



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

Aspectes homotòpics de les àlgebres hipercommutatives

Autor: Roger Garrido Vilallave

Directora: Dra. Joana Cirici

Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 10 de juny de 2024

Als meus avis

Abstract

The notion of Batalin–Vilkovisky algebra plays an important role in geometry, topology and mathematical physics. Under some conditions, often present in geometric situations, one can obtain, from a Batalin–Vilkovisky algebra, a hypercommutative algebra structure, a structure related to quantum cohomology and generalizing the notion of commutative algebra. In this work, a question related to homotopy invariance in the passage from Batalin–Vilkovisky to hypercommutative algebras is introduced and addressed. My odyssey through several failed attempts to answer this question is explained and, at the end, a solution to a simplified version of the problem is proposed.

Resum

Les àlgebres de Batalin–Vilkovisky són estructures rellevants en geometria, topologia i física matemàtica. Sota certes hipòtesis es pot construir una àlgebra hipercommutativa a partir d'una àlgebra de Batalin–Vilkovisky, que és una estructura relacionada amb la cohomologia quàntica i que generalitza les àlgebres commutatives. Aquestes condicions se satisfan en diversos contextos geomètrics. En aquest treball, s'introdueix i s'estudia una pregunta relacionada amb la invariància homotòpica en el pas de les àlgebres de Batalin–Vilkovisky a les hipercommutatives. S'explica la meua aventura a través de nombrosos intents de demostració fallits, i finalment s'exposa una solució parcial del problema.

Agraïments

En primer lloc, m'agradaria expressar el meu profund agraïment a la Joana Cirici per haver-me obert les portes, donat mil i una oportunitats i dedicat tant de temps a guiar-me i ensenyar-me matemàtiques. També voldria agrair-li la proposta d'estudiar el problema que tracta aquest treball, l'orientació proporcionada i haver escoltat críticament les nombroses demostracions errònies. Per altra banda, voldria agrair a la Marta Borrell haver cultivat en mi l'interès per les matemàtiques i haver sigut una professora excel·lent.

En segon lloc, voldria donar les gràcies a la meva família i amics, que m'han donat suport incondicional. Especialment a la Isabel, que ha estat al meu costat en tots els alts i baixos, i a la Júlia, amb qui he compartit idees i innumerables nits de pissarra.

També voldria agrair al grup de topologia de la Universitat de Barcelona l'acollida rebuda i les oportunitats donades. En particular m'agradaria donar les gràcies als organitzadors dels seminaris per haver-los fet una realitat, als joves topòlegs per haver fet tanta pinya, i a en Bashar Saleh per haver-me animat a pensar problemes oberts, escoltar les meves demostracions incorrectes i resoldre'm tota mena de dubtes.

Finalment, voldria agrair a en Geoffroy Horel, en Sergey Shadrin, en Nikita Markarian i en Vladimir Dotsenko l'interès mostrat entorn el problema i les idees intercanviades.

Continguts

1	Introducció	1
2	Notació i conceptes fonamentals	5
2.1	Notació	5
2.2	Opèrades	5
2.3	Resolució d'opèrades	7
3	Àlgebres hipercommutatives i de Batalin-Vilkovisky	13
3.1	Protagonistes	13
3.2	Estructures algebriques a la natura	16
4	Problema	21
4.1	Descripció del problema	21
4.2	Intents de resolució	22
4.3	Demostració	27
4.4	Pròxims passos	32

1 Introducció

Les àlgebres de Batalin-Vilkovisky i hipercommutatives són estructures rellevants en geometria, topologia i física matemàtica. Es poden descriure de diverses maneres, en llenguatge algebraic o operàdic. L'objectiu d'aquest treball és estudiar un problema homotòpic que sorgeix del pas de les àlgebres de Batalin-Vilkovisky a les hipercommutatives.

Contextualització del problema

Una àlgebra de Batalin-Vilkovisky és una àlgebra $(A, d, \cdot)$ diferencial graduada-commutativa juntament amb un operador Δ de grau -1 i ordre ≤ 2 que satisfà $\Delta^2 = 0$ i $d\Delta = -\Delta d$.

Una àlgebra hipercommutativa és un complex de cocadenes (A, d) amb productes graduats-commutatius $m_n : A^{\otimes n} \rightarrow A$ de grau $2(2-n)$, per $n \geq 2$, tals que els *productes deformats*

$$m_x(a, b) := \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} m_{n+2}(a, b, x, \dots, x)$$

són associatius per cada $x \in A$. És una estructura algebraica que està estretament relacionada amb les varietats formals de Frobenius ([17]), ja que de fet tota varietat d'aquestes té una estructura hipercommutativa associada.

Aquestes dues estructures algebraiques es poden empaquetar en les opèrades BV i Hycom, respectivament. En aquest treball juguen un paper molt important, però queda fora de l'abast de la introducció.

Un problema geomètric on aquests objectes prenen rellevància és el de la deformació d'estructures complexes en varietats ([13]). Hi ha una àlgebra de Lie diferencial graduada $\mathcal{A}^{0,*}(TM_{1,0})$ que codifica aquest problema de deformació. El seu complex de cocadenes subjacent és $\{\mathcal{A}^{0,q}(TM_{1,0})\}_q$ amb diferencial $\bar{\partial}$, on $TM_{1,0} \oplus TM_{0,1}$ és la descomposició del fibrat tangent complex de M en camps holomorfs i anti-holomorfs, i $\mathcal{A}^{0,q}(TM_{1,0})$ denota l'àlgebra de $(0, q)$ -formes en $TM_{1,0}$. Per exemple, un element de $\mathcal{A}^{0,2}(TM_{1,0})$ és, localment,

$$\sum_{i,j,k} f_{ijk} d\bar{z}_i \wedge d\bar{z}_j \otimes \frac{\partial}{\partial z_k}.$$

Les deformacions de l'estructura complexa estan en bijecció amb els elements de Maurer-Cartan de l'àlgebra de Lie $\mathcal{A}^{0,*}(TM_{1,0})[[t]]$, és a dir, els elements $\xi(t) \in \mathcal{A}^{0,1}(TM_{1,0})[[t]]$ que satisfan

$$\bar{\partial}\xi(t) + \frac{1}{2}[\xi(t), \xi(t)] = 0.$$

En general, aquesta equació, anomenada equació de Maurer-Cartan, no té solució. Però si la varietat que es vol deformar és de Calabi-Yau, el Teorema de Bogomolov-Tian-Todorov demostra que sí que en té. Es pot trobar una exposició a [10]. Hi ha una demostració d'aquest resultat que passa pel lema de Tian-Todorov. Aquest, dota l'àlgebra de Lie $\mathcal{A}^{0,*}(TM_{1,0})$ d'una estructura d'àlgebra de Batalin-Vilkovisky. Amb aquest enriquiment, tot utilitzant teoria de Hodge, es pot culminar amb la demostració del teorema.

Posteriorment, s'observa que aquesta demostració es pot reproduir en contextos més generals. Per abstrure l'argument que utilitza teoria de Hodge cal un retractor de deformació. Si (A, d) és un complex de cocadenes, un retractor de deformació és un altre complex

de cocadenes (H, d') juntament amb un diagrama

$$h \begin{array}{c} \curvearrowright \\ (A, d) \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{p} \\ \xleftarrow{i} \end{array} (H, d') ,$$

on p i i són morfismes de complexos i $h : A \rightarrow A$ és una aplicació lineal de grau -1 , tals que satisfan $pi = \text{id}_H$, $\text{id}_A - ip = dh + hd$. El Teorema de Descomposició de Hodge proporciona a $\mathcal{A}^{0,*}(TM_{1,0})$ un retractor de deformació, que és el que en el fons s'utilitza a la demostració del Teorema de Bogomolov-Tian-Todorov.

En aquesta línia, a l'article [1], Barannikov i Kontsevich comencen a desenvolupar aquesta idea abstracta, i construeixen una àlgebra hipercommutativa sobre unes estructures algebraïques que representen certs problemes de deformació, tot ajudant-se de retractes de deformació. És precisament l'estructura d'àlgebra hipercommutativa el que permet donar una solució afirmativa al problema de deformació.

A partir d'aquest moment, en diversos articles (per exemple, en [5] o [6]) s'estudia la relació entre les àlgebres de Batalin-Vilkovisky i les hipercommutatives. A l'article [12], Khoroshkin, Markarian i Shadrin donen una fórmula per construir, per cada àlgebra BV/Δ , una àlgebra hipercommutativa. Les àlgebres BV/Δ són àlgebres de Batalin-Vilkovisky juntament amb una solució $\phi(z) = \sum_{i \geq 1} \phi_i z^i \in \text{End}(A)[[z]]$ de l'equació

$$\exp(-\phi(z))d\exp(\phi(z)) = d + z\Delta,$$

on z és un paràmetre formal de grau -2 .

A l'article [5], Dotsenko, Shadrin i Vallette proporcionen una fórmula que genera, per cada retractor de deformació (H, d', i, p, h) prou bo, una àlgebra BV/Δ . Explícitament, el coeficient ϕ_n de la solució $\phi(z)$ és

$$\phi_n := \frac{(h\Delta)^n}{n} - n \sum_{\ell=1}^n \frac{(h\Delta)^{\ell-1} ip(\Delta h)^{n-\ell+1}}{\ell}.$$

Per tant, donada una àlgebra de Batalin-Vilkovisky i un retractor de deformació prou bo, s'obté una àlgebra hipercommutativa.

A partir d'aquesta recepta descrita s'obté un reguitzell d'exemples d'àlgebres hipercommutatives amb origen geomètric. Totes elles provenen d'àlgebres de Batalin-Vilkovisky i retractes de deformació, que en la majoria dels casos són els proporcionats pel Teorema de Descomposició de Hodge. En són exemples les varietats de Poisson ([14]), simplèctiques ([21]), de Kähler ([2]) o hermítiques ([3]).

En general, les àlgebres hipercommutatives indueixen, per mitjà del Teorema de Transferència Homotòpica ([15]), estructures equivalents d'àlgebra hipercommutativa llevat d'homotopia en la cohomologia. Algunes instàncies d'aquestes estructures en cohomologia són estudiades per Dotsenko, Shadrin i Vallette a [5].

Més recentment, també ha estat estudiada per Cirici i Wilson una estructura d'àlgebra de Batalin-Vilkovisky provinent de les varietats hermítiques i quasi-hermítiques ([4]). Resulta que aquestes àlgebres no són estrictes sinó llevat d'homotopia. Conseqüentment, les estructures d'àlgebra hipercommutativa obtingudes a partir de retractes de deformació canònics també deixen de ser estrictes i esdevenen àlgebres llevat d'homotopia.

Problema

L'objectiu d'aquest treball és explicar un problema que sorgeix en el pas de les àlgebres de Batalin-Vilkovisky a les àlgebres hipercommutatives. Ha estat estudiat amb el suport de la *Beca de col·laboració en departaments universitaris* del Ministeri d'Educació i Formació Professional, i sota la supervisió de la Joana Cirici. Ara per ara s'ha obtingut una solució parcial del problema, que s'exposa en aquest treball.

Donades una àlgebra de Batalin-Vilkovisky $(A, d, \cdot)$ i una solució $\phi(z) = \sum_{i \geq 1} \phi_1 z^i$ de l'equació descrita anteriorment, hi ha una àlgebra hipercommutativa associada. Aquesta assignació depèn de $\phi(z)$, ja que pot existir una altra solució $\psi(z)$ de manera que les àlgebres hipercommutatives associades no siguin quasi-isomorfes. Per un exemple d'aquest fenomen es pot consultar l'Exemple 4.1. En altres paraules, no és cert que cada àlgebra de Batalin-Vilkovisky (que admeti estructura d'àlgebra BV/Δ) tingui una estructura hipercommutativa canònica associada.

El problema entorn el qual gira aquest treball es restringeix a aquelles solucions que provenen de retractes de deformació i es pregunta si, en aquest cas, l'estructura hipercommutativa associada és canònica (és a dir, única llevat de quasi-isomorfisme).

Una solució positiva d'aquest problema té implicacions geomètriques interessants, ja que permet deduir que les estructures d'àlgebra hipercommutativa descrites anteriorment no depenen de la mètrica. De moment no s'ha aconseguit resoldre el problema en la seva totalitat, però sí que s'ha trobat una solució parcial:

Teorema 4.7. *Si sigui $(A, d, \cdot, \Delta)$ una àlgebra de Batalin-Vilkovisky amb unitat i amb l'operador Δ homotòpicament trivial, i siguin R i S dos retractes de deformació de (A, d) amb diferencial nul·la, que satisfan les condicions de contorn i que preserven la unitat. Les àlgebres $Hycom_{\leq 3}$ associades són quasi-isomorfes.*

La condició que l'operador Δ sigui homotòpicament trivial significa que existeix alguna solució $\phi(z)$ tal que $(A, d, \cdot, \Delta, \phi(z))$ sigui una àlgebra BV/Δ . Per tant, aquest resultat estableix que, sota condicions no massa restrictives i geomètricament plausibles, els productes m_2 i m_3 de l'estructura hipercommutativa són invariants llevat de quasi-isomorfisme, però en cap cas es dedueix res sobre la resta d'operacions m_n per $n \geq 4$.

La metodologia que s'utilitza per a la seva demostració és el càlcul operàdic recopilat, principalment, a [15]. Les dues eines cabdals són el Teorema de Transferència Homotòpica i l'adjunció bar-cobar.

El Teorema de Transferència Homotòpica és un resultat sobre àlgebres operàdiques que té els seus orígens en la investigació de les àlgebres associatives llevat d'homotopia duta a terme per Kadeišvili ([11]). La idea bàsica és que, a l'hora de transferir el producte d'una àlgebra associativa a la seva cohomologia, per obtenir quelcom quasi-isomorf cal perdre l'associativitat estricta, de manera que s'obté un producte associatiu llevat d'homotopia. La versió del Teorema de Transferència Homotòpica que s'utilitza en aquest treball és per àlgebres de Batalin-Vilkovisky i d'altres de més extravagants.

Un procediment generalment utilitzat per a construir resolucions d'àlgebres associatives és la resolució bar-cobar. Existeix un anàleg per opèrades, on es construeix una adjunció entre les categories d'opèrades i coopèrades (amb unitat), i la counitat d'aquesta adjunció és, precisament, la resolució bar-cobar operàdica. Una peça clau per la demostració és el functor cobar, que permet estudiar la teoria d'homotopia de les àlgebres de Batalin-Vilkovisky (i similars) a partir d'unes coopèrades força convenients. Això permet definir

la noció d' ∞ -morfisme.

L'estratègia de demostració consisteix en comprovar que les àlgebres hipercommutatives obtingudes són, de fet, àlgebres amb una estructura una mica més fina, i d'aquí segueix el resultat mitjançant l'aixecament d' ∞ -morfismes. Aquest aixecament es duu a terme comprovant explícitament que l'obstrucció que el controla s'anul·la en el cas d'un ∞ -morfisme molt particular.

Estructura del treball

A continuació es descriu l'estructura del treball, que consta de quatre seccions. La segona secció conté una introducció gens rigorosa a la teoria d'opèrades algebriques i la seva resolució quasi-lliure. Amb aquesta exposició –i una mica d'imaginació– el lector compta amb el llenguatge i conceptes necessaris per a entendre la resta del treball. En cap cas es pretén donar una exposició formal, i s'aconsella al lector que això no el permeti dormir de consultar les referències [15], [16] o [19].

A la tercera secció es defineixen les àlgebres de Batalin-Vilkovisky i hipercommutatives, i també es donen els resultats rellevants per tal comprendre el problema estudiat. Després s'expliquen detalladament alguns dels exemples geomètrics que contenen estructures d'àlgebres de Batalin-Vilkovisky i hipercommutatives.

Finalment, a la quarta secció s'explica el problema i la demostració parcial trobada, que formarà part d'un article que s'està escrivint. Això es complementa amb una exposició dels diferents intents que varen guiar la meua investigació i que han culminat, finalment, en la demostració. Per acabar, es fa un breu resum de les direccions que es volen estudiar en un futur.

2 Notació i conceptes fonamentals

2.1 Notació

$\mathbb{K}$ denota un cos de característica zero.

En tot el treball s'usa la convenció homològica (la diferencial disminueix el grau en una unitat), llevat d'aquells apartats on hi apareix geometria (ja que es parla de cohomologia de De Rham).

Si (A, d) és un complex de cadenes, el complex $(A[k], d_{A[k]})$ es defineix per

$$A[k]_i := A_{i-k}, \quad d_{A[k]} := (-1)^k d.$$

És habitual la notació $sA := A[1]$, $s^{-1}A := A[-1]$. L'element de $sA = A[1]$ corresponent a $x \in A$ es denota per sx , i aquesta notació és anàloga per $s^{-1}A$. També se segueix utilitzant quan es parla de complexos de cocadenes.

Per un **quasi-isomorfisme** s'entén un morfisme de complexos, àlgebres o opèrades (segons el context) que indueix un isomorfisme en (co)homologia. Una fletxa decorada amb una titlla, $\xrightarrow{\sim}$, denota un quasi-isomorfisme. Dos objectes són **quasi-isomorfs** si existeix una ziga-zaga de quasi-isomorfismes entre ells: $A \xleftarrow{\sim} \cdots \xrightarrow{\sim} A'$.

2.2 Opèrades

Aquest apartat és una introducció informal al concepte d'opèrada (algebraica). Es pot trobar una exposició rigorosa en [15], i una definició en un context més general, juntament amb aplicacions a la teoria d'homotopia, en [16].

Una opèrada és un objecte algebraic que codifica estructures algebraiques. De la mateixa forma que hi ha àlgebres associatives, commutatives o de Lie, existeixen les opèrades Ass, Com o Lie. Totes les que apareixen en aquest treball són opèrades algebraiques, és a dir, opèrades en la categoria simètrica monoidal de complexos de cadenes (o cocadenes).

En aquest sentit, una **opèrada** és una col·lecció de complexos de cadenes $\{P(n)\}_{n \geq 0}$, on $P(n)$ s'interpreta com l'espai d'operacions n -àries. També formen part d'aquesta estructura les composicions

$$\Gamma_{i_1, \dots, i_n}^n : P(n) \otimes P(i_1) \otimes \cdots \otimes P(i_n) \rightarrow P\left(\sum_j i_j\right),$$

l'acció, per cada n , del grup simètric S_n en $P(n)$ (s'interpreta com la permutació de les entrades de les operacions), i una unitat $\text{id} \in P(1)$. Cal que les composicions, les accions dels grups simètrics i la unitat es comportin bé entre elles. S'utilitza la notació $\Gamma_{i_1, \dots, i_n}^n(p; q_1, \dots, q_n) = p \circ (q_1, \dots, q_n)$. Les opèrades formen una categoria **Op**.

Exemple 2.1. L'opèrada commutativa Com consisteix en una col·lecció de complexos de cadenes (concentrats en grau zero i amb diferencial nul·la) $\text{Com}(n) := \mathbb{K}m_n$, $n \in \mathbb{N}_*$, $\text{Com}(0) = 0$. Cada generador m_n representa l'operació $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 \cdot \cdots \cdot x_n$. En particular, m_1 és la identitat i m_2 , el producte. L'operació $3m_2$ és $(x, y) \mapsto 3(x \cdot y)$.

Per cada n el complex $\text{Com}(n)$ té una acció del grup simètric S_n , que es correspon amb la permutació de les variables d'entrada. Com que Com codifica l'estructura d'àlgebra

commutativa, per cada $\sigma \in S_n$ l'operació $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_{\sigma^{-1}(1)} \cdots x_{\sigma^{-1}(n)}$ és la mateixa que m_n , així que l'acció del grup simètric és $\sigma * m_n = m_n$ per cada $\sigma \in S_n$ (i s'estén linealment a tot $\text{Com}(n) = \mathbb{K}m_n$).

També es poden compondre les operacions. Per exemple, la composició

$$\Gamma_{2,2}^2(m_2; m_2, m_2) = m_2 \circ (m_2, m_2)$$

es correspon amb l'operació $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1 \cdot x_2) \cdot (x_3 \cdot x_4)$, que per l'associativitat de les àlgebres commutatives ha de ser m_4 . És a dir,

$$\Gamma_{2,2}^2(m_2; m_2, m_2) = m_2 \circ (m_2, m_2) = m_4.$$

Exemple 2.2. L'opèrada associativa Ass té espai d'operacions n -àries $\text{Ass}(n) := \mathbb{K}S_n$ (concentrat en grau zero i amb diferencial trivial). L'acció del grup simètric ve donada pel producte intern de S_n (per l'esquerra). La identitat és $\text{id} \in S_1 \subseteq \mathbb{K}S_1 = \text{Ass}(1)$. Intuïtivament, el producte $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}$ és representat per l'operació $\sigma^{-1} \in S_n \subseteq \text{Ass}(n)$.

La composició consisteix en una agrupació per blocs de les permutacions. Per definir-la cal emprar un llenguatge tècnic de permutacions, que no fa res més que eclipsar-ne la simplicitat. És per aquest motiu que a continuació s'exposa un exemple de composició en comptes de la definició formal. Les operacions $(1\ 2) \in \text{Ass}(2)$, $(2\ 3) \in \text{Ass}(3)$ i $(1\ 2\ 3) \in \text{Ass}(3)$ representen els productes

$$(x_1, x_2) \mapsto x_2 \cdot x_1, \quad (y_1, y_2, y_3) \mapsto y_1 \cdot y_3 \cdot y_2, \quad (z_1, z_2, z_3) \mapsto z_3 \cdot z_1 \cdot z_2.$$

La composició $\Gamma_{3,3}^2((1\ 2); (2\ 3), (1\ 2\ 3))$ representa

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \mapsto (x_6 \cdot x_4 \cdot x_5) \cdot (x_1 \cdot x_3 \cdot x_2),$$

així que

$$\Gamma_{3,3}^2((1\ 2); (2\ 3), (1\ 2\ 3)) = (1\ 4\ 2\ 6)(3\ 5).$$

Donat un complex de cadenes (A, d) , hi ha una opèrada $\text{End}_{(A,d)}$ (o, amb un abús de notació, End_A) que retén totes les possibles operacions definibles en (A, d) . Per tant, si P és una opèrada, una **estructura de P -àlgebra** en (A, d) és senzillament un morfisme d'opèrades $P \rightarrow \text{End}_A$. Intuïtivament, el que fa aquest morfisme és realitzar cada operació abstracta de P com una operació en (A, d) de manera consistent amb l'estructura opèradica de P .

Amb aquesta definició de P -àlgebra es comprova que, si (A, d) té una estructura de P -àlgebra $\alpha : P \rightarrow \text{End}_A$, i $f : Q \rightarrow P$ és un morfisme d'opèrades, aleshores $f^*\alpha := \alpha f$ és una estructura de Q -àlgebra en (A, d) . En altres paraules, cada morfisme d'opèrades $f : Q \rightarrow P$ indueix un functor

$$f^* : \mathbf{Alg}_P \rightarrow \mathbf{Alg}_Q.$$

Exemple 2.3. Sigui $f : \text{Ass} \rightarrow \text{Com}$ el morfisme d'opèrades que envia cada operació $\sigma \in S_n \subseteq \mathbb{K}S_n = \text{Ass}(n)$ a $m_n \in \text{Com}(n)$. El functor $f^* : \mathbf{Alg}_{\text{Com}} \rightarrow \mathbf{Alg}_{\text{Ass}}$ és el que s'oblida de la commutativitat de les operacions.

Es pot definir una noció dual d'opèrada: les **coopèrades**. També tenen acció del grup simètric i unitat, però en comptes de compondre operacions les descomponen.

Hi ha notació específica d'opèrades (i coopèrades) que serà utilitzada en aquest treball:

- La **composició parcial** es denota per $p \circ_i q := p \circ (\text{id}, \dots, \text{id}, q, \text{id}, \dots, \text{id})$, on el símbol q apareix a la posició i -èsima.
- $\overline{P}$ denota el quocient de la col·lecció de complexos de cadenes P per la subcol·lecció linealment i equivariant generada per la identitat $\text{id} \in P(1)$. S'ha d'entendre amb la descomposició $P = \mathbb{K}\text{id} \oplus \overline{P}$ de col·leccions de complexos. S'usa la mateixa notació per les coopèrades.
- El símbol $*$ denota el coproducte en la categoria d'opèrades, ja que coincideix amb el producte d'amalgama.

2.3 Resolució d'opèrades

En topologia algebraica sovint apareixen àlgebres llevat d'homotopia en comptes d'àlgebres estrictes. Per exemple, el complex de cocadenes singulars d'un espai topològic és una àlgebra commutativa llevat d'homotopia (amb el producte cup), que indueix una àlgebra commutativa estricta en la cohomologia.

El que significa és que les relacions que satisfan les operacions de l'àlgebra deixen de ser estrictes i passen a satisfer-se llevat d'homotopia. Per exemple, en les àlgebres associatives, si es denota $m_2 := \text{id} \in \mathbb{K}S_2 = \text{Ass}(2)$, la relació d'associativitat $m_2 \circ_1 m_2 - m_2 \circ_2 m_2 = 0$ se substitueix per la seva versió homotòpica $m_2 \circ_1 m_2 - m_2 \circ_2 m_2 = dm_3$. En aquest cas s'observa que apareix una operació addicional m_3 , que s'ha d'interpretar com una homotopia per la relació d'associativitat. Al seu torn, haurà de satisfer altres relacions llevat d'homotopia, i apareixeran encara més operacions. Finalment s'obtenen infinites operacions. Aquesta nova estructura se sol anomenar **estructura elevada**.

Com s'expressa, això, en el llenguatge de les opèrades? Donada una opèrada que codifica un tipus d'àlgebres clàssiques, n'hi ha una altra que s'encarrega de la seva versió llevat d'homotopia?

Es fa palès que quan es deixen de tenir relacions estrictes s'obté una estructura algebraica sobre una opèrada lliure (com a opèrada sense diferencial; es diu que es tracta d'una **opèrada quasi-lliure**). Llevat de casos trivials la diferencial d'aquesta nova opèrada és no-nul·la, i és així com s'obté l'operació m_3 dels paràgrafs anteriors. Una restricció que cal imposar és que la homologia d'aquesta nova opèrada coincideixi amb la de l'opèrada inicial, ja que quan les homotopies són oblidades i apareixen, per tant, relacions estrictes, cal retornar al punt de partida.

Per tant, estudiar P -àlgebres llevat d'homotopia és el mateix que estudiar P_∞ -àlgebres estrictes, on P_∞ és una opèrada quasi-lliure equipada amb un quasi-isomorfisme $P_\infty \xrightarrow{\sim} P$. Es diu que P_∞ és una **resolució quasi-lliure** de P .

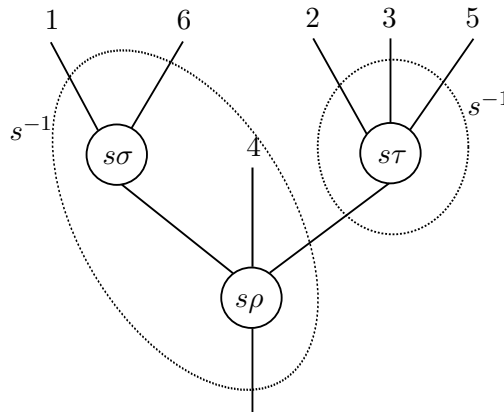
A continuació es descriu, per art de màgia, una opèrada $\Omega B\text{Ass}$ que codifica les àlgebres associatives llevat d'homotopia. S'estudia com funciona i per què, i així es dona peu a la generalització a opèrades arbitràries P . Una exposició rigorosa d'aquesta construcció es pot trobar a [15].

Sigui $\Omega B\text{Ass}$ l'opèrada quasi-lliure definida a continuació.

1. Els seus objectes són combinacions $\mathbb{K}$ -lineals d'arbres encerclats amb les fulles numerades. L'aritat d'un arbre és el nombre de fulles.

2. L'acció d'un element $\sigma \in S_n$ ve donada per la permutació de la numeració de les fulles segons σ^{-1} .
3. La composició ve donada per l'apilament d'arbres encerclats (tenint en compte la numeració de les fulles).
4. No es pot encerclar una aresta sense cap vèrtex a dins.
5. La identitat $\text{id} \in \Omega B\text{Ass}(1)$ és l'arbre encerclat (sense cap cercle) amb una fulla i cap vèrtex.
6. Cadascun dels vèrtexs és decorat linealment per elements de $\overline{\text{Ass}}$, i se'ls posa el prefix s . Per exemple, un vèrtex podria estar decorat per $s(m_2 \circ_1 m_2 + 3m_2 \circ_2 m_2)$.
7. Cal que aquesta engarlanació de l'arbre encerclat sigui coherent amb l'aritat de les operacions. En altres paraules, un vèrtex amb n arestes d'entrada només pot ser decorat per elements de $\overline{\text{Ass}}(n)$.
8. Els cercles tenen el prefix s^{-1} .
9. El grau d'un arbre encerclat és el nombre de vèrtexs menys el nombre de cercles.
10. Com que $\Omega B\text{Ass}$ està lliurement generat pels arbres amb un sol cercle, per a definir-hi la diferencial n'hi ha prou en fer-ho pels arbres amb un sol cercle. Per la resta d'arbres s'estén mitjançant la regla de Leibniz. Està formada per la suma dels següents dos termes:
 - (a) La suma de totes les possibles contraccions d'arestes internes al cercle, de manera que quan es contrau una aresta es duu a terme una composició parcial. Cal tenir en compte que al resultat s'hi ha de posar el prefix s .
 - (b) La suma de totes les formes possibles de separar el cercle en dos cercles. S'ha de posar el prefix s^{-1} a cadascun dels cercles resultants.

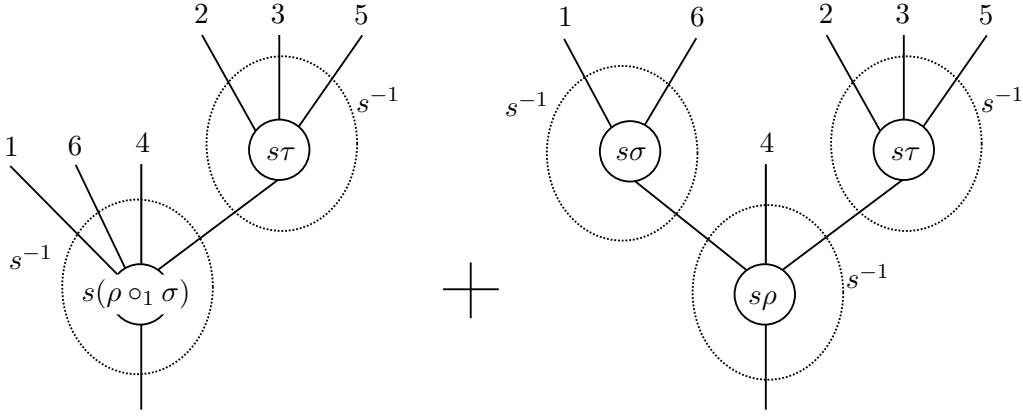
Un exemple d'element de $\Omega B\text{Ass}$ és el següent, on $\sigma \in \text{Ass}(2) = \mathbb{K}S_2$ i $\tau, \rho \in \text{Ass}(3) = \mathbb{K}S_3$:



Com que té tres vèrtexs i dos cercles el seu grau és 1. Això també es pot veure tenint en compte que Ass està concentrat en grau zero (així que σ, ρ i τ tenen grau zero), les suspensions s incrementen el grau en 1 i les desuspensions s^{-1} el disminueixen en 1. En

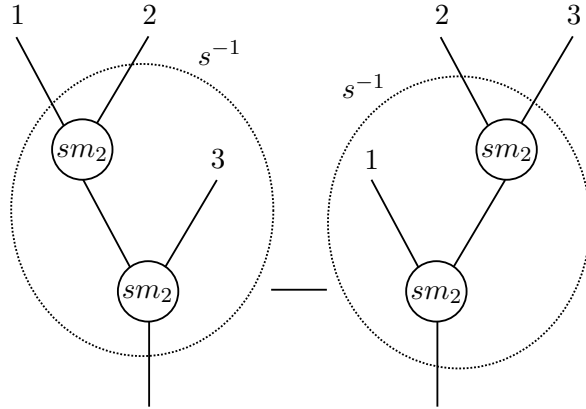
aquesta exposició això no és més que una regla pneumotècnica, però esdevé part de la definició a l'hora de formalitzar la construcció.

La seva diferencial és:

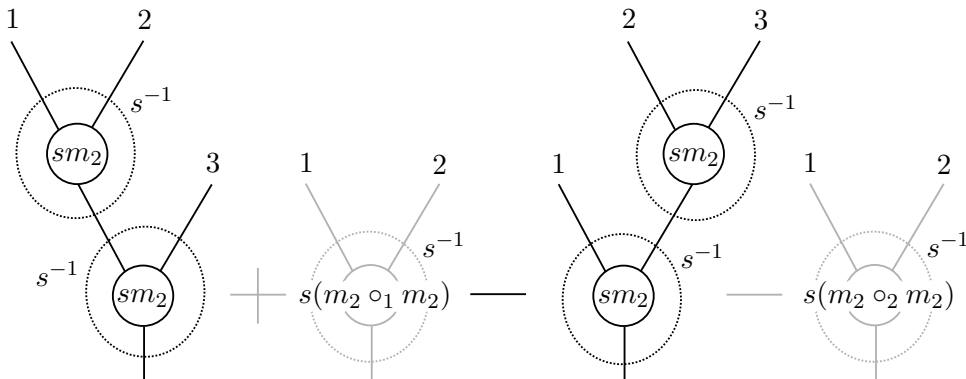


També cal especificar un quasi-isomorfisme $\Omega B\text{Ass} \xrightarrow{\sim} \text{Ass}$, que és el que envia a zero tots els arbres encerclats amb algun cercle amb més d'un vèrtex a dins, i oblida els cercles de la resta d'arbres encerclats. Es pot pensar que els arbres encerclats amb un únic vèrtex per cercle són les operacions originals de Ass , i la resta són les homotopies, les homotopies entre les homotopies, etcètera.

Per a convèncer el lector d'aquest fet es comprova que la següent operació, que és denotada per m_3 , és una homotopia per la relació d'associativitat $s^{-1}sm_2 \circ_1 s^{-1}sm_2 - s^{-1}sm_2 \circ_2 s^{-1}sm_2$ (dins de $\Omega B\text{Ass}$):



Té diferencial



on el color gris denota els termes que no sobreviuen (perquè $m_2 \circ_1 m_2 - m_2 \circ_2 m_2 = 0$ en $\overline{Ass}$). Això prova que m_3 és una homotopia per la relació d'associativitat perquè satisfà $s^{-1}sm_2 \circ_1 s^{-1}sm_2 - s^{-1}sm_2 \circ_2 s^{-1}sm_2 = dm_3$.

Naturalment no hi ha una única resolució quasi-lliure $Ass_\infty \xrightarrow{\sim} Ass$ que codifiqui les àlgebres associatives llevat d'homotopia. La teoria de Koszul permet trobar una altra solució d'aquest problema, que és la famosa opèrada A_∞ . Com $\Omega BAss$ també està definida amb arbres encerclats, però n'hi ha molts menys perquè es descarten aquells que són innecessaris.

Es pot definir una parella de functors B i Ω , anomenats bar i cobar, que forma una adjunció entre les categories d'opèrades i de coopèrades:

$$\begin{array}{ccc} & \Omega & \\ \text{coOp} & \xrightarrow{\quad} & \text{Op} \\ & \perp & \\ & B & \end{array}$$

De fet, hi ha bijeccions naturals

$$\text{Hom}_{\text{Op}}(\Omega C, P) \cong \text{Tw}(C, P) \cong \text{Hom}_{\text{coOp}}(C, BP),$$

on $\text{Tw}(C, P)$ és l'espai dels **morfismes de torsió** entre C i P . Un morfisme de torsió entre una coopèrada i una opèrada és una aplicació lineal equivariant de grau -1 que satisfà certes equacions.

Resulta que la counitat $\varepsilon : \Omega B \rightarrow \text{id}_{\text{Op}}$ de l'adjunció dóna, per cada opèrada P , un quasi-isomorfisme $\varepsilon_P : \Omega BP \xrightarrow{\sim} P$. A més, de la construcció de Ω se segueix que ΩBP és quasi-lliure. Consegüentment aquesta parella de functors resol el problema de codificar P -àlgebres llevat d'homotopia. En particular, l'opèrada descrita anteriorment és ΩBP per $P = Ass$, tal com suggereix la notació. Més en general es poden estudiar les resolucions quasi-lliures de la forma $\Omega C \xrightarrow{\sim} P$, per alguna coopèrada C . En són casos particulars la **resolució bar-cobar** (si $C = BP$) i la **resolució de Koszul** (si C és la coopèrada dual de Koszul P^i , sempre que P sigui una **opèrada de Koszul**).

La categoria de ΩC -àlgebres (i de P -àlgebres) $\mathbf{Alg}_{\Omega C}$ es pot incloure dins d'una categoria més gran $\infty \mathbf{Alg}_{\Omega C}$. Els objectes són els mateixos, les ΩC -àlgebres, però els morfismes són els anomenats ∞ -morfismes. Si (A, d_A, α) i (B, d_B, β) són dues ΩC -àlgebres, un ∞ -**morfisme** entre elles és una aplicació lineal equivariant $f : C \rightarrow \text{End}_B^A$ que satisfà certes equacions, on

$$\text{End}_B^A(n) := \text{Hom}_{\mathbb{K}, \text{equiv.}}(A^{\otimes n}, B).$$

Com que les coopèrades tenen una unitat $\text{id} \in C(1)$, tot ∞ -morfisme consta d'una aplicació lineal $f(\text{id}) : A \rightarrow B$. És convenient pensar que un ∞ -morfisme és una aplicació lineal $f(\text{id}) : A \rightarrow B$ que commuta amb l'estructura de ΩC -àlgebra llevat d'homotopia, i aquestes homotopies venen donades per $\bar{f} : \bar{C} \rightarrow \text{End}_B^A$. En particular, com que tot morfisme de ΩC -àlgebres f commuta amb l'estructura de ΩC -àlgebra, $f \oplus 0 : \mathbb{K}\text{id} \oplus \bar{C} \rightarrow \text{End}_B^A$ és un ∞ -morfisme. Per tant, hi ha una inclusió de categories $\mathbf{Alg}_{\Omega C} \subseteq \infty \mathbf{Alg}_{\Omega C}$.

Els ∞ -morfismes es poden denotar per $(A, d_A, \alpha) \rightsquigarrow (B, d_B, \beta)$. Són especialment útils per les propietats que tenen:

- Els isomorfismes en la categoria $\infty \mathbf{Alg}_{\Omega C}$ són els ∞ -morfismes tals que $f(\text{id})$ és un isomorfisme. S'anomenen ∞ -**isomorfismes**.

- Els ∞ -**quasi-isomorfismes** són els ∞ -morfismes tals que $f(\text{id})$ és un quasi-isomorfisme. Els ∞ -quasi-isomorfismes són invertibles llevat d'homotopia, i existeix un ∞ -quasi-isomorfisme entre dues àlgebres si, i només si, són quasi-isomorfes.

La segona propietat és molt útil. Clàssicament, per a comprovar que dues àlgebres són quasi-isomorfes cal construir una ziga-zaga de quasi-isomorfismes, que a priori no se sap ni quina longitud ha de tenir. Amb els ∞ -quasi-isomorfismes no cal passar per cap àlgebra intermitja.

Les resolucions quasi-lliures de la forma $\Omega C \xrightarrow{\sim} P$ també són útils perquè el Teorema de Transferència Homotòpica és aplicable. Aquest teorema té lloc quan hi ha un retracte de deformació del complex de cadenes, com podria ser la seva homologia (amb diferencial nul·la). El que diu és que tota estructura d'àlgebra llevat d'homotopia n'indueix una d'equivalent (quasi-isomorfa) en cadascun dels seus retractes de deformació.

Definició 2.4. *Un **retracte de deformació** d'un complex de cadenes (A, d) és un complex de cadenes (H, d') juntament amb morfismes de complexos $i : H \rightarrow A$, $p : A \rightarrow H$ i una aplicació lineal (de grau 1) $h : A \rightarrow A$,*

$$h \begin{pmatrix} \curvearrowright \\ (A, d) \end{pmatrix} \begin{matrix} \xleftarrow{p} \\ \xrightarrow{i} \end{matrix} (H, d') ,$$

que satisfan

$$pi = id_H, \quad id_A - ip = dh + hd.$$

Gràcies a l'adjunció bar-cobar, una estructura de ΩC -àlgebra $\alpha : \Omega C \rightarrow \text{End}_A$ és el mateix que un morfisme de coopèrades $\alpha : C \rightarrow B\text{End}_A$, que es denota amb el mateix símbol. El següent resultat és clau pel Teorema de Transferència Homotòpica:

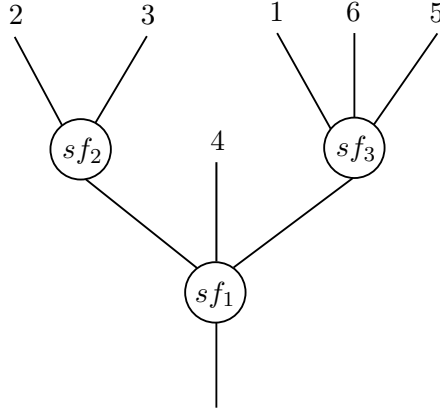
Teorema 2.5 ([22], Theorem 5.2). *Segui (H, d') un reducte de deformació de (A, d) . Existeix un quasi-isomorfisme de coopèrades*

$$HTT : B\text{End}_A \rightarrow B\text{End}_H.$$

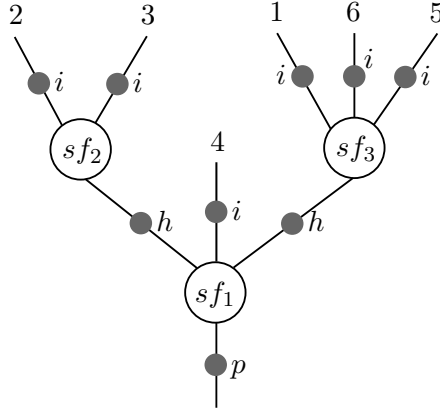
Els elements de $B\text{End}_A$ i $B\text{End}_H$ es poden pensar com arbres amb els vèrtexs decorats linealment i coherent per elements de $\overline{s\text{End}_A}$ (o $\overline{s\text{End}_H}$) i amb les fulles numerades. Com que $B\text{End}_H$ és una coopèrada quasi-colliure amb cogeneradors $\overline{s\text{End}_H}$, el morfisme HTT està unívocament determinat per la seva composició amb la projecció a l'espai de cogeneradors,

$$B\text{End}_A \xrightarrow{\text{HTT}} B\text{End}_H \longrightarrow \overline{s\text{End}_H}.$$

Donat un arbre de $B\text{End}_A$, el que fa aquesta aplicació és decorar les fulles amb i , el tronc amb p i les arestes interiors amb h , i llavors compondre l'arbre resultant (amb els ornaments de les arestes inclosos). Per exemple, si $f_1, f_3 \in \text{End}_A(3)$, $f_2 \in \text{End}_A(2)$, la imatge de



és l'element de $\overline{s\text{End}_H}$ que s'obté de compondre l'arbre



D'aquesta forma l'estructura $\alpha : C \rightarrow B\text{End}_A$ indueix una estructura $\alpha^{\text{HTT}} : C \rightarrow B\text{End}_A \rightarrow B\text{End}_H$ de ΩC -àlgebra en el retractor de deformació. Es pot demostrar també que $i : H \rightarrow A$ estén a un ∞ -quasi-isomorfisme i_∞ entre $(H, d', \alpha^{\text{HTT}})$ i (A, d, α) . A més, si el retractor satisfà les **condicions de contorn** (és a dir, $hi = 0$, $ph = 0$ i $h^2 = 0$), p també estén a un ∞ -quasi-isomorfisme p_∞ .

3 Àlgebres hipercommutatives i de Batalin-Vilkovisky

En aquesta secció s'introdueixen les protagonistes d'aquesta història, les àlgebres de Batalin-Vilkovisky i les àlgebres hipercommutatives, i es complementen amb un seguit d'exemples provinents de la geometria diferencial. Com que la motivació és geomètrica, en tota la secció s'utilitza el conveni cohomològic.

3.1 Protagonistes

A continuació es defineixen les àlgebres de Batalin-Vilkovisky, que són una estructura algebraica que apareix de forma natural en geometria diferencial i complexa, topologia algebraica i física matemàtica. Una àlgebra de Batalin-Vilkovisky és una àlgebra diferencial graduada-commutativa amb un operador diferencial addicional Δ , que la seva obstrucció per ser una derivació és una derivació. Quan aquest operador és indetectable des d'un punt de vista homotòpic, un resultat de Khoroshkin, Markarian i Shadrin ([12]) revela que, de fet, hi ha una estructura d'àlgebra hipercommutativa. També es donen la definició i algunes propietats d'aquest tipus d'àlgebra.

Definició 3.1. *Una estructura d'àlgebra de Batalin-Vilkovisky (abreujat com àlgebra BV) en un complex de cocadenes (A, d) consisteix en:*

- *Un producte bilineal $m_2 : A \otimes A \rightarrow A$ de grau zero, graduat-commutatiu, associatiu i tal que*

$$dm_2(x, y) = m_2(dx, y) + (-1)^{|x|}m_2(x, dy), \quad x, y \in A.$$

Aquest producte també es denota per $x \cdot y = m_2(x, y)$.

- *Un operador lineal $\Delta : A \rightarrow A$ de grau -1 que satisfà $\Delta^2 = 0$ i $d\Delta = -\Delta d$.*

Cal que el claudàtor $[-, -] : A \otimes A \rightarrow A$ definit per

$$[x, y] := (-1)^{|x|}(\Delta(x \cdot y) - \Delta(x) \cdot y - (-1)^{|x|}x \cdot \Delta(y))$$

sigui graduat-anticommutatiu, satisfaci l'equació graduada de Jacobi i $[x, -]$ sigui una derivació de grau $|x| - 1$ respecte del producte:

$$[x, y \cdot z] = [x, y] \cdot z + (-1)^{(|x|-1) \cdot |y|}y \cdot [x, z], \quad x, y, z \in A.$$

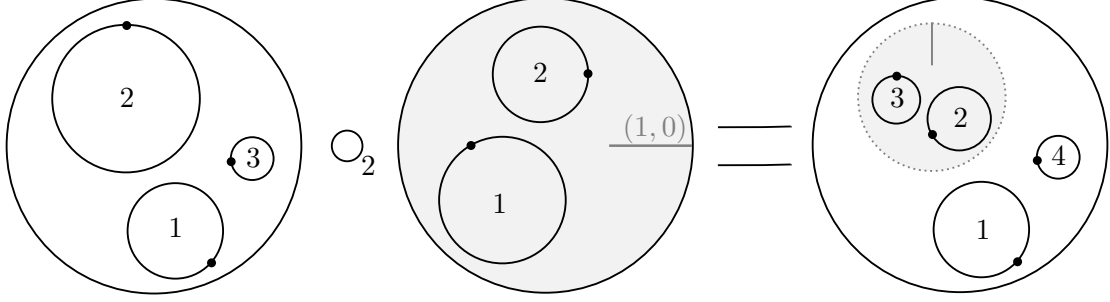
En general, una àlgebra BV s'escriu com $(A, d, \cdot, \Delta)$. Hi ha una opèrada que codifica les àlgebres de Batalin-Vilkovisky, i es denota per BV.

Intuïtivament, el que fa el claudàtor $[-, -]$ és mesurar quant falla Δ en ser una derivació respecte del producte. Si $[-, -] = 0$ aleshores $\Delta(x \cdot y) = \Delta(x) \cdot y + (-1)^{|x|}x \cdot \Delta(y)$. Hi ha una altra opèrada, que es denota per BV_1 , que codifica les àlgebres de Batalin-Vilkovisky amb claudàtor nul, és a dir, aquelles on l'operador Δ és una derivació respecte del producte.

L'opèrada BV es pot definir d'una forma més intrínseca. La següent definició es pot trobar a [8].

L'opèrada (topològica) dels discs petits emmarcats, fD_2 , és aquella que té per espai d'operacions n -àries $fD_2(n)$ l'espai de configuració de les unions disjunts de n discs dins del disc unitat, anomenats discs petits. Cadascun d'aquests discs petits és equipat amb un punt marcat a la seva frontera.

La composició parcial $A \circ_i B$ de dues configuracions A i B ve donada per la substitució de l' i -èsim disc petit de A per B , de manera que B és rotat fins que el seu punt $(1, 0)$ encaixa amb el punt marcat de la frontera de l' i -èsim disc petit de A . L'opèrada (algebraica) BV es defineix com la homologia de l'opèrada (topològica) dels discs petits emmarcats, és a dir, $BV(n) = H_*(fD_2(n))$. Un exemple de composició és



A continuació es defineix rigorosament el que significa que l'operador Δ sigui *indetectable des d'un punt de vista homotòpic*, i així s'avança cap a la definició d'àlgebra hipercommutativa.

Definició 3.2. *Si sigui $(A, d, \cdot, \Delta)$ una àlgebra BV . Diem que l'operador Δ és **homotòpicament trivial** si existeix un isomorfisme de complexos de cocadenes*

$$\Phi(z) : (A[[z]], d + z\Delta) \rightarrow (A[[z]], d),$$

on z és un paràmetre formal de grau -2 . Anomenem Φ la **trivialització homotòpica** de Δ .

Com que Φ és un isomorfisme es pot expressar com $\exp(\phi(z))$, on $\phi(z) = \sum_{i \geq 1} \phi_i z^i$, amb cada ϕ_i de grau $-2i$. La condició que $\Phi(z)$ sigui un morfisme de complexos de cocadenes es tradueix en l'equació

$$\exp(-\phi(z))d\exp(\phi(z)) = d + z\Delta.$$

D'aquí es dedueix, igualant els coeficients de les potències z^i , una expressió per la diferencial de cada coeficient ϕ_i en termes de Δ i $\phi_1, \dots, \phi_{i-1}$. Per exemple:

$$d_{\text{End}}\phi_1 = \Delta, \quad d_{\text{End}}\phi_2 = -\frac{1}{2}(\Delta\phi_1 - \phi_1\Delta), \quad \dots,$$

on d_{End} denota la diferencial de $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(A, A)$, és a dir, $d_{\text{End}}f = df - (-1)^{|f|}fd$.

Això defineix una opèrada $BV/\Delta := BV[\phi_1, \phi_2, \dots]$, on la diferencial de cada generador ϕ_i ve determinada per les fórmules anteriors.

Intuïtivament el que es fa és eliminar la classe de Δ en cohomologia. Quan s'afegeix un generador ϕ_1 tal que $d_{\text{End}}\phi_1 = \Delta$ es corre el risc que aparegui un nou cicle, $-\frac{1}{2}(\Delta\phi_1 - \phi_1\Delta)$. Per tant, cal afegir un segon generador ϕ_2 tal que $d_{\text{End}}\phi_2 = -\frac{1}{2}(\Delta\phi_1 - \phi_1\Delta)$. Cal procedir inductivament, ja que cada generador ϕ_n fa aparèixer un nou cicle, que cal ser eliminat per ϕ_{n+1} . És en aquest sentit que l'operador Δ no es pot detectar homotòpicament.

Les àlgebres BV/Δ es denoten per $(A, d, \cdot, \Delta, \{\phi_n\}_n)$. Estan estretament relacionades amb les àlgebres hipercommutatives:

Definició 3.3. Una *àlgebra hipercommutativa* és un complex de cocadenes (A, d) juntament amb operacions graduades-commutatives

$$m_n : A^{\otimes n} \rightarrow A$$

de grau $2(2 - n)$, per $n \geq 2$, tals que $dm_n = m_n d_{A^{\otimes n}}$ i

$$\begin{aligned} & \sum_{S_1 \sqcup S_2 = \{1, \dots, k\}} \pm m_{|S_2|+2}(m_{|S_1|+2}(a, b, x_{S_1}), c, x_{S_2}) = \\ & = \sum_{S_1 \sqcup S_2 = \{1, \dots, k\}} \pm m_{|S_2|+2}(a, m_{|S_1|+2}(b, c, x_{S_1}), x_{S_2}), \end{aligned}$$

on $k \geq 0$, $a, b, c, x_1, \dots, x_k \in A$. Si $S = \{s_1 < s_2 < \dots < s_r\} \subseteq \{1, \dots, k\}$, la notació x_S significa $x_{s_1} \otimes \dots \otimes x_{s_r}$. El símbol $\pm$ denota un signe que depèn de l'ordre de les variables, i es determina amb el conveni de Koszul.

Per exemple, si es pren $k = 0$ s'obté la relació d'associativitat per m_2 ,

$$m_2(m_2(a, b), c) = m_2(a, m_2(b, c)), \quad a, b, c \in A,$$

i amb $k = 1$ es dedueix la relació

$$\begin{aligned} & m_3(m_2(a, b), c, x) + (-1)^{|c||x|} m_2(m_3(a, b, x), c) = \\ & = m_3(a, m_2(b, c), x) + m_2(a, m_3(b, c, x)), \quad a, b, c, x \in A. \end{aligned}$$

Tots aquests generadors i relacions s'empaqueten per formar l'opèrada Hycom. Un resultat de Khoroshkin, Markarian i Shadrin estableix que la teoria d'homotopia de les àlgebres BV/Δ és la mateixa que la teoria d'homotopia de les àlgebres hipercommutatives. De fet, hi ha una forma de construir una àlgebra hipercommutativa a partir d'una àlgebra BV/Δ que és consistent amb aquesta *equivalència de teories d'homotopia*:

Teorema 3.4 ([12], Theorem 1.3). *Existeix un quasi-isomorfisme d'opèrades*

$$\theta : \text{Hycom} \xrightarrow{\sim} BV/\Delta.$$

Això produeix, per cada (A, d, α) àlgebra BV/Δ , on $\alpha : BV/\Delta \rightarrow \text{End}_A$, una àlgebra hipercommutativa $(A, d, \theta^* \alpha)$, on $\theta^* \alpha = \alpha \circ \theta : \text{Hycom} \rightarrow BV/\Delta \rightarrow \text{End}_A$.

A l'article [12], Khoroshkin, Markarian i Shadrin obtenen una fórmula explícita per la imatge de cada generador m_n . Per exemple, la imatge de m_2 és el producte m_2 de BV, i la imatge de m_3 és

$$\begin{aligned} & \phi_1 \circ (m_2 \circ_1 m_2) + m_2 \circ (m_2, \phi_1) + (1 \ 3 \ 2) * (m_2 \circ (m_2, \phi_1)) + (1 \ 2 \ 3) * (m_2 \circ (m_2, \phi_1)) - \\ & - m_2 \circ (\text{id}, \phi_1 \circ m_2) + (1 \ 2) * (m_2 \circ (\text{id}, \phi_1 \circ m_2)) + (1 \ 2 \ 3) * (m_2 \circ (\text{id}, \phi_1 \circ m_2)). \end{aligned}$$

A l'article [5], Dotsenko, Shadrin i Vallette proporcionen una recepta per trobar solucions del sistema d'equacions que defineix ϕ ; és a dir, per trobar trivialitzacions homotòpiques i, per tant, estructures d'àlgebra hipercommutativa. Cada retracte de deformació que reflecteix la trivialitat de l'operador Δ produeix una solució d'aquest estil.

Si (A, d, m_2, Δ) és una àlgebra BV amb l'operador Δ homotòpicament trivial i (H, d') és un retractor de deformació del complex de cocadenes (A, d) que satisfà les **condicions de degeneració de Hodge-de Rham**

$$p(\Delta h)^k \Delta i = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

les fórmules

$$(\phi_n)_R := \frac{(h\Delta)^n}{n} - n \sum_{\ell=1}^n \frac{(h\Delta)^{\ell-1} i p(\Delta h)^{n-\ell+1}}{\ell}$$

així defineixen una estructura $(A, d, \cdot, \Delta, \{(\phi_n)_R\}_n)$ d'àlgebra BV/ Δ i, per tant, una estructura d'àlgebra hipercommutativa en (A, d) .

De fet, en virtut del següent resultat, no cal demanar aquestes condicions de degeneració ja que són automàticament certes:

Proposició 3.5 ([5], Remarks 2.2). *Si $(A, d, \cdot, \Delta)$ és una àlgebra BV amb l'operador Δ homotòpicament trivial, tot retractor de deformació de (A, d) satisfà les condicions de degeneració de Hodge-de Rham.*

Hi ha més maneres de definir el concepte d'àlgebra hipercommutativa. A continuació se n'exposen dues, que es poden consultar a [12]. La primera definició és una reformulació de les relacions que han de satisfer les operacions m_n . Resulta molt convenient per relacionar aquesta estructura algebraica amb les varietats formals de Frobenius ([17]).

Resulta que les relacions descrites anteriorment per les operacions m_n són equivalents a demanar que els productes definits com

$$m_x(a, b) := \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} m_{n+2}(a, b, x, \dots, x)$$

siguin associatius per cada $x \in A$.

Per altra banda, com en el cas de l'opèrada BV hi ha una definició més intrínseca de Hycom.

Sigui $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ l'espai de moduli de les corbes algebraiques complexes, de gènere 0 i estables, amb n punts diferents (dos a dos) numerats per $\{0, \dots, n-1\}$. Es diu que una corba és estable si les seves úniques singularitats són punts dobles ordinaris, i el seu grup d'automorfismes és finit.

Es pot definir una composició parcial $\circ_i : \overline{\mathcal{M}}_{0,n_1} \times \overline{\mathcal{M}}_{0,n_2} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{0,n_1+n_2-1}$ que dota $\{\overline{\mathcal{M}}_{0,n}\}_{n \geq 1}$ d'una estructura d'opèrada topològica. Si $C \in \overline{\mathcal{M}}_{0,n_1}$ i $C' \in \overline{\mathcal{M}}_{0,n_2}$, la composició $C \circ_i C'$ consisteix en enganxar el 0-èsim punt marcat de C' en l' i -èsim punt marcat de C , i aleshores es renumeren els punts marcats de la forma adequada. La seva cohomologia $\{H^*(\overline{\mathcal{M}}_{0,n+1})\}_{n \geq 2}$ és una opèrada (algebraica), que es defineix com l'opèrada hipercommutativa. En particular, la classe de cohomologia del cicle fonamental $[\overline{\mathcal{M}}_{0,n+1}] \in H^*(\overline{\mathcal{M}}_{0,n+1})$ es correspon amb l'operació m_n definida anteriorment.

3.2 Estructures algebraiques a la natura

En aquest apartat s'exposen alguns exemples d'àlgebra BV, tots ells provinents de la geometria riemanniana, i es promouen a àlgebres hipercommutatives mitjançant retractes de deformació canònics.

També hi ha un reguitzell d'exemples provinents de la geometria complexa. Senzillament cal utilitzar la versió complexa del retractor de deformació canònic. Tant els exemples complexos com els reals es poden trobar a l'article [4], amb molta generalitat.

3.2.1 Retractes de deformació canònics

A continuació es descriu la construcció d'un retractor de deformació canònic de l'àlgebra de De Rham que prové de la teoria de Hodge, i que es pot trobar més detallada a [4] o [23]. Sigui (M, g) una varietat riemanniana de dimensió n , compacta i orientada, amb forma de volum vol . La mètrica g induïx una forma bilineal $\langle -, - \rangle$ en $\mathcal{A}_{\text{dR}}(M)$, l'àlgebra de De Rham de M , que permet definir l'**estrella de Hodge**

$$\star : \mathcal{A}_{\text{dR}}^k(M) \rightarrow \mathcal{A}_{\text{dR}}^{n-k}(M), \quad \text{tal que } \alpha \wedge \star \beta = \langle \alpha, \beta \rangle \text{vol}.$$

Aquesta permet definir el producte escalar

$$(\alpha, \beta) := \int_M \alpha \wedge \star \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathcal{A}_{\text{dR}}^k(M).$$

El **laplacà** (respecte de la diferencial exterior) es defineix per

$$\square_d := dd^* + d^*d : \mathcal{A}_{\text{dR}}^k(M) \rightarrow \mathcal{A}_{\text{dR}}^k(M),$$

on d^* és l'operador adjunt de la diferencial exterior,

$$d^* := (-1)^{n(k+1)+1} \star d \star \quad \text{en } \mathcal{A}_{\text{dR}}^k(M).$$

Les k -formes **harmòniques** són aquelles que pertanyen al nucli de $\square_d$ o, equivalentment, a $\ker d \cap \ker d^*$. L'espai vectorial de k -formes harmòniques es denota per $\mathcal{H}^k(M)$.

Teorema 3.6 (Teorema de Descomposició de Hodge; [23], 6.8). *L'espai de k -formes harmòniques $\mathcal{H}^k(M)$ és de dimensió finita, i hi ha una descomposició ortogonal (respecte del producte escalar definit anteriorment)*

$$\mathcal{A}_{\text{dR}}^k(M) = \mathcal{H}^k(M) \oplus \text{im}(\square_d)^k.$$

D'aquest teorema es pot deduir que l'espai de k -formes harmòniques $\mathcal{H}^k(M)$ és isomorf a la cohomologia k -èsima de De Rham.

L'**operador de Green** $G_d : \mathcal{A}_{\text{dR}}^k(M) \rightarrow \mathcal{A}_{\text{dR}}^k(M)$ es defineix com zero en les formes harmòniques i com la inversa del laplacà en el complementari ortogonal $\text{im}(\square_d)$. Es té el següent resultat:

Proposició 3.7 ([4], Lemma 3.3). *La inclusió $i : \mathcal{H}^k(M) \rightarrow \mathcal{A}_{\text{dR}}^k(M)$, projecció (respecte de la descomposició ortogonal) $p : \mathcal{A}_{\text{dR}}^k(M) \rightarrow \mathcal{H}^k(M)$ i operador $h : \mathcal{A}_{\text{dR}}^k(M) \rightarrow \mathcal{A}_{\text{dR}}^{k-1}(M)$ definit per $h := -d^*G_d$ defineixen un retractor de deformació de $(\mathcal{A}_{\text{dR}}^k(M), d)$. Aquest retractor satisfà, addicionalment, les condicions de contorn:*

$$hi = 0, \quad ph = 0, \quad h^2 = 0.$$

Demostració. La primera part de l'enunciat està demostrada a [4]. Només queden per veure les condicions de contorn.

- $hi = 0$ perquè l'operador de Green s'anul·la en $\mathcal{H}^k(M)$.
- $h^2 = 0$ perquè $h^2 = d^*G_d d^*G_d$ i l'operador de Green commuta amb d^* .
- Per veure que $ph = 0$ cal utilitzar un argument una mica més elaborat. Sigui $x + \square_d(y) \in \mathcal{H}^k(M) \oplus \text{im}(\square_d)^k$. Aleshores

$$ph(x + \square_d(y)) = -pd^*G_d(x + \square_d(y)) = -pd^*(y).$$

Si $\text{im}(d^*) \subseteq \text{im}(\square_d)$ aleshores $ph(x + \square_d(y)) = 0$. Com que la descomposició en suma directa del Teorema de Descomposició de Hodge és ortogonal respecte de $(-, -)$, n'hi ha prou en veure que $\text{im}(d^*)$ és ortogonal a $\mathcal{H}^k(M)$. Sigui $h \in \mathcal{H}^k(M)$. Aleshores

$$(d^*y, h) = (y, dh),$$

ja que d^* és l'operador adjunt de d , i com que $h \in \text{im}(\square_d) = \ker(d) \cap \ker(d^*)$ es dedueix l'ortogonalitat.

□

3.2.2 Varietats simplèctiques

Seguidament s'explica com dotar les varietats simplèctiques d'una estructura d'àlgebra hipercommutativa. Les definicions relatives a la geometria simplèctica es poden trobar en [4] o [24].

Definició 3.8. Una *varietat simplèctica* és una varietat diferenciable M amb una 2-forma $\omega \in \mathcal{A}_{dR}^2(M)$ tancada ($d\omega = 0$) i no-degenerada (si $\omega(X, Y) = 0$ per tota Y , aleshores $X = 0$). La forma ω s'anomena **forma simplèctica**.

Les varietats simplèctiques són sempre de dimensió parell.

Exemple 3.9. L'exemple estàndard de varietat simplèctica és $\mathbb{R}^{2n}$ equipat amb la 2-forma

$$\omega := \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i,$$

on s'utilitzen les coordenades $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ en comptes de $(x_1, \dots, x_{2n})$.

La forma simplèctica defineix un producte escalar $\langle -, - \rangle_\omega$ en $\mathcal{A}_{dR}^1(M)$ definit localment per

$$\langle dx_i, dx_j \rangle_\omega := \omega(x_i, x_j),$$

que estén a una forma bilineal $\langle -, - \rangle_\omega : \mathcal{A}_{dR}^k(M) \otimes \mathcal{A}_{dR}^k(M) \rightarrow \mathbb{R}$ per cada k .

L'estrella de Hodge simplèctica és l'aplicació lineal $\star_\omega : \mathcal{A}_{dR}^k(M) \rightarrow \mathcal{A}_{dR}^{2n-k}(M)$ que satisfà

$$\beta \wedge (\star_\omega \alpha) = \frac{1}{(2n)!} \langle \beta, \alpha \rangle_\omega \omega^n.$$

L'operador de Lefschetz $L : \mathcal{A}_{dR}^k(M) \rightarrow \mathcal{A}_{dR}^{k+2}(M)$ és $L(\eta) := \omega \wedge \eta$, i el seu adjunt és

$$\Lambda = L^* := (-1)^k \star_\omega L \star_\omega \quad \text{en } \mathcal{A}_{dR}^k(M).$$

Amb tot això,

Teorema 3.10 ([21], 2.1; [4], Theorem 4.3). *L'àlgebra de De Rham $\mathcal{A}_{dR}^*(M)$ juntament amb l'operador $\Delta := \Lambda d - d\Lambda$ és una àlgebra de Batalin-Vilkovisky amb l'operador Δ homotòpicament trivial.*

Per tant, si (M, ω) és una varietat simplèctica, compacta i orientada, cada mètrica riemanniana g en M dóna lloc a una àlgebra hipercommutativa. Cal fer notar que no s'està demanant cap tipus de relació entre g i ω .

3.2.3 Varietats de Poisson

Tot seguit s'explica com dotar l'àlgebra de De Rham d'una varietat de Poisson amb l'estructura d'àlgebra hipercommutativa. Per una introducció a les varietats de Poisson es pot consultar [25].

Definició 3.11. *Una varietat de Poisson és una varietat diferenciable M juntament amb un camp bivectorial $\pi \in \Gamma(\Lambda^2 TM)$, anomenat **camp bivectorial de Poisson**, que satisfà $[\pi, \pi] = 0$.*

En aquesta definició $[-, -]$ denota el **claudàtor de Schouten-Nijenhuis**, que és una generalització per camps multivectorials del claudàtor de Lie de camps vectorials. Alternativament, també es pot definir

Definició 3.12. *Una varietat de Poisson és una varietat diferenciable M juntament amb un claudàtor de Lie $\{-, -\} : C^\infty(M) \otimes C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ tal que $\{-, f\}$ és una derivació per cada $f \in C^\infty(M)$. El claudàtor $\{-, -\}$ s'anomena **claudàtor de Poisson**.*

Fixada $g \in C^\infty(M)$, com que $\{-, g\} : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ és una derivació, és un camp vectorial, que es denota per H_g i s'anomena **hamiltonià**. L'equivalència entre les dues definicions ve donada a partir de la igualtat $\{f, g\} = \pi(df, dg)$.

Exemple 3.13. Tota varietat diferenciable és una varietat de Poisson amb el camp bivectorial nul. Per tant, no hi ha cap restricció topològica per les varietats de Poisson.

Exemple 3.14. Tota varietat simplèctica és una varietat de Poisson. En efecte, si (M, ω) és una varietat simplèctica, aleshores $\{f, g\} := \omega(H_f, H_g)$ defineix un claudàtor de Poisson.

Sigui $\iota_\pi : \mathcal{A}_{dR}^k(M) \rightarrow \mathcal{A}_{dR}^{k-2}(M)$, per $k \geq 2$, la **contracció amb el camp bivectorial de Poisson**, és a dir, l'aplicació

$$\iota_\pi : \mathcal{A}_{dR}^k(M) \rightarrow \mathcal{A}_{dR}^{k-2}(M), \quad \iota_\pi(\omega) : X_1 \wedge \cdots \wedge X_{k-2} \mapsto \omega(\pi \wedge X_1 \wedge \cdots \wedge X_{k-2}).$$

Proposició 3.15 ([14]). *L'àlgebra de De Rham $\mathcal{A}_{dR}^*(M)$ d'una varietat de Poisson (M, π) juntament amb l'operador $\Delta := \iota_\pi d - d\iota_\pi$ és una àlgebra de Batalin-Vilkovisky amb l'operador Δ homotòpicament trivial.*

Per tant, com abans, si (M, π) és una varietat de Poisson, compacta i orientada, cada mètrica riemanniana g en M dóna lloc a una àlgebra hipercommutativa. També com abans, no s'està demanant cap relació entre g i π .

Hi ha una altra forma de definir a partir de $(\mathcal{A}_{dR}^*(M), d, \wedge, \Delta)$ una àlgebra hipercommutativa. Resulta que les operacions $\phi_1 := \iota_\pi$ i $\phi_n := 0$ per $n \geq 2$ formen una trivialització homotòpica de Δ , així que $(\mathcal{A}_{dR}^*(M), d, \wedge, \Delta, \{\phi_n\}_n)$ indueix una estructura d'àlgebra hipercommutativa. Aquesta estructura, però, no aporta cap informació addicional ja que, de fet, és trivial llevat de quasi-isomorfisme:

Teorema 3.16 ([9], Corollary 1.6). *L'estructura d'àlgebra hipercommutativa acabada de definir en $(\mathcal{A}_{dR}^*(M), d)$ és quasi-isomorfa a una de trivial (les operacions m_n s'anul·len per tota n).*

3.2.4 Varietats de Kähler

A continuació s'explica el procediment per dotar l'àlgebra de De Rham d'una varietat de Kähler d'una estructura hipercommutativa ([2]). Hi ha dos fets destacables d'aquesta construcció. En primer lloc, l'àlgebra BV obtinguda és una àlgebra BV_1 (és a dir, l'operador Δ és una derivació) i, en segon lloc, la construcció donada per les varietats simplèctiques generalitza aquest cas.

Definició 3.17. *Una **varietat de Kähler** és una varietat simplèctica (M, ω) amb una estructura quasi-complexa integrable $J : TM \rightarrow TM$ tal que*

$$g(X, Y) := \omega(X, JY)$$

és una mètrica riemanniana en M .

Sigui M una varietat de Kähler compacta. Com que és una varietat complexa, automàticament és orientable. Per tant, fixada una orientació, com que en particular és una varietat simplèctica té associada una àlgebra BV i una d'hipercommutativa.

Es pot comprovar ([4]) que l'operador Δ d'aquesta àlgebra BV és d_c^* (i, per tant, coincideix amb l'estructura definida en [2]), on $d_c = J^{-1}dJ$ i d_c^* és l'operador adjunt

$$d_c^* = - \star d_c \star \quad \text{en } \mathcal{A}_{dR}^k(M).$$

Com que d és una derivació, també ho és $\Delta = d_c^*$, així que $(\mathcal{A}_{dR}^k(M), d, \wedge, d_c^*)$ és, de fet, una àlgebra BV_1 .

4 Problema

En aquesta secció s'explica el problema que he estat treballant durant molt de temps, que tracta de la unicitat de la construcció d'àlgebres hipercommutatives a partir d'àlgebres BV i retractes de deformació. Seguidament, es desenvolupen els diferents intents de resolució, i en tots els casos s'explica per quin motiu no van funcionar. Després, es dóna una demostració d'una versió feble del problema i, finalment, es descriuen les línies d'investigació que encara continuen obertes i que m'agradaria explorar en un futur.

En tota la secció s'utilitza el conveni homològic. En particular, l'operador Δ d'una àlgebra BV és de grau 1 i no -1 .

4.1 Descripció del problema

Sigui $(A, d, \cdot, \Delta)$ una àlgebra BV amb l'operador Δ homotòpicament trivial. És cert que no tot parell $(A, d, \cdot, \Delta, \{\phi_n\}_n)$ i $(A, d, \cdot, \Delta, \{\psi_n\}_n)$ d'àlgebres BV/ Δ que estenen $(A, d, \cdot, \Delta)$ són quasi-isomorfes. En altres paraules, no hi ha una única forma de trivialitzar l'operador Δ . Per exemple:

Exemple 4.1. Sigui $A := \Lambda_{\mathbb{K}}(x, y, z)$ l'àlgebra diferencial graduada-commutativa amb generadors x, y, z de grau -1 i diferencial $dx = dy = 0, dz = xy$. Sigui $\Delta : A \rightarrow A$ l'operador nul de grau 1, és a dir, l'operador $\Delta = 0$. La informació $(A, d, \cdot, \Delta)$ defineix una àlgebra BV.

A continuació es defineixen dues trivialitzacions homotòpiques $\{\phi_n\}_n$ i $\{\psi_n\}_n$ de Δ tals que $(A, d, \cdot, \Delta, \{\phi_n\}_n)$ i $(A, d, \cdot, \Delta, \{\psi_n\}_n)$ no són quasi-isomorfes. Una observació és que, com que la diferencial de ϕ_n (i ψ_n) per $n \geq 2$ és múltiple de Δ , es pot prendre $\phi_n = \psi_n = 0$ per $n \geq 2$. Per tant, només cal determinar ϕ_1 i ψ_1 . Aquestes es defineixen per $\phi_1 = 0$ i

$$\psi_1(1) = \psi_1(x) = \psi_1(y) = \psi_1(z) = \psi_1(xy) = \psi_1(yz) = \psi_1(xyz) = 0, \quad \psi_1(xz) = 1.$$

Es pot comprovar que $\{\phi_n\}_n$ i $\{\psi_n\}_n$ doten $(A, d, \cdot, \Delta)$ d'estructures d'àlgebra BV/ Δ . L'operador ϕ_1 induïx l'endomorfisme nul en cohomologia, mentre que ψ_1 induïx

$$\psi_1^*([1]) = \psi_1^*([x]) = \psi_1^*([y]) = \psi_1^*([yz]) = \psi_1^*([xyz]) = 0, \quad \psi_1^*([xz]) = 1,$$

fet que impedeix que $(A, d, \cdot, \Delta, \{\phi_n\}_n)$ i $(A, d, \cdot, \Delta, \{\psi_n\}_n)$ siguin quasi-isomorfes.

És natural preguntar-se si s'obtenen àlgebres BV/ Δ quasi-isomorfes quan ambdues trivialitzacions homotòpiques provenen de retractes de deformació. De fet, en l'exemple anterior, si R és un retractor de deformació, com que $(\phi_n)_R$ és múltiple de Δ automàticament es té que $(\phi_n)_R = 0$ i, per tant, el problema té solució positiva. Es pot formular com:

Problema. Sigui $(A, d, \cdot, \Delta)$ una àlgebra BV amb l'operador Δ homotòpicament trivial, i siguin R i S dos retractes de deformació de (A, d) . És cert que les àlgebres BV/ Δ (equivalentment, les àlgebres hipercommutatives associades)

$$(A, d, \cdot, \Delta, \{(\phi_n)_R\}_n) \quad \text{i} \quad (A, d, \cdot, \Delta, \{(\phi_n)_S\}_n)$$

són quasi-isomorfes?

És un problema que neix d'una pregunta que li va sorgir a la Joana Cirici quan preparava l'article [3].

4.2 Intents de resolució

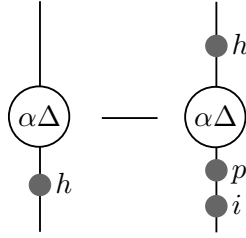
A continuació s'explica, en primera persona, l'odissea que he dut a terme per a trobar, finalment, una resolució parcial del problema.

Quan a una assignatura del grau es planteja un problema no hi acostumen a haver gaires graus de llibertat. Generalment se sap quines eines utilitzar i que té solució. Per contra, quan la Joana em va plantejar aquest problema no sabia ni per on començar. Com que es tracta de provar que dues àlgebres són quasi-isomorfes, el que se'm va acudir és donar un ∞ -quasi-isomorfisme explícit. Em vaig aferrar a aquesta idea i li vaig donar tantes voltes com vaig poder. Clar que aquest concepte, a priori, no està ni ben definit, ja que no és evident que es pugui parlar d' ∞ -morfismes d'àlgebres BV/Δ . Aquest entrebanc no el vaig constatar, malauradament, fins al cap d'uns quants mesos de començar.

En cap dels intents que segueixen a continuació coneixia el resultat de la Proposició 3.5. És per aquest motiu que en tots ells apareix la hipòtesi addicional que els retractes de deformació han de satisfer les condicions de degeneració de Hodge-de Rham.

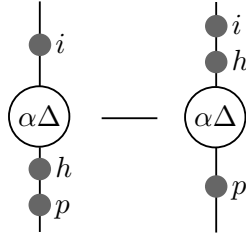
4.2.1 Operació auxiliar

El primer intent amb una mica de coherència que vaig fer va ser considerar una operació auxiliar. Sigui (A, d, α) una àlgebra BV amb un retractor de deformació $R = (H, i, p, h)$ que satisfà les condicions de degeneració de Hodge-de Rham. L'operació $\alpha(\phi_1)$ que defineix el retractor, també denotada $(\phi_1)_R$, es pot representar amb l'arbre:



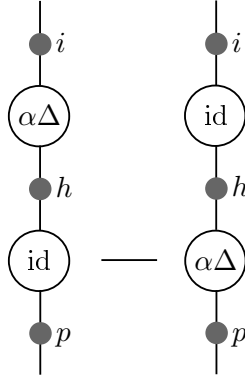
En aquest diagrama $\alpha\Delta$ denota $\alpha(\Delta)$.

La fórmula del Teorema de Transferència Homotòpica per l'operació transferida en el retractor, $\alpha^{\text{HTT}}(\phi_1)$, és



Cal notar que, en l'operació de la dreta, a l'aresta de sota de $\alpha(\Delta)$ hi apareixia la composició pip , que ha estat substituïda per p perquè $pi = \text{id}$.

Aquesta operació és la mateixa que



Vista així dona peu a pensar-la com el resultat d'aplicar el Teorema de Transferència Homotòpica a la $BV^\square$ -àlgebra $(A, d, (\alpha, \text{id}))$. Aquí $BV^\square$ denota l'opèrada $BV * T(\square)$, amb l'operació auxiliar $\square$ d'aritat 1, grau 0 i diferencial nul·la.

Un cop feta aquesta observació l'objectiu era demostrar l' ∞ -quasi-isomorfisme del problema com un corol·lari del Teorema de Transferència Homotòpica per àlgebres $BV^\square$. Malauradament no ho vaig aconseguir. El motiu és que no vaig saber relacionar totes les operacions presents en $(BV/\Delta)_\infty$ amb aquelles de $(BV^\square)_\infty$. Vaig abandonar aquesta via per obrir nous camins.

4.2.2 Condicions de contorn

Més endavant em vaig restringir als retractes de deformació que satisfan les condicions de contorn. Això va ser fruit d'una observació esperançadora: sota aquesta hipòtesi la fórmula per $(\phi_n)_R^{\text{HTT}}$ del Teorema de Transferència Homotòpica dona

$$(\phi_n)_R^{\text{HTT}} = p \left(\frac{(h\Delta)^n}{n} - n \sum_{\ell=1}^n \frac{(h\Delta)^{\ell-1} i p (\Delta h)^{n-\ell+1}}{\ell} \right) i = 0.$$

El motiu pel qual s'anul·la és que en cadascun dels termes de l'expressió de $(\phi_n)_R^{\text{HTT}}$, o bé a l'esquerra o bé a la dreta, hi apareix h , que dona zero quan es compon amb p ó i de l'exterior dels parèntesis.

El que és interessant d'aquesta observació és que permet passar d'una fórmula explícita (i complicada) per l'operació ϕ_n , a l'anul·lació d'unes certes operacions, que sembla més tractable. Cal remarcar que la condició que $(\phi_n)_R^{\text{HTT}} = 0$ per tota n no implica, a priori, que l'estructura d'àlgebra BV/Δ provengui d'un retractor.

No vaig saber com seguir per aquest camí. Un motiu d'aquesta desorientació era, de ben segur, que estava utilitzant una noció de ∞ -quasi-isomorfisme mal definida.

4.2.3 Inducció i factorització

L'estiu passat em vaig restringir a l'opèrada $BV[\phi_1]$ en comptes de BV/Δ . Això vol dir limitar-se a comprovar que l'operació ϕ_1 es manté invariant (llevat de quasi-isomorfisme) quan el retractor de deformació varia. El motiu d'aquesta reducció és el següent. Jo pensava que el resultat podia provar-se per casos més generals.

Sigui P una opèrada, i $p \in P$ un cicle que no és vora. Podem construir l'opèrada $P[q] := P *_{\tau} T(q)$, amb $\tau(q) := p$. Aquesta notació significa l'opèrada $P * T(q)$ amb la

diferencial estenent aquella de P segons τ , és a dir, $d(q) = \tau(q) = p$ i $d|_P = d_P$. Es pot pensar com un anàleg de les extensions de Koszul-Sullivan. Si (A, d, α) és una P -àlgebra i $R = (H, \iota, \rho, h)$ és un retractor de deformació que satisfà $\rho\alpha(p)\iota = 0$ (la primera condició de degeneració de Hodge-de Rham), aleshores

$$q_A := h\alpha(p) + (-1)^{|p|}\iota\rho\alpha(p)h$$

satisfà $dq_A = \alpha(p)$. Per tant, $(A, d, (\alpha, q_A))$ és una $P[q]$ -àlgebra.

Volia veure que, donades dues P -àlgebres i un retractor de deformació en cadascuna d'elles (amb la primera condició de degeneració), tot (o algun) ∞ -quasi-isomorfisme entre les P -àlgebres induiria un ∞ -quasi-isomorfisme entre les $P[q]$ -àlgebres. Si això fos cert, es podrien aixecar ∞ -quasi-isomorfismes inductivament entre les àlgebres sobre BV , $BV[\phi_1]$, $BV[\phi_1, \phi_2]$, etcètera. El cas de BV/Δ caldria estudiar-lo amb una mica més de compte (caldria veure si aquests ∞ -quasi-isomorfismes construïts inductivament *enganyen bé*).

Un pas important que vaig fer va ser comprovar que, si tenim dos retractes $R = (H, h_R, i, p)$ i $S = (H, h_S, i, p)$, les estructures induïdes de $P[q]$ -àlgebra mitjançant la fórmula donada anteriorment són quasi-isomorfes. Això em va permetre variar la h dels retractes de deformació i escollir-la de manera que se satisfessin les condicions de contorn que, tal com havia vist anteriorment, fan que $q_A^{\text{HTT}} = 0$. Aquest pas va ser motivador, ja que va ser la primera vegada que vaig tenir la sensació d'avançar.

Sota aquesta suposició addicional, per a demostrar que els ∞ -quasi-isomorfismes s'aixequen de P -àlgebres a $P[q]$ -àlgebres l'estratègia consistia a aixecar-los a través del morfisme d'opèrades $\pi : P[q]_\infty \rightarrow P_\infty$ que és la identitat en $P_\infty \subseteq P[q]_\infty$ i anul·la q . Això té sentit si tenim en compte que estem en un retractor de deformació amb condicions de contorn i, arran de l'observació anterior, $(\alpha, q_A)^{\text{HTT}}$ factoritza a través de π . Malauradament apareixen dos problemes. En primer lloc, aquest morfisme d'opèrades no preserva la diferencial, ja que $d\pi(q) = d(0) = 0$ mentre que $\pi(dq) = \pi(p) = p$. A més, els ∞ -quasi-isomorfismes de P_∞ -àlgebres i $P[q]_\infty$ -àlgebres no estan ben definits.

En tots els intents que segueixen a continuació se suposa que els retractes $R = (H, i, p, h)$ satisfan les condicions de contorn $hi = 0$, $ph = 0$ i $h^2 = 0$.

4.2.4 Generalització de la teoria de Koszul

Va ser després d'una reunió amb la Joana que em vaig adonar, finalment, del motiu pel qual gran part del que havia fet fins el moment era incorrecte. Bé, incorrecte des d'un punt de vista materialista, perquè sí que és cert que algunes de les idees han transcendit i les he recuperat més endavant.

El problema és que durant tot aquell temps havia utilitzat el llibre de Loday i Vallette, [15], que desenvolupa mètodes per opèrades Koszul, però BV/Δ no ho és (en particular perquè no té diferencial nul·la). Arribats en aquest punt vaig intentar resseguir totes les demostracions rellevants del llibre per a entendre quines hipòtesis s'utilitzaven en cada punt.

També vaig donar una demostració -possiblement errònia- del problema per l'opèrada $BV[\phi_1]$ en comptes de BV/Δ . Consistia en dos passos: en primer lloc, trobar una resolució de $BV[\phi_1]$ i deduir una obstrucció pel problema i, en segon lloc, veure que aquesta obstrucció era nul·la.

Pel primer pas, el que vaig fer va ser imitar, amb molt de compte, la construcció de

la coopèrada dual de Koszul de BV donada a [7] (en el context quadràtic-lineal). Vaig obtenir, com a resolució quasi-lliure de $BV[\phi_1]$, l'opèrada $BV_\infty[\phi_1]$, és a dir, l'opèrada BV_∞ (definida a [7]) juntament amb un generador ϕ_1 amb diferencial Δ .

Amb aquesta resolució vaig trobar que un ∞ -morfisme f d'àlgebres BV_∞ s'aixeca a un ∞ -morfisme entre les respectives àlgebres $BV[\phi_1]_\infty$ associades als retractes si, i només si, $f(s\Delta) = 0$. Jugant amb les relacions explícites de l'opèrada BV vaig aconseguir trobar un ∞ -quasi-isomorfisme f que s'aixecava.

Això no és del tot cert, ja que van aparèixer dues restriccions. En primer lloc, havia de demanar que les dues àlgebres BV inicials coincidissin, ja que l' ∞ -quasi-isomorfisme que s'aixecava el construïa a partir de la identitat. Per altra banda, no podia treballar en l'opèrada $BV[\phi_1]$ sinó en $BV_1[\phi_1]$, és a dir, en aquelles àlgebres on l'operador Δ era una derivació. El motiu és que en l'opèrada $BV[\phi_1]$ les relacions es complicaven bastant i no sabia veure que $f(s\Delta) = 0$. Més endavant vaig superar aquest entrebanc.

4.2.5 Adjunció entre les categories d'àlgebres

El pas on fallava l'argument de factorització era que el morfisme $\pi : BV[\phi_1]_\infty \rightarrow BV_\infty$, que enviava $\phi_1 \mapsto 0$, no respectava l'estructura diferencial. Aquí BV_∞ denota l'opèrada definida a [7], i $BV[\phi_1]_\infty$ pot denotar la resolució bar-cobar de $BV[\phi_1]$ o la definida a l'intent anterior $BV_\infty[\phi_1]$.

En el fons, el que buscava era un functor $\mathbf{Alg}_{BV_\infty} \rightarrow \mathbf{Alg}_{BV[\phi_1]_\infty}$ que tingués propietats bones: que l'àlgebra $BV[\phi_1]$ induïda en un retractor de deformació R amb la primera condició de degeneració de Hodge-de Rham fos a la imatge del functor.

Un candidat obvi és el functor $\iota_!$ proporcionat per l'adjunció

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\iota^*} & \\ \mathbf{Alg}_{BV[\phi_1]_\infty} & \begin{array}{c} \perp \\ \xleftarrow{\iota_!} \end{array} & \mathbf{Alg}_{BV_\infty} \end{array}$$

que prové del morfisme d'opèrades $\iota : BV_\infty \rightarrow BV[\phi_1]_\infty$.

Durant dues o tres setmanes em vaig endinsar en la selva de l'àlgebra homològica i les propietats universals, amb el propòsit de posar de manifest una pressumpta relació entre l'estructura d'àlgebra $BV[\phi_1]_\infty$ en el retractor i la imatge sota $\iota_!$ de l'àlgebra original. Finalment, malgrat la severa desorientació que patia, vaig aconseguir sortir-ne... però amb les mans buides. No és un camí que descarti que pugui funcionar, però cal anar-hi amb el calçat adient.

4.2.6 Resolució de l'opèrada de morfismes

Arribats en aquest punt ja tenia certa idea de com era la resolució de $BV[\phi_1]$. Estava treballant amb successions espectrals quan vaig recordar l'article [18]. Després de rellegir-lo se'm va acudir una nova manera d'enfocar el problema.

En aquest article es defineix, per cada opèrada P , una opèrada pintada $P_{\bullet \rightarrow \bullet}$. Una àlgebra sobre $P_{\bullet \rightarrow \bullet}$ consisteix en dues P -àlgebres A, B i un morfisme $f : A \rightarrow B$ de P -àlgebres. Per tant, és natural definir un ∞ -morfisme de P -àlgebres (o P_∞ -àlgebres) com una àlgebra sobre una resolució $(P_{\bullet \rightarrow \bullet})_\infty$ de $P_{\bullet \rightarrow \bullet}$.

Amb aquest nou formalisme vaig construir una nova demostració, on recuperava la mateixa obstrucció que ja havia trobat. A més, també vaig generalitzar la demostració que aquesta obstrucció s'anul·lava per totes les àlgebres, i no només aquelles que l'operador Δ era una derivació.

El problema va ser la demostració d'un dels passos, que requeria utilitzar successions espectrals i que no vaig saber dur a bon port.

4.2.7 Factorització revisitada

Sempre havia pensat que l'argument de la factorització hauria de funcionar, ja que és una forma molt polida i conceptual d'expressar que l'operació $(\phi_1)_R^{\text{HTT}}$ s'anul·la. El problema encara era que el morfisme $\pi : \text{BV}[\phi_1]_\infty \rightarrow \text{BV}_\infty$ que envia $\phi_1 \mapsto 0$ no respecta la diferencial. Un estudi una mica més detallat revela que la imatge de $d\pi - \pi d$ està continguda en l'ideal operàdic de BV_∞ generat per Δ . Per tant, si componem π amb la projecció $\text{BV}_\infty \rightarrow \text{BV}_\infty/(\Delta)$ sí que obtenim un morfisme d'opèrades que respecta la diferencial:

$$\text{BV}[\phi_1]_\infty \xrightarrow{\pi} \text{BV}_\infty \rightarrow \frac{\text{BV}_\infty}{(\Delta)}.$$

Com que l'àlgebra $\text{BV}[\phi_1]_\infty$ induïda en el retracte encara factoritza per aquest nou morfisme, ja que el seu operador Δ s'anul·la (per la primera condició de Hodge-de Rham), obtenim un diagrama commutatiu

$$\begin{array}{ccccc} \text{BV}[\phi_1]_\infty & \xrightarrow{\quad} & \frac{\text{BV}_\infty}{(\Delta)} & \xleftarrow{\quad} & \text{BV}_\infty \\ & \searrow (\alpha_R, (\phi_1)_R^{\text{HTT}}) & \downarrow \text{---} & \swarrow \alpha_R & \\ & & \text{End}_H & & \end{array}$$

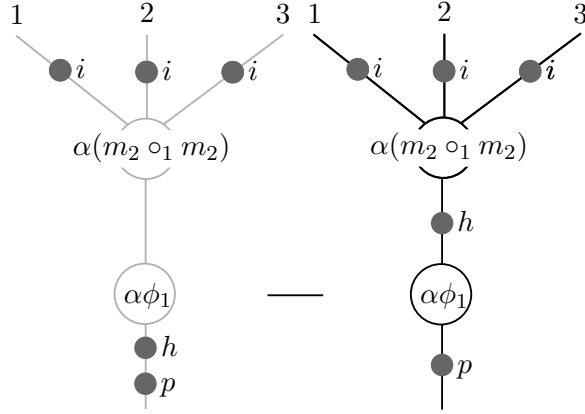
L'obstrucció per aixecar ∞ -morfismes a través de $\text{BV}_\infty \rightarrow \text{BV}_\infty/(\Delta)$ encara és $f(s\Delta) = 0$, així que la demostració trobada anteriorment serveix per a aixecar els ∞ -morfismes d'àlgebres BV_∞ a àlgebres $\text{BV}_\infty/(\Delta)$. Aleshores el functor induït $\infty\mathbf{Alg}_{\text{BV}_\infty/(\Delta)} \rightarrow \infty\mathbf{Alg}_{\text{BV}[\phi]_\infty}$ transporta aquest ∞ -morfisme aixecat a un ∞ -morfisme d'àlgebres $\text{BV}[\phi_1]_\infty$.

Com abans, hi ha un ∞ -quasi-isomorfisme que té l'obstrucció nul·la, així que s'obté una resposta afirmativa del problema (si ens reduïm a l'estudi de $\text{BV}[\phi_1]$).

Una observació important que em va permetre oblidar l'opèrada $(\text{BV}[\phi]_{\bullet \rightarrow \bullet})_\infty$ és que tant $\text{BV}_\infty/(\Delta)$ com $\text{BV}[\phi]_\infty$ són a la imatge del functor cobar. D'aquesta forma hi ha una noció ben definida d' ∞ -morfisme.

4.2.8 Opèrada Hycom

En diferents moments he tingut una altra idea, que no ha triomfat. Suposem que els retractes amb els quals treballem satisfan les condicions de contorn. Es tracta de treballar en l'opèrada Hycom en comptes de BV/Δ . El motiu és que Hycom és una opèrada que satisfà la propietat de ser Koszul, així que hi ha eines més fortes amb les quals treballar. La idea consisteix a seguir el mateix argument que demostra que $\phi_n^{\text{HTT}} = 0$, però malauradament no funciona perquè els termes de $\alpha^{\text{HTT}}(m_n)$ no s'anul·len. Per exemple, el primer terme de $\alpha^{\text{HTT}}(m_3)$ és $p(\alpha(\phi_1) \cdot \alpha(m_2 \circ_1 m_2))i^{\otimes 3}$, que es pot escriure com



i veiem que només s'anul·la la part grisa (per les condicions de contorn).

Per tant, no es pot utilitzar el truc de l'anul·lació de les operacions. Aquest és el motiu principal pel qual treballa amb l'opèrada BV/Δ i no pas amb $Hycom$, encara que $Hycom$ sigui més prestigiosa. De totes maneres, aquesta adversitat no és infranquejable. Es pot intentar trobar una estructura algebraica una mica més fina que $Hycom$ (o $Hycom_\infty$) que codifiqui precisament les $Hycom_\infty$ -àlgebres que s'obtenen del Teorema de Transferència Homotòpica a partir d'un retractive amb condicions de contorn i la fórmula per les $(\phi_n)_R$.

4.3 Demostració

Aquest apartat del treball conté la demostració del problema per la primera operació ϕ_1 , que forma part de l'article que estic escrivint. Com que només s'estudia ϕ_1 , d'ara en endavant es denotarà per ϕ . Que l'estructura d'àlgebra BV/Δ és independent del retractive de deformació és, de moment, un problema obert.

4.3.1 Notació

Si P és una opèrada i $I \subseteq P$ és un ideal operàdic, P/I denota l'opèrada quotient. Si $\{p_i\}_i \subseteq P$ és un conjunt d'operacions, $(\{p_i\}_i)$ denota l'ideal operàdic generat per $\{p_i\}_i$. La notació BV/Δ pot dur a confusió: s'ha d'interpretar com un símbol i no com un quotient, ja que Δ no és un ideal de BV . Per fer referència a l'opèrada quotient de BV per l'ideal generat per $\Delta \in BV$ caldria escriure $BV/(\Delta)$.

Sigui P una opèrada i $\tau : T(\{x_i\}_i) \rightarrow P$ una aplicació lineal equivariant de grau -1 que satisfà $d_P \circ \tau = 0$. Es defineix l'opèrada $P *_\tau T(\{x_i\}_i)$ com $P * T(\{x_i\}_i)$ amb diferencial donada per d_P en P , i τ en els generadors $\{x_i\}_i$. En particular, es defineix $BV[\phi] := BV *_\tau T(\phi)$, on $\tau(\phi) := \Delta$.

En tota la demostració BV_∞ denota la resolució de BV definida en [7]. En particular, $BV_\infty = \Omega(BV^i)$, on BV^i és la coopèrada dual de Koszul de BV (ja que BV és una opèrada de Koszul quadràtica-lineal).

4.3.2 Opèrades

A continuació es defineixen i relacionen totes les opèrades necessàries per a la demostració.

Lema 4.2. *Segui $BV^i \oplus \mathbb{K}s\phi$ la coopèrada que estén BV^i i tal que $s\phi$ té descomposició trivial, diferencial $s\Delta$ i grau homològic 3. El morfisme d'opèrades*

$$\Omega(BV^i \oplus \mathbb{K}s\phi) \cong BV_\infty[\phi] \rightarrow BV[\phi]$$

que restringeix als generadors $s^{-1}\overline{BV^i}$ com $s^{-1}\overline{BV^i} \subseteq BV_\infty \xrightarrow{\sim} BV$ i que envia $s^{-1}s\phi$ a ϕ és un quasi-isomorfisme.

Demostració. Segui $p : BV_\infty \xrightarrow{\sim} BV$. Es té l'isomorfisme d'opèrades

$$\Omega(BV^i \oplus \mathbb{K}s\phi) \xrightarrow{s^{-1}s} \Omega(BV^i) *_\tau T(\phi) = BV_\infty *_\tau T(\phi),$$

on $\tau(\phi) = s^{-1}s\Delta$.

Cal comprovar que $BV[\phi]_\infty = BV_\infty *_\tau T(\phi) \rightarrow BV *_\sigma T(\phi) = BV[\phi]$, on $\sigma(\phi) = \Delta$, és un quasi-isomorfisme. Siguin $\mathcal{F}$ i $\mathcal{F}'$ les filtracions creixents en $BV_\infty *_\tau T(\phi)$ i $BV *_\sigma T(\phi)$ donades pel grau en ϕ . És a dir, $\mathcal{F}_k$ i $\mathcal{F}'_k$ estan generades pels elements de $BV_\infty *_\tau T(\phi)$ i $BV *_\sigma T(\phi)$ de grau $\leq k$ en ϕ .

Les pàgines zero de les successions espectrals associades són $BV_\infty *_\tau T(\phi)$ i $BV *_\sigma T(\phi)$, i el morfisme $p * \text{id}$ induïx un isomorfisme en les primeres pàgines pel Teorema de Künneth. Això implica que $p * \text{id} : BV[\phi]_\infty \rightarrow BV[\phi]$ és un quasi-isomorfisme. $\square$

Lema 4.3. *Segui $s\Delta \in BV^i$. Hi ha un isomorfisme d'opèrades*

$$\frac{BV_\infty}{(\Delta)} \cong \Omega\left(\frac{BV^i}{\mathbb{K}s\Delta}\right).$$

Demostració. Com que $\Delta = s^{-1}s\Delta \in s^{-1}\overline{BV^i}$, és a dir, és un generador de BV_∞ , es té que

$$\frac{BV_\infty}{(\Delta)} = \frac{(T(s^{-1}\overline{BV^i}), d_1 + d_2)}{(\Delta)} = \left(T\left(s^{-1}\frac{\overline{BV^i}}{\mathbb{K}s\Delta}\right), [d_1 + d_2]\right).$$

La diferencial $[d_1 + d_2]$ coincideix amb la diferencial de la construcció cobar en la coopèrada quocient $BV^i/\mathbb{K}s\Delta$. Això és perquè tant la descomposició com la diferencial interna de $BV^i/\mathbb{K}s\Delta$ s'obtenen pel pas al quocient. Per tant, es dedueix que

$$\left(T\left(s^{-1}\frac{\overline{BV^i}}{\mathbb{K}s\Delta}\right), [d_1 + d_2]\right) = \Omega\left(\frac{BV^i}{\mathbb{K}s\Delta}\right).$$

$\square$

Definició 4.4. *Es defineixen els següents morfismes d'opèrades:*

- $\Phi : BV[\phi]_\infty \rightarrow BV_\infty/(\Delta)$ és el morfisme d'opèrades $\Omega(\Phi_0)$, on Φ_0 és el morfisme de coopèrades

$$\Phi_0 = \text{quocient} \oplus 0 : BV^i \oplus \mathbb{K}s\phi \rightarrow \frac{BV^i}{\mathbb{K}s\Delta}.$$

- $\pi : BV_\infty \rightarrow BV_\infty/(\Delta)$ és el morfisme quocient, que es pot escriure com $\pi = \Omega(\pi_0)$.
- $\iota : BV_\infty \rightarrow BV[\phi]_\infty$ és la inclusió, que es pot escriure com $\iota = \Omega(\iota_0)$.

Se satisfà la identitat $\Phi\iota = \pi$.

4.3.3 Àlgebres

Sigui $(A, d, \hat{\alpha})$ una àlgebra BV amb l'operador Δ homotòpicament trivial, i sigui $R = (H, i, p, h)$ un retracte de deformació de (A, d) amb diferencial nul·la. S'assumeixen les condicions de contorn $hi = 0$, $ph = 0$ i $h^2 = 0$. Aleshores

$$\hat{\phi}_R := h\hat{\alpha}(\Delta) - ip\hat{\alpha}(\Delta)h$$

defineix una estructura d'àlgebra $BV[\phi]$ en (A, d) , que denotem per $(A, d, \hat{\alpha}, \hat{\phi}_R)$.

El Teorema de Transferència Homotòpica confereix al complex $(H, 0)$ estructura de d'àlgebra $BV[\phi]_\infty$, que es denota per $(H, 0, \alpha, \phi_R)$.

Lema 4.5. *L'estructura $(H, 0, \alpha, \phi_R)$ d'àlgebra $BV[\phi]_\infty$ factoritza per Φ .*

Demostració. Cal comprovar que tant ϕ_R com $\alpha(\Delta)$ s'anul·len. De fet, com que $d\phi = \Delta$, és suficient comprovar que ϕ_R s'anul·la, que és conseqüència de les condicions de contorn. $\square$

Siguin $R = (H_R, i_R, p_R, h_R)$ i $S = (H_S, i_S, p_S, h_S)$ dos retractes de deformació de (A, d) amb diferencial nul·la que satisfan les condicions de contorn. Les estructures d'àlgebra $BV[\phi]_\infty$ induïdes en els retractes es denoten com $(H_R, 0, \alpha_R, \phi_R)$ i $(H_S, 0, \alpha_S, \phi_S)$. Se suposa, addicionalment, que A, H_R i H_S tenen un element 1 de grau zero que és preservat per i_R, i_S, p_R, p_S i que satisfà

$$1 \cdot (-) = (-), \quad \Delta(1) = 0, \quad [1, -] = 0.$$

Lema 4.6. *Tot ∞ -morfisme $f : BV^i \rightarrow \text{End}_{H_S}^{H_R}$ d'àlgebres BV_∞ entre $(H_R, 0, \alpha_R)$ i $(H_S, 0, \alpha_S)$ que satisfà $f(id)(1) = 1$ i $f(sm)(1 \otimes 1) = 0$ s'aixeca a un ∞ -morfisme d'àlgebres $BV[\phi]_\infty$ entre $(H_R, 0, \alpha_R, \phi_R)$ i $(H_S, 0, \alpha_S, \phi_S)$.*

Demostració. Les estructures $BV[\phi]_\infty (H_R, 0, \alpha_R, \phi_R)$ i $(H_S, 0, \alpha_S, \phi_S)$ d'àlgebra $BV[\phi]_\infty$ factoritzen per $\Phi : BV[\phi]_\infty \rightarrow BV_\infty/(\Delta)$. Aquesta factorització es pot escriure com $(\alpha_\bullet, \phi_\bullet) = \beta_\bullet \Phi$, on $\bullet = R, S$. S'observa que

$$\alpha_\bullet = (\alpha_\bullet, \phi_\bullet)\iota = \beta_\bullet \Phi \iota = \beta_\bullet \pi = \pi^*(\beta_\bullet), \quad \bullet = R, S.$$

És suficient comprovar que l' ∞ -morfisme f entre les estructures α_R i α_S d'àlgebra BV_∞ s'aixeca a un ∞ -morfisme $\tilde{f}$ d'àlgebres $BV_\infty/(\Delta)$ entre β_R i β_S (és a dir, $\pi^*(\tilde{f}) = f$, atès que ja sabem que $\pi^*(\beta_\bullet) = \alpha_\bullet$, on $\bullet = R, S$). El motiu d'aquesta simplificació és que aleshores la imatge de $\tilde{f}$ sota el functor

$$\Phi^* : \infty \mathbf{Alg}_{BV_\infty/(\Delta)} \rightarrow \infty \mathbf{Alg}_{BV[\phi]_\infty}$$

proporcionarà l' ∞ -morfisme d'àlgebres $BV[\phi]_\infty$ requerit, ja que $\iota^*(\Phi^*(\tilde{f})) = \pi^*(\tilde{f}) = f$.

La propietat universal del quocient implica que aquest ∞ -morfisme $\tilde{f}$ existeix si, i només si, $f(s\Delta) = 0$:

$$\begin{array}{ccc} BV^i & \xrightarrow{f} & \text{End}_{H_S}^{H_R} \\ \pi \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \\ \frac{BV^i}{\mathbb{K}s\Delta} & & \end{array}$$

Seguidament es comprova aquesta condició.

Sigui $as := sm \circ_{(1)} sm - sm \circ_{(2)} sm$. Les fórmules explícites del Teorema de Transferència Homotòpica per α_R i α_S en termes de $\hat{\alpha}$ i dels retractes de deformació R i S permeten veure que $\alpha_{\bullet}(as)(x \otimes y \otimes 1) = 0$, on $\bullet = R, S$.

L'equació de l' ∞ -morfisme associada a as és

$$\begin{aligned} 0 = d_{\text{End}_{H_S}^{H_R}} f(as) &= f(\text{id})\alpha_R(as) - \alpha_S(as)f(\text{id})^{\otimes 3} + f(sm) \cdot_{(1)} \alpha_R(sm) - \\ &- f(sm) \cdot_{(2)} \alpha_R(sm) - \alpha_S(sm)(f(sm) \otimes f(\text{id})) + \alpha_S(sm)(f(\text{id}) \otimes f(sm)). \end{aligned}$$

Evaluada en $x \otimes 1 \otimes 1$ resulta en

$$\begin{aligned} 0 = 0 - 0 + f(sm)(\alpha_R(sm)(x \otimes 1) \otimes 1) - f(sm)(x \otimes \alpha_R(sm)(1 \otimes 1)) - \\ - \alpha_S(sm)(f(sm)(x \otimes 1) \otimes 1) + \alpha_S(sm)(f(\text{id})(x) \otimes f(sm)) = -f(sm)(x \otimes 1), \end{aligned}$$

que implica $f(sm)(x \otimes 1) = 0$.

Sigui $\ell := s[-, -] \circ_{(2)} sm - sm \circ_{(1)} s[-, -] - (1 \ 2) * sm \circ_{(2)} s[-, -]$. Les fórmules explícites del Teorema de Transferència Homotòpica per α_R i α_S en termes de $\hat{\alpha}$ i dels retractes de deformació R i S permeten veure que $\alpha_{\bullet}(\ell)(x \otimes y \otimes 1) = 0$, on $\bullet = R, S$.

L'equació de l' ∞ -morfisme associada a ℓ és

$$\begin{aligned} 0 = d_{\text{End}_{H_S}^{H_R}} \ell &= f(\text{id})\alpha_R(\ell) - \alpha_S(\ell)f(\text{id})^{\otimes 3} + f(s[-, -]) \cdot_{(2)} \alpha_R(sm) - f(sm) \cdot_{(1)} \alpha_R(s[-, -]) - \\ &- (1 \ 2) * f(sm) \cdot_{(2)} \alpha_R(s[-, -]) - \alpha_S(s[-, -])(f(\text{id}) \otimes f(sm)) + \alpha_S(sm) \cdot (f(s[-, -]) \otimes f(\text{id})) + \\ &+ (1 \ 2) * \alpha_S(sm)(f(\text{id}) \otimes f(s[-, -])). \end{aligned}$$

Evaluada en $x \otimes 1 \otimes 1$ resulta en

$$\begin{aligned} 0 = 0 - 0 + f(s[-, -])(x \otimes 1) - 0 - 0 - 0 + f(s[-, -])(x \otimes 1) + \varepsilon f(s[-, -])(x \otimes 1) = \\ = (2 + \varepsilon)f(s[-, -])(x \otimes 1), \end{aligned}$$

que implica $f(s[-, -])(x \otimes 1) = 0$. Aquí $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ denota un signe que depèn del grau de x .

Evaluada en $x \otimes y \otimes 1$ resulta en

$$\begin{aligned} 0 = 0 - 0 + f(s[-, -])(x \otimes y) - f(sm)(\alpha_R(s[-, -])(x \otimes y) \otimes 1) - 0 - \\ - \alpha_S(s[-, -])(f(\text{id})(x) \otimes f(sm)(y \otimes 1)) + f(s[-, -])(x \otimes y) + \\ + \varepsilon \alpha_S(sm)(y \otimes f(s[-, -])(x \otimes 1)) = 2f(s[-, -])(x \otimes y), \end{aligned}$$

així que $f(s[-, -])(x \otimes y) = 0$. Com abans, $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ és un signe.

Sigui $r := s\Delta \circ sm - sm \circ_{(1)} s\Delta - sm \circ_{(2)} s\Delta$. Les fórmules explícites del Teorema de Transferència Homotòpica per α_R i α_S en termes de $\hat{\alpha}$ i dels retractes de deformació R i S permeten veure que $\alpha_{\bullet}(r)(x \otimes 1) = 0$, on $\bullet = R, S$.

L'equació de l' ∞ -morfisme associada a r és

$$\begin{aligned} 0 = d_{\text{End}_{H_S}^{H_R}} f(r) &= f(\text{id})\alpha_R(r) - \alpha_S(r)f(\text{id})^{\otimes 2} + f(s\Delta)\alpha_R(sm) - f(sm) \cdot_{(1)} \alpha_R(s\Delta) - \\ &- f(sm) \cdot_{(2)} \alpha_R(s\Delta) - \alpha_S(s\Delta)f(sm) + \alpha_S(sm)(f(s\Delta) \otimes f(\text{id})) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\alpha_S(sm)(f(\text{id}) \otimes f(s\Delta)) \pm f(s[-, -]) = f(\text{id})\alpha_R(r) - \alpha_S(r)f(\text{id})^{\otimes 2} + \\
& + f(s\Delta)\alpha_R(sm) + \alpha_S(sm)(f(s\Delta) \otimes f(\text{id})) + \alpha_S(sm)(f(\text{id}) \otimes f(s\Delta)),
\end{aligned}$$

ja que $\alpha_R(s\Delta)$ i $\alpha_S(s\Delta)$ s'anul·len per la primera condició de Hodge-de Rham, i $f(s[-, -])$ és zero.

Evaluada en $1 \otimes 1$ resulta en

$$0 = 0 - 0 + f(s\Delta)(1) + f(s\Delta)(1) + f(s\Delta)(1) = 3f(s\Delta)(1),$$

així que $f(s\Delta)(1) = 0$.

Evaluada en $x \otimes 1$ resulta en

$$0 = 0 - 0 + f(s\Delta)(x) + f(s\Delta)(x) + 0 = 2f(s\Delta)(x),$$

així que $f(s\Delta)(x) = 0$, és a dir, $f(s\Delta) = 0$, tal com es volia comprovar. $\square$

Sigui $\text{Hycom}_{\leq 3} \subseteq \text{Hycom}$ la subopèrada generada per les operacions m_2 i m_3 . El morfisme $\theta : \text{Hycom} \xrightarrow{\sim} \text{BV}/\Delta$ definit a [12] restringeix com $\theta_{\leq 3} : \text{Hycom}_{\leq 3} \rightarrow \text{BV}[\phi]$.

Teorema 4.7. *Sigui $(A, d, \hat{\alpha})$ una àlgebra BV amb unitat i amb l'operador Δ homotòpicament trivial, i siguin R i S dos retractes de deformació de (A, d) amb diferencial nul·la, que satisfan les condicions de contorn i preserven la unitat. Les àlgebres $\text{Hycom}_{\leq 3}$*

$$(A, d, \theta_{\leq 3}^*(\hat{\alpha}, \hat{\phi}_R)) \quad i \quad (A, d, \theta_{\leq 3}^*(\hat{\alpha}, \hat{\phi}_S))$$

són quasi-isomorfes.

Demostració. N'hi ha prou en veure que les estructures $(A, d, \hat{\alpha}, \hat{\phi}_R)$ i $(A, d, \hat{\alpha}, \hat{\phi}_S)$ d'àlgebra $\text{BV}[\phi]$ són quasi-isomorfes, ja que $\theta_{\leq 3}^*$ preserva ∞ -quasi-isomorfismes. Com que cadascuna d'aquestes és quasi-isomorfa a les estructures respectives $(H_R, 0, \alpha_R, \phi_R)$ i $(H_S, 0, \alpha_S, \phi_S)$ d'àlgebra $\text{BV}[\phi]_{\infty}$ obtingudes a partir del Teorema de Transferència Homotòpica, és suficient veure que aquestes dues darreres són quasi-isomorfes.

Tant $(H_R, 0, \alpha_R)$ com $(H_S, 0, \alpha_S)$ són àlgebres BV_{∞} que s'obtenen d'aplicar el Teorema de Transferència Homotòpica a $(A, d, \hat{\alpha})$ respecte dels retractes de deformació R i S . Com que satisfan les condicions de contorn, hi ha ∞ -quasi-isomorfismes d'àlgebres BV_{∞}

$$(i_R)_{\infty} : (H_R, 0, \alpha_R) \xrightarrow{\sim} (A, d_A, \hat{\alpha}), \quad (p_S)_{\infty} : (A, d_A, \hat{\alpha}) \xrightarrow{\sim} (H_S, 0, \alpha_S).$$

Per tant, la composició $(p_S)_{\infty} \cdot (i_R)_{\infty}$ és un ∞ -quasi-isomorfisme entre les estructures $(H_R, 0, \alpha_R)$ i $(H_S, 0, \alpha_S)$ d'àlgebra BV_{∞} . Si

$$((p_S)_{\infty} \cdot (i_R)_{\infty})(\text{id})(1) = 1 \quad i \quad ((p_S)_{\infty} \cdot (i_R)_{\infty})(sm)(1 \otimes 1) = 0,$$

del lema anterior se seguirà que s'aixeca a un ∞ -quasi-isomorfisme entre les estructures $(H_R, 0, \alpha_R, \phi_R)$ i $(H_S, 0, \alpha_S, \phi_S)$ d'àlgebra $\text{BV}[\phi]_{\infty}$, i això completarà la demostració.

Com que els retractes preserven la unitat la primera condició se satisfà. Per la segona condició, del fet que

$$(i_R)_{\infty}(sm) = h_R \cdot \hat{\alpha}(sm) \cdot i_R^{\otimes 2},$$

$$(p_S)_{\infty}(sm) = \frac{1}{2}p_S \cdot \hat{\alpha}(sm) \cdot (h_S \otimes \text{id} + h_S \otimes i_S p_S + \text{id} \otimes h_S + i_S p_S \otimes h_S),$$

es dedueix que

$$\begin{aligned} & ((p_S)_\infty \cdot (i_R)_\infty)(sm) = \\ &= \frac{1}{2} p_S \cdot \hat{\alpha}(sm) \cdot (h_S \otimes \text{id} + h_S \otimes i_S p_S + \text{id} \otimes h_S + i_S p_S \otimes h_S) \cdot i_R^{\otimes 2} + p_S \cdot h_R \cdot \hat{\alpha}(sm) \cdot i_R^{\otimes 2}, \end{aligned}$$

que s'anul·la en $1 \otimes 1$ per les condicions de contorn. $\square$

4.4 Pròxims passos

El resultat demostrat resol parcialment el problema. És a dir, encara queden moltes coses per explorar i entendre. A continuació explico en primera persona les preguntes que de moment són obertes i m'agradaria continuar estudiant.

4.4.1 Problema per l'opèrada BV/Δ

En primer lloc, el resultat només demostra que s'obtenen àlgebres quasi-isomorfes a nivell d'àlgebres $BV[\phi_1]$ (o $\text{Hycom}_{\leq 3}$). És a dir, m'oblido totalment dels generadors ϕ_n per $n \geq 2$. Seria interessant veure si el resultat és cert per $BV[\phi_1, \dots, \phi_N]$ (o $\text{Hycom}_{\leq N+2}$) o, fins i tot, per BV/Δ (o Hycom).

La intuïció que vaig desenvolupar al llarg d'aquest any em deia que el teorema era cert per $BV[\phi_1]$, però no per $BV[\phi_1, \dots, \phi_N]$, $N \geq 2$. El motiu és que totes les construccions que aconseguia fer per $BV[\phi_1]$ semblaven inassequibles per $BV[\phi_1, \dots, \phi_N]$, $N \geq 2$. Nogensmenys, quan vaig anar al congrés *Algèbre, Géométrie et Topologie Supérieures* al CIRM i vaig parlar amb matemàtics familiaritzats amb aquestes estructures la meua sorpresa va ser majúscula. En Vladimir Dotsenko creia que si el resultat era cert per $BV[\phi_1, \phi_2]$ aleshores també ho era per BV/Δ . En Sergey Shadrin va millorar l'aposta i va dir que si era cert per $BV[\phi_1]$ (que finalment he vist que sí que ho és), molt possiblement ho havia de ser per BV/Δ .

Quan vaig tornar del congrés em vaig posar a pensar en el problema per $BV[\phi_1, \phi_2]$. Avui en dia crec que sé com estendre la demostració donada per $BV[\phi_1]$ a $BV[\phi_1, \phi_2]$, i també crec saber quins articles haig de llegir per estendre-la a BV/Δ . El punt clau consisteix a trobar una coopèrada C_N tal que $\Omega(C_N) = BV[\phi_1, \dots, \phi_N]_\infty$ i hi hagi un morfisme $\Phi : \Omega(C_N) \rightarrow BV_\infty/(\Delta)$ pel qual l'estructura algebraica en el retracte hi factoritzi.

Per $N = 2$, com que crec que $BV[\phi_1, \phi_2]_\infty = BV_\infty[\phi_1, \phi_2]$, es pot prendre la coopèrada

$$C_2 := BV^i \oplus \mathbb{K}\{s\phi_1, s\phi_2\},$$

on $d(s\phi_1) = s\Delta$, $d(s\phi_2) = 0$ i la descomposició és

$$\Delta(s\phi_1) = \text{id} \circ s\phi_1 + s\phi_1 \circ \text{id},$$

$$\Delta(s\phi_2) = \text{id} \circ s\phi_2 + s\phi_2 \circ \text{id} - \frac{1}{2}(s\Delta \circ s\phi_1 - s\phi_1 \circ s\Delta).$$

Una comprovació senzilla revela que $\Omega(C_2) = BV[\phi_1, \phi_2]_\infty$, i el morfisme Φ és el que envia $\phi_1, \phi_2 \mapsto 0$. Més en general, si es vol fer la mateixa trampa i utilitzar

$$C_N := BV^i \oplus \mathbb{K}\{s\phi_1, \dots, s\phi_N\},$$

apareix el problema de definir la descomposició (o diferencial) de $s\phi_n$ per $3 \leq n \leq N$, ja que per tal que $\Omega(C_N) = \text{BV}[\phi_1, \dots, \phi_N]_\infty$ caldria que $\Delta(\phi_n)$ visqués a $C_N \circ C_N \circ C_N$, és a dir, que fos una terna de cooperacions componibles. Això no està permès en la definició de coopèrada, però sí que té sentit si un parla de **coopèrades llevat d'homotopia**, on hi ha k -descomposicions $\Delta_k : C_N \rightarrow C_N \circ \overset{k)}{\cdots} \circ C_N$. Per tant, crec que per resoldre definitivament el problema només em cal entendre aquesta generalització de les coopèrades, que està definida en [20].

4.4.2 Comencem amb una àlgebra BV_∞

La demostració trobada funciona si comencem amb una àlgebra BV . Hi ha fórmules anàlogues per $(\phi_n)_R$ si tenim una àlgebra BV_∞ . Seria interessant comprovar si l'argument trobat encara funciona en aquest context més general. Jo crec que sí, perquè crec que el truc que les operacions transferides $(\phi_n)_R^{\text{HTT}}$ s'anul·len encara és vàlid.

La conseqüència d'aquesta generalització és trobar més àlgebres hipercommutatives invariants respecte de la mètrica, ja que hi ha contextos geomètrics on l'àlgebra de De Rham està equipada amb una àlgebra BV_∞ (per exemple en [4]).

4.4.3 Altres opèrades

També seria interessant veure si la meua demostració es pot estendre a opèrades més generals. No crec que sigui cert per totes les opèrades, i el meu candidat a fallar és l'opèrada dual $\mathbb{K}[\Delta]$, però continua sent interessant donar obstruccions a la validesa del resultat. El motiu pel qual crec que el teorema no funciona per àlgebres duals és que hi tenim molt poques relacions en $\mathbb{K}[\Delta]$, així que no hi ha res que forci l'anul·lació de l'obstrucció. Seria interessant donar una àlgebra dual que faci de contraexemple.

4.4.4 Conseqüències geomètriques

Una conseqüència important del Teorema 4.7 és que certes estructures algebraiques en l'àlgebra de De Rham (o de Dolbeault) de varietats diferenciabls amb estructura geomètrica addicional són invariants respecte de la mètrica riemanniana (o hermítica). Seria interessant veure la dependència d'aquestes estructures algebraiques en la resta de l'estructura geomètrica present (per exemple, en el cas de les varietats de Poisson, la dependència en el camp bivectorial de Poisson). També estaria bé pensar tot això des del punt de vista de la teoria de la deformació.

Bibliografia

- [1] S. Barannikov i M. Kontsevich. Frobenius manifolds and formality of Lie algebras of polyvector fields. *Internat. Math. Res. Notices*, (4):201–215, 1998.
- [2] H.-D. Cao i J. Zhou. Frobenius manifold structure on Dolbeault cohomology and mirror symmetry. *Comm. Anal. Geom.*, 8(4):795–808, 2000.
- [3] J. Cirici i G. Horel. Formality of hypercommutative algebras of Kähler and Calabi-Yau manifolds, 2023.
- [4] J. Cirici i S. O. Wilson. Dolbeault cohomology for almost complex manifolds. *Adv. Math.*, 391:Paper No. 107970, 52, 2021.
- [5] V. Dotsenko, S. Shadrin i B. Vallette. De Rham cohomology and homotopy Frobenius manifolds. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 17(3):535–547, 2015.
- [6] G. C. Drummond-Cole. Homotopically trivializing the circle in the framed little disks. *J. Topol.*, 7(3):641–676, 2014.
- [7] I. Gálvez-Carrillo, A. Tonks i B. Vallette. Homotopy Batalin-Vilkovisky algebras. *J. Noncommut. Geom.*, 6(3):539–602, 2012.
- [8] E. Getzler. Batalin-Vilkovisky algebras and two-dimensional topological field theories. *Comm. Math. Phys.*, 159(2):265–285, 1994.
- [9] A. Guan i F. Muro. Operations on the de Rham cohomology of Poisson and Jacobi manifolds, 2023.
- [10] D. Huybrechts. *Complex geometry*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2005. An introduction.
- [11] T. V. Kadeišvili. On the theory of homology of fiber spaces. *Uspekhi Mat. Nauk*, 35(3(213)):183–188, 1980.
- [12] A. Khoroshkin, N. Markarian i S. Shadrin. Hypercommutative operad as a homotopy quotient of BV. *Comm. Math. Phys.*, 322(3):697–729, 2013.
- [13] K. Kodaira. *Complex manifolds and deformation of complex structures*, volum 283 de *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, New York, 1986. Translated from the Japanese by Kazuo Akao, With an appendix by Daisuke Fujiwara.
- [14] J.-L. Koszul. Crochet de Schouten-Nijenhuis et cohomologie. pàgines 257–271. 1985. The mathematical heritage of Élie Cartan (Lyon, 1984).
- [15] J.-L. Loday i B. Vallette. *Algebraic operads*, volum 346 de *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer, Heidelberg, 2012.
- [16] M. A. Mandell. Operads and operadic algebras in homotopy theory. Dins *Stable categories and structured ring spectra*, volum 69 de *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pàgines 183–247. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2022.

- [17] Y. I. Manin. *Frobenius manifolds, quantum cohomology, and moduli spaces*, volum 47 de *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.
- [18] M. Markl. Homotopy algebras are homotopy algebras. *Forum Math.*, 16(1):129–160, 2004.
- [19] M. Markl, S. Shnider i J. Stasheff. *Operads in algebra, topology and physics*, volum 96 de *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
- [20] S. Merkulov i B. Vallette. Deformation theory of representations of prop(erad)s. I. *J. Reine Angew. Math.*, 634:51–106, 2009.
- [21] S. A. Merkulov. Formality of canonical symplectic complexes and Frobenius manifolds. *Internat. Math. Res. Notices*, (14):727–733, 1998.
- [22] P. Van der Laan. Coloured koszul duality and strongly homotopy operads, 2004.
- [23] F. W. Warner. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, volum 94 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1983. Corrected reprint of the 1971 edition.
- [24] A. Weinstein. Symplectic geometry. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 5(1):1–13, 1981.
- [25] A. Weinstein. Poisson geometry. volum 9, pàgines 213–238. 1998. Symplectic geometry.