Universitat de Barcelona
Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRADO DE MATEMÁTICAS

Trabajo de fin de grado

Estudio de los cuerpos algebraicamente cerrados desde la teoría de modelos

Autor: Abel Palacio Gili

Director: Dr. Enrique Casanovas Ruiz-Fornells

Realizado en: Departament de Matemàtiques
i Informàtica

Barcelona, 10 de junio de 2024

Resumen

Este trabajo tiene como objetivo estudiar, desde la teoría de modelos, algunos aspectos que hemos visto en asignaturas de la rama del álgebra. Especialmente, busca estudiar la teoría de cuerpos algebraicamente cerrados. Para ello, se divide en tres capítulos diferentes.

El primero, *Definiciones previas*, únicamente define varios conceptos que se utilizarán a lo largo del trabajo que el lector debe conocer. Estos ya han sido introducidos en la asignatura de *Lógica matemática*, por lo que no se ahondará mucho en ellos.

En el segundo capítulo, llamado *Nociones de teoría de modelos*, se utilizan las definiciones del capítulo anterior para introducir la mayoría de conceptos de la teoría de modelos que se usarán en el trabajo. También se demuestran los resultados más generales, sin que estos sean aplicados, de momento, a ninguna teoría en particular.

Finalmente, en *Aplicación en teoría de cuerpos*, se muestra cómo podemos aplicar los conceptos y resultados vistos en los capítulos anteriores en el estudio de la teoría de cuerpos y, más especialmente, en la teoría de cuerpos algebraicamente cerrados. Se ve, así, que muchos de los conceptos que se estudian normalmente desde el álgebra, pueden definirse y estudiarse también desde la rama de la lógica y, que esto, puede ayudar a comprender varios resultados no vistos en las asignaturas de álgebra del grado.

Abstract

This project aims to study, from Model Theory, some aspects that we have seen in subjects from the algebra branch. In particular, it attempts to study the algebraically closed fields theory. For this purpose, it is divided into three different chapters.

The first one, *Previous definitions*, is the shortest of the three and merely defines several concepts that will be used during the project and that the reader must know in order to be able to understand it. These concepts have already been introduced in different subjects, especially in *Mathematical Logic*, so we will not go into them in depth.

In the second chapter, called *Notions of Model Theory*, the definitions from the previous one are used to introduce several concepts from Model Theory. More general results are also demonstrated, without these being applied, for the moment, to any particular theory.

Finally, in *Application in field theory*, it is shown how we can apply all the concepts and results seen in the previous chapters, in the study of field theory and, more especially, in algebraically closed fields theory. It is thus shown that many of the concepts that are normally studied from algebra can also be defined and studied from the logic branch, and that these definitions help to understand several results not seen in the degree subjects.

2020 Mathematics Subject Classification. 03C10, 03C35, 12L12

Agradecimientos

A mi tutor, Enrique, por guiarme y corregirme. Por tener paciencia. Por tantas reuniones y todo el esmero dedicado en este trabajo.

A familia y amigos, por el ánimo y apoyo que me habéis dado siempre.

Índice general

Capítulo 1

Definiciones previas

En este texto utilizaremos los símbolos de la lógica de primer orden, que son: las **variables**, que denotaremos por las letras minúsculas $x, y, \ldots$, a veces indexadas, los **conectores** $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$, los paréntesis (y), el símbolo de igualdad $\doteq$ y los cuantificadores $\exists$ existencial y $\forall$ universal.

Un **lenguaje** es un conjunto de símbolos, cada uno de los cuales puede ser un símbolo de constante, un símbolo de función n-ádico para algún $n \geq 1$ o un símbolo de relación n-ádico para algún $n \geq 1$.

Los **términos** de un lenguaje L son las variables, los símbolos de constante de L y las expresiones obtenidas con la regla siguiente: si F es un símbolo de función n-ádico del lenguaje L y $t_1, \ldots, t_n$ son términos de L, entonces $F\, t_1 \ldots t_n$ es un término de L. Cuando queramos relajar la escritura, escribiremos $F(t_1, \ldots, t_n)$ para referirnos a $F\, t_1 \ldots t_n$. También escribiremos $t(x_1, \ldots, x_n)$ para indicar que las variables del término t se encuentran entre las variables $x_1, \ldots, x_n$.

Las **ecuaciones** de un lenguaje L son las expresiones $t_1 \doteq t_2$ donde t_1 y t_2 son términos de L. Las **fórmulas atómicas** de un lenguaje L son sus ecuaciones y las expresiones obtenidas con la regla siguiente: si R es un símbolo de relación n-ádico del lenguaje L y $t_1, \ldots, t_n$ son términos de L, entonces $R\, t_1 \ldots t_n$ es una fórmula atómica de L. A veces escribiremos $R(t_1, \ldots, t_n)$ para referirnos a $R\, t_1 \ldots t_n$.

Las **fórmulas** de un lenguaje L son sus fórmulas atómicas y las expresiones obtenidas con la regla siguiente: si φ y ψ son fórmulas de L, entonces $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, $(\varphi \leftrightarrow \psi)$, $\exists x\, \varphi$ y $\forall x\, \varphi$ también son fórmulas de L.

Una variable de una fórmula es **libre** si no está bajo la influencia de ningún cuantificador. Escribiremos $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ para indicar que las variables libres de la fórmula φ están entre las variables $x_1, \ldots, x_n$. Una **sentencia** de un lenguaje L es una fórmula de L sin variables libres.

Cuando queramos relajar la escritura, escribiremos $Qx_1 \dots x_n \, \varphi$ para referirnos a la fórmula $Qx_1 \dots Qx_n \, \varphi$, donde Q es un cuantificador existencial o universal. También escribiremos $\exists^{=k} x \, \varphi(x)$ para referirnos a la fórmula

$$\exists x_1 \dots x_k \, (\bigwedge_{1 \leq i < j \leq k} (\neg \, x_i \doteq x_j) \land \varphi(x_1) \land \dots \land \varphi(x_k) \land \forall x \, (\varphi(x) \to (x \doteq x_1 \lor \dots \lor x \doteq x_k)))$$

que expresa que existen exactamente k elementos distintos que cumplen la fórmula φ.

Una **fórmula existencial** (o de tipo $\exists$) de lenguaje L es una fórmula de L de la forma $\exists x_1 \dots x_n \, \varphi$ donde φ es una fórmula sin cuantificadores. Una **fórmula universal** (o de tipo $\forall$) de lenguaje L es una fórmula de L de la forma $\forall x_1 \dots x_n \, \varphi$ donde φ es una fórmula sin cuantificadores. Una fórmula de lenguaje L es de tipo $\forall\exists$ si es de la forma $\forall x_1 \dots x_n \, \exists y_1 \dots y_m \, \varphi$ donde φ es una fórmula sin cuantificadores.

Una **estructura de lenguaje** L (o L**-estructura**) $\mathcal{M}$ se compone por:

- Un conjunto M no vacío al que llamamos universo de $\mathcal{M}$.
- Una asignación, para cada símbolo de constante c de L, de un elemento $c^{\mathcal{M}} \in M$, al que llamaremos interpretación de c. Dos símbolos de constante de L distintos no tienen por qué tener una interpretación distinta en $\mathcal{M}$.
- Una asignación, para cada símbolo de función F de L n-ádico, de una función $F^{\mathcal{M}} : M^n \longrightarrow M$.
- Una asignación, para cada símbolo de relación R de L n-ádico, de una relación $R^{\mathcal{M}} \subseteq M^n$.

Sea, a partir de ahora, $\mathcal{M}$ una estructura de un lenguaje L fijado.

Dados un término $t(x_1, \dots, x_n)$ de lenguaje L y elementos $a_1, \dots, a_n \in M$, se define por inducción la interpretación de $t(a_1, \dots, a_n)$ en $\mathcal{M}$ y se la denota $t^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n) \in M$ de la siguiente manera:

- Si $t(x_1, \dots, x_n) = c$ donde c es un símbolo de constante del lenguaje L, entonces $t^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n) = c^{\mathcal{M}}$.
- Si $t(x_1, \dots, x_n) = x_i$ con $1 \leq i \leq n$, entonces $t^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n) = a_i$.
- Si $t(x_1, \dots, x_n) = F \, t_1(x_1, \dots, x_n) \dots t_k(x_1, \dots, x_n)$ donde F es un símbolo de función k-ádico del lenguaje L y $t_1, \dots, t_k$ son términos de L, entonces $t^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n) = F^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n), \dots, t_k^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n))$.

Dada una fórmula $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ de lenguaje L y elementos $a_1, \dots, a_n \in M$, se define por inducción sobre φ la satisfacción de $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ interpretada por $a_1, \dots, a_n$ en la estructura $\mathcal{M}$, y se denota $\mathcal{M} \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$, de la siguiente manera:

- Si φ es una ecuación de la forma $t_1(x_1,\dots,x_n) \doteq t_2(x_1,\dots,x_n)$, entonces $\mathcal{M} \models \varphi(a_1,\dots,a_n)$ si y solo si $t_1^{\mathcal{M}}(a_1,\dots,a_n) = t_2^{\mathcal{M}}(a_1,\dots,a_n)$.
- Si φ es de la forma $R\,t_1(x_1,\dots,x_n)\dots t_k(x_1,\dots,x_n)$ donde R es un símbolo de relación k-ádico del lenguaje y $t_1,\dots,t_k$ son términos de L, entonces $\mathcal{M} \models \varphi(a_1,\dots,a_n)$ si y solo si $(t_1^{\mathcal{M}}(a_1,\dots,a_n),\dots,t_k^{\mathcal{M}}(a_1,\dots,a_n)) \in R^{\mathcal{M}}$.
- Si φ es una negación de la forma $\neg\,\psi(x_1,\dots,x_n)$ donde ψ es una fórmula del lenguaje L, entonces $\mathcal{M} \models \varphi(a_1,\dots,a_n)$ si y solo si $\mathcal{M} \not\models \psi(a_1,\dots,a_n)$.
- Si φ es una conjunción de la forma $\psi(x_1,\dots,x_n) \wedge \chi(x_1,\dots,x_n)$ donde ψ y χ son fórmulas del lenguaje L, entonces $\mathcal{M} \models \varphi(a_1,\dots,a_n)$ si y solo si $\mathcal{M} \models \psi(a_1,\dots,a_n)$ y $\mathcal{M} \models \chi(a_1,\dots,a_n)$.
- Si φ es una disyunción de la forma $\psi(x_1,\dots,x_n) \vee \chi(x_1,\dots,x_n)$ donde ψ y χ son fórmulas del lenguaje L, entonces $\mathcal{M} \models \varphi(a_1,\dots,a_n)$ si y solo si $\mathcal{M} \models \psi(a_1,\dots,a_n)$ o $\mathcal{M} \models \chi(a_1,\dots,a_n)$.
- Si φ es un condicional de la forma $\psi(x_1,\dots,x_n) \to \chi(x_1,\dots,x_n)$ donde ψ y χ son fórmulas del lenguaje L, entonces $\mathcal{M} \models \varphi(a_1,\dots,a_n)$ si y solo si $\mathcal{M} \not\models \psi(a_1,\dots,a_n)$ o $\mathcal{M} \models \chi(a_1,\dots,a_n)$.
- Si φ es una doble implicación de la forma $\psi(x_1,\dots,x_n) \leftrightarrow \chi(x_1,\dots,x_n)$ donde ψ y χ son fórmulas del lenguaje L, entonces $\mathcal{M} \models \varphi(a_1,\dots,a_n)$ si y solo si, o bien $\mathcal{M} \models \psi(a_1,\dots,a_n)$ y $\mathcal{M} \models \chi(a_1,\dots,a_n)$, o bien $\mathcal{M} \not\models \psi(a_1,\dots,a_n)$ y $\mathcal{M} \not\models \chi(a_1,\dots,a_n)$.
- Si φ es una fórmula existencial de la forma $\exists y\,\psi(x_1,\dots,x_n,y)$ donde ψ es una fórmula del lenguaje L, entonces $\mathcal{M} \models \varphi(a_1,\dots,a_n)$ si y solo si existe un elemento $a \in M$ tal que $\mathcal{M} \models \psi(a_1,\dots,a_n,a)$.
- Si φ es una fórmula universal de la forma $\forall y\,\psi(x_1,\dots,x_n,y)$ donde ψ es una fórmula del lenguaje L, entonces $\mathcal{M} \models \varphi(a_1,\dots,a_n)$ si y solo si para todo elemento $a \in M$, se cumple $\mathcal{M} \models \psi(a_1,\dots,a_n,a)$.

Una fórmula $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ de lenguaje L es **satisfacible** en una estructura $\mathcal{M}$ de L si existen elementos $a_1,\dots,a_n \in M$ tales que $\mathcal{M} \models \varphi(a_1,\dots,a_n)$. En el caso en que $\mathcal{M} \models \varphi(a_1,\dots,a_n)$ para cualquier elección de elementos $a_1,\dots,a_n \in M$, se dice que φ es **válida** en $\mathcal{M}$.

Dos fórmulas $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ y $\psi(x_1,\dots,x_n)$ del lenguaje L son **equivalentes**, y se denota $\varphi \equiv \psi$ si, para toda estructura $\mathcal{M}$ del lenguaje L y elementos $a_1,\dots,a_n \in M$ arbitrarios, se cumple que $\mathcal{M}$ satisface φ interpretada por los elementos $a_1,\dots,a_n$ si y solo si $\mathcal{M}$ satisface ψ interpretada por los elementos $a_1,\dots,a_n$. Observamos que, dadas φ y ψ dos fórmulas del lenguaje L arbitrarias, se cumple que $\varphi \vee \psi \equiv \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$, $\varphi \to \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$, $\varphi \leftrightarrow \psi \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ y $\forall x\,\varphi \equiv \neg\exists x\,\neg\varphi$. Teniendo lo anterior en cuenta, vemos que toda fórmula sin cuantificadores es equivalente a otra formada por los conectores $\neg$ y $\wedge$, y que toda fórmula es equivalente a otra formada por los conectores $\neg$ y $\wedge$ y el cuantificador $\exists$. Por eso, de ahora en adelante solo usaremos estos símbolos a la hora de realizar un proceso de inducción sobre una fórmula.

Si $\Sigma(x_1, \ldots, x_n)$ es un conjunto de fórmulas del lenguaje L, Σ es **satisfacible** si existe una estructura $\mathcal{M}$ de lenguaje L y elementos $a_1, \ldots, a_n \in M$, no necesariamente distintos, tales que $\mathcal{M} \models \Sigma(a_1, \ldots, a_n)$. Es decir, si para cada fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in \Sigma$, se cumple $\mathcal{M} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$. Además, Σ es **finitamente satisfacible** si cada subconjunto finito de Σ es satisfacible. El *Teorema de compacidad* nos asegura que un conjunto de fórmulas de un lenguaje es satisfacible si y solo si es finitamente satisfacible.

Sea $\Sigma(x_1, \ldots, x_n)$ un conjunto de fórmulas de L y $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula de L. Se dice que φ es **consecuencia** de Σ o que Σ implica φ si para cualquier estructura $\mathcal{M}$ de L y cualquier elección de elementos $a_1, \ldots, a_n \in M$ tales que $\mathcal{M} \models \Sigma(a_1, \ldots, a_n)$, se cumple $\mathcal{M} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$. Escribiremos $\Sigma \vdash \varphi$ para indicar que φ es consecuencia del conjunto de fórmulas Σ. Si $\Sigma = \{\psi_1, \ldots, \psi_k\}$, escribimos $\psi_1, \ldots, \psi_k \vdash \varphi$ para referirnos a $\Sigma \vdash \varphi$. Como observación, para fórmulas φ, ψ de L arbitrarias, se tiene que $\varphi \equiv \psi$ si y solo si $\varphi \vdash \psi$ y $\psi \vdash \varphi$.

Una **teoría** de lenguaje L es un conjunto T de sentencias de L que está cerrado bajo consecuencia. Es decir, tal que para cada sentencia σ de L que cumple $T \vdash \sigma$, se cumple $\sigma \in T$. Si $\mathcal{M}$ es una estructura de L tal que para cada $\sigma \in T$ se cumple $\mathcal{M} \models \sigma$, $\mathcal{M}$ es un **modelo** de la teoría T, y se denota $\mathcal{M} \models T$. Para cualquier estructura $\mathcal{M}$ de L, la teoría de $\mathcal{M}$ es el conjunto de sentencias de L que se satisfacen en $\mathcal{M}$ y se denota $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$. Una teoría T es **consistente** si es satisfacible, y es **completa** si para cada sentencia σ de L, o bien $\sigma \in T$ o bien $\neg\sigma \in T$. Por tanto, para cada estructura $\mathcal{M}$ de lenguaje L, se cumple que $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ es una teoría completa, ya que para cada sentencia σ de L, o bien $\mathcal{M} \models \sigma$ y, por tanto, $\sigma \in \mathrm{Th}(\mathcal{M})$, o bien $\mathcal{M} \not\models \sigma$, por lo que $\mathcal{M} \models \neg\sigma$ y, por tanto, $\neg\sigma \in \mathrm{Th}(\mathcal{M})$. Si T es una teoría de lenguaje L, un **conjunto de axiomas** o una **axiomatización** de T es un conjunto de sentencias $\Sigma \subseteq T$ tal que $T = \{\sigma \in L \,:\, \Sigma \vdash \sigma\}$.

Para dos estructuras $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ de un lenguaje L con universos M y N respectivamente, un **homomorfismo** de $\mathcal{M}$ en $\mathcal{N}$ es una función $f : M \longrightarrow N$ tal que:

- Para cada símbolo de constante c de L, se cumple $f(c^{\mathcal{M}}) = c^{\mathcal{N}}$.
- Para cada símbolo de función n-ádico F de L y cada $a_1, \ldots, a_n \in M$, se cumple $f(F^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n)) = F^{\mathcal{N}}(f(a_1), \ldots, f(a_n))$.
- Para cada símbolo de relación n-ádico R de L y cada $a_1, \ldots, a_n \in M$, si se cumple $(a_1, \ldots, a_n) \in R^{\mathcal{M}}$, entonces se cumple $(f(a_1), \ldots, f(a_n)) \in R^{\mathcal{N}}$.

Si, además,

- Para cada símbolo de relación n-ádico R de L y cada $a_1, \ldots, a_n \in M$, se cumple $(a_1, \ldots, a_n) \in R^{\mathcal{M}}$ si y solo si $(f(a_1), \ldots, f(a_n)) \in R^{\mathcal{N}}$.

entonces f es un **homomorfismo estricto**.

Una **inmersión** de una estructura $\mathcal{M}$ en otra estructura $\mathcal{N}$, ambas de un lenguaje L, es un homomorfismo estricto inyectivo de $\mathcal{M}$ en $\mathcal{N}$. La estructura $\mathcal{M}$ es inmersible en la estructura $\mathcal{N}$ si existe alguna inmersión de $\mathcal{M}$ en $\mathcal{N}$.

Un **isomorfismo** de $\mathcal{M}$ en $\mathcal{N}$ es una inmersión exhaustiva de $\mathcal{M}$ en $\mathcal{N}$. Es decir, un isomorfismo es un homomorfismo estricto biyectivo entre dos estructuras. Diremos que $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ son isomorfas y lo denotaremos $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$ si existe un isomorfismo entre ellas.

Sabemos, por el curso de *Lógica matemática*, que si f es un isomorfismo de la estructura $\mathcal{M}$ en la estructura $\mathcal{N}$, ambas de un lenguaje L, entonces para cada fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ de L y elementos $a_1, \ldots, a_n \in M$, se cumple $\mathcal{M} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$ si y solo si $\mathcal{N} \models \varphi(f(a_1), \ldots, f(a_n))$.

A partir de ahora, si $f : M \longrightarrow N$ es un homomorfismo de la estructura $\mathcal{M}$ en la estructura $\mathcal{N}$ de un lenguaje L y $a = (a_1, \ldots, a_n)$ es una n-tupla de M, escribiremos $f(a)$ para referirnos a $(f(a_1), \ldots, f(a_n))$ cuando queramos relajar la escritura. De manera parecida, para $t(x_1, \ldots, x_n)$ un término y $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula, ambos de L, escribiremos $t(a)$ y $\varphi(a)$ para referirnos a $t(a_1, \ldots, a_n)$ y $\varphi(a_1, \ldots, a_n)$, respectivamente.

Capítulo 2

Nociones de teoría de modelos

Este capítulo busca introducir los principales conceptos y resultados de la teoría de modelos. Por esta razón, es la parte del trabajo que más definiciones tiene. A partir de ellas, demuestra resultados generales para estructuras de teorías arbitrarias, que en el siguiente capítulo se utilizarán para demostrar, de forma más particular, varios resultados de teorías más concretas, como puede ser la teoría de cuerpos algebraicamente cerrados. Fijaremos, para el resto del capítulo, un lenguaje L arbitrario y dos estructuras $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ de L cualesquiera.

2.1. Equivalencia elemental

La mayor parte de las veces, dos estructuras de un mismo lenguaje no son isomorfas. Aun así, eso no quiere decir que esas estructuras no tengan nada que ver una con la otra. La equivalencia elemental entre estructuras de un lenguaje permite, hasta cierto punto, compararlas sin la necesidad de una correspondencia entre los elementos de sus respectivos universos. Además, se utiliza para demostrar propiedades importantes de las teorías de las que son modelo estas estructuras.

$\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ son **elementalmente equivalentes** y se denota $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ si las dos estructuras satisfacen las mismas sentencias de L. Es decir, si para cada sentencia σ de L, se tiene $\mathcal{M} \models \sigma$ si y solo si $\mathcal{N} \models \sigma$.

Se demuestra fácilmente que $\equiv$ es una relación de equivalencia entre estructuras del lenguaje L. Además, las clases de equivalencia que define $\equiv$ entre estas estructuras especifican las teorías de las estructuras que la forman, tal como veremos en el siguiente resultado.

Observación 2.1. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$.

2. *Para cada sentencia* σ *de* L*, si* $\mathcal{M} \models \sigma$ *entonces* $\mathcal{N} \models \sigma$.

3. $\mathcal{N} \models \mathrm{Th}(\mathcal{M})$.

4. $\mathrm{Th}(\mathcal{M}) = \mathrm{Th}(\mathcal{N})$.

Demostración: *(1. implica 2.)* Sea $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ y sea σ una sentencia de L tal que $\mathcal{M} \models \sigma$. Entonces $\mathcal{N} \models \sigma$. *(2. implica 3.)* Como $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ es el conjunto de sentencias de L que $\mathcal{M}$ satisface y, por hipótesis, $\mathcal{N}$ satisface todas las sentencias de L que $\mathcal{M}$ satisface, entonces $\mathcal{N} \models \mathrm{Th}(\mathcal{M})$. *(3. implica 4.)* Como $\mathcal{N} \models \mathrm{Th}(\mathcal{M})$, se tiene que $\mathrm{Th}(\mathcal{M}) \subseteq \mathrm{Th}(\mathcal{N})$. Para ver la otra inclusión, suponemos que existe una sentencia $\sigma \in \mathrm{Th}(\mathcal{N})$ tal que $\sigma \notin \mathrm{Th}(\mathcal{M})$. Entonces $\mathcal{M} \not\models \sigma$ y por tanto $\mathcal{M} \models \neg\sigma$. Esto hace que $\neg\sigma \in \mathrm{Th}(\mathcal{M})$ y, por hipótesis, se tiene que $\mathcal{N} \models \neg\sigma$, absurdo ya que se tendría que $\mathcal{N} \models \sigma$ y $\mathcal{N} \models \neg\sigma$. Por tanto, $\mathrm{Th}(\mathcal{N}) \subseteq \mathrm{Th}(\mathcal{M})$. *(4. implica 1.)* Sea σ una sentencia de L. Si $\sigma \in \mathrm{Th}(\mathcal{M}) = \mathrm{Th}(\mathcal{N})$, entonces $\mathcal{M} \models \sigma$ y $\mathcal{N} \models \sigma$. Si, por el contrario, $\sigma \notin \mathrm{Th}(\mathcal{M}) = \mathrm{Th}(\mathcal{N})$, entonces $\mathcal{M} \not\models \sigma$ y $\mathcal{N} \not\models \sigma$. $\square$

Este resultado muestra, además, que si $\mathcal{M}$ es un modelo de una teoría T arbitraria de lenguaje L y $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$, entonces $\mathcal{N}$ es también un modelo de la teoría T. En el siguiente resultado, veremos que la equivalencia elemental juega un papel más importante entre los modelos de teorías completas.

Lema 2.2. *Una teoría T es completa si y solo si para cualquier par de modelos $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ de T, se tiene que $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$.*

Demostración: Supongamos que T es una teoría completa. El caso en que T no es consistente es trivial, ya que T no tiene ningún modelo. Suponemos entonces que es consistente y escogemos $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ dos modelos suyos. Sea σ una sentencia de L. Por ser T completa o bien $\sigma \in T$ o bien $\neg\sigma \in T$. Si $\sigma \in T$, entonces $\mathcal{M} \models \sigma$ y $\mathcal{N} \models \sigma$. Si, en cambio, $\neg\sigma \in T$, entonces $\mathcal{M} \models \neg\sigma$ y $\mathcal{N} \models \neg\sigma$ y, por tanto, $\mathcal{M} \not\models \sigma$ y $\mathcal{N} \not\models \sigma$. En definitiva, $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$. Para ver la otra implicación, supondremos que para cualquier $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ modelos de T, se tiene que $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$. Si T no fuera completa, existiría una sentencia σ de L tal que $\sigma \notin T$ y $\neg\sigma \notin T$. Por estar T cerrada bajo implicación, se tendría que $T \not\models \sigma$ y $T \not\models \neg\sigma$. Existiría, por tanto, un modelo $\mathcal{M}$ de T tal que $\mathcal{M} \not\models \sigma$ y otro modelo $\mathcal{N}$ de T tal que $\mathcal{N} \not\models \neg\sigma$. Se tendría entonces que $\mathcal{M} \models \neg\sigma$ y que $\mathcal{N} \models \sigma$, cosa que es absurdo, ya que $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$. Por tanto, T tiene que ser completa. $\square$

Como hemos visto, el hecho de poder comprobar que dos estructuras son elementalmente equivalentes tiene varias consecuencias interesantes, algunas enfocadas a ellas mismas como estructuras de lenguaje L, y otras enfocadas a las teorías de las que son modelo. Utilizaremos estos resultados durante el resto del trabajo, pero antes indicaremos una forma de comprobar que dos estructuras arbitrarias de un mismo lenguaje son elementalmente equivalentes. Para ello, antes debemos introducir el concepto de isomorfía parcial entre estructuras.

Un **isomorfismo parcial** de $\mathcal{M}$ en $\mathcal{N}$ es una función inyectiva $f : M \longrightarrow N$, con $\mathrm{Dom}\, f \subseteq M$ y $\mathrm{Im}\, f \subseteq N$, que cumple:

- Si c es un símbolo de constante de L y $a \in \mathrm{Dom}\, f$, entonces $c^{\mathcal{M}} = a$ si y solo si $c^{\mathcal{N}} = f(a)$.

- Si F es un símbolo de función n-ádico de L, a es una n-tupla de $\operatorname{Dom} f$ y $b \in \operatorname{Dom} f$, entonces $F^{\mathcal{M}}(a) = b$ si y solo si $F^{\mathcal{N}}(f(a)) = f(b)$.
- Si R es un símbolo de relación n-ádico de L y a es una n-tupla de $\operatorname{Dom} f$, entonces $a \in R^{\mathcal{M}}$ si y solo si $f(a) \in R^{\mathcal{N}}$.

Las estructuras $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ son **parcialmente isomorfas vía** I si I es una colección no vacía de isomorfismos parciales de $\mathcal{M}$ en $\mathcal{N}$ con las propiedades:

- *Forth:* Si $f \in I$ y $a \in M$, existe un $g \in I$ que extiende a f tal que $a \in \operatorname{Dom} g$.
- *Back:* Si $f \in I$ y $b \in N$, existe un $g \in I$ que extiende a f tal que $b \in \operatorname{Im} g$.

Escribimos $I : \mathcal{M} \cong_p \mathcal{N}$ para indicar que $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ son dos estructuras parcialmente isomorfas. Finalmente, las estructuras $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ son **parcialmente isomorfas** y lo denotamos $\mathcal{M} \cong_p \mathcal{N}$ si existe algún conjunto I tal que $I : \mathcal{M} \cong_p \mathcal{N}$.

Vamos a demostrar que comprobar que dos estructuras son parcialmente isomorfas es suficiente para ver que estas son elementalmente equivalentes. Para ello, debemos demostrar antes dos afirmaciones. Supongamos que $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ son parcialmente isomorfas. Es decir, tales que existe un conjunto I no vacío de isomorfismos parciales de $\mathcal{M}$ en $\mathcal{N}$ con las propiedades de *back* y *forth*. Sea además $f \in I$.

Afirmación 2.3. *Sea $t = t(x_1, \ldots, x_n)$ un término arbitrario del lenguaje L y sea $a = (a_1, \ldots, a_n)$ una n-tupla de M con $a_1, \ldots, a_n \in \operatorname{Dom} f$. Entonces existe un isomorfismo parcial $g \in I$ que extiende a f y cumple $t^{\mathcal{M}}(a) \in \operatorname{Dom} g$ y $g(t^{\mathcal{M}}(a)) = t^{\mathcal{N}}(g(a))$.*

Demostración: Lo demostraremos por inducción sobre el término t.

- Si t es una variable, $t = x_i$ para algún $1 \leq i \leq n$, por lo que $t^{\mathcal{M}}(a) = a_i \in \operatorname{Dom} f$. Escogiendo $g = f$, se tiene que $g \supseteq f$, $t^{\mathcal{M}}(a) \in \operatorname{Dom} g$ y

$$\begin{aligned} g(t^{\mathcal{M}}(a)) &= g(a_1) = f(a_1) \\ &= t^{\mathcal{N}}(f(a)) \\ &= t^{\mathcal{N}}(g(a)) \end{aligned}$$

- Si t es una constante, $t = c$ para algún símbolo de constante c del lenguaje L y entonces $t^{\mathcal{M}}(a) = c^{\mathcal{M}}$. La propiedad *forth* de I asegura que existe $g \in I$ tal que $g \supseteq f$ y $c^{\mathcal{M}} \in \operatorname{Dom} g$. Por ser g isomorfismo parcial, $g(c^{\mathcal{M}}) = c^{\mathcal{N}}$ y por tanto $g(t^{\mathcal{M}}(a)) = g(c^{\mathcal{M}}) = c^{\mathcal{N}} = t^{\mathcal{N}}(g(a))$.
- Si $t = F\, t_1 \ldots t_n$ para F símbolo de función k-ádico de L y $t_1, \ldots, t_k$ términos de L tales que, si denotamos $g_0 = f$, para cada $1 \leq i \leq k$ existe $g_i \in I$ tal que $g_{i-1} \subseteq g_i$, $t_i^{\mathcal{M}}(a) \in \operatorname{Dom} g_i$ y $g_i(t_i^{\mathcal{M}}(a)) = t_i^{\mathcal{N}}(g_i(a)$, la propiedad *forth* de I asegura que existe $g \in I$ tal que $f = g_0 \subseteq g_1 \subseteq \ldots \subseteq g_k \subseteq g$ y $F^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}, \ldots, t_k^{\mathcal{M}})(a) \in \operatorname{Dom} g$. Por ser g

un isomorfismo parcial, se tiene también que

$$\begin{aligned} g(F^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}, \ldots, t_k^{\mathcal{M}})(a)) &= F^{\mathcal{N}}(g(t_1^{\mathcal{M}}(a)), \ldots, g(t_k^{\mathcal{M}}(a))) \\ &= F^{\mathcal{N}}(t_1^{\mathcal{N}}(g(a)), \ldots, t_k^{\mathcal{N}}(g(a))) \\ &= t^{\mathcal{N}}(g(a)) \end{aligned}$$

□

Afirmación 2.4. *Sea* $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ *una fórmula de* L *y sea* $a = (a_1, \ldots, a_n)$ *una* n*-tupla de* M *con* $a_1, \ldots, a_n \in \operatorname{Dom} f$*. Entonces* $\mathcal{M} \models \varphi(a)$ *si y solo si* $\mathcal{N} \models \varphi(f(a))$*.*

Demostración: Lo demostraremos por inducción sobre la fórmula φ.

- Si φ es una ecuación de la forma $\varphi = t_1 \doteq t_2$ para t_1, t_2 términos de L, entonces utilizando la **Afirmación 2.3** dos veces sabemos que existe $g \in I$ tal que $g \supseteq f$ y, además, $t_i^{\mathcal{M}}(a) \in \operatorname{Dom} g$ y $g(t_i^{\mathcal{M}}(a)) = t_i^{\mathcal{N}}(g(a))$ para $1 \leq i \leq 2$. Entonces

$$\begin{array}{rll} \mathcal{M} \models \varphi(a) & \text{si y solo si} & \mathcal{M} \models t_1(a) \doteq t_2(a) \\ & \text{si y solo si} & t_1^{\mathcal{M}}(a) = t_2^{\mathcal{M}}(a) \\ \text{(por ser } g \text{ inyectivo)} & \text{si y solo si} & g(t_1^{\mathcal{M}}(a)) = g(t_2^{\mathcal{M}}(a)) \\ & \text{si y solo si} & t_1^{\mathcal{N}}(g(a)) = t_2^{\mathcal{N}}(g(a)) \\ & \text{si y solo si} & t_1^{\mathcal{N}}(f(a)) = t_2^{\mathcal{N}}(f(a)) \\ & \text{si y solo si} & \mathcal{N} \models t_1(f(a)) \doteq t_2(f(a)) \\ & \text{si y solo si} & \mathcal{N} \models \varphi(f(a)) \end{array}$$

- Si $\varphi = R\,t_1 \ldots t_k$ donde R es un símbolo de relación k-ádico de L y $t_1, \ldots, t_k$ son términos de L, entonces utilizando la **Afirmación 2.3** k veces sabemos que existe $g \in I$ tal que $g \supseteq f$ y, además, $t_i^{\mathcal{M}}(a) \in \operatorname{Dom} g$ y $g(t_i^{\mathcal{M}}(a)) = t_i^{\mathcal{N}}(g(a))$ para todo $1 \leq i \leq k$. Entonces

$$\begin{array}{rll} \mathcal{M} \models \varphi(a) & \text{si y solo si} & \mathcal{M} \models R\,t_1 \ldots t_k(a) \\ & \text{si y solo si} & (t_1^{\mathcal{M}}(a), \ldots, t_k^{\mathcal{M}}(a)) \in R^{\mathcal{M}} \\ & \text{si y solo si} & (t_1^{\mathcal{N}}(g(a)), \ldots, t_k^{\mathcal{N}}(g(a))) \in R^{\mathcal{N}} \\ & \text{si y solo si} & \mathcal{N} \models R\,t_1 \ldots t_k(g(a)) \\ & \text{si y solo si} & \mathcal{N} \models R\,t_1 \ldots t_k(f(a)) \\ & \text{si y solo si} & \mathcal{N} \models \varphi(f(a)) \end{array}$$

- Si φ es una negación de la forma $\varphi = \neg\,\psi$ para una fórmula ψ de L tal que $\mathcal{M} \models \psi(a)$ si y solo si $\mathcal{N} \models \psi(f(a))$, entonces

$$\begin{array}{rll} \mathcal{M} \models \varphi(a) & \text{si y solo si} & \mathcal{M} \models \neg\,\psi(a) \\ & \text{si y solo si} & \mathcal{M} \not\models \psi(a) \\ \text{(por hipótesis de inducción)} & \text{si y solo si} & \mathcal{N} \not\models \psi(f(a)) \\ & \text{si y solo si} & \mathcal{N} \models \neg\,\psi(f(a)) \\ & \text{si y solo si} & \mathcal{N} \models \varphi(f(a)) \end{array}$$

- Si φ es una conjunción de la forma $\varphi = (\psi \wedge \chi)$ para fórmulas ψ y χ de L tales que

$\mathcal{M} \models \psi(a)$ si y solo si $\mathcal{N} \models \psi(f(a))$, y $\mathcal{M} \models \chi(a)$ si y solo si $\mathcal{N} \models \chi(f(a))$, entonces

$$\begin{array}{rll} \mathcal{M} \models \varphi(a) & \text{si y solo si} & \mathcal{M} \models (\psi \wedge \chi)(a) \\ & \text{si y solo si} & \mathcal{M} \models \psi(a) \quad \text{y} \quad \mathcal{M} \models \chi(a) \\ \text{(por hipótesis de inducción)} & \text{si y solo si} & \mathcal{N} \models \psi(f(a)) \quad \text{y} \quad \mathcal{N} \models \chi(f(a)) \\ & \text{si y solo si} & \mathcal{N} \models (\psi \wedge \chi)(f(a)) \\ & \text{si y solo si} & \mathcal{N} \models \varphi(f(a)) \end{array}$$

- Si φ es de la forma $\varphi = \exists x\, \psi$ para una fórmula ψ de L tal que $\mathcal{M} \models \psi(a)$ si y solo si $\mathcal{N} \models \psi(f(a))$, entonces

$$\begin{array}{rll} \mathcal{M} \models \varphi(a) & \text{si y solo si} & \mathcal{M} \models \exists x\, \psi(a) \\ & \text{si y solo si} & \text{hay un } b \in M \text{ tal que } \mathcal{M} \models \psi(a, b) \qquad (\bigstar) \end{array}$$

Suponemos $(\bigstar)$. Por la propiedad *forth* de I, existe $g \in I$ tal que $g \supseteq f$ y $b \in \operatorname{Dom} g$. Entonces, por hipótesis de inducción, $\mathcal{N} \models \psi(g(a), g(b))$ y por tanto hay un $c \in N$ tal que $\mathcal{N} \models \psi(f(a), c)$. Ahora suponemos que hay un $c \in N$ tal que $\mathcal{N} \models \psi(f(a), c)$. Por la propiedad back de I existe $h \in I$ tal que $h \supseteq f$ y $c \in \operatorname{Im} h$. Sea $b \in \mathcal{M}$ tal que $h(b) = c$, entonces hay un $b \in \mathcal{M}$ tal que $\mathcal{N} \models \psi(h(a), h(b))$ y, por hipótesis de inducción, hay un $b \in \mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M} \models \psi(a, b)$, que es precisamente $(\bigstar)$. Podemos terminar por tanto

$$\begin{array}{rll} \mathcal{M} \models \varphi(a) & \text{si y solo si} & \text{hay un } b \in M \text{ tal que } \mathcal{M} \models \psi(a, b) \\ & \text{si y solo si} & \text{hay un } c \in N \text{ tal que } \mathcal{N} \models \psi(f(a), c) \\ & \text{si y solo si} & \mathcal{N} \models \exists x\, \psi(f(a)) \\ & \text{si y solo si} & \mathcal{N} \models \varphi(f(a)) \end{array}$$

$\square$

Finalmente, usando estas dos afirmaciones, podemos llegar al resultado que habíamos adelantado.

Proposición 2.5. *Si dos estructuras $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ de lenguaje L son parcialmente isomorfas, entonces son elementalmente equivalentes.*

Demostración: Suponiendo $\mathcal{M} \cong_p \mathcal{N}$, existe un conjunto I no vacío de isomorfismos parciales de $\mathcal{M}$ en $\mathcal{N}$ con las propiedades *back* y *forth*. Sea σ una sentencia de L arbitraria y sea $f \in I$. Para cualquier $a \in M$, la propiedad forth de I nos asegura que hay un $g \in I$ que extiende a f y tal que $a \in \operatorname{Dom} g$. Entonces

$$\begin{array}{rll} \mathcal{M} \models \sigma & \text{equivale a} & \mathcal{M} \models \sigma(a) \\ & \text{si y solo si} & \mathcal{N} \models \sigma(f(a)) \\ & \text{equivale a} & \mathcal{N} \models \sigma \end{array}$$

$\square$

2.2. Extensiones elementales

En algunos casos, el universo de una estructura es un subconjunto del universo de otra estructura del mismo lenguaje. Dentro de estos casos, hay veces en las que la estructura de universo menor respecto al orden $\subseteq$ interpreta los símbolos del lenguaje como la restricción, a los elementos de su universo, de la interpretación que hace de esos símbolos la otra estructura. Como ejemplo sencillo de esto, podemos pensar en los grupos habituales $(\mathbb{Z},+)$ y $(\mathbb{Q},+)$ como estructuras de lenguaje $\{+\}$, que interpretan el símbolo de función $+$ como la suma habitual entre elementos de $\mathbb{Z}$ y de $\mathbb{Q}$, respectivamente. Cuando esto sucede, las estructuras implicadas tienen varias propiedades comunes. En esta sección, vamos a enunciar y demostrar las principales.

La estructura $\mathcal{M}$ es una **subestructura** de $\mathcal{N}$ (equivalentemente $\mathcal{N}$ es una **extensión** de $\mathcal{M}$) y se denota $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ si el universo de $\mathcal{M}$ es un subconjunto del universo de $\mathcal{N}$ y, además:

- Para cada símbolo de constante c de L, $c^{\mathcal{M}} = c^{\mathcal{N}}$.
- Para cada símbolo de función F de L n-ádico y cada n-tupla $a = (a_1, \ldots, a_n)$ de M, se cumple $F^{\mathcal{M}}(a) = F^{\mathcal{N}}(a)$.
- Para cada símbolo de relación R de L n-ádico y cada n-tupla $a = (a_1, \ldots, a_n)$ de M, se cumple $a \in R^{\mathcal{M}}$ si y solo si $a \in R^{\mathcal{N}}$.

Lema 2.6. *Sea $\mathcal{M}$ una subestructura de $\mathcal{N}$, $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula de L y $a = (a_1, \ldots, a_n)$ una n-tupla de M. Entonces se cumple:*

- *Si $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ no tiene cuantificadores, entonces $\mathcal{M} \models \varphi(a)$ si y solo si $\mathcal{N} \models \varphi(a)$.*
- *Si $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ es existencial y $\mathcal{M} \models \varphi(a)$, entonces $\mathcal{N} \models \varphi(a)$.*
- *Si $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ es universal y $\mathcal{N} \models \varphi(a)$, entonces $\mathcal{M} \models \varphi(a)$.*

Demostración: Suponemos que $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$. Primero veremos, por inducción sobre un término $t = t(x_1, \ldots, x_n)$ de L, que si $a = (a_1, \ldots, a_n)$ es una n-tupla de M, entonces $t^{\mathcal{M}}(a) = t^{\mathcal{N}}(a)$.

- Si t es una variable, entonces $t = x_i$ con $1 \leq i \leq n$, con lo que $t^{\mathcal{M}}(a) = a_i = t^{\mathcal{N}}(a)$.
- Si t es una constante, entonces $t = c$ para algún símbolo de constante c de L, con lo que $t^{\mathcal{M}}(a) = c^{\mathcal{M}} = c^{\mathcal{N}} = t^{\mathcal{N}}(a)$.
- Si $t = F\, t_1 \ldots t_k$ para F símbolo de función k-ádico de L y $t_1, \ldots, t_k$ términos de L tales que $t_i^{\mathcal{M}}(a) = t_i^{\mathcal{N}}(a)$ para todo $1 \leq i \leq k$, entonces

$$
\begin{array}{rcl}
t^{\mathcal{M}}(a) & = & F^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}(a), \ldots, t_k^{\mathcal{M}}(a)) \\
\text{(por ser } \mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}) & = & F^{\mathcal{N}}(t_1^{\mathcal{M}}(a), \ldots, t_k^{\mathcal{M}}(a)) \\
 & = & F^{\mathcal{N}}(t_1^{\mathcal{N}}(a), \ldots, t_k^{\mathcal{N}}(a)) \\
 & = & t^{\mathcal{N}}(a)
\end{array}
$$

Con esto, podemos demostrar ahora la proposición, por inducción sobre la fórmula φ.

- Si φ es una ecuación de la forma $\varphi = t_1 \doteq t_2$ para t_1, t_2 términos de L, entonces

$$\begin{array}{rll} \mathcal{M} \models \varphi(a) & \text{si y solo si} & t_1^{\mathcal{M}}(a) = t_2^{\mathcal{M}}(a) \\ & \text{si y solo si} & t_1^{\mathcal{N}}(a) = t_2^{\mathcal{N}}(a) \\ & \text{si y solo si} & \mathcal{N} \models \varphi(a) \end{array}$$

- Si $\varphi = R\,t_1, \ldots, t_k$ para R símbolo de relación k-ádico de L y $t_1, \ldots, t_k$ son términos de L, entonces

$$\begin{array}{rll} \mathcal{M} \models \varphi(a) & \text{si y solo si} & (t_1^{\mathcal{M}}(a), \ldots, t_k^{\mathcal{M}}(a)) \in R^{\mathcal{M}} \\ (\text{por ser } \mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}) & \text{si y solo si} & (t_1^{\mathcal{M}}(a), \ldots, t_k^{\mathcal{M}}(a)) \in R^{\mathcal{N}} \\ & \text{si y solo si} & (t_1^{\mathcal{N}}(a), \ldots, t_k^{\mathcal{N}}(a)) \in R^{\mathcal{N}} \\ & \text{si y solo si} & \mathcal{N} \models \varphi(a) \end{array}$$

- Si φ es una negación de la forma $\varphi = \neg\,\psi$, para una fórmula ψ de L tal que $\mathcal{M} \models \psi(a)$ si y solo si $\mathcal{N}\psi(a)$, entonces

$$\begin{array}{rll} \mathcal{M} \models \varphi(a) & \text{si y solo si} & \mathcal{M} \models \neg\,\psi(a) \\ & \text{si y solo si} & \mathcal{M} \not\models \psi(a) \\ (\text{por hipótesis de inducción}) & \text{si y solo si} & \mathcal{N} \not\models \psi(a) \\ & \text{si y solo si} & \mathcal{N} \models \neg\,\psi(a) \\ & \text{si y solo si} & \mathcal{N} \models \varphi(a) \end{array}$$

- Si φ es una conjunción de la forma $\varphi = (\psi \wedge \chi)$, para fórmulas ψ y χ de L tales que $\mathcal{M} \models \psi(a)$ si y solo si $\mathcal{N}\psi(a)$ y $\mathcal{M} \models \chi(a)$ si y solo si $\mathcal{N}\chi(a)$, entonces

$$\begin{array}{rll} \mathcal{M} \models \varphi(a) & \text{si y solo si} & \mathcal{M} \models (\psi \wedge \chi)(a) \\ & \text{si y solo si} & \mathcal{M} \models \psi(a) \quad \text{y} \quad \mathcal{M} \models \chi(a) \\ (\text{por hipótesis de inducción}) & \text{si y solo si} & \mathcal{N} \models \psi(a) \quad \text{y} \quad \mathcal{N} \models \chi(a) \\ & \text{si y solo si} & \mathcal{N} \models (\psi \wedge \chi)(a) \\ & \text{si y solo si} & \mathcal{N} \models \varphi(a) \end{array}$$

Teniendo en cuenta los puntos anteriores, tenemos demostrado ya el primer punto de la proposición, ya que, como ya hemos visto anteriormente, toda fórmula sin cuantificadores es equivalente a una fórmula que utiliza únicamente los conectores $\neg$ y $\wedge$. Demostraremos ahora el segundo y el tercer punto.

- Si φ es una fórmula existencial de la forma $\varphi = \exists y_1 \ldots y_k\,\psi$, para una fórmula $\psi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k)$ de L sin cuantificadores y $\mathcal{M} \models \varphi(a)$, entonces existe una k-tupla m de M tal que $\mathcal{M} \models \psi(a, m)$. Como los elementos de a y de m pertenecen a $M \subseteq N$ y ψ no tiene cuantificadores, en los puntos anteriores hemos demostrado que $\mathcal{N} \models \psi(a, m)$ y, por tanto, $\mathcal{N} \models \exists y_1 \ldots y_k\,\psi(a)$, que equivale a $\mathcal{N} \models \varphi(a)$.

- Si φ es una fórmula universal de la forma $\varphi = \forall y_1 \dots y_k \, \psi$, para una fórmula $\psi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k)$ de L sin cuantificadores y $\mathcal{N} \models \varphi(a)$, entonces para cualquier k-tupla m de N, se tiene $\mathcal{N} \models \psi(a, m)$. En particular, como $M \subseteq N$, en los puntos anteriores hemos demostrado que para cualquier k-tupla m de M, se tiene $\mathcal{M} \models \psi(a, m)$ y, por tanto, $\mathcal{M} \models \forall y_1 \dots y_k \, \psi(a)$, que equivale a $\mathcal{M} \models \varphi(a)$. □

Sea $\mathcal{M}$ una estructura de lenguaje L y sea $A \subseteq M$ (si L no contiene símbolos de constante, pediremos además que A sea no vacío). La **subestructura de $\mathcal{M}$ generada por** A es la menor subestructura $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$ tal que $A \subseteq N$.

Vamos a demostrar que esta subestructura existe siempre. Consideremos la estructura $\mathcal{M}$ de L y un subconjunto $A \subseteq M$. Definimos

$$N = \{t^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n) \, : \, t = t(x_1, \dots, x_n) \text{ término de } L, \; a_1, \dots, a_n \in A, \; n < \omega\}$$

Se tiene que N es no vacío, ya que si L tiene algún símbolo de constante c, entonces $c^{\mathcal{M}} \in N$, y si L no tuviese símbolos de constante, como hemos pedido que en ese caso A sea no vacío, existe un elemento $a \in A$ y, por tanto, para el término $t = x$, se tiene que $t^{\mathcal{M}}(a) = a \in N$. Además, se tiene $A \subseteq N$, ya que podemos argumentar lo anterior con todo elemento de A. El conjunto N, junto a la interpretación de cada símbolo de constante c de L como $c^{\mathcal{M}} \in N$, la asignación a cada símbolo de función F de L de la función $F^{\mathcal{M}}$ restringida a N, y la asignación a cada símbolo de relación R de L del conjunto $\{a \in N^n \; : \; a \in R^{\mathcal{M}}\} \subseteq R^{\mathcal{M}}$, forman una estructura de L de universo N. Afirmamos que esta subestructura de $\mathcal{M}$, a la que llamaremos $\mathcal{N}$, es la menor subestructura de $\mathcal{M}$ cuyo universo incluye al conjunto A. Para demostrarlo supondremos otra subestructura $\mathcal{M}' \subseteq \mathcal{M}$ tal que $A \subseteq M'$ y un término t de L. Si t es un símbolo de constante de L, entonces su interpretación en $\mathcal{M}$ pertenece a A y, por tanto, también pertenece a M'. Si t es una variable y $a \in A$, entonces $t^{\mathcal{M}}(a) = a \in A$ y, por tanto, también pertenecerá a M'. Como última opción, supongamos que $t = F \, t_1 \dots t_k$ para F símbolo de función k-ádico de L y $t_1, \dots, t_k$ términos de L tales que $t_i^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n) \in A$ para $1 \leq i \leq k$. Entonces $t^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n) \in A$ y, por tanto, también pertenece a M'. En definitiva, se tiene que $N \subseteq M'$.

La estructura $\mathcal{M}$ es una **subestructura elemental** de $\mathcal{N}$ (o equivalentemente $\mathcal{N}$ es una **extensión elemental** de $\mathcal{M}$) y se denota $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$, si $\mathcal{M}$ es una subestructura de $\mathcal{N}$ y además para cada fórmula $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ de L y cada n-tupla a de M se cumple $\mathcal{M} \models \varphi(a)$ si y solo si $\mathcal{N} \models \varphi(a)$. Como observación, si $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$ entonces $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$, ya que las sentencias son un caso particular de fórmulas de un lenguaje.

Una **inmersión elemental** de $\mathcal{M}$ en $\mathcal{N}$ es una inmersión f de $\mathcal{M}$ en $\mathcal{N}$ tal que para cada fórmula $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ de L y cada n-tupla a de M, se cumple $\mathcal{M} \models \varphi(a)$ si y solo si $\mathcal{N} \models \varphi(f(a))$. $\mathcal{M}$ es elementalmente inmersible en $\mathcal{N}$ y lo denotamos $\mathcal{M} \precsim \mathcal{N}$ si existe una inmersión elemental de $\mathcal{M}$ en $\mathcal{N}$.

Lema 2.7. *Para dos estructuras $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ de un lenguaje L:*

1. *$\mathcal{M}$ es inmersible en $\mathcal{N}$ si y solo si existe una extensión $\mathcal{M}'$ de $\mathcal{M}$ isomorfa a $\mathcal{N}$.*

2. *$\mathcal{M}$ es elementalmente inmersible en $\mathcal{N}$ si y solo si existe una extensión elemental $\mathcal{M}'$ de $\mathcal{M}$ isomorfa a $\mathcal{N}$.*

Demostración: Sea f una inmersión de $\mathcal{M}$ en $\mathcal{N}$. Escogemos un conjunto A tal que $M \cap A = \varnothing$ y $|A| = |N \setminus f(M)|$ y sea $g : A \longrightarrow N \setminus f(M)$ una biyección. Podemos entonces definir una extensión $\mathcal{M}'$ de $\mathcal{M}$ con universo $M \cup A$ tal que $f \cup g$ sea un isomorfismo entre $\mathcal{N}$ y $\mathcal{M}'$. Además, si f fuese una inmersión elemental, $\mathcal{M}'$ sería una extensión elemental de $\mathcal{M}$. $\square$

Corolario 2.8. *Si f es una inmersión de una estructura $\mathcal{M}$ en otra estructura $\mathcal{N}$, ambas de lenguaje L, $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ es una fórmula de L sin cuantificadores y $a = (a_1, \ldots, a_n)$ es una n-tupla de M, entonces $\mathcal{M} \models \varphi(a)$ si y solo si $\mathcal{N} \models \varphi(f(a))$. Si, además, f es una inmersión elemental, esto vale para toda fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ de L.*

Demostración: Sea f una inmersión de $\mathcal{M}$ en $\mathcal{N}$. Entonces, por el **Lema 2.7**, existe una extensión $\mathcal{M}'$ de $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M}' \cong \mathcal{N}$. Utilizando el **Lema 2.6**, si φ no tiene cuantificadores se cumple $\mathcal{M} \models \varphi(a)$ si y solo si $\mathcal{N}' \models \varphi(a)$ si y solo si $\mathcal{N} \models \varphi(f(a))$. De igual manera, si f es una inmersión elemental, entonces existe una extensión elemental $\mathcal{M}' \succeq \mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M}' \cong \mathcal{N}$ y, por tanto, para cualquier fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ de L se cumple $\mathcal{M} \models \varphi(a)$ si y solo si $\mathcal{N}' \models \varphi(a)$ si y solo si $\mathcal{N} \models \varphi(f(a))$. $\square$

Sea $A \subseteq M$ donde M es el universo de la estructura $\mathcal{M}$. Entonces decimos que A es un **conjunto de parámetros de** M y podemos formar un conjunto $C_A = \{c_a : a \in A\}$ de nuevos símbolos de constante distintos dos a dos tal que $C_A \cap L = \varnothing$. Definimos la **expansión de $\mathcal{M}$ generada por** A, y la denotamos $\mathcal{M}_A$, como la estructura de lenguaje $L \cup C_A$ que tiene como universo el mismo M, interpreta cada símbolo de L de la misma manera que lo hacía $\mathcal{M}$ e interpreta cada nueva constante $c_a \in C_A$ como $c_a^{\mathcal{M}_A} = a$. Como observación, si $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ es una fórmula de $L \cup C_A$ y $m_1, \ldots, m_n \in M$, entonces $\varphi = \psi(x_1, \ldots, x_n, c_{a_1}, \ldots, c_{a_k})$ para una fórmula $\psi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k)$ de L y símbolos de constante $c_{a_1}, \ldots, c_{a_k} \in C_A$, y se cumple $\mathcal{M}_A \models \varphi(m_1, \ldots, m_n)$ si y solo si $\mathcal{M} \models \psi(m_1, \ldots, m_n, a_1, \ldots, a_k)$.

Supongamos el caso particular de que escogemos el mismo M como conjunto de parámetros de M y formemos la estructura $\mathcal{M}_M$ de lenguaje $L \cup C_M$ como se ha indicado anteriormente. En este caso, el **diagrama de $\mathcal{M}$ (relativo a C_M)** es el conjunto de sentencias atómicas y negaciones de sentencias atómicas del lenguaje $L \cup C_M$ que son verdaderas en $\mathcal{M}_M$. Además, el **diagrama elemental de $\mathcal{M}$ (relativo a C_M)** es el conjunto de todas las sentencias del lenguaje $L \cup C_M$ que son verdaderas en $\mathcal{M}_M$. Es decir, el diagrama elemental de $\mathcal{M}$ es $\mathrm{Th}(\mathcal{M}_M)$. Fijémonos en que una sentencia de lenguaje $L \cup C_M$ tiene la forma $\varphi(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n})$, donde $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ es una fórmula de L y $c_{a_1}, \ldots, c_{a_n}$ son los símbolos de constante que $\mathcal{M}_M$ interpreta como $a_1, \ldots, a_n \in M$, respectivamente.

Proposición 2.9. *Sean $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ dos estructuras de lenguaje L.*

1. *$\mathcal{M}$ es inmersible en $\mathcal{N}$ si y solo si hay alguna expansión de $\mathcal{N}$ que satisface el diagrama de $\mathcal{M}$.*

2. *$\mathcal{M}$ es elementalmente inmersible en $\mathcal{N}$ si y solo si hay alguna expansión de $\mathcal{N}$ que satisface el diagrama elemental de $\mathcal{M}$.*

Demostración: Sea $\mathcal{M}$ inmersible en $\mathcal{N}$. Entonces existe una inmersión $f : M \longrightarrow N$. Formemos un conjunto de nuevos símbolos de constante $C = \{c_a : a \in M\}$ tal que $C \cap L = \varnothing$ y definamos $\mathcal{N}'$ como la expansión de $\mathcal{N}$ de lenguaje $L \cup C$ que interpreta $c_a^{\mathcal{N}'} = f(a)$ para cada $c_a \in C$. Sea $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula de L sin cuantificadores y $a_1, \ldots, a_n \in M$ arbitrarios. Entonces $\varphi(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n})$ pertenece al diagrama de $\mathcal{M}$ si y solo si $\mathcal{M} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$. Sabemos, por el **Corolario 2.8**, que esto pasa si y solo si $\mathcal{N} \models \varphi(f(a_1), \ldots, f(a_n))$, y esto es si y solo si $\mathcal{N}' \models \varphi(c_{a_1}, \cdots, c_{a_n})$. Con esto, $\mathcal{N}'$ es una expansión de $\mathcal{N}$ que satisface el diagrama de $\mathcal{M}$. Si, además, f es una inmersión elemental, esto es cierto para cualquier fórmula de L, y no solo para las que no tienen cuantificadores, por lo que $\mathcal{N}'$ satisface el diagrama elemental de $\mathcal{M}$. Para demostrar la otra implicación, supongo que existe $\mathcal{N}'$ una expansión de $\mathcal{N}$ que satisface el diagrama de $\mathcal{M}$. Definimos $f : M \longrightarrow N$ de la forma $f(a) = c_a^{\mathcal{N}'}$ para cada $a \in M$. Entonces f es una inmersión. Además, si $\mathcal{N}'$ satisface el diagrama elemental de $\mathcal{M}$, entonces f es una inmersión elemental. $\square$

Para un ordinal α cualquiera, una **cadena de estructuras** de longitud α es una secuencia $(\mathcal{M}_i : i < \alpha)$ de estructuras del mismo lenguaje L tal que, para cualquier $i < j < \alpha$, se cumple $\mathcal{M}_i \subseteq \mathcal{M}_j$. Esta misma secuencia es una **cadena elemental de estructuras** si para cualquier $i < j < \alpha$, se tiene $\mathcal{M}_i \preceq \mathcal{M}_j$. Para una cadena, llamamos **unión de la cadena** a la estructura $\mathcal{M} = \bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}_i$ que tiene como universo la unión de los universos de las estructuras de la cadena y que interpreta los símbolos de L de la siguiente manera:

- Si c es un símbolo de constante de L, entonces $c^{\mathcal{M}} = c^{\mathcal{M}_i}$ donde $i < \alpha$ es arbitrario.
- Si F es un símbolo de función n-ádico de L y a es una n-tupla de M, entonces $F^{\mathcal{M}}(a) = F^{\mathcal{M}_i}(a)$ donde $i < \alpha$ arbitrario cumpliendo que a es una n-tupla de M_i.
- Si R es un símbolo de relación de L, entonces $R^{\mathcal{M}} = \bigcup_{i<\alpha} R^{\mathcal{M}_i}$.

Se tiene que, para cada $i < \alpha$, $\mathcal{M}_i$ es una subestructura de $\bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}_i$.

Lema 2.10. ***(Lema de la cadena de Tarski)*** *Si $(\mathcal{M}_i : i < \alpha)$ es una cadena elemental de estructuras de lenguaje L, entonces para cada $i < \alpha$ se cumple $\mathcal{M}_i \preceq \bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}_i$.*

Demostración: Denotamos $\mathcal{M} = \bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}_i$ y fijamos un $i_0 < \alpha$, una fórmula $\varphi(x)$ de L y una n-tupla $a = (a_1, \ldots, a_n)$ de M_{i_0}. Como $\mathcal{M}_{i_0}$ es una subestructura de $\mathcal{M}$, solo falta ver que $\mathcal{M}_{i_0} \models \varphi(a)$ si y solo si $\mathcal{M} \models \varphi(a)$. El **Lema 2.6** lo asegura si φ no tiene cuantificadores. Demostraremos los otros casos por inducción sobre φ.

- Si φ es una negación de la forma $\neg\psi$, para una fórmula ψ de L tal que $\mathcal{M}_{i_0} \models \psi(a)$ si y solo si $\mathcal{M} \models \psi(a)$, entonces

$$\begin{array}{rll} \mathcal{M}_{i_0} \models \varphi(a) & \text{si y solo si} & \mathcal{M}_{i_0} \not\models \psi(a) \\ & \text{si y solo si} & \mathcal{M} \not\models \psi(a) \\ & \text{si y solo si} & \mathcal{M} \models \varphi(a) \end{array}$$

- Si φ es una conjunción de la forma $(\psi \wedge \chi)$, para fórmulas ψ y χ de L tales que $\mathcal{M}_{i_0} \models \psi(a)$ si y solo si $\mathcal{M} \models \psi(a)$ y $\mathcal{M}_{i_0} \models \chi(a)$ si y solo si $\mathcal{M} \models \chi(a)$, entonces

$$\begin{array}{rll} \mathcal{M}_{i_0} \models \varphi(a) & \text{si y solo si} & \mathcal{M}_{i_0} \models (\psi \wedge \chi)(a) \\ & \text{si y solo si} & \mathcal{M}_{i_0} \models \psi(a) \text{ y } \mathcal{M}_{i_0} \models \chi(a) \\ & \text{si y solo si} & \mathcal{M} \models \psi(a) \text{ y } \mathcal{M} \models \chi(a) \\ & \text{si y solo si} & \mathcal{M} \models (\psi \wedge \chi)(a) \\ & \text{si y solo si} & \mathcal{M} \models \varphi(a) \end{array}$$

- Si φ es de la forma $\exists y\, \psi$ para una fórmula ψ de L que cumple $\mathcal{M}_{i_0} \models \psi(a, b)$ si y solo si $\mathcal{M} \models \psi(a, b)$ para todo $b \in M_{i_0}$, entonces

$$\begin{array}{rll} \mathcal{M}_{i_0} \models \varphi(a) & \text{si y solo si} & \mathcal{M}_{i_0} \models \exists y\, \psi(a, y) \\ & \text{si y solo si} & \text{hay un } b \in M_{i_0} \text{ tal que } \mathcal{M}_{i_0} \models \psi(a, b) \\ \text{(por hipótesis de inducción)} & \text{si y solo si} & \text{hay un } b \in M_{i_0} \text{ tal que } \mathcal{M} \models \psi(a, b) \\ (\text{como } M_{i_0} \subseteq M) & \text{si y solo si} & \text{hay un } b \in M \text{ tal que } \mathcal{M} \models \psi(a, b) \\ & \text{si y solo si} & \mathcal{M} \models \exists y\, \psi(a, y) \\ & \text{si y solo si} & \mathcal{M} \models \varphi(a) \end{array}$$

□

En esta sección hemos visto que, para ver qué fórmulas se cumplen en una estructura, ayuda mucho conocer cuáles se cumplen en una subestructura o una extensión suya, especialmente si esta es una extensión que las relaciona es elemental. Además, hemos introducido el concepto de expansión, mediante el que podemos estudiar una fórmula interpretada por unos elementos del universo de una estructura como una sentencia del lenguaje de su expansión. Esto nos ayudará en demostraciones posteriores.

2.3. Tipos

Definimos L_n como el conjunto de fórmulas de un lenguaje L arbitrario cuyas variables libres están en $\{x_i : i < n\}$. Es decir, como el conjunto de fórmulas de L que tienen, a lo sumo, n variables libres. En particular, L_0 es el conjunto de sentencias de L. Si T es una teoría consistente de lenguaje L, decimos que un conjunto de fórmulas $\Sigma(x)$ es **consistente con** T si $T \cup \Sigma(x)$ es consistente.

Un n**-tipo** de una teoría T de lenguaje L es un conjunto de fórmulas de L_n consistente con T. Un n-tipo p es **completo** si para cada fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ de L_n, o bien $\varphi \in p$ o bien $\neg\varphi \in p$. Sea $p(x_1, \ldots, x_n)$ un n-tipo de una teoría T y sea $\mathcal{M}$ un modelo de T. Si a es una n-tupla de M, entonces a es una **realización** de p si $\mathcal{M} \models p(a)$. Se dice que $\mathcal{M}$ **realiza** p si en M hay alguna realización de p. En caso contrario, se dice que $\mathcal{M}$ **omite** p.

Sean T una teoría completa de lenguaje L, $\mathcal{M}$ un modelo suyo y $A \subseteq M$ un conjunto de parámetros de M para el que creamos un conjunto C_A de nuevos símbolos de constante, distintos dos a dos, y tal que $C_A \cap L = \varnothing$. Se define $T(A)$ como el conjunto de sentencias de $L \cup C_A$ que la expansión natural $\mathcal{M}_A$ de $\mathcal{M}$ satisface. Es decir, $T(A) = \mathrm{Th}(\mathcal{M}_A)$ y, por tanto, $T(A)$ es siempre una teoría completa de lenguaje $L \cup C_A$.

Para un conjunto de parámetros $A \subseteq M$ definimos, para cada $n < \omega$, $S_n(A)$ como el conjunto de todos los n-tipos completos de la teoría $T(A)$. Para cada n-tupla $a = (a_1, \ldots, a_n)$ de M, definimos el **tipo de** a como el conjunto de fórmulas del lenguaje L_n que el modelo $\mathcal{M}$ satisface al sustituir sus variables libres por la tupla a, y lo denotamos $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(a)$. Es decir,

$$\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(a) = \{\varphi \in L_n \,:\, \mathcal{M} \models \varphi(a)\}$$

Es importante no confundir la definición anterior con la siguiente. Si $A \subseteq M$ es un conjunto de parámetros, creamos un conjunto $C_A = \{c_a : a \in A\}$ de nuevos símbolos de constante, distintos dos a dos, y tal que $C_A \cap L = \varnothing$. Si $m = (m_1, \ldots, m_n)$ es una n-tupla de M, definimos el **tipo de** m **sobre** A como el conjunto de fórmulas del lenguaje $(L \cup C_A)_n$ que el modelo $\mathcal{M}_A$ satisface al sustituir sus variables libres por la tupla m, y lo denotamos $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(m/A)$. Es decir,

$$\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(m/A) = \{\varphi \in (L \cup C_A)_n \,:\, \mathcal{M}_A \models \varphi(m)\}$$

Como observación, si $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ es una fórmula de $(L \cup C_A)_n$, entonces tiene la forma $\varphi = \psi(x_1, \ldots, x_n, c_{a_1}, \ldots, c_{a_k})$ para una fórmula $\psi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k)$ de lenguaje L y símbolos de constante $c_{a_1}, \ldots, c_{a_k} \in C_A$, que $\mathcal{M}_A$ interpreta como los elementos $a_1, \ldots, a_k \in A \subseteq M$, respectivamente. En este caso,

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(m/A) \quad & \text{si y solo si} \quad \mathcal{M}_M \models \varphi(m_1, \ldots, m_n) \\ & \text{si y solo si} \quad \mathcal{M} \models \psi(m_1, \ldots, m_n, a_1, \ldots, a_k) \end{aligned}$$

Se cumple que, para cada n-tupla $m = (m_1, \ldots, m_n)$ de M y cada subconjunto $A \subseteq M$, $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(m/A)$ es un n-tipo completo de la teoría $T(A)$, ya que para cada fórmula φ del lenguaje $(L \cup C_A)_n$, o bien $\mathcal{M} \models \varphi(m)$ y, por tanto, $\varphi \in \mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(m/A)$, o bien $\mathcal{M} \not\models \varphi(m)$, con lo que $\mathcal{M} \models \neg\varphi(m)$ y $\neg\varphi \in \mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(m/A)$.

Proposición 2.11. *Si dos estructuras son elementalmente equivalentes, entonces tienen extensiones elementales isomorfas entre sí.*

Demostración: Supongamos $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$ dos estructuras de lenguaje L elementalmente equivalentes. Formemos los conjuntos $C_1 = \{c_a : a \in M_1\}$ y $C_2 = \{c_b : b \in M_2\}$ de nuevos símbolos de constante, tales que sus elementos son distintos dos a dos y ambos disjuntos con L y entre ellos. Sean las respectivas teorías $T(M_1)$ de lenguaje $L \cup C_1$ y $T(M_2)$ de lenguaje $L \cup C_2$. Veremos que la teoría $T = T(M_1) \cup T(M_2)$ es consistente. Como una estructura satisface un conjunto finito de sentencias de su lenguaje si y solo si satisface la sentencia formada por la conjunción de todas las sentencias del conjunto, un subconjunto finito de T puede estar representado por la conjunción de una sentencia $\sigma_1 \in T(M_1)$ de lenguaje $L \cup C_1$, y una sentencia $\sigma_2 \in T(M_2)$ de lenguaje $L \cup C_2$. Sea $\mathcal{N} = \mathcal{M}_{1M_1}$ la expansión de $\mathcal{M}_1$ generada por M_1. Es decir, la estructura de lenguaje $L \cup C_1$ con universo M_1 que interpreta cada símbolo de L como lo hace $\mathcal{M}_1$ e interpreta $c_a^{\mathcal{N}} = a$ para cada $c_a \in C_1$. Entonces $\mathcal{N}$ es un modelo de $T(M_1)$ y en particular $\mathcal{N} \models \sigma_1$. Como $\sigma_2 \in T(M_2)$, podemos dar la nueva representación $\sigma_2 = \psi(c_{b_1}, \ldots, c_{b_m})$, donde ψ es una fórmula de L y $c_{b_1}, \ldots, c_{b_m} \in C_2$. Ahora, como $\sigma_2 \in T(M_2)$, sabemos que $\mathcal{M}_2 \models \psi(b_1, \ldots, b_m)$, por lo que $\mathcal{M}_2 \models \exists x_1 \ldots x_n\, \psi(x_1, \ldots, x_n)$, donde $\exists x_1 \ldots x_n\, \psi(x_1, \ldots, x_n)$ es una sentencia de L. Como, por hipótesis, $\mathcal{M}_1 \equiv \mathcal{M}_2$, se tiene que $\mathcal{M}_1 \models \exists x_1 \ldots x_n\, \psi(x_1, \ldots, x_n)$, por lo que hay elementos $a_1, \ldots, a_m \in M_1$ tales que $\mathcal{M}_1 \models \psi(a_1, \ldots, a_m)$. Definamos ahora el conjunto $C_2' = \{c_{b_1}, \ldots, c_{b_m}\} \subseteq C_2$ y sea $\mathcal{N}' = \mathcal{N}_{C_2'}$ la expansión de lenguaje $L \cup C_1 \cup C_2'$ de $\mathcal{N}$ que interpreta cada símbolo de $L \cup C_1$ como lo hace $\mathcal{N}$ e interpreta $c_{b_i}^{\mathcal{N}'} = a_i$ para cada $c_{b_i} \in C_2'$. Entonces $\mathcal{N}' \models \sigma_1 \wedge \sigma_2$. Esto quiere decir que T es finitamente satisfacible y, por el *Teorema de compacidad*, satisfacible, por lo que T es consistente. Ahora fijamos $i = 1, 2$ y observamos que una sentencia de $L \cup C_i$ tiene la forma $\varphi(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n})$, donde $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ es una fórmula de L y $c_{a_j} \in C_i$, por lo que $a_j \in M_i$, para cada $1 \leq j \leq n$. Además, se tiene que $\mathcal{M}_i \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$ si y solo si $\mathcal{M}_{iM_i} \models \varphi(c_{a_1}^{\mathcal{M}_{iM_i}}, \ldots, c_{a_n}^{\mathcal{M}_{iM_i}})$. Teniendo esto en cuenta, sea $\mathcal{A}$ un modelo de la teoría $T = T(M_1) \cup T(M_2)$ de lenguaje $L \cup C_1 \cup C_2$ y sea $\mathcal{A}'$ la restricción de $\mathcal{A}$ al lenguaje L. Entonces la expansión de $\mathcal{A}'$ al lenguaje $L \cup C_1$ que interpreta cada símbolo $c_a \in C_1$ como lo hace $\mathcal{A}$ es un modelo del diagrama elemental de $\mathcal{M}_1$. Como existe una expansión de $\mathcal{A}'$ que satisface el diagrama elemental de $\mathcal{M}_1$, por la **Proposición 2.9** se tiene que $\mathcal{M}_1$ es elementalmente inmersible en $\mathcal{A}'$. De igual manera, la expansión de $\mathcal{A}'$ al lenguaje $L \cup C_2$ que interpreta cada símbolo $c_b \in C_2$ como lo hace $\mathcal{A}$ es un modelo del diagrama elemental de $\mathcal{M}_2$ y, por tanto, $\mathcal{M}_2$ también es elementalmente inmersible en $\mathcal{A}'$. Ahora, utilizando el **Lema 2.7**, existen $\mathcal{N}_1 \succeq \mathcal{M}_1$ y $\mathcal{N}_2 \succeq \mathcal{M}_2$ tales que $\mathcal{A}' \cong \mathcal{N}_1$ y $\mathcal{A}' \cong \mathcal{N}_2$, por lo que $\mathcal{N}_1 \cong \mathcal{N}_2$. $\square$

Como observación, si $\{\mathcal{N}_i : i \in I\}$ es un conjunto de extensiones elementales de una estructura $\mathcal{M}$, entonces todas las estructuras $\mathcal{N}_i$ son elementalmente equivalentes entre ellas, ya que para cualquier par $i_0, i_1 \in I$, se tiene que tanto $\mathcal{N}_{i_0}$ como $\mathcal{N}_{i_1}$ son elementalmente equivalentes a $\mathcal{M}$ y, por tanto, también lo son entre ellas.

Además, si $\{\mathcal{M}_i : i \in I\}$ es un conjunto de estructuras elementalmente equivalentes entre ellas, entonces tienen extensiones elementales isomorfas entre ellas. Esto podemos verlo iterando la **Proposición 2.11** si I es un conjunto finito. Pero esto demuestra que $\bigcup_{i \in I_0} T(\mathcal{M}_i)$, donde I_0 es un subconjunto finito de I y los conjuntos de nuevas constantes formados por cada estructura son disjuntos, es satisfacible. Por tanto, $\bigcup_{i \in I} T(\mathcal{M}_i)$ es finitamente satisfacible y, por el *Teorema de compacidad*, satisfacible. Un modelo de $\bigcup_{i \in I} T(\mathcal{M}_i)$ será isomorfo a una extensión elemental de cada estructura $\mathcal{M}_i$ con $i \in I$.

Utilizando lo anterior podemos ver que, si T es una teoría completa de lenguaje L,

$\mathcal{M}_1$ es un modelo suyo y $A \subseteq M_1$ es un conjunto de parámetros de M_1, cualquier n-tipo completo de la teoría $T(A)$, $p(x_1, \ldots, x_n) \in S_n(A)$, es consistente por definición y, por tanto, existe un modelo $\mathcal{M}_2$ de $T(A)$ que lo realiza. Como la restricción de $\mathcal{M}_2$ al lenguaje L es modelo de T, y T es completa, entonces $\mathcal{M}_1$ es elementalmente equivalente a la restricción de $\mathcal{M}_2$ al lenguaje L, por lo que estas dos estructuras tienen extensiones elementales isomorfas entre ellas, a las que llamaremos $\mathcal{M}'_1$ y $\mathcal{M}'_2$, respectivamente. Como $\mathcal{M}_2$ realiza $p(x_1, \ldots, x_n)$, su restricción a L también lo realiza, por lo que $\mathcal{M}'_2$ lo realiza también y, en consecuencia, lo realiza también $\mathcal{M}'_1$. En definitiva, todo tipo completo de $T(A)$ se realiza en alguna extensión elemental de cada modelo de T.

Lema 2.12. *Si T es una teoría completa de lenguaje L, para cada modelo $\mathcal{M}$ de T y cada conjunto de parámetros $A \subseteq M$ de M, existe una extensión elemental $\mathcal{N} \succeq \mathcal{M}$ que realiza todo n-tipo completo de $T(A)$.*

Demostración: Sea $\mathcal{M}$ un modelo de T y $A \subseteq M$ un conjunto de parámetros de M. Sea $|S_n(A)| = \kappa$. Podemos dar una ordenación

$$S_n(A) = \{p_i(x_1, \ldots, x_n) \in S_n(A) \ : \ i < \kappa\}$$

Como sabemos, podemos crear la cadena elemental $(\mathcal{M}_i : i < \kappa)$ tal que $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}$ y, para cada $i < \kappa$, M_{i+1} es una extensión elemental de $\mathcal{M}_i$ que realiza $p_i(x_1, \ldots, x_n)$. Entonces, la unión de esta cadena es una extensión elemental de $\mathcal{M}$ que satisface todos los n-tipos completos de $T(A)$. □

2.4. Modelos ω-saturados

Esta sección se encargará de introducir el concepto de ω-saturación, utilizando para ello las definiciones y los resultados expuestos en la sección anterior. Además, tratará de relacionar varios de los conceptos introducidos en las anteriores secciones, como puede ser el de estructuras parcialmente isomorfas o el de equivalencia elemental entre estructuras, con el de ω-saturación.

Un modelo $\mathcal{M}$ de una teoría completa T es **ω-saturado** si, para cada subconjunto finito $A \subseteq M$, todo tipo completo $p \in S_1(A)$ se realiza en $\mathcal{M}$.

Proposición 2.13. *Todo modelo de una teoría completa tiene una extensión elemental ω-saturada.*

Demostración: Sea T una teoría completa de un lenguaje L y sea $\mathcal{M}$ un modelo de suyo. Sabemos, por el curso de *Lógica matemática*, que todo 1-tipo completo de $S_1(A)$, donde $A \subseteq M$, puede extenderse a un 1-tipo completo de $S_1(M)$. Por el **Lema 2.12** sabemos que hay una extensión elemental $\mathcal{M}_0$ de $\mathcal{M}$ que realiza todo 1-tipo completo de $S_1(M)$ y, por tanto, todos los tipos completos de $S_1(A)$, para cualquier $A \subseteq M$ finito. Repitiendo el proceso sobre estas nuevas estructuras, se obtiene la cadena elemental $(\mathcal{M}_i : i < \omega)$ donde cada $\mathcal{M}_{i+1}$ realiza todos los tipos sobre subconjuntos finitos de M_i. Entonces la unión de la cadena es ω-saturada, ya que si p es un 1-tipo completo de $T(\bigcup_{i<\omega} \mathcal{M}_i)$, entonces existe un $i_0 < \omega$ tal que p es un 1-tipo completo de $T(\mathcal{M}_{i_0})$, por lo que $\bigcup_{i<\omega} \mathcal{M}_i$ lo realiza. Además, esta es una extensión elemental de $\mathcal{M}$. $\square$

Sean $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ dos estructuras de lenguaje L. Una **aplicación elemental parcial** de $\mathcal{M}$ en $\mathcal{N}$ es una función f con $\operatorname{Dom} f \subseteq M$ y $\operatorname{Im} f \subseteq N$ tal que, para cada fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ de L y cada n-tupla $a = (a_1, \ldots, a_n)$ de $\operatorname{Dom} f$, se cumple $\mathcal{M} \models \varphi(a)$ si y solo si $\mathcal{N} \models \varphi(f(a))$. Toda aplicación elemental parcial f de $\mathcal{M}$ en $\mathcal{N}$ es inyectiva, ya que si suponemos dos elementos $a, b \in \operatorname{Dom} f \subseteq M$ tales que $a \neq b$ y $f(a) = f(b)$, entonces para la fórmula $\varphi(x, y) = (x \doteq y)$ se cumple $\mathcal{M} \not\models \varphi(a, b)$ y $\mathcal{N} \models \varphi(f(a), f(b))$, que es absurdo.

Si f es una aplicación elemental parcial de $\mathcal{M}$ en $\mathcal{N}$ con $A \subseteq \operatorname{Dom} f$ y p es un n-tipo sobre A, entonces definimos el **tipo conjugado de p por f** como el tipo p^f sobre $f(A)$ que se obtiene al sustituir en cada fórmula de p los parámetros de A por sus correspondientes imágenes vía f. Es decir,

$$p^f = \{\varphi(x_1, \ldots, x_n, f(a_1), \ldots, f(a_k)) \, : \, \varphi(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_k) \in p\}$$

Observación 2.14. *Sea f una aplicación elemental parcial de $\mathcal{M}$ en $\mathcal{N}$, $A \subseteq \operatorname{Dom} f$, $a \in M$, $p = \operatorname{tp}_{\mathcal{M}}(a/A)$ y $b \in N$. Si b es una realización de p^f, entonces $f \cup \{(a, b)\}$ es una aplicación elemental parcial.*

Demostración: Que b sea una realización de p^f significa que para toda fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n, y)$ de L y todo $a_1, \ldots, a_n \in A$, se cumple que $\mathcal{M} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n, a)$ si y solo si $\mathcal{N} \models \varphi(f(a_1), \ldots, f(a_n), b)$. Sea ahora $g = f \cup \{(a, b)\}$. Si $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ es una fórmula de L y $a_1, \ldots, a_n \in A \cup \{a\}$, se tiene que $\mathcal{M} \models \psi(a_1, \ldots, a_n)$ si y solo si $\mathcal{N} \models \psi(g(a_1), \ldots, g(a_n))$. $\square$

Observación 2.15. *Sean $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ dos estructuras de lenguaje L y f una aplicación elemental parcial de $\mathcal{M}$ en $\mathcal{N}$. Si A es un subconjunto de M y p es un n-tipo completo sobre A, entonces p^f es un n-tipo completo sobre $f(A)$.*

Para relajar la escritura, si A es un subconjunto del universo M de la estructura $\mathcal{M}$, escribiremos $\varphi(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_k)$ para referirnos a la fórmula de lenguaje $(L \cup C_A)_n$ $\varphi(x_1, \ldots, x_n, c_{a_1}, \ldots, c_{a_k})$, ya que la expansión $\mathcal{M}_A$ de $\mathcal{M}$ interpretará así las constantes $c_{a_1}, \ldots, c_{a_k} \in C_A$.

Demostración: Si p es un n-tipo completo sobre A, entonces para cualquier fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n, y)$ de L y cualquier n-tupla $a = (a_1, \ldots, a_n)$ de A, o bien $\varphi(a, y) \in p$, o bien $\neg\, \varphi(a, y) \in p$, por lo que, o bien $\varphi(f(a), y) \in p^f$, o bien $\neg\, \varphi(f(a), y) \in p^f$, respectivamente. $\square$

Lema 2.16. *Toda aplicación elemental parcial es un isomorfismo parcial.*

Demostración: Sea $f : M \longrightarrow N$ una aplicación elemental parcial de $\mathcal{M}$ en $\mathcal{N}$. Entonces f es inyectiva y, además, para cada fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ de L y cada n-tupla a de $\operatorname{Dom} f$, se cumple $\mathcal{M} \models \varphi(a)$ si y solo si $\mathcal{N} \models \varphi(f(a))$. Teniendo esto en cuenta:

- Sea c es un símbolo de constante de L y $a \in \operatorname{Dom} f$. Definimos $\varphi(x) = c \doteq x$. Se cumple que
$$\begin{aligned} c^{\mathcal{M}} = a \quad & \text{si y solo si} \quad \mathcal{M} \models \varphi(a) \\ & \text{si y solo si} \quad \mathcal{N} \models \varphi(f(a)) \\ & \text{si y solo si} \quad c^{\mathcal{N}} = f(a) \end{aligned}$$

- Sea F es un símbolo de función n-ádico de L, a una n-tupla de $\operatorname{Dom} f$ y $b \in \operatorname{Dom} f$. Definimos $\varphi(x_1, \ldots, x_n, y) = F(x_1, \ldots, x_n) \doteq y$. Se cumple que
$$\begin{aligned} F^{\mathcal{M}}(a) = b \quad & \text{si y solo si} \quad \mathcal{M} \models \varphi(a, b) \\ & \text{si y solo si} \quad \mathcal{N} \models \varphi(f(a), f(b)) \\ & \text{si y solo si} \quad F^{\mathcal{N}}(f(a)) = f(b) \end{aligned}$$

- Sea R es un símbolo de relación n-ádico de L y a una n-tupla de $\operatorname{Dom} f$. Definimos $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = R(x_1, \ldots, x_n)$. Se cumple que
$$\begin{aligned} a \in R^{\mathcal{M}} \quad & \text{si y solo si} \quad \mathcal{M} \models \varphi(a) \\ & \text{si y solo si} \quad \mathcal{N} \models \varphi(f(a)) \\ & \text{si y solo si} \quad f(a) \in R^{\mathcal{N}} \end{aligned}$$

□

Proposición 2.17. *Dos estructuras ω-saturadas y elementalmente equivalentes son parcialmente isomorfas.*

Demostración: Suponemos $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ dos estructuras de lenguaje L ω-saturadas y elementalmente equivalentes. Queremos ver que existe un conjunto de isomorfismos parciales no vacío con las propiedades *back* y *forth* entre ellas. Sea I el conjunto de las aplicaciones elementales parciales f de $\mathcal{M}$ en $\mathcal{N}$ con $\operatorname{Dom} f \subseteq M$ finito y, por tanto, $\operatorname{Im} f \subseteq N$ también finito. Como $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$, el isomorfismo parcial vacío pertenece a I y, por tanto, I es un conjunto no vacío. Supongamos $f \in I$ y sean $A = \operatorname{Dom} f$ y $B = \operatorname{Im} f$. Escojamos $a \in M$ arbitrario y consideremos $p = \operatorname{tp}_{\mathcal{M}}(a/A)$. Como p es completo, entonces p^f también lo es y, por tanto, $p^f \in S_1(B)$. Como $\mathcal{N}$ es ω-saturada, y p^f es un tipo sobre B con B finito, existe un elemento $b \in N$ que realiza p^f y, por tanto, $g = f \cup \{(a, b)\}$ es elemental y finita. Teniendo lo anterior en cuenta, vemos que g es una aplicación elemental parcial de I que extiende a f y cumple $a \in \operatorname{Dom} g$. Escojamos ahora $b \in N$ arbitrario y consideremos $p = \operatorname{tp}_{\mathcal{N}}(b/B)$. Como p es completo, entonces $p^{f^{-1}}$ también lo es por ser f un isomorfismo parcial, y, por tanto, $p^{f^{-1}} \in S_1(A)$. Como $\mathcal{M}$ es ω-saturada y $p^{f^{-1}}$ es un tipo sobre A, con A finito, existe un elemento $a \in M$ que realiza $p^{f^{-1}}$ y, por tanto, $g = f \cup \{(a, b)\}$ es elemental y finita. Teniendo lo anterior en cuenta, vemos que g es una aplicación elemental parcial de I que extiende a f y cumple $b \in \operatorname{Im} g$. Con esto queda demostrado que I es un conjunto de isomorfismos parciales de $\mathcal{M}$ en $\mathcal{N}$ no vacío con las propiedades *back* y *forth* y, por tanto, $\mathcal{M} \cong_p \mathcal{N}$. □

Proposición 2.18. *Una teoría T de lenguaje L es completa si y solo si para todo par de modelos de T ω-saturados, estos son parcialmente isomorfos.*

Demostración: Supongamos T completa y $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ dos modelos ω-saturados de T. Como ambos son modelos de una teoría completa, se tiene que $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$. Entonces, utilizando la **Proposición 2.17**, se llega a $\mathcal{M} \cong_p \mathcal{N}$. Para la otra implicación, supongamos que para cualquier par de modelos ω-saturados de la teoría T, estos modelos son parcialmente isomorfos. Sean $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ dos modelos de esta teoría. Sabemos que existen extensiones elementales ω-saturadas $\mathcal{M}'$ y $\mathcal{N}'$ de estas estructuras. Como $\mathcal{M}'$ y $\mathcal{N}'$ también son modelos de T, se tiene $\mathcal{M}' \cong_p \mathcal{N}'$. Por la **Proposición 2.5** tenemos que $\mathcal{M}' \equiv \mathcal{N}'$. Utilizando la propiedad transitiva de $\equiv$ y el hecho de que $\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}' \equiv \mathcal{N}' \equiv \mathcal{N}$, se tiene que $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ son elementalmente equivalentes. En definitiva, para cualquier par de modelos de T, estos son elementalmente equivalentes. Utilizando el **Lema 2.2**, vemos que T es una teoría completa. $\square$

Con esto terminamos el segundo capítulo. Estos han sido los resultados de teoría de modelos que hemos creído esenciales para escribir este trabajo. Con todos ellos demostrados, vamos a aplicarlos ahora al estudio de la teoría de cuerpos.

Capítulo 3

Aplicación en teoría de cuerpos

En este último capítulo expondremos, con la ayuda de los resultados que hemos ido introduciendo, la forma en la que la teoría de modelos es capaz de estudiar otros campos de las matemáticas. En nuestro caso, buscaremos resultados relacionados con la teoría de cuerpos algebraicamente cerrados.

De ahora en adelante, llamaremos $\mathcal{L}$ al lenguaje formado por $\{0, 1, -, +, \cdot\}$, donde 0 y 1 son símbolos de constante, $-$ es un símbolo de función monádico y $+$ y $\cdot$ son símbolos de función 2-ádicos. En $\mathcal{L}$, definimos la **teoría de cuerpos**, y la denotamos $\mathbf{F}$, como la teoría axiomatizada por:

- $\neg\, 0 \doteq 1$
- $\forall x\, \forall y\, \forall z\, ((x + y) + z \doteq x + (y + z))$
- $\forall x\, \forall y\, \forall z\, ((x \cdot y) \cdot z \doteq x \cdot (y \cdot z))$
- $\forall x\, \forall y\, (x + y \doteq y + x)$
- $\forall x\, \forall y\, (x \cdot y \doteq y \cdot x)$
- $\forall x\, \forall y\, \forall z\, (x \cdot (y + z) \doteq x \cdot y + x \cdot z)$
- $\forall x\, (x + 0 \doteq x)$
- $\forall x\, (x \cdot 1 \doteq x)$
- $\forall x\, (x + (-x) \doteq 0)$
- $\forall x\, (\neg\, x \doteq 0 \to \exists y\, (x \cdot y \doteq 1))$

Estos son los axiomas que definen los cuerpos. Por tanto, una estructura de $\mathcal{L}$ que sea modelo de $\mathbf{F}$, es un cuerpo. Los elementos de tal cuerpo serán los elementos del universo de la estructura.

Cada número entero $n \in \mathbb{Z}$ se puede representar en $\mathcal{L}$ de la siguiente manera: si $n = 0$, entonces n se representa por el símbolo de constante 0. Si $n > 0$, entonces n se representa por $1 + \overset{n)}{\dots} + 1$. Finalmente, si $n < 0$, entonces n se representa por $-(1 + \overset{n)}{\dots} + 1)$.

Para cada término $t(x_1, \dots, x_n)$ de $\mathcal{L}$ existe un único polinomio $P(x_1, \dots, x_n)$ con coeficientes enteros tal que

$$T \vdash t(x_1, \dots, x_n) \doteq P(x_1, \dots, x_n)$$

Haciendo un abuso de notación, hablaremos de este polinomio asociado para referirnos a cada término del lenguaje $\mathcal{L}$.

Una fórmula atómica de $\mathcal{L}$, al no haber en este lenguaje símbolos de relación, será una ecuación de la forma

$$P(x_1, \dots, x_n) \doteq Q(x_1, \dots, x_m)$$

donde $P(x_1, \dots, x_n)$ y $Q(x_1, \dots, x_m)$ son polinomios con coeficientes enteros. Estas expresiones equivalen a

$$P(x_1, \dots, x_n) + (-Q(x_1, \dots, x_m)) \doteq 0$$

donde el término $P(x_1, \dots, x_n) + (-Q(x_1, \dots, x_m))$ también tiene un único polinomio $R(x_1, \dots, x_n)$ con coeficientes enteros asociado tal que

$$T \vdash P(x_1, \dots, x_n) + (-Q(x_1, \dots, x_m)) \doteq R(x_1, \dots, x_n)$$

Por tanto, las fórmulas atómicas de $\mathcal{L}$ son ecuaciones que podemos expresar como

$$P(x_1, \dots, x_n) \doteq 0$$

donde $P(x_1, \dots, x_n)$ es un polinomio con coeficientes enteros.

Llamamos inecuación a la negación de una ecuación $\neg\, P(x_1, \dots, x_n) \doteq 0$.

Una fórmula libre de cuantificadores en este lenguaje es, por tanto, una combinación booleana de ecuaciones. Esta puede presentarse como una disyunción de conjunciones de ecuaciones e inecuaciones. A cada una de estas conjunciones de ecuaciones e inecuaciones la llamaremos **sistema de ecuaciones e inecuaciones**.

3.1. Conceptos de álgebra

Sea $\mathcal{K}$ un cuerpo con universo K. Definimos el morfismo de anillos $\phi : \mathbb{Z} \longrightarrow K$ definido por $\phi(0) = 0^{\mathcal{K}}$ y $\phi(1) = 1^{\mathcal{K}}$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{Z}$ positivo, $\phi(n) = (1 + \overset{n)}{\dots} + 1)^{\mathcal{K}}$ (llamaremos $n^{\mathcal{K}}$ a este elemento por comodidad) y $\phi(-n) = (-(1 + \overset{n)}{\dots} + 1))^{\mathcal{K}} = -n^{\mathcal{K}}$. Como ya sabemos, pueden suceder dos cosas. O bien $\operatorname{Ker} \phi = \{0\}$, en cuyo caso la característica de $\mathcal{K}$ es 0 y se denota $\operatorname{Char} \mathcal{K} = 0$, o bien $\operatorname{Ker} \phi = p\mathbb{Z}$ para $p \in \mathbb{Z}$ primo y, entonces, la característica de $\mathcal{K}$ es p y se denota $\operatorname{Char} \mathcal{K} = p$. Se tiene que, si $\operatorname{Char} \mathcal{K} = 0$, entonces

$\phi(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ y, por tanto, $\phi(\mathbb{Z})$ es un dominio de integridad. Si, por el contrario, $\operatorname{Char} \mathcal{K} = p$ para $p \in \mathbb{Z}$ primo, entonces $\phi(\mathbb{Z}) = \{ 0^{\mathcal{K}}, 1^{\mathcal{K}}, \ldots, (p-1)^{\mathcal{K}} \}$, que es un subcuerpo de $\mathcal{K}$. En definitiva, $\phi(\mathbb{Z})$ es un dominio de integridad. Es decir, $\operatorname{Im} \phi$ es siempre un dominio de integridad y, por tanto, $\operatorname{Ker} \phi$ es un ideal primo de $\mathcal{K}$.

Para obtener la **teoría de cuerpos de característica** p, que denotaremos por $\mathbf{F_p}$, deberemos añadir a los axiomas de la teoría de cuerpos otros axiomas. Si $p \in \mathbb{Z}$ es un número primo, añadimos el axioma $p \doteq 0$, donde $p = 1 + \overset{p)}{\ldots} + 1$. En cambio, si $p = 0$, añadiremos los infinitos axiomas $\neg\, p \doteq 0$ para cada $p \in \mathbb{Z}$ con $p \geq 0$ primo.

Sea $\mathcal{K}$ un cuerpo y a y b dos elementos de extensiones de $\mathcal{K}$. Decimos que a y b son **$\mathcal{K}$-similares** si los cuerpos $\mathcal{K}(a)$ y $\mathcal{K}(b)$ son isomorfos bajo un isomorfismo que fija K y envía $a \mapsto b$. Para ver si esto sucede, consideramos la aplicación exhaustiva que envía cada polinomio $P(x)$ de $K[X]$ al elemento $P(a)$ del anillo $K[a]$ generado por K y a. Llamaremos al núcleo de esta aplicación **ideal de ecuaciones de a sobre K** y lo denotaremos $I_{a/K}$. Por el primer teorema de isomorfía, $K[X]/I_{a/K} \cong K[a]$. Además, como $K[a]$ es un dominio de integridad, entonces también lo es $K[X]/I_{a/K}$, y esto pasa si y solo si $I_{a/K}$ es un ideal primo de $K[X]$. En definitiva, $I_{a/K}$ es un ideal primo de $K[X]$. Una clase de $\mathcal{K}$-similitud es, por tanto, un ideal primo. Dos elementos son $\mathcal{K}$-similares si y solo si satisfacen las mismas ecuaciones con coeficientes en K y esto pasa si y solo si satisfacen las mismas fórmulas sin cuantificadores con coeficientes en K.

Sea $\mathcal{K}$ un cuerpo y a un elemento de una extensión de $\mathcal{K}$. Si $I_{a/K} = \{0\}$, decimos que a es **trascendente** sobre K. Es el caso en que a no es cero de ningún polinomio con coeficientes en K. En este caso $K[a]$ es isomorfo a $K[X]$ y, el cuerpo de fracciones de $K[a]$, $K(a)$, es isomorfo al cuerpo $K(X)$ de funciones racionales en una variable con coeficientes en K. De otra manera, $I_{a/K}$ está generado por un polinomio irreducible, del que a es un cero, al que llamaremos **polinomio mínimo de a sobre K** y denotaremos $m_{a/K}(x)$. En este caso decimos que a es **algebraico** sobre K.

Un cuerpo $\mathcal{K}$ es **algebraicamente cerrado** si todo polinomio de grado $n \geq 1$ en una variable con coeficientes en K tiene un cero en K. Es decir, si para cada polinomio $P(x)$ no constante con coeficientes en K, se cumple $\mathcal{K} \models \exists x\, (P(x) \doteq 0)$.

Para obtener la **teoría de cuerpos algebraicamente cerrados**, que denotaremos **ACF**, añadimos a los axiomas de la teoría **F** los infinitos axiomas siguientes: para cada $n \geq 1$,

$$\forall y_0 \ldots y_{n-1}\, \exists x\, (x^n + y_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + y_1 \cdot x + y_0 \doteq 0)$$

Finalmente, denotaremos $\mathbf{ACF_0}$ a la **teoría de cuerpos algebraicamente cerrados de característica** 0, formada por $\mathbf{F_0} \cup \mathbf{ACF}$; y denotaremos $\mathbf{ACF_p}$ a la **teoría de cuerpos algebraicamente cerrados de característica prima** p, formada por $\mathbf{F_p} \cup \mathbf{ACF}$.

Es fácil observar que todo cuerpo algebraicamente cerrado es infinito. Para verlo, supondremos $\mathcal{K}$ un cuerpo finito con elementos $a_1, \ldots, a_n$. Entonces el polinomio

$$(X - a_1) \cdots (X - a_n) + 1^{\mathcal{K}}$$

no tiene raíces en K, ya que al evaluarlo en cualquier elemento de K su valor es $1^{\mathcal{K}} \neq 0^{\mathcal{K}}$. Con lo cual, $\mathcal{K}$ no es un cuerpo algebraicamente cerrado.

3.2. Eliminación de cuantificadores

Una teoría T de lenguaje L **admite eliminación de cuantificadores** si para cada fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ de L existe otra fórmula $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ de L sin cuantificadores tal que

$$T \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n \, (\varphi(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \psi(x_1, \ldots, x_n))$$

o, equivalentemente,

$$T \vdash \varphi(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \psi(x_1, \ldots, x_n)$$

Observación 3.1. *Sean $\mathcal{M}$ y $\mathcal{B}$ dos estructuras de un mismo lenguaje. Sea $\mathcal{A}$ una subestructura de $\mathcal{M}$ y f un isomorfismo de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$. Entonces $\mathcal{B}$ tiene una extensión $\mathcal{N}$ que es isomorfa a $\mathcal{M}$ mediante una extensión de f.*

Demostración: Por ser f un isomorfismo, f^{-1} también lo es y, en particular, es también una inmersión. Tenemos entonces que $\mathcal{B}$ es inmersible en $\mathcal{M}$. Por el **Lema 2.7**, existe una extensión $\mathcal{N}$ de $\mathcal{B}$ que es isomorfa a $\mathcal{M}$. El isomorfismo usado en la demostración del lema citado extiende a f^{-1}, por lo que su inverso es un isomorfismo de $\mathcal{M}$ en $\mathcal{N}$ que extiende a f. □

Proposición 3.2. *Una teoría T de lenguaje L admite eliminación de cuantificadores si y solo si para cada par de modelos $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ de T, cada subestructura común $\mathcal{A}$ de estos modelos, cada fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n, y)$ de L que sea conjunción de fórmulas atómicas y negaciones de fórmulas atómicas, y elementos $a_1, \ldots, a_n \in A$, si $\mathcal{M} \models \exists y \, \varphi(a_1, \ldots, a_n, y)$, entonces $\mathcal{N} \models \exists y \, \varphi(a_1, \ldots, a_n, y)$.*

Demostración: Supongamos que T admite eliminación de cuantificadores y que $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ son dos modelos suyos cualesquiera con una subestructura común $\mathcal{A}$. Entonces, si $\varphi(x_1, \ldots, x_n, y)$ es una conjunción de fórmulas atómicas y negaciones de fórmulas atómicas de L, existe una fórmula $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ sin cuantificadores de L tal que

$$T \vdash \exists y \, \varphi(x_1, \ldots, x_n, y) \leftrightarrow \psi(x_1, \ldots, x_n)$$

Se tiene entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} \models \exists y \, \varphi(a_1, \ldots, a_n, y) \quad & \text{si y solo si} \quad \mathcal{M} \models \psi(a_1, \ldots, a_n) \\
& \text{si y solo si} \quad \mathcal{A} \models \psi(a_1, \ldots, a_n) \\
& \text{si y solo si} \quad \mathcal{N} \models \psi(a_1, \ldots, a_n) \\
& \text{si y solo si} \quad \mathcal{N} \models \exists y \, \varphi(a_1, \ldots, a_n, y)
\end{aligned}$$

Para la otra implicación, introduciremos dos observaciones previas a la demostración de que T es una teoría que admite eliminación de cuantificadores.

Observación. *La misma hipótesis es válida si la fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n, y)$ es una fórmula sin cuantificadores, ya que en este caso se cumplirá*

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n, y) \equiv \bigvee_{i \in I} \bigwedge_{j \in J} \chi_{ij}(x_1, \ldots, x_n, y)$$

donde las diferentes $\chi_{ij}(x_1, \ldots, x_n, y)$ son fórmulas atómicas o negaciones de fórmulas atómicas y, por tanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \models \exists y\, \varphi(a_1, \ldots, a_n, y) \quad & \textit{si y solo si} \quad \mathcal{M} \models \exists y \bigvee_{i \in I} \bigwedge_{j \in J} \chi_{ij}(a_1, \ldots, a_n, y) \\ & \textit{si y solo si} \quad \mathcal{M} \models \bigvee_{i \in I} \exists y \bigwedge_{j \in J} \chi_{ij}(a_1, \ldots, a_n, y) \\ & \textit{si y solo si} \quad \mathcal{M} \models \exists y \bigwedge_{j \in J} \chi_{i_0 j}(a_1, \ldots, a_n, y) \end{aligned}$$

para algún $i_0 \in I$, que es el caso del enunciado.

Observación. *Para ver que T admite eliminación de cuantificadores, basta ver que, para toda fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n, y)$ del lenguaje L sin cuantificadores, existe una fórmula $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ del lenguaje L sin cuantificadores tal que*

$$T \vdash \exists y\, \varphi(x_1, \ldots, x_n, y) \leftrightarrow \psi(x_1, \ldots, x_n)$$

Para demostrarlo, supondremos cierto que esto pasa y actuaremos por inducción sobre una fórmula de L:

- *Si la fórmula es φ atómica, entonces no tiene cuantificadores y $T \vdash \varphi \leftrightarrow \varphi$.*
- *Si la fórmula es de la forma $\neg\varphi$ y, por hipótesis de inducción, existe una fórmula ψ sin cuantificadores tal que $T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$, entonces la fórmula $\neg\psi$ no tiene cuantificadores y se cumple que $T \vdash \neg\varphi \leftrightarrow \neg\psi$.*
- *Si la fórmula es de la forma $(\varphi \wedge \varphi')$ y, por hipótesis de inducción, existen fórmulas ψ, ψ' sin cuantificadores tales que $T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ y $T \vdash \varphi' \leftrightarrow \psi'$, entonces $(\psi \wedge \psi')$ no tiene cuantificadores y se cumple que $T \vdash (\varphi \wedge \varphi') \leftrightarrow (\psi \wedge \psi')$.*
- *Si la fórmula es de la forma $\exists y\, \varphi$ y, por hipótesis de inducción, existe una fórmula φ' sin cuantificadores tal que $T \vdash \varphi \leftrightarrow \varphi'$, entonces $T \vdash \exists y\, \varphi \leftrightarrow \exists y\, \varphi'$. Como hemos supuesto que existe una fórmula ψ sin cuantificadores tal que $T \vdash \exists y\, \varphi' \leftrightarrow \psi$, se tiene $T \vdash \exists y\, \varphi \leftrightarrow \psi$.*

Por tanto, sea $\varphi(x_1, \ldots, x_n, y)$ una fórmula de L sin cuantificadores, buscamos otra fórmula $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ sin cuantificadores tal que $T \vdash \exists y\, \varphi(x_1, \ldots, x_n, y) \leftrightarrow \psi(x_1, \ldots, x_n)$. Definimos $\Sigma(x_1, \ldots, x_n)$ como el conjunto de las fórmulas $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ de L sin cuantificadores tales que $T \vdash \exists y\, \varphi(x_1, \ldots, x_n, y) \rightarrow \psi(x_1, \ldots, x_n)$.

Afirmación. *$T \cup \Sigma(x_1, \dots, x_n) \vdash \exists y\, \varphi(x_1, \dots, x_n, y)$.*

Para demostrarlo, supondremos un modelo $\mathcal{N}$ de T y elementos $a_1, \dots, a_n \in N$ tales que $\mathcal{N} \models \Sigma(a_1, \dots, a_n)$. Queremos ver que $\mathcal{N} \models \exists y\, \varphi(a_1, \dots, a_n, y)$. Sea $\Delta(x_1, \dots, x_n)$ el diagrama de $a_1, \dots, a_n$ en $\mathcal{N}$, es decir, el conjunto de fórmulas $\psi(x_1, \dots, x_n)$ de L sin cuantificadores tales que $\mathcal{N} \models \psi(a_1, \dots, a_n)$, y sea $\mathcal{A} =< a_1, \dots, a_n > \subseteq \mathcal{N}$ la subestructura de $\mathcal{N}$ generada por $a_1, \dots, a_n$.

Observación. *$T \cup \Delta(x_1, \dots, x_n) \cup \{\exists y\, \varphi(x_1, \dots, x_n, y)\}$ es consistente, ya que si no lo fuera existiría un subconjunto finito de fórmulas de $\Delta(x_1, \dots, x_n)$ que harían inconsistente su unión con T y $\{\exists y\, \varphi(x_1, \dots, x_n, y)\}$. Denotando $\psi(x_1, \dots, x_n)$ a la conjunción de ese subconjunto finito de fórmulas se tendría que $T \cup \{\psi(x_1, \dots, x_n), \exists y\, \varphi(x_1, \dots, x_n, y)\}$ es inconsistente. Entonces $T \vdash \exists y\, \varphi(x_1, \dots, x_n, y) \to \neg\, \psi(x_1, \dots, x_n)$ y, por tanto, se tiene que $\neg\, \psi(x_1, \dots, x_n) \in \Sigma(x_1, \dots, x_n)$. Esto hace que $\mathcal{N} \models \neg\, \psi(a_1, \dots, a_n)$ y por ser $\neg\, \psi(x_1, \dots, x_n)$ una fórmula sin cuantificadores, $\neg\, \psi(x_1, \dots, x_n) \in \Delta(x_1, \dots, x_n)$, pero esto es absurdo, ya que $\Delta(x_1, \dots, x_n) \vdash \psi(x_1, \dots, x_n)$.*

En definitiva, existe un modelo $\mathcal{M}$ de T y elementos $b_1, \dots, b_n \in M$ tales que $\mathcal{M} \models \Delta(b_1, \dots, b_n)$ y $\mathcal{M} \models \exists y\, \varphi(b_1, \dots, b_n, y)$. Sabemos además que, si $\mathcal{B} =< b_1, \dots, b_n > \subseteq \mathcal{M}$, entonces $b_i \mapsto a_i$ para $1 \leq i \leq n$ se extiende a un isomorfismo $f : \mathcal{B} \cong \mathcal{A}$ definido por $t^{\mathcal{M}}(b_1, \dots, b_n) \mapsto t^{\mathcal{N}}(a_1, \dots, a_n)$. A su vez, este isomorfismo se extiende a otro $\tilde{f} : \mathcal{M} \cong \mathcal{M}'$ para un $\mathcal{M}' \supseteq \mathcal{A}$. Ahora, $\mathcal{A}$ es una subestructura común de $\mathcal{N}$ y de $\mathcal{M}'$ y $\mathcal{M}' \models \exists y\, \varphi(a_1, \dots, a_n, y)$. Por hipótesis del enunciado, se tiene que $\mathcal{N} \models \exists y\, \varphi(a_1, \dots, a_n, y)$, con lo que se demuestra la afirmación.

Utilizando esta afirmación, se tiene por compacidad que existe un subconjunto finito de fórmulas $\{\psi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \psi_k(x_1, \dots, x_n)\} \subseteq \Sigma(x_1, \dots, x_n)$ tales que

$$T \vdash (\psi_1(x_1, \dots, x_n) \wedge \cdots \wedge \psi_k(x_1, \dots, x_n)) \to \exists y\, \varphi(x_1, \dots, x_n, y)$$

pero por ser cada $\psi(x_1, \dots, x_n)$ con $1 \leq i \leq k$ una fórmula de $\Sigma(x_1, \dots, x_n)$, también se tiene que

$$T \vdash \exists y\, \varphi(x_1, \dots, x_n, y) \to (\psi_1(x_1, \dots, x_n) \wedge \ldots \wedge \psi_k(x_1, \dots, x_n))$$

Por tanto, sea $\psi(x_1, \dots, x_n) = \psi_1(x_1, \dots, x_n) \wedge \cdots \wedge \psi_k(x_1, \dots, x_n)$, entonces se tiene que $\psi(x_1, \dots, x_n)$ es una fórmula sin cuantificadores y

$$T \vdash \exists y\, \varphi(x_1, \dots, x_n, y) \leftrightarrow \psi(x_1, \dots, x_n)$$

que era lo que buscábamos para terminar la demostración. □

Teorema 3.3. *Una teoría T de lenguaje L es completa y admite eliminación de cuantificadores si y solo si para cada par de modelos $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ ω-saturados de la teoría T, se tiene que $I : \mathcal{M} \cong_p \mathcal{N}$, donde I es el conjunto de isomorfismos entre subestructuras finitamente generadas de $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$.*

Demostración: Sea T una teoría completa que admite eliminación de cuantificadores. Sean $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ dos modelos de T ω-saturados e I el conjunto definido en el enunciado. Entonces las subestructuras de $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ generadas por $\varnothing$ son isomorfas mediante el isomorfismo definido por $c^{\mathcal{M}} \mapsto c^{\mathcal{N}}$, por lo que I es no vacío. Sea ahora $f \in I$ y $a \in M$. Entonces existen subconjuntos finitos $A \subseteq M$ y $B \subseteq N$ tales que $f :< A > \cong < B >$. Sea $A' =< A \cup \{a\} >$ y $p = \mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(a/A)$. Entonces p es un tipo completo de $S_1(A)$ y, por tanto, p^f también es un tipo completo de $S_1(B)$. Por ser $\mathcal{N}$ ω-saturado existe un elemento $b \in N$ tal que $\mathcal{N} \models p^f(b)$. Podemos extender f a $g = f \cup \{(a, b)\}$ que cumple que $a \in \mathrm{Dom}\, g$ y $g \in I$ por ser un isomorfismo entre A' y $B' =< B \cup \{b\} >$. La propiedad *back* se demuestra de manera similar utilizando que $f \in I$ es un isomorfismo. Por otro lado, suponiendo el segundo punto del enunciado cierto, la **Proposición 2.18** nos asegura que T es completa. Demostraremos ahora, ayudándonos de la **Proposición 3.2** que T admite eliminación de cuantificadores. Para ello supondremos $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ dos modelos de T con una subestructura común $\mathcal{A}$, sea $\varphi(x_1, \ldots, x_n, y)$ una conjunción de fórmulas atómicas y negaciones de fórmulas atómicas de L y $a_1, \ldots, a_n \in A$ tales que $\mathcal{M} \models \exists y\, \varphi(a_1, \ldots, a_n, y)$. Sabemos, por la **Proposición 2.13** que existen $\mathcal{M}' \succeq \mathcal{M}$ y $\mathcal{N}' \succeq \mathcal{N}$ ω-saturadas. Como hay un $a \in M \subseteq M'$ tal que $\mathcal{M}' \models \varphi(a_1, \ldots, a_n, a)$ y $I :\ \mathcal{M}' \cong_p \mathcal{N}'$ por hipótesis, la propiedad *forth* de I asegura que existe $g \in I$ con $a \in \mathrm{Dom}\, g$ y por tanto $\mathcal{N}' \models \varphi(a_1, \ldots, a_n, g(a))$. Esto implica que $\mathcal{N}' \models \exists y\, \varphi(a_1, \ldots, a_n, y)$ y por ser N' una extensión elemental de N se tiene $\mathcal{N} \models \exists y\, \varphi(a_1, \ldots, a_n, y)$. □

Corolario 3.4. *La teoría de cuerpos algebraicamente cerrados de característica fijada es completa y admite eliminación de cuantificadores.*

Demostración: Utilizando el **Teorema 3.3**, solo necesitamos demostrar que cualquier par de modelos ω-saturados de la teoría $\mathbf{ACF_p}$, para una característica p fijada, son parcialmente isomorfos vía el conjunto de isomorfismos entre subestructuras finitamente generadas de estos modelos. Sean $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ dos modelos ω-saturados de $\mathbf{ACF_0}$. Entonces, las subestructuras de $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ generadas por $\varnothing$ respectivamente son isomorfas a $\mathbb{Z}$. Si, en cambio, $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ son dos modelos ω-saturados de $\mathbf{ACF_p}$ donde $p \in \mathbb{Z}$ es un número primo, entonces las subestructuras de $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ generadas por $\varnothing$ respectivamente son isomorfas a $p\mathbb{Z}$. En cualquier caso, estas subestructuras son finitamente generadas y son isomorfas entre ellas, por lo que el conjunto I de isomorfismos entre subestructuras finitamente generadas de $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ es no vacío. Sea T la teoría de cuerpos algebraicamente cerrados de una característica fijada, y sea $f \in I$ un isomorfismo entre las subestructuras $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$ y $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{N}$ generadas por $A \subseteq M$ y $B \subseteq N$ respectivamente, ambos finitos. Estas subestructuras son dominios de integridad y, por tanto, sus respectivos cuerpos de fracciones K y H también son isomorfos. Llamaremos $\tilde{f}_1$ al isomorfismo entre K y H que extiende a f de forma natural. Entonces $K[X]$ y $H[X]$ también son isomorfos. Llamaremos $\tilde{f}_2$ al isomorfismo entre $K[X]$ y $H[X]$ que extiende a $\tilde{f}_1$ de forma natural. Fijamos ahora un elemento $a \in M$.

- Supongamos el caso en que a es algebraico sobre K. Entonces a tiene un polinomio mínimo $m_{a/K}(x)$ en $K[X]$. Utilizando $\tilde{f}_2$ llevamos este polinomio a un polinomio irreducible de $H[X]$ que, por ser $\mathcal{N}$ algebraicamente cerrado, tiene un cero $b \in$

N. Este polinomio será el polinomio mínimo de b. Sea $\phi : K[X] \longrightarrow K(a)$ el morfismo definido por $P(x) \mapsto P(a)$. Como $\operatorname{Ker}\phi = I_{a/K}$, que es el ideal generado por $m_{a/K}(x)$, se tiene $K[X]/I_{a/K} \cong K(a)$. A su vez, $H[X]/I_{b/H} \cong H(b)$. Como $\tilde{f}_2 : K[X] \cong H[X]$ y $\tilde{f}_2(I_{a/K}) = I_{b/H}$, se tiene que $K[X]/I_{a/K} \cong H[X]/I_{b/H}$. Con todo, obtenemos que existe un isomorfismo $g : K(a) \cong H(b)$ que extiende a f. Sea $\mathcal{A}'$ el subanillo de $\mathcal{M}$ generado por $A \cup \{a\}$ y sea $\mathcal{B}'$ el subanillo de $\mathcal{N}$ generado por $B \cup \{b\}$. Entonces $g|_{\mathcal{A}'} : \mathcal{A}' \cong \mathcal{B}'$. En definitiva, $g|_{\mathcal{A}'} \in I$, extiende a f y $a \in \operatorname{Dom} g|_{\mathcal{A}'}$.

- Supongamos el caso en que a no es algebraico sobre K. Sabemos que un polinomio de grado n tiene a lo sumo n raíces en un cuerpo, ya que si α es una raíz suya, entonces el polinomio $x - \alpha$ lo divide. Por tanto, sean $P_1(x), \ldots, P_k(x)$ polinomios de $B[X]$. Como ya hemos visto, N es infinito ya que $T \vdash$ **ACF** y, por tanto, existe un elemento en N que no es raíz de ninguno de los polinomios anteriores. Definimos el tipo $p = \{\neg P(x) \doteq 0 \ : \ P(x) \in B[X] \text{ no constante}\}$. Por ser $\mathcal{N}$ una estructura ω-saturada, existe un elemento $b \in N$ que realiza p. El hecho de que b no sea raíz de ningún polinomio en $B[X]$ es equivalente a que no lo sea de ningún polinomio de $H[X]$, ya que si fuera raíz de un polinomio de $H[X]$, podríamos multiplicar este polinomio por el producto de todos los denominadores de sus coeficientes para obtener un polinomio en $B[X]$ con las mismas raíces que el polinomio original y, por tanto, sería una raíz de ese polinomio de $B[X]$, que es absurdo por hipótesis. Sea $\phi : K[X] \longrightarrow K(a)$ el morfismo definido por $P(x) \mapsto P(a)$. Ahora se tiene $\operatorname{Ker}\phi = \{0\}$ y, por tanto, $K[x] \cong K(a)$. De igual manera, obtenemos que $H[X] \cong H(b)$ y, por tanto, podemos concluir que $K(a) \cong H(b)$. Sea $g : K(a) \cong H(b)$ el isomorfismo definido al añadir la condición $a \mapsto b$ a $\tilde{f}_1$. Sea $\mathcal{A}'$ el subanillo de $\mathcal{M}$ generado por $A \cup \{a\}$ y sea $\mathcal{B}'$ el subanillo de $\mathcal{N}$ generado por $B \cup \{b\}$. Entonces $g|_{\mathcal{A}'} : \mathcal{A}' \cong \mathcal{B}'$. En definitiva, $g|_{\mathcal{A}'} \in I$, extiende a f y $b \in \operatorname{Im} g|_{\mathcal{A}'}$.

La propiedad *back* se demuestra de manera similar utilizando que f es un isomorfismo. □

La completud de $\mathbf{ACF_0}$ que acabamos de demostrar, nos lleva a la equivalencia entre el hecho de que una sentencia se satisfaga en $\mathbf{ACF_0}$ y el hecho de que se satisfaga en $\mathbf{ACF_p}$, para primos p lo suficientemente grandes, tal como indica el lema siguiente.

Lema 3.5. *Sea σ una sentencia arbitraria de lenguaje $\mathcal{L}$. Entonces, es equivalente:*

1. $\mathbf{ACF_0} \vdash \sigma$.
2. $\mathbf{ACF_p} \vdash \sigma$ *para algún primo p lo suficientemente grande.*
3. *Existe un primo p tal que* $\mathbf{ACF_p} \vdash\vdash \sigma$ *para todo primo $q \geq p$.*

Demostración: Sea $\Phi = \{\varphi_p \ : \ p \text{ es primo }\}$, donde $\varphi_p = \neg 1 + \overset{p)}{\ldots} + 1 \doteq 0$ para cada p primo. *(1. implica 2.)*Como $\mathbf{ACF_0} = \mathbf{ACF} \cup \Phi$, si $\mathbf{ACF_0} \vdash \sigma$, por el *Teorema de compacidad* sabemos que existe un subconjunto finito $\Phi_0 = \{\varphi_{p_1}, \ldots, \varphi_{p_n}\} \subseteq \Phi$ tal que $\mathbf{ACF} \cup \Phi_0 \vdash \sigma$. Sea p un primo lo suficientemente grande como para que $p > p_i$

para cada $1 \leq i \leq n$. Entonces $\mathbf{ACF_p} \vdash \sigma$. *(2. implica 3.)* Si $\mathbf{ACF_p} \vdash \sigma$ para un primo p, hemos visto antes que existe un subconjunto finito $\Phi_0 = \{\varphi_{p_1}, \ldots, \varphi_{p_n}\} \subseteq \Phi$ tal que $\mathbf{ACF} \cup \Phi_0 \vdash \sigma$. Entonces, para cualquier primo $q \geq p$, se cumple $\mathbf{ACF_q} \vdash \sigma$. *(3. implica 1.)* El **Lema 3.4** asegura que $\mathbf{ACF_0}$ es una teoría completa, por lo que si $\mathbf{ACF_0} \nvdash \sigma$, entonces $\mathbf{ACF_0} \vdash \neg\sigma$. Entonces, por el *Teorema de compacidad*, sabemos que existe un subconjunto finito $\Phi_0 = \{\varphi_{p_1}, \ldots, \varphi_{p_n}\} \subseteq \Phi$ tal que $\mathbf{ACF} \cup \Phi_0 \vdash \sigma$, por lo que $\mathbf{ACF_p} \vdash \neg\sigma$ para cada primo p tal que $p > p_i$ para cada $1 \leq i \leq n$, que contradice nuestra hipótesis. □

Vamos ahora a demostrar que el hecho de que $\mathbf{ACF_p}$ admita eliminación de cuantificadores no es consecuencia de haber fijado una característica para los cuerpos algebraicamente cerrados, sino que la teoría de cuerpos algebraicamente cerrados **ACF**, sin fijar ninguna característica, también admite eliminación de cuantificadores.

Corolario 3.6. *La teoría de cuerpos algebraicamente cerrados admite eliminación de cuantificadores.*

Demostración: Utilizaremos, para demostrarlo, la **Proposición 3.2**. Para ello, consideramos $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ dos modelos de **ACF** con una subestructura común $\mathcal{A}$. Con esto, podemos demostrar que $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ son cuerpos de la misma característica, ya que suponiendo que sus características no son ambas 0, podríamos suponer, sin pérdida de generalidad, que la característica de $\mathcal{M}$ fuese $p > 0$ un número primo. Con esto, obtendríamos $\mathcal{M} \models 1 + \overset{p)}{\ldots} + 1 \doteq 0$, que implica $\mathcal{A} \models 1 + \overset{p)}{\ldots} + 1 \doteq 0$ y finalmente que $\mathcal{N} \models 1 + \overset{p)}{\ldots} + 1 \doteq 0$, por lo que p sería un entero múltiplo de la característica de $\mathcal{N}$. Pero como la característica de $\mathcal{N}$ debe ser prima y $\neg\, 0 \doteq 1$ es un axioma de **ACF**, se tendría que la característica de $\mathcal{N}$ sería precisamente p. Por tanto, $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ son modelos de la teoría $\mathbf{ACF_p}$. Sean además $a_1, \ldots, a_n \in A$ arbitrarios y sea $\varphi(x_1, \ldots, x_n, y)$ una conjunción de fórmulas atómicas y negaciones de fórmulas atómicas de L tal que $\mathcal{M} \models \exists y\, \varphi(a_1, \ldots, a_n, y)$. Como ya hemos visto que $\mathbf{ACF_p}$ admite eliminación de cuantificadores, por la misma **Proposición 3.2**, obtenemos que $\mathcal{N} \models \exists y\, \varphi(a_1, \ldots, a_n, y)$. □

3.3. Teorías fuertemente minimales

Sea $\mathcal{M}$ una estructura de lenguaje L y $X \subseteq M$ arbitrario. Un conjunto $A \subseteq M$ es **definible en $\mathcal{M}$ con parámetros en X** o **X-definible en $\mathcal{M}$** si y solo si existe una fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n, y)$ del lenguaje L y elementos $a_1, \ldots, a_n \in X$ tales que, para cada $a \in M$, se cumple $a \in A$ si y solo si $\mathcal{M} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n, a)$. En el caso particular en que $X = M$, se dice que A es **definible en $\mathcal{M}$ con parámetros**. Un conjunto $A \subseteq M$ es **definible en $\mathcal{M}$ sin parámetros** si es definible en $\mathcal{M}$ con parámetros en $\varnothing$. Es decir, si existe una fórmula $\varphi(x)$ de L tal que, para cada $a \in M$, se cumple $a \in A$ si y solo si $\mathcal{M} \models \varphi(a)$.

Una estructura $\mathcal{M}$ de lenguaje L es **minimal** si para cada $A \subseteq M$ definible en $\mathcal{M}$ con parámetros, A es o bien finito o bien cofinito. Es decir, si A es finito o $M \setminus A$ es finito. Se dice que una teoría T es **fuertemente minimal** si todo modelo de T es minimal.

Observación 3.7. *La teoría de cuerpos algebraicamente cerrados de característica fijada es fuertemente minimal.*

Demostración: Sea $\mathbf{ACF_p}$ la teoría de cuerpos algebraicamente cerrados de una característica fijada y $\mathcal{M}$ un modelo de esta teoría. Supongamos $A \subseteq M$ definible en $\mathcal{M}$ con parámetros. Entonces existe una fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n, y)$ del lenguaje $\mathcal{L}$ y elementos $a_1, \ldots, a_n \in M$ tales que, para cada $a \in M$, se cumple $a \in A$ si y solo si $\mathcal{M} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n, a)$. Queremos ver que A es o bien finito o bien cofinito. Como $\mathbf{ACF_p}$ admite eliminación de cuantificadores, existe una fórmula $\psi(x_1, \ldots, x_n, y)$ de $\mathcal{L}$ sin cuantificadores tal que

$$\mathbf{ACF_p} \vdash \varphi(a_1, \ldots, a_n, y) \leftrightarrow \psi(a_1, \ldots, a_n, y)$$

y, por tanto, $\psi(x_1, \ldots, x_n, y)$ también es una fórmula que define a A en $\mathcal{M}$ con parámetros $a_1, \ldots, a_n$. Solo nos queda comprobar que el conjunto $\{a \in M : \mathcal{M} \models \psi(a_1, \ldots, a_n, a)\}$ es finito o cofinito, pero por ser $\psi(a_1, \ldots, a_n, y)$ una fórmula sin cuantificadores, sabemos que es equivalente a una fórmula de $\mathcal{L}$ de la forma

$$\bigvee_{i \in I} \bigwedge_{j \in J} \chi_{ij}(x)$$

donde cada $\chi_{ij}(x)$ es una ecuación de la forma $P_{ij}(x) \doteq 0$ o su negación, con $P_{ij}(x)$ equivalente a un polinomio con coeficientes en M. Como cada polinomio tiene un número finito de ceros, las ecuaciones de la forma $P(x) \doteq 0$ definen un conjunto finito de elementos de M y las inecuaciones de la forma $\neg P(x) \doteq 0$ definen un conjunto cofinito de elementos de M. Teniendo lo anterior en cuenta se tiene que, fijado un $i_0 \in I$,

$$\bigwedge_{j \in J_{i_0}} \chi_{i_0 j}(x)$$

será la intersección de los conjuntos definidos por las fórmulas $\chi_{i_0 j}(x)$. Esta intersección será finita si $\chi_{i_0 j}(x)$ es una ecuación para algún $j \in J_{i_0}$ y será cofinita si $\chi_{i_0 j}(x)$ es una inecuación para todo $j \in J_{i_0}$. Como el conjunto definido por

$$\bigvee_{i \in I} \bigwedge_{j \in J_i} \chi_{ij}(x)$$

es la unión de todos los conjuntos asociados a cada $i \in I$ definidos como anteriormente, este conjunto será finito si todas las intersecciones tienen alguna ecuación y será cofinito si hay algún $i_0 \in I$ para el que $\chi_{i_0 j}(x)$ es una inecuación para todo $j \in J_{i_0}$. En definitiva, tal y como queríamos ver, A es o bien finito o bien cofinito. $\square$

3.4. Pregeometrías

En esta sección nos escapamos un momento de la teoría de modelos para definir lo que es una pregeometría y demostrar varias propiedades que estas tienen. Este concepto nos ayudará en la sección siguiente, en la que volveremos a la teoría de modelos, a definir desde esta rama la clausura algebraica de un cuerpo.

Sea X un conjunto arbitrario y $\mathrm{cl}: \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ un operador sobre el conjunto de partes de X. El par (X, cl) es una **pregeometría** si:

- Si $A \subseteq X$, entonces $A \subseteq \mathrm{cl}(A) = \mathrm{cl}(\mathrm{cl}(A))$.
- Si $A \subseteq B \subseteq X$, entonces $\mathrm{cl}(A) \subseteq \mathrm{cl}(B)$.
- (*Principio de intercambio*) Si $A \subseteq X$, $a, b \in X$ y $a \in \mathrm{cl}(A \cup \{b\})$, entonces o bien $a \in \mathrm{cl}(A)$ o bien $b \in \mathrm{cl}(A \cup \{a\})$.
- Si $A \subseteq X$ y $a \in \mathrm{cl}(A)$, entonces existe un conjunto finito $A_0 \subseteq A$ tal que $a \in \mathrm{cl}(A_0)$.

Sea ahora (X, cl) una pregeometría y $A \subseteq Y \subseteq X$. Y es **cerrado** si $\mathrm{cl}(Y) = Y$. A es un **conjunto de generadores de** Y si $\mathrm{cl}(A) = \mathrm{cl}(Y)$. A es **independiente** si para cada $a \in A$ se cumple que $a \notin \mathrm{cl}(A \setminus \{a\})$. A es una **base de** Y si A es un conjunto de generadores de Y independiente.

Como observación, si I es un conjunto cualquiera y, para cada $i \in I$, A_i es un subconjunto de X, entonces $\bigcup\limits_{i \in I} \mathrm{cl}(A_i) \subseteq \mathrm{cl}(\bigcup\limits_{i \in I} A_i)$. Esto es así, pues si fijamos un $i_0 \in I$, se tiene $A_{i_0} \subseteq \bigcup\limits_{i \in I} A_i$ y, por tanto, $\mathrm{cl}(A_{i_0}) \subseteq \mathrm{cl}(\bigcup\limits_{i \in I} A_i)$. Con esto, podemos concluir que $\bigcup\limits_{i \in I} \mathrm{cl}(A_i) \subseteq \mathrm{cl}(\bigcup\limits_{i \in I} A_i)$.

Además, si $A \subseteq X$ y $a \in \mathrm{cl}(A)$, entonces $\mathrm{cl}(A) = \mathrm{cl}(A \cup \{a\})$. Para demostrarlo, podemos ver que $\mathrm{cl}(A) \subseteq \mathrm{cl}(A \cup \{a\})$, ya que $A \subseteq A \cup \{a\}$. Además, como $a \in \mathrm{cl}(A)$, se tiene que $\mathrm{cl}(A \cup \{a\}) \subseteq \mathrm{cl}(A \cup \mathrm{cl}(A)) = \mathrm{cl}(\mathrm{cl}(A)) = \mathrm{cl}(A)$.

Lema 3.8. *Sea $A \subseteq Y \subseteq X$. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *A es una base de Y.*
2. *A es un conjunto de generadores de Y minimal.*
3. *A es un subconjunto de Y independiente maximal.*

Demostración: *(1. implica 2.)* Suponemos que A es una base de Y. Por ser A un conjunto de generadores de Y, se tiene que $\mathrm{cl}(A) = \mathrm{cl}(Y)$. Además, por ser A independiente, para cada $a \in A$ se cumple $a \notin \mathrm{cl}(A \setminus \{a\})$, y como $a \in A \subseteq \mathrm{cl}(A) = \mathrm{cl}(Y)$, se tiene que $\mathrm{cl}(A \setminus \{a\}) \neq \mathrm{cl}(Y)$, por lo que $A \setminus \{a\}$ no es un conjunto de generadores de Y. Con esto, A es un conjunto de generadores minimal.

(2. implica 1.) Supongamos que A es un conjunto de generadores de Y minimal. Entonces $\mathrm{cl}(A) = \mathrm{cl}(Y)$ y, además, para cada $a \in A$, se cumple $\mathrm{cl}(A \setminus \{a\}) \neq \mathrm{cl}(Y)$. En el caso de que $a \in \mathrm{cl}(A \setminus \{a\})$, entonces $\mathrm{cl}(A \setminus \{a\}) = \mathrm{cl}(A) = \mathrm{cl}(Y)$, que es una contradicción con las hipótesis, por lo que $a \notin \mathrm{cl}(A \setminus \{a\})$ y A es un conjunto de generadores de Y independiente, es decir, una base de Y.

(1. implica 3.) Suponemos que A es una base de Y. Por ser A un conjunto de generadores de Y, se tiene que $\mathrm{cl}(A) = \mathrm{cl}(Y)$. Sea $b \in Y$ y $A' = A \cup \{b\}$. Claramente $b \in Y \subseteq \mathrm{cl}(Y) = \mathrm{cl}(A) = \mathrm{cl}(A' \setminus \{b\})$, por lo que A' no es independiente. Con esto, A es un conjunto independiente maximal.

(3. implica 1.) Supongamos que A es un subconjunto de Y independiente maximal. Entonces A es un conjunto independiente y, para cada $b \in Y \setminus A$, $A \cup \{b\}$ no es un conjunto independiente, por lo que existe un elemento $c \in A \cup \{b\}$ tal que $c \in \mathrm{cl}((A \cup \{b\}) \setminus \{c\})$. Si $c = b$, entonces $b \in \mathrm{cl}(A)$. Si $c \neq b$, entonces $c \in A$ y se tiene $c \in \mathrm{cl}((A \setminus \{c\}) \cup \{b\})$. Como $c \notin \mathrm{cl}(A \setminus \{c\})$ por ser A un conjunto independiente por hipótesis, el *Principio de intercambio* nos asegura que $b \in \mathrm{cl}((A \setminus \{c\}) \cup \{c\}) = \mathrm{cl}(A)$. En definitiva, se tiene que $Y \subseteq \mathrm{cl}(A)$ y por tanto $\mathrm{cl}(Y) \subseteq \mathrm{cl}(A)$. Como, además, $A \subseteq Y$, tenemos también que $\mathrm{cl}(Y) \subseteq \mathrm{cl}(A)$ y podemos concluir que $\mathrm{cl}(A) = \mathrm{cl}(Y)$. A es, por tanto, un conjunto de generadores de Y independiente, es decir, una base de Y. □

Observación 3.9. *Sea $Y \subseteq X$. Entonces, todo conjunto $A \subseteq Y$ independiente puede extenderse a una base de Y.*

Demostración: Supongamos $\{A_i : i \in I\}$ una cadena de subconjuntos independientes de Y, para I un conjunto arbitrario. Es decir, tal que para cada $i, j \in I$, o bien $A_i \subseteq A_j$ o bien $A_j \subseteq A_i$. Entonces $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ es independiente, ya que, en caso contrario, existiría un elemento $a \in A$ tal que $a \in \mathrm{cl}(A \setminus \{a\})$, por lo que existiría un conjunto $B \subseteq (A \setminus \{a\})$ finito tal que $a \in \mathrm{cl}(B)$. Para cada elemento de B, debería existir un $i_b \in I$ tal que $b \in A_{i_b}$, y por ser B finito, existiría un $i_0 \in I$ tal que $B \subseteq A_{i_0}$. Además, como $a \in A$, existiría un $i_1 \in I$ tal que $a \in A_{i_1}$. Denotemos A' al conjunto, de entre A_{i_0} y A_{i_1}, que incluye al otro. Como A' pertenece a la cadena $\{A_i : i \in I\}$, cumple $a \in A'$ y, además, como $a \notin B \subseteq A_{i_0} \subseteq A'$, se tiene que $B \subseteq A' \setminus \{a\}$ y, por tanto, $\mathrm{cl}(B) \subseteq \mathrm{cl}(A' \setminus \{a\})$. Como $a \in \mathrm{cl}(B) \subseteq \mathrm{cl}(A' \setminus \{a\})$, se tiene que A' no es un conjunto independiente, que es una contradicción. Se tiene, por tanto, que toda cadena en Y tiene una cota superior, y aplicando el *Lema de Zorn* podemos asegurar que todo conjunto independiente de Y se puede extender a un conjunto independiente maximal. Utilizamos el **Lema 3.8** para ver que este conjunto es una base de Y. □

Proposición 3.10. *Sea $Y \subseteq X$ y A y B dos subconjuntos de Y tales que A es independiente y B es un conjunto de generadores de Y. Entonces $|A| \leq |B|$.*

Demostración: Haremos primero la siguiente observación:

Observación. *Para cada $a \in A \setminus B$ existe un $b \in B \setminus A$ tal que $A' = (A \setminus \{a\}) \cup \{b\}$ es un conjunto independiente. Para demostrarlo, suponemos un elemento $a \in A \setminus B$ arbitrario. Suponiendo $B \subseteq \mathrm{cl}(A \setminus \{a\})$, se tendría $\mathrm{cl}(B) \subseteq \mathrm{cl}(\mathrm{cl}(A \setminus \{a\})) = \mathrm{cl}(A \setminus \{a\})$, pero como $A \subseteq Y \subseteq \mathrm{cl}(Y) = \mathrm{cl}(B)$, se tiene que $a \in \mathrm{cl}(B)$ y además $a \notin \mathrm{cl}(A \setminus \{a\})$ por ser A independiente, en contradicción con lo que hemos visto antes. Por tanto, $B \not\subseteq \mathrm{cl}(A \setminus \{a\})$ y existe $b \in B \setminus \mathrm{cl}(A \setminus \{a\})$. Se tiene que $b \notin A$ ya que $b \notin (A \setminus \{a\})$ y además $a \in A \setminus B$ hace que $a \notin B$. Además, $A' = (A \setminus \{a\}) \cup \{b\}$ es un conjunto independiente. Para demostrarlo* *suponemos un elemento $c \in A'$ arbitrario. Si $c = b$, entonces $c = b \notin \mathrm{cl}(A' \setminus \{b\}) = \mathrm{cl}(A \setminus \{a\})$. Si $c \neq b$, entonces $c \in (A \setminus \{a\})$ y, suponiendo que $c \in \mathrm{cl}(A' \setminus \{c\})$, donde $A' \setminus \{c\} = (A \setminus \{a, c\}) \cup \{b\}$, como $c \notin \mathrm{cl}(A \setminus \{a, c\})$ ya que $c \notin \mathrm{cl}(A \setminus \{c\})$ por ser A independiente y $\mathrm{cl}(A \setminus \{a, c\}) \subseteq \mathrm{cl}(A \setminus \{a\})$, se tendría, por el Principio de intercambio, que $b \in \mathrm{cl}(A \setminus \{a, c\}) \cup \{c\} = \mathrm{cl}(A \setminus \{a\})$, que es absurdo. Se tiene así que $c \notin \mathrm{cl}(A' \setminus \{c\})$ y, por tanto, A' es independiente.*

Utilizaremos esta observación para demostrar ahora el enunciado de la proposición, diferenciando los casos en que A es finito e infinito.

- Si A es un conjunto finito, podemos expresarlo como $A = \{a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n\}$, donde $a_1, \ldots, a_k \notin B$ y $a_{k+1}, \ldots, a_n \in B$. Denotaremos $A_0 = A$. Ahora, para cada $1 \leq i \leq k$, existe un elemento $b_i \in B \setminus A$ tal que $A_i = (A_{i-1} \setminus \{a_i\}) \cup \{b_i\}$ es un conjunto independiente con la misma cardinalidad que A. Como finalmente obtenemos el conjunto independiente $A_k \subseteq B$, podemos concluir $|A| = |A_k| \leq |B|$.

- Suponemos, en cambio, que A es un conjunto infinito. Por ser independiente, lo podemos extender a una base $A' \supseteq A$ de Y. Entonces, como $B \subseteq Y \subseteq \mathrm{cl}(Y) = \mathrm{cl}(A')$, se tiene que para cada elemento $b \in B$ existe un conjunto $A_b \subseteq A'$ finito tal que $b \in \mathrm{cl}(A_b)$. Claramente $\bigcup\limits_{b \in B} A_b \subseteq A'$. Además, se tiene que $B \subseteq \bigcup\limits_{b \in B} \mathrm{cl}(A_b) \subseteq \mathrm{cl}(\bigcup\limits_{b \in B} A_b)$ y, por tanto, que $\mathrm{cl}(Y) = \mathrm{cl}(B) \subseteq \mathrm{cl}(\mathrm{cl}(\bigcup\limits_{b \in B} A_b)) = \mathrm{cl}(\bigcup\limits_{b \in B} A_b)$. Por ser A' una base de Y, el **Lema 3.8** nos dice que A' es un conjunto de generadores de Y minimal, por lo que $A' \subseteq \bigcup\limits_{b \in B} A_b$ y con esto tenemos la igualdad $A' = \bigcup\limits_{b \in B} A_b$. Como A' es infinito y los conjuntos A_b son finitos, B tiene que ser infinito. Con esto se concluye $|A| \leq |A'| \leq |B| \cdot \omega = |B|$. $\square$

Como consecuencia, se demuestra que dos bases de $Y \subseteq X$ tienen siempre la misma cardinalidad. Para demostrarlo, suponemos $A, B \subseteq Y \subseteq X$ dos bases de Y. Como A es independiente y B es un conjunto de generadores de Y, se tiene que $|A| \leq |B|$. De igual manera, como también B es independiente y A es un conjunto de generadores de Y, se tiene que $|B| \leq |A|$. Podemos concluir que $|A| = |B|$. La **dimensión de** Y, que se denota $\dim(Y)$, es la cardinalidad de las bases de Y.

3.5. Clausura algebraica

Esta sección se encarga de definir la clausura algebraica de un cuerpo desde la teoría de modelos. Además, demuestra la equivalencia de esta con la clausura algebraica definida en el álgebra. Para ello se ayuda de las pregeometrías, definidas en la seccioón anterior.

Sea L un lenguaje arbitrario, $\mathcal{M}$ una estructura de L y $A \subseteq M$ un subconjunto del universo de $\mathcal{M}$ para el que creamos un conjunto de nuevos símbolos de constante $C_A = \{c_a \ : \ a \in A\}$, distintos dos a dos y tal que $C_A \cap L = \varnothing$. Un elemento $a \in M$ es

algebraico sobre A (desde la teoría de modelos) si existen una fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n, y)$ de L y elementos $a_1, \ldots, a_n \in A$ tales que el conjunto

$$\varphi(a_1, \ldots, a_n, \mathcal{M}) = \{b \in M \,:\, \mathcal{M} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n, b)\}$$

es finito y $a \in \varphi(a_1, \ldots, a_n, \mathcal{M})$. Equivalentemente, un elemento $a \in M$ es algebraico sobre A si existe una fórmula $\varphi(x)$ de $L \cup C_A$ tal que $\varphi(\mathcal{M}_A)$ es finito y $a \in \varphi(\mathcal{M}_A)$. Se define el operador **clausura algebraica** $\mathrm{acl} : \mathcal{P}(M) \longrightarrow \mathcal{P}(M)$ que asocia a cada $A \subseteq M$ el conjunto $\mathrm{acl}_{\mathcal{M}}(A)$ de elementos de M que son algebraicos sobre A. Cuando se sobreentienda la estructura $\mathcal{M}$, escribiremos $\mathrm{acl}(A)$ para referirnos a $\mathrm{acl}_{\mathcal{M}}(A)$.

Proposición 3.11. *Para una teoría T fuertemente minimal de lenguaje L y $\mathcal{M}$ un modelo de T, se tiene que (M, acl) forma una pregeometría.*

Demostración: Sean $A \subseteq B \subseteq M$. Formamos el conjunto de símbolos de constante $C_B = \{c_b \,:\, b \in B\}$ distintos dos a dos y tal que $C_B \cap L = \varnothing$. A partir de él, definimos $C_A = \{c_a \in C_B \,:\, a \in A\} \subseteq C_B$.

- Sea $a \in \mathrm{acl}(A)$. Entonces existe una fórmula $\varphi(x)$ de $L \cup C_A \subseteq L \cup C_B$ tal que $\varphi(\mathcal{M}_A)$ es finito y $a \in \varphi(\mathcal{M}_A)$. Sabemos que $\varphi(x) = \psi(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n}, x)$ para cierta fórmula ψ de L y símbolos de constante $c_{a_1}, \ldots, c_{a_n} \in C_A$. Teniendo en cuenta que $a \in \varphi(\mathcal{M}_A)$ si y solo si $\mathcal{M} \models \psi(a_1, \ldots, a_n, a)$ si y solo si $a \in \varphi(\mathcal{M}_B)$, vemos que $\varphi(\mathcal{M}_B)$ es también un conjunto finito y $a \in \varphi(\mathcal{M}_B)$, por lo que $a \in \mathrm{acl}(B)$ y, por tanto, $\mathrm{acl}(A) \subseteq \mathrm{acl}(B)$.

- Para un elemento $a \in A$ arbitrario, consideramos $\varphi(x) = x \doteq a$. Entonces $\varphi(\mathcal{M})$ es finito y $a \in \varphi(\mathcal{M})$, por lo que $a \in \mathrm{acl}(A)$. En conclusión, $A \subseteq \mathrm{acl}(A)$. Utilizando el punto anterior, $\mathrm{acl}(A) \subseteq \mathrm{acl}(\mathrm{acl}(A))$. Sea ahora a un elemento de $\mathrm{acl}(\mathrm{acl}(A))$. Sabemos que existen una fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n, y)$ de L y elementos $a_1, \ldots, a_n \in \mathrm{acl}(A)$ tales que $\varphi(a_1, \ldots, a_n, \mathcal{M})$ es finito, lo supondremos de k elementos, y $a \in \varphi(a_1, \ldots, a_n, \mathcal{M})$. Por ser $a_1, \ldots, a_n$ elementos de $\mathrm{acl}(A)$, para cada $1 \leq i \leq n$ existe una fórmula $\psi_i(x)$ de $L \cup C_A$ tal que $\psi_i(\mathcal{M}_A)$ es finito y $a_i \in \psi_i(\mathcal{M}_A)$. Definimos ahora la fórmula de $L \cup C_A$

  $$\chi(y) = \exists x_1 \ldots x_n \, (\psi_1(x_1) \wedge \ldots \wedge \psi_n(x_n) \wedge \exists^{=k} x \, \varphi(x_1, \ldots, x_n, x) \wedge \varphi(x_1, \ldots, x_n, y))$$

  Sabemos que $\chi(\mathcal{M}_A)$ es finito, ya que cada $\psi_i(\mathcal{M}_A)$ es finito y de entre estos elementos, nos estamos quedamos solo con las tuplas $b_1, \ldots, b_n \in \psi_1(\mathcal{M}_A) \times \ldots \times \psi_n(\mathcal{M}_A)$ que cumplen $\mathcal{M} \models \exists^{=k} x \, \varphi(x_1, \ldots, x_n, x)$, por lo que $\varphi(b_1, \ldots, b_n, \mathcal{M})$ es finito. Como $\chi(y)$ es una fórmula de $L \cup C_A$ y $a \in \chi(\mathcal{M}_A)$, se tiene que $a \in \mathrm{acl}(A)$, que implica $\mathrm{acl}(\mathrm{acl}(A)) \subseteq \mathrm{acl}(A)$. En definitiva, $A \subseteq \mathrm{acl}(A) = \mathrm{acl}(\mathrm{acl}(A))$.

- Sean $a, b \in M$ arbitrarios tales que $a \in \mathrm{acl}(A \cup \{b\})$. Entonces existe una fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n, x)$ de L y elementos $a_1, \ldots, a_n \in (A \cup \{b\})$ tales que $\varphi(a_1, \ldots, a_n, \mathcal{M})$ es un conjunto finito, que supondremos de k elementos, y $a \in \varphi(a_1, \ldots, a_n, \mathcal{M})$. Si $b \notin \{a_1, \ldots, a_n\}$, entonces $a \in \mathrm{acl}(A)$. Supondremos ahora que $a \notin \mathrm{acl}(A)$. Entonces, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $b = a_n$. Sea $\psi(y) =$

$\exists^{=k} x\, \varphi(a_1, \ldots, a_{n-1}, y, x)$. Si $\psi(\mathcal{M})$ fuese un subconjunto finito de M, como $b \in \psi(\mathcal{M})$ se tendría que $b \in \mathrm{acl}(A)$, por lo que $\mathrm{acl}(A \cup \{b\}) = \mathrm{acl}(A)$ y $a \in \mathrm{acl}(A)$, que es una contradicción. Por tanto, por ser T una teoría fuertemente minimal, $\psi(\mathcal{M})$ tiene que ser un subconjunto cofinito de M. Sea $\chi(y) = \varphi(a_1, \ldots, a_{n-1}, y, a) \wedge \psi(y)$. Si $\chi(\mathcal{M})$ fuese un conjunto cofinito, entonces $|M \setminus \chi(\mathcal{M})| = l$ para algún $l < \omega$. Sea $\theta(x) = \exists^{=l} y \neg (\varphi(a_1, \ldots, a_{n-1}, y, x) \wedge \psi(y))$. Si $\theta(\mathcal{M})$ fuese finito, como $a \in \theta(\mathcal{M})$, se tendría que $a \in \mathrm{acl}(A)$, que es una contradicción, por lo que $\theta(\mathcal{M})$ debe ser cofinito. Por tanto, $|\theta(\mathcal{M})| \geq \omega$ y podemos escoger $\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_{k+1} \in \theta(\mathcal{M})$ distintos. Sea, para cada $1 \leq i \leq k+1$, $B_i = \{\tilde{b} \in M \;:\; \varphi(a_1, \ldots, a_{n-1}, \tilde{b}, \tilde{a}_i) \wedge \psi(\tilde{b})\}$. Sabemos que $b \in B_1 \cap \ldots \cap B_{k+1}$, por lo que se cumple a la vez que $b \in \varphi(a_1, \ldots, a_{n-1}, \mathcal{M}, \tilde{a}_i)$ para cada $1 \leq i \leq k+1$ y que $b \in \psi(\mathcal{M})$. Esto es una contradicción y hemos llegado a ella a partir de la suposición de que $\chi(\mathcal{M})$ es un conjunto cofinito. Se tiene, por tanto, que $\chi(\mathcal{M})$ es un conjunto finito y como $b \in \chi(\mathcal{M})$, se tiene que $b \in \mathrm{acl}(A \cup \{a\})$.

- Sea $a \in \mathrm{acl}(A)$. Entonces existe una fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n, y)$ de L y elementos $a_1, \ldots, a_n \in A$ tales que $\varphi(a_1, \ldots, a_n, \mathcal{M})$ es finito y $a \in \varphi(a_1, \ldots, a_n, \mathcal{M})$. Es claro entonces que $a \in \mathrm{acl}(A_0)$ para $A_0 = \{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq A$ finito. $\square$

Observación 3.12. *Utilizando la demostración de la* ***Proposición 3.11****, podemos ver que, para una estructura $\mathcal{M}$ de un lenguaje L cualquiera, se cumplen los puntos*

- *Si $A \subseteq M$, entonces $\mathrm{acl}_{\mathcal{M}}(A) = \mathrm{acl}_{\mathcal{M}}(\mathrm{acl}_{\mathcal{M}}(A))$.*
- *Si $A \subseteq B \subseteq M$, entonces $\mathrm{acl}_{\mathcal{M}}(A) \subseteq \mathrm{acl}_{\mathcal{M}}(B)$.*
- *Si $A \subseteq M$ y $a \in \mathrm{acl}_{\mathcal{M}}(A)$, entonces existe un conjunto finito $A_0 \subseteq A$ tal que $a \in \mathrm{acl}_{\mathcal{M}}(A_0)$.*

sin necesidad de imponer que $\mathcal{M}$ sea modelo de una teoría fuertemente minimal.

En una estructura $\mathcal{M}$ de lenguaje L, un conjunto $A \subseteq M$ es **algebraicamente independiente** si es un conjunto independiente respecto al operador acl. Es decir, si para cada $a \in A$, se cumple $a \notin \mathrm{acl}(A \setminus \{a\})$. Además, A es **algebraicamente cerrado (desde la teoría de modelos)** si es cerrado respecto al operador acl. Es decir, si $\mathrm{acl}_{\mathcal{M}}(A) = A$.

Sea $\mathcal{K}$ un cuerpo y $\mathcal{M}$ un cuerpo algebraicamente cerrado, ambos de lenguaje L y con la misma característica, tales que $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{M}$. Entonces $K \subseteq \mathrm{acl}_{\mathcal{M}}(K) \subseteq M$. Sea $\mathcal{N}$ la estructura de L con universo $N = \mathrm{acl}_{\mathcal{M}}(K)$ que interpreta cada símbolo de constante c de L como lo hacen $\mathcal{K}$ y $\mathcal{M}$, asigna a cada símbolo de función F n-ádico de L la función $F^{\mathcal{N}}$, que es la restricción de $F^{\mathcal{M}}$ a N, y asigna a cada símbolo de relación R n-ádico de L el conjunto $R^{\mathcal{N}} = \{(a_1, \ldots, a_n) \in R^{\mathcal{M}} \;:\; a_1, \ldots, a_n \in N\} \subseteq R^{\mathcal{M}}$. Podemos observar que $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$, por lo que $\mathcal{N}$ es un cuerpo intermedio de la extensión $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{M}$.

Para una estructura $\mathcal{M}$ de lenguaje L y $A \subseteq M$, formamos el conjunto habitual de nuevas constantes C_A y la expansión $\mathcal{M}_A$ que interpreta cada $c_a \in C_A$ como $a \in M$. Como, para una fórmula $\varphi(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n}, x_1, \ldots, x_k)$ de $L \cup C_A$ y elementos $m_1, \ldots, m_k \in M$

se cumple $\mathcal{M}_A \models \varphi(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n}, m_1, \ldots, m_k)$ si y solo si $\mathcal{M} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n, m_1, \ldots, m_k)$, para la respectiva fórmula $\varphi(y_1, \ldots, y_n, x_1, \ldots, x_k)$ de L, definimos, para relajar la escritura, el lenguaje $L(A)$ como el lenguaje obtenido al añadir a L el conjunto $\{a : a \in A\}$ como nuevos símbolos de constante, que $\mathcal{M}$ interpretará como los propios $a \in A \subseteq M$. Ahora, no necesitaremos referirnos a fórmulas de $L \cup C_A$ y construir las expansiones pertinentes para ver si estas fórmulas se satisfacen en ellas, sino que usaremos las fórmulas de $L(A)$ respectivas y veremos si estas se satisfacen en $\mathcal{M}$.

Lema 3.13. *Si $\mathcal{K}$ es un cuerpo de característica p fijada y $\mathcal{M}$ es un modelo de* $\mathbf{ACF_p}$ *que es extensión de $\mathcal{K}$, decir que un elemento $a \in M$ es algebraico sobre K desde el álgebra es equivalente a decir que lo es desde la teoría de modelos.*

Demostración: Vemos que, si a es cero de un polinomio $P(x)$ de $K[X]$, entonces podemos definir la fórmula $\varphi(x) = P(x) \doteq 0$ de $L(K)$ que define el conjunto $\varphi(\mathcal{M})$ finito y tal que $a \in \varphi(\mathcal{M})$, por lo que $a \in \mathrm{acl}_{\mathcal{M}}(K)$.

Sea ahora $a \in \mathrm{acl}_{\mathcal{M}}(K)$. entonces existe una fórmula $\varphi(x)$ de $L(K)$, que podemos suponer sin cuantificadores por ser $\mathcal{M}$ modelo de $\mathbf{ACF_p}$, teoría que hemos demostrado que admite eliminación de cuantificadores en el **Corolario 3.4**, tal que $\varphi(\mathcal{M})$ es finito y $\mathcal{M} \models \varphi(a)$. Podemos expresar $\varphi(x)$ como

$$\bigvee_{i \in I} \bigwedge_{j \in J} \psi_{ij}(x)$$

donde cada $\psi_{ij}(x)$ es, o bien de la forma $P_{ij}(x) \doteq 0$, o bien de la forma $\neg P_{ij}(x) \doteq 0$, donde $P_{ij}(x)$ es un polinomio de $K[X]$. Como $\varphi(\mathcal{M})$ es finito, para cada $i \in I$ debe haber un $j_i \in J$ tal que $\psi_{ij_i}(x)$ es de la forma $P_{ij_i}(x) \doteq 0$. Como $\mathcal{M} \models \varphi(a)$, hay un $i_0 \in I$ tal que $\mathcal{M} \models \bigwedge_{j \in J} \psi_{i_0 j}(a)$. En particular, $\mathcal{M} \models \psi_{i_0 j_{i_0}}(a)$, que equivale a $\mathcal{M} \models P_{i_0 j_{i_0}}(a) \doteq 0$, por lo que a es un cero del polinomio $P_{i_0 j_{i_0}}(x)$ de $K[X]$. $\square$

Lema 3.14. *Si $\mathcal{K}$ es un cuerpo de característica p fijada y $\mathcal{M}$ es un modelo de* $\mathbf{ACF_p}$ *que es extensión de $\mathcal{K}$, decir que $K \subseteq M$ es algebraicamente cerrado desde el álgebra es equivalente a decir que lo es desde la teoría de modelos.*

Demostración: Supongo que $\mathrm{acl}_{\mathcal{M}}(K) = K$. Entonces, para cualquier fórmula $\varphi(x)$ de $L(K)$ tal que $\varphi(\mathcal{M})$ es finito, se tiene $\varphi(\mathcal{M}) \subseteq K$. En particular, para cualquier polinomio $P(x)$ de $K[X]$ con grado ≥ 1, la fórmula $\varphi_P(x) = P(x) \doteq 0$ cumple las propiedades anteriores. Además, $\varphi_P(\mathcal{M})$ es no vacío, ya que $\mathcal{M}$ es modelo de $\mathbf{ACF_p}$, por lo que $\mathcal{M} \models \exists x\, \varphi_P(x)$. Con esto, llegamos a la conclusión de que $P(x)$ tiene algún cero en K.

Supongamos ahora que todo polinomio de $K[X]$, de grado ≥ 1, tiene un cero en K. Como ya sabemos, $K \subseteq \mathrm{acl}_{\mathcal{M}}(K)$. Sea ahora $a \in \mathrm{acl}_M(K)$. Como ya hemos demostrado en la demostración del **Lema 3.13**, a debe ser cero de un polinomio $P(x)$ de $K[X]$ de grado $n \geq 1$. Por hipótesis, $P(x)$ tiene un cero $a_1 \in K$, por lo que $P(x) = (x - a_1) \cdot P_1(x)$, donde $P_1(x)$ es un polinomio de $K[X]$ de grado $n - 1$. Iterando este proceso n veces, llegamos a que $P(x) = (x - a_1) \cdots (x - a_n)$, donde $a_1, \ldots, a_n \in K$. Como estos son todos los ceros de $P(x)$, debe cumplirse $a = a_i$ para algún $1 \leq i \leq n$, por lo que $a \in K$. Con esto $\mathrm{acl}_M(K) \subseteq K$ y, por tanto, $\mathrm{acl}_M(K) = K$. $\square$

Habiendo demostrado esto, para un cuerpo $\mathcal{K}$ de característica p fijada y una extensión suya $\mathcal{M}$ que sea modelo de $\mathbf{ACF_p}$, podemos empezar a hablar de elementos algebraicos sobre K y subconjuntos algebraicamente cerrados de M sin diferenciar, en cada caso, si lo hacemos desde el álgebra o desde la teoría de modelos.

Introduciremos ahora un nuevo concepto de la teoría de modelos que nos ayudará más tarde a comprobar la equivalencia entre la clausura algebraica de un cuerpo definida en el álgebra como la extensión de ese cuerpo algebraica sobre él y algebraicamente cerrada, y la definida en este trabajo desde la teoría de modelos.

Un modelo $\mathcal{M}$ de una teoría T de lenguaje L es **existencialmente cerrado** si para cada extensión $\mathcal{N} \supseteq \mathcal{M}$ modelo de T y cada fórmula $\varphi(x)$ de $L(M)$ sin cuantificadores tal que $\mathcal{N} \models \exists x\, \varphi(x)$, se cumple $\mathcal{M} \models \exists x\, \varphi(x)$.

Lema 3.15. *Si T es una teoría de lenguaje L numerable para la que todos sus axiomas son de tipo $\forall\exists$, entonces todo modelo de T puede extenderse a un modelo existencialmente cerrado de T.*

Demostración: Empezaremos demostrando la siguiente afirmación:

Afirmación. *Sea T una teoría de lenguaje L numerable para la que todos sus axiomas son de tipo $\forall\exists$ y sea $\mathcal{M}$ un modelo de T. Entonces existe una extensión $\mathcal{M}' \supseteq \mathcal{M}$ modelo de T tal que, para cada fórmula de $L(M)$ sin cuantificadores, si existe alguna extensión $\mathcal{M}'' \supseteq \mathcal{M}'$ modelo de T tal que $\mathcal{M}'' \models \exists x\, \varphi(x)$, entonces se cumple $\mathcal{M}' \models \exists x\, \varphi(x)$.*

Esto se demuestra pensando que, si M es finito, entonces $|L(M)| = \omega$ y si $|M| = \kappa \geq \omega$, entonces $|L(M)| = \kappa$. En ambos casos $|L(M)| = \kappa$ para un cardinal κ infinito. Definamos

$$\Phi = \{\varphi(x) \in L(M) \;:\; \varphi \text{ no tiene cuantificadores}\}$$

Entonces podemos enumerar, mediante ordinales distintos, cada una de esas fórmulas para obtener $\Phi = \{\varphi_i(x) \;:\; i < \kappa\}$. Ahora construimos $(\mathcal{M}_i \;:\; i < \kappa)$, una cadena de modelos de T siendo $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}$ y, para cada $i < \kappa$, siendo $\mathcal{M}_{i+1}$ una extensión cualquiera de $\mathcal{M}_i$ en la que $\exists x\, \varphi_i(x)$ se satisface en el caso de que exista tal extensión, o $\mathcal{M}_i$ en caso contrario. En el caso i límite, se toma la unión de los modelos anteriores. Demostraremos que esta unión es un modelo de T. Sea $\alpha \leq \kappa$ un ordinal límite y $\mathcal{N}$ la estructura formada como unión de todos los ordinales menores a α, que supondremos todos modelos de T. Sean $\bar{x}$ y $\bar{y}$ una n-tupla y una k-tupla de variables respectivamente, y sea $\forall\bar{x}\, \exists\bar{y}\, \varphi(\bar{x}, \bar{y})$ uno de los axiomas de T. Sea $\bar{a}$ una n-tupla de N. Entonces existe un $i_0 < \alpha$ tal que $\bar{a} \in M_{i_0}$ y $\mathcal{M}_{i_0} \models \exists\bar{y}\, \varphi(\bar{a}, \bar{y})$. Como $\mathcal{M}_{i_0} \subseteq \mathcal{N}$, se tiene que $\mathcal{N} \models \exists\bar{y}\, \varphi(\bar{a}, \bar{y})$. Con esto, $\mathcal{N}$ satisface todos los axiomas de T. Finalmente, denotamos $\mathcal{M}' = \bigcup_{i<\kappa} \mathcal{M}_i$, que es modelo de T. Claramente, $\mathcal{M}'$ es una extensión de $\mathcal{M}$. Sea ahora $\varphi(x)$ una fórmula de $L(M)$ sin cuantificadores. Entonces existe $i_0 < \kappa$ tal que $\varphi(x) = \varphi_{i_0}(x)$. Supongamos que existe una extensión $\mathcal{M}'' \supseteq \mathcal{M}'$ modelo de T tal que $\mathcal{M}'' \models \exists x\, \varphi_{i_0}(x)$. Entonces, como $\mathcal{M}_{i_0} \subseteq \mathcal{M}''$, por construcción $\mathcal{M}_{i_0+1} \models \exists x\, \varphi_{i_0}(x)$ y, por tanto, $\mathcal{M}' \models \varphi_{i_0}(x)$, con lo que la afirmación queda demostrada.

Utilizando ahora esta afirmación, construimos $(\mathcal{M}_n : n < \omega)$, una cadena de modelos de T en la que $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}$ y para cada $n < \omega$, $\mathcal{M}_{n+1}$ es una extensión de $\mathcal{M}_n$, modelo de T tal que para cada fórmula $\varphi(x)$ de $L(M_n)$ sin cuantificadores, si existe una extensión $\mathcal{N} \supseteq \mathcal{M}_{n+1}$ modelo de T tal que $\mathcal{N} \models \exists x\, \varphi(x)$, entonces se cumple $\mathcal{M}_{n+1} \models \exists x\, \varphi(x)$. Se tiene que $\mathcal{M}' = \bigcup_{n<\omega} \mathcal{M}_n$ es, claramente, una extensión de $\mathcal{M}$ y, además, es un modelo de T existencialmente cerrado. Esto se demuestra porque, si $\varphi(x)$ es una fórmula sin cuantificadores de $L(M')$ y existe una extensión $\mathcal{M}'' \supseteq \mathcal{M}'$ modelo de T tal que $\mathcal{M}'' \models \exists x\, \varphi(x)$, entonces hay un $n_0 < \omega$ para el que $\varphi(x)$ es una fórmula sin cuantificadores de $L(M_{n_0})$ y, como $\mathcal{M}_{n_0+1} \subseteq \mathcal{M}''$ y $\mathcal{M}'' \models \exists x\, \varphi(x)$, se tiene que $\mathcal{M}_{n_0+1} \models \exists x\, \varphi(x)$. Esto implica que $\mathcal{M}' \models \exists x\, \varphi(x)$, ya que $\mathcal{M}_{n_0+1} \subseteq \mathcal{M}'$. □

$\mathbf{ACF_p}$, tanto para $p = 0$ como para $p \in \mathbb{Z}$ primo, es una teoría de lenguaje $\mathcal{L}$ numerable que, además, tiene todos sus axiomas de tipo $\forall\exists$, ya que el único axioma que no hemos presentado de esta manera es $\forall x\, (\neg\, x \doteq 0 \to \exists y\, (x \cdot y \doteq 1))$, pero este es equivalente a $\forall x\, (\exists y\, (x \cdot y \doteq 1) \vee x \doteq 0)$ y este es equivalente a $\forall x\, \exists y\, (x \cdot y \doteq 1 \vee x \doteq 0)$, por el que lo podríamos sustituir. Además, la teoría $\mathbf{F_p}$ es una subteoría de $\mathbf{ACF_p}$ también axiomatizada por sentencias del tipo $\forall\exists$. Como consecuencia, todo cuerpo $\mathcal{K}$ de característica fijada puede extenderse a un cuerpo $\mathcal{K}'$ de la misma característica que es existencialmente cerrado. Además, esta extensión $\mathcal{K}'$ es algebraicamente cerrada, ya que si $P(x)$ es un polinomio no constante con coeficientes en K', sabemos por álgebra que existe una extensión $\mathcal{K}'' \supseteq \mathcal{K}'$ donde $P(x)$ tiene un cero. Esto hace que $\mathcal{K}'' \models \exists x\, (P(x) \doteq 0)$, y por ser $\mathcal{K}'$ existencialmente cerrado, $\mathcal{K}' \models \exists x\, (P(x) \doteq 0)$.

Lema 3.16. *Si $\mathcal{K}$ es un cuerpo de característica p fijada, entonces hablar de la clausura algebraica de $\mathcal{K}$ desde el álgebra es equivalente a hacerlo desde la teoría de modelos.*

Demostración: En álgebra, la clausura de un cuerpo dentro de una extensión suya es un cuerpo intermedio algebraicamente cerrado y algebraico sobre el primer cuerpo. Acabamos de ver que $\mathcal{K}$ puede extenderse a un modelo $\mathcal{M}$ de $\mathbf{ACF_p}$. Entonces $K \subseteq \mathrm{acl}_{\mathcal{M}}(K) \subseteq M$. Por un lado, utilizamos la **Proposición 3.12** para ver que se cumple $\mathrm{acl}_{\mathcal{M}}(\mathrm{acl}_{\mathcal{M}}(K)) = \mathrm{acl}_{\mathcal{M}}(K)$, por lo que $\mathrm{acl}_{\mathcal{M}}(K)$ es algebraicamente cerrada. Por otra parte, $\mathrm{acl}_{\mathcal{M}}(K)$ es, por su propia definición, algebraico sobre K. En definitiva, $\mathrm{acl}_{\mathcal{M}}(K)$ es una extensión de $\mathcal{K}$ algebraicamente cerrada y algebraica sobre K. □

Lema 3.17. *Sean $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ dos estructuras de un mismo lenguaje L y f un isomorfismo de $\mathcal{M}$ en $\mathcal{N}$. Si $A \subseteq M$, $B \subseteq N$ y $f(A) = B$, entonces $f(\mathrm{acl}(A)) = \mathrm{acl}(B)$.*

Demostración: Sea $b \in f(\mathrm{acl}(A))$. Entonces hay un elemento $a \in \mathrm{acl}(A)$ tal que $f(a) = b$. Como $\varphi(x) = x \doteq f(a)$ es una fórmula de $L(f(A)) = L(B)$ tal que $\varphi(\mathcal{N})$ es finito y $b \in \varphi(\mathcal{N})$, se tiene $b \in \mathrm{acl}(B)$, por lo que $f(\mathrm{acl}(A)) \subseteq \mathrm{acl}(B)$. Sea ahora $b \in \mathrm{acl}(B)$. Entonces existen una fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n, y)$ de L y elementos $b_1, \ldots, b_n \in B$ tales que $\varphi(b_1, \ldots, b_n, \mathcal{N})$ es finito y $b \in \varphi(b_1, \ldots, b_n, \mathcal{N})$, por lo que $\mathcal{N} \models \varphi(b_1, \ldots, b_n, b)$. Sea $f(a_i) = b_i$ para cada $1 \leq i \leq n$ y sea $f(a) = b$. Entonces $\mathcal{N} \models \varphi(f(a_1), \ldots, f(a_n), f(a))$ y, por tanto, $\mathcal{M} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n, a)$. Teniendo en cuenta que $\varphi(a_1, \ldots, a_n, y)$ es una fórmula de $L(A)$, que $|\varphi(a_1, \ldots, a_n, \mathcal{M})| = |\varphi(b_1, \ldots, b_n, \mathcal{N})|$ por ser f isomorfismo y, que $a \in \varphi(a_1, \ldots, a_n, \mathcal{M})$, se tiene $a \in \mathrm{acl}(A)$, por lo que $b \in f(\mathrm{acl}(A))$, por lo que $\mathrm{acl}(B) \subseteq f(\mathrm{acl}(A))$. $\square$

Teorema 3.18. *La clausura algebraica de un cuerpo $\mathcal{K}$ es única salvo isomorfismo. Además, este isomorfismo fija K.*

Demostración: Sea $\mathcal{K}$ un cuerpo de lenguaje L y sean $\mathcal{K}_1$ y $\mathcal{K}_2$ dos clausuras algebraicas de $\mathcal{K}$. Se tiene, por tanto, que $K_1 = \mathrm{acl}_{\mathcal{K}_1}(K)$ y $K_2 = \mathrm{acl}_{\mathcal{K}_2}(K)$. Entonces $\mathcal{K}_1$ y $\mathcal{K}_2$ son modelos de **ACF**, por ser cuerpos algebraicamente cerrados. Además, tienen la misma característica, ya que para cada $p \in \mathbb{Z}$ primo, definiendo $\varphi_p = 1 + \overset{p)}{\ldots} + 1 \doteq 0$, por ser φ_p una fórmula sin cuantificadores, se cumple $\mathcal{K}_1 \models \varphi_p$ si y solo si $\mathcal{K} \models \varphi_p$ si y solo si $\mathcal{K}_2 \models \varphi_p$. Por tanto, sea $p = \mathrm{Char}(\mathcal{K}_1) = \mathrm{Char}(\mathcal{K}_2)$, se tiene que tanto $\mathcal{K}_1$ como $\mathcal{K}_2$ son modelos de la teoría $\mathbf{ACF_p}$. Sea C un conjunto de nuevos símbolos de constantes c_a para cada elemento $a \in K$, distintos dos a dos y tal que $C \cap L = \varnothing$. Sean $\mathcal{K}_{1K}$ y $\mathcal{K}_{2K}$ las expansiones a lenguaje $L \cup C$ naturales de $\mathcal{K}_1$ y $\mathcal{K}_2$, respectivamente. Entonces una sentencia σ de $L \cup C$ puede verse como $\varphi(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n})$, donde $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ es una fórmula de L, que podemos suponer sin cuantificadores por tener $\mathbf{ACF_p}$ eliminación de cuantificadores, y $c_{a_1}, \ldots, c_{a_n} \in C$. Se cumple $\mathcal{K}_{1K} \models \sigma$ si y solo si $\mathcal{K}_1 \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$ si y solo si $\mathcal{K} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$ si y solo si $\mathcal{K}_2 \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$ si y solo si $\mathcal{K}_{2K} \models \sigma$, por lo que $\mathcal{K}_{1K} \equiv \mathcal{K}_{2K}$. Utilizando la **Proposición 2.11**, sabemos que existen $\mathcal{M} \succeq \mathcal{K}_{1K}$, $\mathcal{N} \succeq \mathcal{K}_{2K}$ y un isomorfismo f de $\mathcal{M}$ en $\mathcal{N}$. Nos fijamos en que, para cada $a \in K$, $f(a) = f(c_a^{\mathcal{M}}) = c_a^{\mathcal{N}} = a$, por lo que f fija K. Como f sigue siendo un isomorfismo de $\mathcal{K}_1$ en $\mathcal{K}_2$ y $f(K) = K$, podemos utilizar el **Lema 3.17**, con el que se llega a que $f(\mathrm{acl}_{\mathcal{K}_1}(K)) = \mathrm{acl}_{\mathcal{K}_2}(K)$, que equivale a decir que $f(K_1) = K_2$. Con esto, la restricción de f a K_1 es un isomorfismo de $\mathcal{K}_1$ en $\mathcal{K}_2$. $\square$

3.6. Modelo-compleción

Una teoría T es **modelo-completa** si, para cada par $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ de modelos de T tales que $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$, se cumple que $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$.

Observación 3.19. *Si una teoría admite eliminación de cuantificadores, entonces es una teoría modelo-completa.*

Demostración: Para demostrarlo, suponemos T una teoría de lenguaje L que admite eliminación de cuantificadores y $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ dos modelos suyos tales que $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$. Sea $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula de L. Entonces existe una fórmula $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ de L sin cuantificadores tal que $T \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n\, (\varphi(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \psi(x_1, \ldots, x_n))$ y, por tanto, $\forall x_1 \ldots \forall x_n\, (\varphi(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \psi(x_1, \ldots, x_n))$ se satisface en $\mathcal{M}$ y en $\mathcal{N}$. Sean ahora $a_1, \ldots, a_n \in M$ arbitrarios. Como las fórmulas sin cuantificadores se preservan bajo extensiones y subestructuras, tal como indica el **Lema 2.6**, tenemos que $\mathcal{M} \models \psi(a_1, \ldots, a_n)$

si y solo si $\mathcal{N} \models \psi(a_1, \ldots, a_n)$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \quad & \text{si y solo si} \quad \mathcal{M} \models \psi(a_1, \ldots, a_n) \\ & \text{si y solo si} \quad \mathcal{N} \models \psi(a_1, \ldots, a_n) \\ & \text{si y solo si} \quad \mathcal{N} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \end{aligned}$$

□

Dos teorías T_1 y T_2 de lenguaje L son **modelo-consistentes** si cada modelo de una de ellas se puede extender a un modelo de la otra. Como observación, podemos ver que la modelo-consistencia es una relación de equivalencia entre teorías de un mismo lenguaje.

Proposición 3.20. *Dos teorías T_1 y T_2 de lenguaje L son modelo-consistentes si y solo si tienen las mismas consecuencias universales. Es decir, son modelo-consistentes si y solo si para cada fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ universal de L, se cumple $T_1 \vdash \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ si y solo si se cumple $T_2 \vdash \varphi(x_1, \ldots, x_n)$.*

Demostración: Sean T_1 y T_2 modelo-consistentes y φ una fórmula universal de L tal que $T_1 \vdash \varphi$. Sea $\mathcal{M}$ un modelo de T_2. Entonces $\mathcal{M}$ tiene una extensión $\mathcal{N}$ que es modelo de T_1. Como $\mathcal{M} \models \varphi$, el **Lema 2.6** asegura que $\mathcal{N} \models \varphi$. Argumentando de la misma manera, si suponemos que $T_2 \vdash \varphi$, llegamos a que $T_1 \vdash \varphi$.

Sean ahora T_1 y T_2 dos teorías con las mismas consecuencias universales. Sea $\mathcal{M}$ un modelo de T_1. Creamos un conjunto de símbolos de constante $C = \{c_a \, : \, a \in M\}$, distintos dos a dos y tal que $L \cap C = \varnothing$. Formamos la expansión natural $\mathcal{M}_M$ de M de lenguaje $L \cup C$. Sea D el conjunto de sentencias sin cuantificadores de $L \cup C$ que $\mathcal{M}_M$ satisface. Sabemos que un subconjunto finito de sentencias de D es satisfacible si y solo si lo es la sentencia formada por la conjunción de todas las sentencias del subconjunto. Cogeremos, por tanto, una sentencia $\sigma = \varphi(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n})$ de D, donde $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ es una fórmula sin cuantificadores de L y $c_{a_1}, \ldots, c_{a_n} \in C$ son los símbolos de constante que $\mathcal{M}_M$ interpreta como $a_1, \ldots, a_n \in M$, respectivamente. Entonces $\mathcal{M}_M \models \sigma$, por lo que $\mathcal{M} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$. Esto hace que $\mathcal{M} \models \exists x_1 \ldots x_n \, \varphi(x_1, \ldots, x_n)$, que equivale a $\mathcal{M} \not\models \forall x_1 \ldots x_n \, \neg \varphi(x_1, \ldots, x_n)$. Por tanto, $\forall x_1 \ldots x_n \, \neg \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ no es una consecuencia de T_1, con lo que, por hipótesis, tampoco lo es de T_2. Hay, por tanto, un modelo $\mathcal{N}$ de T_2 y elementos $b_1, \ldots, b_n \in N$ tales que $\mathcal{N} \models \varphi(b_1, \ldots, b_n)$. Por el *Teorema de compacidad*, $D \cup T_2$ es satisfacible. Sea $\mathcal{N}'$ un modelo de $D \cup T_2$, de lenguaje $L \cup C$. La función $a \mapsto c_a^{\mathcal{N}'}$ define una inmersión que, por el **Lema 2.7**, puede extenderse a un isomorfismo entre una extensión $\mathcal{M}'$ de $\mathcal{M}$ y el modelo $\mathcal{N}'$ de $D \cup T_2$. Por tanto, $\mathcal{M}'$ es modelo de $D \cup T_2$ y, en consecuencia, de T_2. □

Una teoría T de lenguaje L tiene, por tanto, una mínima teoría con la que es modelo-consistente. Esta es la teoría axiomatizada por las sentencias universales de T y la denotaremos $T_\forall$.

Sean T y T^* dos teorías de lenguaje L. Entonces T^* es una **modelo-compañía** de T si T y T^* son modelo-consistentes y, además, T^* es modelo-completa.

Lema 3.21. *Una teoría tiene a lo sumo una modelo-compañía.*

Demostración: Sean T_1, T_2 modelo-compañías de una teoría T de lenguaje L. Entonces ambas son modelo-consistentes con T y, por tanto, también son modelo-consistentes entre ellas. Demostraremos que $T_1 \subseteq T_2$ observando que todo modelo de T_2 es también un modelo de T_1. Sea $\mathcal{N}_1$ un modelo de T_2. Entonces existe un modelo $\mathcal{M}_1$ de T_1 tal que $\mathcal{N}_1 \subseteq \mathcal{M}_1$. A su vez, existe un modelo $\mathcal{N}_2$ de T_2 tal que $M_1 \subseteq \mathcal{N}_2$. Repitiendo este proceso se obtiene la cadena

$$\mathcal{N}_1 \subseteq \mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{N}_2 \subseteq \mathcal{M}_2 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{N}_n \subseteq \mathcal{M}_n \subseteq \mathcal{N}_{n+1} \subseteq \ldots$$

que puede descomponerse en las cadenas $(\mathcal{M}_i \;:\; i < \omega)$ y $(\mathcal{N}_i \;:\; i < \omega)$ de modelos de T_1 y T_2 respectivamente. Como T_1 y T_2 son modelo-completas por ser ambas modelo-compañías de T por hipótesis, estas cadenas son elementales. Por tanto, sean $\mathcal{M} = \bigcup_{i<\omega} \mathcal{M}_i$ y $\mathcal{N} = \bigcup_{i<\omega} \mathcal{N}_i$, se tiene $\mathcal{N}_1 \preceq \mathcal{N}$. Pero por la forma de la cadena original, se tiene que $\mathcal{M} = \mathcal{N}$ y, por tanto, $\mathcal{N}_1 \preceq \mathcal{M}$, cosa que hace que $\mathcal{N}_1 \equiv \mathcal{M}$. Como $\mathcal{M} \models T_1$, también $\mathcal{N}_1$ es un modelo de T_1. De la misma manera podemos demostrar que $T_2 \subseteq T_1$ y, por tanto, obtener que $T_1 = T_2$. □

Sean T y T^* dos teorías de lenguaje L. Entonces T^* es **modelo-compleción de** T si es modelo-compañía de T y, además, para cada modelo $\mathcal{M}$ de T, si $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}_2$ para $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$ modelos de T^*, entonces para cada fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ de L y cada $a_1, \ldots, a_n \in M$, se tiene que $\mathcal{M}_1 \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$ si y solo si $\mathcal{M}_2 \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$.

Lema 3.22. *Si T y T' son dos teorías de L, T' tiene eliminación de cuantificadores y además es la modelo-compañía de T, entonces T' es la modelo-compleción de T.*

Demostración: Supongo que T' es la modelo-compañía de T y además tiene eliminación de cuantificadores. Sea $\mathcal{M}$ un modelo de T y sean $\mathcal{M}_1 \supseteq \mathcal{M}$ y $\mathcal{M}_2 \supseteq \mathcal{M}$ dos extensiones de $\mathcal{M}$ modelos de T'. Sea $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula de L y $a_1, \ldots, a_n \in M$. Por tener T' eliminación de cuantificadores existe una fórmula $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ de L sin cuantificadores tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1 \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \quad & \text{si y solo si} \quad \mathcal{M}_1 \models \psi(a_1, \ldots, a_n) \\ & \text{si y solo si} \quad \mathcal{M} \models \psi(a_1, \ldots, a_n) \\ & \text{si y solo si} \quad \mathcal{M}_2 \models \psi(a_1, \ldots, a_n) \\ & \text{si y solo si} \quad \mathcal{M}_2 \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \end{aligned}$$

□

Proposición 3.23. *Sea $T = \mathbf{ACF_p}$. Entonces $T_\forall$ es la teoría de dominios de integridad de característica p. Además, T es la modelo-compleción de $T_\forall$.*

Demostración: Sea T^* la teoría de dominios de integridad de característica p. Sabemos, por el álgebra, que $T \vdash \forall xy\, (x \cdot y \doteq 0 \to (x \doteq 0 \vee y \doteq 0))$. Como T^* se axiomatiza por los axiomas de $\mathbf{ACF_p}$ cambiando el axioma $\forall x\, (\neg\, x \doteq 0 \to \exists y\, (x \cdot y \doteq 1))$ por el que acabamos de introducir, T^* se axiomatiza por axiomas universales, y como $T^* \subseteq T$, se tiene que $T^* \subseteq T_\forall$. Sea ahora σ uno de los axiomas de $T_\forall$ y $\mathcal{M}$ un modelo de T^*. Como todo dominio de integridad de característica p se extiende a un cuerpo de característica p y, este, a su vez, se extiende a un cuerpo algebraicamente cerrado de característica p, sabemos que $\mathcal{M}$ puede extenderse a $\mathcal{K} \models \mathbf{ACF_p}$. Como $\sigma \in T_\forall \subseteq T = \mathbf{ACF_p}$, se tiene que $\mathcal{K} \models \sigma$ y, como σ es universal, se tiene $\mathcal{M} \models \sigma$. Como esto sirve para cualquier axioma de $T_\forall$, se tiene que $T_\forall \subseteq T^*$, consiguiendo la igualdad que buscábamos.

Ahora demostraremos que T es la modelo-compleción de $T_\forall$. Sabemos que T es modelo-completa por la **Observación 3.19**, ya que tiene eliminación de cuantificadores. Además, T y $T_\forall$ son modelo-consistentes, ya que, por un lado, el hecho de que $T_\forall \subseteq T$ hace que todo modelo de T pueda extenderse a él mismo, que es un modelo de $T_\forall$ y, por otra parte, todo modelo de $T_\forall$ es un dominio de integridad de característica p, que sabemos que puede extenderse a un cuerpo algebraicamente cerrado de característica p, que será un modelo de T. Con esto, hemos demostrado que T es la modelo-compañía de $T_\forall$. Como, además, T tiene eliminación de cuantificadores, utilizamos el **Lema 3.22** para concluir que T es la modelo-compleción de $T_\forall$. □

Como la teoría de cuerpos de característica p, $\mathbf{F_p}$, también es una subteoría de $\mathbf{ACF_p}$ y todo cuerpo de característica p puede extenderse a un cuerpo algebraicamente cerrado de característica p, se demuestra de igual manera que $\mathbf{ACF_p}$ es la modelo-compleción de $\mathbf{F_p}$.

Proposición 3.24. *Sea $T = \mathbf{ACF}$. Entonces $T_\forall$ es la teoría de dominios de integridad. Además, T es la modelo-compleción de $T_\forall$.*

Demostración: Sea T^* la teoría de dominios de integridad. Sabemos, por el álgebra, que $T \vdash \forall xy\,(x \cdot y \doteq 0 \rightarrow (x \doteq 0 \vee y \doteq 0))$. Como T^* se axiomatiza por los axiomas de $\mathbf{ACF}$ cambiando el axioma $\forall x\,(\neg\, x \doteq 0 \rightarrow \exists y\,(x \cdot y \doteq 1))$ por el que acabamos de introducir, T^* se axiomatiza por axiomas universales, y como $T^* \subseteq T$, se tiene que $T^* \subseteq T_\forall$. Sea ahora σ uno de los axiomas de $T_\forall$ y $\mathcal{M}$ un modelo de T^*. Como todo dominio de integridad se extiende a un cuerpo y, este, a su vez, se extiende a un cuerpo algebraicamente cerrado, sabemos que $\mathcal{M}$ puede extenderse a $\mathcal{K} \models \mathbf{ACF}$. Como $\sigma \in T_\forall \subseteq T = \mathbf{ACF}$, se tiene que $\mathcal{K} \models \sigma$ y, como σ es universal, se tiene $\mathcal{M} \models \sigma$. Como esto sirve para cualquier axioma de $T_\forall$, se tiene que $T_\forall \subseteq T^*$, consiguiendo la igualdad que buscábamos.

Ahora demostraremos que T es la modelo-compleción de $T_\forall$. Sabemos que T es modelo-completa por la **Observación 3.19**, ya que tiene eliminación de cuantificadores. Además, T y $T_\forall$ son modelo-consistentes, ya que, por un lado, el hecho de que $T_\forall \subseteq T$ hace que todo modelo de T pueda extenderse a él mismo, que es un modelo de $T_\forall$ y, por otra parte, todo modelo de $T_\forall$ es un dominio de integridad, que sabemos que puede extenderse a un cuerpo algebraicamente cerrado, que será un modelo de T. Con esto, hemos demostrado que T es la modelo-compañía de $T_\forall$.Como, además, T tiene eliminación de cuantificadores, utilizamos el **Lema 3.22** para concluir que T es la modelo-compleción de $T_\forall$. □

Observación 3.25. *Como la teoría de cuerpos* **F** *también es una subteoría de* **ACF** *y todo cuerpo puede extenderse a un cuerpo algebraicamente cerrado, se demuestra de igual manera que* **ACF** *es la modelo-compleción de* **F**.

3.7. Teorías κ-categóricas

Para una teoría T completa de lenguaje L numerable y un cardinal κ cualquiera, denotamos $I(T,\kappa)$ al número de modelos de T de cardinalidad κ no isomorfos entre ellos. La teoría T es **κ-categórica** si $I(T,\kappa)=1$.

Introducimos, sin demostrarlo, un teorema de teoría de modelos que habla sobre la κ-categoricidad.

Teorema 3.26. ***(Teorema de Morley)*** *Sea T una teoría completa de un lenguaje L numerable y κ un cardinal con $\kappa > \omega$. Si T es κ-categórica, entonces T es λ-categórica para todo cardinal $\lambda > \omega$.*

Lema 3.27. *Sean $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ dos estructuras de lenguaje L con $A \subseteq M$ y $B \subseteq N$. Si $f : A \longrightarrow B$ es una aplicación elemental parcial y $a \in \operatorname{acl}_{\mathcal{M}}(A)$, entonces existe un elemento $b \in \operatorname{acl}_{\mathcal{N}}(B)$ tal que $f \cup \{(a,b)\}$ es una aplicación elemental parcial.*

Demostración: Si denotamos $p = \operatorname{tp}_{\mathcal{M}}(a/A)$, basta ver que p^f tiene alguna realización en N. Por ser $a \in \operatorname{acl}_{\mathcal{M}}(A)$, podemos considerar una fórmula $\varphi(x)$ de lenguaje $L(A)$ con $|\varphi(\mathcal{M})| = k < \omega$ mínimo tal que $\mathcal{M} \models \varphi(a)$. Entonces $\varphi(x) = \psi(x, a_1, \ldots, a_n)$ para $\psi(x, y_1, \ldots, y_n)$ una fórmula de L y $a_1, \ldots, a_n \in A$. Por ser f elemental y cumplirse $\mathcal{M} \models \exists^{=k} x\, \varphi(x)$, también se cumple $\mathcal{N} \models \exists^{=k} x\, \varphi^f(x)$, donde $\varphi^f(x) = \psi(x, f(a_1), \ldots, f(a_n))$ es una fórmula de $L(B)$, por lo que podemos escoger un elemento $b \in N$ tal que $\mathcal{N} \models \varphi^f(b)$. Vamos a ver que b es una realización de p^f. Sea $\chi(x) \in p$. Como $|(\varphi(x) \wedge \chi(x))(\mathcal{M})| \leq |\varphi(\mathcal{M})|$, por elección de φ se tiene $|(\varphi(x) \wedge \chi(x))(\mathcal{M})| = |\varphi(\mathcal{M})| = k$, con lo que $\mathcal{M} \models \exists^{=k} x\, (\varphi(x) \wedge \chi(x))$. Utilizando que f es elemental, llegamos a $\mathcal{N} \models \exists^{=k} x\, (\varphi(x) \wedge \chi(x))$. Teniendo en cuenta que $(\varphi^f(x) \wedge \chi^f(x))(\mathcal{N}) \subseteq \varphi^f(\mathcal{N})$, se tiene que todo elemento de $\mathcal{N}$ que satisface φ^f, satisface también χ^f y, por tanto, $\mathcal{N} \models \chi^f(b)$. En definitiva, b realiza p^f. $\square$

Lema 3.28. *Sean $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ dos estructuras de lenguaje L con $A \subseteq M$ y $B \subseteq N$. Si $f : A \longrightarrow B$ es una aplicación elemental parcial exhaustiva, entonces f se extiende a una aplicación elemental parcial exhaustiva $g : \operatorname{acl}_{\mathcal{M}}(A) \longrightarrow \operatorname{acl}_{\mathcal{N}}(B)$.*

Demostración: Supongamos una cadena ascendente en el orden $\subseteq$ de aplicaciones elementales parciales que extienden a f, con dominio un subconjunto de $\operatorname{acl}_{\mathcal{M}}(A)$ y con imagen un subconjunto de $\operatorname{acl}_{\mathcal{N}}(B)$. Entonces la unión de esta cadena es una cota superior. Por el *Lema de Zorn*, existe una aplicación elemental parcial g con las propiedades anteriores maximal. Suponiendo que $\operatorname{Dom} g \neq \operatorname{acl}_{\mathcal{M}}(A)$, utilizando el **Lema 3.27** podemos extender g, en contra de su maximalidad. Suponiendo $\operatorname{Im} g \neq \operatorname{acl}_{\mathcal{N}}(B)$, podríamos usar ahora g^{-1}, por ser g inyectiva, para extenderla, en contra de su maximalidad. En conclusión, $g \supseteq f$ es una aplicación elemental parcial $g : \operatorname{acl}_{\mathcal{M}}(A) \longrightarrow \operatorname{acl}_{\mathcal{N}}(B)$ exhaustiva. $\square$

Lema 3.29. *Si T es una teoría completa y fuertemente minimal de lenguaje L, $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ son dos modelos de T, y $A \subseteq M$ y $B \subseteq N$ son conjuntos algebraicamente independientes, entonces cualquier biyección $f : A \longrightarrow B$ es una aplicación elemental parcial.*

Demostración: Es suficiente ver que, para $a_1, \dots, a_n \in A$ distintos dos a dos, se cumple $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n) = \mathrm{tp}_{\mathcal{N}}(f(a_1), \dots, f(a_n))$ ya que, si esto se cumple, entonces para cada fórmula $\varphi(x_1, \dots, x_k)$ de L y cada elección de elementos $a_1, \dots, a_k \in A$, se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \models \varphi(a_1, \dots, a_k) \quad & \text{si y solo si} \quad \varphi(x_1, \dots, x_k) \in \mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_k) \\ & \text{si y solo si} \quad \varphi(x_1, \dots, x_k) \in \mathrm{tp}_{\mathcal{N}}(f(a_1), \dots, f(a_k)) \\ & \text{si y solo si} \quad \mathcal{N} \models \varphi(f(a_1), \dots, f(a_k)) \end{aligned}$$

Lo demostraremos por inducción sobre n. Para el caso inicial $n = 0$, $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(\varnothing)$ es el conjunto de sentencias de L que $\mathcal{M}$ satisface. De igual manera, $\mathrm{tp}_{\mathcal{N}}(\varnothing)$ es el conjunto de sentencias de L que $\mathcal{N}$ satisface. Como T es completa, el **Lema 2.2** nos asegura que $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$, por lo que $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(\varnothing) = \mathrm{tp}_{\mathcal{N}}(\varnothing)$. Suponemos, como hipótesis de inducción, que hemos demostrado que $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_r) = \mathrm{tp}_{\mathcal{N}}(f(a_1), \dots, f(a_r))$ para un cierto r. Estudiaremos el caso $n = r + 1$. Sea $\varphi(x_1, \dots, x_r, y)$ una fórmula de $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_{r+1})$, es decir, tal que $\mathcal{M} \models \varphi(a_1, \dots, a_{r+1})$. Veamos que esta fórmula también pertenece a $\mathrm{tp}_{\mathcal{N}}(f(a_1), \dots, f(a_{r+1}))$. Como $\varphi(a_1, \dots, a_r, \mathcal{M})$ no es finito, ya que $a_{r+1} \notin \mathrm{acl}_{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_r)$ por ser A un conjunto algebraicamente independiente, debe ser cofinito por ser T una teoría fuertemente minimal. Por tanto, $\neg \varphi(a_1, \dots, a_r, \mathcal{M})$ es finito y se cumple $\mathcal{M} \models \exists^{=k} y \neg \varphi(a_1, \dots, a_n, y)$ para un cierto $k < \omega$. Utilizando la hipótesis de inducción, como $\exists^{=k} y \neg \varphi(a_1, \dots, a_n, y) \in \mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_r)$, también $\exists^{=k} y \neg \varphi(x_1, \dots, x_r, y) \in \mathrm{tp}_{\mathcal{N}}(f(a_1), \dots, f(a_r))$, por lo que $\mathcal{N} \models \exists^{=k} y \neg \varphi(x_1, \dots, x_r, y)$ y $\neg \varphi(x_1, \dots, x_r, \mathcal{N})$ es finito. Por ser B un conjunto algebraicamente independiente, se cumple $f(a_{r+1}) \notin \mathrm{acl}_{\mathcal{N}}(f(a_1), \dots, f(a_r))$, por lo que se tiene que $\mathcal{N} \not\models \neg \varphi(f(a_1), \dots, f(a_{r+1}))$ y esto implica $\mathcal{N} \models \varphi(f(a_1), \dots, f(a_{r+1}))$. Por tanto, $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_{r+1}) \subseteq \mathrm{tp}_{\mathcal{N}}(f(a_1), \dots, f(a_{r+1}))$. Razonando de la misma manera, podemos llegar a la otra inclusión y, con ella, a la igualdad. □

Con esto, llegamos a la siguiente proposición, que nos habla de la κ-categoricidad de las teorías completas y fuertemente minimales de lenguajes contables.

Proposición 3.30. *Toda teoría completa y fuertemente minimal de un lenguaje L contable es κ-categórica para todo cardinal $\kappa > \omega$.*

Demostración: Sea T una teoría completa y fuertemente minimal de lenguaje L, $\kappa > \omega$ un cardinal y $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ dos modelos de T, ambos de cardinalidad κ. Es decir, tales que $|M| = |N| = \kappa$. Sean A una base de M y B una base de N. Entonces se tiene $|A| = |B| = \kappa$, ya que si $|A| < \kappa$, como L es un lenguaje contable, tiene ω fórmulas, por lo que $L(A)$ tiene $< \omega \cdot \kappa$ fórmulas. Además, cada una de estas fórmulas puede dar un número finito de elementos de $\mathrm{acl}_{\mathcal{M}}(A)$, por lo que $|\mathrm{acl}_{\mathcal{M}}(A)| < \omega \cdot \kappa \cdot \omega = \kappa$, en contradicción con el hecho de que $\mathrm{acl}_{\mathcal{M}}(A) = M$. Claramente, por ser $A \subseteq M$, se tiene $|A| \leq |M|$, por lo que $|A| = |M| = \kappa$. De igual manera se demuestra $|B| = \kappa$. Podemos, por tanto, definir una biyección $f : A \longrightarrow B$. Por el **Lema 3.29**, f es una aplicación elemental parcial. Utilizando ahora el **Lema 3.28**, f se extiende a una aplicación elemental parcial exhaustiva de $\mathrm{acl}_{\mathcal{M}}(A)$ en $\mathrm{acl}_{\mathcal{N}}(B)$. Pero como $\mathrm{acl}_{\mathcal{M}}(A) = M$ y $\mathrm{acl}_{\mathcal{N}}(B) = N$, esta extensión es un isomorfismo, por lo que $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$. Hemos demostrado que T es κ-categórica. Teniendo en cuenta el **Teorema 3.26** ***(de Morley)***, T es λ-categórica para todo cardinal $\lambda > \omega$. □

Corolario 3.31. *Como* $\mathbf{ACF_p}$ *para* p *fijado es una teoría completa y fuertemente minimal de lenguaje* $\mathcal{L}$ *finito, es* κ*-categórica para todo cardinal* $\kappa > \omega$.

Así, para cada cardinal $\kappa > \omega$, existe un modelo de $\mathbf{ACF_p}$. Además, este modelo es único salvo isomorfismo. Visto desde el álgebra, para cada cardinal $\kappa > \omega$, existe un cuerpo algebraicamente cerrado de característica p y, además, este es único salvo isomorfismo. Por ejemplo, el cuerpo habitual $\mathbb{C}$ de los números complejos, es un cuerpo algebraicamente cerrado de característica 0 y cardinalidad $2^\omega \geq \omega_1$ y, por tanto, cualquier otro cuerpo algebraicamente cerrado de característica 0 y cardinalidad 2^ω es isomorfo a él.

Conclusiones

En este trabajo, se ha podido ver que muchos de los conceptos definidos desde el álgebra para los cuerpos, y más espacialmente para los cuerpos algebraicamente cerrados, pueden definirse desde la teoría de modelos de una forma equivalente y que ayuda a obtener ciertos resultados que quizás es más difícil de obtener desde la rama del álgebra.

Por poner un ejemplo, el hecho de que una teoría admita eliminación de cuantificadores ayuda a comprobar su decidibilidad. Recordamos que una teoría T de lenguaje L es decidible si existe un algoritmo tal que, para cada fórmula φ de L, puede decidir si $T \vdash \varphi$ o $T \nvdash \varphi$. Esto sucede ya que los procedimientos automáticos de validación de fórmulas suelen ser más eficientes para fórmulas sin cuantificadores.

Muy relacionado con esta idea está el hecho de que una teoría T^* sea la modelo-compleción de otra teoría T, ambas de un lenguaje L. Quizás T es una teoría difícil de estudiar, pero si conseguimos llegar a su modelo-compleción T^*, podremos transferir muchas de las propiedades de T^* a la teoría T, con la ventaja de que T^* suele ser más fácil de estudiar, entre otras cosas, porque suele tener eliminación de cuantificadores.

La última sección del trabajo, que aporta que fijada una característica p y un cardinal $\kappa > \omega$, hay un único cuerpo algebraicamente cerrado de esa característica, salvo isomorfismo, también nos permite comprobar este resultado sin tener que hablar de grados de trascendencia de extensiones de cuerpos.

Bibliografía

[1] Bruno Poizat: A Course in Model Theory. *Springer - New York*, 2000.

[2] David Marker: Model Theory, An Introduction. *Springer - New York*, 2002.

[3] C. C. Chang: Model Theory. *North-Holland Publishing Company - Amsterdam*, 1990.

[4] David Marker: Model Theory of Fields. Chapter 1, Introduction to the Model Theory of Fields. *Springer - Berlin*, 1996.

[5] Enrique Casanovas: Teoría de Modelos. Curso de Doctorado. Versión de septiembre de 2003, `http://www.ub.edu/modeltheory/documentos/MT.pdf`, 2003.

Índice alfabético