UNIVERSITAT DE BARCELONA
Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

EL TEOREMA DE COMPLETESA DE SOLOVAY

Autor: Joan Florit Rodríguez

Director: Dr. Joan Bagaria Pigrau
Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica
Barcelona, 10 de juny de 2024

Abstract

The goal of this TFG is to demonstrate in a thorough and datailed way the Solovay's Completeness Theorem. To carry it out it will be done a detailed analysis of the previous theory needed to understand both the theorem and its demonstration, and finally this same demonstration will be studied rigorously.

Resum

L'objectiu d'aquest TFG és demostrar de manera exhaustiva i detallada el Teorema de Completesa de Solovay. Per dur-ho a terme es farà una anàlisi detallada de la teoria prèvia necessària per a entendre tant el teorema com la seva demostració, i finalment s'estudiarà aquesta mateixa demostració de manera rigorosa.

Agraïments

Vull agrair al meu tutor, el Dr. Joan Bagaria Pigrau, per la guia i ajuda que m'ha proporcionat al llarg d'aquest treball. I a la meva família i amics, que m'han ajudat a desconnectar quan era necessari per després tornar amb més força.

Índex

Capítol 1

Introducció

El Teorema de Completesa de Solovay, demostrat per Robert Solovay l'any 1976, és un resultat fonamental de la lògica matemàtica i de la teoria de la demostrabilitat. El teorema tracta la qüestió de la completesa en el context de l'aritmètica i proporciona una perspectiva de la relació entre la veritat i la demostrabilitat. Mentre que el Teorema de Completesa de Gödel estableix que si una fórmula és vertadera en tots els models d'una teoria de primer ordre, aleshores aquesta fórmula és demostrable en aquesta mateixa teoria, el Teorema de Completesa de Solovay estén aquesta noció a l'àmbit de l'aritmètica.

Gràcies al teorema de Solovay, es va aconseguir una eina molt útil en l'anàlisi de la demostrabilitat aritmètica. Cal remarcar que aquest resultat no té només implicacions teòriques significatives en l'àmbit de la lògica matemàtica, sinó que també és un resultat important amb utilitat en la teoria de la computació i la filosofia de les matemàtiques.

L'objectiu principal d'aquest TFG és realitzar un estudi exhaustiu del Teorema de Completesa de Solovay. Per aconseguir-ho es farà una anàlisi detallada de la teoria prèvia necessària per a entendre tant el teorema com la seva demostració i seguidament s'estudiarà de manera rigorosa aquesta mateixa demostració.

L'estructura d'aquest treball és la següent: el primer capítol és una introducció i contextualització, per tal de proporcionar una visió general del tema i de la seva rellevància; el segon capítol és un desenvolupament teòric per examinar i demostrar els conceptes i resultats previs, això inclou nocions de diferents sistemes de lògica proposicional modal, de l'aritmètica de Peano i de l'ús de l'operador Bew(x) com a operador de demostrabilitat juntament amb estructura de la semàntica dels models de Kripke; el tercer capítol és la demostració del propi teorema, de manera detallada i fent servir les eines definides i demostrades en l'anterior capítol; i per últim el quart capítol són les conclusions i aplicacions, i tracta de discutir les implicacions del teorema i possibles aplicacions.

Finalment, per abordar aquest estudi ens basarem principalment en el llibre *The logic of provability* de George Boolos, el qual realitza un estudi molt més detallat de la lògica de la demostrabilitat en general, però que en particular estudia també el teorema en qüestió.

Capítol 2

Teoria prèvia a la demostració

L'objectiu d'aquest capítol és explorar la teoria necessària per a la demostració del Teorema de Completesa de Solovay. Primerament definirem i demostrarem algunes propietats bàsiques tant del sistema de lògica modal GL com de l'aritmètica de Peano (PA). Seguidament definirem i tractarem amb l'operador Bew(x) com a connexió entre GL i PA i, finalment, presentarem una semàntica per a GL, anomenada *models de Kripke*, que ens permetrà construir el model necessari per a la demostració del teorema.

2.1 GL i altres sistemes de lògica modal

En aquest apartat introduirem diversos sistemes de lògica modal, amb l'objectiu d'estudiar la definició, estructura i propietats bàsiques de GL. Definirem certs conceptes de la lògica modal bàsica, donarem definicions d'alguns tipus d'aquesta lògica, entre ells GL, i demostrarem algunes propietats bàsiques ja sigui per fer-les servir més endavant o simplement per ajudar-nos a veure de manera més entenedora l'estructura d'aquest sistema de lògica modal.

Abans de començar amb GL, definim alguns conceptes bàsics previs necessaris de la lògica modal en general.

Definició 2.1.1. *Un* ***enunciat modal*** *o simplement* ***enunciat*** *és una seqüència finita dels símbols $\bot$, $\to$, $\Box$, (,), p, q, r,... on p, q, r,... és la notació que farem servir per a les lletres proposicionals. Per referir-nos a enunciats modals escriurem A, B,... Definim els enunciats modals de manera inductiva de la següent forma:*

1) *$\bot$ és un enunciat modal.*

2) *Tota lletra proposicional és un enunciat modal.*

3) *Si A i B són enunciats modals, aleshores $(A \to B)$ també ho és.*

4) *Si A és un enunciat modal, aleshores $\Box A$ també ho és.*

Definició 2.1.2. *Definim un* ***subenunciat*** *de A també de manera inductiva:*

1) *A és un subenunciat de A.*

2) *Si $B \to C$ és un subenunciat de A, aleshores B i C també ho són.*

3) *Si $\Box B$ és un subenunciat de A , aleshores B també ho és.*

A partir dels cinc primers símbols que hem fet servir en la definició d'enunciat modal podem definir la resta de connectives lògiques usuals de la lògica modal de la següent manera:

1) $\neg$p es defineix com (p $\to \bot$).

2) p $\wedge$ q es defineix com $\neg$(p $\to \neg$q), és a dir, ((p $\to$ (q $\to \bot$)) $\to \bot$).

3) p $\vee$ q es defineix com ($\neg$p $\to$ q), és a dir, ((p $\to \bot$) $\to$ q).

4) p $\leftrightarrow$ q es defineix com (p $\to$ q) $\wedge$ (q $\to$ p), és a dir, (((p$\to$q) $\to$ ((q$\to$p) $\to \bot$)) $\to \bot$).

5) $\top$ es defineix com $\bot \to \bot$.

6) $\Diamond$p es defineix com $\neg\Box\neg$p, és a dir, $\Box$(p $\to \bot$) $\to \bot$.
on p i q són lletres proposicionals.

A partir d'ara parlarem i tractarem amb **sistemes de lógica proposicional modal**, els quals els podem definir com un conjunt d'enunciats, que anomenarem **axiomes del sistema**, juntament amb un conjunt de relacions en aquest conjunt d'enunciats, que anomenarem **regles d'inferència** del sistema.

Definim doncs alguns conceptes sobre els sistemes de lògica proposicional modal, sobre els seus axiomes i sobre les seves regles d'inferència.

Definició 2.1.3. *Definim una* ***prova*** *en un sistema com una seqüència finita d'enunciats, cadascun dels quals és o bé un axioma del sistema o deduïble a partir d'enunciats anteriors de la seqüència per alguna de les regles d'inferència del sistema.*

Definició 2.1.4. *Una prova A, B,..., Z és una* ***prova de Z****, i anomenem a un enunciat* ***teorema de****, o* ***demostrable en****, un sistema si hi ha alguna prova d'aquell enunciat en el sistema. Escriurem L$\vdash$A per dir que l'enunciat A és un teorema del sistema L.*

Definició 2.1.5. *Diem que un conjunt d'enunciats és* ***tancat sota una regla d'inferència*** *si conté tots els enunciats deduïbles per la regla d'inferència del conjunt.*

Definició 2.1.6. *Siguin F i A enunciats i p una lletra proposicional. Definim la* ***instància de substitució*** *de F, $F_p(A)$, com el resultat de substituir A per p en F, que podem definir de manera inductiva de la següent manera:*

1) *Si F = p, aleshores $F_p(A)$ és A.*

2) *Si F és una lletra proposicional q diferent a p, aleshores $F_p(A)$ és q.*

3) *Si* $F = \bot$*, aleshores* $F_p(A)$ *és* $\bot$*.*

4) $(F \to G)_p(A) = (F_p(A) \to G_p(A))$

5) $\Box F_p(A) = \Box F_p(A)$

Definició 2.1.7. *Sigui* $p_1, ..., p_n$ *una llista de lletres proposicionals diferents dos a dos i* $F, A_1, ..., A_n$ *una llista d'enunciats modals. Definim la* ***substitució simultània*** $F_{p_1,...,p_n}(A_1, ..., A_n)$ *anàlogament:*

1) *Si* $F = p_i$ *,* $(1 \leq i \leq n)$*, aleshores* $F_{p_1,...,p_n}(A_1, ..., A_n)$ *és* A_i*.*

2) *Si F és una lletra proposicional q que no pertany a* $p_1, ..., p_n$*, aleshores* $F_{p_1,...,p_n}(A_1, ..., A_n)$ *és q.*

3) *Els altres casos són iguals que en la definició anterior.*

Definició 2.1.8. *Definim un* ***axioma de distribució*** *com un enunciat de la forma*

$\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$

per alguns enunciats A i B.

Finalment, definim les tres regles d'inferència que utilitzarem el llarg d'aquest treball per als sistemes de lògica proposicional que farem servir:

Definició 2.1.9. ***1)*** *El* ***modus ponens*** *ès la relació que conté les triples* $<(A \to B)$*, A, B>, és a dir que, en un sistema que tingui aquesta regla d'inferència, si els dos primers elements són vertaders podem deduir-ne que el tercer també ho és.*

2) *La* ***necessitat*** *és la relació que conté els parells* $<A, \Box A>$*, és a dir que, en un sistema que tingui aquesta regla d'inferència, si un enunciat és vertader aleshores al aplicar-li l'operador* $\Box$ *segueix sent vertader.*

3) *La* ***substitució*** *és la relació que conté els parells* $<F, F_p(A)>$*, és a dir que, en un sistema que tingui aquesta regla d'inferència, si un enunciat és vertader aleshores les seves instàncies de substitució també ho són.*

A continuació passem a definir alguns dels sistemes de lògica proposicional modal més comuns, entre ells el que ens ocupa en aquest treball, GL.

Definició 2.1.10. *Diem que un sistema és* ***normal*** *si el conjunt dels seus teoremes conté totes les tautologies i tots els axiomes de distribució i si és tancat sota modus ponens, necessitat i substitució.*

Els següents set sistemes de lògica proposicional modal que definirem a continuació són tots normals. En cada sistema, totes les tautologies i axiomes de distribució són axiomes i les seves regles d'inferència són modus ponens i necessitat.

- El **sistema K**[1] no té més axiomes que els esmentats.

- Els altres axiomes del **sistema K4** són els enunciats de la forma $\Box A \to \Box\Box A$
- Els altres axiomes del **sistema T** són els enunciats de la forma $\Box A \to A$
- Els altres axiomes del **sistema S4** són els enunciats de la forma $\Box A \to A$ i $\Box A \to \Box\Box A$
- Els altres axiomes del **sistema B** són els enunciats de la forma $\Box A \to A$ i $A \to \Box\Diamond A$
- Els altres axiomes del **sistema S5** són els enunciats de la forma $\Box A \to A$ i $\Diamond A \to \Box\Diamond A$
- Els altres axiomes del **sistema GL** són els enunciats de la forma $\Box(\Box A \to A) \to \Box A$

A continuació mostrarem alguns resultats generals per a tots el sistemes modals i alguns més específics en el cas de GL.

En aquesta secció del capítol suposem que L és un sistema de lògica proposicional modal normal. Als següents vuit resultats els anomenarem **normalitat**.

Teorema 2.1.11. *Suposem que $L \vdash A \to B$. Aleshores $L \vdash \Box A \to \Box B$.*

Demostració 2.1.11. Aplicant necessitat a la nostra hipòtesi tenim
$L \vdash \Box(A \to B)$, per ser axioma de distribució
$L \vdash \Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$, i per modus ponens
$L \vdash \Box A \to \Box B$ □

Teorema 2.1.12. *Suposem que $L \vdash A \leftrightarrow B$. Aleshores $L \vdash \Box A \leftrightarrow \Box B$.*

Demostració 2.1.12. Si suposem que $L \vdash A \leftrightarrow B$ aleshores tenim $L \vdash A \to B$ i $L \vdash B \to A$, pel teorema 2.1.11 sabem doncs que $L \vdash \Box A \to \Box B$ i $L \vdash \Box B \to \Box A$, i en conclusió hem obtingut $L \vdash \Box A \leftrightarrow \Box B$ □

1 -El sistema K es va anomenar així per Saul Kripke, un important lògic estatunidenc que va aportar a la teoria de la lògica modal, entre d'altres coses, el sistema semàntic anomenat models de Kripke que veurem més endavant en aquest treball.

Teorema 2.1.13. *L* $\vdash \Box(A \wedge B) \leftrightarrow (\Box A \wedge \Box B)$

Demostració 2.1.13. Sabem que L $\vdash (A \wedge B) \to A$ i L $\vdash (A \wedge B) \to B$, per tant pel teorema 2.1.11
L $\vdash \Box(A \wedge B) \to \Box A$, i
L $\vdash \Box(A \wedge B) \to \Box B$, per tant
L $\vdash \Box(A \wedge B) \to (\Box A \wedge \Box B)$
També sabem que L $\vdash A \to (B \to (A \wedge B))$, per tant pel teorema 2.1.11 també
L $\vdash \Box A \to \Box(B \to (A \wedge B))$, i per ser un axioma de distribució
L $\vdash \Box(B \to (A \wedge B)) \to (\Box B \to \Box(A \wedge B))$, és a dir
L $\vdash \Box A \to (\Box B \to \Box(A \wedge B))$, o el que és el mateix
L $\vdash (\Box A \wedge \Box B) \to \Box(A \wedge B)$ □

Teorema 2.1.14. *L* $\vdash \Box(A_1 \wedge ... \wedge A_n) \leftrightarrow (\Box A_1 \wedge ... \wedge \Box A_n)$

Demostració 2.1.14. Ho provem fent inducció sobre n.
Si n = 0, la conjunció buida s'identifica amb $\perp$ i clarament L $\vdash \Box\perp$.
Si n = 1 el teorema és trivial i el teorema 2.1.13 és el cas n = 2.
Si n > 2 i suposem cert per n-1 aleshores
L $\vdash \Box(A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n) \leftrightarrow \Box(A_1 \wedge (A_2 \wedge ... \wedge A_n))$, pel teorema 2.1.13
L $\vdash \Box(A_1 \wedge (A_2 \wedge ... \wedge A_n)) \leftrightarrow \Box A_1 \wedge \Box(A_2 \wedge ... \wedge A_n)$, i per hipòtesi d'inducció
L $\vdash \Box A_1 \wedge \Box(A_2 \wedge ... \wedge A_n) \leftrightarrow (\Box A_1 \wedge \Box A_2 \wedge ... \wedge \Box A_n)$ □

Teorema 2.1.15. *Suposem que* $L \vdash A_1 \wedge ... \wedge A_n \to B$. *Aleshores* $L \vdash \Box A_1 \wedge ... \wedge \Box A_n \to \Box B$.

Demostració 2.1.15. Si suposem
L $\vdash (A_1 \wedge ... \wedge A_n) \to B$, pel teorema 2.1.11
L $\vdash \Box(A_1 \wedge ... \wedge A_n) \to \Box B$, i pel teorema 2.1.14 obtenim que
L $\vdash (\Box A_1 \wedge ... \wedge \Box A_n) \to \Box B$ □

Teorema 2.1.16. *Suposem que* $L \vdash A \to B$. *Aleshores* $L \vdash \Diamond A \to \Diamond B$.

Demostració 2.1.16. Si suposem que L $\vdash A \to B$, aleshores pel contrarrecíproc
L $\vdash \neg B \to \neg A$, pel teorema 2.1.11
L $\vdash \Box\neg B \to \Box\neg A$, i pel contrarrecíproc altra vegada
L $\vdash \neg\Box\neg A \to \neg\Box\neg B$, és a dir
L $\vdash \Diamond A \to \Diamond B$ □

Teorema 2.1.17. *Suposem que* $L \vdash A \leftrightarrow B$. *Aleshores* $L \vdash \Diamond A \leftrightarrow \Diamond B$.

Demostració 2.1.17. Si suposem que L $\vdash A \leftrightarrow B$ aleshores tenim L $\vdash A \to B$ i L $\vdash B \to A$, pel teorema 2.1.16 sabem doncs que L $\vdash \Diamond A \to \Diamond B$ i L $\vdash \Diamond B \to \Diamond A$, i en conclusió hem obtingut L $\vdash \Diamond A \leftrightarrow \Diamond B$ □

Teorema 2.1.18. *L* $\vdash \Diamond A \wedge \Box B \to \Diamond(A \wedge B)$

Demostració 2.1.18. Per la definició de $\Diamond$ és suficient veure que L $\vdash \Box\neg(A \wedge B) \wedge \Box B \to \Box\neg A$. Però això és senzill de veure ja que L $\vdash \Box\neg(A \wedge B) \to \Box(B \to \neg A)$ □

Definició 2.1.19. *Per a qualsevol enunciat modal A, definim $\boxdot\boldsymbol{A}$ com l'enunciat $(\Box A \wedge A)$.*

Teorema 2.1.20. *GL* $\vdash \Box A \to \Box\Box A$

Demostració 2.1.20. Per lògica proposicional podem obtenir
GL $\vdash A \to ((\Box\Box A \wedge \Box A) \to (\Box A \wedge A))$, pel tercer teorema de normalitat
GL $\vdash A \to (\Box(\Box A \wedge A) \to (\Box A \wedge A))$, pel primer teorema de normalitat
GL $\vdash \Box A \to \Box(\Box(\Box A \wedge A) \to (\Box A \wedge A))$.
Per l'axioma propi de GL sabem que
GL $\vdash \Box(\Box \boxdot A \to \boxdot A) \to \Box \boxdot A$, és a dir
GL $\vdash \Box(\Box(\Box A \wedge A) \to (\Box A \wedge A)) \to \Box(\Box A \wedge A)$, per tant hem obtingut que
GL $\vdash \Box A \to \Box(\Box A \wedge A)$.
Per altra banda, pel tercer teorema de normalitat altra vegada
GL $\vdash \Box(\Box A \wedge A) \to \Box\Box A \wedge \Box A$, en particular
GL $\vdash \Box(\Box A \wedge A) \to \Box\Box A$, i, per tant, finalment hem obtingut
GL $\vdash \Box A \to \Box\Box A$. □

Teorema 2.1.21. *GL* $\vdash \Box\bot \leftrightarrow \Box\Diamond p$

Demostració 2.1.21. GL $\vdash \bot \to \Diamond p$, per normalitat
GL $\vdash \Box\bot \to \Box\Diamond p$.
Per l'altra direcció,
GL $\vdash \Diamond p \to \Diamond\top$, i per definició de $\Diamond$
GL $\vdash \Diamond\top \to (\Box\bot \to \bot)$, per tant
GL $\vdash \Diamond p \to (\Box\bot \to \bot)$, per normalitat
GL $\vdash \Box\Diamond p \to \Box(\Box\bot \to \bot)$.
Com que
GL $\vdash \Box(\Box\bot \to \bot) \to \Box\bot$, tenim doncs
GL $\vdash \Box\Diamond p \to \Box\bot$. □

Teorema 2.1.22. ***a)*** *GL* $\vdash \Box(p \leftrightarrow \neg\Box p) \leftrightarrow \Box(p \leftrightarrow \neg\Box\bot)$

b) *GL* $\vdash \Box(p \leftrightarrow \Box) \leftrightarrow \Box p \to \top)$

c) *GL* $\vdash \Box(p \leftrightarrow \Box\neg p) \leftrightarrow \Box(p \leftrightarrow \Box\bot)$

d) *GL* $\vdash \Box(p \leftrightarrow \neg\Box\neg p) \leftrightarrow \Box(p \leftrightarrow \bot)$

Demostració 2.1.22. a) Per lògica proposicional tenim
GL $\vdash \Box(p \leftrightarrow \neg\Box p) \to \Box(p \to \neg\Box p)$, per la regla d'inferència de necessitat
GL $\vdash \Box(p \to \neg\Box p) \to \Box\Box(p \to \neg\Box p)$, per tant obtenim
GL $\vdash \Box(p \leftrightarrow \neg\Box p) \to \Box\Box(p \to \neg\Box p)$, i per normalitat

GL $\vdash \Box(p \leftrightarrow \neg\Box p) \rightarrow \Box(\Box p \rightarrow \Box\neg\Box p)$.
Pel teorema 2.1.20, tenim
GL $\vdash \Box p \rightarrow \Box\Box p$, per definició de $\bot$ tenim
GL $\vdash \Box\Box p \wedge \Box\neg\Box p \rightarrow \Box\bot$, ja que $\Box$p i $\neg\Box$p són l'un la negació de l'altre i per tant impliquen $\bot$, després per normalitat només hem afegit $\Box$ al davant.
Per tant, obtenim
GL $\vdash \Box(p \leftrightarrow \neg\Box p) \rightarrow \Box(\Box p \rightarrow \Box\bot)$, i com que clarament $\bot \rightarrow \Box p$, tenim
GL $\vdash \Box(p \leftrightarrow \neg\Box p) \rightarrow \Box(\Box p \leftrightarrow \Box\bot)$, per tant
GL $\vdash \Box(p \leftrightarrow \neg\Box p) \rightarrow \Box(\neg\Box p \leftrightarrow \neg\Box\bot)$, i com que
GL $\vdash \Box(p \leftrightarrow \neg\Box p) \wedge \Box(\neg\Box p \leftrightarrow \neg\Box\bot) \rightarrow \Box(p \leftrightarrow \neg\Box\bot)$, obtenim doncs
GL $\vdash \Box(p \leftrightarrow \neg\Box p) \rightarrow \Box(p \leftrightarrow \neg\Box\bot)$.
Per demostrar l'altra direcció, pel teorema 2.1.21 tenim
*GL $\vdash \Box(p \leftrightarrow \neg\Box\bot) \rightarrow \Box\Box(p \leftrightarrow \neg\Box p)$, per normalitat
GL $\vdash \Box(p \leftrightarrow \neg\Box\bot) \rightarrow \Box(\Box p \leftrightarrow \Box\neg\Box p)$.
Tornant a aplicar el teorema 2.1.21 prenent $\neg$p com a p tenim
GL $\vdash \Box\neg\Box p \leftrightarrow \Box\bot$, per tant tenim
GL $\vdash \Box(p \leftrightarrow \neg\Box\bot) \rightarrow \Box(\Box p \leftrightarrow \Box\bot)$, i llavors
GL $\vdash \Box(p \leftrightarrow \neg\Box\bot) \rightarrow \Box(\neg\Box\bot \leftrightarrow \neg\Box p)$, i com que
GL $\vdash \Box(p \leftrightarrow \neg\Box\bot) \wedge \Box(\neg\Box\bot \leftrightarrow \neg\Box p) \rightarrow \Box(p \leftrightarrow \neg\Box p)$, obtenim doncs
GL $\vdash \Box(p \leftrightarrow \neg\Box\bot) \rightarrow \Box(p \leftrightarrow \neg\Box p)$, demostrant així **a)**.

b) Com que a GL $\vdash \top \leftrightarrow \Box\top$,
GL $\vdash \Box(p \leftrightarrow \Box p) \rightarrow \Box(\Box p \rightarrow p)$, per l'axioma propi de GL
GL $\vdash \Box(\Box p \rightarrow p) \rightarrow \Box p$, per tant
GL $\vdash \Box(p \leftrightarrow \Box p) \rightarrow \Box p$ i trivialment
GL $\vdash \Box p \rightarrow \Box(p \leftrightarrow \top)$, per tant
GL $\vdash \Box(p \leftrightarrow \Box p) \rightarrow \Box(p \leftrightarrow \top)$.
Per l'altra direcció tenim clarament
GL $\vdash \Box(p \leftrightarrow \top) \rightarrow \Box p$.
Pel teorema 2.1.18,
GL $\vdash \Box p \rightarrow \Box\Box p$, per tant
GL $\vdash \Box(p \leftrightarrow \top) \rightarrow (\Box p \wedge \Box\Box p)$, per normalitat
GL $\vdash (\Box p \wedge \Box\Box p) \rightarrow \Box(p \wedge \Box p)$, i ademés
GL $\vdash \Box(p \wedge \Box p) \rightarrow \Box(p \leftrightarrow \Box p)$, per tant obtenim
GL $\vdash \Box(p \leftrightarrow \top) \rightarrow \Box(p \leftrightarrow \Box p)$, demostrant així **b)**.

c) Si substituim $\neg$p per p en a) obtenim
GL $\vdash \Box(\neg p \leftrightarrow \neg\Box\neg p) \leftrightarrow \Box(\neg p \leftrightarrow \neg\Box\bot)$, i simplificant negacions obtenim
GL $\vdash \Box(p \leftrightarrow \Box\neg p) \leftrightarrow \Box(p \leftrightarrow \Box\bot)$, demostrant així **c)**.

d) Substituint $\neg$p per p en b) obtenim
GL $\vdash \Box(\neg p \leftrightarrow \Box\neg p) \leftrightarrow \Box(\neg p \leftrightarrow \top)$, i movent negacions tenim
GL $\vdash \Box(p \leftrightarrow \neg\Box\neg p) \leftrightarrow \Box(p \leftrightarrow \bot)$, demostrant així **d)**. $\Box$

2.2 Aritmètica de Peano

L'objectiu d'aquesta secció del capítol és, primerament definir i estudiar l'Aritmètica de Peano (PA) i els seus conceptes bàsics que, juntament amb el sistema de lògica modal proposicional GL que hem estudiat en l'anterior secció del capítol, són els dos pilars del teorema de Solovay. Després parlarem de l'operador Bew(x) de PA, el definirem i en demostrarem vàries propietats que farem servir més endavant.

Definició 2.2.1. *L'**Aritmètica de Peano** (o simplement **PA**) és una aritmètica clàssica de primer ordre amb inducció. Donarem una caracterització parcial de PA, ja que no especificarem els axiomes lògics del sistema. Denotem com $v_0, v_1, ...$ una seqüència infinita i numerable de **variables** diferents de PA. Seguidament denotem els quatre símbols lògics de PA: $\bot$, el símbol condicional $\rightarrow$, el quantificador universal $\forall$ i el signe d'identitat $=$. Finalment denotem els quatre restants símbols no lògics de PA: el **zero**, el **successor**, l'**addició** i el **producte**, simbolitzats per 0, S, + i $\times$, respectivament. Si F és una expressió, denotarem com $\ulcorner F \urcorner$ el **numeral** pel **nombre de Gödel** de F, el qual definirem més endavant. Escrivim $PA \vdash F$ per indicar que F és un teorema de PA. Les regles d'inferència de PA són modus ponens la generalització universal, per la qual donada com a premisa que P(c) és vertader per tots els elements c del domini podem afirmar que $\forall x P(x)$ és vertader.*

Definim doncs els elements bàsics de l'Aritmètica de Peano.

Definició 2.2.2.

- *Per a qualssevol objectes a i b definim un objecte <a, b> que anomenem **parell ordenat** de a i b. La propietat principal que segueixen tots els parells ordenats és que si <a, b> = <c, d> aleshores a = c i b = d.*
- *Definim la **tripla ordenada** <a, b, c> de a, b i c com el parell ordenat <a, <b, c>>. Anàlogament a la propietat dels parells ordenats, si <a, b, c> = <d, e, f>, aleshores a = d, b = e i c = f.*

Definició 2.2.3. *Definim una **seqüència finita** com un objecte s amb una longitud k (on k és un nombre natural) i, per a cada $i < k$, un objecte s_i que és el seu valor en i. Si s és una seqüència finita de longitud k, aleshores s_0 és el seu primer element, s_{k-1} és l'últim i s_i és un element anterior a s_j si $i < j$. La llei de les seqüències finites és: dues seqüències finites són idèntiques si tenen la mateixa longitud k i els mateixos valors per a tot $i < k$. Escrivim $[s_0, ..., s_{k-1}]$ per una seqüència finita s de longitud k els valors de la qual pels $i < k$ són s_i. Normalment no escriurem els símbols [].*

A continuació donarem dues definicions de *terme* de PA. La primera de manera inductiva i la segona d'una manera més explícita a partir de la definició que acabem de donar de seqüència finita.

Definició 2.2.4. *Definim un **terme** de PA de la següent manera:*

1) *Tota variable és un terme.*

2) *El 0 és un terme.*

3) *Si t és un terme aleshores St també ho és.*

4) *Si t i t' són termes, aleshores (t + t') i (t × t') també ho són.*

on les expresions es defineixen com St = <S, t>, (t + t') = <+, t, t'> i (t × t') = <×, t, t'>.

Definició 2.2.5. *Un objecte t és un* ***terme*** *de PA si i només si existeix una seqüència finita tal que el seu últim valor és t i cada valor de la qual és 0, una variable, el parell ordenat de s i un valor anterior de la seqüència, la tripla ordenada de + i dos elements anteriors de la seqüència o la tripla ordenada de × i dos elements anteriors de la seqüència.*

Definició 2.2.6. *Direm que F és una* ***fórmula atòmica*** *si F és el símbol ⊥ o si per alguns termes t i t', F és t = t'.*

Notació 1. *Escriurem (F → G) en comptes de <→, F, G> i ∀vF en comptes de <∀, v, F>.*

Definició 2.2.7. *Direm que un objecte F és una* ***fórmula*** *de PA si i només si existeix una seqüència finita tal que el seu últim valor és F i cada valor de la qual és una fórmula atòmica, la tripla ordenada de → i dos valors anteriors de la seqüència o la tripla ordenada de ∀, una variable i un valor anterior de la seqüència.*

Definició 2.2.8. *Siguin F i G fórmules de PA i v una variable,*

- *Diem que G és* ***conseqüència per modus ponens*** *de (F → G) i F.*
- *Diem que ∀vF és* ***conseqüència per generalització*** *de F.*

Els axiomes de PA són els seus axiomes lògics, els axiomes recursius pel successor, l'addició i el producte i els axiomes inductius. Donarem la definició dels dos últims grups d'axiomes.

Definició 2.2.9. *Els axiomes no lògics de PA són els* ***axiomes recursius*** *pel successor, l'addició i el producte, ela quals són les següents sis fórmules:*

1) $0 \neq Sx$

2) $Sx = Sy \rightarrow x = y$

3) $x + 0 = x$

4) $x + Sy = S(x + y)$

5) $x \times 0 = 0$

6) $x \times Sy = (x \times y) + x$

i els ***axiomes inductius****, els quals són les fórmules de PA de la següent forma:*

$(\forall x\ (\ x = 0 \to F) \wedge \forall y\ [\forall x\ (x = y \to F) \to \forall x\ (x = Sy \to F)]) \to F$

on F és qualsevol fórmula, x és qualsevol variable i y és qualsevol variable que no pertanyi a F i diferent de x.

Seguidament definirem els elements lògics de PA.

Definició 2.2.10. *Una* ***prova*** *en PA d'una fórmula F és una seqüència finita de fórmules, els valors de les quals són o bé un axioma de PA o una conseqüència per modus ponens o una generalització d'anteriors fórmules de la seqüència i l'últim valor de la qual és F. La fórmula F és* ***demostrable en*** *o* ***teorema de*** *PA si existeix alguna demostració de F en PA.*

Definició 2.2.11.

- *Diem que un terme és* ***tancat*** *si no conté cap variable.*
- *Una variable v és* ***lliure*** *en una fórmula F si existeix una seeüència finita $h_0, ..., h_n$ tal que h_0 és una fórmula atòmica t = t' i v apareix en t o t', h_n és F i per a tot $i < n$, o bé per alguna fórmula F' $h_{i+1} = (h_i \to F') \vee (F' \to h_i)$, o per alguna variable u diferent de v $h_{i+1} = \forall u h_i$.*
- *Diem que una fórmula és un* ***predicat****, o* ***tancada****, si no conté cap variable lliure.*

Definició 2.2.12. *Anomenem a un predicat de PA* ***vertader*** *si és cert quan les seves variables varien sobre els nombres naturals i 0, S, +, ×, denoten el zero i les funcions de successor, addició i producte.*

Definició 2.2.13. *Cada terme tancat t* ***denota*** *un únic nombre natural: el 0 denota el* $\mathsf{0}$*, i si t i t' denoten* i *i* $\mathsf{i'}$*, aleshores st, t + t' i t × t' denoten* $\mathsf{i + 1}$*,* $\mathsf{i + i'}$ *i* $\mathsf{i \times i'}$ *respectivament.*

Definició 2.2.14. *Definim el* ***numeral*** i *com el terme tancat resultat d'afegir i instàncies del signe successor S a 0 i escrivim* $\mathsf{i = S...i)...S0}$*.*

Definició 2.2.15. *Una fórmula F, juntament amb una seqüència $x_1, ..., x_n$ de variables diferents entre les quals són totes les variables lliures de F,* ***defineix la relació*** *n-ària sobre exactament els nombres $i_1, ..., i_n$ tals que $F_{x_1}(i_1)_{x_2}(i_2)...{}_{x_n}(i_n)$ és vertader, on $F_{x_i}(i_i)$ és el resultat de substituir en F la variable x_i pel terme i_i.*

Definició 2.2.16. *Definim* $\boldsymbol{x < y}$ *com la fórmula* $\exists z(x + Sz = y)$*.* $\boldsymbol{x > y}$ *és la fórmula* $y < x$*,* $\boldsymbol{x \leq y}$ *és la fórmula* $(x < y \vee x = y)$*, i* $\boldsymbol{x \geq y}$ *és la fórmula* $y \leq x$*.*

Passem a definir ara els conceptes de pterme, Σ fórmules, Δ fórmules i els nombres de Gödel, que ens permetran estudiar els propis objectes de PA que hem estat definint fins ara com a fórmules dins del llenguatge de la pròpia aritmètica.

Definició 2.2.17. *Anomenem a una fórmula F(x, y) del llenguatge de PA un* ***pterme*** *(respecte a la variable y) si la fórmula $\exists! y F(x, y)$, i.e, la fórmula*
$\exists y(F(x, y) \wedge \forall z(F(x, z) \rightarrow y = z))$
és demostrable en PA (la "p"de pterme és per "pseudo").

Notació 2.
- *Si F(x, y) és un pterme, normalment escrivim f(x) en comptes de F(x, y).*
- *Si A(y) és una fórmula de PA i F(x, y) un pterme, escriurem A(f(x)) per denotar en PA la fórmula $\exists y(F(x, y) \wedge A(y))$.*
- *Escrivim $\exists y < xF$ i $\forall y < xF$ per abreviar $\exists y(y < x \rightarrow F)$ i $\forall y(y < x \rightarrow F)$ respectivament.*

Definició 2.2.18.
- *Diem que una fórmula és una* **Σ *fórmula estricta*** *si és membre de la menor classe que conté totes les fórmules de la forma $u = v$, $0 = u$, $su = v$, $u + v = w$, i conté $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $\exists xF$ i $\forall x < yF$ quan conté F i G.*
- *Diem que una fórmula és una* **Σ *fórmula*** *si és equivalent, en el sentit de demostrabilitat en PA, a una Σ fórmula estricta.*
- *Un* **Σ *predicat*** *és simplement una Σ fórmula que és un predicat.*

Definició 2.2.19. *Diem que una fórmula A és una* **Δ *fórmula*** *si tant A com $\neg A$ són ambdues Σ fórmules.*

Notació 3. *Associem ara a cada símbol primitiu de PA un nombre natural que anomenarem* ***nombre de Gödel****, o codi. Als vuit símbols $\perp$, $\rightarrow$, $\forall$, $=$, 0, s, + i $\times$, els assginem els nombres 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 i 15 respectivament. A la variable v_i li assignem el nombre $2i + 17$. Sigui $\pi(i, j) = 2((i + j)(i + j) + i + 1)$. Si els objectes x i y tenen nombres de Gödel i i j respectivament, assignem al parell ordenat $<x, y>$ el nombre de Gödel $\pi(i, j)$. Escrirem $\ulcorner F \urcorner$ per denotar el nombre de Gödel de F.*

Com hem comentat abans passem ara a estudiar algunes de les definicions bàsiques de PA que hem estat donant com a fórmules en el propi llenguatge de l'aritmètica de Peano.

Definició 2.2.20.
- *Definim* ***Rm(x, d, r)*** *com la fórmula $((r < d \wedge \exists q(x = q \times d + r)) \vee (d = 0 \wedge r = x))$.*
  Intuïtivament, el resultat de Rm(x, d, r) és el residu de dividir un nombre x entre d. Si $d = 0$, denotem el residu com a x. Rm(x, d, r) és un Σ pterme.

- *Definim* ***Beta(a, b, i, r)*** *com la fórmula rm(a, 1 + (i + 1) × b) = r. Beta(a, b, i, r) és un Σ pterme.*

Definició 2.2.21.

- *Definim la fórmula* ***Parell(x, y, z)*** *com la fórmula*
  2((x + y)(x + y) + x + 1) = z.
  Parell(x, y, z) es un Σ pterme i escrivim (x, y) en comptes de parell(x, y).

- *Definim* ***Fst(z, w)*** *com la fórmula*
  (∃y < z (w, y) = z ∨ (¬∃x, y < z (x, y) = z ∧ w = 0))
  i definim ***Snd(z, w)*** *com la fórmula*
  (∃ x < z (x, w) = z ∨ (¬∃x, y < z (x, y) = z ∧ w = 0)).
  Fst(z, w) i Snd(z, w) són també Σ pterms.

- *Definim* ***(x, y, z)*** *com la fórmula (x, (y, z)).*

- *Definim* ***ft(w)*** *com la fórmula fst(w),* ***sd(w)*** *com la fórmula fst(snd(w)) i* ***td(w)*** *com la fórmula snd(snd(w)).*

  Intuïtivament, el resultat de Parell(x, y, z) és el parell (x, y), fst(z) i snd(z) són el primer i el segon element del parell z respectivament, i ft(w), sd(w) i td(w) són el primer, segon i tercer element de la tripla (x, y, z) respectivament

Definició 2.2.22.

- *Definim* ***FinSeq(s)*** *com la fórmula*
  ∃a < s ∃b < s ∃k < s (s = ((a, b), k) ∧ ∀c < s ∀d < s ((c, d) < (a, b) → ∃i < k beta(c, d, i) ≠ beta(a, b, k)))

- *Definim* ***lh(s)*** *com la fórmula snd(s).*

- *Definim* ***val(s, i)*** *com la fórmula beta(fst(fst(s)), snd(fst(s)), i).*

  Intuïtivament, FinSeq(s) representa una seqüència finita s representada com s = ((a, b), k), on a és el primer element de s, b n'és l'últim i k és la longitud de s, lh(s) representa aquesta longitud i val(s, i) representa el valor de l'ièssim valor de s.

Definició 2.2.23.

- *Sigui v una variable de PA, definim* ***Variable(v)*** *com la Δ fórmula ∃i < v (v = 2 × i + 17). La fórmula Variable(v) indica que v és una variable en el llenguatge de PA.*

- *Sigui t un terme de PA, definim* ***Terme(t)*** *com la fórmula*
  ∃s[FinSeq(s) ∧ lh(s) > 0 ∧ $s_{lh(s)-1}$ = t ∧ ∀i < lh(s) (s_i = ⌜0⌝ ∨ Variable(s_i) ∨ ∃j, k < i [s_i = (⌜s⌝, s_j) ∨ s_i = (⌜+⌝, s_j, s_k) ∨ s_i = (⌜×⌝, s_j, s_k)])]. La fórmula Terme(t) indica que t és un terme en el llenguatge de PA.

- *Sigui x una fórmula atòmica de PA, definim* ***AtFormula(x)*** *com la fórmula (∃t < x ∃t' < x [Term(t) ∧ Term(t') ∧ x = (⌜=⌝, t, t')] ∨ x = ⌜⊥⌝)*
  AtFormula(x) és una Δ fórmula ja que Term(x) és Δ. La fórmula AtFormula(x) indica que x és una fórmula atòmica en el llenguatge de PA.

- *Sigui x una fórmula de PA, definim* ***Formula(x)*** *com la fórmula*
  ∃s [FinSeq(s) ∧ lh(s) > 0 ∧ $s_{lh(s)-1}$ = x ∧ ∀i < lh(s)(AtFormula(s_i) ∨ ∃j, k < i (s_i = (⌜→⌝, s_j, s_k)) ∨ ∃j < i ∃v [Variable(v) ∧ s_i = (⌜∀⌝, v, s_j)])]
  La fórmula Formula(x) indica que x és una fórmula en el llenguatge de PA.

- *Definim* ***ConseqByModPon(x, y, z)*** *i* ***ConseqByGen(x, y)*** *com les* Δ *fórmules*
  (Formula(x) $\wedge$ *Formula(z)* $\wedge$ $y = (\ulcorner\rightarrow\urcorner, z, x)$*) i (*$\exists v < x$ *(Formula(y)* $\wedge$ *Variable(v)* $\wedge$ $x = (\ulcorner\forall\urcorner, v, y)))$*, respectivament.*
  La fórmula ConseqByModPon(x, y, z) indica que x i z són fórmules del llenguatge de PA i y = (z→x) i la fórmula ConseqByGen(x, y) indica que y és una fórmula en el llenguatge de PA i existeix una variable v tal que $x = \forall vy$*.*

- *L'última fórmula autorreferencial que definirem és* ***Pf(x, y)****, que és la fórmula*
  (FinSeq(y) $\wedge$ $y_{lh(y)-1} = x \wedge \forall i <$ *lh(y) - 1 [Ax(*y_i*)* $\vee$ $\exists j < i$ $\exists k < i$
  ConseqByModPon(y_i, y_j, y_k*)* $\vee$ $\exists j < i$ *ConseqByGen(*y_i, y_j*)])*
  on Ax(x) és la fórmula que afirma que "x és un axioma de PA". Intuïtivament, Pf(x, y) representa una seqüència finita y on l'últim element és x i tot element previ és o bé un axioma de PA o bé una conseqüència per modus ponens o generalització d'anteriors elements de la seqüència finita.

Com a última part de la secció definirem l'operador Bew(x), que expressa demostrabilitat en PA i serà una part fundamental de la demostració del Teorema de Completesa de Solovay, i demostrarem les seves cinc propietats.

Definició 2.2.24. *Definim doncs* ***Bew(x)*** *com la fórmula* $\exists y$ *Pf(y, x).*

Per a les properes proposicions suposarem que S i T són predicats del llenguatge de PA.

Proposició 2.2.25. *Si PA* $\vdash$ *S, aleshores PA* $\vdash$ *Bew(*$\ulcorner S\urcorner$*).*

Proposició 2.2.26. *PA* $\vdash$ *Bew(*$\ulcorner$ *(S* $\rightarrow$ *T)* $\urcorner$*)* $\rightarrow$ *(Bew(*$\ulcorner S\urcorner$*)* $\rightarrow$ *Bew(*$\ulcorner T\urcorner$*))*

Proposició 2.2.27. *PA* $\vdash$ *Bew(*$\ulcorner S\urcorner$*)* $\rightarrow$ *Bew(*$\ulcorner$ *Bew(*$\ulcorner S\urcorner$*)*$\urcorner$*)*

Proposició 2.2.28. *Bew(*$\ulcorner S\urcorner$*) és un* Σ *predicat.*

Proposició 2.2.29. *Si S és un* Σ *predicat, aleshores PA* $\vdash$ *S* $\rightarrow$ *Bew(*$\ulcorner S\urcorner$*).*

Demostració 2.2.28. Com que Bew(x) és una Σ fórmula, per a qualsevol predicat S de PA, Bew($\ulcorner S\urcorner$) és un Σ predicat. □

Demostració 2.2.25. Primerament veiem que si S és un Σ predicat vertader, aleshores PA $\vdash$ S.
Pel teorema de completesa de Gödel per a la lògica de primer ordre, PA $\vdash$ S si i només si tot model de PA és un model de S. Com que estem suposant que S és un Σ predicat vertader, aleshores S és vertader en el model estàndard $<\mathbb{N}$, S, $+$, $\times$, $0>$, i com que tot model de PA conté aquest, S és vertader també en tots aquests models.
Ara com que S és un predicat i PA $\vdash$ S, aleshores Bew($\ulcorner S\urcorner$) és un Σ predicat vertader i, pel que acabem de veure, PA $\vdash$ Bew($\ulcorner S\urcorner$). □

Demostració 2.2.26. Siguin S i T predicats de PA. Per veure que
PA $\vdash$ Bew($\ulcorner(S \to t)\urcorner$) $\to$ (Bew($\ulcorner S\urcorner$) $\to$ Bew($\ulcorner T\urcorner$))
és suficient veure que
PA $\vdash$ Pf(y, $\ulcorner(S \to T)\urcorner$) $\wedge$ Pf(y', $\ulcorner S\urcorner$) $\to$ Pf(y*y'*[$\ulcorner T\urcorner$], $\ulcorner T\urcorner$),
on a*b indica la concatenació de a i b.
Intuitivament, ja que modus ponens és una de les regles d'inferència de PA, la seqüència finita els valors de la qual són els d'una prova de S $\to$ T, seguits dels valors d'una prova de S, seguits del predicat T, és una prova de T. □

Per tal de demostrar les propietats 3) i 5) primerament donarem un resultat prèvi. Però donem abans quatre definicions necessàries per enunciar la proposició.

Definició 2.2.30.
- *Definim* ***Num(x, y)*** *com la fórmula* $\exists s$ *(FinSeq(s)* $\wedge$ *lh(s)* $= x + 1 \wedge s_0 = \ulcorner 0\urcorner \wedge \forall i < x\ s_{i+1} = (\ulcorner s\urcorner, s_i) \wedge s_x = y$
Clarament Num(x, y) és un Σ *pterme.*

- *Definim* ***var(x)*** $= 2 \times x + 17$.

- *Definim* ***su(x, y, z)*** *= sub(num(x), var(y), z), on sub(t, i, x) és la operació de substituir el terme que és el valor de t per totes les ocurrències lliures de la variable i-èssima en la fórmula que és el valor de x.*

Definició 2.2.31. *Suposem que F és una fórmula de PA que té exactament m variables lliures que són* $v_{k_1}, ..., v_{k_m}$ *amb* $k_1 < ... < k_m$. *Aleshores definim* ***Bew[F]*** *com la fórmula Bew(su*(v_{k_m}, k_m,...,su(v_{k_2}, k_2, su(v_{k_1}, k_1, $\ulcorner F\urcorner$))...)). *Si F no té variables lliures, és a dir si F és un predicat, aleshores Bew[F] = Bew(*$\ulcorner F\urcorner$*).*

Proposició 2.2.32. *Per a qualsevol* Σ *fórmula F de PA, PA* $\vdash F \to$ *Bew[F].*

Demostració 2.2.32. La idea d'aquesta demostració és veure primer que podem suposar que F és una Σ fórmula estricta i després veure cas per cas que PA $\vdash$ F $\to$ Bew[F] si F és una fórmula que prové per conjunció, disjunció, quantificació existencial o quantificació universal acotada de fórmules G tals que PA $\vdash$ G $\to$ Bew[G].
Per tal de veure la demostració completa es pot consultar el llibre *The Logic of Provability*, on es duu a terme de forma rigurosa i detallada. □

Demostració 2.2.29. Que per tot Σ predicat S es tingui que PA $\vdash$ S $\to$ Bew($\ulcorner S\urcorner$) és un cas particular de l'anterior proposició. □

Demostració 2.2.27. PA $\vdash$ Bew($\ulcorner S\urcorner$) $\to$ Bew($\ulcorner Bew(\ulcorner S\urcorner)\urcorner$) és també una conseqüència de l'anterior proposició. □

2.3 Operador Bew(x) i models de Kripke

Aquesta última secció del capítol la dedicarem l'estudi de la interpretació dels efectes d'asumir l'operador □ de la lògica modal com a l'asserció "és demostrable que...", enunciarem i demostrarem alguns resultats importants que farem servir en la demostració final i definirem la semàntica dels models de Kripke per tractar la lògica modal i algunes de les seves propietats principals.

Definició 2.3.1. *Definim una **realització** (o **interpretació**) com una funció que assigna a cada lletra proposicional un predicat del llenguatge de PA. Normalment farem servir els símbols "*"o "#"per a les interpretacions.*

Definició 2.3.2. *Definim inductivament la **traducció** A* d'un enunciat modal A sobre la realització * de la següent manera:*
1) $\bot = \bot$.
2) $p^* = {}^*(p)$, *per a tota lletra proposicional p.*
3) $(A \to B)^* = (A^* \to B^*)$.
4) $\Box(A)^* = Bew[A^*]$ $(= Bew(\ulcorner A^* \urcorner)$ *si* A^* *és un predicat).*

Teorema 2.3.3 (**Lema diagonal generalitzat**). *Suposem que* $y_0, ..., y_n, z_1, ..., z_m$ *són variables diferents i que* $P_0(y_0, ..., y_n, z)$,...,$P_n(y_0, ..., y_n, z)$ *són fórmules del llenguatge de PA les variables lliures de les quals estan entre* $y_0, ..., y_n, z$ *(on z és una abreviació de* $z_1, ..., z_m$*). Aleshores existeixen fórmules* $S_0(z)$,...,$S_n(z)$ *del llenguatge de PA les variables lliures de les quals estan entre z, tals que*

- $PA \vdash S_0(z) \leftrightarrow P_0(\ulcorner S_0(z) \urcorner, ..., \ulcorner S_n(z) \urcorner, z)$,..., i
- $PA \vdash S_n(z) \leftrightarrow P_n(\ulcorner S_0(z) \urcorner, ..., \ulcorner S_n(z) \urcorner, z)$.

Demostració 2.3.3. Recordem que Su(w,x_0,...,x_n,y) és el Σ pterme per a la funció (n+2)-ària subst el valor de la qual en a,b_0,...,b_n és el nombre de Gödel del resultat de substituir els numerals b_0,...,b_n per les variables x_0,...,x_n en la fórmula de nombre de Gödel a.
Per a cada $i \leq n$, sigui k_i el nombre de Gödel de la fórmula
$P_i(su(x_0, x_0, ..., x_n), ..., su(x_n, x_0, ..., x_n, z)$
i sigui S_i(z) la fórmula
$P_i(su(\mathsf{k}_0, \mathsf{k}_0, ..., \mathsf{k}_n), ..., su(\mathsf{k}_n, \mathsf{k}_0, ..., \mathsf{k}_n), z)$
Només necessitem veure que PA $\vdash su(\mathsf{k}_i, \mathsf{k}_0, ..., \mathsf{k}_n) = \ulcorner S_i(z) \urcorner$.
No obstant, el resultat de substituir els numerals $\mathsf{k}_0, ..., \mathsf{k}_n$ per les variables $x_0, ..., x_n$ en la fórmula de nombre de Gödel k_i, és a dir, la fórmula
$P_i(su(x_0, x_0, ..., x_n), ..., su(x_n, x_0, ..., x_n, z)$
és clarament la fórmula S_i(z). Per tant, el Σ predicat
$su(\mathsf{k}_i, \mathsf{k}_0, ..., \mathsf{k}_n) = \ulcorner S_i(z) \urcorner$ és vertader, i per la demostrabilitat dels Σ predicats tenim que
PA $\vdash su(\mathsf{k}_i, \mathsf{k}_0, ..., \mathsf{k}_n) = \ulcorner S_i(z) \urcorner$. □

Corołari. *Suposem que* $P_0(y_0, ..., y_n), ..., P_n(y_0, ..., y_n)$ *són fórmules del llenguatge de PA les variables lliures de les quals estan entre* $y_1, ..., y_n$. *Aleshores existeixen predicats* $S_0, ..., Sn$ *del llenguatge de PA tals que*

$PA \vdash S_0 \leftrightarrow P_0(\ulcorner S_0 \urcorner, ..., \ulcorner S_n \urcorner)$,..., $PA \vdash S_n \leftrightarrow P_n(\ulcorner S_0 \urcorner, ..., \ulcorner S_n \urcorner)$.

Corołari (**Lema diagonal**). *Suposem que P(y) és una fórmula del llenguatge de PA tal que cap variable que no sigui y és lliure. Aleshores existeix un predicat S del llenguatge de PA tal que*

$PA \vdash S \leftrightarrow P(\ulcorner S \urcorner)$.

Teorema 2.3.4 (**Löb**). *Sigui S un predicat del llenguatge de PA, si* $PA \vdash Bew(\ulcorner S \urcorner) \rightarrow S$, *aleshores* $PA \vdash S$.

Demostració 2.3.4. Si anomenem Q(x) a (Bew(x) → S), pel lema diagonal sabem que existeix un predicat I tal que

PA $\vdash I \leftrightarrow Q(\ulcorner I \urcorner)$, és a dir

PA $\vdash I \leftrightarrow (Bew(\ulcorner I \urcorner) \rightarrow S)$.

Per tant tenim,

(1) PA $\vdash I \leftrightarrow (Bew(\ulcorner I \urcorner) \rightarrow S)$, en particular

(2) PA $\vdash I \rightarrow (Bew(\ulcorner I \urcorner) \rightarrow S)$, per la propietat 1) de la secció anterior

(3) PA $\vdash Bew(\ulcorner I \rightarrow (Bew(\ulcorner I \urcorner) \rightarrow S) \urcorner)$

Per la propietat 2) de la secció anterior

(4) PA $\vdash Bew(\ulcorner I \rightarrow (Bew(\ulcorner I \urcorner) \rightarrow S) \urcorner) \rightarrow (Bew(\ulcorner I \urcorner) \rightarrow Bew(\ulcorner (Bew(\ulcorner I \urcorner) \rightarrow S) \urcorner))$

Per modus ponens

(5) PA $\vdash Bew(\ulcorner I \urcorner) \rightarrow Bew(\ulcorner (Bew(\ulcorner I \urcorner) \rightarrow S) \urcorner)$

Altra vegada per la propietat 2)

(6) PA $\vdash Bew(\ulcorner (Bew(\ulcorner I \urcorner) \rightarrow S) \urcorner) \rightarrow (Bew(\ulcorner Bew(\ulcorner I \urcorner) \urcorner) \rightarrow Bew(\ulcorner S \urcorner))$

Per (5) i (6)

(7) PA $\vdash Bew(\ulcorner I \urcorner) \rightarrow (Bew(\ulcorner Bew(\ulcorner I \urcorner) \urcorner) \rightarrow Bew(\ulcorner S \urcorner))$

Per la propietat 3)

(8) PA $\vdash Bew(\ulcorner I \urcorner) \rightarrow Bew(\ulcorner Bew(\ulcorner I \urcorner) \urcorner)$

Per (7) i (8)

(9) PA $\vdash Bew(\ulcorner I \urcorner) \rightarrow Bew(\ulcorner S \urcorner)$

Ara prenem la hipòtesi del teorema de

(10) PA $\vdash Bew(\ulcorner S \urcorner) \rightarrow S$

Per (9) i (10)

(11) PA $\vdash Bew(\ulcorner I \urcorner) \rightarrow S$

Per (1) i (11)

(12) PA $\vdash I$, per la propietat 1)

(13) PA $\vdash Bew(\ulcorner I \urcorner)$

Finalment, per (11) i (13)

(14) PA $\vdash S$. □

Definició 2.3.5. *Anomenem a un enunciat modal A* ***sempre demostrable*** *si per a qualsevol realització *, PA* $\vdash A^*$.

El Teorema de Completesa de Solovay que demostrarem en el proper capítol diu que un enunciat modal A és teorema de GL si i només si per a qualsevol realització *, PA $\vdash A^*$, és a dir, si i només si A és sempre demostrable.

A continuació donem alguns exemples per entendre com l'estudi de GL ens pot donar informació sobre la demostrabilitat en PA, a través de l'aritmetització de certes afirmacions.

Suposem que S i S' són predicats en el llenguatge de PA, aleshores l'aritmetització de l'afirmació que diu que

- S és **demostrable** (en PA) és el predicat **Bew[S]**.
- S és **consistent** (amb PA) és el predicat $\neg$**Bew**[$\neg$**S**].
- S és **no demostrable** és el predicat $\neg$**Bew[S]**.
- S és **refutable** és el predicat **Bew**[$\neg$**S**].
- S és **decidible** és el predicat **Bew[S]** $\vee$ **Bew**[$\neg$**S**].
- S és **no decidible** és el predicat $\neg$**Bew[S]** $\vee$ $\neg$**Bew**[$\neg$**S**].
- S és **equivalent** a S' és el predicat **Bew**[**(S** $\leftrightarrow$ **S')**].
- S **implica** S' és el predicat **Bew**[**(S** $\rightarrow$ **S')**].
- PA és **consistent** és el predicat $\neg$**Bew**[$\bot$].
- PA és **inconsistent** és el predicat **Bew**[$\bot$].

Passem ara a definir i estudiar la semàntica que farem servir per GL.

Definició 2.3.6. *Diem que R és una* ***relació en un conjunt W*** *si per a qualssevol w, x, si wRx aleshores* $w, x \in W$.

a) *Diem que R és* ***reflexiva*** *en W si per a qualsevol w de W tenim wRw.*

b) *Diem que R és* ***irreflexiva*** *en W si no existeix cap w de W tal que wRw.*

c) *Diem que R és* ***antisimètrica*** *en W si per a qualssevol w, x de W, si wRx i xRw aleshores* $w = x$.

d) *Diem que R és* ***simètrica*** *en W si per a qualssevol w, x de W, si wRx aleshores xRw.*

e) *Diem que R és* ***transitiva*** *en W si per a qualssevol w, x, y de W, si wRx i xRy aleshores wRy.*

f) *Diem que R és* ***euclidiana*** *en W si per a qualssevol w, x, y de W, si wRx i wRy aleshores xRy.*

g) *Diem que R és una* ***relació d'equivalència*** *en W si R és reflexiva, simeètrica i transitiva en W.*

Definició 2.3.7. *Definim un* ***marc*** *com un parell ordenat <W, R> que consisteix en un conjunt W i una relació binària R en W. El marc <W, R> és finit si i només si W ho és. Anomenem a W com el* ***domini*** *de <W, R>, els elements de W s'anomemen* ***mons possibles*** *i anomenem a R com la* ***relació d'accessibilitat*** *entre aquests mons.*

Definició 2.3.8. *Definim una* ***valoració*** *V en un conjunt W com la relació entre els elements de W i les lletres proposicionals, és a dir, el conjunt de parells ordenats entre elements de W i lletres proposicionals.*

Definició 2.3.9. *Finalment, definim un* ***model*** *com una tripla <W, R, V> on <W, R> és un marc i V és una valoració en W. Diem que el model <W, R, V> està basat en el marc <W, R>.*

Definició 2.3.10. *Per a cada enunciat modal A, cada model M = <W, R, V> i cada món w de W, definim la relació d'equivalència*
M,w $\models$ ***A***
de la següent manera:

1) *Si A = p, aleshores M,w* $\models$ *A si i només si wVp.*

2) *Si A =* $\bot$*, aleshores M,w* $\not\models$ *A.*

3) *Si A = (B* $\rightarrow$ *C), aleshores M,w* $\models$ *A si M,w* $\not\models$ *B o bé si M,w* $\models$ *C.*

4) *Si A =* $\Box B$*, aleshores M,w* $\models$ *A si i només si per a tot x tal que wRx tenim M,w* $\models$ *B.*

Com a conseqüència d'aquests quatre tenim

5) *Si A =* $\neg B$*, aleshores M,w* $\models$ *A si i només si M,w* $\not\models$ *B.*

6) *Si A = (B*$\wedge$*C), aleshores M,w* $\models$ *A si i només si M,w* $\models$ *B i M,w* $\models$ *C.*

7) *Si A = (B*$\vee$*C), aleshores M,w* $\models$ *A si i només si M,w* $\models$ *B o M,w* $\models$ *C.*

8) *Si A =* $\Diamond B$*, aleshores M,w* $\models$ *A si i només si per algun x tal que wRx tenim que M,x* $\models$ *B.*

9) *Si $A = \boxdot B$, aleshores M,w $\models$ A si i només si per a tot x de W tal que o bé wRx o bé w = x tenim que M,x $\models$ B.*

Definició 2.3.11.
- *Diem que un enunciat A és* ***vertader*** *en un món w en un model M si i només si M,w $\models$ A.*
- *Diem que un enunciat A és* ***vàlid en un model*** *M = <W, R, V> si i només si per a tot w de W, A és vertader en w en M.*
- *Diem que un enunciat A és* ***vàlid en un marc*** *<W, R> si i només si A és vàlid en tots els models basats en <W, R>.*
- *Diem que un enunciat A és* ***satisfactible en un model*** *M = <W, R, V> si i només si per algun w de W, A és vertader en w en M.*
- *Diem que un enunciat A és* ***satisfactible en un marc*** *<W, R> si i només si A és satisfactible en algun model basat en <W, R>.*

Observació 2.3.12.
- Totes les tautologies i tots els axiomes de distribució són vertaders en tots els mons en tots els models i el conjunt d'enunciats vertaders en un món en un model és tancat sota el modus ponens.
- Totes les tautologies i tots els axiomes de distribució són vàlids en tots el models i el conjunt d'enunciats vàlids en un model és tancat sota el modus ponens i la necessitat.

Definició 2.3.13.
- *Diem que una relació R és* ***ben fonamentada*** *si per a tot conjunt no buit X existeix un element w de X tal que per a cap x de X tenim xRw.*
- *Diem que una relació és* ***ben fonamentada conversa*** *si per a tot conjunt no buit X existeix un element w de X tal que per a cap x de X tenim wRx.*

Teorema 2.3.14. *Si GL $\vdash$ A aleshores A és vàlid en tots els marcs transitius i ben fonamentats conversos, i A és també vàlid en tots els marcs finits transitius i irreflexius.*

Demostració 2.3.14. Ja hem vist que totes les tautologies i tots els axiomes de distribució són vàlids en tots els mons en tots els model, per tant, en particular ho són pels transitius i ben fonamentats conversos.
Per tant només falta demostrar-ho per l'axioma particular de GL.

Teorema 2.3.15. *$\Box(\Box p \to p) \to \Box p$ és vàlid en <W, R> si i només si R és transitiva i ben fonamentada conversa.*

Demostració 2.3.15. Comencem amb la implicació d'esquerra a dreta. Suposem que $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$ és vàlid en <W, R>. Tenim doncs que tots els axiomes, i per tant tots els teoremes, de GL són vàlids en aquest marc. Pel teorema 2.1.20 sabem que $\Box A \to \Box\Box A$ és teorema de GL, per tant en particular em vist que és

vàlid en <W, R>.

Veiem que això implica que <W, R> és transitiu. Siguin w,x,y ∈ W tals que wRx i xRy i prenem V com la valoració en W tal que, per a tot z ∈ W, zVp si i només si wRz, on p és una lletra proposicional. Com que per a tot z de W tal que wRz tenim zVp, i per tant z ⊨ p, aleshores tenim w ⊨ □p. Prenent ara la nostra hipòtesi sabem llavors que w ⊨ □□p, com que wRx tenim x ⊨ □p i com que xRy tenim y ⊨ p. Hem obtingut doncs que w ⊨ □p i y ⊨ p, per tant wRy i hem vist que R és transitiva.

Veiem ara que R és ben fonamentada conversa. Suposem que existeix un conjunt no buit X tal que per a tot w ∈ X existeix x ∈ X tal que wRx. Sigui w ∈ X i prenem la valoració V en W tal que per a tot m ∈ W i tota lletra proposicional p, tenim mVp si i només si m ∉ X. La idea és arribar a contradicció veient que w ⊨ □(□p → p) i w ⊭ □p, ja que estem suposant que □(□p → p) → □p és vàlid en <W, R> i, per tant, vertader en w.
Com que w ∈ X, per construcció del conjunt X, existeix x ∈ X tal que wRx, i com que x ∈ X tenim que no xVp, és a dir x ⊭ p. Per construcció del conjunt X sabem doncs que existex y ∈ X tal que xRy. Com que y ∈ X aleshores tenim que no yVp i per tant y ⊭ p. Com que xRy i y ⊭ p aleshores x ⊭ □p i per tant x ⊨ □p → p, i com que wRx aleshores w ⊨ □(□p → p).
A més a més ja hem vist que x ⊭ p, i com que wRx tenim doncs que w ⊭ □p.

Per a demostrar l'altra implicació suposem que el marc <W, R> és transitiu i ben fonamentat convers i que w ⊭ □p, només hem de veure que w ⊭ □(□p → p) i tindrem que □(□p → p) → □p és vertader en un món arbitrari w, i per tant vàlid en <W, R>. Sigui X = {x ∈ W: wRx ∧ x ⊭ p}. Com que w ⊭ □p aleshores existeix z tal que wRz i z ⊭ p, per tant z ∈ X i el conjunt X és no buit. Com que hem suposat que R és ben fonamentada conversa i X és un conjunt no buit, aleshores existeix x ∈ X tal que per a tot element y de X tenim no xRy. Com que x ∈ X, tenim wRx i x ⊭ p. Suposem xRy, aleshores y ∉ X, però com que wRy per transitivitat de R aleshores y ⊨ p, per tant x ⊨ □p. En conseqüència x ⊭ □p → p i per tant w ⊭ □(□p → p). □

Finalment, si tenim un marc F finit i transitiu, només ens queda demostrar l'equivalència entre que F sigui ben fonamentat convers i que F sigui irreflexiu.

Teorema 2.3.16. *Suposem que F = <W, R> és finit i transitiu. Aleshores F és irreflexiu si i només si F és ben fonamentat convers.*

Demostració 2.3.16. Clarament si F és ben fonamentat convers aleshores F és irreflexiu, ja que si existeix w ∈ W tal que wRw aleshores {w} és un conjunt no buit tal que no conté cap element que no es relacioni per R amb cap element del conjunt.
Veiem doncs l'altra implicació. Suposem que F és irreflexiu. Si $x_1, ..., x_n$ és una seqüència d'elements de W tals que x_iRx_{i+1} per a tot i < n aleshores tots els

x_i són diferents, ja que en cas de tenir $x_i = x_j$ amb i < j (el cas contrari es anàleg) aleshores, per construcció de la seqüència i transitivitat, tindriem $x_i \mathrm{R} x_j$, que contradiu l'hipòtesi d'irreflexivitat de F. Suposem ara que F no és ben fonamentada conversa i sigui X un subconjunt no buit de W tal que per a tot w ∈ X existeix x ∈ X tal que wRx. Aleshores per inducció sobre n és fàcil veure que existeix una seqüència $x_1, ..., x_n$ d'elements de X diferents tals que $x_i \mathrm{R} x_{i+1}$ per a tot i < n. Tenim doncs que per a cada n hi ha al menys n elements de X, i per tant de W. En conseqüència W és infinit, el que contradiu l'hipòtesi del teorema. □

□

Per tal de demostrar la direcció contrària del teorema 2.3.14 cal fer una mica més de feina prèvia.

Definició 2.3.17. *Diem que un marc (o un model) és* ***apropiat*** *a GL si i només si és transitiu i ben fonamentat convers.*

El que volem provar és que un enunciat modal A és teorema de GL si A és vàlid en tots els marcs finits que són apropiats a GL.
Suposem doncs que D és un enunciat modal que no és un teorema de GL. Per al moment anomenarem a un enunciat **fórmula** si és o bé un subenunciat de D o la negació d'un.

Definició 2.3.18. *Diem que un conjunt de fórmules X és* ***GL-consistent****, o* ***consistent****, si* $GL \nvdash \neg \wedge X$*, on* $\wedge X$ *és la conjunció de tots els elements de X.*

Definició 2.3.19. *Diem que un conjunt de fórmules X és* ***(GL)-consistent maximal*** *si X és consistent i per a cada subenunciat A de D, o bé A o* $\neg A$ *és element de X.*

Teorema 2.3.20. *Si un enunciat modal A és vàlid en tots els marcs finits apropiats a GL, aleshores A és teorema de GL.*

Demostració 2.3.20.

Lema 2.3.21. *Si A és un subenunciat de D i X és un conjunt consistent maximal, aleshores* $A \in X$ *si i només si* $\neg A \notin x$*.*

Demostració 2.3.21. Ja que si no, en cas de que tant A com ¬A siguin elements de X, aleshores tindriem que
GL $\vdash (A \vee \neg A)$, és a dir
GL $\vdash \neg(A \wedge \neg A)$, i per tant
GL $\vdash \neg \wedge X$, que contradiu el fet que X sigui consistent.
□

Lema 2.3.22. *Veiem ara que si X és consistent aleshores X està inclòs en algun conjunt consistent maximal.*

Demostració 2.3.22. Per càlcul proposicional sabem que ∧X és equivalent a una disjunció $E_1 \vee ... \vee E_n$ i sabem que almenys un dels E_i ha de ser consistent, ja que en cas contrari tindriem

GL $\vdash (\neg E_1 \wedge ... \wedge \neg E_n)$, per tant

GL $\vdash \neg(E_1 \vee ... \vee E_n)$, és a dir

GL $\vdash \neg \wedge X$, que contradiu el fet que X sigui consistent.

El conjunt de les conjuncions dels E_i és un conjunt consistent maximal que inclou a X.

□

Com que estem suposant que GL $\nvdash$ D, aleshores {¬D} és consistent i per tant inclòs en algun conjunt consistent maximal que anomenarem Y.

Sigui ara W el conjunt dels conjunts consistents maximals. Sabem que Y ∈ W i per tant W no és buit.

Per a cada w de W i cada lletra proposicional p, sigui wVp si i només si p és una ocurrència de D i p ∈ w.

Definim també una relació d'accessibilitat R que compleixi les següents propietats:

(1) Per a tot subenunciat □B de D i cada w ∈ W, □ B ∈ w si i només si per a tot x tal que wRx, B ∈ x.

(2) <W, R> és apropiat a GL.

Definirem R al final de la demostració, de moment suposem R definida que compleix les dues condicions i completem la demostració. Sigui M = <W, R, V>.

Lema 2.3.23. *Per a cada subenunciat A de D i cada w ∈ W, A ∈ w si i només si M,w $\models$ A.*

Demostració 2.3.23. Demostrarem aquest lema mitjançant una inducció sobre la complexitat del subenunciat A.

Si A = ⊥, com que L $\vdash \neg\bot$ i w és consistent maximal per definició de W, aleshores A ∉ w i clarament sempre tenim w $\nvDash \bot$.

Si A = p és una lletra proposicional que apareix en D, aleshores per definició de V tenim que p ∈ w si i només si wVp, és a dir si i només si w $\models$ p.

Si A = (B→C) i suposem que el lema és cert per a B i C, com que per lògica proposicional tenim

GL $\vdash \neg A \rightarrow B$,

GL $\vdash \neg A \rightarrow \neg C$ i

GL $\vdash B \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg A)$

sabem que A ∉ w si i només si ¬A ∈ w, equivalentment si i només si B ∈ w i ¬C ∈ w, equivalentment per la consistència maximal de w si i només si B ∈ w i C ∉ w, equivalentment per la hipòtesi d'inducció si i només si w $\models$ B i w $\nvDash$ C, si i només

si w $\not\models$ A.

Finalment, si A = $\Box$B i suposem que el lema és cert per a B, per la propietat (1), A $\in$ w si i només si per a tot x tal que wRx tenim B $\in$ x, però per hipòtesi d'inducció sabem que B $\in$ x si i només si x $\models$ B. És a dir que A $\in$ w si i només si per a tot x tal que wRx tenim x $\models$ B si i només si w $\models$ A. $\Box$

Tenim que Y $\in$ W, Y és consistent maximal i $\neg$D $\in$ Y. Per tant D $\notin$ Y i, pel lema que acabem de demostrar, M,Y $\not\models$ D. Tenim doncs que D no és vàlid en el marc finit <W, R>, que per la condició (2) sabem que és apropiat a GL.
Només queda definir la relació R i veure que compleix les condicions (1) i (2).
Definim R de la següent manera: siguin w, x de W, wRx si i només si
a) Per a tot $\Box$B de w, $\Box$B i B són elements de x.
b) Per algun $\Box$C de x, $\neg\Box$C és element de w.

Demostració. Per veure que aquesta definició de R compleix la propietat (2) veurem que R és transitiva i irreflexiva i aleshores, pel teorema 2.3.16, R serà transitiva i ben fonamentada conversa, és a dir, <W, R> és apropiat.
Veiem primer que R és transitiva. Suposem que wRx i xRy. Tenim doncs que si $\Box$B $\in$ w aleshores $\Box$B $\in$ x i $\Box$B, B $\in$ y. A més a més tenim que, com que wRx, per algun $\Box$C, $\neg\Box$C $\in$ w i $\Box$C $\in$ x, i doncs com que xRy, $\Box$C $\in$ y. És a dir hem vist que wRy.
Veiem també que R és irreflexiva. Suposem que wRw, aleshores per algun $\Box$C tenim que $\Box$C $\in$ w i $\neg\Box$C $\in$ w, que és una contradicció perqué w és consistent maximal.

Només ens queda veure que R compleix la propietat (1). Clarament si $\Box$B $\in$ w i wRx aleshores B $\in$ x. Veiem doncs l'altra direcció de la doble implicació. Sigui X = {$\neg$B, $\Box$B} $\cup$ {C, $\Box$C: $\Box$C $\in$ w}, veiem primer que X és consistent. Suposem que no ho és, aleshores

GL $\vdash \neg(\neg B \wedge \Box B \wedge C_1 \wedge \Box C_1 \wedge ... \wedge C_n \wedge \Box C_n)$, és a dir

GL $\vdash \neg C_1 \vee \neg\Box C_1 \vee ... \vee \neg C_n \vee \neg\Box C_n \vee \neg\Box B \vee B$, per tant

GL $\vdash \neg(C_1 \wedge \Box C_1 \wedge ... \wedge C_n \wedge \Box C_n) \vee (\neg\Box B \vee B)$, i tenim doncs

GL $\vdash C_1 \wedge \Box C_1 \wedge ... \wedge C_n \wedge \Box C_n \rightarrow (\Box B \rightarrow B)$, per normalitat

GL $\vdash \Box C_1 \wedge \Box\Box C_1 \wedge ... \wedge \Box C_n \wedge \Box\Box C_n \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow B)$, però com que GL $\vdash \Box(\Box B \rightarrow B) \rightarrow \Box B$ i GL $\vdash \Box C \rightarrow \Box\Box C$ tenim que

GL $\vdash \Box C_1 \wedge ... \wedge \Box C_n \rightarrow \Box B$

Si suposem que $\Box$B $\notin$ w aleshores, com que $\Box C_1, ..., \Box C_n$ són tots elements de w, tindriem una contradicció. Per tant X és consistent i existeix doncs un conjunt consistent maximal Y tal que X $\subseteq$ Y. Com que $\neg$B $\in$ X aleshores $\neg$B $\in$ Y i per tant B $\notin$ Y. Només ens falta veure que wRY i ja haurem demostrat l'altra direcció de la propietat (1). Si $\Box$C $\in$ w aleshores, per construcció del conjunt X, $\Box$C i C pertànyen a X $\subseteq$ Y. A més a més, com que $\Box$B $\notin$ w, $\neg\Box$B $\in$ w i ja sabem que $\Box$B $\in$ X $\subseteq$ Y. És a dir wRY. $\Box$

$\Box$

Capítol 3

El Teorema de Completesa de Solovay

L'objectiu d'aquest capítol és demostrar el Teorema de Completesa de Solovay per a GL, el qual diu que un enunicat modal A és demostrable en GL si i només si, per a tota realització *, la seva traducció A* és demostrable en PA. Fins ara hem estudiat tant el sistema de lògica proposicional modal GL, com l'aritmètica de Peano (PA), com la relació entre els dos que ens proporciona la interpretació de l'operador de GL, $\Box$, com l'operador de PA, Bew(x), que implica demostrabilitat. Fins i tot en l'última secció de l'anterior capítol hem demostrat un resultat que compara els teoremes de GL amb la seva validesa en els marcs apropiats a GL.
No obstant, el Teorema de Completesa de Solovay ens proporciona un resultat molt més fort, demostrarem que els enunciats demostrables en GL són exactament aquells tals que la seva traducció per qualsevol interpretació és demostrable en PA.
A causa de que la demostració és força complexa la separarem en les dues direccions de les implicacions. Comencem doncs amb la més senzilla.

L'objectiu d'aquesta secció del capítol és demostrar que si un enunicat modal és teorema de GL aleshores la seva traducció per a qualsevol interpretació és teorema de PA.

Teorema 3.0.1. *Sigui A un enunciat modal, si GL* $\vdash A$*, aleshores per a qualsevol realització *,* $PA \vdash A^*$.

Comencem doncs demostrant el mateix resultat peró pel sistema de lògica model K4.
Recordem que K4 és un sistema de lògica proposicional modal normal tal que els seus axiomes són:

- Totes les tautologies.
- Tots els axiomes de distribució, és a dir els enunciats de la forma $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$.

- Els enunciats de la forma $\Box A \to \Box\Box A$.

i les seves regles d'inferència són el modus ponens i la necessitat.

Teorema 3.0.2. *Sigui A un enunciat modal, si K4 $\vdash$ A, aleshores per a qualsevol realització *, PA $\vdash$ A*.*

Demostració 3.0.2. Primerament demostrarem que aquesta propietat es compleix per a qualsevol axioma de K4 i que respecta les regles d'inferència. El que implica que, en conseqüència, es compleix per a qualsevol teorema de K4, ja que tot enunciat demostrable en K4 es pot obtenir a partir dels seus axiomes i d'enunciats demostrats prèviament mitjançant les seves regles d'inferència.

Si A és una combinació tautològica d'enunciats modals, aleshores A* és també una combinació tautològica de predicats en el llenguatge de PA i, per tant, PA $\vdash$ A*.

Per la proposició 2.2.25 sabem que per a qualsevol parell de predicats S i T del llenguatge de PA teniem

PA $\vdash Bew(\ulcorner(S \to T)\urcorner) \to (Bew(\ulcorner S\urcorner) \to Bew(\ulcorner T\urcorner))$.

Per tant, per a qualsevol interpretació * i per a qualsevol parell d'enunciats modals A i B (com que aleshores A* i B* són predicats en el llenguatge de PA) tenim que

PA $\vdash Bew(\ulcorner(A^* \to B^*)\urcorner) \to (Bew(\ulcorner A^*\urcorner) \to Bew(\ulcorner B^*\urcorner))$.

Com que $Bew(\ulcorner(A^* \to B^*)\urcorner) \to (Bew(\ulcorner A^*\urcorner) \to Bew(\ulcorner B^*\urcorner)) = (\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B))^*$, hem demostrat que per a tota interpretació * i per a tot parell d'enunciats modals A i B tenim

PA $\vdash (\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B))^*$.

Per la proposició 2.2.26 sabem que per a qualsevol predicat S en el llenguatge de PA tenim

PA $\vdash Bew(\ulcorner S\urcorner) \to Bew(\ulcorner Bew(\ulcorner S\urcorner)\urcorner)$.

Per tant, per a qualsevol interpretació * i per a qualsevol enunciat modal A tenim

PA $\vdash Bew(\ulcorner A^*\urcorner) \to Bew(\ulcorner Bew(\ulcorner A^*\urcorner)\urcorner)$.

Com que $Bew(\ulcorner A^*\urcorner) \to Bew(\ulcorner Bew(\ulcorner A^*\urcorner)\urcorner) = (\Box A \to \Box\Box A)^*$, hem demostrat que per a tota interpretació * i tot enunciat modal A tenim

PA $\vdash (\Box A \to \Box\Box A)^*$.

Si suposem que PA $\vdash$ (A $\to$ B)* i PA $\vdash$ A*, aleshores com que (A $\to$ B)* = A* $\to$ B*, PA $\vdash$ B*.

Finalment, si suposem que PA $\vdash$ A*, aleshores per la proposició 2.2.24, PA $\vdash$ Bew($\ulcorner A^*\urcorner$) i, per tant, PA $\vdash$ ($\Box$ A)*, ja que ($\Box$ A)* = Bew($\ulcorner A^*\urcorner$). $\Box$

A continuació definim una nova regla d'inferència i un altre sistema de lògica modal que deriva de K4 que la utilitza.

Definició 3.0.3. *La **regla de Löb** és la regla d'inferència tal que:*
de $\vdash (\Box A \to A)$*, podem inferir* $\vdash A$

Definició 3.0.4. *Definim el sistema de lògica modal proposicional **K4LR** com un sistema de lògica modal els axiomes del qual són els mateixos que els de K4 i les regles d'inferència del qual són el modus ponens, la necessitat i la regla de Löb.*

Teorema 3.0.5. *El teorema anterior es pot ampliar a K4LR.*

Demostració 3.0.5. Només fa falta veure que es manté amb la regla de Löb. Sigui A un enunciat modal, si suposem que PA $\vdash (\Box A \to A)^*$, és a dir, PA $\vdash Bew(\ulcorner A^* \urcorner) \to A^*$, aleshores pel teorema de Löb (2.3.4) demostrat en l'anterior capítol, tenim que PA $\vdash$ A*. □

Finalment només ens queda veure que GL i K4LR tenen exactament els mateixos teoremes i haurem demostrat la primera direcció del Teorema de Completesa de Solovay.

Teorema 3.0.6. $GL \vdash A \leftrightarrow K4LR \vdash A$

Demostració 3.0.6. Veiem primer que tot teorema de K4LR ho és de GL. Pel teorema 2.1.20 sabem que GL $\vdash \Box A \to \Box\Box A$. Per tant només queda veure que GL és tancat sota la regla de Löb. Si tenim
GL $\vdash \Box A \to A$, per necessitat
GL $\vdash \Box(\Box A \to A)$
Però sabem que a GL tenim
GL $\vdash \Box(\Box A \to A) \to \Box A$, per tant
GL $\vdash \Box A$, i per modus ponens
GL $\vdash$ A.

Per veure que tot teorema de GL ho és de K4LR només hem de veure que $\Box(\Box A \to A) \to \Box A$ és teorema de K4LR. Sigui B $= \Box(\Box A \to A)$ i C $= \Box A$, volem veure que K4LR $\vdash$ B $\to$ C. Sabem que, per ser axiomes de distribució, tenim
K4LR $\vdash \Box(B \to C) \to (\Box B \to \Box C)$, i
K4LR $\vdash B \to (\Box C \to C)$.
Com que B comença amb $\Box$, podem aplicar-li l'axioma particular de K4 i K4LR i tenim que
K4LR $\vdash B \to \Box B$, per tant per càlcul proposicional
K4LR $\vdash \Box(B \to C) \to (B \to C)$, i per la regla de Löb
K4LR $\vdash B \to C$. □

Hem demostrat doncs que si un enunciat és demostrable en GL, aleshores per a qualsevol interpretació * sabem que la seva traducció és demostrable en PA.

En aquesta segona part de la demostració veurem el contrarrecíproc de la implicació que hem de demostrar, és a dir, demostrarem que, si A és un enunciat modal i no és demostrable en GL, aleshores existeix una traducció * tal que A* no és demostrable en PA.

Teorema 3.0.7 (**Teorema de Completesa de Solovay**). *Sigui A un enunciat modal, si GL* $\nvdash$ *A, aleshores existeix una realització * tal que PA* $\nvdash$ *A*.*

Comencem aplicant el contrarrecíproc del teorema 2.3.20 demostrat en el capítol anterior. Com que estem suposant que GL $\nvdash$ A, és a dir, que A no és teorema de GL, aleshores tenim que existeix un model M = <W, R, V> finit, transitiu i ben fonamentat convers i un món w de W tal que M,w $\not\models$ A.

Per tal de simplificar la notació d'aquesta demostració, sense pèrdua de generalitat podem suposar que W = {1, 2, ..., n} és un conjunt finit de nombres naturals, w = 1 i denotem 1Ri si i només si $1 < i \leq n$. Per tant, tenim doncs que M,1 $\not\models$ A.

A continuació ampliarem el nostre model per afegir el 0. Sigui W' = W $\cup$ {0}, R' = R $\cup$ {<0, i> : $1 \leq i \leq n$} i, per a tota lletra proposicional p, definim V' de la següent manera:

- Si $1 \leq i \leq n$, iV'P si i només si iVp.
- 0V'p si i només si 1Vp.

Clarament, pel fet de que W ho era, W' és finit. Per construcció, R' segueix sent transitiva i, com que R' no relaciona cap element amb si mateix, aleshores R' és irreflexiva i, pel teorema 2.3.16, R' és ben fonamentada conversa.
Hem definit doncs un model M' = <W', R', V'> finit, transitiu i ben fonamentat convers, que serà el que farem servir per a la nostra demostració. Abans d'explicar per sobre en què consistirà exactament la demostració donem una definició.

Definició 3.0.8. *Sigui h una funció sobre els naturals. Diem que h té* ***límit*** *j si existeix un m tal que h(m) = j i per a tot m'>m tenim h(m') = j.*

La idea de la demostració és la següent: primerament definirem un conjunt de predicats en el llenguatge de PA, S_j, amb $0 \leq j \leq n$ que informalment afirmen que una determinada funció té límit j, i en demostrarem algunes propietats; després demostrarem un lema que diu que, prenent certa realització *, per a tota $1 \leq i \leq n$ i tot subenunciat B de A, si M,i $\models$ B aleshores PA $\vdash S_i \rightarrow$ B*, i si M,i $\not\models$ B aleshores PA $\vdash S_i \rightarrow \neg$B*; i finalment farem servir el lema i les propietats prèvies demostrades per arribar a que PA $\nvdash$ A*.

Comencem doncs definint els predicats $S_0, ..., S_n$ mitjançant sis passos:

1) Primerament, sigui $\mathbf{F_m}$ la fórmula de PA amb nombre de Gödel m.

2) En segon lloc, definim **notlim(m, j)** com el Σ pterme per a una funció el valor de la qual és el nombre de Gödel de la fórmula
$\neg\exists c\forall a(a \geq c \rightarrow \exists b(b = \mathsf{j} \wedge F_m))$
és a dir la fórmula que diu que l·la funció F_m no té límit j".

3) En tercer lloc, definim **B(y, a, b)** com la fórmula

$\exists s(FinSeq(s) \wedge lh(s) = a + 1 \wedge s_0 = 0 \wedge s_a = b \wedge \forall x{<}a \bigwedge_{0\leq i\leq n}[s_x = \mathsf{i} \rightarrow \{\bigwedge_{j:iR'j}[Pf(x, notlim(y,\mathsf{j})) \rightarrow s_{x+1} = \mathsf{j}] \wedge [\{\bigwedge_{j:iR'j} \neg Pf(x, notlim(y,\mathsf{j}))\} \rightarrow s_{x+1} = s_x]\}])$

és a dir que si y és el nombre de Gödel d'una fórmula F que defineix una funció f, aleshores B(y, a, b) diu que existeix una seqüència finita s de longitud a+1, el primer element de la qual és 0, l'últim és b i, per a tot x < a, si s_x = i, aleshores s_{i+1} = j si iR'j i x és el nombre de Gödel d'una prova de la negació de l'enunciat que diu "el límit de f és j", i s_{i+1} = i en cas contrari.

4) En quart lloc, pel lema diagonal generalitzat, és a dir el teorema 2.3.3, sabem que existeix una fórmula H(a, b), les úniques variables lliures de la qual són a i b, tal que PA $\vdash$ H(a, b) $\leftrightarrow$ B($\ulcorner H(a,b) \urcorner$, a, b).

5) En cinquè lloc, sigui m el nombre de Gödel de H(a, b).

6) Finalment, per a cada $0 \leq$ j $\leq$ n definim els predicats S_j com les fórmules

$\exists c\forall a(a \geq c \rightarrow \exists b(b = \mathsf{j} \wedge H(a,b)))$.

Per tant, tenim que

PA $\vdash$ $notlim(\ulcorner H(a,b) \urcorner, \mathsf{j}) = notlim(\mathsf{m}, \mathsf{j}) = \ulcorner \neg\exists c\forall a(a \geq c \rightarrow \exists b(b = \mathsf{j} \wedge H(a,b)) \urcorner = \ulcorner \neg S_j \urcorner$

i, per tant,

(*) PA $\vdash$ $H(a,b) \leftrightarrow \exists s(FinSeq(s) \wedge lh(s) = a + 1 \wedge s_0 = 0 \wedge s_a = b \wedge \forall x{<}a \bigwedge_{i:0\leq i\leq n}[s_x = \mathsf{i} \rightarrow \{\bigwedge_{j:iR'j}[Pf(x, \ulcorner \neg S_j \urcorner) \rightarrow s_{x+1} = \mathsf{j}] \wedge [\{\bigwedge_{j:iR'j} \neg Pf(x, \ulcorner \neg S_j \urcorner)\} \rightarrow s_{x+1} = s_x]\}])$

Observem que H(a, b) és una Σ fórmula, ja que Pf(x, y) és Δ. La fórmula H(a, b) defineix una funció h de la manera següent:

h(a) = b si i només si existeix una seqüència finita de longitud a +1, primer element 0, últim element b i tal que per a cada x<a, si s_x = i, aleshores s_{x+1} = j si x és el nombre de Gödel d'una prova de

$\neg\exists c\forall a(a \geq c \rightarrow \exists b(b = \mathsf{j} \wedge H(a, b)))$

per algún j tal que iR'j, però s_{x+1} = i en cas contrari.
És a dir, que per a tota j $\leq$ n, S_j és l'afirmació que el límit de h és j.

A continuació demostrarem algunes propietats sobre els predicats S_0,...,S_n:

- Amb les tres primeres proposicions demostrarem que el límit de la funció h és únic i menor que n.
- Amb la quarta proposició veurem que si iR'j aleshores a PA és demostrable que ($S_i \rightarrow$ "S_j és consistent").
- Amb la cinquena veurem que si i $\geq$ 1 aleshores a PA és demostrable que ($S_i \rightarrow$ "S_i és refutable").
- Finalment, amb l'última proposició demostrarem que si i $\geq$ 1 aleshores a PA és demostrable que ($S_i \rightarrow$ "el límit de h és algun j tal que iR'j").

Proposició 3.0.9. *PA* $\vdash \neg(S_i \wedge S_j)$ *si* $0 \leq i < j \leq n$.

Demostració 3.0.9. Per definició sabem que els predicats S_j són les afirmacions que la funció h té límit j, és a dir, que existeix un nombre natural m tal que h(m) = j i per a tot m' > m tenim h(m') = j.
Per tant, prenent i, j tals que 0 $\leq$ i < j $\leq$ n, tenim clarament que PA $\vdash \neg(S_i \wedge S_j)$, ja que en cas contrari h tindria límit i i límit j, però aleshores, prenent un nombre natural m prou gran, tindriem que h(m) = i i h(m) = j, que contradiu el fet que i > j. □

Proposició 3.0.10. *PA* $\vdash H(a, i) \rightarrow (S_i \vee \bigvee_{j:iR'j} S_j)$

Demostració 3.0.10. Sabem que el marc <W', R'> és transitiu i ben fonamentat convers. Demostrem la proposició per inducció sobre R'.
Prenem com a hipòtesi d'inducció que per a tot j tal que iR'j,

PA $\vdash H(a, \mathsf{j}) \rightarrow (S_j \vee \bigvee_{k:jR'k} S_k)$

Per **(*)**, sabem que

PA $\vdash H(a, \mathsf{i}) \rightarrow \forall c(c \geq a \rightarrow [H(c, \mathsf{i}) \vee \bigvee_{j:iR'j} H(c, \mathsf{j})])$, ajuntant aquestes dues afirmacions obtenim

PA $\vdash H(a, \mathsf{i}) \rightarrow \forall c(c \geq a \rightarrow [H(c, \mathsf{i}) \vee \bigvee_{j:iR'j}(S_j \vee \bigvee_{k:jR'k} S_k)])$, per tant

PA $\vdash H(a, \mathsf{i}) \rightarrow (\forall c(c \geq a \rightarrow H(c, \mathsf{i})) \vee \bigvee_{j:iR'j}(S_j \vee \bigvee_{k:jR'k} S_k))$, és a dir

PA $\vdash H(a, \mathsf{i}) \rightarrow (S_i \vee \bigvee_{j:iR'j}(S_j \vee \bigvee_{k:jR'k} S_k))$, que com R' és transitiva és el mateix que

PA $\vdash H(a, \mathsf{i}) \rightarrow (S_i \vee \bigvee_{j:iR'j} S_j)$ □

Proposició 3.0.11. *PA* $\vdash (S_0 \vee ... \vee Sn)$

Demostració 3.0.11. Aplicant l'anterior proposició a i = 0 obtenim
PA $\vdash H(a, \mathsf{0}) \rightarrow (S_0 \vee ... \vee S_n)$
Com que sabem que PA $\vdash$ H(0, 0) tenim
PA $\vdash (S_0 \vee ... \vee S_n)$ □

Proposició 3.0.12. *Si iR'j, aleshores PA* $\vdash S_i \rightarrow \neg Bew(\ulcorner \neg S_j \urcorner)$.

Demostració 3.0.12. Primerament veiem que a PA és demostrable que tot teorema de PA té infinites proves, ja que tota prova es pot allargar repetint l'última fórmula. Per tant, per a tot S,
PA $\vdash Bew(\ulcorner S \urcorner) \rightarrow \forall x \exists y(y{>}x \wedge Pf(y, \ulcorner S \urcorner))$
Suposem ara que iR'j i que el límit de h és i. Sigui m el menor nombre tal que per a tot r $\geq$ m, h(r) = h(m) = i. Com que tot teorema de PA té infinites proves, si $\neg S_j$ és un teorema de PA aleshores, per algun k>m, k és el nombre de Gödel d'una prova de $\neg S_j$ i aleshores h(k+1) = j $\neq$ i, que contradiu el fet que hem suposat que h té límit i. Per tant, $\neg S_j$ no és un teorema de PA, és a dir
PA $\vdash S_i \rightarrow \neg Bew(\ulcorner \neg S_j \urcorner)$ □

Proposició 3.0.13. *Si i* $\geq$ *1, aleshores PA* $\vdash S_i \rightarrow Bew(\ulcorner \neg S_i \urcorner)$.

Demostració 3.0.13. Suposem que i $\geq$ 1. Observem que per **(*)**,
PA $\vdash H(a, \mathsf{i}) \rightarrow \exists x Pf(x, \ulcorner \neg S_i \urcorner)$
Com que
PA $\vdash S_i \rightarrow \exists a H(a, \mathsf{i})$, tenim doncs que
PA $\vdash S_i \rightarrow \exists x Pf(x, \ulcorner \neg S_i \urcorner)$, és a dir
PA $\vdash S_i \rightarrow Bew(\ulcorner \neg S_i \urcorner)$ □

Proposició 3.0.14. *Si i* $\geq$ *1, aleshores PA* $\vdash S_i \rightarrow Bew(\ulcorner \bigvee_{j:iR'j} S_j \urcorner)$.

Demostració 3.0.14. Per la proposició 3.0.13 tenim
PA $\vdash S_i \rightarrow Bew(\ulcorner \neg S_i \urcorner)$
A més a més sabem que
PA $\vdash S_i \rightarrow \exists a H(a, \mathsf{i})$
Com que H(a, b) és Σ per la proposició 2.2.28
PA $\vdash \exists a H(a, \mathsf{i}) \rightarrow Bew(\ulcorner \exists a H(a, \mathsf{i}) \urcorner)$
Pee la proposició 3.0.10 sabem que
PA $\vdash \exists a H(a, \mathsf{i}) \rightarrow (S_i \vee \bigvee_{j:iR'j} S_j)$, i per les proposicions 2.2.24 i 2.2.25
PA $\vdash Bew(\ulcorner \exists a H(a, \mathsf{i}) \urcorner) \rightarrow Bew(\ulcorner S_i \vee \bigvee_{j:iR'h} S_j \urcorner)$
Tenim doncs que
PA $\vdash S_i \rightarrow Bew(\ulcorner \neg S_i \urcorner) \wedge Bew(\ulcorner S_i \vee \bigvee_{j:iR'j} S_j \urcorner)$, però
PA $\vdash (Bew(\ulcorner \neg S_i \urcorner) \wedge Bew(\ulcorner S_i \vee \bigvee_{j:iR'j} S_j \urcorner)) \rightarrow Bew(\ulcorner \bigvee_{j:iR'j} S_j \urcorner)$, és a dir
PA $\vdash S_i \rightarrow Bew(\ulcorner \bigvee_{j:iR'j} S_j \urcorner)$
□

Passem a definir la realització * que farem servir i el lema mencionat al principi de la demostració.
Per a tota lletra proposicional p, sigui p* = $\bigvee_{i:iV'p} S_i$.

Lema 3.0.15. *Per a tot i, 1 ≤ i ≤ n, i tot subenunciat B de A,*

- *Si M,i ⊨ B aleshores PA ⊢ $S_i \to B^*$.*
- *Si M,i ⊭ B aleshores PA ⊢ $S_i \to \neg B^*$.*

Demostració 3.0.15. Demostrarem el lema mitjançant inducció sobre la complexitat del subenunciat B.

Suposem que B = p. Aleshores B* = p* = $\bigvee_{i:iV'p} S_i$.
Si M,i ⊨ p per a tot i, aleshores iVp, per definició de V' tenim doncs iV'p per a tot i, i per tant, PA ⊢ $S_i \to \bigvee_{i:iV'p} S_i$, és a dir, PA ⊢ $S_i \to B^*$.
Si M,i ⊭ p per algun i, aleshores no iVp, per definició de V' tenim doncs que no iV'p. Aleshores cada S_j disjunta de p* és diferent de S_i i, per la proposició 3.0.9 tenim PA ⊢ $S_i \to \neg S_j$, és a dir que PA ⊢ $S_i \to \neg B^*$

Suposem que B = ⊥. Aleshores B* = ⊥. Per tant, per a tot i, M,i ⊭ B, i com que ¬⊥ és sempre vertader tenim que PA ⊢ $S_i \to \neg\bot$, és a dir, PA ⊢ $S_i \to \neg B^*$.

Suposem que B = (C→D) i que C, D compleixen la propietat. Aleshores B* = (C→D)* = C*→D*.
Si M,i ⊨ B aleshores o bé M,i ⊭ C o bé M,i ⊨ D.
Si M,i ⊭ C, per hipòtesi d'inducció, PA ⊢ $S_i \to \neg C^*$, és a dir, PA ⊢ $S_i \to (C^* \to D^*)$, és a dir, PA ⊢ $S_i \to B^*$.
Si M,i ⊨ D, per hipòtesi d'inducció, PA ⊢ $S_i \to D^*$, és a dir, PA ⊢ $S_i \to (C^* \to D^*)$, és a dir, PA ⊢ $S_i \to B^*$.
Si M,i ⊭ B aleshores M,i ⊨ C i M,i ⊭ D. Per hipòtesi d'inducció tenim que PA ⊢ $S_i \to C^*$ i PA ⊢ $S_i \to \neg D^*$, és a dir, PA ⊢ $S_i \to \neg(C^* \to D^*)$, és a dir, PA ⊢ $S_i \to \neg B^*$.

Suposem que B = □C. Alehsores B* = Bew($\ulcorner C^* \urcorner$).
Si M,i ⊨ B, aleshores per a tot j tal que iRj tenim M,j ⊨ C, i per tant per hipòtesi d'inducció, per a tot j tal que iRj,
PA ⊢ $S_j \to C^*$
Com que 1 ≤ i ≤ n i iRj aleshores iR'j i, per tant,
PA ⊢ $\bigvee_{j:iR'j} S_j \to C^*$, per les proposicions 2.2.24 i 2.2.25
PA ⊢ $Bew(\ulcorner \bigvee_{j:iR'j} S_j \urcorner) \to B^*$, i per la proposició 3.0.14
PA ⊢ $S_i \to B^*$
Si M,i ⊭ B, aleshores per algun j ≥ 1 tal que iRj, i per tant iR'j, M,j ⊭ C. Per hipòtesi d'inducció,
PA ⊢ $S_j \to \neg C^*$, per contrarrecíproc

PA $\vdash C^* \to \neg S_j$, per les proposicions 2.2.24 i 2.2.25
PA $\vdash B^* \to Bew(\ulcorner \neg S_j \urcorner)$, per contrarrecíproc altra vegada
PA $\vdash \neg Bew(\ulcorner \neg S_j \urcorner) \to \neg B^*$, per la proposició 3.0.12 tenim
PA $\vdash S_i \to \neg B^*$.
□

Com que $1 \leq 1 \leq$ n , A és subenunciat de A i M,i $\not\models$ A, podem aplicar el lema que acabem de demostrar per obtenir
PA $\vdash S_1 \to \neg A^*$, per contrarrecíproc
PA $\vdash A^* \to \neg S_1$, per les proposicions 2.2.24 i 2.2.25
PA $\vdash Bew(\ulcorner A^* \urcorner) \to Bew(\ulcorner \neg S_1 \urcorner)$, per contrarrecíproc altra vegada
PA $\vdash \neg Bew(\ulcorner \neg S_1 \urcorner) \to \neg Bew(\ulcorner A^* \urcorner)$
Per la proposició 3.0.12 tenim
PA $\vdash S_0 \to \neg Bew(\ulcorner \neg S_1 \urcorner)$, i per tant
PA $\vdash S_0 \to \neg Bew(\ulcorner A^* \urcorner)$

Només queda doncs veure que S_0 és vertader. Per la proposició 3.0.13, si S_i és vertader aleshores també ho és Bew($\ulcorner \neg S_i \urcorner$), i aleshores $\neg S_i$ és teorema de PA, i per tant vertader. Tenim doncs que si i ≥ 1, S_i no és vertader. Però per la proposició 3.0.11 al menys un dels S_0,...,S_n és vertader, per tant obtenim que S_0 és vertader i, en conseqüència $\neg Bew(\ulcorner A^* \urcorner)$ també s ho és.

Capítol 4

Conclusions

En aquest treball hem explorat en profunditat el Teorema de Completesa de Solovay, començant amb una revisió dels fonaments teòrics necessaris per a la comprensió del teorema i de la seva demostració, i seguit d'una demostració detallada. L'estudi previ necessari ha inclòs l'anàlisi dels conceptes de sistemes de lògica proposicional modal, de l'aritmètica de Peano, l'estudi de l'operador Bew(x) com a operador per a la demostrabilitat i la construcció de semàntica sobre els models de Kripke per a GL. La demostració del Teorema de Completesa de Solovay ha sigut realitzada pas a pas i de manera detallada.

El Teorema de Completesa de Solovay té vàries implicacions significatives en diversos camps de les matemàtiques:

- En el camp de la lògica matemàtica proporciona una comprensió més profunda de la relació entre veritat i demostrabilitat en sistemes aritmètics i complementa i estén els resultats clàssics de Gödel, mostrant la completesa de diversos sistemes sota interpretacions específiques.
- En el camp de la teoria de computabilitat, els conceptes representats en el Teorema de Completesa de Solovay proporcionen una millor comprensió sobre els límits dels algoritmes, en particular ajuden a delimitar la frontera entre els conceptes que poden o no ser computats dins d'uns marcs formals.
- En el camp de la filosofia de les matemàtiques aquest teorema contribueix al debat filosòfic sobre la naturalesa de la veritat matemàtica i la demostrabilitat.

Aquest TFG ha contribuït de diverses maneres a l'enteniment del Teorema de Completesa de Solovay.
Hem proporcionat una exposició clara i comprensible dels conceptes i resultats previs necessaris per a la comprensió del teorema, el que pot facilitar el seu estudi per a futurs interessats. A més a més s'ha donat una demostració detallada i exhaustiva del teorema, el que pot servir com a referència per a altres treballs que necessitin d'aquesta demostració.

Tot i que en aquest treball hem tractat amb èxit el Teorema de Completesa de Solovay, existeixen algunes limitacions.

En quant a l'abast teòric, el desenvolupament de la teoria s'ha centrat principalment en els aspectes necessaris per a la demostració del teorema, deixant fora altres generalitzacions possibles en el camp de la lògica matemàtica i la teoria de demostrabilitat. Per altra banda, en quant a l'abast pràctic, no s'ha estudiat les aplicacions pràctiques del teorema en àrees com la informàtica o la inteligència artificial.

Sobre les direccions futures en les que podria continuar l'investigació a partir d'aquest treball podem trobar les mencionades prèviament en les limitacions del mateix treball, com les extensions i generalitzacions del Teorema de Completesa de Solovay a altres sistemes lògics i aritmètics i la seva relació amb altres resultats de la lògica matemàtica, o les aplicacions pràctiques en quant als límits de la computabilitat o les inteligències artificials. No obstant, també es podrien estudiar les implicacions teòriques del teorema en altres àrees de les matemàtiques com per exemple la teoria de conjunts.

El Teorema de Completesa de Solovay representa un pilar significatiu de la lògica matemàtica, proporcionant una connexió profunda entre la veritat i la demostrabilitat en els sistemes aritmètics. Aquest treball ha buscat no només demostrar aquest teorema sinó també contextualitzar la seva importància i resaltar les seves implicacions més àmplies.

Bibliografia

[1] Boolos, G. S. *The logic of provability*. Cambridge University Press. 1993. ISBN: 9780521483254.

[2] Ortiz Morales, S. *La lógica de la demostrabilidad*. 2021. URL: https://idus.us.es/bitstream/handle/11441/142896/GM%20ORTIZ%20MORALES%2C%20SAMUEL.pdf?sequence=1&isAllowed=y

[3] Garson, J. *Modal Logic*. 2023 URL: https://plato.stanford.edu/entries/logic-modal/

[4] Cook, S. *Peano Arithmetic*. 2008. URL: https://www.cs.toronto.edu/∼sacook/csc438h/notes/page96.pdf

[5] Shawn. *Introduction to Kripke semantics*. 2023. URL: http://therisingsea.org/notes/talk-shawn-kripke.pdf

[6] Sonia, D. *Teorema de Completitud de Gödel*. 2023. URL: https://www.teoremas.club/teorema-de-completitud-de-godel/

[7] Jumelet, M. *On Solovay's completeness theorem*. 1988. URL: https://eprints.illc.uva.nl/id/eprint/572/1/X-1988-01.text.pdf#:∼:text=Solovay's%20first%20Completeness%20Theorem%20(Solovay,clauses%20of%20the%20preceding%20paragraph.