$*

Proposición 3.12. *El origen es un punto fijo en el sistema de Lorenz.*

Demostración. Para cualquier valor de σ, b o r tenemos que si $\mathbf{f}(x, y, z) = (\sigma(y - x), rx - y - xz, xy - bz)$ entonces $f(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$. □

Proposición 3.13. *Para $r < 1$ el punto origen $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ es un punto globalmente estable.*

Demostración. Consideramos la función de Liapunov

$$V(x, y, x) = \frac{1}{\sigma}x^2 + y^2 + z^2,$$

y queremos ver que para $r < 1$ y $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ tenemos que $V' < 0$, es decir, que todas las trayectorias se comprimen en V y por tanto llegan a tender a 0 cuando $t \longrightarrow \infty$, ya que V está acotada por 0. Empezamos calculando V'

$$V' = \frac{1}{\sigma}2xx' + 2yy' + 2zz', \tag{3.5}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}V' = \frac{1}{\sigma}xx' + yy' + zz'. \tag{3.6}$$

Podemos sustituir x', y', z' por sus respectivas ecuaciones de (3.1)

$$\frac{1}{2}V' = (yx - x^2) + (ryx - y^2 - xzy) + (zxy - bz^2) \tag{3.7}$$

$$= (r + 1)xy - x^2 - y^2 - bz^2 \tag{3.8}$$

$$= (r + 1)xy - x^2 - y^2 - bz^2 + (\frac{r + 1}{2})^2y^2 - (\frac{r + 1}{2})^2y^2 \tag{3.9}$$

$$= -[x^2 + (\frac{r + 1}{2})^2y^2 - (r + 1)xy] - y^2 + (\frac{r + 1}{2})^2y^2 - bz^2 \tag{3.10}$$

$$= -[x - \frac{r + 1}{2}y]^2 - [1 - (\frac{r + 1}{2})^2]y^2 - bz^2 \tag{3.11}$$

De esta última ecuaciones deducimos que V' es negativo siempre que $r < 1$, ya que si la ecuación cuenta con 3 cuadrados negativos, y para que sea 0 cada uno de los cuadrados se debe anular por separado. En ese caso, del segundo y tercer término deducimos que $y = 0, z = 0$ y por consecuencia en el primer término también $x = 0$. Por lo tanto tenemos que $V' < 0$ para todo $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ y por tanto el origen es un punto globalmente estable. $\square$

Supongamos ahora que $r > 1$ e impongamos la condición de que $\mathbf{f}(x, y, z) = (0, 0, 0)$ con tal de estudiar los posibles puntos fijos más allá del origen. Esta condición nos da los puntos fijos porque son aquellos cuyas derivadas se anulan al tratarse de puntos que no dependen de ninguna variable t y son constantes. Por tanto, obtenemos el sistema

$$\begin{cases} 0 &= \sigma(y - x), \\ 0 &= rx - y - xz, \\ 0 &= xy - bz, \end{cases} \tag{3.12}$$

de la primera ecuación obtenemos que $x = y$ y sustituyendo en la segunda obtenemos la igualdad

$$0 = rx - x - xz = x(r - 1 - z).$$

Para que la parte derecha de la igualdad se anule tenemos dos opciones, $x = 0$ en cuyo caso caemos en el caso base de el punto fijo $(0, 0, 0)$ que ya hemos visto; la otra opción es $z = (r - 1)$. En este caso, sustituyendo esta condición y que $y = x$ en la tercera ecuación obtenemos que

$$0 = xx - bz = x^2 - b(r - 1) \Longrightarrow x = \pm\sqrt{b(r - 1)}.$$

Por lo tanto obtenemos los siguientes dos puntos fijos que Lorenz denotaba como C^+ y C^-:

$$C^+ = (\sqrt{b(r - 1)}, \sqrt{b(r - 1)}, r - 1), \tag{3.13}$$

$$C^- = (-\sqrt{b(r - 1)}, -\sqrt{b(r - 1)}, r - 1). \tag{3.14}$$

Se deduce de las ecuaciones que cuando $r \longrightarrow 1^+$ tanto C^+ como C^- se fusionan con el origen en un único punto fijo. Estudiemos ahora como se comportan estos puntos fijos para $r > 1$. Para ello, debemos calcular la matriz Jacobiana del sistema y obtener los autovalores para la matriz evaluada en los punto fijos. De esta manera, utilizando el teorema que nos dice que si la parte real estos autovalores es negativa, entonces los puntos fijos son estables. Esto es un proceso de cálculo algo extenso y ya conocido previamente por las asignaturas de álgebra, por lo que lo omitiremos. Tras estos cálculos obtenemos que los puntos fijos C^+ y C^- son estables para un rango concreto de r:

$$1 < r < r_H = \frac{\sigma(\sigma - b + 3)}{\sigma - b - 1},$$

asumiendo que $\sigma - b - 1 > 0$. El motivo por el que ponemos el subíndice H es porque a partir de $r = r_H$ ambos puntos fijos pierden estabilidad en una bifurcación de Hopf.

Definición 3.14. *Una bifurcación de Hopf es aquella bifurcación en la que la estabilidad de un sistema cambia en un punto de equilibrio. Existen dos tipos de bifurcaciones de Hopf:*

- *La bifurcación es supercrítica cuando un punto de equilibrio estable se hace inestable, dando origen a una órbita periódica atractora*

- *La bifurcación es subcrítica cuando un equilibrio estable y una órbita periódica inestable se funden en un punto de equilibrio inestable*

Para identificar que tipo de bifurcación de Hopf tenemos son necesarios unos cálculos complejos que se desvían del objetivo de la sección, pero sabemos que se trata de una bifurcación subcrítica y por tanto no obtenemos una órbita periódica atractora tras la bifurcación, lo que obtenemos para $r > r_H$ en C^+ y C^- son dos puntos de equilibrio inestables.

Visto esto, podemos hacer un gráfico donde representamos el comportamiento de los distintos puntos fijos el sistema según r

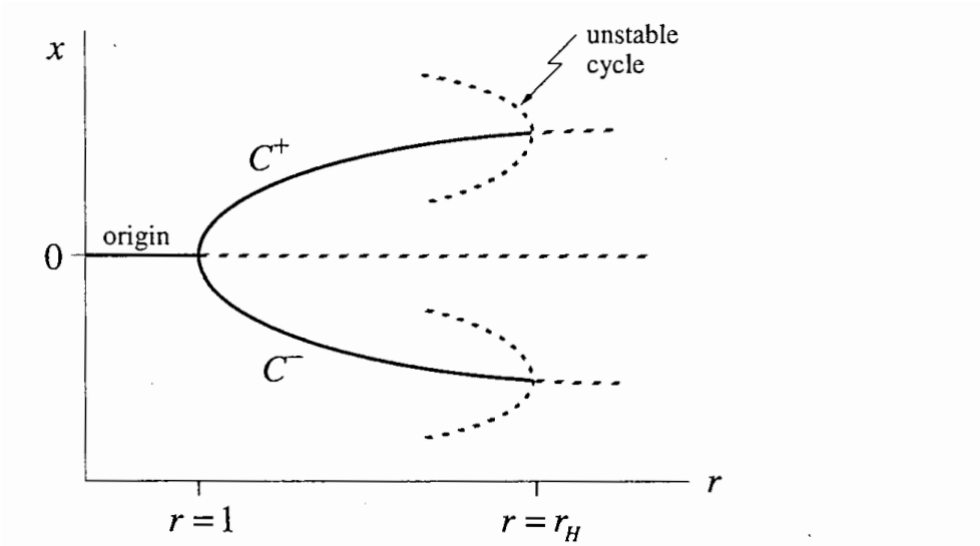


Figura 3

La pregunta que nos debemos hacer es: ¿Qué ocurre con las trayectorias cuando $r > r_H$? Al no haber atractores en la zona, uno podría pensar que las trayectorias se deben desperdigar hasta el infinito o un atractor lejano. Lorezn pensó lo mismo pero lo descartó tras ver que todas las trayectorias se mantienen dentro de una elipse suficientemente grande. El razonamiento es análogo a la demostración de la proposición 3.9. Vemos que dada una función de Liapunov en forma de elipse, la derivada de esta depende únicamente de términos cuadráticos negativos, con lo que siempre decrece y por tanto *confina* a todas las trayectorias.

Otra opción es que existan soluciones periódicas cuando $r > r_H$. Aunque viendo la trayectoria pueda parecer que no es periódica, debemos dar una demostración rigurosa ya que se podría tratar de una trayectoria con un periodo T al que no hemos llegado todavía. En un principio no existía esta demostración rigurosa, y lo mejor que había era la demostración de Lorenz. Sin embargo, en 1999 Warwick Tucker hizo una demostración dividiendo el espacio en rectángulos y demostrando que las trayectorias saltaban de rectángulo a rectángulo para todo tiempo t. La demostración no es compleja en si, pero es extensa [6].

El atractor extraño de Lorenz

Lorenz estudió durante mucho tiempo este sistema para los valores $\sigma = 10, b = \frac{8}{3}, r = 28$. En este caso tenemos que $r_H \approx 24{,}74$ y por tanto nos encontramos en un caso con r mayor

pero próximo a r_h. En concreto, Lorenz empezó con el sistema de condiciones iniciales $(x_0, y_0, z_0) = (0, 1, 0)$ y obtuvo la siguiente solución en $y(t)$

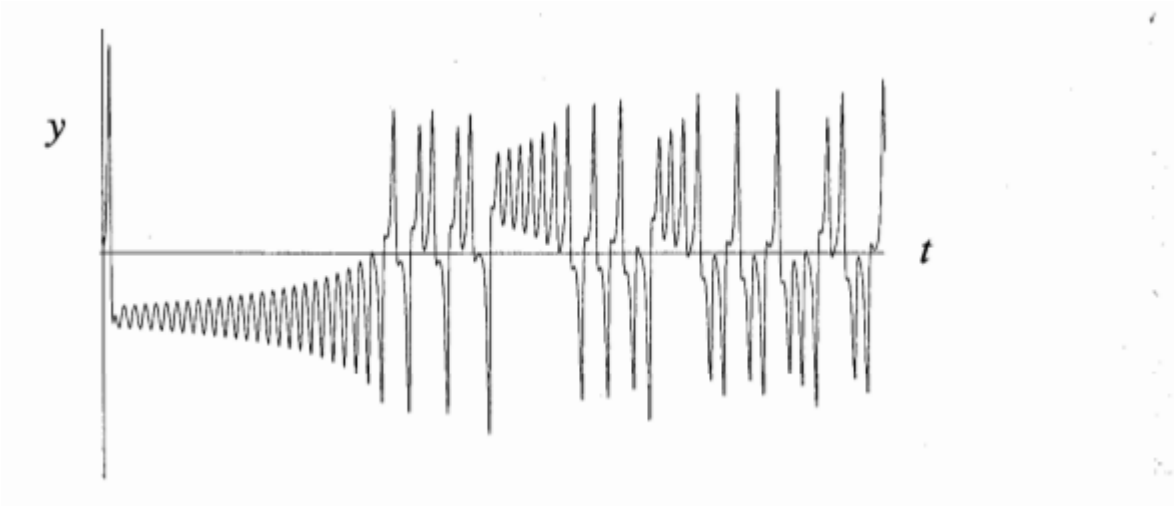


Figura 4

Y al representarlo con los ejes x y z cruzados obtuvo la famosa forma de mariposa

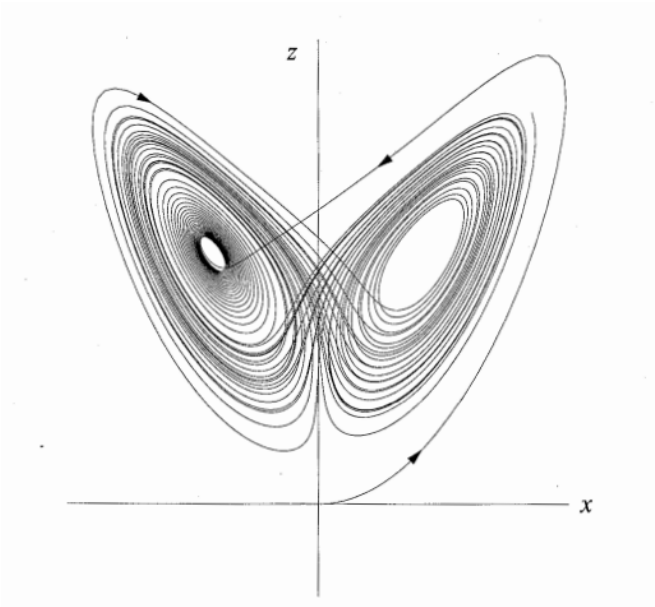


Figura 5

Si consideramos como el 0 la recta horizontal de la Figura 4, entonces los cambios de signo en las trayectorias de se corresponden con los cambios de lado en la Figura 5. Aunque pueda parecer que en esta última figura las trayectorias se cruzan esto es un efecto que se debe a las dos dimensiones. En tres dimensiones no existen intersecciones entre trayectorias. La Figura 5 nos da una pista de como es el atractor extraño de Lorenz, que puede perecer una unión de dos superficies, pero es más complejo. Lorenz lo explicaba así:

≪Parece, pues, que las dos superficies se fusionan pero siguen siendo superficies distintas. Siguiendo estas superficies a lo largo de una trayectoria paralela a una trayectoria, y rodeando C^+ y C^-, vemos que cada superficie es en realidad un par de superficies, de modo que, donde parecen fusionarse, hay en realidad cuatro superficies. Continuando este proceso por otro circuito, vemos que en realidad hay ocho superficies, etc., y finalmente concluimos que hay un complejo infinito de superficies, cada una extremadamente cerca de una u otra de las dos superficies que se fusionan.≪

Hoy en día a esto se le llama fractal, un conjunto de puntos con cero volumen pero superficie infinita.

Se sabe que un día Lorenz repitió los parámetros de una secuencia que ya había probado, y se topó con que al cabo de un rato, los resultados de esta repetición no eran ni mucho menos similares a los de la anterior. En un principio pensó que se trataba de un error del ordenador, pero tras comprobarlo vio que no era así, y que la cuestión estaba en las cifras: la impresora únicamente devolvía números con 3 decimales mientras que el ordenador trabajaba con 6. Por tanto Lorenz no había puesto exactamente los mismos números. Esto se conoce como *dependencia sensible a condiciones iniciales*. Pero, ¿cuánto de sensible es el sistema?

Los estudios números del sistema de Lorenz nos revelan que la separación entre dos trayectorias distanciadas por un $\delta(t)$ con $||\delta_0|| = 10^{-15}$ crece exponencialmente según

$$||\delta(t)|| \sim ||\delta_0||e^{\lambda t},$$

donde $\lambda = 0{,}9$ se conoce como el número de Liapunov.

Dado este comportamiento y habiendo descartado las demás posibilidades, Lorenz concluyó que el sistema era un atractor extraño de la forma de la Figura 5.

3.3. Mapa de Lorenz

En su intento por entender y predecir el comportamiento del sistema, Lorenz observó que cuando una trayectoria se aleja en espiral de C^+ (o C^-), los bucles se hacen más grandes hasta que finalmente la trayectoria cruza al otro ≪lado de la mariposa≫. La amplitud del bucle parece determinar la amplitud del bucle siguiente.

Para comprobar esto, Lorenz representó el cambio de z según el tiempo t de la misma manera que que lo hizo en la Figura 4 obteniendo

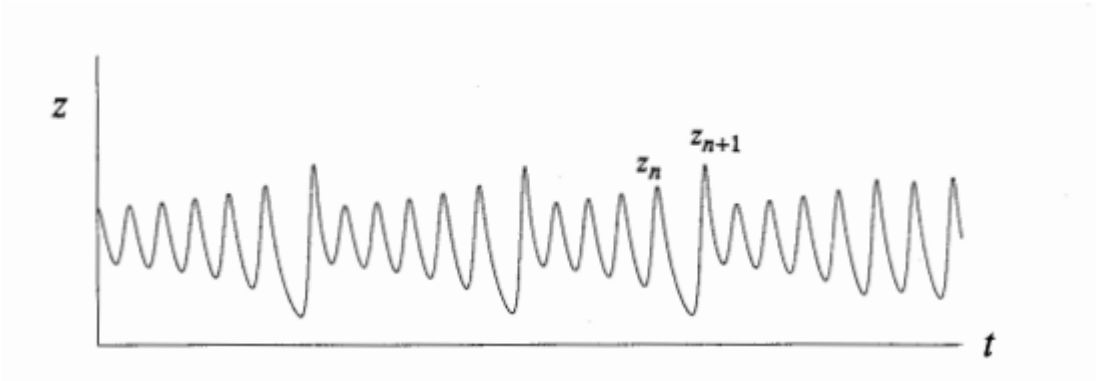


Figura 6

y escribió

> ≪la trayectoria aparentemente sólo abandona una espiral tras superar cierta distancia crítica desde el centro. Además, la medida en que se supera esta distancia parece determinar el punto en el que se entra en la siguiente espiral; esto, a su vez, parece determinar el número de circuitos que deben ejecutarse antes de volver a cambiar de espiral. Por lo tanto, parece que alguna característica de un circuito determinado debería predecir la misma característica del circuito siguiente.≪

Strogatz nos lo resume así: "La idea de Lorenz es que z_n debe predecir z_{n+1}". Lorenz entonces trabajó numéricamente con el sistema, integrando las ecuaciones y estudiando los máximos y mínimos de $z(t)$. Finalmente, representando z_{n+1} en función de z_n obtuvo lo que hoy conocemos como el *Mapa de Lorenz*:

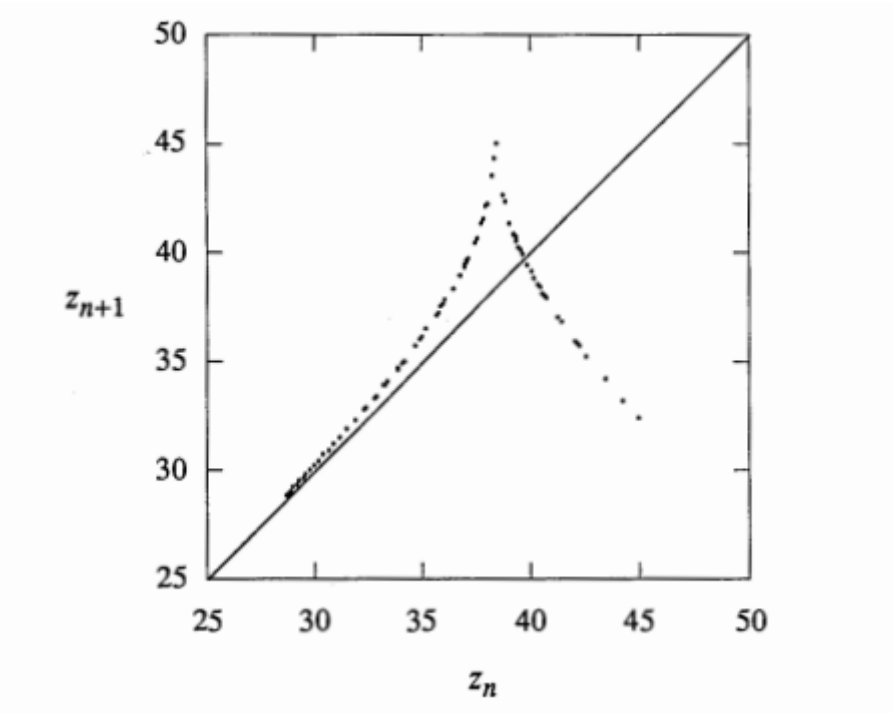


Figura 7

Es importante destacar que esta función no plana, y por tanto no está del todo bien definida. Es decir, la función contiene más de un valor z_{n+1} para un z_n. Sin embargo, debido a que gracias a este mapa podemos predecidir en cierto grado el caos, nos conviene tomarlo como una función bien definida, pero siempre debemos tener en cuenta que las conclusiones extraídas aunque probables, nunca serán rigurosas. Pese a esto, gracias a esta función "Lorenz fue capaz de extraer orden del caos"[3].

El estudio del sistema de Lorenz continua hasta hoy y sus descubrimientos siguen apareciendo en todo tipo de modelos. Entre todos ellos, en la siguiente sección estudiaremos el comportamiento del doble péndulo y como el caos se da en este módelo físico.

4. El doble péndulo

En esta sección presentaremos el modelo del doble péndulo, las ecuaciones del sistema y su comportamiento caótico.

4.1. Las ecuaciones de movimiento

El doble péndulo es un modelo formado por dos péndulos simples que llamaremos p_1 y p_2, con la punta del primero enganchada al inicio del segundo. De esta manera obtenemos un doble péndulo con la siguiente forma

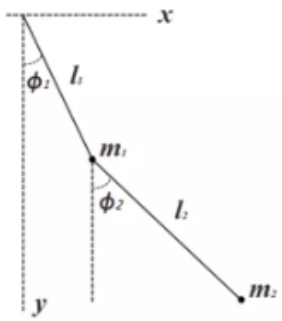


Figura 8

Cada péndulo p_1, p_2 tiene una longitud de l_1 y l_2 respectivamente, y del final de cada uno cuelga una masa que llamaremos m_1 y m_2. Ademas llamaremos por ϕ_1 y ϕ_2 al ángulo que forma p_1, p_2 con la vertical y usaremos la notación $p_1(t), p_2(t)$ para determinar la posición de cada uno respecto al tiempo t. Como es lógico, el comportamiento del péndulo dependerá en cierta medida de las variables l_1, l_2, m_1, m_2.

Con trigonometría básica tenemos que la posición (x, y) de la punta de cada uno de los péndulos vendrá dada por las siguientes ecuaciones

$$x_1 = l_1 \times \sin(\phi_1), \tag{4.1}$$
$$y_1 = l_1 \times \cos(\phi_1), \tag{4.2}$$
$$x_2 = l_1 \times \sin(\phi_1) + l_2 \times \sin(\phi_2), \tag{4.3}$$
$$y_2 = l_1 \times \cos(\phi_1) + l_2 \cos(phi_2), \tag{4.4}$$

donde $p_1(t) = (x_1, y_1)$, y $p_2(t) = (x_2, y_2)$. Por otro lado, tenemos que la velocidad angular de cada uno es

$$w_1 = \frac{d\phi_1}{dt}, \tag{4.5}$$
$$w_2 = \frac{d\phi_2}{dt}, \tag{4.6}$$

y por tanto la velocidad del primer péndulo es el producto de esta velocidad angular por el radio de la circunferencia que recorre

$$\vec{v}_1 = l_1 \times w_1 = l_1 \times \frac{d\phi_1}{dt}, \tag{4.7}$$

y podemos dividirla por componentes

$$\vec{v}_{1x} = l_1 \times \frac{d\phi_1}{dt}\cos(\phi_1), \tag{4.8}$$

$$\vec{v}_{1y} = l_1 \times \frac{d\phi_1}{dt}\sin(\phi_1). \tag{4.9}$$

Con tal de simplificar la notación, utilizaremos los vectores unitarios $\vec{i} = (1,0), \vec{j} = (0,1)$ para referirnos a las componentes horizontales y verticales respectivamente. Podemos escribir entonces

$$\vec{v}_1 = l_1 \times \frac{d\phi_1}{dt}\cos(\phi_1)\vec{i} + l_1 \times \frac{d\phi_1}{dt}\sin(\phi_1)\vec{j}. \tag{4.10}$$

La ecuación de la velocidad del segundo péndulo es análoga:

$$\vec{v}_2 = l_2 \times \frac{d\phi_2}{dt}\cos(\phi_2)\vec{i} + l_2 \times \frac{d\phi_2}{dt}\sin(\phi_2)\vec{j}. \tag{4.11}$$

Sin embargo, no podemos omitir el hecho de que este péndulo se mueve también dependiendo del primero. Por eso, su velocidad debe depender del otro péndulo. Su velocidad respecto al sistema completo es entonces

$$\begin{aligned}
\vec{v}_2 &= \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \\
&= l_2 \times \frac{d\phi_2}{dt}\cos(\phi_2)\vec{i} + l_2 \times \frac{d\phi_2}{dt}\sin(\phi_2)\vec{j} + l_1 \times \frac{d\phi_1}{dt}\cos(\phi_1)\vec{i} + l_1 \times \frac{d\phi_1}{dt}\sin(\phi_1)\vec{j} \\
&= \left(l_2 \times \frac{d\phi_2}{dt}\cos(\phi_2) + l_1 \times \frac{d\phi_1}{dt}\cos(\phi_1)\right)\vec{i} + \left(l_2 \times \frac{d\phi_2}{dt}\sin(\phi_2) + l_1 \times \frac{d\phi_1}{dt}\sin(\phi_1)\right)\vec{j}.
\end{aligned}$$

Visto esto, podemos introducir la energía cinética del sistema, que sabemos es la energía que obtiene un objeto por tener velocidad, y depende de la masa y la velocidad del objeto. Tiene por ecuación general la siguiente

$$T = \frac{1}{2}m \times v^2.$$

Por eso, la energía cinética de nuestro sistema es

$$T = \frac{1}{2}m_1 \times v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \times v_2^2 \tag{4.12}$$

$$= \frac{1}{2}m_1 \times (l_1 \times \frac{d\phi_1}{dt})^2 + \frac{1}{2}m_2 \times (l_1 \times \frac{d\phi_1}{dt} + l_2 \times \frac{d\phi_2}{dt})^2 \tag{4.13}$$

$$= \frac{1}{2}m_1 \times (l_1 \times \frac{d\phi_1}{dt})^2 + \frac{1}{2}m_2 \times (l_1 \times \frac{d\phi_1}{dt})^2 + \frac{1}{2}m_2 \times (l_2 \times \frac{d\phi_2}{dt})^2 + m_2 l_1 l_2 \frac{d\phi_1}{dt}\frac{d\phi_2}{dt}\cos(\phi_1 - \phi_2). \tag{4.14}$$

Por otro lado, la energía potencial es aquella energía que tiene un objeto por estar a cierta altura, y se obtiene haciendo el producto de la masa, la gravedad y la altura del objeto. En nuestro sistema en particular, tomaremos como referencia la plataforma desde la que cuelga el primer péndulo en la Figura 8, y por tanto tomaremos alturas negativas. La energía potencial es[1]

$$V = -(m_1 \times g \times y_1 + m_2 \times g \times y_2) \tag{4.15}$$

$$= -(m_1 \times g \times (l_1\cos(\phi_1))) + m_2 \times g \times (l_1\cos(\phi_1) + l_2\cos(phi_2)) \tag{4.16}$$

$$= -(m_1 + m_1) \times g \times l_1\cos(\phi_1) - m_2 \times g \times l_2\cos(\phi_2). \tag{4.17}$$

[1]Denotaremos por g la gravedad, que será igual a 9,81

Debemos introducir ahora la teoría de Lagrange en sistemas mecánicos para obtener las ecuaciones de movimiento del modelo.

Definición 4.1. *Definimos el Langrangiano de un sistema como la función escalar $L(q_i, q_i', t)$ con fórmula:*

$$L(q_i, q_i', t) = T(q_i, q_i', t) - V(q_i, q_i', t), \tag{4.18}$$

donde q_i son los parámetros del sistema.

En nuestro caso $i = 2$ y cada q_i será cada uno de los dos ángulo del sistema:

$$q_1 = \phi_1,$$
$$q_2 = \phi_2,$$

y por tanto obtenemos el Langriangiano

$$L(\phi_1, \phi_1', \phi_2, \phi_2', t) = T(\phi_1, \phi_1', \phi_2, \phi_2', t) - V(\phi_1, \phi_1', \phi_2, \phi_2', t). \tag{4.19}$$

Definición 4.2. *Dada la integral del Lagrangiano a lo largo de dos puntos de tiempo t_1 y t_2:*

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t)\, dt,$$

definimos el principio Hamiltoniano, o principio de mínima acción de Hamilton aquel que afirma que la trayectoria real que sigue un sistema físico entre estos dos instantes de tiempo es aquella que hace que la acción (S) sea mínima. Se ha probado que la trayectoria que hace S mínima es aquella que cumple

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t)\, dt = 0.$$

Consideramos ahora unas trayectorias con una pequeña variación respecto de las trayectorias de las coordenadas ϕ_1, ϕ_2

$$\phi_i(t) \to \phi_i(t) + \delta\phi_i(t).$$

La variación de S es

$$S[\phi_i(t) + \delta\phi_i(t)] - S[\phi_i(t)] = \delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta L\, dt = 0, \tag{4.20}$$

donde L es lagrangiano, y por tanto tenemos

$$condiciones \delta L = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial \phi_i} \delta\phi_i + \frac{\partial L}{\partial \phi_i'} \delta\phi_i' \right), \tag{4.21}$$

$$\Longrightarrow \delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial \phi_i} \delta\phi_i + \frac{\partial L}{\partial \phi_i'} \delta\phi_i' \right) dt, \tag{4.22}$$

que sabemos es 0 por el principio Hamiltoniano. Integramos por partes los términos con $\partial\phi_i'$ (el segundo término de la suma) de manera que obtenemos

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \phi_i'} \delta\phi_i'\, dt = \left[\frac{\partial L}{\partial \phi_i'} \delta\phi_i \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \phi_i'} \right) \delta\phi_i\, dt.$$

Asumimos que $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$ ya que tienden a cero, de esta manera

$$\left[\frac{\partial L}{\partial \phi_i'}\delta\phi_i\right]_{t_1}^{t_2} = 0 - 0 = 0.$$

Obtenemos por tanto la igualdad

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \phi_i'}\delta\phi_i'\, dt = -\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \phi_i'}\right)\delta\phi_i\, dt.$$

Sustituimos esta igualdad en la ecuación de la variación δS (4.21) y obtenemos

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial \phi_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \phi_i'}\right)\right)\delta\phi_i\, dt. \tag{4.23}$$

Por el principio Hamiltoniano, esta variancia es nula, y por eso tenemos que la integral debe ser 0, esto solo ocurrirá si el integrando también lo es, de manera que se da la igualdad

$$\frac{\partial L}{\partial \phi_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \phi_i'}\right) = 0. \tag{4.24}$$

Definición 4.3. *Definimos las ecuaciones de Euler-Lagrange como*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \tag{4.25}$$

Gracias a la ecuaciones de Euler-Lagrange obtenemos la ecuaciones de movimiento de nuestro sistema, ya que describen cómo las coordenadas q_i (en nuestro caso $\phi_i, i = 1, 2$) cambian respecto del tiempo, y lo hacen cumpliendo con el principio hamiltoniano. Por lo tanto, concluimos que las ecuaciones de movimiento del sistema del doble péndulo son

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \phi_1'}\right) - \frac{\partial L}{\partial \phi_1} = 0, \quad \partial\phi_1' = \frac{d\phi_1}{dt}, \tag{4.26}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \phi_2'}\right) - \frac{\partial L}{\partial \phi_2} = 0, \quad \partial\phi_2' = \frac{d\phi_2}{dt}. \tag{4.27}$$

Para continuar debemos calcular la ecuación del Lagrangiano. Utilizamos la ecuación del Lagrangiano (4.17) y el cálculo de la energía cinética (T) y la energía potencial (V) en (4.13) y (4.16) respectivamente

$$\begin{aligned}
L = T - V &= \\
&= \left(\frac{1}{2}m_1 \times (l_1\frac{d\phi_1}{dt})^2 + \frac{1}{2}m_2 \times (l_1\frac{d\phi_1}{dt})^2 + \frac{1}{2}m_2 \times (l_2\frac{d\phi_2}{dt})^2 + m_2 l_1 l_2 \frac{d\phi_1}{dt}\frac{d\phi_2}{dt}\cos(\phi_1 - \phi_2)\right) \\
&- (-(m_1 + m_2)gl_1\cos(\phi_1) - m_2 g l_2 \cos(\phi_2)) \\
&= \frac{1}{2}l_1^2\frac{d\phi_1}{dt}^2(m_1 + m_2) + \frac{1}{2}m_2 l_2^2\frac{d\phi_2}{dt}^2 + m_2 l_1 l_2 \frac{d\phi_1}{dt}\frac{d\phi_2}{dt}\cos(\phi_1 - \phi_2) + \\
&+ m_1 g l_1 \cos(\phi_1) + m_2 g(l_1\cos(\phi_1) - l_2\cos(\phi_2)).
\end{aligned}$$

Calculamos ahora las componentes de las ecuaciones del sistema en (4.25) y (4.26)

Para ϕ_1:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \phi_1'} = \frac{d}{dt}\left[l_1^2\frac{d\phi_1}{dt}(m_1+m_2) + m_2 l_1 l_2 \frac{d\phi_2}{dt}\cos(\phi_1-\phi_2)\right] \tag{4.28}$$

$$= l_1^2(m_1+m_2)\phi_1'' + m_2 l_1 l_2 \left(\phi_2''\cos(\phi_1-\phi_2) - \phi_1'\phi_2'\sin(\phi_1-\phi_2)\right) \tag{4.29}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi_1} = -(m_1+m_2)gl_1\sin(\phi_1) - m_2 l_1 l_2 \phi_1'\phi_2'\sin(\phi_1-\phi_2). \tag{4.30}$$

Para ϕ_2:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \phi_2'} = \frac{d}{dt}\left[m_2 l_2^2\frac{d\phi_2}{dt} + m_2 l_1 l_2 \frac{d\phi_1}{dt}\cos(\phi_1-\phi_2)\right] \tag{4.31}$$

$$= m_2 l_2^2\phi_2'' + m_2 l_1 l_2 \left(\phi_1''\cos(\phi_1-\phi_2) - \phi_1'\phi_2'\sin(\phi_1-\phi_2)\right) \tag{4.32}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi_2} = -m_2 g l_2\sin(\phi_2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\phi}_1\dot{\phi}_2\sin(\phi_1-\phi_2). \tag{4.33}$$

Finalmente, las ecuaciones del movimiento del doble péndulo son las siguientes

$$l_1^2(m_1+m_2)\ddot{\phi}_1 + m_2 l_1 l_2\left(\ddot{\phi}_2\cos(\phi_1-\phi_2) - \dot{\phi}_1\dot{\phi}_2\sin(\phi_1-\phi_2)\right) =$$
$$= -(m_1+m_2)gl_1\sin(\phi_1) - m_2 l_1 l_2\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2\sin(\phi_1-\phi_2),$$

$$m_2 l_2^2\phi_2'' + m_2 l_1 l_2\left(\phi_1''\cos(\phi_1-\phi_2) - \phi_1'\phi_2'\sin(\phi_1-\phi_2)\right) =$$
$$= -m_2 g l_2\sin(\phi_2) + m_2 l_1 l_2\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2\sin(\phi_1-\phi_2).$$

4.2. El caos en el doble péndulo

A la hora de estudiar computacionalmente el modelo del doble péndulo debemos discretizar nuestro sistema, para ello se suelen utilizar métodos numéricos como los que hemos presentado en la primera sección del trabajo. En nuestro caso particular, lo haremos redefiniendo nuestras variables y escribiendo las ecuaciones de estas nuevas variables.

Definimos

$$X_1 = \phi_1,$$
$$X_2 = \phi_2,$$
$$X_3 = \phi_1',$$
$$X_4 = \phi_2'.$$

A continuación despejamos ϕ_1'' y ϕ_2'' de la segunda ecuación del movimiento y hacemos dos sustituciones respectivas de $X_3' = \phi_1''$ y $X_4' = \phi_2''$ en la primera ecuación del movimiento. De esta manera podemos despejar ϕ_1'' y ϕ_2'' en términos de $\phi_1, \phi_2, \phi_1', \phi_2'$, que por tanto será en términos de X_1, X_2, X_3 y X_4. Obtenemos así el siguiente sistema de cuatro ecuaciones

$$X_1' = X_3, \tag{4.34}$$
$$X_2' = X_4, \tag{4.35}$$
$$X_3' = [-gl_1 \sin(X_1)(m_1+m_2) + m_2 l_2 X_3^2 \sin(X_1 - X_2)\cos(X_1 - X_2) + m_2 l_1 \sin(X_2) \tag{4.36}$$
$$\cos(X_1 - X_2) - m_2 l_1 l_2 X_3'^2 \sin(X_1 - X_2)]/\left(l_1^2(m_1+m_2) - m_2 l_1^2 \cos^2(X_1 - X_2)\right), \tag{4.37}$$
$$X_4' = [-m_2 g l_2 \sin(X_2) + m_2 g l_2 \sin(X_1)\cos(X_1 - X_2) + \frac{m_2^2 l_2^2}{m_1+m_2} X_4^2 \sin(X_1 - X_2) \tag{4.38}$$
$$\cos(X_1 - X_2) + m_2 l_1 l_2 X_3^2 \sin(X_1 - X_2)]/\left(m_2 l_2^2 - \frac{m_2^2 l_2^2}{m_1+m_2}\cos^2(X_1 - X_2)\right). \tag{4.39}$$

Dado este sistema, la física experimental nos dice que los puntos:$(0,0,0,0)$, $(0,\pi,0,0)$, $(\pi,0,0,0)$ y $(\pi,\pi,0,0)$ son puntos de equilibrio, ya que son aquellos puntos en los que la gravedad no influye y por tanto no hay aceleración, lo que implica que las masas no se mueven. Nos centraremos ahora en el punto de equilibrio en el origen. Veamos que se trata de un punto de equilibrio estable en el sistema del doble péndulo. Para verlo, utilizaremos un teorema enunciado y demostrado por Aleksandr Lyapunov en [**?**]

Teorema 4.4. *Sea $\tilde{x}$ un punto de equilibrio del sistema del doble péndulo. Sea $V : U \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y diferenciable definida una vecindad U de $\tilde{x}$ tal que*

1. *$V(\tilde{x}) = 0$ y $V(x) \geq 0$ si $x \neq \tilde{x}$*
2. *$V' \leq 0$ en $U \setminus x$*

entonces $\tilde{x}$ es estable

Veamos que esta función V existe en un entorno U del origen. Para ello introducimos el Hamiltoniano de un sistema.

Definición 4.5. *Definimos el Hamiltoniano de un sistema como la función que tiene por ecuación*

$$H = T + V,$$

donde T es la energía cinética y V es la energía potencial.

Gracias a los cálculos en (4.13) y (4.16) obtenemos el Hamiltoniano:

$$\begin{aligned}
&H(X_1, X_2, X_3, X_4) = H(\phi_1, \phi_2, \phi_1', \phi_2') = \\
&= \left(\frac{1}{2}m_1 \times (l_1 \frac{d\phi_1}{dt})^2 + \frac{1}{2}m_2 \times (l_1 \frac{d\phi_1}{dt})^2 + \frac{1}{2}m_2 \times (l_2 \frac{d\phi_2}{dt})^2 + m_2 l_1 l_2 \frac{d\phi_1}{dt}\frac{d\phi_2}{dt}\cos(\phi_1 - \phi_2)\right) \\
&+ (-(m_1+m_2)gl_1\cos(\phi_1) - m_2 g l_2 \cos(\phi_2)) \\
&= \frac{1}{2}l_1^2 \frac{d\phi_1}{dt}^2 (m_1+m_2) + \frac{1}{2}m_2 l_2^2 \frac{d\phi_2}{dt}^2 + m_2 l_1 l_2 \frac{d\phi_1}{dt}\frac{d\phi_2}{dt}\cos(\phi_1 - \phi_2) \\
&- m_1 g l_1 \cos(\phi_1) - m_2 g(l_1 \cos(\phi_1) - l_2 \cos(\phi_2)).
\end{aligned}$$

Es inmediato que

$$H(0,0,0,0) = -m_1 g l_1 - m_2 g l_1 - m_2 g l_2.$$

Por tanto, si definimos la función $V = H - (-m_1 l_1 - m_2 l_1 - m_2 l_2)$ que tiene por ecuación

$$\begin{aligned}
V &= \frac{1}{2} l_1^2 \frac{d\phi_1}{dt}^2 (m_1 + m_2) + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \frac{d\phi_2}{dt}^2 + m_2 l_1 l_2 \frac{d\phi_1}{dt}\frac{d\phi_2}{dt} \cos(\phi_1 - \phi_2) \\
&- m_1 g l_1 \cos(\phi_1) - m_2 g (l_1 \cos(\phi_1) - l_2 \cos(\phi_2)) - (-m_1 g l_1 - m_2 g l_1 - m_2 g l_2) \\
&= \frac{1}{2} l_1^2 \frac{d\phi_1}{dt}^2 (m_1 + m_2) + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \frac{d\phi_2}{dt}^2 + m_2 l_1 l_2 \frac{d\phi_1}{dt}\frac{d\phi_2}{dt} \cos(\phi_1 - \phi_2) \\
&+ m_1 g l_1 (1 - \cos(\phi_1)) + m_1 g l_1 (1 - \cos(\phi_1)) + m_2 g l_2 (1 - cos(\phi_2)),
\end{aligned}$$

esta función satisface que $V(0,0,0,0) = 0$. Por otro lado, como $l_i, m_i > 0$, $|\cos(\phi_i) \leq 1$ y en un entorno suficientemente pequeño de 0 $cos(\phi_1 - \phi_2) > 0$. Entonces tenemos que ningún sumando de la función es negativo, y por tanto $V > 0$ en un entorno del origen, es decir, V satisface la primera ecuación.

Por otro lado, como el sistema del doble péndulo es conservativo tenemos que $H' = 0$ y por ende $V' = 0$ con lo que se satisface la segunda ecuación del teorema. Por tanto podemos concluir que el origen es un punto de equilibro estable.

A continuación presentaré un ejemplo del comportamiento caótico del modelo del doble péndulo[10].

Consideramos dos órbitas x_1, x_2 con condiciones iniciales
x_1 :

$$\phi_{1,1} = \frac{\pi}{4}, \quad \phi_{1,2} = \frac{\pi}{4}. \tag{4.40}$$

x_2 :

$$\phi_{2,1} = \frac{3\pi}{4}, \quad \phi_{2,2} = \frac{3\pi}{4}. \tag{4.41}$$

Ahora, dadas dos órbitas cercanas a estas, con condiciones iniciales que diferencian por $\epsilon = 0{,}01$, observamos que el comportamiento de las trayectorias es opuesto. Por un lado, la primera órbita se mantiene a una distancia casi constante de su órbita cercana (a una distancia de $\delta \approx 0{,}0632$. Sin embargo, en el otro caso tenemos que estas dos órbitas se diferencian por hasta $\delta \approx 4$, que es la máxima distancia permitida en este sistema.

En las Figuras 9 y 10 podemos ver el desarrollo de la primera y segunda órbitas respectivamente, junto con sus respectivas órbitas cercanas.

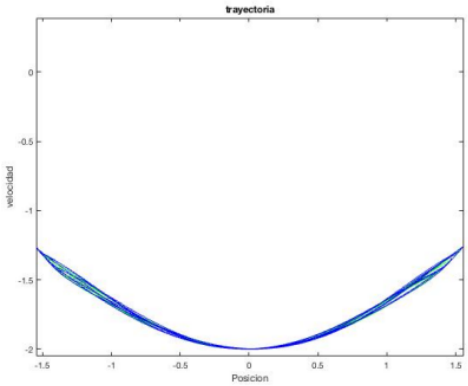


Figura 9

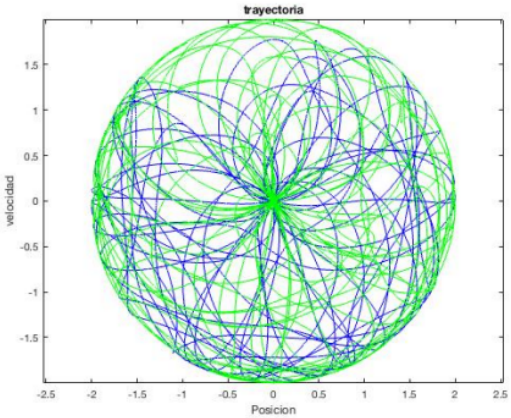


Figura 10

Referencias

[1] David F. Griffiths; Desmond J. Higham: Numerical Methods for Ordinary Differential Equations. Springer. 2010.

[2] John Charles Butcher: Numerical Methods for Ordinary Differential Equations Second Edition. Wiley. 2008.

[3] Steven H. Strogatz: Nonlinear Dynamics and Chaos. Perseus. 1994.

[4] Marian Gidea; Constantin P. Niculescu: Chaotic Dynamical Systems An Introduction. 2002.

[5] Peter Dizikes: When the butterfly effect took flight. MIT Technology Review. 2011.

[6] Warwick Tucker: The Lorenz Attractor Exists. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics, Volume 328, 1197-1202. 1999.

[7] James Gleick: Chaos. Making a new science. Viking. 1987.

[8] Mariano Gasca González: Los métodos de Runge-Kutta en la resolución numérica de ecuaciones diferenciales. 1998.

[9] David Baca Carrasco: Análisis Paramétrico de la Bifurcación de Hopf en Sistemas Tipo Lorenz. Universidad de Sonora. 2007

[10] Alfredo Lozano, Enrique Mejia Fontanot et al.: La dinámica del doble péndulo. 2017.

[11] Joan Pareras: Mécanica Teórica. Universidad de Barcelona.