



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

Determinació de corbes planes a partir dels punts discriminants

Autor: Neil Parker Sánchez

Director: Dr. Joan Carles Naranjo Del Val

Realitzat a: Departament de
Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 10 de juny de 2024

Abstract

This project is based on Agostini et al.'s article *Recovery of Plane Curves from Branch Points* [Ago+23]. We examine the projection of a plane curve in $\mathbb{P}^2$ from a point onto $\mathbb{P}^1$, which can be interpreted as a branched cover of the projective line. Given the branch points of this cover, it is possible to determine certain aspects of the original curve. However, the branch points alone do not uniquely determine the curve. Specifically, a non-empty subgroup $\mathcal{G}$ of the projective linear group $\mathrm{PGL}(3)$ preserves the branch points. Moreover, not all curves with a given set of branch points are in the same $\mathcal{G}$ -orbit.

Our goal is to identify one representative curve in each $\mathcal{G}$ -orbit given a set of branch points. To achieve this, we define a normal form for plane curves and show that each $\mathcal{G}$ -orbit contains exactly one curve in this form. While this normalization simplifies the problem, finding explicit solutions remains challenging. Hence, we only do so for conics. For higher-degree curves, we prove that the plane Hurwitz number $\mathfrak{h}_d$, which is the number of $\mathcal{G}$ -orbits, is always less than or equal to the classical Hurwitz number H_d , which corresponds to the number of abstract branched covers. In particular, we show that for curves of degree three, $\mathfrak{h}_3 = H_3 = 40$ and that, for degree four curves, $\mathfrak{h}_4 = 120$, which is significantly less than the classical Hurwitz number $H_4 = 7\,528\,620$.

Resum

Aquest treball es basa en l'article *Recovery of Plane Curves from Branch Points* d'Agostini et al. [Ago+23]. En aquest article, es considera la projecció d'una corba plana projectiva sobre $\mathbb{P}^1$ des d'un punt. Aquesta aplicació es pot veure com un revestiment ramificat de $\mathbb{P}^1$. Es demostra que, si se'n coneixen els punts discriminants, és possible determinar certs aspectes de la corba original. Nogensmenys, els punts discriminants no determinen de manera única la corba original. En particular, hi ha un subgrup $\mathcal{G}$ de $\mathrm{PGL}(3)$ que els deixa invariants. A més, no totes les corbes amb uns punts discriminants fixats pertanyen a la mateixa $\mathcal{G}$ -òrbita.

L'objectiu d'aquest treball és identificar una corba en cada $\mathcal{G}$ -òrbita donat un conjunt de punts discriminants. Per tal de fer-ho, definim una forma normal per a corbes planes projectives i demostrem que cada $\mathcal{G}$ -òrbita conté exactament una corba en aquesta forma. Malgrat que això simplifiqui el problema, segueix sent difícil de resoldre explícitament. Per això, només donem la solució explícita en el cas de còniques. Per a corbes de grau més gran que dos, demostrem que el número de Hurwitz en el pla $\mathfrak{h}_d$, que correspon al nombre de $\mathcal{G}$ -òrbites, és menor o igual que el número de Hurwitz clàssic H_d , que compta el nombre de revestiments ramificats abstractes. En particular, veiem que $\mathfrak{h}_3 = H_3 = 40$ i que $\mathfrak{h}_4 = 120$, que és significativament més petit que $H_4 = 7\,528\,620$.

Agraïments

M'agradaria expressar el meu profund agraïment al tutor del meu treball de fi de grau, en Dr. Joan Carles Naranjo, per haver acceptat supervisar aquest treball, per haver-me proposat el tema en el qual es basa i per la seva generositat amb el temps que m'ha dedicat en les nostres reunions setmanals. En aquestes reunions, ha resolt pacientment tots els meus dubtes i m'ha guiat en el meu procés d'aprenentatge. També estic immensament agraït pel suport dels meus amics i família al llarg dels meus estudis. Un agraïment especial al meu company, en Marc Ballesteró, per haver revisat la introducció del treball i per haver-me donat la seva opinió. Sense el vostre suport aquest treball no hauria estat possible.

Índex

Introducció	1
1 Superfícies de Riemann	2
1.1 Definicions bàsiques	2
1.2 Aplicacions holomorfes i meromorfes	3
1.3 Revestiments	7
1.4 La característica d'Euler d'una superfície compacta.	9
1.5 La fórmula de Hurwitz	9
1.6 Monodromia i teorema d'existència de Riemann	10
1.6.1 Acció del grup fonamental sobre el revestiment universal	10
1.6.2 Monodromia d'un revestiment finit	12
1.6.3 Monodromia d'una aplicació holomorfa	12
1.6.4 Revestiments a partir de la monodromia	14
1.6.5 Aplicacions holomorfes a partir de la monodromia	14
1.6.6 Aplicacions holomorfes a la recta projectiva	15
1.7 Formes diferencials en superfícies de Riemann	16
1.8 Divisors	18
1.8.1 Divisors principals	19
1.8.2 Divisors canònics	19
1.8.3 Equivalència lineal de divisors	20
1.9 Espais de funcions i formes associades a un divisor	21
1.9.1 El Teorema de Riemann-Roch	22
2 Corbes planes	23
2.1 Definicions bàsiques	23
2.2 Les corbes planes són superfícies de Riemann	24
2.2.1 Corbes planes afins	25
2.2.2 Corbes planes projectives	26
2.3 Multiplicitat d'intersecció	27
2.4 La resultant de Sylvester	28
2.5 Nombre de punts en corbes planes	30
2.6 Punts singulars i rectes tangents	31
2.7 Corba polar	33
2.8 Corba dual	34
2.9 Les fórmules de Plücker	36

2.10	Estructura de grup de les cúbiques	37
3	Determinació de corbes planes a partir dels punts discriminants	40
3.1	Descripció del problema	40
3.2	Forma normal	45
3.3	Solució per a les cúbiques	47
3.4	Solució per a les quàrtiques	48
3.5	Combinatòria de Hurwitz	49
A	Programa	53

Introducció

L'objectiu d'aquest treball és exposar de manera clara i detallada les idees de l'article *Recovery of Plane Curves from Branch Points* d'Agostini et al. [Ago+23]. Tanmateix, per poder-ho fer, primer cal introduir alguns conceptes de la teoria de superfícies de Riemann i corbes planes, que és el que s'aborda en els primers dos capítols del treball.

El primer capítol tracta sobre les superfícies de Riemann, que són espais topològics localment homeomorfs al pla complex i amb funcions de transició holomorfes. També es defineixen i es caracteritzen les funcions holomorfes i meromorfes entre superfícies de Riemann i s'introdueixen els revestiments, que són aplicacions que donen homeomorfismes locals entre un espai d'arribada i diferents branques d'un espai de sortida. En particular, es defineixen els revestiments ramificats, que són aplicacions holomorfes entre superfícies de Riemann que, fora d'un conjunt discret i finit de punts, es poden veure com a revestiments. Es pot caracteritzar, mitjançant un morfisme entre el grup fonamental i el grup simètric, el comportament dels revestiments ramificats quan ens movem al voltant dels seus punts de ramificació. Aquest homeomorfisme s'anomena la representació de la monodromia del revestiment ramificat. El Teorema d'Existència de Riemann afirma que, donat un conjunt finit de punts $B = \{b_1, \dots, b_n\} \subset \mathbb{P}^1$, hi ha una correspondència entre els revestiments ramificats de $\mathbb{P}^1$ amb punts discriminants en B i la seva monodromia.

El segon capítol se centra en les corbes planes no singulars com a casos particulars de superfícies de Riemann. S'enuncien i es demostren resultats molt útils per a l'estudi de corbes planes com el Teorema de Bézout, la primera fórmula de Plücker i el Teorema de Riemann-Roch. Per acabar, es defineix la suma de punts en corbes cúbiques, dotant-les d'una estructura de grup. Posteriorment, això permet donar una caracterització molt útil dels revestiments ramificats de $\mathbb{P}^1$ per cúbiques, $C \rightarrow \mathbb{P}^1$.

El tercer i últim capítol del treball, tracta, ara sí, de l'article *Recovery of Plane Curves from Branch Points*. Es considera la projecció d'una corba plana projectiva sobre $\mathbb{P}^1$ des d'un punt general. Aquesta aplicació es pot veure com un revestiment ramificat de $\mathbb{P}^1$. Es demostra que, si es coneixen els seus punts discriminants, és possible determinar certs aspectes de la corba original. Cal destacar que fixar els punts discriminants no determina completament la corba. En particular, hi ha certes projectivitats de $\mathbb{P}^2$ que deixen invariants els punts discriminants. Aquestes projectivitats formen un subgrup $\mathcal{G}$ de $\mathrm{PGL}(3)$. A més, no totes les corbes amb uns punts discriminants fixats pertanyen a la mateixa $\mathcal{G}$ -òrbita.

El nostre objectiu és trobar un representant de cadascuna de les $\mathcal{G}$ -òrbites donat un conjunt de punts discriminants. Per tal de facilitar la resolució del problema, es defineix una forma normal i es demostra que cada $\mathcal{G}$ -òrbita conté una corba en aquesta forma. Malgrat que això simplifiqui considerablement el problema, continua sent molt feixuc de resoldre explícitament, excepte en el cas de còniques. Per tant, per a corbes de grau tres i quatre, ens limitarem a trobar el nombre de solucions, sense fer-les explícites.

Tot i que el problema que es planteja a l'article d'Agostini et. al. és fàcil d'entendre i podria semblar, a priori, senzill, amaga molta complexitat i, per poder-lo resoldre, calen eines matemàtiques força avançades. Les superfícies de Riemann, en les quals es basa aquest treball, són un camp transversal que amalgama conceptes de topologia, geometria, àlgebra i anàlisi complexa. Per això, és una bona síntesi dels coneixements adquirits al llarg del grau de Matemàtiques i un tema ideal en el qual basar un treball de fi de grau.

1 Superfícies de Riemann

En aquest capítol introduïm les superfícies de Riemann com a marc teòric en el qual situar les corbes planes, que introduïrem en el segon capítol. Traslladem conceptes de l'anàlisi complexa a les superfícies de Riemann i enunciem resultats fonamentals com la fórmula de Hurwitz i el Teorema de Riemann-Roch. Aquest capítol està basat sobretot en el llibre *Algebraic curves and Riemann surfaces* [Mir95].

1.1 Definicions bàsiques

Definició 1.1. *Sigui X un espai topològic. Una carta complexa en X és un homeomorfisme $\phi : U \rightarrow V$ on $U \subset X$ i $V \subset \mathbb{C}$ són oberts. Diem que la carta està centrada en $p \in U$ si $\phi(p) = 0$. Si $z = \phi(x)$, diem que z és una coordenada local d' X .*

Definició 1.2. *Siguin $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ i $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ dues cartes complexes en X . Diem que ϕ_1 i ϕ_2 són compatibles si $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ o bé la funció de transició*

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \phi_2(U_1 \cap U_2) \quad (1.1)$$

és holomorfa.

Definició 1.3. *Un atlas $\mathcal{A}$ en X és una col·lecció $\mathcal{A} = \{\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha\}$ de cartes compatibles dues a dues tals que $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$.*

Definició 1.4. *Dos atlas $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ són compatibles si totes les cartes de l'atlas $\mathcal{A}$ són compatibles amb totes les cartes de l'atlas $\mathcal{B}$.*

Pel lema de Zorn, per a cada atlas existeix un únic atlas maximal que el conté. A més, dos atlas són equivalents si, i només si, estan continguts en el mateix atlas maximal

Definició 1.5. *Una estructura complexa en X és una classe d'equivalència d'atles en X o, equivalentment, un atlas maximal en X .*

Definició 1.6. *Una superfície de Riemann és un espai de Hausdorff connex X que verifica el segon axioma de numerabilitat, juntament amb una estructura complexa en X .*

Exemple 1.7. L'extensió dels nombres complexos $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ es pot identificar amb l'esfera unitat a través de la projecció estereogràfica. Aquesta esfera és compacta, connexa i Hausdorff. Prenent l'atles format per les projeccions estereogràfiques des del pol nord i des del pol sud obtenim una estructura complexa en $\mathbb{C}_\infty$ i per tant obtenim una superfície de Riemann que s'anomena l'*esfera de Riemann*.

En general, si a una superfície de Riemann li traiem un nombre finit de punts, continuem tenint una superfície de Riemann. D'altra banda, si tenim una superfície de Riemann que té un forat, també és possible tapar-lo per obtenir una nova superfície de Riemann.

Definició 1.8. *Sigui X una superfície de Riemann. Una carta foradada en X és una carta complexa $\phi : U \rightarrow V$ en X tal que V conté un disc obert foradat $D_0 = \{z \mid 0 < \|z - z_0\| < \epsilon\}$ i tal que la clausura en X de $\phi^{-1}(D_0)$ està continguda en U i $\phi(\overline{\phi^{-1}(D_0)}) = D_1 = \{z \mid 0 < \|z - z_0\| \leq \epsilon\}$.*

En altres paraules, la clausura de D_0 en $\mathbb{C}$ conté un punt z_0 tal que la corresponent clausura de $\phi^{-1}(D_0)$ en X no conté cap punt corresponent a z_0 .

Sigui X una superfície de Riemann amb una carta foradada $\phi : U \rightarrow V$. Sigui D_0 el disc foradat de la definició anterior i sigui $D = \{z \mid \|z - z_0\| < \epsilon\}$. Observem que D és en si mateix una superfície de Riemann i que D_0 és un obert de D isomorf a l'obert $\phi^{-1}(D_0) \subset X$. Definim $Z = X \sqcup D/\phi$, on $\sqcup$ denota la unió disjunta i el quocient denota la identificació dels punts d' X i de D mitjançant ϕ . Es pot veure que Z és una superfície de Riemann. A aquest procés se l'anomena *tapar el forat de la carta foradada* ϕ .

1.2 Aplicacions holomorfes i meromorfes

Ara que hem definit què és una superfície de Riemann, cal considerar com són les aplicacions entre elles. En l'anàlisi complexa, tenim funcions holomorfes (diferenciables en el sentit complex) i meromorfes (holomorfes excepte en un conjunt discret de punts on tenim pols). Aquestes idees de l'anàlisi complexa es poden traslladar de manera natural a les superfícies de Riemann mitjançant l'estructura complexa de la qual estan dotades, com veurem a continuació.

Definició 1.9. Una aplicació $F : X \rightarrow Y$ entre superfícies de Riemann és holomorfa en un punt $p \in X$ si, i només si, existeixen cartes $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ en X amb $p \in U_1$ i $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ a Y amb $F(p) \in U_2$ tals que $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}$ és holomorfa en $\phi_1(p)$. Si F està definida en un obert W d' X , llavors diem que F és holomorfa si ho és en tots els punts de W .

Definició 1.10. Sigui X una superfície de Riemann. Considerem una funció holomorfa $f : U \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{C}$, on U és un entorn del punt $p \in X$. Aleshores:

- Si existeix una carta $\phi : U \rightarrow V$ amb $p \in U$ tal que la composició $f \circ \phi^{-1}$ té una singularitat evitable en $\phi(p)$, llavors diem que f té una singularitat evitable en p .
- Si existeix una carta $\phi : U \rightarrow V$ amb $p \in U$ tal que la composició $f \circ \phi^{-1}$ té un pol en $\phi(p)$, llavors diem que f té un pol en p .
- Si existeix una carta $\phi : U \rightarrow V$ amb $p \in U$ tal que la composició $f \circ \phi^{-1}$ té una singularitat essencial en $\phi(p)$, llavors diem que f té una singularitat essencial en p .

Teorema 1.11 (de Liouville). Sigui X una superfície de Riemann compacta. Sigui $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ una funció holomorfa. Aleshores f és constant.

Demostració. Com que f és holomorfa, $|f|$ és una funció contínua. Per tant, com que X és compacta, $|f|$ assoleix el seu valor màxim en algun punt de X . Aleshores, pel Principi del mòdul màxim f és constant, ja que X és connex. $\square$

Definició 1.12. Una funció $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ és meromorfa a $p \in X$ si és holomorfa en p o bé té una singularitat evitable o un pol en p . Si W és un obert d' X , diem que f és meromorfa a W si ho és en tots els punts de W .

Definició 1.13. Sigui $W \subset X$ un obert d'una superfície de Riemann X . Denotem

$$\mathcal{M}_X(W) = \mathcal{M}(W) = \{f : W \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ és meromorfa}\}.$$

Sigui $f : U \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{C}$ una funció holomorfa, on U és un entorn de p . Sigui $\phi : U \rightarrow V$ una carta en X amb $p \in U$. Si z és una coordenada local en X a prop de p , tenim que $f \circ \phi^{-1}$ és holomorfa en un entorn de $z_0 = \phi(p)$. Per tant, podem desenvolupar $f \circ \phi^{-1}$ en sèrie de Laurent en z_0 :

$$f(\phi^{-1}(z)) = \sum_n c_n (z - z_0)^n.$$

Ens hi referirem com la *sèrie de Laurent d' f en p respecte a ϕ* (o bé *sèrie de Laurent d' f en p en la coordenada local z*).

Lema 1.14. *Amb la notació anterior, f té una singularitat evitable en p si, i només si, qualsevol de les seves sèries de Laurent en p té tots els coeficients c_n amb $n < 0$ nuls. Anàlogament, si qualsevol de les seves sèries de Laurent en p té un nombre finit de coeficients c_n amb $n < 0$ no nuls, llavors f té un pol en p . Finalment, si qualsevol de les seves sèries de Laurent en p té infinits coeficients c_n amb $n < 0$ no nuls, llavors f té una singularitat essencial en p .*

Definició 1.15. *Sigui f una funció meromorfa en p , amb sèrie de Laurent en p en la coordenada local z igual a $\sum_n c_n (z - z_0)^n$. L'ordre d' f en p , que denotem amb $\text{ord}_p(f)$, és*

$$\text{ord}_p(f) = \min\{n \mid c_n \neq 0\}.$$

Es pot comprovar que aquest valor està ben definit i és independent de la coordenada local que s'esculli a l'hora de definir la sèrie de Laurent.

Les seves propietats són gairebé immediates a partir de la definició.

Lema 1.16. *Sigui f una funció meromorfa en p . Llavors:*

- *f és holomorfa en p si, i només si, $\text{ord}_p(f) \geq 0$. En aquest cas, $f(p) = 0$ si, i només si, $\text{ord}_p(f) > 0$.*
- *f té un pol en p si, i només si, $\text{ord}_p(f) < 0$.*
- *f no té ni un pol ni un zero en p si, i només si, $\text{ord}_p(f) = 0$.*

Definició 1.17. *Diem que f té un zero d'ordre n en p si $\text{ord}_p(f) = n > 0$. Diem que f té un pol d'ordre n en p si $\text{ord}_p(f) = -n < 0$.*

Lema 1.18. *Siguin f i g funcions no nul·les meromorfes en $p \in X$. Llavors es compleix:*

- $\text{ord}_p(fg) = \text{ord}_p(f) + \text{ord}_p(g)$
- $\text{ord}_p(f/g) = \text{ord}_p(f) - \text{ord}_p(g)$
- $\text{ord}_p(1/f) = -\text{ord}_p(f)$
- $\text{ord}_p(f \pm g) \geq \min\{\text{ord}_p(f), \text{ord}_p(g)\}$

Proposició 1.19 (Forma local normal). *Sigui $F : X \rightarrow Y$ una aplicació holomorfa no constant definida a $p \in X$. Llavors existeix un únic enter $m \geq 1$ tal que per a qualsevol carta $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ a Y centrada en $F(p)$ existeix una carta $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ en X centrada en p tal que $\phi_2(F(\phi_1^{-1}(z))) = z^m$.*

Demostració. Fixem una carta ϕ_2 centrada en $F(p)$ i triem qualsevol carta $\psi : U \rightarrow V$ en X centrada en p . Aleshores, la sèrie de Taylor de la funció $T(w) = \phi_2(F(\psi^{-1}(w)))$ és de la forma

$$T(w) = \sum_{i=m}^{\infty} c_i w^i$$

amb $c_m \neq 0$ i $m \geq 0$, ja que $T(0) = 0$. Per tant, $T(w) = w^m S(w)$ on $S(w)$ és una funció holomorfa en $w = 0$ i $S(0) \neq 0$. En aquest cas, existeix una funció $R(w)$ holomorfa prop de $w = 0$ tal que $(R(w))^m = S(w)$, de manera que $T(w) = (wR(w))^m$. Posem $\eta(w) = wR(w)$. Com que $\eta'(0) \neq 0$, pel Teorema de la Funció Implícita veiem que η és invertible i també holomorfa. Per tant, $\phi_1 = \eta \circ \psi$ també és una carta en X definida en un entorn de p . Si considerem la nova coordenada local $z = \eta(w)$, veiem que $z = wR(w)$. Per tant,

$$\begin{aligned} \psi_2(F(\psi_1^{-1}(z))) &= \psi_2(F(\psi^{-1}(\eta^{-1}(z)))) \\ &= T(\eta^{-1}(z)) \\ &= T(w) \\ &= (wR(w))^m \\ &= z^m. \end{aligned}$$

La unicitat d' m es deu al fet que, si existeixen coordenades locals en p i $F(p)$ tals que $F(z) = z^m$ llavors els punts propers a $F(p)$ tenen exactament m antiimatges properes a p . És a dir, l'exponent m es pot trobar a partir de les propietats topològiques de l'aplicació F , independentment de la tria de coordenades locals. $\square$

Definició 1.20. La multiplicitat d' F en p , que denotem per $\text{mult}_p(F)$, és l'enter m de la proposició anterior.

Es pot calcular la multiplicitat d'una aplicació holomorfa $F : X \rightarrow Y$ en un punt $p \in X$ sense haver de trobar la forma local normal. Per fer-ho, considerem unes coordenades locals qualssevol z en X prop de p i unes altres coordenades locals w en Y prop de $F(p)$. Suposem que p correspon a z_0 i $F(p)$ correspon a w_0 . En aquestes coordenades, l'aplicació F es pot expressar com $w = h(z)$, on h és una funció holomorfa. Clarament $w_0 = h(z_0)$. Aleshores, tenim el següent resultat:

Lema 1.21. La multiplicitat $\text{mult}_p(F)$ d' F en p és

$$\text{mult}_p(F) = 1 + \text{ord}_{z_0} \left(\frac{dh}{dz} \right).$$

En particular, la multiplicitat és el menor exponent amb coeficient no nul en la sèrie de potències d' h : si $h(z) = h(z_0) + \sum_{i=m}^{\infty} c_i (z - z_0)^i$ amb $m \geq 1$ i $c_m \neq 0$, llavors $\text{mult}_p(F) = m$.

Demostració. Hem vist en la demostració de la Proposició 1.19 que la multiplicitat era l'exponent més baix en el desenvolupament en sèrie de Taylor T d' F quan es fan servir coordenades locals centrades en p i en $F(p)$. Amb la notació anterior, $z - z_0$ i $w - w_0$ són coordenades locals centrades en p i en $F(p)$. Per tant, com que $w - w_0 = h(z) - h(z_0)$ veiem que la multiplicitat és l'exponent més baix en l'expansió en sèrie de Taylor de $h(z) - h(z_0)$ en $z = z_0$. Pel Teorema de Taylor, aquest exponent és l'ordre de la derivada d' h en z_0 més 1. $\square$

Corol·lari 1.22. *El conjunt de punts en el domini d' F que tenen multiplicitat ≥ 2 és discret.*

Demostració. En els punts de multiplicitat ≥ 2 , la derivada de l'expressió h d' F en coordenades locals s'anul·la. Com que h és holomorfa, els seus zeros formen un conjunt discret. $\square$

Definició 1.23. *Sigui $F : X \rightarrow Y$ una aplicació holomorfa no constant. Un punt $p \in X$ és un punt de ramificació d' F si $\text{mult}_p(F) \geq 2$. Un punt $y \in Y$ és un punt discriminant si és la imatge per F d'un punt de ramificació.*

Lema 1.24. *Sigui f una funció meromorfa sobre una superfície de Riemann X , amb aplicació holomorfa associada $F : X \rightarrow C_\infty$. Llavors*

1. *Si $p \in X$ és un zero d' f , llavors $\text{mult}_p(F) = \text{ord}_p(f)$.*
2. *Si $p \in X$ és un pol d' f , llavors $\text{mult}_p(F) = -\text{ord}_p(f)$.*
3. *Si $p \in X$ no és ni un zero ni un pol d' f , llavors $\text{mult}_p(F) = -\text{ord}_p(f - f(p))$*

Proposició 1.25. *Sigui $F : X \rightarrow Y$ una aplicació holomorfa no constant entre superfícies de Riemann compactes. Per a cada $y \in Y$, definim $d_y(F)$ com la suma de les multiplicitats d' F en les antiimatges de y :*

$$d_y(F) = \sum_{p \in F^{-1}(y)} \text{mult}_p(F).$$

Llavors $d_y(F)$ és constant i independent de y .

Demostració. Considerem primer de tot el disc $D = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| < 1\}$ i l'aplicació $f : D \rightarrow D$, $f(z) = z^m$, on $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 1$. Aquesta aplicació és holomorfa i exhaustiva. A més, l'únic punt de ramificació d' f és $z = 0$, on la multiplicitat és m . La resta de punts tenen tots multiplicitat 1. Per a qualsevol $w \in D$, si $w \neq 0$, hi ha m antiimatges de w , cadascuna de multiplicitat 1. Si $w = 0$, l'única antiimatge és $z = 0$, que té multiplicitat m . Per tant, aquesta aplicació satisfà la condició de l'enunciat.

Si tenim una aplicació entre la unió disjunta de discs i D (cadascun dels quals pot tenir un valor diferent d' m) la condició continua complint-se. A continuació, mostrem que qualsevol aplicació holomorfa F és localment com l'anterior.

Fixem un punt $y \in Y$. Siguin $\{x_1, \dots, x_n\}$ les antiimatges de y per F . Triem una coordenada local w en Y centrada en y . Per la Proposició 1.19, podem triar coordenades $\{z_i\}$ en X tals que cada z_i està centrada en x_i i en un entorn d' x_i l'aplicació F correspon a assignar $w \mapsto z_i^{m_i}$. Si ens fixem ens aquests entorns dels x_i , tenim que F és exactament de la forma que volíem.

Només falta demostrar que, prop de y , no hi ha punts amb antiimatges fora dels entorns dels punts x_i . Suposem que hi ha punts arbitràriament propers y tals que alguna de les seves antiimatges queda fora dels entorns dels x_i . En aquest cas, podem construir una seqüència de punts d' X cap dels quals es troba en els entorns dels x_i , tals que les seves imatges convergeixen a y . Com que X és compacte, podem trobar una parcial $\{p_n\}$ convergent a un punt $x \in X$. Com que F és contínua, $F(x) = y$, però això ens porta a una contradicció, ja que cap dels p_n es troba en els entorns dels x_i . $\square$

Observació 1.26. Hem fet servir el fet que qualsevol aplicació holomorfa no constant entre superfícies de Riemann compactes és exhaustiva. Això és degut a que la imatge de l'aplicació és oberta i tancada. Per tant, com que les superfícies de Riemann són connexes, ha de ser el total.

Definició 1.27. Sigui $F : X \rightarrow Y$ una aplicació holomorfa no constant entre superfícies de Riemann compactes. El grau d' F , que es denota $\deg(F)$, és l'enter $d_y(F)$ de la proposició anterior per a qualsevol $y \in Y$. Evidentment, el valor de $\deg(F)$ no depèn de la tria de y .

Proposició 1.28. Sigui f una funció meromorfa no constant sobre una superfície de Riemann compacta X . Llavors

$$\sum_p \text{ord}_p(f) = 0.$$

Demostració. Sigui $F : X \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ l'aplicació a l'esfera de Riemann associada a f . Siguin $\{x_i\}$ els punts d' X tals que $F(x_i) = 0$. i siguin $\{y_j\}$ els punts d' X tals que $F(y_j) = \infty$. En altres paraules, x_i són els zeros d' f i y_j els pols. Sigui d el grau d' F .

Per la definició del grau, tenim

$$d = \sum_i \text{mult}_{x_i}(F) \quad \text{i} \quad d = \sum_j \text{mult}_{y_j}(F).$$

Pel lema 1.24 tenim $\text{mult}_{x_i}(F) = \text{ord}_{x_i}(f)$ i $\text{mult}_{y_j}(F) = -\text{ord}_{y_j}(f)$. Per tant, com que els únics punts on l'ordre d' F és diferent de zero són els $\{x_i\}$ i els $\{y_j\}$,

$$\begin{aligned} \sum_p \text{ord}_p(f) &= \sum_i \text{ord}_{x_i}(f) + \sum_j \text{ord}_{y_j}(f) \\ &= \sum_i \text{mult}_{x_i}(F) + \sum_j \text{mult}_{y_j}(F) = 0. \end{aligned}$$

□

Observació 1.29. Alguns dels resultats anteriors fan servir implícitament l'existència de funcions meromorfs no constants sobre superfícies de Riemann. És un fet altament no trivial que queda fora de l'abast d'aquesta memòria. Es pot trobar una demostració al llibre *Riemann Surfaces* de Farkas i Kra [FK12].

1.3 Revestiments

Definició 1.30. Sigui V un espai topològic arc-connex. Un revestiment de V és un parell (U, F) , on U és un espai topològic i $F : U \rightarrow V$ és una aplicació contínua i exhaustiva tal que $\forall v \in V$ existeix un entorn $W \subset V$ de v tal que $F^{-1}(W)$ és una unió disjunta d'oberts U_α tals que les restriccions $F|_{U_\alpha} : U_\alpha \rightarrow W$ són homeomorfismes. D'ara endavant, direm que F és un revestiment de V sense fer referència explícita a U , excepte en la definició d' F .

Exemple 1.31. Considerem l'aplicació $F : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ definida per $F(t) = e^{2\pi it}$, on S^1 denota la circumferència unitat. Aquesta aplicació li associa a cada nombre real t el punt de la circumferència unitat que correspon a donar t voltes al voltant de la circumferència. És fàcil comprovar que és una aplicació és un revestiment.

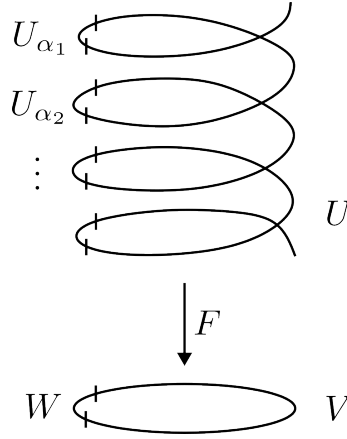


Figura 1: Revestiment d'un espai topològic arc-connex.

Lema 1.32 (Elevació de camins). *Un revestiment $F : U \rightarrow V$ té la propietat d'elevació de camins. És a dir, per a qualsevol camí $\gamma : [0, 1] \rightarrow V$ i per a qualsevol antiimatge p de $\gamma(0)$, existeix un camí $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow U$ tal que $\tilde{\gamma}(0) = p$ i $F \circ \tilde{\gamma} = \gamma$.*

Demostració. Recobrim l'interval $[0, 1]$ amb un nombre finit d'interval $[t_i, t_{i+1}]$, cadascun d'ells contingut en un obert $W_i \subset X$ tal que $F^{-1}(W_i)$ és unió disjunta d'oberts U_{ij} homeomorfs a W_i mitjançant l'homeomorfisme $f_{ij} = F|_{U_{ij}}$. Primer de tot, existeix un únic j_0 tal que $p \in U_{0j_0}$. Per tant, definim $\tilde{\gamma}|_{[0, t_1]} = f_{0j_0}^{-1} \circ \gamma$. Llavors, existeix un únic j_1 tal que $\tilde{\gamma}(t_1) \in U_{1j_1}$. Definim $\tilde{\gamma}|_{[t_1, t_2]} = f_{1j_1}^{-1} \circ \gamma$ i així successivament. Per definició $F \circ \tilde{\gamma} = \gamma$.

Per veure la unicitat, considerem dues elevacions $\tilde{\gamma}_1$ i $\tilde{\gamma}_2$ tals que $\tilde{\gamma}_1(0) = \tilde{\gamma}_2(0) = p$. El conjunt $A = \{t \in [0, 1] \mid \tilde{\gamma}_1(t) = \tilde{\gamma}_2(t)\}$ és tancat, ja que $\tilde{\gamma}_1$ i $\tilde{\gamma}_2$ són contínues i és no buit ja que $0 \in A$. A més, si $t_0 \in A$, existeix un interval obert I al voltant de t_0 tal que $\tilde{\gamma}_1(t) = \tilde{\gamma}_2(t)$ per a tot $t \in I$, ja que les seves imatges coincideixen. Aleshores, A és obert i per tant és tot l'interval $[0, 1]$. Això demostra que $\tilde{\gamma}_1 = \tilde{\gamma}_2$. $\square$

Definició 1.33. *Dos revestiments $F_1 : U_1 \rightarrow V$, $F_2 : U_2 \rightarrow V$ són isomorfs si existeix un homeomorfisme $G : U_1 \rightarrow U_2$ tal que $F_1 \circ G = F_2$. La relació d'isomorfisme entre revestiments és una relació d'equivalència.*

Es pot demostrar que existeix un *revestiment universal* $F_0 : U_0 \rightarrow V$ tal que U_0 és simplement connex. A més, aquest revestiment és únic llevat d'isomorfisme. El revestiment universal té la propietat que si $F : U \rightarrow V$ és un revestiment qualsevol, aleshores F_0 factoritza de manera única com $F_0 = F \circ G$, on $G : U_0 \rightarrow U$ és un revestiment d' U . Per a més detalls, es pot consultar el llibre *A Basic Course in Algebraic Topology* [Mas91].

Suposem que $F : X \rightarrow Y$ és una aplicació holomorfa no constant entre superfícies de Riemann compactes. Si eliminem els punts discriminants d' F en Y i eliminem els punts de ramificació d' F en X , obtenim una aplicació $F : U \rightarrow V$. Aquesta aplicació és un revestiment. Per aquest motiu, a les aplicacions holomorfes entre superfícies de Riemann a vegades s'anomenen *revestiments ramificats*, ja que són revestiments fora d'un conjunt finit de punts.

1.4 La característica d'Euler d'una superfície compacta.

Definició 1.34. *Sigui S una superfície compacta (possiblement amb vora). Una triangulació d' S és una descomposició d' S en subconjunts tancats, cadascun d'ells homeomorfa a un triangle, tals que cada parella de triangles són disjunts, es tallen en un vèrtex o bé es tallen en un únic costat.*

Definició 1.35. *Sigui S una superfície compacta, possiblement amb vora. Donada una triangulació d' S amb v vèrtexs, c costats i t triangles, la característica d'Euler d' S respecte a aquesta triangulació és l'enter $\chi(S) = v - c + t$.*

Proposició 1.36. *La característica d'Euler és independent de la triangulació triada. Per a una superfície compacta orientable sense vora de gènere g , la característica d'Euler és $2 - 2g$.*

La demostració es fa a l'assignatura *Topologia i geometria global de superfícies* i es pot trobar una demostració de la Proposició anterior al llibre *Algebraic Curves and Riemann Surfaces* [Mir95].

Proposició 1.37. *Tota superfície de Riemann és orientable.*

Demostració. Tota punt d'una superfície de Riemann té un entorn homeomorfa a un obert de $\mathbb{C}$. Podem pensar en $\mathbb{C}$ com si fos $\mathbb{R}^2$. En $\mathbb{R}^2$ tenim una base orientada donada pels vectors de la base canònica. Un criteri per veure que una superfície diferenciable és orientable és comprovar que el determinant de la matriu Jacobiana no canvia de signe. Ara bé, com que les funcions de transició en una superfície de Riemann són holomorfes, les equacions de Cauchy-Riemann ens diuen precisament que aquest determinant és sempre positiu i, per tant, que tota superfície de Riemann és orientable. $\square$

1.5 La fórmula de Hurwitz

A continuació, presentem la Fórmula de Hurwitz. Donada una aplicació entre superfícies de Riemann compactes, aquesta fórmula relaciona els gèneres topològics d'aquestes superfícies amb el grau de l'aplicació i la seva multiplicitat.

Teorema 1.38 (Fórmula de Hurwitz). *Sigui $F : X \rightarrow Y$ una aplicació holomorfa no-constant entre superfícies de Riemann compactes. Llavors:*

$$2g(X) - 2 = \deg(F)(2g(Y) - 2) + \sum_{p \in X} [\text{mult}_p(F) - 1] \quad (1.2)$$

Demostració. Pel Corol·lari 1.22, els punts de ramificació d' F formen un conjunt discret i, com que X és compacta, aquest conjunt és finit. Per tant, la suma (que es pot restringir als punts de ramificació) és finita.

Considerem una triangulació de Y tal que cada punt discriminant és un vèrtex. Suposem que hi ha v vèrtexs, c costats i t triangles. Podem elevar aquesta triangulació a X mitjançant l'aplicació F . Observem que cada punt de ramificació d' F serà en un vèrtex d'aquesta triangulació.

Com que no hi ha punts discriminants fora dels vèrtexs, cada triangle de Y s'eleva a $\deg(F)$ triangles en X . Per tant, $t' = \deg(F)t$. Pel mateix argument $c' = \deg(F)c$. Ara

fixem un vèrtex $q \in Y$. El nombre de antiimatges de q en X és $|F^{-1}(q)|$. Ho podem reescriure com

$$\begin{aligned} |F^{-1}(q)| &= \sum_{p \in F^{-1}(q)} 1 \\ &= \deg(F) + \sum_{p \in F^{-1}(q)} [1 - \text{mult}_p(F)]. \end{aligned}$$

Per tant, el nombre total de antiimatges dels vèrtexs de Y , que correspon al nombre de vèrtexs v' d' X , és

$$\begin{aligned} v' &= \sum_{\text{vèrtex } q \text{ de } Y} (\deg(F) + \sum_{p \in F^{-1}(q)} [1 - \text{mult}_p(F)]) \\ &= \deg(F)v - \sum_{\text{vèrtex } q \text{ de } Y} \sum_{p \in F^{-1}(q)} [\text{mult}_p(F) - 1] \\ &= \deg(F)v - \sum_{\text{vèrtex } p \text{ de } X} [\text{mult}_p(F) - 1]. \end{aligned}$$

Per tant,

$$\begin{aligned} 2g(X) - 2 &= -\chi(X) \\ &= -v' + c' - t' \\ &= -\deg(F)v + \sum_{\text{vèrtex } p \text{ de } X} [\text{mult}_p(F) - 1] + \deg(F)c - \deg(F)t \\ &= -\deg(F)\chi(Y) + \sum_{\text{vèrtex } p \text{ de } X} [\text{mult}_p(F) - 1] \\ &= -\deg(F)(2g(Y) - 2) + \sum_{p \in X} [\text{mult}_p(F) - 1]. \end{aligned}$$

□

1.6 Monodromia i teorema d'existència de Riemann

La monodromia caracteritza el comportament dels revestiments ramificats quan ens movem al voltant dels seus punts de ramificació. En aquesta secció introduïm aquesta eina i el Teorema d'Existència de Riemann, que ens diu que donat un conjunt finit de punts $B = \{b_1, \dots, b_n\} \subset \mathbb{P}^1$, hi ha una correspondència entre els revestiments ramificats de $\mathbb{P}^1$ amb punts discriminants en B i la seva monodromia.

1.6.1 Acció del grup fonamental sobre el revestiment universal

Sigui V una superfície de Riemann i sigui $F_0 : U_0 \rightarrow V$ el revestiment universal (únic llevat d'isomorfisme). Donat $q \in V$, el grup fonamental $\pi(V, q)$ actua sobre U_0 de la següent manera: fixat un punt $p \in U_0$ tal que $F_0(p) = q$, si triem un llaç γ en q i un punt $u \in U_0$, podem escollir un camí α d' U_0 des d' u fins a p . Aleshores, $F_0 \circ \alpha$ és un camí de V de q a $F_0(u)$. Considerem l'elevació $\tilde{\gamma}$ del llaç γ que compleix $\tilde{\gamma}(0) = p$ i l'elevació β del camí invers $-F_0 \circ \alpha$ que comença en el punt $\tilde{\gamma}(1)$. Es compleix que $F_0(\beta(1)) = F_0(u)$. El punt $\beta(1)$ depèn exclusivament del punt u i de la classe d'homotopia $[\gamma]$ de γ . Per tant,

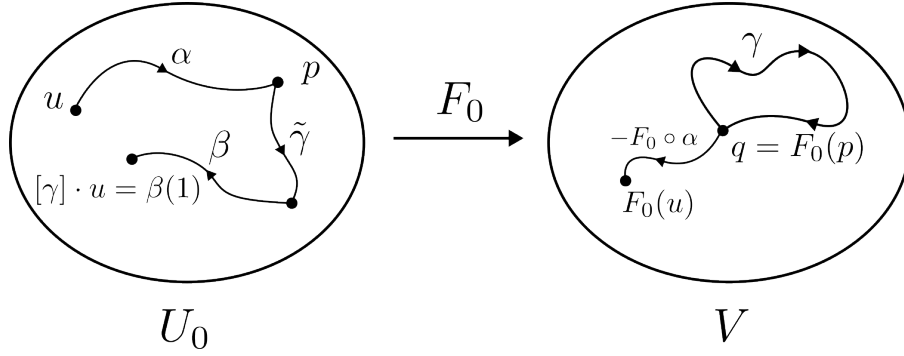


Figura 2: Acció del grup fonamental sobre el revestiment universal.

podem denotar-lo amb $[\gamma] \cdot u$. Això ens dona una acció de $\pi(V, q)$ sobre U_0 que preserva les fibres de l'aplicació F_0 . A més, l'espai de les òrbites $U_0/\pi(V, q)$ és homeomorf a V .

Les tres proposicions següents són resultats estàndard de teoria de revestiments. No les demostrarem, ja que no és el tema central d'aquest treball.

Proposició 1.39. *Donat un subgrup H de $\pi(V, q)$, l'acció definida anteriorment es pot restringir a una acció d' H sobre U_0 . L'aplicació $F_H : U_0/H \rightarrow V$ definida com $F_H(H \cdot p) = H \cdot F_0(p)$ està ben definida i és un revestiment de V . A més, tot revestiment connex de V és d'aquesta forma, llevat d'isomorfisme.*

Proposició 1.40. *Dos espais U_0/H_1 i U_0/H_2 són isomorfs (com a revestiments de V) si, i només si, els subgrups H_1 i H_2 de $\pi(V, q)$ són conjugats. Per tant, hi ha una correspondència bijectiva entre les classes d'isomorfisme de revestiments connextos $F : U \rightarrow V$ i les classes de conjugació dels subgrups H de $\pi(V, q)$.*

Proposició 1.41. *Sigui $F : U \rightarrow V$ un revestiment de V amb U connex i sigui $p \in U$ un punt tal que $F(p) = q$. Definim $H = \{[\gamma] \in \pi(V, q) \mid [\gamma] \cdot p = p\}$. Aleshores H és un subgrup de $\pi(V, q)$. Aquest subgrup depèn del punt p , però la seva classe de conjugació no. El grau del revestiment és exactament l'índex del subgrup H en el grup fonamental.*

Observació 1.42. Observem que hi ha un paral·lelisme entre aquests resultats i els que s'obtenen en la teoria de Galois.

Exemple 1.43. Sigui $V = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$ un disc foradat i sigui $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$. L'aplicació $F : \mathbb{H} \rightarrow V$ definida per $F(z) = \exp(2\pi iz)$ és el revestiment universal de V . El grup fonamental de V és un grup cíclic infinit generat per qualsevol llaç de V d'índex 1 respecte l'origen. L'acció del grup fonamental sobre $\mathbb{H}$ correspon a fer una translació per un nombre enter. Si γ és un llaç d'índex n , llavors $[\gamma] \cdot z = z + n$.

Identificant el grup fonamental $\pi(V, q)$ amb $\mathbb{Z}$, veiem que els únics subgrups són aquells que estan generats per un enter no negatiu, és a dir, $N\mathbb{Z}$ amb $N \geq 0$. En particular, si $N = 0$, tenim el subgrup trivial, que correspon al revestiment universal. Si $N = 1$, tenim el grup fonamental sencer, de manera que obtenim el revestiment trivial $id : V \rightarrow V$. Si $N \geq 2$, el revestiment corresponent s'obté fent el quocient de $\mathbb{H}$ per la translació $z \mapsto z + N$. Aquest quocient també és un disc foradat D_N i l'aplicació quocient $\pi_N : \mathbb{H} \rightarrow D_N$ es defineix com $\pi_N(z) = \exp(2\pi iz/N)$. Si denotem la coordenada en el disc D_N amb w_N , el revestiment $D_N \rightarrow V$ consisteix a assignar $w_N = \exp(2\pi iz/N)$, on z és la coordenada en $\mathbb{H}$. En particular, la coordenada original en l'espai V és w_1 i el revestiment $F_N : D_N \rightarrow V$ assigna $w_1 = w_N^N$.

1.6.2 Monodromia d'un revestiment finit

Sigui $F : U \rightarrow V$ un revestiment de grau finit d amb U connex.

Proposició 1.44. *Si F correspon al subgrup H de $\pi(V, q)$, llavors d és l'índex del subgrup H .*

Demostració. Estem dient que F és igual a $F_H : U_0/H \rightarrow V$, llevat d'isomorfisme, on $F_H(\bar{p}) = F(p)$ per a tot $p \in U_0$ i $\bar{p}$ denota la classe de p en U_0/H . Per tant, el nombre d'antiimatges d'un punt $q \in V$ correspon al nombre d'òrbites, que és l'índex. $\square$

Considerem la fibra $F^{-1}(q)$ sobre q i denotem per $\{x_1, \dots, x_d\}$ els seus punts. Tot llaç γ en q es pot elevar a d camins $\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_d$, on cada $\tilde{\gamma}_i$ comença en x_i . El conjunt dels punts $\tilde{\gamma}_i(1)$ correspon exactament al conjunt de les antiimatges $F^{-1}(q)$. Per tant $\tilde{\gamma}_i(1) = x_{\sigma(i)}$, on σ és una permutació dels índexs que només depèn de la classe d'homotopia de γ . Per tant, hi ha un homeomorfisme de grups $\rho : \pi(V, q) \rightarrow S_d$. Aquest homeomorfisme s'anomena la *representació de la monodromia* del revestiment $F : U \rightarrow V$.

Definició 1.45. *Diem que un subgrup $H \subseteq S_d$ és transitiu si $\forall i, j$ existeix alguna permutació $\sigma \in H$ tal que $\sigma(i) = j$.*

Lema 1.46. *Sigui $\rho : \pi(V, q) \rightarrow S_d$ la representació de monodromia d'un revestiment $F : U \rightarrow V$ de grau finit, amb U connex. Aleshores, la imatge de ρ és un subgrup transitiu d' S_d .*

Demostració. Fixem dos índexs i i j , i considerem els dos punts x_i i x_j d' $F^{-1}(q)$. Com que U és connex, existeix un camí $\tilde{\gamma}$ a U d' x_i a x_j . Sigui $\gamma = F \circ \tilde{\gamma}$, que és un llaç en q . Llavors per construcció $\rho([\gamma])$ és una permutació que envia i a j . $\square$

Exemple 1.47. Sigui $F_N : D_N \mapsto V = D_1$ el revestiment del disc foradat D_1 donat per $w_1 = w_N^N$. Prenem $q = 1/2^N$ com a punt base en D_1 . Sigui $\zeta = \exp(2\pi i/N)$ una arrel primitiva N -èssima de la unitat. Aleshores les antiimatges de q són els punts $x_i = \zeta^i/2$ per a $i = 1, \dots, N$. Un generador γ del grup fonamental $\pi(V, q)$ ve donat pel llaç $w_1(t) = \exp(2\pi it)/2^N$, $t \in [0, 1]$. Aquest llaç s'eleva als llaços $\tilde{\gamma}_i$ donats per $w_N(t) = \zeta^i \exp(2\pi it/N)/2$, $t \in [0, 1]$. Aquests llaços surten de $\zeta^i/2$ i acaben en $\zeta^{i+1}/2$. Per tant, la representació de la monodromia del revestiment F_N assigna el generador $[\gamma]$ del grup fonamental $\pi(V, q)$ a la permutació cíclica que envia i a $i + 1$ (mòdul N).

1.6.3 Monodromia d'una aplicació holomorfa

Sigui $F : X \rightarrow Y$ una aplicació holomorfa no constant entre superfícies de Riemann compactes. Com que hi pot haver punts de ramificació, en general F no és un revestiment. Sigui $R \subset X$ el conjunt finit de punts de ramificació d' F i sigui $B = F(R) \subset Y$ el conjunt finit de punts discriminants. Sigui $V = Y \setminus B$ i $U = X \setminus F^{-1}(B)$.

Per a tot $v \in V$, $F^{-1}(v)$ són d punts diferents, cadascun amb multiplicitat 1. Per tant, $F|_U : U \rightarrow V$ sí que és un revestiment de grau d . Donat $q \in V$, aquest revestiment té una representació de monodromia $\rho : \pi(V, q) \rightarrow S_d$, que s'anomena la *representació de la monodromia de l'aplicació holomorfa F* . La representació de la monodromia no depèn del punt q , ja que V és connex. Com que X és connex, també ho és U . Per tant, pel Lema 1.46, $\rho(\pi(V, q))$ és un subgrup transitiu d' S_d .

Per a cada punt discriminant $b \in Y$, considerem un entorn obert W de b en Y . El conjunt $W \setminus \{b\}$ és un obert de V , isomorf a un disc obert foradat. Denotem per $u_1, \dots, u_k$ les k antiimatges de b en X , on $k < d$. Clarament, com a mínim un dels u_i serà un punt de ramificació.

Suposem que hem triem W prou petit per tal que $F^{-1}(W)$ sigui unió disjunta de d'entorns oberts $U_1, \dots, U_k$ dels punts $u_1, \dots, u_k$, respectivament. Sigui $m_j = \text{mult}_{u_j}(F)$ les multiplicitats d' F en els punts u_j . Pel Teorema 3.15, existeixen coordenades locals z_j a U_j i z a W tals que F localment és de la forma $z = z_j^{m_j}$ en aquestes coordenades.

Ara considerem els conjunts $U_j \setminus \{u_j\}$, que són isomorfs a discs oberts foradats. L'aplicació F envia aquests conjunts a $W \setminus \{b\}$ mitjançant l'assignació $z = z_j^{m_j}$. Triem un camí α del punt base q a un punt $q_0 \in W \setminus \{b\}$ i un llaç β en q_0 contingut a $W \setminus \{b\}$ d'índex 1 respecte a b . Llavors el camí $\gamma := \alpha^{-1}\beta\alpha$ és un llaç de V en el punt q . Diem que γ és un *llaç petit de V al voltant de b* .

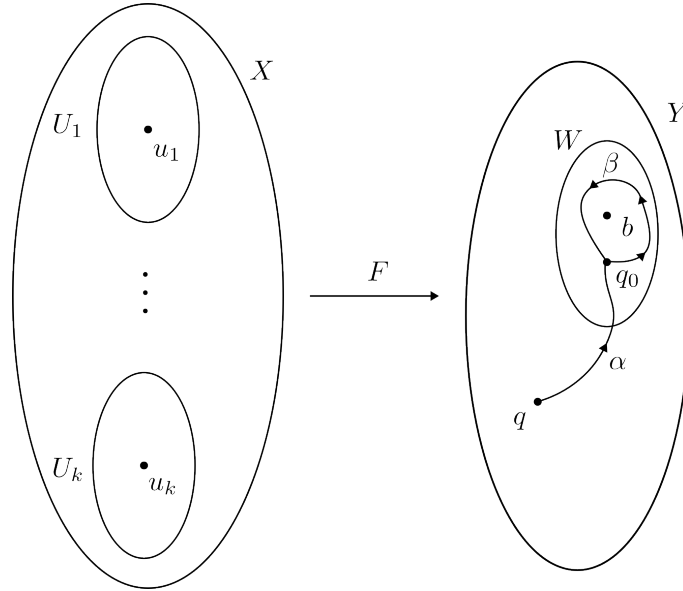


Figura 3: Llaç petit al voltant d'un punt.

El camí α identifica la fibra de q amb la de q_0 . Per tant la permutació dels elements de la fibra de q que induïx el llaç petit γ al voltant de b queda determinada pel llaç β al voltant de b .

La monodromia de cada revestiment $U_j \setminus \{u_j\} \rightarrow W \setminus \{b\}$ és una permutació cíclica de les m_j antiimatges de q_0 en U_j (hem analitzat aquesta situació en l'Exemple 1.47). El llaç β induïx una permutació cíclica d'aquests punts i, per tant, γ també s'identifica amb una permutació cíclica de les antiimatges de q en U_j a través de la identificació feta amb α . Per tant, hem demostrat el següent resultat:

Lema 1.48. *Suposem que el punt discriminant $b \in Y$ té $k < d$ antiimatges $u_1, \dots, u_k$ amb $\text{mult}_{u_j}(F) = m_j$. Llavors, amb la notació anterior, la permutació σ associada a un llaç petit al voltant de b està formada per k cicles disjunts d'ordres $m_1, \dots, m_k$.*

1.6.4 Revestiments a partir de la monodromia

Suposem donada una varietat real connexa V amb punt base $q \in V$. Suposem també que tenim un homeomorfisme de grups $\rho : \pi(V, q) \rightarrow S_d$ tal que $\rho(\pi(V, q))$ és un subgrup transitiu d' S_d . Fixem un índex, per exemple 1. Sigui $H \subseteq \pi(V, q)$ el subgrup format per les classes d'homotopia $[\gamma]$ tals que $\rho([\gamma])$ fixa l'índex 1, és a dir:

$$H = \{[\gamma] \in \pi(V, q) \mid \rho([\gamma])(1) = 1\}.$$

Llavors H té índex d en $\pi(V, q)$ i aquest subgrup induïx un revestiment

$$F_\rho : U_\rho = U_0/H \rightarrow V.$$

Aquest revestiment té la propietat que la seva monodromia ve donada precisament per l'aplicació ρ . Per tant, tenim el següent resultat:

Proposició 1.49. *Hi ha una correspondència bijectiva entre les classes d'isomorfisme de revestiments connexos $F : U \rightarrow V$ de grau d i els homeomorfismes de grups $\rho : \pi(V, q) \rightarrow S_d$ amb imatge transitiva (llevat de conjugació en S_d , que correspon a re-etiquetar els punts de la antiimatge del punt base).*

Ara suposem que V és una superfície de Riemann. És fàcil veure que els revestiments de superfícies de Riemann són superfícies de Riemann. Efectivament, podem obtenir cartes composant l'aplicació del revestiment amb les cartes a la superfície de Riemann d'arribada. De fet, si volem que l'aplicació del revestiment sigui holomorfa, cal posar cartes d'aquesta manera.

Lema 1.50. *Sigui $F : U \rightarrow V$ un revestiment connex d'una superfície de Riemann V . Llavors existeix una única estructura complexa a U tal que F és holomorfa.*

Combinant aquest lema amb la correspondència de la Proposició 1.49, obtenim el següent Teorema:

Teorema 1.51. *Sigui V una superfície de Riemann. Hi ha una correspondència bijectiva entre les classes d'isomorfisme d'aplicacions holomorfes $F : U \rightarrow V$ no ramificades de grau d i els homeomorfismes de grups $\rho : \pi(V, q) \rightarrow S_d$ amb imatge transitiva (llevat de conjugació en S_d).*

1.6.5 Aplicacions holomorfes a partir de la monodromia

El proper objectiu és aplicar les construccions anteriors a construir revestiments ramificats de superfícies de Riemann o, en altres paraules, aplicacions holomorfes amb ramificacions.

Sigui Y una superfície de Riemann compacta i sigui $B \subset Y$ un subconjunt finit. Denotem $V = Y \setminus B$. Observem que V és un obert de Y i també una superfície de Riemann. Fixem un punt base $q \in V$ i suposem que tenim un homeomorfisme de grups $\rho : \pi(V, q) \rightarrow S_d$ amb imatge transitiva. Sigui $F_\rho : U_\rho \rightarrow V$ el revestiment induït per ρ . Com abans, U_ρ és una superfície de Riemann i F_ρ és una aplicació holomorfa de grau d .

Fixem-nos en un punt $b \in B$. Sigui W_b un entorn de b en Y tal que $W_b \setminus \{b\}$ és isomorf a un disc obert foradat. Si W_b és prou petit, l'antiimatge $F_\rho^{-1}(W_b \setminus \{b\})$ serà unió disjunta d'espais $\tilde{U}_j$ tals que les restriccions d' F_ρ a cada $\tilde{U}_j$ seran revestiments de $W_b \setminus \{b\}$.

Recordem que ja hem classificat els revestiments d'un disc foradat: són també discs foradats, i l'aplicació del revestiment és de la forma $z = z_j^{m_j}$, on z i z_j són coordenades en W_b i en $\tilde{U}_j$, respectivament. Per tant, podem suposar que cada $\tilde{U}_j$ és un disc foradat i que l'aplicació F_ρ restringida a cada $\tilde{U}_j$ és $z = z_j^{m_j}$.

Podem suposar que W_b està completament contingut en el domini d'una carta de Y . Llavors, en cada $\tilde{U}_j$ tenim una carta foradada, ja que cada $\tilde{U}_j$ és isomorfa a un disc foradat. Aleshores, podem tapar aquests forats en U_ρ . A més, quan ho fem (per a cada punt discriminant i cada carta foradada), podem estendre el revestiment F_ρ a la superfície resultant X_ρ . El motiu pel qual això és possible és que en cada $\tilde{U}_j$, F_ρ és l'aplicació $\tilde{U}_j \rightarrow W_b \setminus \{b\}$ donada per $z = z_j^{m_j}$, i aquesta aplicació entre discs foradats s'estén naturalment als discs no foradats. Per tant, si el disc $\tilde{U}_j$ completat és U_j , tenim una extensió única de l'aplicació F_ρ d' U_j a W_b . Combinant aquestes extensions, obtenim una aplicació $F_\rho : X_\rho \rightarrow Y$.

La superfície de Riemann X_ρ obtinguda en tapar tots els forats és compacta. En efecte, $Y \setminus \bigcup_{b \in B} W_b$ és compacta i la seva antiimatge Z per F_ρ també ho és (ja que un revestiment finit d'un compacte és compacte). Com que X_ρ és la unió de Z i les clausures de tots els U_j 's (per a cada punt discriminant en B), veiem que X_ρ és unió finita de compactes i per tant és compacta.

Finalment, observem que $F_\rho : X_\rho \setminus F_\rho^{-1}(B) \rightarrow Y \setminus B$ és un revestiment amb representació de monodromia ρ . L'aplicació $F_\rho : X_\rho \rightarrow Y$ té com a punts discriminants el subconjunt finit B , com a màxim. Podem calcular les multiplicitats de les antiimatges d'un $b \in B$ considerant un llaç petit γ en V al voltant de b . Aquest llaç ha de ser de la forma $\alpha^{-1}\beta\alpha$, on α és un camí del punt base q a un punt a proper a b i β és un llaç petit d'índex 1 al voltant de b . Aleshores, si $\rho([\gamma])$ descompon en k cicles disjunts d'ordres $m_1, \dots, m_k$, hi haurà k antiimatges $u_1, \dots, u_k$ de b en X_ρ i $\text{mult}_{u_j}(F_\rho) = m_j$.

En resum, tenim el següent resultat:

Proposició 1.52. *Sigui Y una superfície de Riemann compacta, B un subconjunt finit de Y i q un punt base de $Y \setminus B$. Llavors hi ha una correspondència bijectiva entre les classes d'isomorfisme d'aplicacions holomorfes $F : X \rightarrow Y$ de grau d amb punts discriminants a B i els homeomorfismes de grups $\pi(Y \setminus B, q) \rightarrow S_d$ amb imatge transitiva (llevat de conjugació en S_d). A més, donat un punt $b \in B$, si γ és un llaç petit en $Y \setminus B$ al voltant de b basat en q i si $\rho([\gamma])$ descompon en k cicles disjunts d'ordres $m_1, \dots, m_k$, llavors hi haurà k antiimatges $u_1, \dots, u_k$ de b en X_ρ i $\text{mult}_{u_j}(F_\rho) = m_j$.*

1.6.6 Aplicacions holomorfes a la recta projectiva

La Proposició 1.52 és especialment útil a l'hora de construir superfícies de Riemann amb aplicacions holomorfes a la recta projectiva $\mathbb{P}^1$. Fixem n punts $b_1, \dots, b_n$ en $\mathbb{P}^1$ i un punt base q que no sigui cap dels b_i 's. Sigui $V = \mathbb{P}^1 \setminus \{b_1, \dots, b_n\}$. Observem que V és una superfície de Riemann i, com que topològicament $\mathbb{P}^1$ és una esfera, el grup fonamental de V és un grup lliure amb n generadors $[\gamma_1], \dots, [\gamma_n]$ amb la relació

$$[\gamma_1] \dots [\gamma_n] = 1.$$

Cada $[\gamma_i]$ és la classe d'homotopia d'un llaç petit de V al voltant de b_i .

Per tant, un homeomorfisme de grups $\rho : \pi(V, q) \rightarrow S_d$ queda determinat escollint n

permutacions $\sigma_i = \rho([\gamma_i])$, amb la condició

$$\sigma_1 \dots \sigma_n = 1.$$

La imatge de ρ serà el subgrup generat per les σ_i 's.

Aplicant la Proposició 1.52, tenim:

Teorema 1.53 (d'existència de Riemann). *Fixat un subconjunt $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ de $\mathbb{P}^1$, hi ha una correspondència bijectiva entre les classes d'isomorfisme de les aplicacions holomorfes $F : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ de grau d amb punts discriminants en B i les classes de conjugació d' n -tuples $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ en S_d tals que $\sigma_1 \dots \sigma_n = 1$ i que el subgrup d' S_d generat per les σ_i 's és transitiu. A més, si σ_i descompon en k cicles disjunts d'ordres $m_1, \dots, m_k$, llavors hi haurà k antiimatges $u_1, \dots, u_k$ de b_i en el revestiment $F : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ corresponent, amb $\text{mult}_{u_j}(F) = m_j$ per a cada j .*

1.7 Formes diferencials en superfícies de Riemann

En aquesta secció, introduïm les formes diferencials en superfícies de Riemann, que ens seran indispensables per poder enunciar el Teorema de Riemann-Roch més endavant.

Definició 1.54. *Una 1-forma holomorfa en un obert $V \subset \mathbb{C}$ és una expressió ω de la forma*

$$\omega = f(z)dz$$

on f és una funció holomorfa a V . Diem que ω és una 1-forma holomorfa en la coordenada z .

Definició 1.55. *Sigui $\omega_1 = f(z)dz$ una 1-forma holomorfa en la coordenada z , definida en un obert V_1 . Sigui $\omega_2 = g(w)dw$ una 1-forma holomorfa en la coordenada w , definida en un obert V_2 . Suposem que $z = T(w)$ defineix una aplicació holomorfa de V_2 a V_1 . Diem que ω_1 transforma a ω_2 sota l'acció de T si $g(w) = f(T(w))T'(w)$.*

Definició 1.56. *Sigui X una superfície de Riemann. Una 1-forma holomorfa en X és un conjunt de 1-formes holomorfes $\{\omega_\phi\}$, una per a cada carta $\phi : U \rightarrow V$ en les coordenades de V , tal que si dues cartes $\phi_i : U_i \rightarrow V_i$ amb $i \in \{1, 2\}$ tenen dominis amb intersecció no nul·la, llavors la 1-forma diferencial ω_{ϕ_1} transforma a ω_{ϕ_2} mitjançant la funció de transició $T = \phi_1 \circ \phi_2^{-1}$. En aquest cas direm que les 1-formes holomorfes són compatibles.*

Lema 1.57. *Sigui X una superfície de Riemann i $\mathcal{A}$ un atlas en X . Suposem que tenim una 1-forma holomorfa per a cada carta de $\mathcal{A}$, totes compatibles entre elles. Aleshores existeix una única 1-forma holomorfa en X que estén aquestes 1-formes.*

Demostració. Sigui ψ una carta d' X que no està en $\mathcal{A}$. Fixem un punt p en el domini de ψ i triem una carta ϕ de l'atles $\mathcal{A}$ tal que p es troba en el domini de ϕ . Sigui z la coordenada local associada. Sigui $f(z)dz$ la 1-forma holomorfa respecte ϕ . Llavors simplement hem de definir la 1-forma holomorfa respecte ψ com $f(T(w))T'(w)dw$, on $z = T(w)$ és la funció de transició $\phi \circ \psi^{-1}$.

Es pot comprovar que aquesta definició és independent de la tria de ϕ i dona una 1-forma holomorfa respecte ψ en cada punt del domini. Llavors, es pot comprovar que totes aquestes 1-formes són compatibles entre elles i que per tant defineixen una 1-forma en X que és única per construcció. $\square$

De la mateixa manera que hem definit les 1-forma holomorfes, també podem definir 1-formes meromorfes. També tenim un resultat anàleg al Lema 1.57.

Exemple 1.58. Considerem l'esfera de Riemann $X = \mathbb{P}^1$ (i.e. la recta projectiva complexa) i els oberts $A = \{[a : 1] \in \mathbb{P}^1\}$ i $B = \{[1 : b] \in \mathbb{P}^1\}$. Sigui z la coordenada local en A associada a la carta $\phi_A : A \rightarrow \mathbb{C}$, $\phi_A([a : b]) = a/b$, i sigui w la coordenada local en B associada a la carta $\phi_B : B \rightarrow \mathbb{C}$, $\phi_B([a : b]) = b/a$. Aleshores, la funció de transició de ϕ_B a ϕ_A és $T(w) = (\phi_A \circ \phi_B^{-1})(z) = 1/w$. Si la derivem, obtenim $T'(w) = -1/w^2$. Per tant, la 1-forma meromorfa $\omega_A = dz$ transforma a $\omega_B = -1/w^2 dw$ sota l'acció de T . El conjunt $\{\omega_A, \omega_B\}$ defineix una 1-forma meromorfa ω en X que té un pol doble en $[1 : 0]$.

Sigui ω una 1-forma en una superfície de Riemann X . Suposem que ω és homeomorfa en un punt $p \in X$. Si fixem una coordenada local z centrada en p , podem escriure la sèrie de Laurent d' ω

$$\omega = f(z)dz = \left(\sum_{n=-M}^{\infty} c_n z^n \right) dz$$

on $c_{-M} \neq 0$.

Definició 1.59. El residu d' ω en p és el coeficient c_{-1} de la sèrie de Laurent d' ω en p .

Tenim la següent versió del Teorema del residu de l'anàlisi complexa per a superfícies de Riemann:

Teorema 1.60. Sigui ω una 1-forma meromorfa en una superfície de Riemann compacta X . Aleshores

$$\sum_{p \in X} \text{Res}_p(\omega) = 0.$$

Demostració. La demostració es pot trobar al llibre *Algebraic Curves and Riemann Surfaces* [Mir95, Teorema 3.17]. $\square$

Si $z = x + iy$, qualsevol expressió de la forma $f(x, y)dx + g(x, y)dy$, on f i g tenen valors en $\mathbb{C}$, es pot escriure com $r(z, \bar{z})dz + s(z, \bar{z})d\bar{z}$.

Definició 1.61. Una 1-forma $\mathcal{C}^\infty$ en un obert $V \subset \mathbb{C}$ és una expressió ω de la forma

$$\omega = f(z, \bar{z})dz + g(z, \bar{z})d\bar{z}$$

on $f, g \in \mathcal{C}^\infty(V)$. Diem que ω és una 1-forma $\mathcal{C}^\infty$ en la coordenada z .

Definició 1.62. Suposem que $\omega_1 = f_1(z, \bar{z})dz + g_1(z, \bar{z})d\bar{z}$ és una 1-forma $\mathcal{C}^\infty$ en la coordenada z , definida en un obert V_1 . Suposem també que $\omega_2 = f_2(w, \bar{w})dw + g_2(w, \bar{w})d\bar{w}$ és una 1-forma $\mathcal{C}^\infty$ en la coordenada w , definida en un obert V_2 . Suposem que $z = T(w)$ defineix una aplicació holomorfa de V_2 a V_1 . Diem que ω_1 transforma a ω_2 sota l'acció de T si $f_2(w, \bar{w}) = f_1(T(w), \overline{T(w)})T'(w)$ i $g_2(w, \bar{w}) = g_1(T(w), \overline{T(w)})\overline{T'(w)}$.

Sigui $F : X \rightarrow Y$ una aplicació holomorfa no constant entre superfícies de Riemann. Sigui ω una 1-forma $\mathcal{C}^\infty$ a Y . Podem definir una 1-forma $\mathcal{C}^\infty$ en X , que denotem per $F^*\omega$. Per fer-ho, fixem una carta $\phi : U \rightarrow V$ en X tal que $F(U)$ està continguda en el domini U' d'una carta $\psi : U' \rightarrow V'$ a Y . Aquestes cartes ens donen unes coordenades locals z a U' i w a U . En termes d'aquestes coordenades, l'aplicació holomorfa F és de la forma $z = h(w)$ per a alguna funció holomorfa h .

Suposem que $\omega = f(z, \bar{z})dz + g(z, \bar{z})d\bar{z}$ respecte a la coordenada z . Definim la 1-forma $F^*\omega$ respecte a la variable w de la següent manera:

$$F^*\omega = f(h(w), \overline{h(w)})h'(w)dw + g(h(w), \overline{h(w)})\overline{h'(w)}d\bar{w}$$

Lema 1.63. *La definició anterior dona una 1-forma C^∞ $F^*\omega$ en X ben definida.*

Definició 1.64. *La forma $F^*\omega$ s'anomena pullback de ω per F .*

Lema 1.65. *Sigui $F : X \rightarrow Y$ una aplicació holomorfa entre superfícies de Riemann i sigui ω una 1-forma meromorfa a Y . Fixem un punt $p \in X$. Aleshores*

$$\text{ord}_p(F^*\omega) = (1 + \text{ord}_{F(p)}(\omega))\text{mult}_p(F) - 1$$

Demostració. Podem triar coordenades locals w en p i z en $F(p)$, de manera que, prop de p , F és de la forma $z = w^n$ on $n = \text{mult}_p(F)$. Respecte a la variable z , ω és de la forma $(cz^k + O(z^{k+1}))dz$, on $k = \text{ord}_{F(p)}(\omega)$. Per tant, la forma $F^*\omega$ és de la forma $(cw^{nk} + O(w^{nk+1}))(nw^{n-1})dw$ respecte a la variable w . D'aquí es veu clarament que $\text{ord}_p(F^*\omega) = nk + n - 1$, com volíem demostrar. $\square$

1.8 Divisors

Els divisors són objectes que ens permeten comptar punts en una superfície de Riemann, tenint en compte les seves multiplicitats. Essencialment, són sumes de punts amb pesos enters que representen les seves multiplicitats. Els divisors serveixen per donar informació important sobre funcions en superfícies de Riemann, com per exemple el lloc on estan situats els zeros i els pols d'una funció meromorfa, així com el seu ordre. Crucialment, els divisors ofereixen una connexió entre dues maneres d'enfocar aquestes funcions: una de més analítica i l'altra més algebraica.

Definició 1.66. *Sigui X una superfície de Riemann. Denotem per $\mathbb{Z}^X$ el grup de les funcions d' X als enters (és un grup amb la suma puntual). Donada una funció $D : X \rightarrow \mathbb{Z}$, el suport de D és el conjunt de punts $p \in X$ tals que $D(p) \neq 0$.*

Definició 1.67. *Un divisor d' X és una funció $D : X \rightarrow \mathbb{Z}$ tal que el seu suport és un subconjunt discret d' X . Els divisors d' X formen un grup amb la suma puntual que denotem per $\text{Div}(X)$.*

Si X és una superfície de Riemann, llavors $D : X \rightarrow \mathbb{Z}$ és un divisor d' X si, i només si, el seu suport és finit. Per tant, el grup $\text{Div}(X)$ per a X compacta és exactament el grup abelià lliure sobre el conjunt dels punts d' X .

Solem denotar un divisor fent servir la notació següent:

$$D = \sum_{p \in X} D(p) \cdot p.$$

Com que en superfícies de Riemann compactes el suport és finit, podem reinterpretar aquesta suma formal com a suma real.

Definició 1.68. *El grau d'un divisor D en una superfície de Riemann compacta és la suma dels valors de D*

$$\deg(D) = \sum_{p \in X} D(p).$$

L'aplicació grau $\deg : \text{Div}(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ és un homeomorfisme de grups. El seu nucli és el subgrup $\text{Div}_0(X)$ dels divisors de grau 0.

1.8.1 Divisors principals

Definició 1.69. *Sigui X una superfície de Riemann i sigui f una funció meromorfa sobre X que no és idènticament zero. El divisor d' f , que denotem per $\text{div}(f)$, es defineix com:*

$$\text{div}(f) = \sum_p \text{ord}_p(f) \cdot p.$$

Qualsevol divisor d'aquesta forma s'anomena divisor principal en X . El conjunt dels divisors principals en X es denota amb $\text{PDiv}(X)$.

Les següents propietats són fàcils de demostrar a partir de la definició:

Lema 1.70. *Si f i g són funcions meromorfes no nul·les en X . Aleshores*

- (a) $\text{div}(fg) = \text{div}(f) + \text{div}(g)$
- (b) $\text{div}(f/g) = \text{div}(f) - \text{div}(g)$
- (c) $\text{div}(1/f) = -\text{div}(f)$

Lema 1.71. *Si f és una funció meromorfa no nul·la en una superfície de Riemann compacta, llavors $\deg(\text{div}(f)) = 0$.*

Demostració. És conseqüència de la Proposició 1.28. □

Definició 1.72. *El divisor de zeros d' f , que denotem per $\text{div}_0(f)$, és el divisor*

$$\text{div}_0(f) = \sum_{p \text{ tal que } \text{ord}_p(f) > 0} \text{ord}_p(f) \cdot p.$$

El divisor de pols d' f , que denotem per $\text{div}_\infty(f)$, és el divisor

$$\text{div}_\infty(f) = \sum_{p \text{ tal que } \text{ord}_p(f) < 0} (-\text{ord}_p(f)) \cdot p.$$

1.8.2 Divisors canònics

Definició 1.73. *Sigui X una superfície de Riemann i sigui ω una 1-forma meromorfa sobre X que no és idènticament zero. El divisor de ω , que denotem per $\text{div}(\omega)$, es defineix com:*

$$\text{div}(\omega) = \sum_p \text{ord}_p(\omega) \cdot p.$$

Qualsevol divisor d'aquesta forma s'anomena divisor canònic d' X . El conjunt dels divisors canònics d' X es denota amb $\text{KDiv}(X)$.

Lema 1.74. *Si ω_1 i ω_2 són dues 1-formes meromorfes en una superfície de Riemann X , amb ω_1 no idènticament zero. Llavors existeix una única funció meromorfa f en X tal que $\omega_2 = f\omega_1$.*

Demostració. Triem una carta $\phi : U \rightarrow V$ d' X amb coordenada local z i expressem $\omega_i = g_i(z)dz$ on g_i són funcions meromorfes a V . Sigui $h = g_2/g_1$, que també és una funció meromorfa a V . A continuació, definim $f = h \circ \phi$, que és una funció meromorfa a U . Es pot comprovar que f està ben definida (i.e., és independent de la carta escollida). Per tant, f és la funció que busquem. □

Corol·lari 1.75. *La diferència entre qualsevol parella de divisors canònics és principal. Per tant,*

$$\text{KDiv}(X) = \text{div}(\omega) + \text{PDiv}(X).$$

En particular, tots els divisors canònics tenen el mateix grau.

Proposició 1.76. *Si X és una superfície de Riemann compacta en la qual existeix una funció meromorfa no constant, llavors existeix un divisor canònic d' X de grau $2g - 2$.*

Demostració. Sigui f una funció meromorfa en X no constant. Podem considerar f com a funció holomorfa $F : X \rightarrow \mathbb{C}_\infty$. Suposem que F té grau d . Per la Fórmula de Hurwitz 1.38, tenim:

$$\sum_{p \in X} [\text{mult}_p(F) - 1] = 2g - 2 + 2 \deg(F).$$

Considerem la 1-forma meromorfa ω en $\mathbb{C}_\infty$ definida per $\omega = dz$. Aquesta forma té un pol doble a ∞ i cap altre pol ni zero i, per tant, té grau -2 . Sigui $\eta = F^*(\omega)$ el pullback de ω en X . Aleshores,

$$\begin{aligned} \deg(\text{div}(\eta)) &= \sum_{p \in X} \text{ord}_p(\eta) \\ &= \sum_{p \in X} \text{ord}_p(F^*\omega) \\ &= \sum_{p \in X} [(1 + \text{ord}_{F(p)}(\omega)) \text{mult}_p(F) - 1] \\ &= \sum_{p \in F^{-1}(q), q \neq \infty} [\text{mult}_p(F) - 1] + \sum_{p \in F^{-1}(\infty)} (-\text{mult}_p(F) - 1) \\ &= \sum_{p \in X} [\text{mult}_p(F) - 1] - \sum_{p \in F^{-1}(\infty)} 2\text{mult}_p(F) \\ &= 2g - 2 + 2 \deg(F) - 2 \deg(F) \\ &= 2g - 2 \end{aligned}$$

on hem fer servir el Lema 1.65. □

Es pot demostrar que tota per a qualsevol superfície de Riemann compacte, existeix alguna funció meromorfa no constant en X . Per tant, el resultat anterior implica que per a qualsevol superfície de Riemann compacta existeix algun divisor canònic de grau $2g - 2$.

1.8.3 Equivalència lineal de divisors

Definició 1.77. *Dos divisors sobre una superfície de Riemann X són linealment equivalents si la seva diferència és un divisor principal, i.e., si la seva diferència és el divisor d'una funció meromorfa. Si dos divisors D_1 i D_2 són linealment equivalents, escriurem $D_1 \sim D_2$.*

Lema 1.78. *Sigui X una superfície de Riemann. Aleshores:*

- (a) *L'equivalència lineal és una relació d'equivalència en el conjunt $\text{Div}(X)$.*
- (b) *Un divisor és linealment equivalent a 0 si, i només si, és un divisor principal.*

(c) Si X és compacta, llavors divisors equivalents tenen el mateix grau.

Demostració. (b) és directe per la definició d'equivalència lineal, ja que $D \sim 0$ si, i només si, $D - 0 = D$ és un divisor principal. Per veure (a), hem de demostrar que es verifiquen les propietats d'una relació d'equivalència:

- Reflexiva. $D - D = 0$ és un divisor principal per a qualsevol divisor D .
- Simètrica. $D_1 \sim D_2 \iff D = D_1 - D_2$ és un divisor principal $\iff D = \operatorname{div}(f)$ amb $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ meromorfa $\implies -D = \operatorname{div}(1/f) \implies -D = D_2 - D_1$ és un divisor principal $\implies D_1 \sim D_2$.
- Transitiva. $D_1 \sim D_2$ i $D_2 \sim D_3 \implies D_1 - D_2 = \operatorname{div}(f)$ i $D_2 - D_3 = \operatorname{div}(g)$ per a f, g meromorfs $\implies D_1 - D_3 = (D_1 - D_2) + (D_2 - D_3) = \operatorname{div}(f) + \operatorname{div}(g) = \operatorname{div}(fg) \implies D_1 \sim D_3$.

Finalment, per veure (c), notem que, si X és compacta, els divisors principals tenen grau 0. Per tant, si $D_1 = \operatorname{div}(f) - D_2$, llavors $\deg(D_1) = \deg(\operatorname{div}(f)) + \deg(D_2) = \deg(D_2)$. $\square$

Corol·lari 1.79. *Si X és una superfície de Riemann compacta. Aleshores el grau de qualsevol divisor canònic és $2g - 2$.*

Demostració. És una conseqüència immediata de la Proposició 1.76 i el Lema 1.78. $\square$

1.9 Espais de funcions i formes associades a un divisor

Definició 1.80. *Si D és un divisor sobre una superfície de Riemann X . L'espai de funcions meromorfs amb pols acotats per D , que es denota per $L(D)$, és el conjunt de les funcions meromorfs*

$$L(D) = \{f \in \mathcal{M}(X) \mid \operatorname{div}(f) \geq -D\}.$$

$L(D)$ és un espai vectorial sobre $\mathbb{C}$.

Notació. Suposem que $D(p) = n > 0$. Llavors $f \in L(D)$ implica que $\operatorname{ord}_p(f) \geq -n$. És a dir, f pot tenir en un pol d'ordre n com a màxim en p . En canvi, si $D(p) = -n < 0$, llavors $f \in L(D)$ implica que $\operatorname{ord}_p(f) \geq n$. És a dir, f ha de tenir un zero d'ordre n com a mínim en p .

Lema 1.81. *Si X és una superfície de Riemann compacta. Si D és un divisor d' X amb $\deg(D) < 0$, aleshores $L(D) = \{0\}$.*

Demostració. Suposem que $f \in L(D)$ no és idènticament zero. Considerem el divisor $E = \operatorname{div}(f) + D$. Com que $f \in L(D)$, tenim $E \geq 0$. Per tant, $\deg(E) \geq 0$. Però, com que $\deg(\operatorname{div}(f)) = 0$, tenim que $\deg(E) = \deg(D) < 0$, de manera que arribem a una contradicció. $\square$

Proposició 1.82. *Si D és un divisor de X amb $\deg D \geq 0$, aleshores $\dim(L(D)) \leq \deg(D) + 1$.*

Demostració. Si dos divisors D_1 i D_2 són equivalents, $\dim(L(D_1)) = \dim(L(D_2))$. Per tant podem suposar que D és un divisor efectiu (és a dir, $D = n_1p_1 + \dots + n_kp_k$ amb $n_i > 0$ per a tot i). Llavors podem definir una aplicació $\psi : L(D) \rightarrow \mathbb{C}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{C}^{n_k}$ que li associa a f els coeficients de la part de Laurent del seu desenvolupament en cada pol. Aquesta aplicació és lineal. El seu nucli són les funcions holomorfes, que en una superfície de Riemann són les funcions constants pel Teorema de Liouville 1.11. Per tant, $\dim(\ker(\psi)) = 1$. Consegüentment, $\dim(L(D)) \leq n_1 + \dots + n_k + 1 = \deg(D) + 1$. $\square$

1.9.1 El Teorema de Riemann-Roch

A continuació enunciem el teorema de Riemann-Roch. Es tracta d'un resultat fonamental en geometria algebraica que relaciona la geometria d'una corba projectiva no singular amb les dimensions dels espais de funcions meromorfs sobre la corba. Aquest teorema permet connectar propietats algebraiques amb invariants topològics i proporciona eines indispensables per a la classificació de corbes.

Teorema 1.83 (de Riemann-Roch). *Si X és una corba projectiva no singular de gènere g . Llavors, per a qualsevol divisor D d' X i qualsevol divisor canònic K d' X tenim que*

$$\dim L(D) - \dim L(K - D) = \deg(D) + 1 - g.$$

2 Corbes planes

En aquest capítol introduïm les corbes planes com a cas particular de superfícies de Riemann que ens serà d'especial interès en el darrer capítol de la memòria. Aquest capítol està basat sobretot en el llibre *Algebraic Curves, the Brill and Noether Way* [Cas19]. En tot tot el capítol considerem espais projectius en els quals el cos base és $\mathbb{C}$.

2.1 Definicions bàsiques

Definició 2.1. *Suposem fixada una referència projectiva a l'espai projectiu n -dimensional $\mathbb{P}^n$ sobre $\mathbb{C}$. Una varietat lineal s -dimensional de $\mathbb{P}^n$ és el conjunt de punts de $\mathbb{P}^n$ les coordenades dels quals satisfan un sistema de $n - s$ equacions lineals, homogènies i independents en $n + 1$ variables. En particular, quan $s = 1$ les anomenem rectes, quan $s = 2$ les anomenem plans i quan $s = n - 1$ les anomenem hiperplans.*

Definició 2.2. *Una hipersuperfície V de $\mathbb{P}^n$ és la classe, mòdul producte per una constant no nul·la, d'una $(n + 1)$ -forma no constant $F \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ (és a dir, un polinomi homogeni en $n + 1$ variables). A la forma F se l'anomena l'equació de V . Farem servir la notació $V : F = 0$ per indicar que V és la hipersuperfície d'equació F . Les hipersuperfícies de $\mathbb{P}^2$ les anomenem corbes planes projectives o simplement corbes de $\mathbb{P}^2$.*

Definició 2.3. *Diem que el grau d de l'equació F és el grau de la hipersuperfície $V : F = 0$. Denotem el grau de V amb $\deg V$. Les hipersuperfícies de grau 1 són hiperplans de $\mathbb{P}^n$. Les hipersuperfícies de graus 2, 3, 4 i 5 s'anomenen quàdriques (còniques si $n = 2$), cúbiques, quàrtiques i quintiques, respectivament.*

Definició 2.4. *Diem que un punt $p = [x_0, \dots, x_n]$ pertany a la hipersuperfície $V : F = 0$ si, i només si, $F(x_0, \dots, x_n) = 0$.*

Observació 2.5. Aquesta definició és independent de l'elecció d' F i del factor arbitrari de les coordenades homogènies, ja que F és homogeni.

Notació. Denotarem el conjunt dels punts que pertanyen a V amb $|V|$. Per simplicitat, en lloc d'escriure $p \in |V|$, escriurem $p \in V$.

Definició 2.6. *Siguin $V_1 : F_1 = 0$ i $V_2 : F_2 = 0$ dues hipersuperfícies de $\mathbb{P}^n$. Diem que V_1 està continguda en V_2 o que V_2 conté V_1 si, i només si F_1 divideix a F_2 i ho escriurem com $V_1 \subset V_2$.*

Observació 2.7. Aquesta definició és independent de l'elecció d' F_1 i F_2 . A més, $V_1 \subset V_2 \implies |V_1| \subset |V_2|$.

Definició 2.8. *Siguin $V_1 : F_1 = 0$ i $V_2 : F_2 = 0$ dues hipersuperfícies de $\mathbb{P}^n$. La hipersuperfície $V : F_1 F_2 = 0$ s'anomena la hipersuperfície composta per V_1 i V_2 i es denota amb $V = V_1 + V_2$.*

Observacions 2.9. Tenim les següents propietats:

- La definició no depèn de l'elecció d' F_1 i F_2 .
- $\deg(V_1 + V_2) = \deg V_1 + \deg V_2$.
- $V_1, V_2 \subset V_1 + V_2$.

- $|V_1 + V_2| = |V_1| \cup |V_2|$.

Definició 2.10. Si $V_i : F_i = 0$ són hipersuperfícies de $\mathbb{P}^n$ per a $i = 1, \dots, m$ i μ_i són enters positius, llavors denotarem la hipersuperfície $V : F_1^{\mu_1} \dots F_m^{\mu_m} = 0$ amb $V = \mu_1 V_1 + \dots + \mu_m V_m$. Aquesta hipersuperfície s'anomena la hipersuperfície composta per les hipersuperfícies $V_i : F_i = 0$ amb multiplicitats μ_i .

Lema 2.11. Si F és un polinomi homogeni, aleshores tots els seus factors irreductibles també són homogenis.

Definició 2.12. Diem que una hipersuperfície $V : F = 0$ és irreductible si, i només si, la seva equació F és un polinomi irreductible.

Definició 2.13. Sigui $V : F = 0$ una hipersuperfície i sigui $F = F_1^{\mu_1} \dots F_m^{\mu_m}$ la descomposició d' F en factors irreductibles. Llavors, diem que $V_i : F_i = 0$ són les components irreductibles de V i que μ_i són les multiplicitats de V_i en V . La igualtat $V = \mu_1 V_1 + \dots + \mu_m V_m$ s'anomena la descomposició de V en factors irreductibles. Clarament, $|V| = |V_1| \cup \dots \cup |V_m|$.

Definició 2.14. Diem que una hipersuperfície és reduïda si, i només si, totes les multiplicitats de les seves components irreductibles són 1.

En el cas $n = 1$, tot polinomi homogeni $F \in \mathbb{C}[x_0, x_1]$ descompon com a producte de factors lineals, que són les seves components irreductibles. Com a conseqüència, les hipersuperfícies irreductibles de $\mathbb{P}^1$ són de la forma $V : ax_0 + bx_1 = 0$ i tenen com a únic punt $[b : -a]$. Per tant, és equivalent parlar d'hipersuperfícies irreductibles de $\mathbb{P}^1$ i de punts de $\mathbb{P}^1$.

Definició 2.15. Donada una hipersuperfície $V : F = 0$ de $\mathbb{P}^1$, tal que la descomposició d' F en factors irreductibles és $F = (a_1 x_0 + b_1 x_1)^{\mu_1} \dots (a_m x_0 + b_m x_1)^{\mu_m}$, si $p_i = [b_i : -a_i]$, escriurem $V = \mu_1 p_1 + \dots + \mu_m p_m$ i direm que μ_i és la multiplicitat del punt p_i en V .

Definició 2.16. Suposem fixada una referència projectiva a $\mathbb{P}^n$. Sigui $x_0, \dots, x_n$ les coordenades projectives en aquesta referència. Els complementaris dels hiperplans $x_i = 0$ recobreixen $\mathbb{P}^n$. Aquests conjunts s'anomenen cartes afins de $\mathbb{P}^n$ en les coordenades $x_0, \dots, x_n$. En particular, el complement de $x_i = 0$ s'anomena la carta afí i -èsima. Sempre podem suposar, reordenant si cal els punts de la referència projectiva, que una carta afí és la carta afí 0-èsima, que denotarem amb $\mathbb{A}_n$. Prenent $X_i = x_i/x_0$ com a coordenades afins del punt $p = [x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{A}_n$, tenim que $\mathbb{A}_n$ és un espai afí de dimensió n . Observem que $p = [1 : X_1 : \dots : X_n]$.

Definició 2.17. Sigui $V : F = 0$ una hipersuperfície de $\mathbb{P}^n$. Definim $f(X_1, \dots, X_n) = F(1, X_1, \dots, X_n)$. Si $F = \lambda x_0^d$ per algun $\lambda \in \mathbb{C}$ i $d \in \mathbb{Z}_{>0}$, cap punt de V pertany a $\mathbb{A}_n$. En cas contrari, f defineix una hipersuperfície V_0 de $\mathbb{A}_n$, que anomenem la part afí de V .

2.2 Les corbes planes són superfícies de Riemann

Volem demostrar que les corbes planes projectives són superfícies de Riemann. Per fer-ho, primer introduïrem les corbes planes afins. Demostrarem que, si són no singulars i irreductibles, són superfícies de Riemann. A continuació, farem servir aquest resultat per demostrar que les corbes planes projectives no singulars també ho són.

2.2.1 Corbes planes afins

Definició 2.18. Una corba plana afí X és el conjunt de zeros d'un polinomi $f \in \mathbb{C}[z, w]$. L'expressarem com $X : f = 0$. Un polinomi $f(z, w)$ és no singular en $p = (z_0, w_0)$ si com a mínim una de les derivades parcials $\partial f / \partial z$ o $\partial f / \partial w$ és no nul·la en p . Diem que la corba plana afí $X : f = 0$ és no singular en p si f és no singular en p . Diem que X és no singular si és no singular en tots els seus punts.

Teorema 2.19 (de la funció implícita). Sigui $X : f = 0$ una corba plana afí. Sigui $p = (z_0, w_0)$ un punt d' X . Suposem que $(\partial f / \partial w)(p) \neq 0$. Aleshores existeixen entorns oberts $U \subset \mathbb{C}^2$ de p i $V \subset \mathbb{C}$ de z_0 tals que existeix una única funció holomorfa $g : V \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $g(z_0) = w_0$ i $U \cap |X| = \{(z, f(z)) \in \mathbb{C}^2 \mid z \in V\}$. És a dir, prop de p , X és la gràfica de la funció $g(z)$. En particular, $f(z, g(z)) = 0 \forall z \in V$. A més, $g'(z) = -\frac{\partial f}{\partial z} / \frac{\partial f}{\partial w}$.

Amb la notació anterior, aquest Teorema implica que existeix un entorn obert $U \subset X$ de p tal que $U = \{(z, g(z)) \mid z \in V\}$. Per tant, la projecció

$$\begin{aligned} \pi : \quad U &\rightarrow V \\ (z, g(z)) &\mapsto z \end{aligned}$$

és un homeomorfisme amb inversa

$$\begin{aligned} \pi^{-1} : V &\rightarrow U \\ z &\mapsto (z, g(z)). \end{aligned}$$

Per tant, π és una carta complexa d' X . Si $(\partial f / \partial w)(p) = 0$ però $(\partial f / \partial z)(p) \neq 0$, podem fer un raonament anàleg fent servir l'altra variable. Aleshores, si X és no singular, com a mínim una de les derivades parcials no s'anul·la i podrem trobar una carta local al voltant de cada punt $p \in X$. Per veure que el conjunt d'aquestes cartes és un atlas, només cal comprovar que són compatibles.

Suposem que hem tenim dues cartes π_z i π'_z que hem obtingut fent la projecció en la primera variable. Aleshores, si la intersecció dels seus dominis és no buida, la composició $\pi'_z \circ \pi_z^{-1}$ és la identitat, que és holomorfa. L'argument seria el mateix si haguéssim obtingut les dues cartes fent la projecció en la segona variable.

Ara suposem que tenim una carta $\pi_z : U_z \rightarrow V_z$ que hem obtingut fent la projecció en la primera variable i una carta $\pi_w : U_w \rightarrow V_w$ que hem obtingut fent la projecció en la segona. Suposem que $U_z \cap U_w \neq \emptyset$. Recordem que $U_z = \{(z, g(z)) \mid z \in V_z\}$, on $g : V_z \rightarrow X$ és una funció holomorfa. Aleshores, $\forall z \in \pi_z(U_z \cap U_w)$, $(\pi_w \circ \pi_z^{-1})(z) = \pi_w(z, g(z)) = g(z)$. Per tant, $\pi_w \circ \pi_z^{-1}$ és holomorfa.

Hem demostrat que el conjunt de les cartes locals obtingudes fent servir el Teorema de la funció implícita són compatibles i, per tant, formen un atlas d' X .

A més, pel fet de ser un subespai de $\mathbb{C}^2$, X és Hausdorff i verifica el segon axioma de numerabilitat. Per tant, per veure que X és una superfície de Riemann, només falta veure que és connex. Perquè això es verifiqui, ens cal una hipòtesi addicional: cal que f sigui irreductible. Aleshores, tenim el següent resultat, que no demostrarem:

Teorema 2.20. Sigui $X : f = 0$ una corba plana afí, on $f(z, w)$ és un polinomi no singular i irreductible. Aleshores, X és connex i, per tant, una superfície de Riemann.

També hi ha la següent versió, més general, del Teorema:

Teorema 2.21. Si $f(z, w)$ és un polinomi irreductible, el conjunt de punts on f és singular és finit i, si eliminem aquests punts d' X , aleshores X és una superfície de Riemann.

2.2.2 Corbes planes projectives

Definició 2.22. *Sigui F una forma de grau d . Diem que F és no singular si no s'anul·len simultàniament F i totes les seves derivades parcials. Per exemple, en el cas d'una forma ternària $F(x, y, z)$, F és no singular si el sistema*

$$F = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

no té solució sobre $\mathbb{P}^2$.

Ara considerem una forma ternària F i definim els conjunts

$$U_0 = \{[x, y, z] \in \mathbb{P}^2 \mid x \neq 0\}$$

$$U_1 = \{[x, y, z] \in \mathbb{P}^2 \mid y \neq 0\}$$

$$U_2 = \{[x, y, z] \in \mathbb{P}^2 \mid z \neq 0\}.$$

Considerem les interseccions

$$X_0 = X \cap U_0 \cong \{(a, b) \in \mathbb{C}^2 \mid F(1, a, b) = 0\}$$

$$X_1 = X \cap U_1 \cong \{(a, b) \in \mathbb{C}^2 \mid F(a, 1, b) = 0\}$$

$$X_2 = X \cap U_2 \cong \{(a, b) \in \mathbb{C}^2 \mid F(a, b, 1) = 0\}.$$

Els conjunts X_i són homeomorfs a les corbes planes afins definides pels polinomis $f_0(z, w) = F(1, z, w)$, $f_1(z, w) = F(z, 1, w)$ i $f_2(z, w) = F(z, w, 1)$, respectivament.

Lema 2.23. *Una forma ternària F de grau d és no singular si, i només si, cadascuna de les X_i és una corba plana afí no singular.*

Demostració. Suposem, per exemple, que X_0 és singular en algun punt. Definim $f(u, v) = F(1, u, v)$, de manera que $X_0 : f = 0$. Com que X_0 és singular, el sistema

$$f = \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial v} = 0$$

té alguna solució $(u_0, v_0) \in \mathbb{C}^2$. Aleshores,

$$\begin{aligned} F[1 : u_0 : v_0] &= f(u_0, v_0) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}[1 : u_0 : v_0] &= \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z}[1 : u_0 : v_0] &= \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x}[1 : u_0 : v_0] &= \left(dF - u_0 \frac{\partial F}{\partial y} - v_0 \frac{\partial F}{\partial z} \right)[1 : u_0 : v_0] = 0, \end{aligned}$$

on hem usat la Fórmula d'Euler en la darrera equació. Per tant, F és singular en el punt $[1 : u_0 : v_0]$.

Recíprocament, suposem que F és singular en algun punt $p = [x_0 : y_0 : z_0] \in \mathbb{P}^2$. Suposem, sense pèrdua de generalitat, que $x_0 \neq 0$, de manera que $p = [1 : u_0 : v_0]$. Si

$f(u, v) = F(1, u, v)$, aleshores

$$\begin{aligned} f(u_0, v_0) &= F[1 : u_0 : v_0] = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) &= \frac{\partial F}{\partial y}[1 : u_0 : v_0] = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0) &= \frac{\partial F}{\partial z}[1 : u_0 : v_0] = 0 \end{aligned}$$

i, per tant, $X_0 : f = 0$ és singular en el punt (u_0, v_0) . $\square$

Suposem que F és una forma ternària no singular que defineix una corba plana projectiva $X : F = 0$. Es pot demostrar que qualsevol polinomi homogeni no singular és necessàriament irreductible. Aleshores, els conjunts X_i són corbes planes afins no singulars i, pel Teorema 2.20, superfícies de Riemann. A més, en el cas de corbes planes afins no singulars, teníem cartes donades per les projeccions. Per tant, si $p \in X_0 \subset X$, els quocients y/x i z/x són cartes en un entorn de p . Anàlogament, si $p \in X_1$ o $p \in X_2$, també podem fer servir quocients com a cartes locals.

Notem que $X = X_0 \cup X_1 \cup X_2$, de manera que si les cartes en els diferents conjunts X_i són compatibles entre elles, ja tindrem un atlas en X . Per veure que efectivament ho són, considerem un punt $p = [x : y : z] \in X_0 \cap X_1$ (és a dir, tal que $x, y \neq 0$). Suposem que $\phi_0[x : y : z] = y/x$ és una carta d' X_0 en un entorn de p i que $\phi_1[x : y : z] = z/y$ és una carta d' X_1 en un entorn de p . Aleshores, $\phi_0^{-1}(w) = [1 : w : h(w)]$ per a alguna funció holomorfa h (de la qual X n'és localment la gràfica). Per tant, $\pi_1 \circ \phi_0^{-1}(w) = h(w)/w$, que és holomorfa ja que $w \neq 0$ perquè $p \in X_1$.

Es pot comprovar anàlogament que la resta combinacions de cartes locals també són compatibles entre elles. Per tant, tenim el següent resultat:

Proposició 2.24. *Sigui F una forma ternària no singular. Aleshores, la corba plana projectiva $X : F = 0$ és una superfície de Riemann compacta.*

Demostració. En primer lloc, ja hem vist que tenim una estructura complexa en X . També tenim que X és Hausdorff i verifica el segon axioma de numerabilitat, ja que $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$ i cada X_i és Hausdorff i verifica el segon axioma de numerabilitat.

En segon lloc, sabem que cada X_i és connex. Si $X_0 \cap X_1 = \emptyset$ i $X_0 \cap X_2 = \emptyset$, llavors $X_1 = \{[1 : 0 : 0]\}$, però això no pot ser ja que, com veurem més endavant en el Lema 2.32, qualsevol corba plana afí té infinits punts. Per tant, o bé $X_0 \cap X_1 \neq \emptyset$ o bé $X_0 \cap X_2 \neq \emptyset$. Anàlogament, $X_0 \cap X_1 \neq \emptyset$ o $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$ i també $X_0 \cap X_2 \neq \emptyset$ o $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$. Això demostra que $X = X_0 \cup X_1 \cup X_2$ és connex.

Finalment, X és compacte, ja que és un subconjunt tancat de $\mathbb{P}^2$, que és compacte. $\square$

2.3 Multiplicitat d'intersecció

Sigui $V : F = 0$ és una hipersuperfície de $\mathbb{P}^n$ de grau d i sigui l una recta de $\mathbb{P}^n$. La recta l és en si mateixa un espai projectiu de dimensió 1. Si aquesta recta ve donada per les equacions paramètriques

$$x_i = c_i^0 t_0 + c_i^1 t_1 \quad i = 0, \dots, n$$

podem prendre els paràmetres t_0 i t_1 com a coordenades projectives del punt $[x_0 : \dots : x_n]$ en l . Substituint $x_0, \dots, x_n$ en F per les expressions anteriors, obtenim un polinomi

$$\bar{F}(t_0, t_1) = F(c_0^0 t_0 + c_0^1 t_1, \dots, c_n^0 t_0 + c_n^1 t_1)$$

en les variables t_0 i t_1 que o bé és idènticament zero o bé és homogeni de grau d . En cas que sigui idènticament zero, tots els punts d' l pertanyen a V i diem que l està *continguda* en V . En cas contrari, $\overline{F}$ defineix una hipersuperfície (un conjunt de punts) d' l que s'anomena la *intersecció* d' l i V i denotem amb $l \cap V$. Es pot comprovar que $l \cap V$ no depèn de les coordenades triades.

Definició 2.25. *Sigui V una hipersuperfície i l una recta no continguda en V . Per a cada $p \in V \cap l$, la multiplicitat d'intersecció de V i l en p és la multiplicitat de p en $V \cap l$ i es denota amb $[V \cdot l]_p$. Si l està continguda en V , llavors $[V \cdot l]_p = \infty \forall p \in l$. Si $p \notin V \cap l$, $[V \cdot l]_p = 0$.*

Proposició 2.26. *Donada una hipersuperfície V de $\mathbb{P}^n$ de grau d , qualsevol recta l de $\mathbb{P}^n$ està continguda en V o interseca V en d punts p , comptats amb multiplicitat $[V \cdot l]_p$.*

Corol·lari 2.27. $|V| \neq \emptyset$ per a qualsevol hipersuperfície V de $\mathbb{P}^n$.

2.4 La resultant de Sylvester

En aquesta secció introduïm la resultant de Sylvester, que és una eina algebraica molt útil que s'utilitza per determinar les arrels comunes de dos polinomis. En particular, proporciona un criteri per determinar si existeixen arrels comunes sense haver-les de trobar explícitament. En l'estudi de corbes planes, és especialment útil perquè permet l'eliminació de variables. Això facilita l'anàlisi de les interseccions de corbes.

Sigui A un anell sense divisors de zero i sigui K el seu cos de fraccions. Denotem per $\overline{K}$ la clausura algebraica de K . Suposem que tenim dos polinomis $P, Q \in A[y]$ de la forma

$$\begin{aligned} P &= a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \cdots + a_{n-1} y + a_n \\ Q &= b_0 y^m + b_1 y^{m-1} + \cdots + b_{m-1} y + b_m \end{aligned}$$

amb $n, m > 0$. No suposem que $a_0 \neq 0$ ni que $b_0 \neq 0$, de manera que els graus dels polinomis són com a màxim n i m , respectivament. Els enters n i m s'anomenen *graus formals*. Els graus $\deg P$ i $\deg Q$ s'anomenen *graus efectius*.

La *resultant de Sylvester* (o simplement la *resultant*) dels polinomis P i Q es defineix com el determinant $(n+m) \times (n+m)$

$$R(P, Q) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_{m-1} & b_m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \cdots & b_{m-1} & b_m & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_0 & b_1 & \cdots & b_{m-1} & b_m \end{vmatrix}. \quad (2.1)$$

Teorema 2.28. *Siguin $P, Q \in A[y]$ dos polinomis de graus formals m i n , respectivament. Aleshores les següents condicions són equivalents:*

- (1) $R(P, Q) = 0$.
- (2) O bé P i Q tenen una arrel comuna en $\overline{K}$ o bé $\deg P < n$ i $\deg Q < m$.

(3) O bé P i Q tenen un factor comú en $K[y]$ o bé $\deg P < n$ i $\deg Q < m$.

Demostració. Per demostrar l'equivalència entre (2) i (3) només cal observar que un polinomi minimal d'una arrel comuna és un factor comú i que qualsevol arrel d'un factor comú és una arrel comuna.

Demostrarem que (2) i (3) també són equivalents a la següent condició:

(4) $\exists M, N \in K[y]$ no nuls amb $\deg M < m$ i $\deg N < n$ tals que $MP + NQ = 0$.

Suposem que es compleix (3). Llavors, si $\deg P < n$ i $\deg Q < m$, només cal que agafem $M = Q$ i $N = -P$. Si F és un factor comú de P i Q , llavors agafem $M = Q/F$ i $N = -P/F$. En els dos casos, es verifica (4).

Recíprocament, demostrem que (4) $\implies$ (2). Si $\deg P < n$ i $\deg Q < m$, ja està. Suposem que $\deg P = n$. Llavors $P = a_0 \prod_{j=1}^h (y - \alpha_j)^{r_j}$, on $\alpha_1, \dots, \alpha_h \in \overline{K}$ són les arrels de P i $r_1, \dots, r_h$ són les seves multiplicitats. Com que estem suposant que $MP + NQ = 0$, el polinomi $\prod_{j=1}^h (y - \alpha_j)^{r_j}$ divideix NQ . Per tant, com a mínim un dels seus factors divideix Q , ja que $\deg N < n$. L'arrel corresponent és una arrel comuna. Si $\deg Q = m$, podem fer un argument anàleg.

Si prenem

$$\begin{aligned} N &= z_0 y^{n-1} + \dots + z_{n-1}, \\ M &= t_0 y^{m-1} + \dots + t_{m-1}, \end{aligned}$$

la igualtat $MP + NQ = 0$ correspon a un sistema de $n+m$ equacions lineals homogènies en les variables $z_0, \dots, z_{n-1}, t_0, \dots, t_{m-1}$. Aquest sistema té solució no trivial si, i només si, se satisfà (4). Es pot veure que el determinant d'aquest sistema és precisament $R(P, Q)$. Això demostra l'equivalència entre (1) i (4). $\square$

Si homogeneïtzem els polinomis P i Q

$$\begin{aligned} \overline{P} &= a_0 y_1^n + a_1 y_0 y_1^{n-1} + \dots + a_{n-1} y_0^{n-1} y_1 + a_n y_0^n \\ \overline{Q} &= b_0 y_1^m + b_1 y_0 y_1^{m-1} + \dots + b_{m-1} y_0^{m-1} y_1 + b_m y_0^m \end{aligned}$$

i definim la resultant de $\overline{P}$ i $\overline{Q}$ com

$$R(\overline{P}, \overline{Q}) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ b_0 & b_1 & \dots & b_{m-1} & b_m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \dots & b_{m-1} & b_m & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b_0 & b_1 & \dots & b_{m-1} & b_m \end{vmatrix}.$$

Aleshores tenim el següent resultat:

Corol·lari 2.29. $R(\overline{P}, \overline{Q}) = 0$ si, i només si, $\exists (\alpha, \beta) \in \overline{K}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tal que $\overline{P}(\alpha, \beta) = \overline{Q}(\alpha, \beta) = 0$.

Demostració. Amb la notació anterior, tenim que $\overline{P}(\alpha, \beta) = \overline{Q}(\alpha, \beta) = 0$ amb $\alpha \neq 0$ si, i només si, $P(\beta/\alpha) = Q(\beta/\alpha) = 0$. D'altra banda, $\overline{P}(0, \beta) = \overline{Q}(0, \beta) = 0$ amb $\beta \neq 0$ si, i només si, $a_0 = b_0 = 0$. Com que $R(\overline{P}, \overline{Q}) = R(P, Q)$, fent servir el Teorema 2.28 hem acabat la demostració. $\square$

2.5 Nombre de punts en corbes planes

En aquesta secció, veiem que qualsevol corba plana té infinits punts i, a continuació, demostrem, fent servir la teoria de la resultant, que dues corbes planes projectives o bé comparteixen una component irreductible i tenen infinits punts en comú o bé es tallen en un nombre finit de punts. Finalment, enunciem el Teorema de Bézout, que dona el nombre de punts d'intersecció de dues corbes que no comparteixen cap component irreductible.

Definició 2.30. Un polinomi $F \in \mathbb{C}[x, y]$ és primitiu (com a polinomi en y) si, i només si, vist com a element de $\mathbb{C}[x][y]$, $F = \sum_{i=0}^d a_i(x)y^i$, els seus coeficients $a_i(x)$ són coprimers.

Lema 2.31. Un polinomi $F \in \mathbb{C}[x, y]$ primitiu divideix a $G \in \mathbb{C}[x, y]$ en $\mathbb{C}(x)[y]$ si, i només si, F divideix a G en $\mathbb{C}[x, y]$.

Demostració. Si $G = AF$ amb $A \in \mathbb{C}(x)[y]$, llavors podem escriure $A = A'/P$ amb $A' \in \mathbb{C}[x, y]$ i $P \in \mathbb{C}[x]$ i obtenim $PG = A'F$. Si $\deg P = 0$, ja està. Si no, podem considerar una arrel a de P . Tindrem

$$0 = P(a)G(a, y) = A'(a, y)F(a, y) \in \mathbb{C}[y].$$

Necessàriament $F(a, y) \neq 0$, ja que F és primitiu i per tant els seus coeficients no poden tenir una arrel comuna. Per tant, a és una arrel comuna dels coeficients d' A' com a polinomi en la variable y , de manera que $x - a$ divideix A' en $\mathbb{C}[x, y]$. Aleshores, podem dividir els dos costats de la igualtat $PG = A'F$ per $x - a$. De fet, podem repetir aquest procés tants cops com faci falta fins que $\deg P = 0$. El recíproc és trivial. $\square$

Lema 2.32. Qualsevol corba plana C afí o projectiva conté infinits punts.

Demostració. En el cas afí, suposem que la corba és $C : f = 0$. Com que f és no constant, podem suposar (canviant de referència si cal) que $f(x, y) = a_0(x)y^d + \dots + a_d(x)$ amb $d \in \mathbb{Z}_{>0}$ i $a_0(x) \neq 0$. Aleshores, per a infinits valors $z \in \mathbb{C}$, $a_0(z) \neq 0$ i el polinomi en la variable y , $f(z, y)$, té com a mínim una arrel. Per tant, hi ha un punt de C d'abscissa z . En el cas projectiu, sabem pel Corol·lari 2.27 que C té algun punt. Per tant, la part afí també és no buida i podem aplicar el raonament anterior. $\square$

Proposició 2.33. Dues corbes C i C' de $\mathbb{P}^2$ o bé comparteixen una component irreductible i tenen infinits punts en comú o bé es tallen en un nombre finit de punts.

Demostració. Triem coordenades projectives x_0, x_1, x_2 tals que $[0 : 0 : 1]$ no pertanyi ni a C ni a C' . Prenem $x = x_1/x_0$ i $y = x_2/x_0$ com a coordenades afins en la carta afí 0-èssima. Com que la recta $x_0 = 0$ no pertany a cap de les dues corbes, no n'és una component irreductible. Sabem que C i C' comparteixen una component irreductible si, i només si les seves parts afins C_0 i C'_0 comparteixen una component irreductible. D'altra banda, com que la intersecció de $x_0 = 0$ amb les corbes és finita, la intersecció de les corbes és finita si, i només si, la intersecció de les seves parts afins és finita.

Siguin f i g les equacions afins de C_0 i C'_0 , respectivament, i siguin $d = \deg f$ i $d' = \deg g$. L'elecció de la referència ens garanteix que $d = \deg_y f$ i $d' = \deg_y g$. Considerem la resultant $R_y(f, g)$ dels polinomis f i g considerats com a polinomis en y de graus d i d' , respectivament. Aleshores $R_y(f, g) \in \mathbb{C}[x]$.

Suposem que $R_y(f, g) \equiv 0$ com a polinomi en x . Llavors, pel Teorema 2.28, f i g tenen un factor comú $h \in \mathbb{C}(x)[y]$ de grau positiu en y . Podem escriure $h = uh'/v$ amb $u, v \in \mathbb{C}[x]$ i $h' \in \mathbb{C}[x][y]$ primitiu. Llavors h' també té grau positiu en y i divideix a f i a g en $\mathbb{C}(x)[y]$. Pel Lema 2.31, les components irreductibles de la corba $h' = 0$ també ho són de C_0 i de C'_0 . Per tant, el conjunt $C_0 \cap C'_0$ és infinit pel Lema 2.32.

Suposem ara que $R_y(f, g) \neq 0$ com a polinomi en x . Fixem $a \in \mathbb{C}$ qualsevol. Per la tria de la referència, $f(a, y)$ té grau efectiu d i $g(a, y)$ té grau efectiu d' . Llavors, com que l'aplicació $\mathbb{C}[x, y] \rightarrow \mathbb{C}[x]$, $P(x, y) \mapsto P(a, y)$ és un homeomorfisme d'anells, $R_y(f, g)|_{x=a} = R(f(a, y), g(a, y))$. Pel Teorema 2.28, el terme de la dreta s'anul·la si, i només si, $f(a, y)$ i $g(a, y)$ tenen una arrel comuna en $\mathbb{C}$ (ja que $\mathbb{C}$ és algebraicament tancat). Per tant, $R_y(f, g)(a) = 0$ si, i només si, $\exists b \in \mathbb{C}$ tal que $f(a, b) = g(a, b) = 0$. En altres paraules, les abscisses dels punts d'intersecció de C_0 i C'_0 són les arrels d' $R_y(f, g)$. Com que $R_y(f, g)$ té un nombre finit d'arrels i com que per a cada arrel a el polinomi $f(a, y) \in \mathbb{C}[y]$ té com a màxim d arrels, hi haurà un nombre finit de punts en $C_0 \cap C'_0$. En particular, en aquest cas C_0 i C'_0 no tenen cap component irreductible en comú. $\square$

A continuació enunciaré el Teorema de Bézout, que és una versió refinada del resultat que acabem de demostrar. Ens diu en quants punts, comptats amb multiplicitat, es tallen dues corbes que no comparteixen cap component irreductible. Primer, però, cal definir la multiplicitat d'intersecció de dues corbes. Fer-ho en detall resulta força laboriós, però la idea és la següent:

Definició 2.34. *Donades dues corbes planes projectives $C : F = 0$ i $C' : F' = 0$ que no comparteixen cap component irreductible, es posa una referència de manera que en cada vertical $x = \lambda y$ hi hagi una única intersecció entre les corbes. Això és possible ja que, per la Proposició 2.33, hi ha un nombre finit de punts d'intersecció. Si $p = [x_0 : y_0 : z_0]$ és un punt d'intersecció de C i C' , la multiplicitat d'intersecció de C i C' en p es defineix com la multiplicitat de $[x_0 : y_0]$ com a arrel de la resultant $R_z(F, F')$.*

Teorema 2.35 (de Bézout). *Si C i C' són dues corbes planes projectives de graus d i d' que no comparteixen cap component irreductible, aleshores*

$$dd' = \sum_{p \in \mathbb{P}^2} [C \cdot C'].$$

Demostració. El grau de la resultant respecte de z de dos polinomis homogenis de graus d i d' és dd' . Per tant, la suma de les multiplicitats és dd' . $\square$

2.6 Punts singulars i rectes tangents

En aquesta secció definirem la recta tangent a un punt d'una hipersuperfície. Per fer-ho, primer ens cal definir la multiplicitat dels punts d'una hipersuperfície. Farem servir la definició de la multiplicitat d'un punt per definir els punts singulars. Aquests conceptes seran necessaris per introduir la corba polar i la corba dual en les properes seccions.

Definició 2.36. Sigui V una hipersuperfície de $\mathbb{P}^n$ i sigui $p \in \mathbb{P}^n$ un punt. La multiplicitat de p en V és el valor mínim de les multiplicitats d'intersecció de V amb les rectes per que passen per p . Denotarem la multiplicitat de p en V amb $e_p(V)$.

Observació 2.37. La multiplicitat de p en V és zero si, i només si, $p \notin V$. En cas contrari, $e_p(V) \geq 1$.

Definició 2.38. Diem que p és un punt singular si $e_p(V) > 1$. Diem que una hipersuperfície és singular si ho és en algun punt. Els punts d'una hipersuperfície que no són singulars s'anomenen punts simples o no singulars. Si $e_p(V) = 2$, a p se li diu punt doble, si $e_p(V) = 3$ se li diu punt triple, i així successivament.

Teorema 2.39. Un punt p d'una hipersuperfície $V : F = 0$ de $\mathbb{P}^n$ és singular si, i només si, s'anul·len en p totes les derivades de primer ordre d' F (és a dir, si F és singular).

Demostració. La hipersuperfície V és singular en $p = [a_0 : \dots : a_n]$ si, i només si, $e_p(V) > 1$. És a dir, si, i només si, $[V \cdot l] > 1$ per a qualsevol recta l per p . Siguin, doncs, $x_i = t_0 a_i + t_1 b_i \forall i = 0, \dots, n$ les equacions paramètriques d'una recta l qualsevol per p . Suposem que $l \not\subset V$. Si prenem t_0, t_1 com a coordenades projectives del punt $[x_0 : \dots : x_n]$ en l , llavors $p = [1 : 0]$ en aquestes coordenades. Amb aquesta notació, V és singular en p si, i només si, $\overline{F}(t_0, t_1) = F(t_0 a_0 + t_1 b_0, \dots, t_0 a_n + t_1 b_n) = t_1^2 G(t_0, t_1)$ per a tot $b_0, \dots, b_n \in \mathbb{C}$, on G és una forma de grau $d - 2$ en les variables t_0, t_1 . Per tant, si V és singular en p , llavors

$$\frac{\partial \overline{F}}{\partial t_1} = 2t_1 G(t_0, t_1) + t_1^2 \frac{\partial G(t_0, t_1)}{\partial t_1}$$

que avaluat en $p = [1 : 0]$ dona zero. Observem que

$$\left. \frac{\partial \overline{F}}{\partial t_1} \right|_{[1:0]} = D_{(b_0, \dots, b_n)} F(x_0, \dots, x_n) \Big|_{[a_0 : \dots : a_n]}$$

on $D_{\vec{v}} F$ denota la derivada direccional d' F en la direcció de $\vec{v}$. Per tant, si V és singular en p , totes les derivades de primer ordre d' F s'anul·len en p .

Recíprocament, si V no és singular en p , $\overline{F}(t_0, t_1) = t_1 G(t_0, t_1)$, on G és una forma binària de grau $d - 1$ que no té t_1 com a factor irreductible. Llavors

$$\begin{aligned} D_{(b_0, \dots, b_n)} F(x_0, \dots, x_n) \Big|_{[a_0 : \dots : a_n]} &= \left. \frac{\partial \overline{F}}{\partial t_1} \right|_{[1:0]} \\ &= \left(G(t_0, t_1) + t_1 \frac{\partial G(t_0, t_1)}{\partial t_1} \right) \Big|_{[1:0]} \\ &= G(1, 0) \neq 0. \end{aligned}$$

□

Definició 2.40. Una recta l que passa per $p \in V$ és tangent a V en p si, i només si, la multiplicitat d'intersecció d' l amb V en p és estrictament major que $e_p(V)$.

Proposició 2.41. Sigui p un punt d'una corba $C : F = 0$ de $\mathbb{P}^2$. Aleshores l'equació en les coordenades homogènies x_0, x_1, x_2

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_0} \right)_p x_0 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \right)_p x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2} \right)_p x_2 = 0 \quad (2.2)$$

és la identitat $0 = 0$ si, i només si, p és un punt singular de C . En cas contrari, és una equació de la recta tangent a C en p , que és única.

Demostració. El primer fet és conseqüència directa del Teorema 2.39. Per tant, suposem que l'equació (2.2) no és la identitat $0 = 0$ i sigui $p = [a_0 : a_1 : a_2]$ un punt no singular de C . Si $d = \deg C$, per la fórmula d'Euler tenim que

$$0 = dF(a_0, a_1, a_2) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_0} \right)_p a_0 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \right)_p a_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2} \right)_p a_2 \quad (2.3)$$

i, per tant, que p pertany a la recta l definida per l'equació (2.2). Sigui $q = [b_0 : b_1 : b_2] \neq p$. Les equacions paramètriques de la recta $l_q = p \vee q$ són

$$\begin{aligned} x_0 &= t_0 a_0 + t_1 b_0 \\ x_1 &= t_0 a_1 + t_1 b_1 \\ x_2 &= t_0 a_2 + t_1 b_2. \end{aligned}$$

Podem prendre t_0 i t_1 com a coordenades homogènies de $[x_0 : x_1 : x_2]$ en la recta l_q . En particular, en aquestes coordenades $p = [1 : 0]$ i $q = [0 : 1]$. La intersecció $l_q \cap C$ ve donada per l'equació $\bar{F}(t_0, t_1) = 0$ on

$$\bar{F}(t_0, t_1) = F(t_0 a_0 + t_1 b_0, t_0 a_1 + t_1 b_1, t_0 a_2 + t_1 b_2).$$

Observem que $\bar{F}$ té t_1 com a factor, ja que $p \in C$, i l_q és tangent a C en p si, i només si, el factor t_1 té multiplicitat com a mínim 2. Equivalentment, l_q és tangent a C en p si, i només si,

$$0 = \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial t_1} \right)_{[1:0]} = \left(\frac{\partial F}{\partial x_0} \right)_p b_0 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \right)_p b_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2} \right)_p b_2,$$

és a dir, si, i només si, $q \in l$. Això demostra que l és la única recta tangent a C en p . $\square$

Definició 2.42. *Sigui $p \in C$ un punt simple d'una corba de $\mathbb{P}^2$. Aleshores, per la Proposició anterior, existeix una única recta tangent T en p . Necessàriament $[C \cdot T]_p \geq 2$. Els punts simples amb $[C \cdot T]_p > 2$ s'anomenen punts d'inflexió de C . $[C \cdot T]_p - 2$ és l'ordre del punt d'inflexió.*

Definició 2.43. *Una cúspide ordinària d'una corba C és un punt doble p en el qual C té una única tangent T amb $[C \cdot T]_p = 3$.*

Definició 2.44. *Un punt singular ordinari o una singularitat ordinària d'una corba C és un punt de multiplicitat $e \geq 1$ en els quals C té e tangents diferents. Observem que si $e = 1$ en realitat són punts no singulars. Si $e = 2$, s'anomenen nodes.*

2.7 Corba polar

En aquesta secció introduïrem el concepte de la corba polar. Aquesta corba es pot interpretar com el conjunt de rectes tangents a una corba que passen per un punt fixat, que són punts de l'espai projectiu dual. A més, veurem que la intersecció d'una corba i la polar ens permet localitzar les seves singularitats.

Definició 2.45. *Fixada una referència projectiva a $\mathbb{P}^2$, sigui $C : F = 0$ una corba plana de grau d i sigui $q = [a_0 : a_1 : a_2] \in \mathbb{P}^2$ un punt. El polinomi*

$$\partial_q F = a_0 \frac{\partial F}{\partial x_0} + a_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial F}{\partial x_2}$$

defineix una corba $\mathcal{P}_q(C) : \partial_q F = 0$ que s'anomena la polar de C respecte a q . Si $\partial_q F = 0$, diem que la polar no està ben definida. En qualsevol cas, direm que $\partial_q F$ és una equació de la polar.

Observació 2.46. Es pot demostrar que la corba polar i el fet que estigui ben definida no depenen de la referència fixada. Per tant, sempre podem suposar que $q = [0 : 0 : 1]$, de manera que una equació de la polar és simplement $\partial F / \partial x_2 = 0$.

Proposició 2.47. *La corba polar $\mathcal{P}_q(C)$ no està ben definida si, i només si, totes les components irreductibles de C són rectes que passen per q . En particular, les corbes polars de qualsevol corba irreductible de grau $d > 1$ estan ben definides.*

Demostració. Per l'Observació 2.46, podem suposar que $q = [0 : 0 : 1]$ i que, per tant, $\partial F / \partial x_2$ és una equació de la polar. Llavors l'equació és la identitat $0 = 0$ si, i només si, l'equació F de C és un polinomi homogeni en les variables x_0 i x_1 . Com que un polinomi homogeni en dues variables sobre $\mathbb{C}$ és producte de factors lineals, ja hem acabat. $\square$

Proposició 2.48. *Sigui C una corba de $\mathbb{P}^2$ de grau $d > 1$ i sigui $q = [a_0 : a_1 : a_2] \in \mathbb{P}^2$ un punt. Suposem que $\mathcal{P}_q(C)$ està ben definida. Aleshores, un punt $p \in \mathbb{P}^2$ pertany a $\mathcal{P}_q(C) \cap C$ si, i només si*

- (a) p és un punt singular de C o bé
- (b) p és un punt simple de C i la tangent a C en p passa per q .

Demostració. El punt p pertany a $\mathcal{P}_q(C)$ si, i només si

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_0} \right)_p a_0 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \right)_p a_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2} \right)_p a_2 = 0.$$

Clarament, si p és un punt singular o si és un punt de la tangent a C per q , l'equació anterior se satisfà. Recíprocament, si es compleix l'equació anterior, aleshores o bé totes les derivades parcials s'anul·len en p i per tant p és un punt singular o bé alguna de les derivades parcials és no nul·la i per tant p és un punt simple. En el darrer cas, per la Proposició 2.41, la tangent a C en p passa per q . $\square$

Lema 2.49. *Sigui C una corba plana irreductible de grau $d > 1$. Aleshores, per a qualsevol punt $q \in \mathbb{P}^2$, $\mathcal{P}_q(C)$ està ben definida i el conjunt $\mathcal{P}_q(C) \cap C$ és un conjunt finit.*

Demostració. La polar $\mathcal{P}_q(C)$ està ben definida per la Proposició 2.47. La corba C no és una component irreductible de $\mathcal{P}_q(C)$, ja que $\deg C > \deg \mathcal{P}_q(C)$. Aleshores $\mathcal{P}_q(C)$ i C no comparteixen cap component irreductible i, pel Teorema de Bézout 2.35, $\mathcal{P}_q(C) \cap C$ és un conjunt finit. $\square$

2.8 Corba dual

La corba dual es pot entendre com el conjunt de rectes tangents a una corba donada. Aquestes rectes corresponen a punts de l'espai projectiu dual. La dificultat rau en demostrar que la corba dual és en si mateixa una corba plana en l'espai projectiu dual. Per fer-ho, seguirem el mètode descrit en el llibre *Algebraic curves: an introduction to algebraic geometry* de Fulton [Ful69, ex. 6.47].

Definició 2.50. *Un ideal I de $\mathbb{C}[x, y, z]$ és homogeni si està generat per polinomis homogenis.*

Sigui $X : F = 0$ una corba plana projectiva irreductible de grau $d > 1$. Sigui $\Gamma(F) = \mathbb{C}[x, y, z]/(F)$ i siguin $\overline{F_x}$, $\overline{F_y}$ i $\overline{F_z}$ les classes d' $F_x = \partial F/\partial x$, $F_y = \partial F/\partial y$ i $F_z = \partial F/\partial z$, respectivament. Definim el morfisme de $\mathbb{C}$ -àlgebres $\alpha : \mathbb{C}[u, v, w] \rightarrow \Gamma(F)$ a través de l'assignació $\alpha(u) = \overline{F_x}$, $\alpha(v) = \overline{F_y}$ i $\alpha(w) = \overline{F_z}$.

Sigui $I = \ker \alpha$. Observem primer de tot que I és un ideal, ja que és el nucli d'un morfisme de $\mathbb{C}$ -àlgebres. Com que F és irreductible, $\Gamma(F)$ és una $\mathbb{C}$ -àlgebra íntegra (és a dir, sense divisors del zero). Per tant, tenim un morfisme injectiu $\mathbb{C}[u, v, w]/I \hookrightarrow \Gamma(F)$, de manera que $\mathbb{C}[u, v, w]/I$ és una $\mathbb{C}$ -àlgebra íntegra, ja que és isomorf a una subàlgebra de $\Gamma(F)$, que és íntegra. Això equival a dir que I és un ideal primer.

Sigui $G \in I$. Aleshores, $G(F_x, F_y, F_z) = HF$. Per tant, si $p \in X$ és un punt no singular, $G(F_x(p), F_y(p), F_z(p)) = H(p)F(p) = 0$, de manera que $[F_x(p) : F_y(p) : F_z(p)] \in V(I)$. Per tant, $V(I)$ conté els punts del dual corresponent a les rectes tangents als punts simples d' X . En particular, $V(I) \neq \emptyset$.

Anem a veure que $V(I)$ no és un punt. Suposem que $V(I) = \{[a : b : c]\}$ amb $a \neq 0$, per exemple. Aleshores, $I = (bu - av, cu - aw)$ i, per tant, $bF_x - aF_y = H_1F$ i $cF_x - aF_z = H_2F$. Per la fórmula d'Euler tenim $xF_x + yF_y + zF_z = dF$. Per tant

$$xF_x + y \left(\frac{1}{a}(bF_x - H_1F) \right) + z \left(\frac{1}{a}(cF_x - H_2F) \right) = dF.$$

Reagrupant termes, tenim

$$\frac{1}{a}(ax + by + cz)F_x = (H_1/a + H_2/a + d)F.$$

Com que F és irreductible, això implica que o bé F divideix F_x (no pot ser ja que el grau d' F_x és menor que el grau d' F) o bé F divideix $ax + by + cz$, però això tampoc pot ser ja que per hipòtesi $\deg F = d > 1$. Per tant, $V(I) \neq \{[a : b : c]\}$. Com a conseqüència, $V(I)$ tampoc pot estar format per un conjunt finit de punts, ja que és irreductible.

D'altra banda, existeix $1 \neq G \notin I$, ja que si no $I = (1)$ i per tant $V(I) = \mathbb{P}^2$. Això voldria dir que totes les rectes serien tangents a X . Sabem que això no és veritat, ja que X conté infinits punts simples amb una única recta tangent i un nombre finit de bitangents. Si G descompon en factors irreductibles com $G = F_1 \cdot \dots \cdot F_m$, llavors fent servir que I és primer, tenim que $F_i \in I$ per a algun $i \in \{1 \dots m\}$. Si hi hagués algun $H \in I$ que no tingués F_i com a factor irreductible, llavors $V(I)$ tindria un nombre finit de punts pel Teorema de Bézout 2.35, però acabem de veure que això no pot ser. Per tant, $I = (F_i)$. Aquest F_i el denotarem amb F^* .

El polinomi F^* és homogeni perquè ho és F . Pel Teorema de Bézout 2.35, $V(I)$ és l'única corba irreductible que conté totes les rectes tangents als punts simples d' X . Aquesta corba s'anomena la *corba dual* d' X i es denota amb X^* .

Definició 2.51. *Sigui X una corba plana projectiva i sigui $p \in X$ un punt simple. Pel Teorema de la funció implícita 2.19, es pot definir una aplicació holomorfa*

$$\begin{aligned} \bar{x} : V &\rightarrow \mathbb{P}^2 \\ t &\mapsto [\bar{x}_1(t) : \bar{x}_2(t) : x_3(t)] \end{aligned}$$

en un entorn obert $V \subset \mathbb{C}$, de manera que existeix un entorn obert $U \subset \mathbb{P}^2$ de p tal que $U \cap |X| = \{[\bar{x}_1(t) : \bar{x}_2(t) : x_3(t)] \mid t \in V\}$. Diem que $\bar{x}$ és una parametrització local d' X en p .

Teorema 2.52. *Sigui $X : F = 0$ una corba plana projectiva irreductible de grau $d > 1$. Aleshores $(X^*)^* = X$.*

Demostració. Siguin x_1, x_2, x_3 coordenades homogènies en $\mathbb{P}^2$. Sigui $\bar{x}$ una parametrització local d' X en un punt simple $p \in X$ definida en un obert $V \subset \mathbb{C}$. Aleshores $F(\bar{x}(t)) = 0$ per a tot $t \in V$. Derivant aquesta expressió respecte de t , obtenim

$$\sum_i \bar{x}'_i F_i(\bar{x}) = 0,$$

on F_i denota la derivada parcial respecte la i -èssima variable. D'altra banda, per la fórmula d'Euler,

$$\sum \bar{x}_i F_i(\bar{x}) = dF(\bar{x}) = 0.$$

Si $\bar{u}_i = F_i(\bar{x})$, llavors $\bar{u}$ és una parametrització local d' X^* . Les relacions anteriors es poden expressar com

$$\sum_i \bar{x}'_i \bar{u}_i = 0, \quad \sum_i \bar{x}_i \bar{u}_i = 0.$$

Si derivem la segona expressió i li restem la primera al resultat, obtenim que

$$\sum_i \bar{x}_i \bar{u}'_i = 0.$$

Si $\bar{y}_i = F_i^*(\bar{u})$, llavors $\bar{y}$ és una parametrització local d' $(X^*)^*$. Igual que abans, veiem que

$$\sum_i \bar{u}'_i \bar{y}_i = 0, \quad \sum_i \bar{u}_i \bar{y}_i = 0.$$

Per tant, sempre i quan els $\bar{u}'_i$ no siguin proporcionals als $\bar{u}_i$ (no ho són, com es demostra detalladament a la pàgina 153 de [Wal78]), $\bar{x}_i$ i $\bar{y}_i$ seran proporcionals ja que són solució de les mateixes equacions

$$\sum_i z_i \bar{u}'_i = 0, \quad \sum_i z_i \bar{u}_i = 0.$$

Això implica que tots els punts simples d' X són punts de $(X^*)^*$. Com que n'hi ha infinits, pel Teorema de Bézout 2.35, X i $(X^*)^*$ comparteixen una component irreductible. Finalment, com que les dues són corbes irreductibles, tenim que $X = (X^*)^*$. $\square$

2.9 Les fórmules de Plücker

Les fórmules de Plücker són un conjunt d'equacions que relacionen diferents propietats de les corbes planes. Aquestes fórmules proporcionen invariants i restriccions que són molt útils en l'estudi de corbes planes. En aquesta secció, enunciem la primera fórmula de Plücker.

Definició 2.53. *Una corba de Plücker és una corba plana projectiva C amb les següents propietats:*

- (a) C és irreductible i de grau ≥ 2 .
- (b) Les singularitats de C i de C^* són, com a molt, nodes o cúspides ordinàries.

Proposició 2.54 (Primera fórmula de Plücker). *Si C és una corba de Plücker de grau $d \geq 2$ amb δ nodes i κ cúspides ordinàries. Si $q \in \mathbb{P}^2$ no pertany a C ni a cap de les tangents a C en els seus punts singulars, aleshores el número de tangents a C que passen per q , que correspon al grau de la corba dual C^* , és*

$$d^* = d(d-1) - 2\delta - 3\kappa. \quad (2.4)$$

Cada tangent T es compta amb multiplicitat $\sum_p ([C \cdot T]_p - 1)$, on la suma és sobre tots els punts de contacte de C amb T .

Observació 2.55. Com que $(C^*)^* = C$, la Proposició 2.54 aplicada a la corba dual C^* ens dona la igualtat

$$d = d^*(d^* - 1) - 2\delta^* - 3\kappa^*, \quad (2.5)$$

on δ^* i κ^* són el nombre de nodes i de cúspides ordinàries de la corba dual, respectivament. Es pot veure que hi ha una correspondència entre les κ^* cúspides ordinàries de C^* i els f punts d'inflexió de C , i també entre els d^* nodes de C^* i les b bitangents de C (i.e., rectes T de $\mathbb{P}^2$ que són tangents a dos punts diferents de C). És a dir, tenim que

$$\kappa^* = f, \quad \delta^* = b,$$

on f és el nombre de punts d'inflexió de C i b és el nombre de bitangents.

Observació 2.56. El Teorema de Bézout 2.35 implica que una corba plana té un nombre finit de punts singulars, ja que una corba i les seves derivades parcials es tallen en un nombre finit de punts. Aplicant aquest raonament a la corba dual, veiem que hi ha un nombre finit d'inflexions i de bitangents.

Com a aplicació de la Proposició 2.54, podem demostrar el següent resultat:

Proposició 2.57. *Una corba plana no singular de grau d té gènere*

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}. \quad (2.6)$$

Demostració. Si C és una corba plana no singular de grau d . Fixat un punt $p \in \mathbb{P}^2$ general, considerem la projecció $\pi : C \rightarrow \mathbb{P}^1$ des de p . Per la Proposició 2.54, l'aplicació π com a revestiment de $\mathbb{P}^1$ té $d(d-1)$ punts de ramificació diferents, tots ells de multiplicitat 2 (ho veurem en més detall en el Capítol 3). Llavors, com que el gènere de $\mathbb{P}^1$ és $g(\mathbb{P}^1) = 0$, per la Fórmula de Hurwitz (Teorema 1.38) tenim

$$2g(C) - 2 = d(-2) + d(d-1). \quad (2.7)$$

Aïllant $g(C)$, trobem l'expressió (2.6). □

2.10 Estructura de grup de les cúbiques

En aquesta secció, dotarem d'estructura de grup al conjunt de punts d'una cúbica irreductible i no singular. Per fer-ho, caldrà definir la suma de punts i veure que compleix les propietats d'una operació de grup. Com que l'estructura de grup de les cúbiques no és el punt central d'aquest treball, enunciaré dos teoremes necessaris per demostrar aquestes propietats sense donar-ne la demostració, que es pot trobar en el capítol III 9 de [Bix06].

Definició 2.58. Sigui C una cúbica irreductible i no singular, i siguin $P, Q \in C$ dos punts no necessàriament diferents. Definim la recta PQ de la següent manera:

- Si $P \neq Q$, PQ és la única recta que passa per P i per Q .
- Si $P = Q$, llavors la recta PQ és la recta tangent a C en P .

Definició 2.59. Sigui C una cúbica irreductible i no singular, i siguin $P, Q \in C$. La tercera intersecció de la recta PQ amb C és el punt $R \in C$ tal que la recta PQ interseca C en P, Q i R amb la multiplicitat corresponent. Denotem amb $P * Q$ la tercera intersecció de PQ amb C .

Observació 2.60. Pel Teorema de Bézout 2.35, aquest punt existeix i és únic.

Teorema 2.61. [Bix06, Teorema 9.2] Sigui C una cúbica irreductible i no singular i siguin $P, Q, R \in C$ tres punts de C , no necessàriament diferents. Aleshores:

- $R = P * Q$ si, i només si, existeix una recta l que interseca C en P, Q i R amb la multiplicitat corresponent.
- Si $R = P * Q$, llavors $Q = P * R$ i $R = P * Q$.

Definició 2.62. Sigui C una cúbica irreductible i no singular i sigui $O \in C$ un punt d'inflexió. Siguin P i Q dos punts de C (no necessàriament diferents). Aleshores, si $S = P * Q$, es defineix la suma de P i Q com $P + Q = O * S$.

La Figura 4 mostra com fer gràficament la suma de punts d'una cúbica. En particular, la Figura 4a mostra el cas en el qual P i Q són punts diferents, la Figura 4b mostra el cas en el qual sumem un punt P amb ell mateix i la Figura 4c mostra el cas en el qual sumem un punt P qualsevol amb O . En el darrer cas, el resultat és el propi punt P .

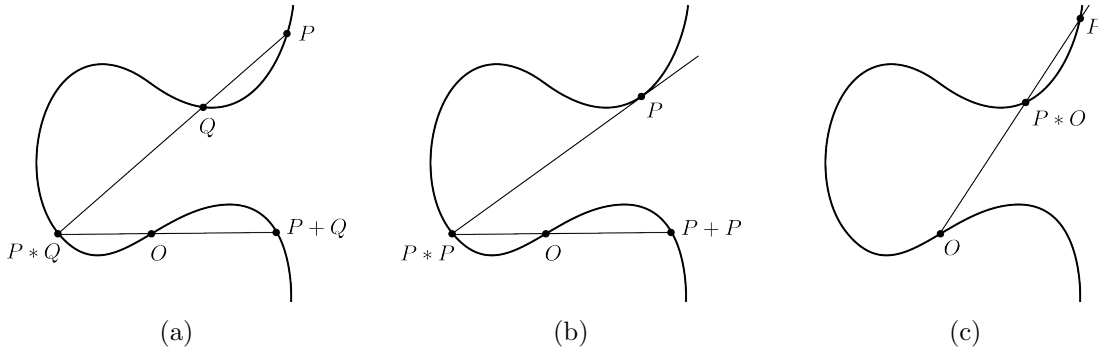


Figura 4: Suma de punts en una cúbica.

Proposició 2.63. [Bix06, Teorema 9.6] Sigui C una cúbica irreductible i no singular. Siguin E, F, G i H punts de C (no necessàriament diferents). Siguin $W = E * F$ i $X = G * H$, respectivament, i siguin $Y = E * G$ i $Z = F * H$, respectivament. Aleshores, $W * X$ i $Y * Z$ són el mateix punt (cf. Figura 5).

Teorema 2.64. Els punts de C formen un grup abelià amb la suma de la Definició 2.62.

Demostració. Anem a veure que es compleixen les propietats d'una operació de grup:

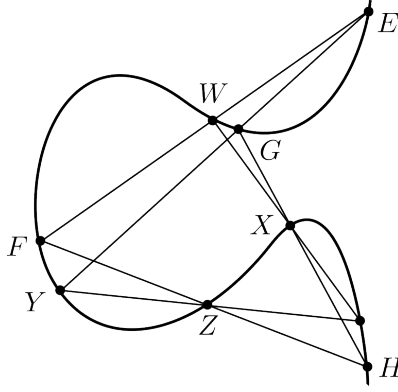


Figura 5: Representació gràfica del Teorema 2.63.

- Commutativa. Clarament, $P+Q = Q+P$, ja que les rectes PQ i QP són la mateixa.
- Element neutre. L'element neutre per la suma és O . Efectivament, si $P \in C$ i $S = O * P$, llavors $OS = OP$ i, per tant, $P = O * S$, de manera que $P + O = P$ (Figura 4c).
- Element invers. Sigui $P \in C$ un punt i sigui $V = P * O$. Aleshores, $S = P * V = O$. Llavors, $P + V = O * S = O * O$. Aquest punt és O , ja que O és un punt d'inflexió de C i, si T és la recta tangent a C en O , $[C \cdot T]_O = 3$. Per tant, $P + V = O$ de manera que $-P = V$.
- Associativa. Siguin $P, Q, R \in C$ tres punts. Volem veure que $(P + Q) + R = P + (Q + R)$. Sigui $S = P * Q$. Tenim que $P + Q = O * S$. Si $T = (P + Q) * R$, llavors $(P + Q) + R = O * T$. Anàlogament, si $U = Q * R$, llavors $Q + R = O * U$. Si $V = P * (Q + R)$, llavors $P + (Q + R) = O * V$.

Per demostrar que $(P + Q) + R = P + (Q + R)$, hem de veure que $O * T = O * V$. Això equival a veure que $T = V$, és a dir, que $(P + Q) * R = P * (Q + R)$. Podem aplicar la Proposició 2.63 prenent com a punts E, F, G i H els punts Q, S, U i O , respectivament. Per una banda, tenim $P = Q * S$ i $Q + R = U * O$, que corresponen als punts W i X de la Proposició. Per l'altra, tenim $R = Q * U$ i $P + Q = S * O$, que corresponen als punts Y i Z de la Proposició. Per tant, tenim que $P * (Q + R) = (P + Q) * R$, com volíem veure.

□

Lema 2.65. Siguin $P, Q, R \in C$. Si $P + Q + R = O$, llavors P, Q, R estan alineats.

Demostració. Efectivament,

$$\begin{aligned}
 P + Q + R = O &\iff ((P + Q) * R) * O = O \\
 &\iff (P + Q) * R = O \\
 &\iff ((P * Q) * O) * R = O \\
 &\iff (P * Q) * O = R * O \\
 &\iff P * Q = R
 \end{aligned}$$

□

3 Determinació de corbes planes a partir dels punts discriminants

En aquest darrer capítol, ens centrarem en l'article *Recovery of Plane Curves from Branch Points* [Ago+23]. Començarem descrivint el problema que es planteja i trobarem el nombre de solucions que té en els casos de corbes planes projectives de grau $d \leq 4$.

3.1 Descripció del problema

Es considera l'aplicació $\pi : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ definida per $\pi[x : y : z] = [x : y]$. Geomètricament, això correspon a una projecció des del punt $p = [0 : 0 : 1]$. L'aplicació π es restringeix a una corba plana projectiva no singular reduïda $X : A = 0$ de grau d , on

$$A(x, y, z) = \sum_{i+j+k=d} \alpha_{ijk} x^i y^j z^k. \quad (3.1)$$

Observació 3.1. Podem suposar que $p \notin X$. A més, per l'Observació 2.56, podem suposar que si T és una recta tangent a X que passa per p , llavors T és tangent a X en un únic punt q i $[C \cdot T]_q = 2$.

Definició 3.2. Una projecció $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ des de p que compleix les condicions anteriors s'anomena una projecció simple.

Lema 3.3. Amb la notació anterior, π és una aplicació holomorfa. L'aplicació π és ramificada en $q \in X$ si, i només si, $(\partial A / \partial z)(q) = 0$.

Demostració. Sigui $q = [x_0 : y_0 : z_0] \in X$. Com que $p = [0 : 0 : 1] \notin X$, necessàriament $x_0 \neq 0$ o $y_0 \neq 0$. Suposem, per exemple, que $x_0 \neq 0$. En particular, podem suposar que $x_0 = 1$. En un entorn de q , X és homeomorfa a la corba plana afí $X_0 : f = 0$, on $f(y, z) = A(1, y, z)$, a través de l'aplicació $[x : y : z] \mapsto (y/x, z/x)$.

Si $(\partial A / \partial z)(q) \neq 0$, llavors $(\partial f / \partial z)(y_0, z_0) \neq 0$. Aleshores, pel Teorema de la funció implícita 2.19, existeix un entorn V de y_0 tal que existeix una única funció holomorfa $g : V \rightarrow \mathbb{C}$ que compleix $g(y_0) = z_0$ i $f(y, g(y)) = 0 \forall y \in V$. Per tant, la projecció en la primera variable és una carta local d' X_0 en un entorn de (y_0, z_0) . Consegüentment, l'aplicació definida per $\phi_1([x : y : z]) = y/x$ dona una carta local d' X en un entorn de q . D'altra banda, l'aplicació definida per $\phi_2([x : y]) = y/x$ dona una carta de $\mathbb{P}^1$ en un entorn de $\pi(q)$. En aquestes cartes, l'aplicació π es pot expressar com $w = t$, on t és la coordenada local en X en un entorn de q i w és la coordenada local en $\mathbb{P}^1$ en un entorn de $\pi(q)$. Pel Lema 1.21, $\text{mult}_p(\pi) = 1$. És a dir, q no és un punt de ramificació.

Ara suposem que $(\partial A / \partial z)(q) = 0$ i, per tant, $(\partial f / \partial z)(y_0, z_0) = 0$. Com que X és no singular, $(\partial f / \partial y)(y_0, z_0) = (\partial A / \partial y)(1, y_0, z_0) \neq 0$. Pel Teorema de la funció implícita 2.19, existeix un entorn V de z_0 tal que existeix una única funció holomorfa $g : V \rightarrow \mathbb{C}$ que compleix $g(z_0) = y_0$ i $f(g(z), z) = 0 \forall z \in V$. Per tant, la projecció en la segona variable és una carta local d' X_0 en un entorn de (y_0, z_0) . Consegüentment, l'aplicació definida per $\phi_1([x : y : z]) = z/x$ dona una carta d' X en un entorn de q i $\phi_1(q) = z_0$. Igual que en el cas anterior, l'aplicació definida per $\phi_2([x : y]) = y/x$ dona una carta de $\mathbb{P}^1$ en un entorn de $\pi(q)$. En aquestes cartes, l'aplicació π es pot expressar com $w = g(t)$, on t és la coordenada local en X en un entorn de q i w és la coordenada local en $\mathbb{P}^1$ en

un entorn de $\pi(q)$. Observem que $f(g(z), z)$ és idènticament zero en un entorn de z_0 . Derivant respecte de z , tenim que en un entorn de z_0

$$0 = \frac{d(f(g(z), z))}{dz} = \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) (g(z), z) g'(z) + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) (g(z), z).$$

Per hipòtesi, el segon terme de la suma és igual a zero en z_0 . A més, sabem que $(\partial f / \partial y)(g(z_0), z_0) = (\partial f / \partial y)(y_0, z_0) \neq 0$. Per tant, $g'(z_0) = 0$. Aleshores, pel Lema 1.21, π és ramificada en q . $\square$

Definició 3.4. *Sigui A una forma ternària de grau d . El discriminant d' A respecte de z és la resultant d' A i $\partial A / \partial z$*

$$\text{discr}_z(X) = R_z(A, \partial A / \partial z).$$

El discriminant $\text{discr}_z(X)$ és un polinomi homogeni de grau $d(d-1)$ en les variables x i y . Sigui $X : A = 0$ una corba plana projectiva. El discriminant d' X respecte de z és el discriminant d' A respecte de z i està definit llevat de producte per una constant no nul·la.

Observació 3.5. Recordem que $\partial A / \partial z$ és l'equació de la polar de $X : A = 0$ respecte de $p = [0 : 0 : 1]$. El discriminant s'anul·la en $[x_0 : y_0] \in \mathbb{P}^1$ si, i només si, existeix $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $[x_0 : y_0 : z_0]$ és un zero d' A i de $\partial A / \partial z$. En aquest cas, recordant la caracterització dels punts de tall d'una corba i la polar de la Proposició 2.48, tenim que la recta tangent a X en $[x_0 : y_0 : z_0]$ passa per $p = [0 : 0 : 1]$, ja que X és no singular. Per tant, donat $[x_0 : y_0] \in \mathbb{P}^1$, les condicions següents són equivalents:

- (a) $[x_0, y_0] \in \mathbb{P}^1$ és un punt discriminant de π ,
- (b) $\exists z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $[x_0 : y_0 : z_0]$ és un punt de ramificació de π ,
- (c) $\exists z_0 \in \mathbb{C}$ tal que la recta que passa per $[x_0 : y_0 : z_0]$ i per $p = [0 : 0 : 1]$ és tangent a X ,
- (d) $(\text{disc}_z(X))(x_0, y_0) = 0$.

Per la primera fórmula de Plücker (Proposició 2.54) i tenint en compte l'Observació 3.1, el nombre de punts de ramificació de π és $d(d-1)$. Com que totes les rectes tangents a X que passen per p són tangents a X en un únic punt, el nombre de punts discriminants de π també és $d(d-1)$.

Pel Teorema de Bézout 2.35, el nombre d'antiimatges d'un punt no discriminant és d , ja que una corba plana projectiva de grau d i una recta es tallen en d punts, comptats amb multiplicitat. Per tant, hem demostrat el següent resultat:

Proposició 3.6. *L'aplicació π és un revestiment ramificat de grau d de $\mathbb{P}^1$ que té $d(d-1)$ punts discriminants, tots ells diferents.*

El propòsit de l'article *Recovery of Plane Curves from Branch Points* és recuperar una corba X a partir dels punts discriminants d'una projecció simple $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^1$. De totes maneres, per l'Observació 3.5, donar els $d(d-1)$ punts discriminants de l'aplicació π equival a donar una forma binària de grau $d(d-1)$ (i.e., el discriminant d' X respecte de z). Per tant, aquest problema es pot enunciar de la següent manera:

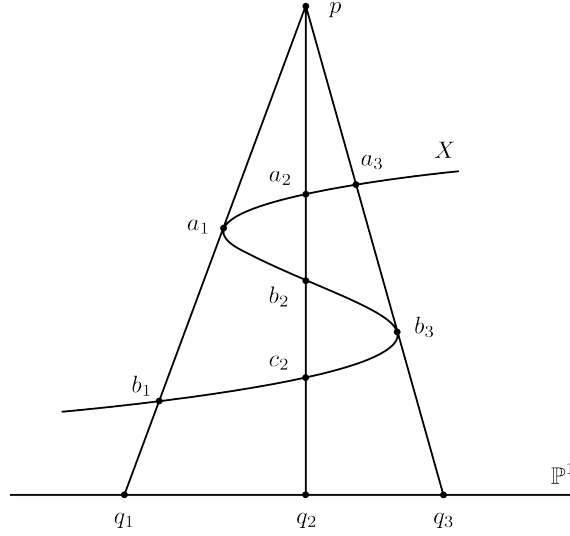


Figura 6: L'aplicació π envia els punts a_i, b_i i c_i de la cúbrica X als punts q_i de $\mathbb{P}^1$. En aquest exemple, els punts q_1 i q_3 només tenen dues antiimatges i, per tant, són punts discriminants. Com que les rectes de projecció són tangents a X en a_1 i b_3 , aquests dos punts són punts de ramificació.

Problema 3.7. Donada una forma binària

$$B(x, y) = \sum_{i+j=d(d-1)} \beta_{ij} x^i y^j$$

de grau $d(d-1)$ que té $d(d-1)$ zeros diferents sobre $\mathbb{P}^1$, volem trobar totes les corbes planes projectives no singulars reduïdes $\hat{X} : \hat{A} = 0$ de grau d tals que $p \notin \hat{X}$ i $\text{discr}_z(\hat{X}) = B$ (llevat de producte per una constant no nul·la).

Volem que la corba sigui no reduïda ja que, si no, el seu discriminant respecte de z seria idènticament zero.

Teorema 3.8. *Si A és una forma ternària de grau d . Llavors, $\text{discr}_z(A) = 0$ si, i només si, A és no reduïda.*

Demostració. Recordem que $\text{discr}_z(A) = R_z(A, \partial A / \partial z)$. Aleshores, $\text{discr}_z(A)(u, v)$ és idènticament zero si, i només si, per a tot $u, v \in \mathbb{C}$ existeix $w \in \mathbb{C}$ tal que $A(u, v, w) = (\partial A / \partial z)(u, v, w) = 0$.

Si A té un factor irreductible de multiplicitat ≥ 2 , el polinomi en una variable $\tilde{A}(z) = A(u, v, z)$ també en té un. És a dir, $\tilde{A}(z) = F(z)G(z)^2$ per a certs $F, G \in \mathbb{C}[z]$, on G és un polinomi irreductible. Per tant,

$$\left(\frac{\partial A}{\partial z} \right) (u, v, z) = \tilde{A}'(z) = F'(z)G(z)^2 + 2F(z)G(z)G'(z) = (F'(z) + 2F(z)G'(z))G(z).$$

Aleshores, per a qualsevol $w \in \mathbb{C}$ que sigui arrel de G , $A(u, v, w) = (\partial A / \partial z)(u, v, w) = 0$. Per tant, $\text{discr}_z(A)(u, v) = 0$ per a tot $u, v \in \mathbb{C}$.

Recíprocament, si $\text{discr}_z(A) = 0$, llavors per a tot $u, v \in \mathbb{C}$ existeix $w \in \mathbb{C}$ tal que $A(u, v, w) = (\partial A / \partial z)(u, v, w) = 0$. Això implica que hi ha infinits punts de la corba $V(A)$ tals que la tangent a aquests punts passa pel punt $p = [0 : 0 : 1]$. Si la corba és reduïda, això no pot ser. $\square$

Observació 3.9. La Proposició 2.4 de *Recovery of Plane Curves from Branch Points* [Ago+23] diu que les corbes que són singulars en $p = [0 : 0 : 1]$ també tenen discriminant idènticament zero, però això no és cert. Per exemple, la forma $A(x, y, z) = xyz^2 + x^3z + y^4$ és singular en p i té discriminant $\text{discr}_z(A) = -x^7y + 4x^2y^6$, que no és idènticament zero.

Les corbes planes projectives de grau d es poden interpretar com a punts de $\mathbb{P}^{\binom{d+2}{2}-1}$, ja que són polinomis formats per la suma de $\binom{d+2}{2} - 1$ termes de grau d , definits llevat de producte per una constant no nul·la. De manera semblant, els polinomis discriminants es poden interpretar com a punts de $\mathbb{P}^{d(d-1)}$. Per tant, el procés de passar d'una corba als seus punts discriminants defineix una aplicació

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^{\binom{d+2}{2}-1} &\dashrightarrow \mathbb{P}^{d(d-1)} \\ X &\mapsto \text{discr}_z(X), \end{aligned} \quad (3.2)$$

on la fletxa discontinua significa que és una aplicació anomenada racional, definida en un obert de Zariski de l'espai projectiu (és a dir, en el complementari d'un conjunt algebraic). El discriminant de la corba $X : A = 0$ respecte de z , $\text{disc}_z(X) \in \mathbb{C}[x, y]$, és homogeni de grau $2d-1$ en els coeficients d' A . Com que està definit llevat de producte per una constant no nul·la, podem dividir-lo per α_{00d} , que és diferent de zero ja que $p \notin X$. D'aquesta manera, el grau passa a ser $2d-2$. Per tant, el Problema 3.7 consisteix a resoldre un sistema de $d(d-1) + 1$ equacions polinòmiques de grau $2d-2$ en $\binom{d+2}{2}$ incògnites (els coeficients d' A).

No existeix una única solució al Problema 3.7, ja que $\text{discr}_z(X)$ és invariant sota l'acció del subgrup $\mathcal{G}$ de $\text{PGL}(3)$ donat per

$$g : x \mapsto g_0x, \quad y \mapsto g_0y, \quad z \mapsto g_1x + g_2y + g_3z \quad \text{amb } g_i \in \mathbb{C} \text{ i } g_0, g_3 \neq 0. \quad (3.3)$$

Efectivament, sigui $X : A(x, y, z) = 0$ una corba plana projectiva i sigui $g(X) : gA(x, y, z) = A(g_0x, g_0y, g_1x + g_2y + g_3z) = 0$ la corba que s'obté després d'aplicar g als punts d' X . Un punt $[a, b] \in \mathbb{P}^1$ és un punt discriminant de l'aplicació $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ si, i només si, existeix $c \in \mathbb{C}$ tal que $(\partial A / \partial z)(a, b, c) = 0$. Ara bé, com que

$$\begin{aligned} \frac{\partial(gA)}{\partial z}(a, b, \tilde{c}) &= \frac{\partial A}{\partial z}(g_0a, g_0b, g_1a + g_2b + g_3\tilde{c}) \frac{\partial(g_1a + g_2b + g_3\tilde{c})}{\partial z} \\ &= g_0^d \frac{\partial A}{\partial z}\left(a, b, \frac{g_1}{g_0}a + \frac{g_2}{g_0}b + \frac{g_3}{g_0}\tilde{c}\right) g_3, \end{aligned}$$

triant $\tilde{c} = (g_0c - g_1a - g_2b) / g_3$, queda

$$\frac{\partial(gA)}{\partial z}(a, b, \tilde{c}) = g_0^d g_3 \frac{\partial A}{\partial z}(a, b, c)$$

de manera que si $[a, b] \in \mathbb{P}^1$ és un punt discriminant de $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^1$, llavors també ho és de $\pi : g(X) \rightarrow \mathbb{P}^1$. Anàlogament, es pot veure la implicació inversa, de manera que els punts discriminants de les dues corbes són els mateixos.

Es pot demostrar que la fibra sobre B de l'aplicació definida en l'Equació (3.2) és unió finita de $\mathcal{G}$ -òrbites. Això no ho demostrarem, però ho veurem en els casos $d = 2, 3$ i 4 . La demostració en el cas general es pot trobar a la tesi d'Ongaro [Ong14, Corol·lari 5.2.1.].

Definició 3.10. El nombre de $\mathcal{G}$ -òrbites amb el mateix conjunt de $d(d-1)$ punts discriminants s'anomena el *número de Hurwitz* de grau d en el pla i es denota amb $\mathfrak{h}_d$.

Per tant, podem reformular el Problema 3.7 de la següent manera:

Problema 3.11. Donada una forma binària B de grau $d(d-1)$ amb $d(d-1)$ zeros diferents sobre $\mathbb{P}^1$, volem trobar un representant $\hat{A}$ de cadascuna de les $\mathfrak{h}_d$ $\mathcal{G}$ -òrbites de la fibra sobre B de l'aplicació definida en l'Equació (3.2), tal que $\hat{X} : \hat{A} = 0$ és una corba plana projectiva no singular reduïda i $p = [0 : 0 : 1] \notin \hat{X}$.

Observació 3.12. Si una corba X té un punt singular q , la corba polar $\mathcal{P}_p(X)$ passa per aquest punt i la multiplicitat d'intersecció de la corba i la polar en q és més gran o igual que el producte de les multiplicitats d' X i de $\mathcal{P}_p(X)$ en q . En particular, el discriminant $\text{discr}_z(X)$ tindrà una arrel múltiple, però això contradiu que el discriminant tingui $d(d-1)$ arrels diferents. A més, el fet que una corba plana sigui no singular implica automàticament que és irreductible. Si no fos així, donades dues components irreductibles de la seva equació, la corba seria singular en els punts d'intersecció d'aquestes components. En definitiva, tota corba que compleixi les condicions del Problema 3.11 serà necessàriament no singular i irreductible.

Exemple 3.13 (Cas $d = 2$). Donat

$$B(x, y) = \beta_{20}x^2 + \beta_{02}y^2 + \beta_{11}xy$$

volem trobar una corba plana $X : A = 0$, on

$$A(x, y, z) = \alpha_{200}x^2 + \alpha_{020}y^2 + \alpha_{002}z^2 + \alpha_{110}xy + \alpha_{101}xz + \alpha_{011}yz$$

tal que $[0 : 0 : 1] \notin X$ i $\text{discr}_z(X) = B$ com a punts de $\mathbb{P}^2$. Primer de tot, tenim

$$\begin{aligned} \text{discr}_z(X) &= R_z(A, \partial_z A) \\ &= \begin{vmatrix} \alpha_{002}\alpha_{101}x + \alpha_{011}y & \alpha_{200}x^2 + \alpha_{020}y^2 + \alpha_{110}xy & 0 \\ 2\alpha_{002} & \alpha_{101}x + \alpha_{011}y & 0 \\ 0 & 2\alpha_{002} & \alpha_{101}x + \alpha_{002}z \end{vmatrix} \\ &= \alpha_{002}[(4\alpha_{002}\alpha_{200} - \alpha_{101}^2)x^2 + (4\alpha_{002}\alpha_{020} - \alpha_{011}^2)y^2 \\ &\quad + (4\alpha_{002}\alpha_{110} - 2\alpha_{101}\alpha_{011})xy]. \end{aligned}$$

Com que $[0 : 0 : 1] \notin X$, tenim que $\alpha_{002} \neq 0$ i, com que el discriminant està definit llevat de producte per una constant no nul·la, el podem dividir per α_{002} . Per tant, per trobar B hem d'imposar les següents condicions

$$\begin{cases} 4\alpha_{002}\alpha_{200} - \alpha_{101}^2 = \beta_{20} \\ 4\alpha_{002}\alpha_{020} - \alpha_{011}^2 = \beta_{02} \\ 4\alpha_{002}\alpha_{110} - 2\alpha_{101}\alpha_{011} = \beta_{11}. \end{cases} \quad (3.4)$$

Ara bé, triant adequadament un element de la $\mathcal{G}$ -òrbita d' X , podem simplificar significativament la resolució d'aquest sistema. Considerem un automorfisme $g \in \mathcal{G}$ i la corba $g(X) : gA = 0$, on

$$(gA)(x, y, z) = A(g_0x, g_0y, g_1x + g_2y + g_3z) = \sum_{i+j+k=2} \tilde{\alpha}_{ijk}x^i y^j z^k.$$

Podem suposar, sense pèrdua de generalitat, que $g_0 = 1$. Per tant, quan apliquem l'automorfisme g , els termes d' A amb z com a factor es transformen de la següent manera:

$$\begin{aligned} \alpha_{101}xz &\mapsto \alpha_{101}(g_1x^2 + g_2xy + g_3xz) \\ \alpha_{011}yz &\mapsto \alpha_{011}(g_1xy + g_2y^2 + g_3yz) \\ \alpha_{002}z^2 &\mapsto \alpha_{002}(g_1^2x^2 + g_2^2y^2 + g_3^2z^2 + 2g_1g_2xy + 2g_1g_3xz + 2g_2g_3yz). \end{aligned}$$

Aleshores, triant g_3 tal que $\alpha_{002}g_3^2 = 1$, tenim que $\tilde{\alpha}_{002} = 1$. Triant g_2 tal que $\alpha_{002}g_2^2 + \alpha_{011}g_2 + \alpha_{020} = 0$, tenim que $\tilde{\alpha}_{020} = 0$. Finalment, triant g_1 tal que $2\alpha_{002}g_1 + \alpha_{101} = 0$, tenim que $\tilde{\alpha}_{101} = 0$. Per tant, per a la corba $g(X)$, el sistema (3.4) passa a ser

$$\begin{cases} 4\tilde{\alpha}_{200} = \beta_{20} \\ -\tilde{\alpha}_{011}^2 = \beta_{02} \\ 4\tilde{\alpha}_{110} = \beta_{11}. \end{cases}$$

Aquest sistema té una única solució, que defineix precisament una $\mathcal{G}$ -òrbita a $\mathbb{P}^5$. Això demostra que $\mathfrak{h}_2 = 1$. Aquesta $\mathcal{G}$ -òrbita té com a representant

$$(gA)(x, y, z) = \frac{1}{4}\beta_{20}x^2 + z^2 + \frac{1}{4}\beta_{11}xy + \sqrt{-\beta_{02}}yz.$$

Mitjançant un altre automorfisme de $\mathcal{G}$, podem canviar z per $\sqrt{-\beta_{02}}z$ per tal d'eliminar l'arrel quadrada del coeficient del terme yz . Si fem això, obtenim un altre representant:

$$\hat{A}(x, y, z) = \frac{1}{4}\beta_{20}x^2 - \beta_{02}z^2 + \frac{1}{4}xy - \beta_{02}yz.$$

En les properes seccions, farem el mateix que en l'Exemple 3.13, però considerant corbes de grau superior. Per a $d > 2$, però, això resulta més delicat. Per una banda, veurem que, si $d > 2$, llavors $\mathfrak{h}_d > 1$. És a dir, hi haurà més d'una $\mathcal{G}$ -òrbita de corbes amb uns determinats punts discriminants. D'altra banda, fent un recompte de paràmetres, trobem que la clausura de l'aplicació definida en l'Equació (3.2) és una varietat $\mathcal{V}_d$ de dimensió $\binom{d+2}{2} - 4$ en un espai projectiu de dimensió $d(d-1)$. Per a $d = 2, 3$, les dues dimensions coincideixen, de manera que per a qualsevol forma binària B de grau $d(d-1)$ serà possible obtenir una corba plana X de grau d tal que $\text{discr}_z(X) = B$. En canvi, si $d \geq 4$, llavors $d(d-1) > \binom{d+2}{2} - 4$ i, per tant, la restricció $B \in \mathcal{V}_d$ deixa de ser trivial. En altres paraules, per a $d \geq 4$, pot haver-hi formes binàries B de grau $d(d-1)$ que no siguin el discriminant de cap corba plana projectiva de grau d .

3.2 Forma normal

Per tal de simplificar el Problema 3.11 establim una forma normal respecte a la $\mathcal{G}$ -acció. Per fer-ho, identifiquem les corbes planes projectives de grau d amb punts de $\mathbb{P}^{\binom{d+2}{2}-1}$, prenent com a coordenades homogènies els coeficients α_{ijk} . Considerem el subespai L_d de $\mathbb{P}^{\binom{d+2}{2}-1}$ donat per

$$L_d = V(\alpha_{10\,d-1}, \alpha_{d-1\,10}, \alpha_{00d} - \alpha_{01\,d-1}), \quad (3.5)$$

és a dir, el conjunt de punts de $\mathbb{P}^{\binom{d+2}{2}-1}$ tals que

$$\begin{cases} \alpha_{10\,d-1} = 0 \\ \alpha_{d-1\,10} = 0 \\ \alpha_{00d} - \alpha_{01\,d-1} = 0. \end{cases}$$

Definició 3.14. Si una forma ternària A de grau d pertany a L_d , direm que està en la forma normal.

Teorema 3.15. *Sigui A una forma ternària de grau $d \geq 3$ tal que*

$$\alpha_{00d} \left(\sum_{k=0}^{d-1} \frac{(k+1)(-1)^k}{d^k} \alpha_{10\ d-1}^k \alpha_{00d}^{d-k-1} \alpha_{d-k-1\ 0\ k+1} \right) \neq 0. \quad (3.6)$$

Aleshores la $\mathcal{G}$ -òrbita d' A interseca L_d en un únic punt.

Demostració. Considerem un automorfisme $g \in \mathcal{G}$ i el polinomi gA :

$$(gA)(x, y, z) = A(g_0x, g_0y, g_1x + g_2y + g_3z) = \sum_{i+j+k=d} \tilde{\alpha}_{ijk} x^i y^j z^k.$$

Sense pèrdua de generalitat, fixem $g_0 = 1$. Observem que el terme $\tilde{\alpha}_{10\ d-1} x z^{d-1}$ de gA prové dels termes $\alpha_{00d} z^d$ i $\alpha_{10\ d-1} x z^{d-1}$ d' A . Després de substituir z per $g_1x + g_2y + g_3z$, aquests termes es transformen en

$$\alpha_{00d} (g_1x + g_2y + g_3z)^d + \alpha_{10\ d-1} x (g_1x + g_2y + g_3z)^{d-1} = \underbrace{(d\alpha_{00d}g_1 + \alpha_{10\ d-1})}_{\tilde{\alpha}_{10\ d-1}} g_3^{d-1} x z^{d-1} + \dots$$

de manera que si imposem $\tilde{\alpha}_{10\ d-1} = 0$ obtenim

$$g_1 = -\frac{\alpha_{10\ d-1}}{d \cdot \alpha_{00d}}.$$

En general, els monomis $x^i y^j z^{d-i-j}$ d' A es transformen en $x^i y^j (g_1x + g_2y + g_3z)^{d-i-j}$ i, per tant, contribueixen als monomis $x^{i'} y^{j'} z^{d-i'-j'}$ de gA amb $i' \geq i$ i $j' \geq j$. En particular, el terme $x^{d-1}y$ de gA prové de la següent suma de termes d' A :

$$\sum_{i=0}^{d-1} \alpha_{i0\ d-i} x^i z^{d-i} + \sum_{i=0}^{d-1} \alpha_{i1\ d-i-1} x^i y z^{d-i-1}.$$

Després de substituir z per $g_1x + g_2y + g_3z$, aquesta suma es transforma en

$$\underbrace{\left(\sum_{i=0}^{d-1} \alpha_{i0\ d-i} (d-i) g_1^{d-i-1} g_2 + \sum_{i=0}^{d-1} \alpha_{i1\ d-i-1} g_1^{d-i-1} \right)}_{\tilde{\alpha}_{d-1\ 10}} x^{d-1} y + \dots$$

Substituint g_1 pel valor que hem fixat abans i imposant $\tilde{\alpha}_{d-1\ 10} = 0$ trobem que

$$g_2 = \frac{-\sum_{k=0}^{d-1} \frac{(-1)^k}{d^k} \alpha_{10\ d-1}^k \alpha_{d-k-1\ 1k} \alpha_{00d}^{d-k-1}}{\sum_{k=0}^{d-1} \frac{(k+1)(-1)^k}{d^k} \alpha_{10\ d-1}^k \alpha_{d-k-1\ 0\ k+1} \alpha_{00d}^{d-k-1}}.$$

Observem que el denominador és el segon factor de l'Equació (3.6). A continuació, cal igualar els coeficients de yz^{d-1} i de z^d de gA . El primer prové dels termes $\alpha_{00d} z^d$ i $\alpha_{01\ d-1} y z^{d-1}$ d' A . Després de substituir z per $g_1x + g_2y + g_3z$, aquests termes es transformen en

$$\underbrace{(d\alpha_{00d}g_2 + \alpha_{01\ d-1})}_{\tilde{\alpha}_{01\ d-1}} g_3^{d-1} y z^{d-1} + \dots$$

El segon prové només del terme $\alpha_{00d} z^d$, que es transforma en

$$\underbrace{\alpha_{00d} g_3^d}_{\tilde{\alpha}_{00d}} z^d + \dots$$

Igualant els dos coeficients, obtenim

$$g_3 = \frac{\alpha_{00d}dg_2 + \alpha_{01d-1}}{\alpha_{00d}}.$$

Això demostra que hi ha un únic punt en la $\mathcal{G}$ -òrbita d' A que pertany a L_d . $\square$

Observació 3.16. Gràcies a aquest resultat, podem suposar que el representant $\hat{A}$ que busquem en el Problema 3.11 pertany a L_d .

3.3 Solució per a les cúbiques

Sigui B una forma binària de grau 6 amb sis zeros diferents sobre $\mathbb{P}^1$. Volem trobar una forma ternària de grau $d = 3$ reduïda en la forma normal

$$A(x, y, z) = \alpha_{300}x^3 + \alpha_{120}xy^2 + \alpha_{201}x^2z + \alpha_{111}xyz + \alpha_{030}y^3 + \alpha_{021}y^2z + yz^2 + z^3$$

tal que $\text{discr}_z(A) = B$ com a punts de $\mathbb{P}^6$ i $p = [0 : 0 : 1]$ no pertany a la corba definida per A . Podem suposar que $\alpha_{012} = \alpha_{003} = 1$. El discriminant d' A respecte de z és:

$$\begin{aligned} \text{discr}_z(A) = & (4\alpha_{201}^3 + 27\alpha_{300}^2)x^6 + (12\alpha_{111}\alpha_{201}^2 - 18\alpha_{201}\alpha_{300})x^5y \\ & + (12\alpha_{111}^2\alpha_{201} - \alpha_{201}^2 + 12\alpha_{021}\alpha_{201}^2 - 18\alpha_{111}\alpha_{300} + 54\alpha_{120}\alpha_{300})x^4y^2 \\ & + (4\alpha_{111}^3 - 2\alpha_{111}\alpha_{201} + 24\alpha_{021}\alpha_{111}\alpha_{201} - 18\alpha_{120}\alpha_{201} + 4\alpha_{300} - 18\alpha_{021}\alpha_{300} + 54\alpha_{030}\alpha_{300})x^3y^3 \\ & + (-\alpha_{111}^2 + 12\alpha_{021}\alpha_{111}^2 - 18\alpha_{111}\alpha_{120} + 27\alpha_{120}^2 - 2\alpha_{021}\alpha_{201} + 12\alpha_{021}^2\alpha_{201} - 18\alpha_{030}\alpha_{201})x^2y^4 \\ & + (-2\alpha_{021}\alpha_{111} + 12\alpha_{021}^2\alpha_{111} - 18\alpha_{030}\alpha_{111} + 4\alpha_{120} - 18\alpha_{021}\alpha_{120} + 54\alpha_{030}\alpha_{120})xy^5 \\ & + (-\alpha_{021}^2 + 4\alpha_{021}^3 + 4\alpha_{030} - 18\alpha_{021}\alpha_{030} + 27\alpha_{030}^2)y^6. \end{aligned}$$

Imposem que els coeficients de $\text{discr}_z(A)$ siguin proporcionals als de B . Això equival a exigir que

$$\text{rang} \begin{pmatrix} 4\alpha_{201}^3 + 27\alpha_{300}^2 & \dots & -\alpha_{021}^2 + \dots + 27\alpha_{030}^2 \\ \beta_{60} & \dots & \beta_{06} \end{pmatrix} \leq 1. \quad (3.7)$$

Com que només estem considerant corbes reduïdes, imposem la condició addicional

$$4\alpha_{201}^3 + 27\alpha_{300}^2 \neq 0. \quad (3.8)$$

per evitar les solucions amb $\text{discr}_z(A)$ idènticament zero. Per tant, resoldre el Problema 3.11 implica trobar els coeficients α_{ijk} que verifiquen les Equacions (3.7) i (3.8).

Proposició 3.17. *Sigui C una corba plana projectiva no singular de grau 3 i sigui O un punt d'inflexió de C . Tot revestiment ramificat $f : C \rightarrow \mathbb{P}^1$ de grau 3 es pot representar com una translació en C seguida d'una projecció des d'un punt de $\mathbb{P}^2$ [Ong14, Proposició 5.2.2].*

Demostració. Considerem el següent morfisme entre superfícies de Riemann

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^1 &\rightarrow C \\ t &\mapsto a_t + b_t + c_t \end{aligned}$$

on a_t , b_t i c_t són els elements de la fibra d' f sobre t i " + " és la suma de l'estructura de grup de les cúbiques. Aquesta aplicació és holomorfa. Per tant, per la Fórmula de

Hurwitz (Teorema 1.38), el gènere de C hauria de ser menor que el gènere de $\mathbb{P}^1$, que és 0. Com que això no pot ser, l'aplicació ha de ser constant. És a dir, la suma $a_t + b_t + c_t$ no depèn de la fibra.

Sigui $a_{t_0}, b_{t_0}, c_{t_0}$ la fibra d' f sobre $t_0 \in \mathbb{P}^1$ qualsevol. Suposem que $a_{t_0} + b_{t_0} + c_{t_0} = -Q_0$ i triem un punt $P_0 \in C$ tal que $3P_0 = Q_0$. Aquest punt existeix ja que qualsevol morfisme entre superfícies de Riemann compactes o bé és constant o bé és exhaustiu. L'automorfisme de C definit per $P \mapsto 3P$ no és constant. En particular, $3P = O$ si, i només si, P és un punt d'inflexió i, per l'Observació 2.56, sabem que n'hi ha un nombre finit. Aleshores, ha de ser exhaustiu i, per tant, tot punt de C és divisible per 3.

Clarament, $(a_{t_0} + P_0) + (b_{t_0} + P_0) + (c_{t_0} + P_0) = O$. Pel Lema 2.65, això implica que $a_{t_0} + P_0, b_{t_0} + P_0$ i $c_{t_0} + P_0$ estan alineats. Ara bé, com que la suma no depèn de la fibra, fent una translació per P_0 aconseguim que els punts de qualsevol fibra estiguin alineats.

Observem que podem veure f com una funció meromorfa $F : C \rightarrow \mathbb{C}_\infty$. Efectivament, si $f(z) = [a(z) : b(z)]$, podem definir la funció meromorfa $F(z) = a(z)/b(z)$, i viceversa. Sigui l_1 i l_2 les rectes que passen per les fibres d' F sobre el zero i l'infinit, respectivament, després de fer una translació per P_0 . Sigui $R = l_1 \cap l_2$. Aleshores, la funció meromorfa $C \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ corresponent a traslladar per P_0 i projectar des d' R té els mateixos zeros i pols que F . Per tant, llevat de producte per una constant no nul·la, són la mateixa funció. $\square$

Corol·lari 3.18. *Hi ha $\mathfrak{h}_3 = 40$ solucions diferents $\alpha \in \mathbb{C}^6$ que verifiquen les Equacions (3.7) i (3.8).*

Demostració. Efectivament, per la Proposició 3.17, el número de Hurwitz en el pla coincideix amb el nombre de classes d'isomorfisme de revestiments ramificats de grau 3 amb els punts discriminants fixats. Pel Teorema d'existència de Riemann 1.53, aquest nombre correspon a la quantitat de classes de conjugació de 6-tuples $\tau = (\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5, \tau_6)$ de permutacions d' S_3 tals que el subgrup d' S_3 generat per les τ_i és transitiu i $\tau_1 \cdot \dots \cdot \tau_6 = 1$. A més, com que per hipòtesi les projeccions que considerem són simples (i.e. la fibra de cada punt discriminant té un únic punt de ramificació de multiplicitat 2), les permutacions τ_i són transposicions. Com que hi ha tres transposicions en S_3 i com que, fixades les cinc primeres, l'última queda determinada per la condició $\tau_1 \cdot \dots \cdot \tau_6 = 1$, hi ha $3^5 = 243$ maneres de triar les τ_i . De totes maneres, si les sis transposicions fossin iguals, llavors el subgrup generat no seria transitiu. Per tant, tres d'aquestes opcions no estan permeses. Finalment, tenint en compte que $|S_3| = 3! = 6$, el nombre de classes de conjugació de 6-tuples és $\mathfrak{h}_3 = 240/6 = 40$. $\square$

3.4 Solució per a les quàrtiques

Sigui B una forma binària de grau 12 amb dotze zeros diferents sobre $\mathbb{P}^1$. Volem trobar una forma ternària A de grau $d = 4$ en la forma normal tal que $\text{discr}_z(A) = B$ com a punts de $\mathbb{P}^{12}$ i tal que $p = [0 : 0 : 1]$ no pertanyi a la corba definida per A . Si A està en la forma normal, $\alpha_{103} = \alpha_{310} = 0$. També podem suposar que $\alpha_{004} = \alpha_{013} = 1$, ja que $p \notin X$. Observem que A té tretze termes: z^4 , yz^3 i onze més de la forma $\alpha_{ijk}x^i y^j z^k$.

Reagrupant termes, podem expressar A com

$$A = z^4 + A_2(x, y)z^2 + A_3(x, y)z + A_4(x, y), \quad (3.9)$$

on $A_i(x, y)$ són formes binàries de grau i , cadascuna de les quals té $i + 1$ coeficients, que són els que volem determinar. Per fer-ho, cal imposar que els coeficients del discriminant

d'A respecte de z siguin proporcionals als coeficients de la forma binària B . Això dona lloc a un sistema de 12 equacions polinòmiques de grau 5 en les 11 incògnites α_{ijk} .

Teorema 3.19. *Sigui $B = \sum_{i+j=12} \beta_{ij} x^i y^j$ el discriminant respecte de z d'una quàrtica ternària A . Aleshores el nombre de $\mathcal{G}$ -òrbites de la fibra sobre B de l'aplicació definida en l'Equació (3.2) és $\mathfrak{h}_4 = 120$.*

Demostració. Només donarem una idea de la demostració. La hipòtesi que B és el discriminant respecte de z d'una quàrtica ternària A ens assegura que B es troba sobre la hipersuperfície $\mathcal{V}_4$ de grau 3762 de $\mathbb{P}^{12}$ definida per Vakil en *Twelve points on the projective line, branched covers, and rational elliptic fibrations* [Vak01]. Aquesta és una condició necessària i suficient per tal que el problema plantejat tingui solució. Llevat de $\mathcal{G}$ -acció, les tripletes (A_2, A_3, A_4) estan parametritzades per l'espai projectiu amb pesos $\mathbb{P}(2^3, 3^4, 4^5)$ de dimensió 11. Cal tenir en compte que un espai projectiu amb pesos és un espai projectiu en el qual se li assigna a cada variable un grau ponderat. La notació que fem servir indica que les tres primeres variables les agafem amb pes dos, les quatre següents amb pes tres i les darreres cinc amb pes quatre. Definim una aplicació racional

$$\begin{aligned} \nu : \mathbb{P}(2^3, 3^4, 4^5) &\dashrightarrow \mathbb{P}(3^5, 2^7) \\ (A_2, A_3, A_4) &\mapsto (U_2, U_3) \end{aligned}$$

on $U_2 = -4A_4 - 1/3A_2^2$ i $U_3 = A_3^2 - 8/3A_2A_4 + 2/27A_2^3$. Observem que U_i són formes binàries de grau $2i$. Composem l'aplicació ν amb l'aplicació μ definida a continuació:

$$\begin{aligned} \mu : \mathbb{P}(3^5, 2^7) &\dashrightarrow \mathbb{P}^{12} \\ (U_2, U_3) &\mapsto 4U_2^3 + 27U_3^2. \end{aligned}$$

Es pot comprovar que la composició $\mu \circ \nu$ dona el discriminant $\text{discr}_z(A)$ de la forma de l'Equació (3.9). Per tant, llevat de $\mathcal{G}$ -acció, tenim que $\pi = \mu \circ \nu$, on π és l'aplicació definida en l'Equació (3.2).

Vakil demostra que l'aplicació ν és dominant (és a dir, la seva imatge és densa) i que el seu grau és 120. Per tant, la imatge de μ és la hipersuperfície $\mathcal{V}_4$. Vakil també demostra que μ és una aplicació biracional sobre la seva imatge $\mathcal{V}_4$. Això implica que el grau de π és 120, com volíem demostrar. $\square$

3.5 Combinatòria de Hurwitz

Definició 3.20. *El número de Hurwitz clàssic de grau d que denotem amb H_d és el nombre de classes d'automorfisme de revestiments ramificats $C \rightarrow \mathbb{P}^1$ de grau d amb $d(d-1)$ punts discriminants simples fixats, on C és una corba de gènere $\binom{d-1}{2}$.*

Observació 3.21. És conegut que, sobre $\mathbb{C}$, la categoria de corbes projectives i no singulars és equivalent a la categoria de superfícies de Riemann compactes. Per tant, el número de Hurwitz clàssic és el nombre de classes d'isomorfisme que venen donades pel Teorema d'existència de Riemann 1.53. A continuació, particularitzem aquest Teorema per al cas de ramificació simple.

Lema 3.22. *El número de Hurwitz clàssic H_d és $1/d!$ vegades el nombre de tuples de transposicions $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_{d(d-1)})$ del grup simètric S_d que compleixen*

$$\tau_1 \dots \tau_{d(d-1)} = 1$$

tals que el subgrup d' S_d generat per les τ_i és transitiu.

Proposició 3.23. *El número de Hurwitz en el pla és menor o igual al número de Hurwitz clàssic. És a dir, $h_d \leq H_d$.*

Demostració. Com que p un punt fix i la recta sobre la qual projectem és una recta de punts fixos, tot automorfisme de C que preservi els punts discriminants és una homologia general. En particular, si $p = [0 : 0 : 1]$ i la recta sobre la qual projectem és $x = 0$, aquesta homologia correspon a fer

$$[x : y : z] \mapsto [x : y : \lambda z].$$

Per tant, una corba $C : F(x, y, z) = 0$ és fixa si $F(x, y, \lambda z) = \mu F(x, y, z)$. Aleshores, necessàriament $\lambda = 1$. En definitiva, l'únic automorfisme que fixa el punt de projecció i els punts discriminants és la identitat. Com a conseqüència, el nombre de classes d'automorfisme de revestiments ramificats $C \rightarrow \mathbb{P}^1$ on C és una corba plana projectiva coincideix amb el nombre de $\mathcal{G}$ -òrbites amb $d(d-1)$ punts discriminants fixats. $\square$

Corol·lari 3.24. *En el cas $d = 3$, tenim $h_3 = H_3 = 40$. En el cas $d = 4$, $h_4 = 120 < H_4 = 7\,528\,620$.*

Demostració. El cas $d = 3$ és conseqüència de la Proposició 3.17 i el Corol·lari 3.18. En el cas $d = 4$, veiem que $h_4 = 120$ pel Teorema 3.19. D'altra banda, el valor $H_4 = 7\,528\,620$ prové d'un càlcul combinatori. Primer de tot, hem determinat computacionalment que hi ha $N = 181\,401\,600$ tuples $(\tau_1, \dots, \tau_{12})$ de transposicions d' S_4 que verifiquen que $\tau_1 \dots \tau_{12} = 1$ fent servir el programa de l'Apèndix A. Hem de restar els casos en els quals el subgrup d' S_4 generat per les τ_i no és transitiu. Identifiquem tres casos diferents en els quals passa això:

- (a) Només hi ha una transposició. És a dir, $\tau_i = \tau_j$ per a tot $i, j \in \{1, \dots, 12\}$. De les N tuples que hem identificat, n'hi ha 6 d'aquesta forma, corresponents a les sis transposicions d' S_4 .
- (b) Hi ha exactament dues transposicions disjunes. Per exemple, si $\tau_i, \tau_j \in \{(12), (34)\}$ per a tot $i, j \in \{1, \dots, 12\}$. Hi ha tres possibles parelles de transposicions disjunes d'entre les sis transposicions d' S_4 . Per a cadascuna d'aquestes parelles, hi ha 2^{11} tuples de les N que hem identificat que estan formades només per aquestes dues transposicions (no són 2^{12} perquè la darrera transposició queda determinada per la condició que el producte ha de ser la identitat). A aquest nombre li hem de restar 2, que correspon als dos casos de dotze transposicions iguals que ja hem comptat. En total, doncs, tenim $3 \cdot (2^{11} - 2)$ tuples d'aquest tipus.
- (c) Les transposicions no involucren exactament un dels quatre elements. Per exemple, si $\tau_i, \tau_j \in \{(12), (13), (23)\}$ per a tot $i, j \in \{1, \dots, 12\}$. Hi ha 3^{11} tuples formades per aquestes transposicions. Hem de restar les tres que corresponen a dotze transposicions iguals, que ja hem tingut en compte. Com que en total hi ha quatre grups de tres transposicions com aquest, en total hi ha $4 \cdot (3^{11} - 3)$ tuples d'aquest tipus.

Per trobar el nombre de classes de conjugació de les tuples, hem de dividir per $4!$. Per tant, el recompte final és:

$$H_4 = \frac{N - 6 - 3 \cdot (2^{11} - 2) - 4 \cdot (3^{11} - 3)}{4!} = 7\,528\,620.$$

$\square$

Per acabar, fem notar que, a partir de grau quatre, la construcció topològica del Teorema d'existència de Riemann 1.53 dona més possibilitats de les que podem realitzar algebraicament com a projecció d'una corba plana projectiva. En el cas de les corbes cúbiques, el fet que el número de Hurwitz clàssic i en el pla coincideixin es deu a la seva estructura de grup que, com hem vist, implica que qualsevol revestiment ramificat de grau tres és una translació seguida d'una projecció. En grau quatre ja no es té aquesta estructura i hi ha una diferència molt notable entre les dues quantitats. Això ofereix un clar contrast entre la construcció algebraica que hem estudiat en aquest capítol i la construcció topològica del Teorema d'existència de Riemann.

Referències

- [Ago+23] D. Agostini et al. “Recovery of Plane Curves from Branch Points”. A: *Discrete & Computational Geometry* (2023). DOI: 10.1007/s00454-023-00538-5.
- [Bix06] R. Bix. *Conics and Cubics: A Concrete Introduction to Algebraic Curves*. 2a ed. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2006. DOI: 10.1007/0-387-39273-4.
- [Cas19] E. Casas-Alvero. *Algebraic Curves, the Brill and Noether Way*. Springer International Publishing, 2019. DOI: 10.1007/978-3-030-29016-0.
- [FK12] H.M. Farkas i I. Kra. *Riemann Surfaces*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2012. DOI: 10.1007/978-1-4612-2034-3.
- [Ful69] W. Fulton. *Algebraic Curves : An Introduction to Algebraic Geometry*. Mathematics Lecture Note Series. W. A. Benjamin Inc., 1969. ISBN: 978-0805330823.
- [Mas91] W.S. Massey. *A Basic Course in Algebraic Topology*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 1991. DOI: 10.1007/978-1-4939-9063-4.
- [Mir95] R. Miranda. *Algebraic Curves and Riemann Surfaces*. 1a ed. Vol. 5. Graduate Studies in Mathematics, v. 5. American Mathematical Society, 1995. DOI: 10.1090/gsm/005.
- [Ong14] J. Ongaro. *Towards Plane Hurwitz Numbers*. Matematiska institutionen, Stockholms universitet, 2014. ISBN: 978-91-7447-927-0.
- [Vak01] R. Vakil. “Twelve Points on the Projective Line, Branched Covers, and Rational Elliptic Fibrations”. A: *Mathematische Annalen* 320.1 (2001), pàg. 33-54. DOI: 10.1007/PL00004469.
- [Wal78] R.J. Walker. *Algebraic Curves*. 1a ed. Springer New York, 1978. ISBN: 978-0-387-90361-3.

A Programa

S'ha utilitzat el següent programa de Python per comptar el nombre de 12-tuples de transposicions $(\tau_1, \dots, \tau_{12})$ tals que $\tau_1 \dots \tau_{12} = 1$.

```
1 import itertools
2
3 def is_identity_permutation(perm):
4     """Comprova si una permutació donada és la identitat."""
5     return perm == [0, 1, 2, 3]
6
7 def apply_transposition(elements, transposition):
8     """Aplica una única transposició als elements."""
9     a, b = transposition
10    elements[a], elements[b] = elements[b], elements[a]
11
12 def apply_transpositions(elements, transpositions):
13     """Aplica totes les transposicions d'una 12-tupla als elements."""
14     for transposition in transpositions:
15         apply_transposition(elements, transposition)
16     return elements
17
18 def main():
19     # Totes les transposicions de 4 elements
20     transpositions = [(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 2), (1, 3), (2, 3)]
21
22     # Fixem (0, 1) com la transposicio inicial
23     initial_transposition = (0, 1)
24
25     # Generem totes les possibles 12-tuples de transposicions tals que la
26     # primera és (0, 1)
27     all_sequences = itertools.product(transpositions, repeat=11)
28
29     identity_count = 0
30
31     for sequence in all_sequences:
32         elements = [0, 1, 2, 3]
33         apply_transposition(elements, initial_transposition)
34         result_perm = apply_transpositions(elements, sequence)
35
36         if is_identity_permutation(result_perm):
37             identity_count += 1
38
39     print(f'Nombre d\'11-tuples tals que la seva composició és la
40         identitat: {6*identity_count}')
41
42 if __name__ == "__main__":
43     main()
```

Índex alfabètic

- 1-forma
 - $\mathcal{C}^\infty$, 17
 - compatibilitat, 16
 - holomorfa, 16
 - meromorfa, 17
- Atles, 2
 - compatibles, 2
- Bézout, Teorema de, 31
- Camins, elevació de, 8
- Característica d'Euler, 9
- Carta
 - afí, 24
 - centrada en un punt, 2
 - complexa, 2
 - foradada, 2
- Coordenada local, 2
- Corba plana
 - afí, 25
 - dual, 35
 - polar, 33
 - projectiva, 23
- Cònica, 23
- Cúbica, 23
- Cúspide ordinària, 33
- Discriminant, 41
- Divisor, 18
 - canònic, 19
 - d'una 1-forma meromorfa, 19
 - d'una funció meromorfa, 19
 - de pols d'una funció meromorfa, 19
 - de zeros d'una funció meromorfa, 19
 - Funcions acotades per un, 21
 - grau, 18
 - principal, 19
- Dual d'una corba plana, 35
- Elevació de camins, 8
- Equivalència lineal de divisors, 20
- Esfera de Riemann, 2
- Estructura complexa, 2
- Forma normal, 45
- Funció implícita, Teorema de la, 25
- Grau
 - d'un divisor, 18
 - d'una aplicació holomorfa, 7
 - d'una hipersuperfície, 23
 - efectiu, 28
 - formal, 28
- Hiperplà, 23
- Hipersuperfície, 23
 - components irreductibles, 24
 - composició, 23
 - equació d'una, 23
 - grau, 23
 - irreductible, 24
 - multiplicitat, 24
 - part afí, 24
 - reduïda, 24
- Holomorfa
 - 1-forma, 16
 - aplicació, 3
- Hurwitz
 - número de, 43, 49
- Hurwitz, fórmula de, 9
- Ideal homogeni, 34
- Intersecció
 - d'una recta i una hipersuperfície, 28
- Irreductible
 - components d'una hipersuperfície, 24
 - hipersuperfície, 24
- Isomorfisme
 - de revestiments, 8
- Laurent, sèrie de, 4
- Liouville, Teorema de, 3
- Llaç petit al voltant d'un punt, 13
- Meromorfa, funció, 3
- Monodromia
 - d'una aplicació holomorfa, 12
 - representació de la, 12
- Multiplicitat
 - composició d'hipersuperfícies, 24
 - d'intersecció d'una hipersuperfície i una recta, 28
 - d'intersecció de dues corbes planes, 31
 - d'un punt en una hipersuperfície, 24, 32

- d'una aplicació holomorfa, 5
 - d'una component irreductible, 24
- Node, 33
- Número de Hurwitz
 - clàssic, 49
 - en el pla, 43
- Ordre
 - d'un pol, 4
 - d'un punt d'inflexió, 33
 - d'un zero, 4
 - d'una funció meromorfa, 4
- Parametrització local, 35
- Pla, 23
- Plücker, corba de, 36
- Plücker, primera fórmula de, 37
- Polar, 33
- Primitiu, 30
- Projecció simple, 40
- Pullback d'una 1-forma, 18
- Punt
 - d'inflexió, 33
 - de ramificació, 6
 - discriminant, 6
 - doble, 32
 - simple, 32
 - singular, 32
 - ordinari, 33
 - triple, 32
- Quàdrica, 23
- Quàrtica, 23
- Quíntica, 23
- Recta, 23
 - tangent, 32
- Residu, 17
- Resultant de Sylvester, 28
- Revestiment, 7
 - ramificat, 8
 - universal, 8
- Riemann, Teorema d'existència de, 16
- Riemann-Roch, Teorema de, 22
- Singular
 - Corba plana afí, 25
 - forma, 26
 - polinomi, 25
 - punt, 32
 - ordinari, 33
- Singularitat
 - essencial, 3
 - evitable, 3
 - pol, 3
- Suma de punts en una cúbica, 38
- Superfície de Riemann, 2
- Suport d'una aplicació, 18
- Sylvester, resultant de, 28
- Tangent, 32
- Tercera intersecció, 38
- Transitiu, subgrup, 12
- Triangulació, 9
- Varietat lineal, 23