Universitat de Barcelona
Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

La teoria de DiPerna-Lions per a l'equació lineal del transport

Autor: Jordi Riu Pont

Director: Dr. Albert Clop Ponte
Realitzat a: Departament d'Anàlisi

Barcelona, 10 de juny de 2024

Abstract

We study the work presented by R.J. DiPerna and P.L. Lions in 1989 to prove the existence and uniqueness of solutions to the linear transport equation with velocity field in a Sobolev space and bounded divergence, as well as a counterexample showing that certain assumptions cannot be relaxed. We also explore how this theory extends to the Fokker-Planck equation, obtaining analogous results to those in the transport case.

Resum

S'estudia l'esquema presentat per R.J. DiPerna i P.L. Lions l'any 1989 per a demostrar l'existència i la unicitat de solucions de l'equació lineal del transport amb camp de velocitats en un espai de Sobolev i de divergència fitada, així com un contraexemple a la unicitat que palesa que certes hipòtesis no poden ser relaxades. S'examina també com s'estén aquesta teoria a l'equació de Fokker-Planck, tot obtenint-ne resultats anàlegs al cas del transport.

2020 Mathematics Subject Classification. 35A05, 35A07, 35G10

Agraïments

Vull agrair a en Dr. Albert Clop Ponte el seu mestratge i les seves correccions i les seves ràpides respostes i la seva predisposició per a ajudar-me, i també el croissant a què em va convidar a esmorzar. En definitiva, li agraeixo tota la seva implicació en aquest treball.

Índex

Capítol 1

Introducció

La qüestió de l'existència i de la unicitat de les equacions diferencials és llargament estudiada des de fa algun segle. Resultats primerencs són proporcionats per matemàtics com Picard, Lindelöf, Lipschitz, Cauchy o Peano; i és en aquest moment que, esperonada per la comunitat científica de física, neix la teoria clàssica de les equacions diferencials, que busca donar resposta a les preguntes més incisives d'aquell temps. Quines són les condicions mínimes de regularitat que s'han d'exigir a les condicions inicials o als coeficients de l'equació a fi de garantir l'existència i la unicitat de solucions? Com depenen les solucions de les equacions diferencials de les condicions inicials? Amb el context de la física de rerefons, i com que la realitat sovint no entén de regularitats, es fa evident que cal una nova teoria que permeti de dotar de rigor els conceptes i els mètodes usats fins al moment, i que generalitzi l'anterior per a poder abordar els mateixos tipus de problemes.

Concretament, per a poder desenvolupar aquesta teoria moderna d'equacions diferencials, s'ha de redefinir tant què vol dir que una funció sigui solució d'una equació diferencial, com fins i tot una nova noció de derivada que estengui la definició clàssica a funcions no derivables. Els espais de Sobolev resulten ser un marc idoni en el qual desenvolupar tota la teoria moderna d'equacions diferencials, sobretot per la seva connexió amb la branca de l'anàlisi funcional, de la qual se'n coneix un nombre suficient de resultats com perquè pugui ser convenient de considerar-los.

Pel que fa a l'equació lineal del transport, que presenta un cert atractiu des del punt de vista físic perquè permet de configurar la concentració d'una substància que corre en un fluid, no va ser fins a les darreries del segle XX que es va poder demostrar l'existència i la unicitat de les seves solucions en el context dels espais de Sobolev. Tal fita fou publicada per Ronald J. DiPerna i Pierre-Louis Lions l'any 1989 i suposà una autèntica revolució en el camp de les equacions diferencials en derivades parcials perquè a partir del mètode explícit que descrigueren per a demostrar resultats d'existència i d'unicitat de la solució de l'equació lineal del transport, s'obrien mantes portes en l'estudi d'altres equacions diferencials.

D'ençà la publicació, s'han demostrat una gran profusió de resultats i encara avui és una línia activa d'investigació. Sense anar més lluny, aquest mateix any 2024, s'ha descobert una desigualtat òptima que en garanteix la no-unicitat [1].

1.1 Estructura de la memòria

El capítol 2 de la memòria té com a primer objectiu el de recordar alguns resultats elementals sobre la teoria clàssica d'equacions diferencials i el de presentar l'equació lineal del transport. Com a segon objectiu, el de definir les nocions de convergència feble i de convergència feble* com el marc en el qual desenvoluparem la teoria de Diperna-Lions, que és el dels espais de Sobolev, i enunciar-ne i demostrar-ne alguns resultats.

Al capítol 3 es demostra l'existència de solucions de l'equació lineal del transport amb coeficients irregulars i un seguit de teoremes que permetin de concloure quin concepte de solució en garanteix no només l'existència, sinó també la unicitat.

Finalment, el capítol 4 es centra a estendre l'esquema de DiPerna-Lions a una versió degenerada de l'equació de Fokker-Planck. A tal fi, primerament s'estudia com construir solucions de l'equació en la seva versió no degenerada mitjançant el mètode de Galerkin, que no requereix hipòtesis de regularitat, sinó d'el·lipticitat uniforme dels coeficients de l'equació. Segonament, es combina el resultat anterior amb la teoria general de DiPerna-Lions per a demostrar que l'existència i la unicitat de les solucions de l'equació de Fokker-Planck continua essent, fins i tot si es relaxen les condicions d'el·lipticitat a d'altres més degenerades.

Capítol 2

Preliminars matemàtics

Dediquem aquest capítol a enunciar alguns resultats elementals sobre la teoria clàssica d'equacions diferencials i a definir tant unes noves nocions de convergència com també els espais de Sobolev i els espais de Bochner.

2.1 La teoria Cauchy-Lipschitz per a equacions diferencials ordinàries

En aquesta secció enunciem resultats clàssics sobre la teoria general dels camps $C^1(\mathbb{R})$, i fem un esment especial a la teoria del transport. Ens basem, principalment, en les primeres pàgines de [2].

Siguin $N \in \mathbb{N}$ un nombre natural, $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ un obert i $b : D \to \mathbb{R}^N$ un camp vectorial continu. Una solució clàssica de

$$\dot{\gamma}(t) = b(t, \gamma(t)) \tag{2.1.1}$$

és una funció $\gamma \in \mathcal{C}^1([t_1, t_2]; \mathbb{R}^N)$ que satisfà (2.1.1) per a qualsevol $t \in [t_1, t_2]$.

Fixem ara un punt $(t_0, x_0) \in D$ i considerem el problema de Cauchy

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(t) &= b(t, \gamma(t)) \\ \gamma(t_0) &= x_0 \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

Una solució de (2.1.2) és una funció $\gamma \in \mathcal{C}^1([t_1, t_2]; \mathbb{R}^N)$ que resolgui la primera equació i que a més a més verifiqui que $\gamma(t_0) = x_0$.

Observem que $\gamma \in \mathcal{C}^1([t_0 - r, t_0 + r]; \mathbb{R}^N)$ és solució de (2.1.2) si, i només si, $\gamma \in \mathcal{C}([t_0 - r, t_0 + r]; \mathbb{R}^N)$ i

$$\gamma(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} b(s, \gamma(s))\, ds \tag{2.1.3}$$

per a qualsevol $t \in [t_0 - r, t_0 + r]$.

Unes primeres preguntes que ens podríem plantejar és si la solució d'un problema de Cauchy existeix i, en cas que existeixi, si és única. Per exemple, podem considerar el camp vectorial $b : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definit per $b(t, x) = \sqrt{|x|}$. Resulta que el problema de Cauchy associat a b

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(t) &= \sqrt{|x|} \\ \gamma(0) &= 0 \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

té infinites solucions $\gamma^c(t) = \begin{cases} 0, \text{ si } t \leq c \\ \frac{1}{4}, \text{ si } t \geq c \end{cases}$, per a $c \in [0, \infty]$, malgrat b sigui un camp vectorial continu. És a dir, la continuïtat no garanteix la unicitat de l'equació diferencial i, en particular, tampoc no la garanteix pel que fa a l'equació lineal del transport. Es fa palesa, doncs, la necessitat d'exigir alguna mena de regularitat al camp vectorial b. El següent resultat precisa aquesta idea.

Teorema 2.1.1 (de Picard-Lindelöf)**.** Sigui b un camp vectorial definit en un obert que conté el rectangle $D \coloneqq \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N : |t - t_0| \leq \alpha \text{ i } |x - x_0| \leq \beta\}$. Suposem que b és de classe Lipschitz respecte de la segona variable i continu respecte de la primera a D; és a dir, que existeix un nombre real $K > 0$ tal que $|b(t, x) - b(t, y)| \leq K|x - y|$ per a qualsevol $(t, x), (t, y) \in D$ i que $b(\cdot, x)$ és contínua per a qualsevol $x \in [\beta - x_0, \beta + x_0]$. Aleshores existeix una única solució $\gamma \in \mathcal{C}^1([t_0 - r, t_0 + r])$ de (2.1.2) per a algun nombre real $r > 0$.

El Teorema de Picard-Lindelöf és un teorema d'existència i unicitat. Així i tot, si relaxem la condició de regularitat de b i tan sols suposem que és continu, l'existència és garantida, com exhibeix el següent resultat.

Teorema 2.1.2 (de Peano)**.** Sigui b un camp vectorial definit en un obert que conté el rectangle $D \coloneqq \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N : |t - t_0| \leq \alpha \text{ i } |x - x_0| \leq \beta\}$. Aleshores existeix una solució local de (2.1.2); és a dir, definida en un interval contingut en l'interval de definició de l'equació diferencial.

Observem que fins ara, els resultats d'existència garanteixen l'existència local d'una solució; o sigui aquesta solució podria no estar definida en tot l'interval de definició de l'equació diferencial. Resultats clàssics mostren que les solucions (improrrogables) esgoten o bé el temps, o bé l'espai. Si $b : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ és un camp vectorial continu, fitat i de classe Lipschitz respecte de la segona variable i continu respecte de la primera, donada una solució $\gamma : (t_1, t_2) \to \mathbb{R}^N$ del problema de Cauchy associat, tenim que, per a $t_1 < t < t' < t_2$

$$|\gamma(t') - \gamma(t)| \leq \int_t^t |b(s, \gamma(s))| \, ds \leq \sup_{(t,x) \in D} |b(t, x)| \cdot |t' - t| \tag{2.1.5}$$

i, per tant, γ és de classe Lipschitz. Resulta que les funcions de classe Lipschitz admeten una única extensió a l'adherència del domini de definició. En aquest cas, $\gamma(t_1) \coloneqq \sup_{t \in (t_1, t_2)} \gamma(t) - \mathrm{Lip}(\gamma) \cdot \|t - t_1\|$

Seria raonable pensar que donat dos problemes de Cauchy associats a la mateixa equació diferencial la condició inicial dels quals és propera l'una de l'altra tingui solucions dels respectius problemes properes les unes de les altres. Concretem-ho: siguin $b \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ un camp vectorial de classe Lipschitz respecte de la segona variable i uniformement respecte de la primera, i γ i $\tilde{\gamma}$ dues solucions de la mateixa equació diferencial, però amb condicions inicials $\gamma(t_0) = x_0$ i $\tilde{\gamma}(t_0) = \tilde{x}_0$. Aleshores,

$$\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t) = x_0 - \tilde{x}_0 + \int_{t_0}^t b(s, \gamma(s)) - b(s, \tilde{\gamma}(s)) \, ds. \tag{2.1.6}$$

Per tant, $|\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t)| \leq |x - x_0| + \mathrm{Lip}(b) \int_{t_0}^t |\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t)| \, ds$ i usant una de les desigualtats de Grönwall acabem obtenint que $|\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t)| \leq |x_0 - \tilde{x}_0| \cdot e^{\mathrm{Lip}(b)|t - t_0|}$; o sigui, les solucions depenen contínuament de les condicions inicials.

De la mateixa manera que ens hem preguntat com es veuen alterades les solucions quan fem variar les condicions inicials, ens podem plantejar com varien les solucions si mantenim les condicions inicials, però fem variar el camp vectorial b. A fi de poder detallar aquesta pregunta cal introduir una noció de distància en l'espai $\mathrm{Lip}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)$. Treballarem en l'espai normat $(\mathrm{Lip}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N), \|\cdot\|_\infty)$

Siguin γ i $\tilde{\gamma}$ dues solucions de les equacions diferencials $\dot{\gamma}(t) = b(t,\gamma(t))$ i $\dot{\tilde{\gamma}}(t) = \tilde{b}(t,\tilde{\gamma}(t))$ respectivament i tals que $\gamma(t_0) = x_0 = \tilde{\gamma}(t_0)$. Aleshores,

$$\begin{aligned}
|\gamma(t)-\tilde{\gamma}(t)| &\leq \int_{t_0}^t |b(s,\gamma(s)) - \tilde{b}(s,\tilde{\gamma}(s))|\,ds \\
&\leq \int_{t_0}^t |b(s,\gamma(s)) - b(s,\tilde{\gamma}(s))| + \int_{t_0}^t |b(s,\tilde{\gamma}(s)) - \tilde{b}(s,\tilde{\gamma}(s))|\,ds \\
&\leq \int_{t_0}^t \mathrm{Lip}(b)|\gamma(s)-\tilde{\gamma}(s)|\,ds + \int_{t_0}^t \|b-\tilde{b}\|_\infty \\
&\leq |t-t_0|\cdot\|b-\tilde{b}\|_\infty\cdot e^{\mathrm{Lip}(b)|t-t_0|},
\end{aligned} \tag{2.1.7}$$

que prova que les solucions depenen contínuament respecte dels camps vectorials que defineixen l'equació diferencial.

Teorema 2.1.3. Sigui $b : D \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ un camp vectorial continu i fitat. Suposem que b és de classe Lipschitz respecte de la segona variable i uniformement respecte de la primera en qualsevol rectangle fitat contingut en D. Fixat $(t_0, x_0) \in D$, existeix una única solució del problema de Cauchy (2.1.2) i es pot estendre de manera que la seva gràfica toqui la frontera de D.

Vegem ara el concepte de flux d'un camp vectorial.

Definició 2.1.4 (Flux en un conjunt X)**.** Donat un conjunt X, un flux en X és una acció del grup (additiu) $\mathbb{R}$ sobre X; és a dir, una aplicació $\varphi : \mathbb{R}\times X \to X$ tal que per a qualsevol element $x \in X$ i qualssevol nombres reals $s,t \in \mathbb{R}$, $\varphi(0,x) = x$ i $\varphi(t,\varphi(s,x)) = \varphi(t+s,x)$.

Sigui ara $b : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ un camp vectorial continu i $\gamma : [t_1,t_2] \to \mathbb{R}^N$ una solució del problema de Cauchy (2.1.2). Aleshores, l'aplicació $\varphi : \mathbb{R}\times(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$ tal que $\varphi(t,(t_0,x_0)) = (t_0+t, \gamma(t_0+t))$ és un flux sobre $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$.

Definició 2.1.5 (Flux clàssic d'un camp vectorial)**.** Siguin $b : I\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ un camp vectorial continu i fitat, on $I \subset \mathbb{R}$ és un obert, i $t_0 \in I$. El flux (clàssic) de b_0 que comença a t_0 és una aplicació $X : I\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ que verifica que

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial X}{\partial t}(t,x) = b(t,X(t,x)) \\
&X(t_0,x) = x.
\end{aligned} \tag{2.1.8}$$

2.2 Equacions lineals de transport

Explicitem el lligam que existeix entre la teoria d'equacions diferencials i l'equació del transport.

Sigui $u : [0,T]\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ una aplicació contínua. L'equació del transport és la següent equació en derivades parcials

$$\partial_t u(t,x) + b(t,x)\cdot\nabla u(t,x) = 0, \text{ per a } (t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}^N. \tag{2.2.1}$$

Proposició 2.2.1. Sigui $b : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ un camp vectorial suau i fitat. Aleshores,

1. Una solució del problema de Cauchy

$$\begin{aligned} \partial_t u + b \cdot \nabla u &= 0 \\ u(0,x) &= u^0(x) \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

   és $u^0(X^{-1}(t,(0,x)))$, on $X : \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}^N$ és el flux de b.

2. La solució del problema de Cauchy

$$\begin{aligned} \dot{X} &= b(t,X) \\ X(t_0,(t_0,x_0)) &= x_0 \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

   és $X = (X_1, \dots, X_N)$, on X_i és una solució del problema de Cauchy

$$\begin{aligned} \partial_t u + b \cdot \nabla u &= 0 \\ u(0,(x_1,\dots,x_N)) &= x_i \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

   per a qualsevol $i \in \{1, \dots, N\}$.

Demostració. Provem el primer dels resultats. Sigui u una solució al problema de Cauchy i $X(t,(t_0,x)) = (X_1(t,t_0,x), \dots, X_N(t,t_0,x))$ les aplicacions coordenada del flux de b. Demostrem que la quantitat $u(t, X(t,(0,x)))$ roman constant.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(u(t,X(t,(0,x)))\right) &= \frac{du}{dt}(t,X(t,(0,x))) + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i}(t,X(t,(0,x))) \cdot \frac{\partial X_i}{\partial t}(t,x) \\ &= \frac{du}{dt}(t,X(t,(0,x))) + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i}(t,X(t,(0,x)))b_i(t,X(t,(0,x))) \\ &= \frac{du}{dt}(t,X(t,(0,x))) + b(t,X(t,(0,x))) \cdot \nabla u(t,X(t,(0,x))) = 0 \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

Per tant, pel teorema fonamental del càlcul, obtenim que $u(t,X(t,(0,x))) = u(0,x) = u^0(x)$. Si componem aquestes expressions amb el flux invers X^{-1} resulta que $u(t,x) = u^0(X^{-1}(t,(0,x)))$.

Demostrem ara el segon resultat. Per a $i \in \{1,\dots,N\}$ fixat a partir de la solució de (2.2.4), podem dir que $u(0,x) = u(t,X(t,x))$ i, per tant, que $u(0,X^{-1}(t,x)) = u(t,x)$, ja que podem usar el resultat anterior. Així, la component i-èsima del flux invers de X és, precisament, $u(t,x)$. Una última comprovació conclou la demostració. $\square$

Observació 2.2.2. El mateix càlcul serveix per a arribar a una conclusió anàloga si, en lloc de considerar el problema de Cauchy (2.2.2), se'n considera aquest altre

$$\begin{aligned} \partial_t u + b \cdot \nabla u &= f(t,x) \\ u(0,x) &= u^0(x) \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

per a una funció f tan regular com faci falta. En aquest cas, l'equació (2.2.5) pren la forma

$$u(t,X(t,(0,x))) = u^0(x) + \int_0^t f(s,X(s,(0,s)))\,ds. \tag{2.2.7}$$

Aquest resultat evidencia el fet que trobar el flux de b és equivalent al fet de resoldre l'equació del transport en el supòsit que b sigui suau.

2.3 Convergència feble i convergència feble*

Sigui $(X, \|\cdot\|_X)$ un espai normat. Si X és de dimensió finita, el Teorema de Bolzano-Weierstrass assegura que tota successió $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ fitada té una parcial convergent. De fet, un teorema de Riesz garanteix que un espai normat X és de dimensió finita si, i només si, la bola unitat tancada és compacta. Així doncs, per a espais normats de dimensió infinita s'ha de considerar una topologia diferent de l'original per a poder definir una nova noció de convergència que asseguri que tota successió fitada té una parcial convergent. És més, per a poder dir que la bola unitat tancada en un espai normat de dimensió infinita és compacta cal que la topologia que hi considerem sigui no-normable o, en altres paraules, que no provingui de cap norma.

Aquest resultat no és cert per a espais de dimensió infinita. Per exemple, podem considerar la successió $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \ell^2(\mathbb{N})$, on cada e_n és la successió definida per $e_n^{(m)} := \delta_{n,m}$, on $e_m^{(m)}$ és l'element m-èsim de la n-èsima successió. Observem que $\|e_n - e_m\|_{\ell^2(\mathbb{N})} = \sqrt{2}$ si $n \neq m$. Així doncs, no només $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no és convergent, per no ser de Cauchy, sinó que no té cap parcial convergent, però ens agradaria poder dir que e_n convergeix cap a $0 \in \ell^2(\mathbb{N})$.

L'objectiu d'aquesta subsecció és definir una nova noció de convergència que permeti de garantir que de tota successió fitada en podem extreure una successió parcial que sigui convergent. Per a fer-ho, introduïm la noció de convergència feble.

Donat un espai normat $(X, \|\cdot\|_X)$ sobre un cos $\mathbb{K}$, la convergència usual es defineix a partir de la topologia induïda per la norma $\|\cdot\|_X$. En lloc de considerar-hi aquesta topologia, n'hi definirem una altra. Es defineix la topologia feble τ_w en X com la topologia inicial respecte de X^*. O sigui, la topologia feble en X és la topologia més feble (o grollera) que fa que totes les formes lineals $X \to \mathbb{K}$ siguin contínues. Tot obert de τ_w és unió de conjunts de la forma $\Lambda^{-1}(V)$, on $V \subset \mathbb{R}$ és un obert i $\Lambda : X \to \mathbb{K}$ és una forma lineal.

Ara definim la noció de convergència amb aquesta nova topologia. Sigui $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ una successió. Que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergeixi cap a $0 \in X$ amb la topologia induïda per la norma $\|\cdot\|_X$ és dir que per a cada obert U (de la topologia original) tal que $0 \in U$, existeix $N_U \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$ per a tot $n \geq N_U$. Anàlogament, diem que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergeix feblement cap a $0 \in X$ si per a tot $U \in \tau_w$ existeix $N_U \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$ per a tot $n \geq N_U$. Observem que tot obert $U \in \tau_w$ tal que $U \ni 0$ conté un entorn de la forma $V = \{x \in X : |\Lambda_i(x)| < r_i : i \in \{1, \dots, n\}\}$, on $\Lambda_i \in X^*$ i $0 < r_i \in \mathbb{R}$. Per tant, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergeix feblement cap a 0 si, i només si, $\Lambda(x_n) \to 0$ per a tot $\Lambda \in X^*$.

Usant la linealitat dels elements de X^*, diem que x_n convergeix feblement cap a x si $\Lambda(x_n) \to \Lambda(x)$ per a cada $\Lambda \in X^*$.

Tornant a l'exemple anterior, vegem que $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergeix feblement cap a $0 \in \ell^2(\mathbb{N})$. Sigui $\Lambda \in (\ell^2(\mathbb{N}))^*$. Com que $(\ell^2(\mathbb{N}), \langle , \rangle_{\ell^2(\mathbb{N})})$ és un espai de Hilbert, sabem que, pel teorema de representació de Riesz, Λ és de la forma $\Lambda(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = \langle \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}} \rangle_{\ell^2(\mathbb{N})}$, per a cert $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$. Per tant, $\Lambda(\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = \overline{\beta_n} \to 0 = \Lambda((0, \dots, 0, \dots))$, ja que $\beta_n \to 0$.

Enunciem un seguit de propietats elementals relacionades amb la convergència feble de successions.

Proposició 2.3.1. Sigui $(X, \|\cdot\|_X)$ un espai normat i $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ una successió d'elements de X. Es verifica que:

1. Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergeix cap a x, aleshores $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergeix feblement cap a x.
2. Els límits febles són únics.
3. Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergeix feblement cap a un element $x \in X$, llavors la successió $\{\|x_n\|_X\}_{n\in\mathbb{N}}$ és fitada

El següent resultat concreta la idea que per a demostrar que una successió convergeix feblement cap a un element, pot ser suficient comprovar-ho en un conjunt dens de X^*.

Proposició 2.3.2. Sigui $(X, \|\cdot\|_X)$ un espai normat, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ una successió d'elements de X i $M \subset X^*$ un subespai dens. Si es verifica que $\{\|x_n\|_X\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ és fitada i que per a cada $f \in M \subset X^*$, $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \to f(x)$, aleshores $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergeix feblement cap a x.

Vegem un exemple que és d'especial interès per la relació que té amb els espais de funcions amb els quals acostumem a treballar.

Exemple 2.3.3. Prenem un nombre real $p \in [1, \infty)$, $q \in (1, \infty]$ el seu exponent conjugat, i considerem un obert fitat $U \subset \mathbb{R}^N$ per a $N \geq 2$ i considerem l'espai normat $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p(\Omega)})$. Prenem una successió $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$. Que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergeixi feblement cap a f vol dir que per a qualsevol forma lineal contínua $\Lambda : L^p(\Omega) \to \mathbb{C}$, $\Lambda(f_n) \to \Lambda(f)$. Sabem que $L^p(\Omega) \cong (L^q(\Omega))^*$ i que, de fet, l'aplicació $\varphi : L^p(\Omega) \to (L^q(\Omega))^*$ definida per l'assignació

$$\varphi(f) := \int_\Omega f\overline{g}\, dx \tag{2.3.1}$$

és un isomorfisme isomètric. Per tant, que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergeixi feblement cap a f és dir que $\left\{\int_\Omega f_n\overline{g}\, dx\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergeixi cap a $\int_\Omega fg\, dx$ per a tota $g \in L^q(\Omega)$.

Considerem ara l'espai normat $(X^*, \|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,\mathbb{C})})$, on $(X, \|\cdot\|_X)$ és un espai normat. Sigui $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X^*$ una successió de formes lineals contínues. Diem que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergeix feblement* cap a $f \in X^*$ si $f_n(x) \to f(x)$ per a tot $x \in X$.

Observació 2.3.4. Donat un espai normat $(X, \|\cdot\|_X)$, tenim tres tipus de convergència en $(X^*, \|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,\mathbb{K})})$. Sigui $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X^*$.

1. Convergència en $(X^*, \|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,\mathbb{K})})$. Diem que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergeix cap a f si $\|f_n - f\|_{\mathcal{L}(X,\mathbb{K})} \to 0$.
2. Convergència feble en $(X^*, \|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,\mathbb{K})})$. Diem que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergeix feblement cap a f si $g(f_n) \to g(f)$ per a tot $g \in (X^*)^*$.
3. Convergència feble* en $(X^*, \|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,\mathbb{K})})$. Diem que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergeix feblement* cap a f si $f_n(x) \to f(x)$ per a tot $x \in X$.

En general, la convergència (forta) implica la convergència feble i la convergència feble implica la convergència feble*. Per a veure l'última implicació, podem considerar la inclusió $\iota : X \hookrightarrow (X^*)^*$, definida per $\iota(x) := g_x$, on $g_x : X^* \to \mathbb{K}$ ve definida per $g_x(f) = x$, i pensar cada element $x \in X$ com $g_x \in (X^*)^*$.

Proposició 2.3.5. Sigui $(X, \|\cdot\|_X)$ un espai normat reflexiu sobre un cos $\mathbb{K}$. Aleshores, en $(X^*, \|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,\mathbb{K})})$ la topologia feble i la topologia feble* coincideixen.

Demostració. Primer de tot, com que és sabut que l'espai dual d'un espai normat és un espai de Banach, $(X^*, \|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,\mathbb{K})})$ és un espai de Banach i, per tant, $X^{**} = X$ també ho és. Sigui $\Lambda \in X^*$ una forma lineal contínua i $\{\Lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X^*$ una successió de formes lineals contínues tals que $\{\Lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergeix feblement cap a Λ. Aleshores, $\{\eta(\Lambda_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergeix cap a $\eta(\Lambda)$ per a qualsevol $\eta \in X^{**}$. Ara bé, com que X és reflexiu, η ha de ser una aplicació d'avaluació $\delta_x : X^* \to \mathbb{K}$ definida per l'assignació $\delta_x(\nu) = \nu(x)$, per a $\nu \in X^*$. Per tant, $\{\delta_x(\Lambda_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergeix cap a $\delta_x(\Lambda)$ per a qualsevol $x \in X$, i això és dir que $\{\Lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergeix feblement* cap a Λ.

Recíprocament, si $\{\Lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergeix cap a $\Lambda \in X^*$, aleshores $\{\delta_x(\Lambda_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergeix cap a $\delta_x(\Lambda)$ per a qualsevol $x \in X$. Com que X és reflexiu, la isometria $X \hookrightarrow X^{**}$ que ens permet pensar un element de X com un element de X^{**} és exhaustiva. Aleshores, la convergència anterior és equivalent a dir que $\{\eta(\Lambda_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergeix cap a $\eta(\Lambda)$ per a qualsevol $\eta \in X^{**}$; o sigui que, $\{\Lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergeix feblement cap a Λ. □

Exemple 2.3.6. Sigui $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ un espai de Hilbert i $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ una successió d'elements ortonormals dos a dos. Aleshores, donat $x \in H$, de la desigualtat de Bessel resulta que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle_H|^2 \le |\langle x, x\rangle_H| \tag{2.3.2}$$

i que, per tant, $\{\langle x, e_n\rangle_H\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergeix cap a 0 si $n \to \infty$ o, dit d'una altra manera, $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergeix feblement cap a 0. Com a cas particular, podríem escollir la successió $e_n := \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(n\cdot)$ o $e_n := \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(n\cdot)$, que és una base ortonormal de $L^2([-\pi,\pi])$ i adonar-nos que el teorema de Riemann-Lebesgue en $L^2([-\pi,\pi])$, que diu que $\hat{f}(\xi) \to 0$ si $|\xi| \to \infty$ per a qualsevol $f \in L^2$, on $\hat{f}$ és la transformada de Fourier en $L^2([-\pi,\pi])$, és conseqüència d'aquest resultat més general. Notem també que a diferència de la convergència usual, passa que $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ convergeix cap a zero feblement malgrat que $\|e_k\|_{L^2([-\pi,\pi])} = 1$ per a qualsevol $k \in \mathbb{N}$.

Presentem tot seguit el resultat més important d'aquesta subsecció i estudiem el lligam que té amb les equacions diferencials en derivades parcials.

Teorema 2.3.7 (de Banach-Alaoglu)**.** Sigui $(X, \|\cdot\|_X)$ un espai normat. La bola unitat tancada de X^* (amb la topologia original) és feblement* compacta.

El teorema de Banach-Alaoglu garanteix que conjunts fitats i tancats són compactes per a una certa topologia, i això permet de trobar punts d'acumulació. Aquest resultat té unes conseqüències immediates pel que fa a les equacions diferencials en derivades parcials. Concretament, que un control de normes, com per exemple pugui ser d'una successió de funcions en un cert espai, assegura que aquesta successió de punts d'acumulació. Ara la pregunta és si els punts d'acumulació així trobats posseeixen o no les propietats que desitgem.

2.4 Espais de Sobolev

En aquesta secció introduïm algunes definicions i resultats elementals sobre els espais de Sobolev. Els espais de Sobolev són el context en el qual DiPerna-Lions van desenvolupar el seu esquema per a emprendre l'estudi de les equacions diferencials en derivades parcials. Els avantatges de treballar amb aquests espais són múltiples, però un dels motius de fons més importants per a fer-ho és el lligam que brinda entre les equacions diferencials i l'anàlisi funcional. Concretament, serem capaços de parlar d'operadors que capturin l'essència d'una equació diferencial definida en un cert espai i convertir, per exemple, un problema de Cauchy en un problema d'anàlisi funcional. Seguim els continguts de [3].

Suposem que $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$. Per a qualsevol $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ podem observar que, en virtut de la fórmula d'integració per parts i del fet que φ sigui de suport compacte, es té que

$$\int_\Omega u \cdot \varphi_{x_i}\, dx = -\int_\Omega u_{x_i} \cdot \varphi\, dx \tag{2.4.1}$$

per a qualsevol $i \in \{1, \dots, N\}$. De forma més general, fixats un nombre natural k, una funció $u \in \mathcal{C}^k(\Omega)$ i un multiíndex $\alpha \coloneqq (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$ d'ordre k; és a dir, de manera que $|\alpha| \coloneqq \alpha_1 + \dots + \alpha_N = k$, resulta que

$$\int_\Omega u \cdot D^\alpha(\varphi)\, dx = (-1)^{|\alpha|} \cdot \int_\Omega D^\alpha(u) \cdot \varphi\, dx, \tag{2.4.2}$$

perquè

$$D^\alpha(\varphi) = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}(\varphi) \tag{2.4.3}$$

i, per tant, podem fer servir $|\alpha|$ cops la igualtat (2.4.1).

Notem que la part esquerra de (2.4.2) té sentit en el supòsit que u sigui localment integrable, ja que $D^\alpha(\varphi)$ és de suport compacte. Ara bé, per tal que el membre de la dreta de la igualtat tingui sentit, sí que cal que $u \in \mathcal{C}^k(\Omega)$.

Amb l'esperit de flexibilitzar la rigidesa amb la qual hom es veu abocat quan treballa en espais tan agraïts com puguin ser l'espai $\mathcal{C}^k(\Omega)$, introduïm una nova noció de derivada d'una funció, que en captura la idea de la versió clàssica mitjançant la fórmula d'integració per parts. Veurem seguidament com aquesta definició de derivada n'estén la noció clàssica.

Definició 2.4.1. Siguin $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un obert, $\alpha \in \mathbb{N}^N$ un multiíndex i $u, v \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ dues funcions. Diem que v és la α-èsima derivada feble de u si

$$\int_\Omega u \cdot D^\alpha(\varphi)\, dx = (-1)^{|\alpha|} \cdot \int_\Omega v \cdot \varphi\, dx \tag{2.4.4}$$

per a qualsevol $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$.

És clar que per a funcions $u \in \mathcal{C}^k(\Omega)$, la seva derivada (clàssica) coincideix amb la seva derivada feble, perquè en aquest cas u verifica l'equació (2.4.2). És en aquest sentit que la noció de derivada feble estén la definició de derivada clàssica. Observem també que de la definició que hem donat s'intueix que de α-èsima derivada feble de u només n'hi ha una. El següent resultat palesa aquesta afirmació.

Lema 2.4.2. Per a un multiíndex $\alpha \in \mathbb{N}^N$ i una funció $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, si existeix alguna α-èsima derivada feble de u, aquesta és única.

Demostració. Suposem que $v, w \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ són dues derivades α-èsimes de u. Aleshores,

$$(-1)^{|\alpha|} \cdot \int_\Omega v \cdot \varphi\, dx = \int_\Omega u \cdot D^\alpha(\varphi)\, dx = (-1)^{|\alpha|} \cdot \int_\Omega w \cdot \varphi\, dx \tag{2.4.5}$$

per a qualsevol $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. Per tant,

$$\int_\Omega (v-w)\cdot\varphi\, dx = 0 \tag{2.4.6}$$

per a qualsevol $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, fet que implica que $v(x) = w(x)$ gairebé per a tot $x \in \mathbb{R}^N$, que és el que volíem demostrar. $\square$

Introduïm ara la definició dels espais de Sobolev.

Definició 2.4.3. Fixat $p \in [1,\infty]$ i un nombre natural k, el conjunt

$$W^{k,p}(\Omega) \coloneqq \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ per a qualsevol } |\alpha| \le k\} \tag{2.4.7}$$

el conjunt de les funcions $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tals que $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ i que per a qualsevol multiíndex $\alpha \in \mathbb{N}^N$ amb $|\alpha| \le k$ es té que $D^\alpha(u) \in L^p(\Omega)$.

Observació 2.4.4. L'espai de Sobolev $W^{1,2}(\Omega)$ és d'especial interès perquè el podrem dotar d'un producte escalar amb el qual esdevingui un espai de Hilbert. Posarem $H^k(\Omega) \coloneqq W^{k,2}(\Omega)$.

Definim tot seguit una aplicació en els espais de Sobolev, que després demostrarem que n'és una norma. Més endavant veurem que els espais de Sobolev amb aquesta norma són, de fet, un espai de Banach.

Definició 2.4.5. Per a un $p \in [1,\infty]$, un nombre natural k i $u \in W^{k,p}(\Omega)$, definim l'aplicació $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)} : W^{k,p} \to \mathbb{R}$ donada per l'assignació següent:

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \coloneqq \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha|\le k} \int_\Omega |D^\alpha u|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}, \text{ per a } p \in [1,\infty) \\ \sum_{|\alpha|\le k} \operatorname{ess\,sup}_\Omega |D^\alpha(u)|, \text{ per a } p = \infty. \end{cases} \tag{2.4.8}$$

Aprofitem ara per a recordar que, en aquest context, el suprem essencial d'una funció $f \in L^\infty(\Omega)$ és

$$\operatorname{ess\,sup}(f) \coloneqq \inf\{a \in \mathbb{R} : |f^{-1}(a,\infty)| = 0\}, \tag{2.4.9}$$

on $|\cdot|$ fa referència a la mesura de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$.

Enunciem ara alguns resultats elementals sobre els espais de Sobolev i les derivades febles.

Teorema 2.4.6. Siguin $p \in [1,\infty]$, k un nombre natural, $u, v \in W^{k,p}(\Omega)$ dues funcions i $\alpha \in \mathbb{N}^N$ un multiíndex amb $|\alpha| \le k$. Aleshores,

1. $D^\alpha(u) \in W^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$ i $D^\beta(D^\alpha(u)) = D^\alpha(D^\beta(u)) = D^{\alpha+\beta}(u)$, on $\beta \in \mathbb{N}^N$ és un multiíndex qualsevol tal que $|\alpha| + |\beta| \le k$.
2. Per a qualssevol $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda u + \mu v \in W^{k,p}(\Omega)$ i $D^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha(u) + \mu D^\alpha(v)$.
3. Si $V \subset \Omega$ és un obert, aleshores $u \in W^{k,p}(V)$.
4. Si $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, aleshores $\varphi u \in W^{k,p}(\Omega)$ i, de fet,

$$D^\alpha(\varphi u) = \sum_{|\beta|\le|\alpha|} \binom{|\alpha|}{|\beta|} D^\beta(\varphi) D^{|\alpha|-|\beta|}(u), \tag{2.4.10}$$

on $\beta \in \mathbb{N}^N$ és un multiíndex amb $|\beta| \le k$.

Observació 2.4.7. De la definició és immediat comprovar que per a qualssevol $N \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ obert, $p \in [1,\infty]$ i $k \in \mathbb{N}$, $W^{k,p}(\Omega)$ és un $\mathbb{C}$-espai vectorial.

Vegem ara que $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ és una norma en $W^{k,p}(\Omega)$. Això ens permetrà de definir una noció de convergència en $W^{k,p}(\Omega)$.

Lema 2.4.8. L'aplicació $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)} : W^{k,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ és una norma en $W^{k,p}(\Omega)$.

Demostració. Siguin $u, v \in W^{k,p}(\Omega)$ i $\lambda \in \mathbb{R}$. Per una banda, $\|\lambda \cdot u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = |\lambda| \cdot \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ perquè totes les aplicacions involucrades són absolutament homogènies.

Per altra banda, també és clar que $\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = 0$ si, i només si, $u = 0$. Per a acabar, cal demostrar que $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)} : W^{k,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ satisfà la desigualtat triangular. Notem que, per a $p \in [1,\infty)$,

$$\begin{aligned} \|u+v\|_{W^{k,p}(\Omega)} &= \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha(u) + D^\alpha(v)\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \left(\|D^\alpha(u)\|_{L^p(\Omega)} + \|D^\alpha(v)\|_{L^p(\Omega)}\right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\sum_{|\alpha|\leq l} \|D^\alpha(u)\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{|\alpha|\leq l} \|D^\alpha(v)\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} + \|v\|_{W^{k,p}(\Omega)}. \end{aligned} \tag{2.4.11}$$

□

Teorema 2.4.9. Per a $p \in [1,\infty]$ i k un nombre natural, l'espai de Sobolev $(W^{k,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)})$ és un espai de Banach.

Demostració. Com que l'aplicació $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ és una norma en $W^{k,p}(\Omega)$, n'hi ha prou si demostrem que $W^{k,p}(\Omega)$ és complet respecte de la norma $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$. Sigui $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ una successió de Cauchy en $W^{k,p}(\Omega)$. Aleshores, per a cada $|\alpha| \leq k$, $\{D^\alpha(u_m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ és una successió de Cauchy perquè

$$\|D^\alpha(u_m) - D^\alpha(u_n)\|_{L^p(\Omega)} \leq \sum_{|\beta|\leq k} \|D^\beta(u_m) - D^\beta(u_n)\|_{L^p(\Omega)} = \|u_m - u_n\|_{W^{k,p}(\Omega)} \tag{2.4.12}$$

per a qualsevol multiíndex $\beta \in \mathbb{N}^N$. Com que $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p(\Omega)})$ és un espai complet, existeix una funció $u_\alpha \in L^p(\Omega)$ tal que $\{D^\alpha(u_m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ convergeix cap a u_α en $L^p(\Omega)$ per a cada $|\alpha| \leq k$. En particular, es té que $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ convergeix cap a $u_{(0,\ldots,0)} =: u$ en $L^p(\Omega)$. Demostrem que, de fet, $u \in W^{k,p}(\Omega)$ i que $D^\alpha(u) = u_\alpha$ per a qualsevol $|\alpha| \leq k$.

Sigui $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$. Aleshores,

$$\begin{aligned} \int_\Omega u \cdot D^\alpha(\varphi)\,dx &= \lim_{m\to\infty} \int_\Omega u_m \cdot D^\alpha(\varphi)\,dx \\ &= \lim_{m\to\infty} (-1)^{|\alpha|} \cdot \int_\Omega D^\alpha(u_m) \cdot \varphi\,dx = (-1)^{|\alpha|} \cdot \int_\Omega u_\alpha \cdot \varphi\,dx; \end{aligned} \tag{2.4.13}$$

és a dir, que $D^\alpha(u) = u_\alpha$. La primera igualtat és conseqüència del fet que $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ convergeixi cap a u en $L^p(\Omega)$; la segona, de la definició de derivada feble de $u_m \in W^{k,p}(\Omega)$; i la tercera, del fet que $\{D^\alpha(u_m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ convergeixi cap a u_α en $L^p(\Omega)$.

Això conclou la prova, ja que $\{D^\alpha(u_m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ convergeix cap a $u_\alpha = D^\alpha(u)$ per a qualsevol $|\alpha| \leq k$ i, per tant, $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ convergeix cap a u en $W^{k,p}(\Omega)$. □

2.4.1 Aproximació per funcions suaus

En aquesta subsecció esbrinem sota quines condicions és possible de garantir l'existència d'una successió de funcions que convergeixi cap a una funció $f \in L^p_{\text{loc}}(\Omega) \cup W^{k,p}_{\text{loc}}(\Omega)$ donada.

Donat un obert $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ i $\varepsilon > 0$, definim $\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$. Observem que en cas que $\Omega = \mathbb{R}^N$, $\Omega_\varepsilon = \mathbb{R}^N$.

Definim la funció $\eta : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ donada per l'assignació

$$\eta(x) := \begin{cases} C \cdot \exp\left(\frac{1}{\|x\|_2 - 1}\right), \text{ si } \|x\|_2 < 1 \\ 0, \text{ altrament,} \end{cases} \tag{2.4.14}$$

on $C \in \mathbb{R}$ és tal que $\int_{\mathbb{R}^N} \eta(x)\, dx = 1$. Ara, per a cada $\varepsilon > 0$, podem considerar $\eta_\varepsilon := \frac{1}{\varepsilon^N} \cdot \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$.

Observem que $\eta_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$, que $\int_{\mathbb{R}^N} \eta_\varepsilon(x)\, dx = 1$ i que $\text{supp}(\eta_\varepsilon) \subset B(0, \varepsilon)$.

A les funcions que compleixen les tres propietats anteriors les anomenarem mol·lificadors estàndards. Notem que des del punt de vista lèxic, aquest nom s'adiu a les propietats matemàtiques que presenten tals funcions, que en certa manera, quan actuen sobre una altra funció, l'assuaveixen o l'ablaneixen, en el sentit que es detalla en el teorema (2.4.12).

Definició 2.4.10. Sigui $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funció localment integrable en $\mathbb{R}^N$, definim el mol·lificador de f com

$$f^\varepsilon := \eta_\varepsilon \star f; \tag{2.4.15}$$

és a dir,

$$f^\varepsilon(x) := \int_\Omega \eta_\varepsilon(x-y) f(y)\, dy = \int_{B(0,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(y) f(x-y)\, dy \tag{2.4.16}$$

Vegem tot seguit algunes de les propietats de les mol·lificacions de les funcions integrables.

Teorema 2.4.11. Sigui $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un obert i $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Aleshores,

1. Per a qualsevol $\varepsilon > 0$, $f^\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_\varepsilon)$.
2. La funció f^ε convergeix puntualment cap a f quan $\varepsilon \to 0$ gairebé per a tot $x \in \Omega$.
3. Si $f \in \mathcal{C}(\Omega)$, aleshores, f^ε convergeix uniformement en compactes de Ω cap a f.
4. Si $1 \leq p < \infty$ i $f \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$, aleshores f^ε convergeix cap a f en $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ quan $\varepsilon \to 0$.
5. Si $1 \leq p < \infty$ i $f \in L^p(\Omega)$, aleshores f^ε convergeix cap a f en $L^p(\Omega)$ quan $\varepsilon \to 0$.

Un altre resultat d'aproximació que involucra les derivades febles i que es desprèn d'aquest teorema és el següent:

Teorema 2.4.12. Sigui $u \in W^{k,p}(\Omega)$, per a $1 \leq p < \infty$. Aleshores, $u_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ i u^ε convergeix cap u en $W^{k,p}_{\text{loc}}(\Omega)$, si $\varepsilon \to 0$.

En general, doncs, l'espai $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ és dens tant en $W^{1,p}(\Omega)$ com en $W^{1,p}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$, però a diferència del espais $L^p(\Omega)$, $C_c^\infty(\Omega)$ no ho és en $W^{1,p}(\Omega)$. Per aquest motiu té sentit introduir un nou espai de Sobolev, que denotarem per $W^{k,p}_0(\Omega)$, i que definim com la clausura de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ amb la norma $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$.

A més a més, $W^{k,p}_0(\Omega)$ és un subespai tancat i no trivial de $W^{k,p}(\Omega)$. En el cas que $\Omega = \mathbb{R}^N$, aquests dos espais coincideixen, és a dir $W^{k,p}_0(\mathbb{R}^N) = W^{k,p}(\mathbb{R}^N)$. Novament, si $p = 2$ escriurem posem $H^1_0(\Omega) := W^{1,2}_0(\Omega)$.

2.4.2 Encabiments de Sobolev

Dediquem aquesta subsecció a estudiar si podem encabir espais de Sobolev en altres espais de Sobolev. Això ens serà útil per a obtenir algunes desigualtats. La motivació és la següent: si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, què podem dir més de u? Podem trobar altres espais més grans que $W^{1,p}(\Omega)$ on u en sigui un element? Podria passar que $u \in L^r(\mathbb{R}^N)$, per a $r > p$? La resposta varia segons quin sigui el valor de p i de N, i totes elles es redueixen a algunes desigualtats.

Teorema 2.4.13. Existeix un encabiment continu $W^{k,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow W^{l,q}(\mathbb{R}^N)$ si $k > l$, $p < N$, $1 \leq p < q < \infty$ i

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{l-k}{n}. \tag{2.4.17}$$

Un cas particularment interessant es produeix si $k = 1$ i $l = 0$. Si reescrivim el teorema anterior, tindrem que existeix un encabiment continu $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$, on $p^\star := \frac{p \cdot N}{N-p} > p$, i s'anomena exponent conjugat de Sobolev de p. Denotarem per $(p^*)'$ l'exponent conjugat de l'exponent conjugat de Sobolev de p, que és

$$(p^*)' = \frac{p^*}{p^*-1} \tag{2.4.18}$$

La prova d'aquest teorema és conseqüència immediata de la desigualtat de Gagliardo-Niremberg-Sobolev, que expressem tot seguit en format de teorema.

Teorema 2.4.14. Sigui $1 \leq p < N$. Existeix una constant C, que depèn exclusivament de p i de N, tal que

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C \cdot \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \tag{2.4.19}$$

per a qualsevol funció $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N)$.

Observem que el teorema anterior ens permet de controlar, a partir de la norma en $L^p(\mathbb{R}^N)$ de la derivada d'una funció, la seva norma en $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$; és a dir, controlar-la per a un valor de p^* concret. Això canvia quan considerem el cas límit en què $p = N$. En aquest cas es té el següent resultat.

Teorema 2.4.15. Existeix un encabiment continu $W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$, on $q \in [N, \infty)$.

Com que sovint treballarem en $W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, definim

$$2^* := \begin{cases} \frac{2\cdot N}{N-2}, \text{ si } N > 2, \\ q \in [2, \infty), \text{ si } N = 2 \end{cases} \tag{2.4.20}$$

i escriurem $(2^*)'$ per a referir-nos a l'exponent conjugat de l'exponent conjugat de Sobolev de 2 si $N > 2$ i, si $N = 2$, a l'exponent conjugat de 2^*.

2.4.3 Espai dual de $H^1(\Omega)$ i espais de Bochner

En aquesta subsecció definirem l'espai dual de $H^1(\Omega)$, els espais de Sobolev homogenis i els espais de Bochner.

Definició 2.4.16. Denotem per $H^{-1}(\Omega)$ l'espai dual de $H_0^1(\Omega)$; és a dir, és l'espai de funcionals lineals i fitats en $H_0^1(\Omega)$.

I aprofitem per a recordar que $H_0^1(\Omega)$ és la compleció de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ respecte de la norma $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$.

El següent resultat caracteritza l'espai $H^{-1}(\Omega)$ i explicita com han de ser els seus elements.

Teorema 2.4.17. Es compleix que

$$H^{-1}(\Omega) = \left\{g + \operatorname{div}(F) : g \in L^2(\Omega) \text{ i } F = (F_1, \dots, F_N) \in (L^2(\Omega))^N\right\} \tag{2.4.21}$$

Demostració. Per una banda, si $g \in L^2(\Omega)$ i $F = (F_1, \dots, F_N) \in (L^2(\Omega))^N$, $g + \operatorname{div}(F)$ defineix un element de $T \in H^{-1}(\Omega)$ donat per l'assignació

$$T(v) := \int_\Omega gv\, dx - \int_\Omega F \cdot \nabla v\, dx. \tag{2.4.22}$$

Que és lineal és evident perquè totes les aplicacions que s'hi veuen involucrades ho són. Per a veure que és contínua, observem que

$$\begin{aligned} |T(v)| = \langle g + \operatorname{div}(F), v\rangle_{H^1(\Omega)} &\leq \|g\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} + \|F\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq (\|g\|_{L^2(\Omega)} + \|F\|_{L^2(\Omega)})\|v\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned} \tag{2.4.23}$$

Per altra banda, en virtut del teorema de representació de Riesz, que $T \in H^{-1}(\mathbb{R}^N)$ és dir que existeixi un element $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $T = \langle \cdot, v\rangle_{H^1(\mathbb{R}^N)}$. Aleshores, per a qualsevol $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$,

$$T(u) = \langle g+\operatorname{div}(F), v\rangle_{H^1(\Omega)} = \langle g, v\rangle_{H^1(\Omega)} + \langle \operatorname{div}(F), v\rangle_{H^1(\Omega)} = \int_{\mathbb{R}^N} uv\, dx + \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla v\, dx. \tag{2.4.24}$$

Aquesta última igualtat es pot entendre en el llenguatge de les distribucions com $T = v + \operatorname{div}(F)$, on $F = -\nabla v$. □

Acabem aquesta subsecció tot definit què són els espais de Bochner, que seran l'ambient on considerarem la majoria de les funcions d'ara endavant.

Definició 2.4.18. Donats un espai de mesura $(T, \mathcal{M}, \mu)$, un espai de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$ i $p \in [1, \infty]$. Definim l'espai de Bochner $L^p(T; X)$ com el conjunt de classes d'equivalència de funcions mesurables $u : T \to X$ de manera que

$$\|u\|_{L^p(T;X)} := \left(\int_T \|u(t)\|_X^p \, d\mu(t) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty. \tag{2.4.25}$$

Considerem dues funcions equivalents si són iguals excepte per a un conjunt de mesura zero.

En el cas del nostre estudi de les equacions diferencials en derivades parcials, sovint considerarem que l'espai de mesura sigui $([0, T], \mathcal{B}([0, T]), \lambda)$, on $T > 0$ i $\mathcal{B}([0, T])$ fa referència als borelians de $[0, T]$ i λ a la mesura de Lebesgue en $[0, T]$. Algunes propietats que exhibeixen aquesta mena d'espais són les següents.

Diem que un espai de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$ té la propietat de Radon-Nikodym si per a qualsevol interval $I \subset \mathbb{R}$, qualsevol funció $f : I \to X$ de classe Lipschitz és derivable gairebé per a tot punt de I.

Teorema 2.4.19. Sigui $(X, \|\cdot\|_X)$ un espai de Banach reflexiu tal que X' té la propietat de Radon-Nikodym. Aleshores, $L^p(T; X)' \cong L^q(T, X')$ per a qualsevol $p \in [1, \infty)$.

Per a ser més explícits, acabem la secció amb el següent resultat.

Teorema 2.4.20. Sigui $(X, \|\cdot\|_X)$ un espai de Banach reflexiu, $p \in (1, \infty)$ i q el seu exponent conjugat. Aleshores, els espais $(L^p([0, T]; X))'$ i $L^q([0, T]; X')$ són isomètricament isomorfs.

Demostració. L'aplicació $\varphi : L^q([0, T], X') \to (L^p([0, T]; X))'$ definida per l'assignació

$$\varphi(g) = \int_0^T \langle \cdot, g \rangle(t) \, dt \tag{2.4.26}$$

és un isomorfisme isomètric entre els dos espais. $\square$

Capítol 3

Existència i unicitat de l'equació lineal del transport

En aquest capítol presentem alguns dels resultats més importants pel que fa a l'equació lineal del transport, basats en [4] i en [5]. L'encetem tot presentant l'esquema de la teoria de DiPerna-Lions per a demostrar l'existència i la unicitat de solucions de l'equació lineal del transport.

3.1 Esquema de DiPerna-Lions

Les tècniques per a demostrar l'existència i la unicitat de l'equació lineal del transport del problema de Cauchy (3.2.1) sota les hipòtesis (3.2.2) és la següent.

Primer de tot, s'obtenen resultats *a priori* mitjançant càlculs formals. Per a efectuar-los, es mol·lifiquen tant els coeficients com la dada inicial mitjançant aproximacions de la identitat, de manera que s'obtenen uns nous coeficients u_ε^0, b_ε i c_ε que són suaus i que quan substitueixen els coeficients originals del problema de Cauchy, ens permeten de garantir que n'existeixen solucions u_ε i que aquestes són úniques.

Segonament, es tracta de demostrar que les solucions u_ε convergeixen, en algun sentit, cap a una funció u que resulta ser, en algun sentit, una solució del problema de Cauchy. Per a fer-ho, calen tant fites prou bones que permetin que un argument de compacitat adient sigui vàlid, com resultats tècnics sobre la convergència, en algun sentit, del commutador $[\rho_\varepsilon, b](\nabla u)$ cap a zero, i aquests esdevenen el punt clau de la demostració.

Per a provar la unicitat, emprarem el fet que les solucions u que hem demostrat que existeixen, no només són solucions febles, sinó que també són solucions renormalitzades, i això és a dir que per a qualsevol $\beta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ la funció $\beta(u)$ també n'és solució. La unicitat serà una conseqüència d'aquest fet, tot observant que tota solució renormalitzada del problema homogeni amb dada inicial $u_0 = 0$ ha de ser idènticament zero, cosa que demostrarem tot escollint una funció β adient.

3.2 Resultat d'existència

En aquesta secció ens plantegem de demostrar que, per a $T > 0$, existeix una solució $u \in L^\infty([0,T]; L^p(\mathbb{R}^N))$ del següent problema de Cauchy

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - b \cdot \nabla u + cu = 0, \text{ en } [0,T] \times \mathbb{R}^N \\ u(x,0) = u^0, \text{ en } \mathbb{R}^N. \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

per a $u^0 \in L^p(\mathbb{R}^N)$.

Teorema 3.2.1. Siguin $p \in [1,\infty]$, $u^0 \in L^p(\mathbb{R}^N)$ i $c \in L^1([0,T]; L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N))$ dues funcions i $b \in L^1([0,T]; (L^q_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N))^N)$ un camp vectorial tals que

$$\begin{aligned} c + \frac{1}{p}\text{div } b \in L^1([0,T]; L^\infty(\mathbb{R}^N)), \text{ si } p > 1 \\ c, \text{div } b \in L^1([0,T]; L^\infty(\mathbb{R}^N)), \text{ si } p = 1. \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

Suposem a més a més que $c + \text{div } b \in L^1([0,T]; L^q_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N))$. Aleshores, existeix una solució del problema de Cauchy (3.2.1).

Demostració. Suposem primer que $p = \infty$, i procedim formalment. A més a més de les mateixes hipòtesis del teorema, suposarem que $u^0, b, c \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. En virtut de la proposició (2.2.1) i del resultat anterior, tenim que

$$u(t, X(t,(0,x))) = u^0(x) + \int_0^t c(s, X(s,(0,x)))u(s, X(s,(0,x)))\, ds. \tag{3.2.3}$$

i si apliquem la desigualtat de triangular, passa que

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \le \|u^0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \int_0^t \|c(s,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \|u(s,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\, ds. \tag{3.2.4}$$

Com que $c \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, llavors $\|c(s,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} < \infty$ i, per la desigualtat de Grönwall,

$$\begin{aligned} \|u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} &\le \|u^0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \exp\left\{\int_0^t \|c(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\right\} \\ &\le \|u^0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \exp\left\{\int_0^T \|c(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\right\} \\ &\le \|u^0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \exp\left\{\|c\|_{L^1([0,T];L^\infty(\mathbb{R}^N))}\right\}. \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

Suposem ara que $1 \le p < \infty$, i mantinguem les hipòtesis de regularitat. Aleshores, com que $\frac{d}{dt}(|u|^p) = p|u|^{p-2}u\frac{d}{dt}u$ i $\nabla(|u|^p) = p|u|u\nabla u$, resulta que si multipliquem cada membre de la igualtat $u_t + b\nabla u = cu$ per $p|u|^{p-2}u$, llavors

$$\frac{d}{dt}(|u|^p) + b \cdot \nabla(|u|^p) = pc|u|^p. \tag{3.2.6}$$

Ara podem integrar en $\mathbb{R}^N$ cada membre de la igualtat anterior. Obtenim que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{d}{dt}(|u|^p)\, dx + \int_{\mathbb{R}^N} b \cdot \nabla(|u|^p)\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} pc|u|^p\, dx. \tag{3.2.7}$$

Com que $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ i com que podem suposar que el nombre de punts on $|u|$ no és derivable (respecte de t) és finit o numerable, podem invocar el Teorema de derivació sota el signe integral per a commutar els operadors d'integració i de derivació. A més a més, podem usar també el Teorema d'integració per parts i com que b és de suport compacte, acabem obtenint que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} b(t,x)\cdot\nabla(|u|^p)(t,x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^N}\sum_{k=1}^n b_k(t,x)\frac{\partial}{\partial x_k}\left(|u|^p\right)(t,x)\,dx\\ &= \sum_{k=1}^n\int_{\mathbb{R}^N} b_k(t,x)\frac{\partial(|u|^p)}{\partial x_k}(t,x)\,dx\\ &= -\sum_{k=1}^n\int_{\mathbb{R}^N}\frac{\partial b_k}{\partial x_k}(t,x)|u|^p\,dx\\ &= -\int_{\mathbb{R}^N}\sum_{k=1}^n\frac{\partial b_k}{\partial x_k}(t,x)|u|^p\,dx = -\int_{\mathbb{R}^N}\operatorname{div}(b)|u|^p\,dx.\end{aligned} \tag{3.2.8}$$

Tot plegat,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\|u(t,\cdot)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)}\right) &= \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^N}\left(|u(t,\cdot)|^p\right)dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^N}(\operatorname{div}\, b(t,\cdot)+pc(t,\cdot))|u(t,\cdot)|^p\,dx\\ &\le \|\operatorname{div}(b(t,\cdot))+pc(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\|u(t,\cdot)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)}.\end{aligned} \tag{3.2.9}$$

Si usem la hipòtesi que $c+\frac{1}{p}\operatorname{div}\, b \in L^1([0,T];L^\infty(\mathbb{R}^N))$ si $p>1$, podem aplicar un dels lemes de Grönwall per a obtenir una nova fita de $\|u(s,\cdot)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)}$. Concretament,

$$\begin{aligned}\|u(s,\cdot)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} &\le \|u(0,\cdot)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)}\exp\left(p\int_0^s\left\|\frac{1}{p}\operatorname{div}\, b(t,\cdot)+c(t,\cdot)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}dt\right)\\ &\le \|u(0,\cdot)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)}\exp\left(p\int_0^T\left\|\frac{1}{p}\operatorname{div}\, b(t,\cdot)+c(t,\cdot)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}dt\right)\\ &\le \|u^0\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)}\exp\left(p\left\|\frac{1}{p}\operatorname{div}\, b+c\right\|_{L^1([0,T];L^\infty(\mathbb{R}^N))}\right).\end{aligned} \tag{3.2.10}$$

Suposarem ara que les funcions c i u^0 i que el camp vectorial b satisfan, només, les hipòtesis del teorema. Sigui $\rho:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ el mol·lificador definit per l'assignació $\rho(x) \coloneqq Ce^{\frac{1}{|x|^2-1}}\chi_{\{|x|<1\}}(x)$, on C és tal que $\int_{\mathbb{R}^N}\rho(x)\,dx=1$, i considerem, per a $\varepsilon>0$ fixat, $\rho_\varepsilon \coloneqq \frac{1}{\varepsilon^N}\rho\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)$. Definim $b_\varepsilon \coloneqq b\star\rho_\varepsilon$, $c_\varepsilon \coloneqq c\star\rho_\varepsilon$ i $u^0_\varepsilon \coloneqq u^0\star\rho_\varepsilon$, on $\star$ és l'operació de convolució. Per exemple,

$$c_\varepsilon(x) = (c\star\rho_\varepsilon)(x) = \int_{\mathbb{R}^N}c(x-y)\rho_\varepsilon(y)\,dy = \int_{B(0,\varepsilon)}c(x-y)\rho_\varepsilon(y)\,dy. \tag{3.2.11}$$

Resultats generals sobre les propietats de l'operació de convolució asseguren que $b_\varepsilon(t,\cdot)\in\mathcal{C}^1_b(\mathbb{R}^N)$, que $c_\varepsilon(t,\cdot)\in\mathcal{C}^1_b(\mathbb{R}^N)$, que $b_\varepsilon\to b$ i $c_\varepsilon+\operatorname{div}\, b_\varepsilon\to c+\operatorname{div}\, b$ en $L^1([0,T];L^q_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N))$ per a $1<p\le\infty$, i que $u^0_\varepsilon\to u^0$ en $L^p(\mathbb{R}^N)$. Aleshores, existeix una única solució

$u_\varepsilon \in \mathcal{C}([0,T]; \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}^N))$ del problema de Cauchy

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - b_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon + c_\varepsilon u_\varepsilon = 0, \text{ si } (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^N \\ &u_\varepsilon(0,x) = u_\varepsilon^0(x), \text{ si } x \in \mathbb{R}^N \end{aligned} \tag{3.2.12}$$

perquè sabem que en el cas suau, tal com es comenta en el capítol de la teoria Cauchy-Lipschitz, el problema de Cauchy té una única solució. És llavors que les fites (3.2.5) i (3.2.10) poden ser demostrades sense procedir formalment ni assumint que $u^0, b, c \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Per tant, per a tot $1 \leq p \leq \infty$ passa que u_ε és fitada independentment de ε en $L^\infty([0,T]; L^p(\mathbb{R}^N))$ perquè les fites són independents de t. En efecte, si $p = \infty$, $\|u_\varepsilon\|_{L^\infty([0,T];L^\infty(\mathbb{R}^N))} = \sup_{t\in[0,T]} \|u_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq C_0\|u^0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$; i si $1 \leq p < \infty$, $\|u_\varepsilon\|_{L^\infty([0,T];L^p(\mathbb{R}^N))} = \sup_{t\in[0,T]} \|u_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C_0\|u^0\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$ també.

Per a $1 < p < \infty$, com que u_ε és fitada en $L^\infty([0,T]; L^p(\mathbb{R}^N))$ i $L^\infty([0,T]; L^p(\mathbb{R}^N))$ és isomètricament isomorf a l'espai dual topològic d'un altre espai de Banach i de fet, $L^\infty([0,T]; L^p(\mathbb{R}^N)) \cong (L^1([0,T]; L^q(\mathbb{R}^N)))^*$ on q és l'exponent conjugat de p, el Teorema de Banach-Alaoglu garanteix l'existència d'una successió $\{\varepsilon_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset (0,\infty)$ amb $\varepsilon_j \to 0$ si $j \to \infty$ tal que la successió parcial $\{u_{\varepsilon_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ convergeix feblement cap a un element $u \in L^\infty([0,T]; L^p(\mathbb{R}^N))$. Demostrem ara que el límit feble és, de fet, una solució en el sentit de les distribucions del problema de Cauchy original. Observem que

$$\begin{aligned} 0 = \lim_{j\to\infty} &- \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u_{\varepsilon_j} \frac{\partial \varphi}{\partial t}\, dx\, dt - \int_{\mathbb{R}^N} u_{\varepsilon_j}^0 \varphi(0,\cdot)\, dx \\ &+ \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u_{\varepsilon_j} \left(\operatorname{div}(b_{\varepsilon_j}\varphi) + c_{\varepsilon_j}\varphi\right)\, dx\, dt \\ = &- \int_0^T \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} u_{\varepsilon_j} \frac{\partial \varphi}{\partial t}\, dx\, dt - \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} u_{\varepsilon_j}^0 \varphi(0,\cdot)\, dx \\ &+ \int_0^T \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} u_{\varepsilon_j} \left(\operatorname{div}(b_{\varepsilon_j}\varphi) + c_{\varepsilon_j}\varphi\right)\, dx\, dt \\ = &- \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u \frac{\partial \varphi}{\partial t}\, dx\, dt - \int_{\mathbb{R}^N} u^0 \varphi(0,\cdot)\, dx \\ &+ \int_0^T \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} u_{\varepsilon_j} \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial(b_{\varepsilon_j}\varphi)}{\partial x_k} + c_{\varepsilon_k}\varphi\right)\, dx\, dt \\ = &- \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u \frac{\partial \varphi}{\partial t}\, dx\, dt - \int_{\mathbb{R}^N} u^0 \varphi(0,\cdot)\, dx \\ &+ \int_0^T \left(\sum_{k=1}^n \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} u_{\varepsilon_j} \frac{\partial(b_{\varepsilon_j}^k\varphi)}{\partial x_k}\, dx + \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} u_{\varepsilon_j} c_{\varepsilon_j}\varphi\, dx\right) dt \\ = &- \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u \frac{\partial \varphi}{\partial t}\, dx\, dt - \int_{\mathbb{R}^N} u^0 \varphi(0,\cdot)\, dx \\ &+ \int_0^T \left(\sum_{k=1}^n \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} u \frac{\partial(b^k\varphi)}{\partial x_k}\, dx + \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} uc\varphi\, dx\right) dt \\ = &- \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u \frac{\partial \varphi}{\partial t}\, dx\, dt - \int_{\mathbb{R}^N} u^0 \varphi(0,\cdot)\, dx + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u \left(\operatorname{div}(b\varphi) + c\varphi\right)\, dx\, dt \end{aligned} \tag{3.2.13}$$

per a qualsevol $\varphi \in \mathcal{C}^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^N)$. Per tant, u és una solució del problema de Cauchy (3.2.1). Hem usat el Teorema de la convergència dominada per a intercanviar el límit i la integral respecte de t, el fet que la convergència usual impliqui la convergència feble i el fet que si una successió de funcions convergeix cap a una funció i si una altra successió de funcions convergeix feblement cap a una altra funció, aleshores la successió producte convergeix feblement cap al producte dels límits.

Per a $p = \infty$, com que $L^\infty([0,T]; L^\infty(\mathbb{R}^N)) \cong L^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^N)$ i $L^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^N)$ és el dual topològic de $L^1([0,T] \times \mathbb{R}^N)$, el Teorema de Banach-Alaoglu garanteix l'existència d'una successió $\{\varepsilon_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset (0,\infty)$, amb $\varepsilon_j \to 0$, de manera que la successió parcial $\{u_{\varepsilon_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ convergeix feblement* cap a un element $u \in L^\infty([0,T]; L^\infty(\mathbb{R}^N))$. Un càlcul com el del cas anterior demostra que el límit feble* és, de fet, una solució en el sentit de les distribucions del problema de Cauchy.

Per a $p = 1$ s'ha d'efectuar un procediment alternatiu als casos anteriors perquè no sabem identificar l'espai $L^\infty([0,T]; L^1(\mathbb{R}^N))$ com al dual topològic d'algun espai de Banach.

Mantinguem les definicions de b_ε, c_ε i u_ε^0. Com que $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ és dens en $L^1(\mathbb{R}^N)$, existeix una successió $\{u_n^0\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ que convergeix cap a u_0 en $L^1(\mathbb{R}^N)$. A més a més del problema de Cauchy (3.2.12), considerem-ne també el següent

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{m,\varepsilon}}{\partial t} - b_\varepsilon \cdot \nabla u_{n,\varepsilon} + c_\varepsilon u_{n,\varepsilon} = 0, \text{ si } (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^N \\ u_{n,\varepsilon}(0,x) = u_n^0(x), \text{ si } x \in \mathbb{R}^N, \end{aligned} \tag{3.2.14}$$

on $u_{n,\varepsilon}$ és, com en el cas anterior, la solució aproximada al problema de Cauchy que té per condició inicial u_n^0.

Aleshores, com que $p = 1$, $c, \operatorname{div}(b) \in L^1([0,T]; L^\infty(\mathbb{R}^N))$ i com que les fites (3.2.9) i (3.2.10) són vàlides per a $p = 1$, existeix un nombre $C_0 > 0$ tal que $\|u_{n,\varepsilon}(t,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq C_0 \cdot \|u_n^0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$ gairebé per a tot $t \in [0,T]$. Notem que, anàlogament als casos anteriors, és una fita independent de ε. Si examinem la funció $u_\varepsilon - u_{n,\varepsilon}$, com que l'equació lineal de transport és lineal, $u_\varepsilon - u_{n,\varepsilon}$ resol una equació de transport amb coeficients b_ε i c_ε, i condició inicial $u_\varepsilon^0 - u_n^0$. Tot plegat, es té que

$$\|u_\varepsilon(t,\cdot) - u_{n,\varepsilon}(t,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq C_0 \|u_\varepsilon^0(t,\cdot) - u_n^0(t,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \tag{3.2.15}$$

gairebé per a tot $t \in [0,T]$. Observem que, com que si $\varepsilon \to 0$, aleshores $u_\varepsilon^0 \to u^0$ en $L^1(\mathbb{R}^N)$ i si $n \to \infty$, llavors $u_n^0 \to u^0$ en $L^1(\mathbb{R}^N)$, ha d'existir una constant $C > 0$ tal que $\|u_\varepsilon^0 - u^0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u_n^0 - u^0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$ per a qualsevol $\varepsilon > 0$ i, per tant,

$$\|u_\varepsilon^0 - u_n^0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq (C+1)\|u^0 - u_n^0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \tag{3.2.16}$$

que és una desigualtat que, combinada amb la inequació (3.2.15), ens permet de deduir que $\|u_\varepsilon(t,\cdot) - u_{n,\varepsilon}(t,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u^0 - u_n^0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$ gairebé per a tot $t \in [0,T]$. Per tant, $\{u_\varepsilon\}_\varepsilon$ és compacte per successions amb la topologia feble a $L^\infty([0,T]; L^1(\mathbb{R}^N))$ i, per tant, és una solució feble del problema de Cauchy (3.2.1). □

3.3 Resultats d'unicitat

Lema 3.3.1. Siguin $p \in [1,\infty]$, $\alpha \geq q$ i $\beta \in [1,\infty]$ tals que $\frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{p}$. Siguin també $u \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ una funció i $b \in W^{1,\alpha}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ un camp vectorial. Aleshores, per a qualsevol compacte $K \subset \mathbb{R}^N$ es té que

$$\|(b \cdot \nabla u) \star \rho_\varepsilon - b \cdot \nabla(u \star \rho_\varepsilon)\|_{L^\beta(K)} \leq C \cdot \|u\|_{L^p(K')} \cdot \|b\|_{W^{1,\alpha}(K')}, \tag{3.3.1}$$

on $C \in \mathbb{R}$ i $K' := K + B(0,1)$.

Demostració. Sigui $K \subset \mathbb{R}^N$ un compacte. Primer de tot, demostrem que $(b \cdot \nabla u) \star \rho_\varepsilon - b \cdot \nabla(u \star \rho_\varepsilon) \in L^\beta(K)$. Posem $A_x := ((b \cdot \nabla u) \star \rho_\varepsilon - b \cdot \nabla(u \star \rho_\varepsilon))(x)$ i observem que

$$\begin{aligned}
A_x &= -\int_{\mathbb{R}^N} \operatorname{div}(b(y)\rho_\varepsilon(x-y))u(y)\,dy - (b \cdot (u \star \nabla\rho_\varepsilon))(x) \\
&= -\int_{\mathbb{R}^N} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial(\rho_\varepsilon(g_x)b^k)}{\partial x_k}(y)u(y) + u(y)b(x) \cdot \nabla\rho_\varepsilon(x-y)\,dy \\
&= -\int_{\mathbb{R}^N} \sum_{k=1}^{n} u(y)(\rho_\varepsilon(g_x))(y)\frac{\partial b^k}{\partial x_k}(y) + \frac{\partial\rho_\varepsilon(g)}{\partial x_k}(y)b^k(y)u(y) + u(y)b(x) \cdot \nabla\rho_\varepsilon(x-y)\,dy \\
&= -\int_{\mathbb{R}^N} u(y)\operatorname{div}(b(y))\rho_\varepsilon(x-y) - u(y)b(y) \cdot \nabla\rho_\varepsilon(x-y) + u(y)b(x) \cdot \nabla\rho_\varepsilon(x-y)\,dy \\
&= -(\operatorname{div}(b)u \star \rho_\varepsilon)(x) + \int_{\mathbb{R}^N} u(y)\nabla\rho_\varepsilon(x-y) \cdot (b(y) - b(x))\,dy,
\end{aligned} \tag{3.3.2}$$

on $g_x : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ ve definida per $g_x(y) = x - y$, per a $x \in \mathbb{R}^N$. Per a deduir la primera igualtat hem usat el fet que $(b \cdot \nabla(u \star \rho_\varepsilon))(x) = (b \cdot (u \star \nabla\rho_\varepsilon))(x)$, que es desprèn de les propietats de l'operació de convolució quan actua sobre funcions test; per a deduir la tercera igualtat hem aplicat la regla de la cadena, i per a deduir la quarta i la cinquena igualtat hem reescrit les expressions anteriors en termes de la divergència de b i de les definicions de convolució.

Vegem ara que $(\operatorname{div}(b)u) \star \rho_\varepsilon \in L^\beta_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$. De fet, n'hi ha prou si comprovem que $\operatorname{div}(b)u \in L^\beta_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$, ja que $\rho_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^N)$. Sigui doncs, $M \subset \mathbb{R}^N$ un compacte. Observem que, com que $\operatorname{div}(b) \in L^\alpha_{\text{loc}}(M)$ perquè $b \in W^{1,\alpha}_{\text{loc}}(M)$, $u \in L^p_{\text{loc}}(M)$, $\frac{1}{\beta} = \frac{1}{p} + \frac{1}{\alpha}$ i $\frac{\alpha+p}{p}$ i $\frac{\alpha+p}{\alpha}$ són exponents conjugats, de la desigualtat de Hölder obtenim que

$$\begin{aligned}
\|\operatorname{div}(b)u\|^\beta_{L^\beta_{\text{loc}}(M)} = \|(\operatorname{div}(b)u)^\beta\|_{L^1_{\text{loc}}(M)} &\le \|\operatorname{div}(b)^\beta\|_{L^{\frac{\alpha+p}{p}}_{\text{loc}}(M)} \|u^\beta\|_{L^{\frac{\alpha+p}{\alpha}}_{\text{loc}}(M)} \\
&= (\|\operatorname{div}(b)\|_{L^\alpha_{\text{loc}}(M)}\|u\|_{L^p_{\text{loc}}(M)})^\beta.
\end{aligned} \tag{3.3.3}$$

A més a més, deduïm que $\|\operatorname{div}(b)u\|_{L^\beta(M)} \le \|\operatorname{div}(b)\|_{L^\alpha(M)}\|u\|_{L^p(M)}$. Tot plegat, es té que $(\operatorname{div}(b)u) \star \rho_\varepsilon$ pot ser fitada de la següent manera:

$$\|(\operatorname{div}(b)u) \star \rho_\varepsilon\|_{L^\beta(K)} \le \|\operatorname{div}(b)u\|_{L^\beta(K')} \le \|\operatorname{div}(b)\|_{L^\alpha(K')}\|u\|_{L^p(K')}. \tag{3.3.4}$$

La segona desigualtat es desprèn de l'observació anterior si prenem $M = K'$.

Fins ara, tenim un dels sumands de (3.3.2) controlat en $L^\beta(K)$. Vegem tot seguit com podem trobar una fita de l'altre tot usant la desigualtat de Cauchy-Schwarz en $\mathbb{R}^N$:

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\mathbb{R}^N} u(y)\nabla\rho_\varepsilon(x-y) \cdot (b(y) - b(x))\,dy \right| \\
&\le \int_{\mathbb{R}^N} |u(y)|\|\nabla\rho_\varepsilon(x-y)\|_{\mathbb{R}^N}\|b(y) - b(x)\|_{\mathbb{R}^N}\,dy \\
&\le \frac{C_N}{\varepsilon m_\varepsilon} \int_{B(x,\varepsilon)} |u(y)| \left\| \nabla\rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) \right\|_{\mathbb{R}^N} \|b(y) - b(x)\|_{\mathbb{R}^N}\,dy.
\end{aligned} \tag{3.3.5}$$

En aquesta última desigualtat, C_N és una constant que depèn de N, però no de ε, tal que $\frac{\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma(\frac{N}{2}+1)} \leq C_N$, i $|B(x,\varepsilon)|$ és la mesura de Lebesgue de $B(x,\varepsilon)$ i Γ, la funció gamma. Denotem per m_ε el volum de la bola $B(0,\varepsilon)$, per a $\varepsilon \in (0,1]$. Com que la mesura de Lebesgue és invariant per a translacions, resulta que $m_\varepsilon = |B(x,\varepsilon)| = \frac{\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma(\frac{N}{2}+1)}\varepsilon^N$ per a qualsevol $x \in \mathbb{R}^N$. Observem que la desigualtat (3.3.5) és, de fet, una igualtat si $C_N = \frac{\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma(\frac{N}{2}+1)}$.

Com que ρ és contínua i de suport compacte, podem fitar la quantitat $\|\nabla\rho\|_{\mathbb{R}^N}$ per una constant $C > 0$, de manera que

$$\begin{aligned} &\frac{C_N}{\varepsilon m_\varepsilon}\int_{B(x,\varepsilon)} |u(y)| \left\|\nabla\rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right\|_{\mathbb{R}^N} \|b(y)-b(x)\|_{\mathbb{R}^N}\, dy \\ \leq\ &\frac{C_N C}{\varepsilon m_\varepsilon}\int_{B(x,\varepsilon)} |u(y)|\|b(y)-b(x)\|_{\mathbb{R}^N}\, dy. \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

Per a involucrar l'exponent p i el seu exponent conjugat usem la desigualtat de Hölder:

$$\begin{aligned} \frac{C_N C}{\varepsilon m_\varepsilon}\int_{B(x,\varepsilon)} |u(y)|\|b(y)-b(x)\|_{\mathbb{R}^N}\, dy &= \frac{C_N C}{m_\varepsilon}\left\|u\cdot\left(\frac{b-b(x)}{\varepsilon}\right)\right\|_{L^1(B(x,\varepsilon))} \\ &\leq \frac{C_N C}{m_\varepsilon}\|u\|_{L^p(B(x,\varepsilon))}\left\|\frac{b-b(x)}{\varepsilon}\right\|_{L^q(B(x,\varepsilon))}. \end{aligned} \tag{3.3.7}$$

I com que $\alpha \geq q$, existeix un nombre real $D \in (0,\infty)$ de manera que

$$\left\|\frac{b-b(x)}{\varepsilon}\right\|_{L^q(B(x,\varepsilon))} \leq D\left\|\frac{b-b(x)}{\varepsilon}\right\|_{L^\alpha(B(x,\varepsilon))}. \tag{3.3.8}$$

Per tant,

$$\frac{C_N C}{\varepsilon m_\varepsilon}\int_{B(x,\varepsilon)} |u(y)|\|b(y)-b(x)\|_{\mathbb{R}^N}\, dy \leq \frac{C_N C D}{m_\varepsilon}\|u\|_{L^p(B(x,\varepsilon))}\left\|\frac{b-b(x)}{\varepsilon}\right\|_{L^\alpha(B(x,\varepsilon))}. \tag{3.3.9}$$

A més a més, aquest últim terme el podem escriure com

$$\begin{aligned} &\frac{C_N C D}{m_\varepsilon}\left(\int_{B(x,\varepsilon)} |u(y)|^p\, dy\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{B(x,\varepsilon)}\left\|\frac{b(y)-b(x)}{\varepsilon}\right\|_{\mathbb{R}^N}^\alpha dy\right)^{\frac{1}{\alpha}} \\ \leq\ &R_N\left(\frac{1}{m_\varepsilon}\int_{B(x,\varepsilon)} |u(y)|^p\, dy\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{m_\varepsilon}\int_{B(x,\varepsilon)}\left\|\frac{b(y)-b(x)}{\varepsilon}\right\|_{\mathbb{R}^N}^\alpha dy\right)^{\frac{1}{\alpha}} \end{aligned} \tag{3.3.10}$$

on $R_N > 0$ és una constant, i tal que $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{p} + \frac{\beta-1}{\beta} = 1$. Ara fitarem, en norma $L^p(K)$ i norma $L^\alpha(K)$, cadascun dels dos termes que apareixen en (3.3.10), vistos com a funció de x.

El primer terme és fàcil de fitar:

$$
\begin{aligned}
\left\| \left(\frac{1}{m_\varepsilon} \int_{B(x,\varepsilon)} |u(y)|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}} \right\|_{L^p(K)} &\leq \left(\int_K \int_{K'} \frac{1}{m_\varepsilon} |u(y)|^p \chi_{B(0,\varepsilon)}(y-x) \, dy \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_{K'} \left(\int_K \frac{1}{m_\varepsilon} \chi_{B(y,\varepsilon)}(x) \, dx \right) |u(y)|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}} \qquad (3.3.11) \\
&= \left(\int_{K'} |u(y)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|u\|_{L^p(K')}.
\end{aligned}
$$

Justifiquem tot seguit la validesa de cadascuna de les desigualtats anteriors: la primera és conseqüència del fet que $y - x \in B(0,\varepsilon)$ si, i només si, $\chi_{B(x,\varepsilon)}(y) = 1$; la segona, del Teorema de Tonelli, que ens permet d'intercanviar l'ordre d'integració perquè l'integrand és no negatiu i mesurable; i la primera igualtat, del fet que la mesura de Lebesgue és invariant per a translacions i que, per tant, $m_\varepsilon = |B(0,\varepsilon)| = \int_K \chi_{B(y,\varepsilon)}(x) \, dx$.

Vegem com poder fitar el segon terme de (3.3.10). Tot fent ús del teorema fonamental del càlcul, pot ser escrit, si prescindim per ara de la potència $\frac{1}{\alpha}$, de la manera següent:

$$
\begin{aligned}
&\int_{B(x,\varepsilon)} \frac{1}{m_\varepsilon} \left(\frac{\|b(y) - b(x)\|_{\mathbb{R}^N}}{\varepsilon} \right)^\alpha dy \\
=& \int_{B(x,\varepsilon)} \frac{1}{m_\varepsilon} \left| \int_0^1 \frac{y-x}{\varepsilon} \cdot \nabla b(x + t(y-x)) \, dt \right|^\alpha dy \qquad (3.3.12) \\
\leq& \int_{B(x,\varepsilon)} \frac{1}{m_\varepsilon} \int_0^1 \left\| \frac{y-x}{\varepsilon} \right\|_{\mathbb{R}^N}^\alpha \|\nabla b(x + t(y-x))\|_{\mathbb{R}^N}^\alpha \, dt \, dy.
\end{aligned}
$$

Ara podem considerar la funció $g_x : B(x,\varepsilon) \to \mathbb{R}^N$ definida per l'assignació $g_x(y) = x + t(y-x)$, per a $x \in \mathbb{R}^N$. Com que $g_x \in \mathcal{C}^1(B(x,\varepsilon))$, podem aplicar el teorema del canvi de variables per a obtenir que

$$
\begin{aligned}
&\int_{B(x,\varepsilon)} \frac{1}{m_\varepsilon} \int_0^1 \left\| \frac{y-x}{\varepsilon} \right\|_{\mathbb{R}^N}^\alpha \|\nabla b(x + t(y-x))\|_{\mathbb{R}^N}^\alpha \, dt \, dy \\
&= \int_{g_x(B(x,\varepsilon))} \frac{1}{m_\varepsilon} \int_0^1 \|\nabla b(z)\|_{\mathbb{R}^N}^\alpha \left\| \frac{z-x}{t\varepsilon} \right\|_{\mathbb{R}^N}^\alpha \left| \frac{1}{\det Dg_x(z)} \right| dt \, dz \\
&< \frac{\Gamma\left(\frac{N}{2}+1\right)}{\pi^{\frac{N}{2}}} \int_{B(x,t\varepsilon)} \int_0^1 \|\nabla b(z)\|_{\mathbb{R}^N}^\alpha \frac{1}{(t\varepsilon)^N} \, dt \, dz \qquad (3.3.13) \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{N}{2}+1\right)}{\pi^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} \|\nabla b(z)\|_{\mathbb{R}^N}^\alpha \left(\int_0^1 \frac{1}{(t\varepsilon)^N} \chi_{B(0,t\varepsilon)}(x-z) \, dt \right) dz \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{N}{2}+1\right)}{\pi^{\frac{N}{2}}} \|\nabla b\|_{\mathbb{R}^N}^\alpha \star \chi_\varepsilon = S_N \|\nabla b\|_{\mathbb{R}^N}^\alpha \star \chi_\varepsilon,
\end{aligned}
$$

on $\chi_\varepsilon(x) := \int_0^1 \chi_{B(0,t\varepsilon)}(x) \frac{1}{(t\varepsilon)^N} \, dt$ i $S_N := \Gamma\left(\frac{N}{2}+1\right) \pi^{-\frac{N}{2}}$. La primera desigualtat anterior és conseqüència dels fets que $\|z - x\|_{\mathbb{R}^N} < t\varepsilon$, que $\det Dg_x(z) = t^N$ i que $g_x(B(x,\varepsilon)) = B(x,t\varepsilon)$.

Calculem explícitament χ_ε. Per una banda, si $x \in \mathbb{R}^N \setminus B(0,\varepsilon)$ és clar que $\chi_\varepsilon(x) = 0$. Per altra banda, si $x \in B(0,\varepsilon)$, existeix un nombre $t^* \in (0,1)$ de manera que $x \in B(0,t^*\varepsilon)$.

Per tant, per a $x \in B(0, t^*\varepsilon)$, $\chi_{B(0,t^*\varepsilon)}(x) = 1$ si $t^* > \frac{|x|}{\varepsilon}$; i 0, altrament. Tot plegat, fixat $x \in B(0, \varepsilon)$

$$\begin{aligned}\chi_\varepsilon(x) = \int_0^1 \chi_{B(0,t\varepsilon)}(x)\frac{1}{(t\varepsilon)^N}\,dt = \int_{\frac{\|x\|_{\mathbb{R}^N}}{2}}^1 \frac{1}{(t\varepsilon)^N}\,dt \\ = \frac{1}{(N-1)\varepsilon^N}\left(\left(\frac{\varepsilon}{\|x\|_{\mathbb{R}^N}}\right)^{N-1} - 1\right)\chi_{B(0,\varepsilon)}(x).\end{aligned} \tag{3.3.14}$$

Ara demostrem que $\chi_\varepsilon \in L^1_c(\mathbb{R}^N)$. Que és de suport compacte és evident. Vegem que és un element de $L^1(\mathbb{R}^N)$.

$$\begin{aligned}\|\chi_\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(N-1)\varepsilon^N}\left|\left(\frac{\varepsilon}{\|x\|_{\mathbb{R}^N}}\right)^{N-1} - 1\right|\chi_{B(0,\varepsilon)}(x)\,dx \\ &= \frac{1}{(N-1)\varepsilon^N}\int_{B(0,\varepsilon)}\left(\frac{\varepsilon}{\|x\|_{\mathbb{R}^N}}\right)^{N-1} - 1\,dx \\ &\leq \frac{1}{(N-1)\varepsilon}\int_{B(0,\varepsilon)}\frac{1}{\|x\|^{N-1}_{\mathbb{R}^N}}\,dx < \infty.\end{aligned} \tag{3.3.15}$$

Vegem ara com podem obtenir una fita de $\|(\|\nabla b\|^\alpha_{\mathbb{R}^N} \star \chi_\varepsilon)^{\frac{1}{\alpha}}\|_{L^\alpha(K)}$.

$$\begin{aligned}\|(\|\nabla b\|^\alpha_{\mathbb{R}^N} \star \chi_\varepsilon)^{\frac{1}{\alpha}}\|_{L^\alpha(K)} &= \|\|\nabla b\|^\alpha_{\mathbb{R}^N} \star \chi_\varepsilon\|^{\frac{1}{\alpha}}_{L^1(K)} \\ &= \left(\int_K \int_{B(x,\varepsilon)} \chi_\varepsilon(x-y)\|\nabla b(y)\|^\alpha_{\mathbb{R}^N}\,dy\,dx\right)^{\frac{1}{\alpha}} \\ &= \left(\int_{K+B(0,\varepsilon)}\left(\int_{B(y,\varepsilon)\cap K} \chi_\varepsilon(x-y)\|\nabla b(y)\|^\alpha_{\mathbb{R}^N}\,dx\right)dy\right)^{\frac{1}{\alpha}} \\ &= \left(\int_{K+B(0,\varepsilon)} \|\nabla b(y)\|^\alpha_{\mathbb{R}^N}\left(\int_{B(y,\varepsilon)\cap K} \chi_\varepsilon(x-y)\,dx\right)dy\right)^{\frac{1}{\alpha}}.\end{aligned} \tag{3.3.16}$$

La tercera igualtat és conseqüència del Teorema de Tonelli, ja que l'integrand és no-negatiu i mesurable i del fet que si per a $x \in K$ fixat passa que $y \in B(x, \varepsilon)$, aleshores quan canviem l'ordre d'integració, resulta que $y \in K + B(0, \varepsilon)$ i $x \in B(y, \varepsilon) \cap K$.

Observem que

$$\int_{B(y,\varepsilon)\cap K} \chi_\varepsilon(x-y)\,dx \leq \int_{B(y,\varepsilon)} \chi_\varepsilon(x-y)\,dx = \int_{B(0,\varepsilon)} \chi_\varepsilon(x)\,dx. \tag{3.3.17}$$

Per tant, podem trobar una fita de (3.3.16):

$$\left(\int_{K+B(0,\varepsilon)} |\nabla b(y)|^\alpha\left(\int_{B(y,\varepsilon)\cap K} \chi_\varepsilon(x-y)\,dx\right)dy\right)^{\frac{1}{\alpha}} \leq \|\chi_\varepsilon\|^{\frac{1}{\alpha}}_{L^1(\mathbb{R}^N)}\|\nabla b\|_{L^\alpha(K')}. \tag{3.3.18}$$

Notem que $\|\nabla b\|_{L^\alpha(K')} < \infty$ perquè $b \in W^{1,\alpha}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$.

Tot plegat, si combinem les fites anteriors, obtenim que

$$
\begin{aligned}
&\|(b\cdot\nabla u)\star\rho_\varepsilon - b\cdot\nabla(u\star\rho_\varepsilon)\|_{L^\beta(K)}\\
\leq&\|(\operatorname{div}(b)u)\star\rho_\varepsilon\|_{L^\beta(K)}\\
&+R_N\left\|\left(\int_{B(x,\varepsilon)}\frac{1}{m_\varepsilon}|u(y)|^p\,dy\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{B(x,\varepsilon)}\frac{1}{m_\varepsilon}\left\|\frac{b(y)-b(x)}{\varepsilon}\right\|_{\mathbb{R}^N}^\alpha dy\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right\|_{L^\beta(K)}\\
\leq&\|(\operatorname{div}(b)u)\star\rho_\varepsilon\|_{L^\beta(K)}\\
&+R_N\left\|\left(\int_{B(x,\varepsilon)}\frac{1}{m_\varepsilon}|u(y)|^p\,dy\right)^{\frac{1}{p}}\right\|_{L^p(K)}\left\|\left(\int_{B(x,\varepsilon)}\frac{1}{m_\varepsilon}\left\|\frac{b(y)-b(x)}{\varepsilon}\right\|_{\mathbb{R}^N}^\alpha dy\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right\|_{L^\alpha(K)}\\
\leq&\|\operatorname{div}(b)\|_{L^\alpha(K')}\|u\|_{L^p(K')}+R_N\|u\|_{L^p(K')}\left\|(S_N\|\nabla b\|_{\mathbb{R}^N}^\alpha\star\chi_\varepsilon)^{\frac{1}{\alpha}}\right\|_{L^\alpha(K)}\\
\leq&\|\operatorname{div}(b)\|_{L^\alpha(K')}\|u\|_{L^p(K')}+R_N\|u\|_{L^p(K')}S_N^{\frac{1}{\alpha}}\|\chi_\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{\frac{1}{\alpha}}\|\nabla b\|_{L^\alpha(K')}\\
\leq&\max\left\{\|\operatorname{div}(b)\|_{L^\alpha(K')},R_NS_N^{\frac{1}{\alpha}}\|\chi_\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{\frac{1}{\alpha}}\|\nabla b\|_{L^\alpha(K')}\right\}\|u\|_{L^p(K')}\|\nabla b\|_{L^\alpha(K')}\\
\leq&\max\left\{\|\operatorname{div}(b)\|_{L^\alpha(K')},R_NS_N^{\frac{1}{\alpha}}\|\chi_\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{\frac{1}{\alpha}}\|\nabla b\|_{L^\alpha(K')}\right\}\|u\|_{L^p(K')}\|b\|_{W^{1,\alpha}(K')},
\end{aligned}
\tag{3.3.19}
$$

tal com volíem demostrar. □

Teorema 3.3.2 (del commutador)**.** Sigui $p\in[1,\infty)$, $\alpha\geq q$ i $\beta\in[1,\infty)$ de manera que $\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{p}$. Sota les hipòtesis que $u\in L^\infty([0,T];L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N))$, $b\in L^1([0,T];W^{1,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N))$ i que ρ_ε és un mol·lificador en $\mathbb{R}^N$. Aleshores,

$$[\rho_\varepsilon,b](\nabla u):=(b\cdot\nabla u)\star\rho_\varepsilon-b\cdot\nabla(u\star\rho_\varepsilon)\to 0 \tag{3.3.20}$$

en $L^1([0,T];L^\beta_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N))$.

Demostració. Primer de tot, fixem un nombre $t\in[0,T]$ i un compacte $K\subset\mathbb{R}^N$. Aleshores, es verifiquen les condicions del lema anterior i obtenim que $\|[\rho_\varepsilon,b](\nabla u)\|_{L^\beta(K)}\leq C\|u\|_{L^p(K)}\|b\|_{W^{1,\alpha}(K)}$.

Segonament, podem integrar en t cadascun dels membres de la desigualtat. Aleshores,

$$
\begin{aligned}
\|[\rho_\varepsilon,b](\nabla u)\|_{L^1([0,T];L^\beta(K))}&\leq C\|u\|_{L^1([0,T];L^p(K))}\|b\|_{L^1([0,T];W^{1,\alpha}(K))}\\
&\leq CT\|u\|_{L^\infty([0,T];L^p(K))}\|b\|_{L^1([0,T];W^{1,\alpha}(K))}
\end{aligned}
\tag{3.3.21}
$$

i, per tant, $[\rho_\varepsilon,b](\nabla u)$ és fitada en $L^1([0,T];L^\beta(K))$ uniformement en ε.

Tercerament, demostrem el resultat si assumim que $u(t,\cdot)\in\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N))$ i que $b(t,\cdot)\in\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ gairebé per a tot $t\in[0,T]$.

En aquest cas,

$$\begin{aligned}
[\rho_\varepsilon, b](\nabla u)(x) &= \int_K u(y)(b(y) - b(x)) \cdot \nabla \rho_\varepsilon(x-y)\, dy - (\operatorname{div}(b) \star \rho_\varepsilon)(x) \\
&= -\int_K \operatorname{div}_x(u(y)b(y) - u(y)b(x))\rho_\varepsilon(x-y)\, dy - (\operatorname{div}(b)u \star \rho_\varepsilon)(x) \\
&= \operatorname{div}(b)(x) \int_K u(y)\rho_\varepsilon(x-y)\, dy - (\operatorname{div}(b)u \star \rho_\varepsilon)(x) \\
&= \operatorname{div}(b)(u \star \rho_\varepsilon)(x) - ((\operatorname{div}(b)u) \star \rho_\varepsilon)(x).
\end{aligned} \tag{3.3.22}$$

Per tant,

$$[\rho_\varepsilon, b](\nabla u) = \operatorname{div}(b)(u \star \rho_\varepsilon) - (\operatorname{div}(b)u) \star \rho_\varepsilon \to 0 \tag{3.3.23}$$

en $L^1([0,T]; L^\beta(K))$.

Per a acabar, demostrem l'enunciat amb el benentès que les funcions suaus siguin denses en $L^p(K)$ i en $W^{1,\alpha}(K)$, que ho són en virtut dels resultats de la subsecció (2.4.1). Per una banda, donada $f \in L^\infty([0,T]; L^p(K))$, com que $\mathcal{C}_c^\infty(K)$ és dens en $L^p(K)$ ja que $1 \le p < \infty$, fixat $\eta > 0$, per a qualsevol $t \in [0,T]$, existeix $g_\eta(t) \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ de manera que $\|g_\eta(t) - f(t)\|_{L^p(K)} < \eta$. Podem considerar la funció $g : [0,T] \to \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ definida per l'assignació $t \mapsto g_\eta(t)$. Observem que $\|f - g\|_{L^\infty([0,T];L^p(K))} < \eta$, que és el que volíem veure. Per a veure que podem aproximar funcions de $L^\infty([0,T]; W^{1,\alpha}(K))$ per funcions suaus, podem usar el mateix argument.

Fixem $\delta > 0$. Aleshores, existeixen $u^\star(t,\cdot) \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ i $b^\star(t,\cdot) \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N))$ tals que $\|u - u^\star\|_{L^1([0,T];L^\beta(K))} < \frac{\delta}{3CT\|b\|_{L^1([0,T];W^{1,\alpha}(K))}}$ i $\|b - b^\star\|_{L^1([0,T];L^\beta(K))} < \frac{\delta}{3CT\|u^\star\|_{L^1([0,T];L^p(K))}}$.

Per tant,

$$\begin{aligned}
\|[\rho_\varepsilon, b](\nabla u)\|_{L^1([0,T];L^\beta(K))} &= \|(b \cdot \nabla u) \star \rho_\varepsilon - (b \cdot \nabla u^\star) \star \rho_\varepsilon + (b \cdot \nabla u^\star) \star \rho_\varepsilon \\
&\quad - b \cdot \nabla(u \star \rho_\varepsilon) + b \cdot \nabla(u^\star \star \rho_\varepsilon) - b \cdot \nabla(u^\star \star \rho_\varepsilon)\|_{L^1([0,T];L^\beta(K))} \\
\le &\|(b \cdot \nabla(u - u^\star)) \star \rho_\varepsilon - b \cdot (\nabla(u - u^\star) \star \rho_\varepsilon)\,\|_{L^1([0,T];L^\beta(K))} \\
&\quad + \|(b \cdot \nabla u^\star) \star \rho_\varepsilon - b \cdot \nabla(u^\star \star \rho_\varepsilon)\|_{L^1([0,T];L^\beta(K))} \\
= &\|[\rho_\varepsilon, b](\nabla(u - u^\star))\|_{L^1([0,T];L^\beta(K))} + \|[\rho_\varepsilon, b](\nabla u^\star)\|_{L^1([0,T];L^\beta(K))}.
\end{aligned} \tag{3.3.24}$$

Arribats a aquest punt, podem efectuar un càlcul anàleg al que acabem de fer per a obtenir una fita de $\|[\rho_\varepsilon, b](\nabla u^\star)\|_{L^1([0,T];L^\beta(K))}$. Concretament,

$$\begin{aligned}
&\|[\rho_\varepsilon, b](\nabla u^\star)\|_{L^1([0,T];L^\beta(K))} \\
\le \|[\rho_\varepsilon, b - b^\star](\nabla u^\star)\|_{L^1([0,T];L^\beta(K))} + &\|[\rho_\varepsilon, b^\star](\nabla u^\star)\|_{L^1([0,T];L^\beta(K))}.
\end{aligned} \tag{3.3.25}$$

Ara podem usar tant la desigualtat (3.3.21) per a obtenir fites superiors del primers sumands de l'última línia de (3.3.24) i de (3.3.25), respectivament; com el fet que $[\rho_\varepsilon, b^\star](\nabla u^\star) \to 0$ en $L^1([0,T]; L^\beta(K))$, i que per tant, existeix un nombre $0 < \varepsilon_0$ de manera que per a $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, $\|[\rho_\varepsilon, b^\star](\nabla u^\star)\|_{L^1([0,T];L^\beta(K))} < \frac{\delta}{3}$.

Tot plegat, per a $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ resulta que

$$\begin{aligned}
\|[\rho_\varepsilon, b](\nabla u)\|_{L^1([0,T];L^\beta(K))} \le &CT\|u - u^\star\|_{L^\infty([0,T];L^p(K))}\|b\|_{L^1([0,T];W^{1,\alpha}(K))} \\
+ &CT\|u^\star\|_{L^\infty([0,T];L^p(K))}\|b - b^\star\|_{L^1([0,T];W^{1,\alpha}(K))} \\
+ &\|[\rho_\varepsilon, b^\star](\nabla u^\star)\|_{L^1([0,T];L^\beta(K))} < \delta,
\end{aligned} \tag{3.3.26}$$

que és el que volíem demostrar. □

Com a conseqüència immediata de (3.3.1) i (3.3.2), es té el següent fet.

Teorema 3.3.3. Siguin $p \in [1,\infty]$ i $u \in L^\infty([0,T]; L^p(\mathbb{R}^N))$ una solució de (3.2.1). Suposem que $b \in L^1([0,T]; W^{1,\alpha}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N))$ i que $c \in L^1([0,T]; L^\alpha_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N))$ per a algun $\alpha \geq q$. Aleshores, $u_\varepsilon := u \star \rho_\varepsilon$ verifica que

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - b \cdot \nabla u_\varepsilon + c u_\varepsilon = r_\varepsilon, \tag{3.3.27}$$

on r_ε convergeix cap a zero en $L^1([0,T]; L^\beta_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N))$ si $\varepsilon \to 0$, i β és definit per la relació $\frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{p}$ en cas que $\alpha < \infty$ o $p < \infty$, o $\beta \in [1,\infty]$, altrament.

Teorema 3.3.4. Sigui $p \in [1,\infty]$ i $u \in L^\infty([0,T]; L^p(\mathbb{R}^N))$ una solució per al problema de Cauchy (3.2.1). Suposem que $c, \operatorname{div} b \in L^1([0,T]; L^\infty(\mathbb{R}^N))$, que $b \in L^1([0,T]; W^{1,q}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N))$ i que

$$\frac{b}{1+|x|} \in L^1([0,T]; L^1(\mathbb{R}^N)) + L^1([0,T]; L^\infty(\mathbb{R}^N)). \tag{3.3.28}$$

Aleshores, $u \equiv 0$.

Demostració. Primer de tot, observem que tant u com b com c satisfan les hipòtesis de (3.3.3) perquè $u \in L^\infty([0,T]; L^p(\mathbb{R}^N))$ i perquè podem triar $\alpha = q$ i notar que $c \in L^1([0,T]; L^\infty(\mathbb{R}^N)) \subset L^1([0,T]; L^\alpha_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N))$ i que $b \in L^1([0,T]; W^{1,\alpha}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N))$.

Per tant, com que $\beta = 1$ independentment dels valors de α i de p,

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - b \cdot \nabla u_\varepsilon + c u_\varepsilon = r_\varepsilon \to 0 \text{ en } L^1([0,T]; L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)). \tag{3.3.29}$$

Sigui ara $\gamma \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ una funció tal que γ' és fitada en $\mathbb{R}$. Passa que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \gamma(u_\varepsilon)}{\partial t} - b \cdot \nabla \gamma(u_\varepsilon) + c u_\varepsilon \gamma'(u_\varepsilon) &= \gamma'(u_\varepsilon)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \gamma'(u_\varepsilon)(b \cdot \nabla u_\varepsilon) + c u_\varepsilon \gamma'(u_\varepsilon) \\ = \gamma'(u_\varepsilon)\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - b \cdot \nabla u_\varepsilon\right) + c u_\varepsilon \gamma'(u_\varepsilon) &= \gamma'(u_\varepsilon)\left(r_\varepsilon - c u_\varepsilon\right) + c u_\varepsilon \gamma'(u_\varepsilon) = r_\varepsilon \gamma'(u_\varepsilon).\end{aligned} \tag{3.3.30}$$

Per tant, com que γ' és contínua en $\mathbb{R}$ i $u_\varepsilon \to u$ en $L^\infty([0,T]; L^p(\mathbb{R}^N))$ si $\varepsilon \to 0$, es té que

$$\frac{\partial \gamma(u)}{\partial t} - b \cdot \nabla \gamma(u) + c u \gamma'(u) = 0, \text{ per a } (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^N. \tag{3.3.31}$$

Considerem ara les funcions truncament $\varphi_R := \varphi\left(\frac{\cdot}{R}\right)$ per a $R \in [1,\infty)$, on $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ és tal que $\operatorname{supp} \varphi \subset B(0,2)$ i que $\varphi \equiv 1$ en $B(0,1)$. Multipliquem cada membre de l'equació (3.3.31) i, després, els integrem en $\mathbb{R}^N$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^N} \gamma(u(t,\cdot))\varphi_R \, dx + &\int_{\mathbb{R}^N} \left(c u \gamma'(u(t,\cdot)) + \operatorname{div}(b(t,\cdot))\gamma(u(t,\cdot))\right)\varphi_R \, dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}^N} \gamma(u(t,\cdot))(b(t,\cdot) \cdot \nabla \varphi_R) \, dx\end{aligned} \tag{3.3.32}$$

Siguin $M \in (0,\infty)$ un nombre real i $\gamma(t) := \min\{|t|, M\}^p$. Observem que si bé γ no és derivable, és pM^{p-1}-Lipschitz en $\mathbb{R}$. Sigui $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ una successió de funcions tals que $\{\gamma_n \circ u\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergeix cap a γ en $L^1([0,T]; L^1(\mathbb{R}^N))$ i tals que γ_n' és fitada en

$\mathbb{R}$ per a qualsevol $n \in \mathbb{N}$. A partir del fet que $c, \mathrm{div}(b) \in L^1([0,T]; L^\infty(\mathbb{R}^N))$, que podem reconsiderar totes les equacions anteriors amb γ_n per a qualsevol $n \in \mathbb{N}$ i que $(b, \cdot) \cdot \nabla\varphi_R$ és una funció fitada en $B(0,1) \cup (\mathbb{R}^N \setminus B(0,1))$, podem obtenir una fita de cadascun dels integrands de (3.3.32) per una funció integrable i aplicar el teorema de la convergència dominada per a concloure que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^N} \gamma(u(t,\cdot))\varphi_R\,dx + &\int_{\mathbb{R}^N} \left(cu\gamma'(u(t,\cdot)) + \mathrm{div}(b(t,\cdot))\gamma(u(t,\cdot))\right)\varphi_R\,dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}^N} \gamma(u(t,\cdot))(b(t,\cdot)\cdot\nabla\varphi_R)\,dx\end{aligned} \tag{3.3.33}$$

Notem que, com que existeix la relació $\nabla\varphi_R = \frac{1}{R}\nabla\varphi$, podem dir el següent.

Per una banda, com que $\varphi \equiv 1$ si $|x| < 1$, i $\varphi \equiv 0$ si $|x| \geq 2$, i $\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(x) = 0$ per a $x \in B(0,1) \cup (\mathbb{R}^N \setminus B(0,2))$ per a qualsevol $k \in \{1, \dots, N\}$, la funció $\frac{\partial}{\partial x_k}\varphi$ ha de ser una funció fitada per a tot $k \in \{1, \dots, n\}$ perquè $\frac{\partial}{\partial x_k}\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ és contínua. Per tant, ha d'existir un nombre $B \in \mathbb{R}$ tal que $\|\nabla\varphi_R\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \frac{B}{R}\cdot\chi_{\{R\leq|x|\leq 2\cdot R\}}$. Si combinem aquest fet amb la desigualtat de Cauchy-Schwarz en $\mathbb{R}^N$ acabem obtenint que

$$\begin{aligned}\left| -\int_{\mathbb{R}^N} \gamma(u(t,\cdot))\left(b(t,\cdot)\cdot\nabla\varphi_R\right)\,dx\right| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\gamma(u(t,\cdot))||b(t,\cdot)\cdot\nabla\varphi_R|\,dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\gamma(u(t,\cdot))|\|b(t,\cdot)\|_{\mathbb{R}^N}\|\nabla\varphi_R\|_{\mathbb{R}^N}\,dx \\ &\leq \frac{B}{R}\int_{\{R\leq|x|\leq 2\cdot R\}} |\gamma(u(t,\cdot))|\|b(t,\cdot)\|_{\mathbb{R}^N}\,dx.\end{aligned} \tag{3.3.34}$$

Per altra banda, $|u\gamma'(u)| \leq D_p\gamma(u)$ per a algun $D_p \in \mathbb{R}$ que depèn de p (de fet, n'hi ha prou si $D_p = p$). Per a demostrar-ho, raonem per casos: si $|t| \leq M$, aleshores $\gamma(t) = |t|^p$ i com que $\gamma'(t) = pt|t|^{p-2}$ per a $t \neq 0$, resulta que $|t\gamma'(t)| = pt^2|t|^{p-2} = p|t|^p = C_p\gamma(t)$. Si $|t| \geq M$, aleshores $\gamma(t) = M^p$ i $0 = t\gamma'(t) \leq C_p\gamma(t)$.

A més a més, com que $\|c(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} =: E_t < \infty$ i $\|\mathrm{div}\ b(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} =: F_t < \infty$ perquè $\mathrm{div}\ b, c \in L^1([0,T]; L^\infty(\mathbb{R}^N))$, es té que

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\mathbb{R}^N} \left(c(t,\cdot)u(t,\cdot)\gamma'(u(t,\cdot)) + \mathrm{div}\ (b(t,\cdot))\gamma(u(t,\cdot))\right)\varphi_R\,dx\right| \\ &\leq (D_pE_t + F_t)\int_{\mathbb{R}^N} \gamma(u(t,\cdot))\varphi_R\,dx.\end{aligned} \tag{3.3.35}$$

Definim $C_t \coloneqq \max\{D_p\cdot E_t + F_t, B\}$. Tot plegat,

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^N} \gamma(u)\varphi_R\,dx \leq C_t\int_{\mathbb{R}^N} \gamma(u)\cdot\varphi_R\,dx + \frac{C_t}{R}\int_{\{R\leq|x|\leq 2R\}} \gamma(u)\cdot\|b(t,x)\|\,dx. \tag{3.3.36}$$

Observem ara que $\gamma(u) = \min\{|u|, M\}^p \in L^\infty([0,T]; L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N))$. Com que $u \in L^\infty([0,T]; L^p(\mathbb{R}^N))$, $|u(t,x)| \to 0$ si $|x| \to 0$ per a qualsevol $t \in [0,T]$ i, per tant, la mesura de $\{x \in \mathbb{R}^N : |u(t,x)| \geq M\}$ és finita per a qualsevol $t \in [0,T]$. El següent càlcul evidencia que $\gamma(u(t,\cdot)) \in L^1(\mathbb{R}^N))$ per a qualsevol $t \in [0,T]$:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |\gamma(u(t,\cdot))|\,dx &= \int_{\{|u(t,\cdot)<M|\}} |u(t,\cdot)|^p\,dx + \int_{\{|u(t,\cdot)\geq M|\}} M^p\,dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |u(t,\cdot)|^p\,dx + M^p|\{x \in \mathbb{R}^N : |u(t,x)| \geq M\}| < \infty.\end{aligned} \tag{3.3.37}$$

I d'aquí podem dir que $\gamma(u) \in L^\infty([0,T]; L^1(\mathbb{R}^N))$ perquè la fita (3.3.37) és vàlida per a qualsevol $t \in [0,T]$. Vegem ara que $\gamma(u) \in L^\infty([0,T]; L^\infty(\mathbb{R}^N))$. Per a $t \in [0,T]$ fixat, observem que com que $\min\{|u(t,\cdot)|, M\}^p \le M^p$ gairebé per a tot $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^N$, llavors $\| \min\{|u(t,\cdot), M|\}^p\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} < M^p < \infty$. D'aquesta mateixa desigualtat també deduïm que $\sup_{t\in[0,T]} \| \min\{|u|, M\}^p\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} < \infty$ gairebé per a tot $t \in [0,T]$, ja que la fita és uniforme.

Observem també que

$$\frac{|b(t,x)|}{R}\chi_{\{R\le|x|\le 2R\}}(x) \le 3\frac{|b(t,x)|}{1+|x|}\chi_{\{R\le|x|\}}(x) \tag{3.3.38}$$

per a $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^N$. Per a $x \in \{y \in \mathbb{R}^N : |y| < R\} \cup \{y \in \mathbb{R}^N : |y| > 2R\}$ és clar que la desigualtat és certa. Per a $x \in \{y \in \mathbb{R}^N : R \le |y| \le 2R\}$, també perquè $1 + |x| \le 3R$, ja que $R \ge 1$.

Aleshores, de la hipòtesi (3.3.28) escrivim $b = b_1 + b_2$, on $\frac{b_1}{1+|x|} \in L^1([0,T]; L^1(\mathbb{R}^N))$ i $\frac{b_2}{1+|x|} \in L^1([0,T]; L^\infty(\mathbb{R}^N))$; i de la desigualtat (3.3.36) deduïm que

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^N} \min\{|u|, M\}^p \varphi_R\,dx \\
&\le C_t \int_{\mathbb{R}^N} \min\{|u|, M\}^p \varphi_R\,dx + 3C_t \int_{\{\|x\|\ge R\}} \min\{|u|, M\}^p \frac{\|b(t,x)\|}{1+\|x\|}\,dx \\
&\le C_t \int_{\mathbb{R}^N} \min\{|u|, M\}^p \varphi_R\,dx + 3C_t \int_{\{\|x\|\ge R\}} \min\{|u|, M\}^p \frac{\|b_1(t,x)\|}{1+\|x\|}\,dx \\
&\qquad + 3C_t \int_{\{\|x\|\ge R\}} \min\{|u|, M\}^p \frac{\|b_2(t,x)\|}{1+\|x\|}\,dx \\
&\le C_t \int_{\mathbb{R}^N} \min\{|u|, M\}^p \varphi_R\,dx + 3C_t M^p \int_{\|x\|\ge R} \frac{\|b_1(t,x)\|}{1+\|x\|}\,dx \\
&\qquad + 3C_t \left\| \frac{b_2(t,\cdot)}{1+\|\cdot\|_{\mathbb{R}^N}} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \int_{\{\|x\|\ge R\}} \min\{|u|, M\}^p\,dx.
\end{aligned} \tag{3.3.39}$$

Si ara fem tendir R cap a ∞, obtenim que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^N} \gamma(u(t,x))\,dx &= \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^N} \min\{|u|, M\}^p\,dx \\
&\le C_t \int_{\mathbb{R}^N} \min\{|u|, M\}^p\,dx = C_t \int_{\mathbb{R}^N} \gamma(u(t,x))\,dx.
\end{aligned} \tag{3.3.40}$$

Aleshores, en el supòsit que $p \in [1,\infty)$, com que C_t és integrable perquè és el màxim de funcions integrables en $[0,T]$ ja que $c, \operatorname{div} b \in L^1([0,T]; L^\infty(\mathbb{R}^N))$, per una de les desigualtats generalitzades de Grönwall es té que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \gamma(t,\cdot)\,dx \le \exp\left(\int_0^T C_t\,dt\right) \int_{\mathbb{R}^N} \gamma(0,\cdot)\,dx = 0, \tag{3.3.41}$$

perquè per una banda, $u(0,\cdot) = 0$ en $\mathbb{R}^N$; i per altra banda, com que $\gamma(t,x) \ge 0$ per a qualsevol $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^N$, $\gamma \circ u = 0$ gairebé per a tot $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^N$, aleshores $u(t,x) = 0$ en $L^\infty([0,T]; L^p(\mathbb{R}^N))$.

Per a $p = \infty$ és necessari un procediment alternatiu basat en arguments de dualitat. L'ometem. □

Com a conseqüència immediata del resultat anterior, n'obtenim un parell més, que culminen aquesta secció.

Corol·lari 3.3.5. Siguin $p \in [1, \infty]$ i $u^0 \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Si $c, \operatorname{div} b \in L^1([0,T]; L^\infty(\mathbb{R}^N))$, i $b \in L^1([0,T]; W^{1,q}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N))$ i

$$\frac{b}{1 + \|\cdot\|_{\mathbb{R}^N}} \in L^1([0,T]; L^1(\mathbb{R}^N)) + L^1([0,T]; L^\infty(\mathbb{R}^N)). \tag{3.3.42}$$

Aleshores, existeix una única solució $u \in L^\infty([0,T]; L^p(\mathbb{R}^N))$ del problema de Cauchy

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - b \cdot \nabla u + cu = 0, &\text{ en } [0,T] \times \mathbb{R}^N \\ u(x,0) = u^0, &\text{ en } \mathbb{R}^N. \end{aligned} \tag{3.3.43}$$

Demostració. Sabem que ha d'existir alguna solució en virtut de (3.2.1). Si existissin dues solucions del mateix problema de Cauchy, com que l'equació del transport és lineal, la seva diferència satisfaria el mateix problema de Cauchy amb condició inicial nul·la. Fet que implica, pel teorema (3.3.4), que la diferència entre les dues solucions és nul·la i que, per tant, coincideixen. □

Sense gaire més esforç, encara podem dir més.

Corol·lari 3.3.6. Sota les hipòtesis de (3.3.5), u verifica que $u \in \mathcal{C}([0,T]; L^p(\mathbb{R}^N))$ si $p < \infty$ i que

$$\frac{\partial}{\partial t}\beta(u) - b \cdot \nabla \beta(u) + cu\beta'(u) = 0, \text{ en } [0,T] \times \mathbb{R}^N \tag{3.3.44}$$

per a qualsevol $\beta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ tal que $|\beta'(t)| \leq C(1 + |t|^t)$, per a algun $C > 0$, en el cas que $r = p - 1$ si $q > N$, $r < p - 1$ si $q = N$, i $r = \frac{p}{N}$ si $q < N$.

3.4 Contraexemple a la unicitat

En aquesta secció introduïm un contraexemple que fa palesa la necessitat de suposar que $\operatorname{div}(b) \in L^1([0,T]; L^\infty(\mathbb{R}^N))$ a fi que la solució del problema de Cauchy (3.2.1), amb c nul·la, sigui única.

Concretament, construirem un camp vectorial autònom $b \in W^{1,p}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2) \cap BUC(\mathbb{R}^2)$ per a $1 \leq p < \infty$, on $BUC(\mathbb{R}^2)$ és el conjunt de funcions fitades i uniformement contínues en $\mathbb{R}^2$. Veurem que existeixen infinites solucions de l'equació $\dot{X} = b(X)$, amb $X(0,x) = x$ i, com que cadascun d'aquests fluxos genera una solució $u(t,\cdot) = u^0(X^{-1}(t,(0,\cdot)))$, la solució no podrà ser única.

Com que farem la construcció sobre un conjunt de Cantor, recordem breument com es defineix i algunes propietats topològiques i sobre la seva cardinalitat que són rellevants.

Per a construir el conjunt de Cantor, partim de l'interval $[0,1]$ i el trisequem de manera que

$$[0,1] = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]. \tag{3.4.1}$$

Ara eliminem l'interval obert del mig i posem $I_1 := \left\{\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right\}$ i repetim el procés ara amb cada interval de $[0,1] \setminus I_1$ i, en acabat, sant tornem-hi amb els intervals de $[0,1] \setminus (I_1 \cup I_2)$, i així anar fent. De manera general, si I_n és el conjunt d'intervals que s'han eliminat en el pas n-èsim, posem

$$K_n := [0,1] \setminus \bigcup_{k=1}^{n} I_k. \tag{3.4.2}$$

El conjunt de Cantor és el conjunt de punts que no pertanyen a cap I_n per a qualsevol $n \in \mathbb{N}$; és a dir, $K := \cap_{n=1}^{\infty} K_n$.

Entre moltes de les propietats interessants que posseeix aquest objecte en destaquem dues. Pel que fa a la cardinalitat i a la mesura, malgrat ser un conjunt no numerable, és un conjunt nul. Quant a la topologia, com que és tancat per ser el complementari d'una unió numerable d'oberts, és compacte pel teorema de Heine-Borel.

Siguin K el conjunt de Cantor i $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ una funció tal que $0 \leq g(x) < 1$ per a tot $x \in \mathbb{R}$, i $g(x) = 0$ si, i només si, $x \in K$. Ara hauríem de demostrar que existeix una funció amb aquestes característiques. Per a fer-ho, podríem considerar inicialment la funció $d(\cdot, K)$ que, com que K és tancat, fa que d s'anul·li, només, en tot punt de K. A més a més, d és contínua. Arribats a aquest punt, apareix ara almenys un problema a resoldre: com la fem de classe $C^\infty(\mathbb{R})$? Una opció seria adonar-nos que $d(\cdot, K)$ és derivable excepte en els punts mitjans dels intervals de I_n, per a qualsevol $n \in \mathbb{N}$ i, com que aquests punts no són suficientment a prop de K, que podem suavitzar cadascuna de les irregularitats. Finalment, hauríem de concloure amb algun argument de pas al límit que assegurés que $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Alternativament, hi ha resultats que asseguren que sota certes condicions, existeix una funció que s'anul·la, només, en un conjunt tancat donat i que verifica les propietats que ens interessen.

Com que cap de les dues opcions ens acaben de fer el pes: la primera per ser, potser, una mica fosca, i la segona perquè comporta haver de demostrar aquest fet general; ens decidim a proposar explícitament una funció que verifiqui totes les propietats que li són requerides.

Teorema 3.4.1. Existeix una funció $g : \mathbb{R} \to [0, 1)$ tal que $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ i que $g(x) = 0$ si, i només si, $x \in K$.

Demostració. Primer de tot, considerem la funció definida per l'assignació

$$\psi(x) := \begin{cases} e^{\frac{-1}{1-x^2}}, \text{ si } x \in (-1, 1), \\ 0, \text{ altrament.} \end{cases} \tag{3.4.3}$$

Observem que $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ i que només no s'anul·la en $(-1, 1)$. Definim ara, per a cada nombre $n \in \mathbb{N}$, el conjunt de nombres $P_n \subset [0, 1]$ format pels punts mitjans dels intervals de I_n, que són els intervals eliminats en el pas n-èsim de la construcció del conjunt de Cantor.

Podem produir P_n a partir de P_{n-1}, per a $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, mitjançant la relació que $P_n = P_{n-1} \pm \frac{1}{3^n}$, on $P_1 := \left\{\frac{1}{2}\right\}$. Això és dir que qualsevol element de P_n és de la forma $x \pm \frac{1}{3^n}$, on $x \in P_{n-1}$ i que, per tant,

$$P_n = \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{\varepsilon_k} \frac{1}{3^k} : \varepsilon_k \in \{0, 1\}, \text{ per a qualsevol } k \in \{1, \ldots, n-1\} \right\} \tag{3.4.4}$$

per a qualsevol $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. És evident que $|P_n| = 2^{n-1}$.

Escollim un nombre $\ell \in (0, \sinh(1))$ i considerem la funció

$$g(x) \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{y \in P_n} \frac{1}{\ell \cdot n!} \psi(2 \cdot 3^n (x-y)). \tag{3.4.5}$$

Demostrem tot seguit que g verifica totes les propietats de l'enunciat.

Vegem primer que $g(x) \in [0,1)$ per a qualsevol $x \in [0,1]$. Com que $\|\psi\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = e^{-1}$,

$$\begin{aligned} |g(x)| &\leq \frac{1}{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{y \in P_n} \left| \frac{1}{n!} \psi(2 \cdot 3^n (x-y)) \right| \\ &\leq \frac{e^{-1}}{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} |P_n| = \frac{e^{-1}}{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{n!} |P_n| = \frac{\sinh(1)}{\ell} < 1. \end{aligned} \tag{3.4.6}$$

Suposem ara que $x \in K$. En aquest cas, per a qualsevol $n \in \mathbb{N}$ i qualsevol $y \in P_n$ resulta que

$$|x-y| \geq \frac{1}{2 \cdot 3^n} \tag{3.4.7}$$

perquè la longitud de qualsevol interval de I_n és 3^n i y és el punt mitjà d'algun I_n i, per tant, $\psi(2 \cdot 3^n (x-y)) = 0$, ja que $|2 \cdot 3^n (x-y)| \geq 1$. Tot plegat, es té que $g(x) = 0$.

Vegem ara que, de fet, només s'anul·la sobre el conjunt de Cantor. Sigui $x \notin K$. Notem que a diferència del cas anterior, es té que $\psi(2 \cdot 3^n (x-y))$. Si $x \in P_m$ per a algun $m \in \mathbb{N}$, aleshores $\psi(2 \cdot 3^n (x-y)) = e^{-1}$ i, per tant,

$$0 < \frac{e^{-1}}{\ell m!} \leq g(x) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{y \in P_n} \frac{1}{\ell \cdot n!} \psi(2 \cdot 3^n (x-y)). \tag{3.4.8}$$

Altrament, si $x \notin P_m$ per a cap $m \in \mathbb{N}$ ha de passar que $g(x) \neq 0$, ja que g és una suma de termes positius. En definitiva, si $x \notin K$, aleshores $g(x) \neq 0$.

Per a acabar, demostrem que $g \in \mathcal{C}^\infty([0,1])$. Sigui $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i posem

$$g_n(x) \coloneqq \sum_{y \in P_n} \frac{1}{\ell \cdot n!} \psi(2 \cdot 3^n (x-y)). \tag{3.4.9}$$

Notem que

$$\psi'(x) = \frac{-2x}{(1-x^2)^2} \cdot \psi(x) = h(x) \cdot \psi(x), \tag{3.4.10}$$

on $h(x) \coloneqq -2x(1-x^2)^{-2}$.

Observem ara que, com que podem expressar ψ' en termes de h i de ψ,

$$\psi^{(k)}(x) = \psi(x) \sum_{n=1}^{N(k)} h^{(\alpha_n)}(x) (h(x))^{\beta_n}. \tag{3.4.11}$$

on $N(k) \in \mathbb{N}$ és un nombre que depèn de k, $\alpha \coloneqq (\alpha_1, \ldots, \alpha_{N(k)}) \in \mathbb{N}^{N(k)}$ i $\beta \coloneqq (\beta_1, \ldots, \beta_{N(k)}) \in \mathbb{N}^{N(k)}$ o, dit d'una altra manera, podem expressar $\psi^{(k)}$ en funció del producte entre ψ i una suma finita de productes de derivades i potències de h. Ara, com que h és una funció racional i la suma i el producte de funcions racionals són funcions racionals, la derivada d'una funció racional també ho és. Aleshores, $\psi^{(k)}(x) = \psi(x) \cdot H_k(x)$, on H_k és una funció racional el numerador i el denominador de la qual són un polinomi d'un grau que depèn de k.

A més a més, $H_k(x)$ només presenta dues singularitats: en $x = -1$ i en $x = 1$. En efecte, n'hi ha prou si veiem que el conjunt de punts singulars d'una funció racional es preserva quan la sumem o multipliquem per una altra funció racional amb el mateix conjunt de punts singulars i que el conjunt de punts singulars també es preserva a l'hora de derivar. La primera condició és evident que és satisfeta. La segona també és senzilla de veure si examinem el procés de càlcul de $h^{(k)}$ a partir de $h^{(k-1)}$. Notem que si $h^{(k-1)}$ té S_{k-1} com a conjunt de punts singulats, $h^{(k)}$ també tindrà S_{k-1} com a conjunt de punts singulars perquè el denominador de $h^{(k)}$ és el quadrat del de $H^{(k-1)}$, i com que $h^0 := h$ i $S_0 = \{-1, 1\}$, $S_k = \{-1, 1\}$ per a qualsevol k.

En definitiva, $\psi^{(k)}$ només presenta dues singularitats: en $x = -1$ i en $x = 1$; i, de fet, aquestes són de tipus polinòmic, perquè H_k és un quocient de polinomis. Per tant, com que

$$\lim_{x\to\pm 1} \frac{h(x)}{(x-1)^n(x+1)^m} = 0 \tag{3.4.12}$$

per a qualssevol nombres naturals $n, m \in \mathbb{N}$, resulta que $\psi^{(k)}$ és contínua en $(-1, 1)$ i, per tant, existeix un nombre $G_k > 0$ tal que $|\psi^{(k)}(x)| < G_k$ per a qualsevol $x \in (-1, 1)$.

Aleshores, per a qualsevol $x \in [0, 1]$

$$\begin{aligned}
|g_n^{(k)}(x)| &= \left| \sum_{y\in P_n} \frac{1}{\ell \cdot n!} 2^k 3^{nk} (x-y)^k \psi^{(k)}(2\cdot 3^n(x-y)) \right| \\
&\leq \sum_{y\in P_n} \frac{1}{\ell \cdot n!} 2^k 3^{nk} |x-y|^k \cdot |\psi^{(k)}(2\cdot 3^n(x-y))| \\
&\leq \sum_{y\in P_n} \frac{G_k}{\ell \cdot n!} 2^k 3^{nk} =: M_n^k.
\end{aligned} \tag{3.4.13}$$

Notem que $\psi^{(k)}(2\cdot 3^n(\cdot - y))$ està ben definida en $[0, 1]$. Perquè si passés que $|2\cdot 3^n(x-1)| = 1$, voldria dir que $x \in K$ i que, per tant, $\psi^{(k)}(x) = 0$. Ara podem veure que $\sum_{n=1}^{\infty} M_n^k < \infty$ perquè

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} M_n^k &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{y\in P_n} \frac{G_k}{\ell \cdot n!} 2^k 3^{nk} \\
&\leq \frac{2^k G_k}{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|P_n| \cdot 3^{nk}}{n!} \\
&= \frac{2^k G_k}{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} \cdot 3^{nk}}{n!} = \frac{2^k G_k}{2\ell} \left(-1 + e^{2\cdot 3^k}\right) < \infty.
\end{aligned} \tag{3.4.14}$$

Tot plegat, el criteri M de Weierstrass ens permet de concloure que $g_n^{(k)}$ convergeix uniformement en $[0, 1]$ per a qualsevol $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i que, per tant, $g \in \mathcal{C}^\infty([0, 1])$.

Per a acabar, cal estendre g a $\mathbb{R}$ i això és senzill perquè som lliures d'escollir com la podem prolongar a $\mathbb{R}$ sempre que ho fem manera $\mathcal{C}^\infty$ i tenint en compte que la seva imatge estigui continguda en l'interval $(0, 1)$. $\square$

Definim $f(x) := \int_0^x g(t)\,dt$, per a $x \in \mathbb{R}$. Sigui M el conjunt de mesures finites, no-negatives i lliure d'àtoms (és a dir, que assigna una mesura de zero als singletons) sobre K. Com a σ-àlgebra considerem el conjunt $\mathcal{B}(K) := \{K \cap E : E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$, on $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ és la σ-àlgebra de Borel a $\mathbb{R}$.

Escollim una mesura $m \in M$ i considerem la funció $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida per l'assignació $f_m(x + m(K \cap [0, x])) = f(x)$, per a $x \in \mathbb{R}$.

Per a fixar idees, podem pensar que m és una mesura de Hausdorff sobre K. Recordem que donat un espai mètric (X, η), podem considerar l'aplicació, per a $d, \delta > 0$ donats, $H^d_\delta : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ definida per l'assignació

$$H^d_\delta(A) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam } (U_i))^d : A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \text{ i diam } (U_i) \leq \delta \right\} \tag{3.4.15}$$

Es pot demostrar que $\lim_{\delta \to 0} H^d_\delta(A) =: H^d(A)$ existeix, i que H^d és una mesura exterior. Sense entrar en detalls comentem que, usant el Teorema d'extensió de Carathéodory, es demostra que si restringim H^d sobre certs conjunts resulta que esdevé una mesura.

Definim també el camp vectorial $b(x) := (1, f'(f^{-1}(x_2)))$, per a $x := (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ i l'aplicació $X_m(t, x) := (x_1 + t, f_m(t + f_m^{-1}(x_2)))$, per a $(t, (x_1, x_2)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$.

Observem que, com que f i f_m són creixents, b i X_m són aplicacions contínues (en cadascuna de les seves variables). Vegem ara que X_m és diferenciable respecte de t. Per a fer-ho, n'hi ha prou si comprovem que $f_m \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ i que $f'_m(t + f_m^{-1}(x_2)) = f'_m(f_m^{-1}(X^2_m)) = f'(f^{-1}(X^2_m))$.

Lema 3.4.2. Per a qualsevol $t \in \mathbb{R}$ existeix un únic nombre $x \in \mathbb{R}$ tal que $x + m(K \cap [0, x]) = t$.

Demostració. Per a veure l'existència, primer demostrem que la funció $m^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida per l'assignació $m^*(x) := m(K \cap [0, x])$ és contínua, excepte en l'origen. Vegem primer la continuïtat per l'esquerra. Per a $x < 0$, és clar que ho és perquè $m^*(x) = 0$. Fixem ara $x > 0$ i vegem que m^* hi és contínua. Sigui $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (0, \infty)$ una successió creixent tal que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to x$, aleshores $\{K \cap [0, x_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ és una successió creixent i, per la propietat de la continuïtat seqüencial de m,

$$m^*(x) = m\,(K \cap [0, x]) = m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} K \cap [0, x_n] \cup \{x\} \right) = m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} K \cap [0, x_n] \right) + m(\{x\}), \tag{3.4.16}$$

i com que m és lliure d'àtoms,

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} K \cap [0, x_n] \right) + m(\{x\}) = \lim_{n\to\infty} m(K \cap [0, x_n]) = \lim_{n\to\infty} m^*(x_n). \tag{3.4.17}$$

Observem que $m^*(0) = m(\{0\}) > 0$, perquè m no té àtoms i, per tant, m no és contínua per l'esquerra en l'origen.

La continuïtat per la dreta és anàloga, tot fent ús de successions decreixents de borelians i, a diferència de la prova anterior, emprant el fet que m és finita.

Ara, com que m^* és contínua, la funció $x + m^*(x)$ també és contínua i, a més a més, no és fitada ni inferiorment ni superior perquè m^* és no-negativa i x no és fitada, fet que demostra que l'equació $x + m^*(x) = t$ té solució. Que aquesta és única és conseqüència del fet que $x + m^*(x)$ és creixent perquè, malgrat m^* pugui ser constant en un entorn suficientment petit, x és estrictament creixent. $\square$

Lema 3.4.3. Per a qualsevol nombre $x \in \mathbb{R} \setminus K$ i per a qualsevol $0 < s < t$ suficientment proper a t resulta que

$$(x + s - t) + m(K \cap [0, x + s - t]) = s \tag{3.4.18}$$

Demostració. Sigui $x \in \mathbb{R} \setminus K$. Com que K és tancat, podem considerar el nombre $S := |\inf\{r \in (0, \infty) : x + r - t \in K\} - t|$. Aleshores, $m(K \cap [0, x]) = m(K \cap [0, x + s - t])$ per a qualsevol $s \in [t - S, t + S]$. En efecte, si $s \in [t - S, t + S]$ passa que $m(K \cap [0, x]) = m(K \cap [0, x + s - t))$, ja que $[x, s - t] \not\subset K$, si $s - t > x$ (o $[s - t, x] \not\subset K$, si $s - t < x$) i, com que m és lliure d'àtoms i finita, i $\{x + s - t\} = [0, x + s - t] \setminus [0, x + s - t) \in \mathcal{K}$, $m(\{x + s - t\}) = 0$. Per tant, de la igualtat $x + m(K \cap [0, x]) = t$ i dels comentaris anteriors deduïm que

$$x - t + s + m(K \cap [0, x + s - t]) = s, \text{ per a } s \in [t - S, t + S], \tag{3.4.19}$$

que és el que volíem demostrar. $\square$

El següent lema exhibeix que la dependència entre dues solucions de l'equació $x + m(K \cap [0, x]) = t$ és contínua.

Lema 3.4.4. Siguin $x \in \mathbb{R}$ l'única solució de $x + m(K \cap [0, x]) = t$ i $\varepsilon > 0$. Aleshores, existeix $\delta > 0$ tal que si $|t - s| < \delta$, aleshores $|x(s) - x| < \varepsilon$, per a $s \in \mathbb{R}$.

Demostració. És un fet general que les funcions contínues i injectives tenen inversa i que aquesta és contínua. $\square$

Lema 3.4.5. La funció f_m és derivable i $f_m'(t) = f'(x)$ per a qualsevol $t \in \mathbb{R}$, on x és l'única solució de l'equació de (3.4.2).

Demostració. Sigui $t \in \mathbb{R}$. Aleshores, en virtut de (3.4.2) existeix un únic nombre $x \in \mathbb{R}$ tal que $x + m(K \cap [0, x]) = t$. Suposem primer que $x \in \mathbb{R} \setminus K$. Aleshores, a partir del resultat (3.4.3) i, mantenint-ne la notació, es té que per a $s \in [t - S, t + S]$ també tenim la igualtat que $(x + s - t) + m(K \cap [0, x + s - t]) = s$. Tot plegat,

$$\begin{aligned}\lim_{s \to t} \frac{f_m(s) - f_m(t)}{s - t} &= \lim_{s \to t} \frac{f_m(x + s - t) + m(K \cap [0, x + s - t])) - f_m(x + m(K \cap [0, x]))}{s - t} \\ &= \lim_{s \to t} \frac{f(x + s - t) - f(x)}{s - t} = f'(x).\end{aligned} \tag{3.4.20}$$

Com que podem suposar que $g \in C^k(\mathbb{R})$ per a un nombre k més gran o igual que u, f també i, per tant, el límit anterior existeix. Obtenim per una banda que és igual a $f_m'(t)$ i per una altra que és igual a $f'(x)$.

Suposem ara que $x \in K$. Per a $s \in (t, \infty)$ denotem per $x(s)$ l'única solució de

$$x(s) + m(K \cap [0, x(s)]) = s. \tag{3.4.21}$$

Com que la funció $x + m(K \cap [0, x])$ és no-decreixent, $x \leq x(s)$ i, per tant, $m(K \cap [0, x(s)]) - m(K \cap [0, x]) \geq 0$. Aleshores, $x(s) - x + m(K \cap [0, x(s)]) - m(K \cap [0, x]) = s - t$, d'on deduïm que $x(s) - x \leq s - t$. Per a $s \in (-\infty, t)$, un argument anàleg serveix per a demostrar que $x - x(s) \leq t - s$. Així doncs, $|x(s) - x| \leq |s - t|$.

Observem ara que $f'(x) = 0$, perquè $x \in K$ i, per tant, $g(x) = 0 = g(0)$. A més a més, pel lema (3.4.4) la solució $x(s)$ depèn contínuament de s i, per tant, té sentit parlar del límit de $f(x(s))$ quan $s \to t$.

Aleshores, $\lim_{s \to t} \frac{|f(x(s)) - f(x)|}{|x(s) - x|} = 0$ i, per tant,

$$|f_m(s) - f_m(t)| = |f(x(s)) - f(x)| \leq C|x(s) - x|^2 \leq C(s - t)^2, \tag{3.4.22}$$

fet que implica que f_m és derivable en t i que $f_m'(t) = 0 = f'(x)$. $\square$

Per a acabar, hem de veure que $b \in W^{1,p}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$ i que $\operatorname{div} b \notin L^\infty(\mathbb{R}^2)$. N'hi ha prou si demostrem que $F := f'(f^{-1}(\cdot)) \in W^{1,p}_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ i que $\operatorname{div} b = F' \notin L^\infty(\mathbb{R})$. La primera condició és immediata de provar perquè F és composició de funcions contínues. Pel que fa a la segona, com que

$$F'(t) = f''(f^{-1}(t))(f^{-1}(t))' = \frac{g'(f^{-1}(t))}{f'(f^{-1}(t))} = \frac{g'(f^{-1}(t))}{g(f^{-1}(t))}, \tag{3.4.23}$$

aleshores

$$\int_{\mathbb{R}} |F'(t)|^p \, dt = \int_{\mathbb{R}} |g'(f^{-1}(t))|^p |g(f^{-1}(t))|^{-p} \, dt = \int_{\mathbb{R}} |g(s)|^{-(p-1)} |g'(s)|^p \, ds. \tag{3.4.24}$$

Per tant, hem d'exigir que la integral de l'equació (3.4.24) sigui finita per a algun $p > 1$ i que, alhora, $\frac{g'(\cdot)}{g(\cdot)} \notin L^\infty(\mathbb{R})$ a fi que $F' \notin L^\infty(\mathbb{R}^2)$. I això és viable si escollim $g := g_0^m$, on $m := 1 + \frac{p-1}{p}$ i $g_0 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ és una funció tal que $0 \leq g(x) < 1$ per a qualsevol $x \in \mathbb{R}$, que s'anul·la, només, en K i que, addicionalment, satisfaci que $g_0' \in L^p(\mathbb{R})$ i que $g_0' \in L^\infty(\mathbb{R})$. Aquestes dues condicions es verifiquen si imposem que $g_0(t) \to 1$ si $|t| \to \infty$. En aquest supòsit, resulta que la finitud de la integral és garantida i que, a més a més, $F'(\cdot) = \frac{g_0'(\cdot)}{g_0(\cdot)} \notin L^\infty(\mathbb{R})$, ja que $g_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, però g_0 s'anul·la en K.

Capítol 4

Existència i unicitat de l'equació de Fokker-Planck

Dediquem aquest capítol a estudiar l'existència i unicitat de solucions globals de l'equació de Fokker-Planck; és a dir, del següent problema de Cauchy:

$$\begin{aligned} u_t + L(u) &= 0, \text{ en } [0,T] \times \mathbb{R}^N \\ u(0,\cdot) &= g, \text{ en } \mathbb{R}^N \end{aligned} \tag{4.0.1}$$

on $L : L^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$ és un operador lineal definit per l'assignació

$$L(u) = -\frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j=1}^{N} (a_{i,j} u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{N} b^i u_{x_i} + \mathrm{div}(b) u \tag{4.0.2}$$

on A és una matriu les entrades de la qual denotarem per $a_{i,j}$, per a $i, j \in \{1, \ldots, N\}$ i b un camp vectorial. Notem que tant b com A són autònoms.

Pel que fa a la matriu A, d'entrada suposarem que és de la forma $A = \sigma^t \cdot \sigma$, on $\sigma \in (L^\infty(\mathbb{R}^N))^{N\times N}$. Per construcció, A és simètrica, definida no-negativa i $A \in L^\infty(\mathbb{R}^N)^{N\times N}$.

Quant al camp vectorial b, suposarem que $b \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap W^{1,\frac{2^*}{2^*-2}}(\mathbb{R}^N)$ i que és tal que div $b \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Notem que si $N = 2$, aleshores 2^* pot ser qualsevol nombre $q \in [2, \infty)$ i, per tant, $\frac{2^*}{2^*-2} > 1$. Així doncs, la primera condició es tradueix en el fet que $b \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap W^{1,r}(\mathbb{R}^N)$ per a qualsevol $r \in (1, \infty)$. En el supòsit que $N > 2$, de (2.4.20) notem que la primera condició és equivalent a dir que $b \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$.

Dividirem l'estudi de l'existència i la unicitat del problema de Cauchy (4.0.1) en dues parts, en funció de si A és uniformement el·líptica o no. En el primer cas, farem ús del mètode de les aproximacions de Galerkin i en el segon cas podrem estendre l'esquema de DiPerna-Lions a l'equació de Fokker-Planck si suposem que A verifica alguna mena de condició de regularitat.

Observació 4.0.1. Podem reescriure l'equació anterior de diverses maneres, com per exemple

$$u_t - \mathrm{div}\left(\frac{1}{2} A \cdot \nabla u\right) + \mathrm{div}(bu) = 0; \tag{4.0.3}$$

o, alternativament si usem la notació d'Einstein,

$$u_t - \partial_i \left(\frac{1}{2} \sigma_{i,k} \sigma_{j,k} \partial_j u\right) + \partial_i (u b_i) = 0, \tag{4.0.4}$$

o també

$$u_t + L(u) = 0, \tag{4.0.5}$$

on $L(u) = -\mathrm{div}\left(\frac{1}{2}A \cdot \nabla u - bu\right)$.

4.1 Coeficients uniformement el·líptics

Suposem que la matriu A és fitada, simètrica i uniformement el·líptica, i que $b \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap W^{1,\frac{2^*}{2^*-2}}(\mathbb{R}^N)$ és tal que div $b \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Que A sigui uniformement el·líptica és dir que existeix un nombre real $\theta > 0$ tal que

$$\langle A(x)\xi, \xi\rangle_{\mathbb{R}^N} = \sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2 \tag{4.1.1}$$

per a qualsevol $\xi \in \mathbb{R}^N$ i gairebé per a tot $x \in \mathbb{R}^N$.

Lema 4.1.1. L'operador $L : H^1(\mathbb{R}^N) \to H^{-1}(\mathbb{R}^N)$ definit en (4.0.2) o en (4.0.5) és lineal i continu.

Demostració. Que és lineal és evident perquè totes les que s'hi veuen involucrades ho són. Vegem que és continu. Sigui $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Aleshores, L és la divergència del camp vectorial $F := -\frac{1}{2}A\cdot\nabla u - bu$. Notem que F és localment integrable perquè per a qualsevol compacte $K \subset \mathbb{R}^N$

$$\begin{aligned} \int_K \|F\|_{\mathbb{R}^N}\, dx &= \int_K \left\|\frac{1}{2}A\cdot\nabla u + bu\right\|_{\mathbb{R}^N} dx \\ &\leq \frac{1}{2}\|A\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\|\nabla u\|_{L^2(K)}^{\frac{1}{2}}|K|^{\frac{1}{2}} + \|b\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\|u\|_{L^2(K)}^{\frac{1}{2}}|K|^{\frac{1}{2}} < \infty. \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

Per tant, pel fet de ser localment integrable en $\mathbb{R}^N$, $\mathrm{div}(F)$ és una distribució ben definida que actua sobre funcions suaus $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ de la manera següent

$$\langle L(u), v\rangle = \langle -\mathrm{div}(F), v\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} F\cdot\nabla v\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{2}A\cdot\nabla u\cdot\nabla v\, dx + \int_{\mathbb{R}^N} bu\cdot\nabla v\, dx \tag{4.1.3}$$

on $\langle -\mathrm{div}(F), \cdot\rangle : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ és l'acció de $\mathrm{div}(F)$ sobre funcions suaus. Aleshores,

$$\begin{aligned} |\langle L(u), v\rangle| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \left|\frac{1}{2}A\cdot\nabla u\cdot\nabla v\right| dx + \int_{\mathbb{R}^N} |bu\cdot\nabla v|\, dx \\ &\leq \frac{1}{2}\|A\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\|v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|b\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq \frac{1}{2}\|A\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}\|v\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} + \|b\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}\|\nabla v\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \\ &= \left(\frac{1}{2}\|A\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \|b\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\right)\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}\|v\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}. \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

Tot plegat, d'aquesta última desigualtat es desprèn que

$$\begin{aligned} \|L(u)\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^N)} &= \sup_{v\in H^1(\mathbb{R}^N)} \left\{\langle L(u), v\rangle : \|v\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} = 1\right\} \\ &\leq \left(\frac{1}{2}\|A\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \|b\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\right)\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \end{aligned} \tag{4.1.5}$$

que és el que volíem demostrar. □

Observem ara que donada una solució u de (4.0.1), si ens la pensem com un element tal que $u(t,\cdot) \in H^1(\mathbb{R}^N)$ per a qualsevol $t \in [0,T]$, resulta que $L(u(t,\cdot)) \in H^{-1}(\mathbb{R}^N)$ i com és solució de (4.0.1), es té que $u'(t,\cdot) \in H^{-1}(\mathbb{R}^N)$ també. Encara més, l'acció de $L(u(t,\cdot))$ i l'acció de $-u'(t,\cdot)$ han de coincidir i, almenys formalment, es té que $\langle u'(t,\cdot), v\rangle = -\langle L(u), v\rangle$, o equivalentment, que $\langle u'(t,\cdot) + L(u(t,\cdot)), v\rangle = 0$ per a qualsevol $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ i gairebé per a tot $t \in [0,T]$. És raonable, doncs, definir les solucions de (4.0.1) com aquelles funcions u que verifiquin aquesta condició.

Definició 4.1.2. Diem que $u : [0,T] \to H^1(\mathbb{R}^N)$ és una solució feble de (4.0.1) si

1. pel que fa al comportament respecte de $t \in [0,T]$, $u \in L^2([0,T]; H^1(\mathbb{R}^N))$ i $u' \in L^2([0,T]; H^{-1}(\mathbb{R}^N))$.
2. per a qualsevol $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ i gairebé per tot $t \in [0,T]$ es té que $\langle u'(t) + L(u(t)), v\rangle = 0$.
3. quant a la condició inicial, $u(0) = g$.

El següent resultat detalla algunes propietats de les solucions febles, que es poden deduir independentment de l'equació que considerem.

Lema 4.1.3. Sigui $u \in L^2([0,T]; H^1(\mathbb{R}^N))$ tal que $u' \in L^2([0,T]; H^{-1}(\mathbb{R}^N))$. Aleshores,

1. es té que $u \in \mathcal{C}([0,T]; L^2(\mathbb{R}^N))$.
2. la funció definida per l'assignació $t \mapsto \|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}$ és absolutament contínua i, de fet,
$$\frac{d}{dt}\left(\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\right) = 2\langle u'(t), u(t)\rangle = 2\int_{\mathbb{R}^N} u'(t)u(t)\,dx. \tag{4.1.6}$$
3. si $v \in \mathcal{C}([0,T]; H^1(\mathbb{R}^N))$, la funció $t \mapsto \langle u(t), v(t)\rangle$ és absolutament contínua i $\frac{d}{dt}\langle u(t), v(t)\rangle = \langle u'(t), v(t)\rangle$.
4. es compleix que
$$\|u\|_{L^\infty([0,T];L^2(\mathbb{R}^N))} \le C\left(\|u\|_{L^2([0,T];H^1(\mathbb{R}^N))} + \|u'\|_{L^2([0,T];H^{-1}(\mathbb{R}^N))}\right). \tag{4.1.7}$$

Demostració. No ens entretindrem en la demostració, que es pot trobar a [3]. □

D'ara endavant, ens centrarem a trobar fites inferiors i superiors de $\langle L(u(t)), v\rangle$, per a $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$.

Proposició 4.1.4. L'aplicació $B : H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ definida per l'assignació
$$B(u,v) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{2} A \cdot \nabla u \cdot \nabla v\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} bu \cdot \nabla v\,dx \tag{4.1.8}$$
és una forma bilineal i contínua; és a dir, tal que existeix una constant positiva $C > 0$ de manera que
$$|B(u,v)| \le C\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}\|v\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}, \tag{4.1.9}$$
per a qualssevol $u, v \in H^1(\mathbb{R}^N)$, que a més a més verifica que
$$\beta\|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} \le B(u,u) + \gamma\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}, \tag{4.1.10}$$
per a qualsevol $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, on $\beta := \frac{\theta}{2}$ i $\gamma := \theta + \frac{1}{2}\|\text{div } b\|_{L^\infty}$.

Demostració. Primer de tot, notem que si $u, v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ aleshores $B(u,v) = \langle L(u), v\rangle$ i dels càlculs fets en (4.1.4) es desprèn la continuïtat. Que és bilineal és clar, ja que totes les operacions que s'hi veuen involucrades ho són.

Demostrem ara la desigualtat (4.1.10). Observem que si $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, aleshores $bu^2 \in W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$. En efecte, com que $b \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap W^{1,\frac{2^*}{2^*-2}}(\mathbb{R}^N)$, es té que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \|bu^2\|_{\mathbb{R}^N}\, dx \leq \|b\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} < \infty; \tag{4.1.11}$$

o sigui, que $bu^2 \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Vegem ara que $D(bu^2) \in L^2(\mathbb{R}^N)$. A tal fi, n'hi ha prou que demostrem que $D(b)u^2 \in L^2(\mathbb{R}^N)$ i que $2bu\nabla u \in L^2(\mathbb{R}^N)$, perquè $D(bu^2) = D(b)u^2 + 2buD(u)$. Pel que fa al primer terme, com que $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$, el teorema (2.4.13) garanteix que $u^2 \in L^{\frac{2^*}{2}}(\mathbb{R}^N)$. I com que l'exponent conjugat de $\frac{2^*}{2}$ és $\left(\frac{2^*}{2}\right)' = \frac{2^*}{2^*-2}$ i resulta que $b \in L^{\frac{2^*}{2^*-2}}(\mathbb{R}^N)$, la desigualtat de Hölder assegura que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \|u^2 Db\|_{\mathbb{R}^N} \leq \|u^2\|_{L^{\frac{2^*}{2}}(\mathbb{R}^N)} \|Db\|_{L^{\frac{2^*}{2^*-2}}(\mathbb{R}^N)} < \infty \tag{4.1.12}$$

Quant al segon terme, un càlcul similar al de la desigualtat (4.1.11) serveix per a demostrar que $2buD(u) \in L^1(\mathbb{R}^N)$, perquè $b \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ i $D(u) \in L^2(\mathbb{R}^N)$ també.

Demostrem ara que $\int_{\mathbb{R}^N} \operatorname{div}(bu^2)\, dx = 0$. Tot emprant arguments de densitat, com que $bu^2 \in W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$, existeix una successió de camps vectorials $\{F_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ que convergeix cap a bu^2 en $W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$. Ara bé, com que són de suport compacte, el teorema de la divergència assegura que $\int_{\mathbb{R}^N} \operatorname{div}(F_k)\, dx = 0$ per a qualsevol $k \in \mathbb{N}$. I com que de la convergència de $\{F_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ cap a bu^2 en $W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$ deduïm que $\{\operatorname{div}(F_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ convergeix cap a $\operatorname{div}(F)$ en $L^1(\mathbb{R}^N)$, resulta que $\int_{\mathbb{R}^N} \operatorname{div}(bu^2)\, dx = 0$, tal com volíem.

Observem ara que $\operatorname{div}(bu^2) = \operatorname{div}(b)u^2 + 2bu \cdot \nabla u = 0$, que implica que

$$\int_{\mathbb{R}^N} bu \cdot \nabla u\, dx = -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \operatorname{div}(b)u^2\, dx \geq -\frac{\|\operatorname{div}(b)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}}{2}\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}. \tag{4.1.13}$$

Aquesta desigualtat ens permetrà de trobar una fita inferior de $B(u,u)$, per a qualsevol $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Concretament,

$$\begin{aligned}
B(u,u) &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{2} A\nabla u \cdot \nabla u\, dx + \int_{\mathbb{R}^N} bu \cdot \nabla u\, dx \\
&\geq \theta \|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} - \frac{\|\operatorname{div}(b)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}}{2}\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
&= \theta\left(\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\right) - \left(\theta + \frac{\|\operatorname{div}(b)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}}{2}\right)\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
&\geq \theta \frac{\left(\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\right)^2}{2} - \left(\theta + \frac{\|\operatorname{div}(b)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}}{2}\right)\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
&= \frac{\theta}{2}\|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} - \left(\theta + \frac{\|\operatorname{div}(b)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}}{2}\right)\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}
\end{aligned} \tag{4.1.14}$$

fet que conclou la demostració. $\square$

4.1.1 Aproximacions de Galerkin

Fixem una base ortonormal $\{\omega_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $L^2(\mathbb{R}^N)$ que sigui també un sistema ortogonal de $H^1(\mathbb{R})$, com ara la que s'explicita en la secció (4.1.2). Per a qualsevol $m \in \mathbb{N}$ posem $F_m \coloneqq \langle \omega_1, \dots, \omega_m \rangle$, que és un subespai vectorial tancat tant de $L^2(\mathbb{R}^N)$ com de $H^1(\mathbb{R}^N)$, ja que és de dimensió finita. Per tant, la projecció ortogonal $P_{F_m} : L^2(\mathbb{R}) \to F_m$ de $L^2(\mathbb{R}^N)$ sobre F_m està ben definida.

Teorema 4.1.5. Per a qualsevol $m \in \mathbb{N}$ existeix una funció $u_m : [0,T] \to F_m$ que verifica cadascuna de les següents propietats:

1. es té que $u_m(t) = \sum_{k=1}^{m} d_{m,k}(t)\omega_k$, on les funcions $d_{m,k} : [0,T] \to \mathbb{R}$ són tals que $d_{m,k} \in \mathcal{C}^\infty([0,T])$ per a qualssevol $k, m \in \mathbb{N}$.
2. es té que $u_m'(t) = \sum_{k=1}^{m} d_{m,k}'(t)\omega_k$ per a qualssevol $k \in \{1, \dots, m\}$ i, en particular, $u_m'(t) \in F_m$ per a qualsevol $t \in [0,T]$.
3. es té que $u_m(0) = P_{F_m}(g)$.
4. es té que $\int_{\mathbb{R}^N} (u_m'(t) + L(u_m(t)))\,\omega_k\,dx = 0$ per a qualssevol $k \in \{1, \dots, m\}$ i $t \in [0,T]$.

Demostració. Per a provar una part de (1) n'hi ha prou si notem que, com que $u_m(t) \in F_m$ per a qualsevol $t \in [0,T]$, han d'existir coeficients $d_{m,k}(t)$ per a $k \in \{1, \dots, m\}$ de manera que $u_m(t) = \sum_{k=1}^{m} d_{k,m}(t)\omega_k$. Vegem ara que aquests coeficients, vistos com a funció de t, són funcions suaus. Com que $\{\omega_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ és una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R}^N)$, resulta que

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_m(t)\omega_k\,dx = \langle u_m(t), \omega_k \rangle = d_{m,k}(t) \tag{4.1.15}$$

per a qualsevol $k \in \{1, \dots, m\}$. En particular, $d_{m,k}(0) = \int_{\mathbb{R}^N} u_m(0)\omega_k\,dx$ i, si s'ha de complir la propietat (3), cal que $P_{F_m}(g)$ s'ha d'anul·li en $F_m^\perp$; és a dir, que $d_{m,k}(0) = 0$ si $k > m$, i $d_{m,k}(0) = \int_{\mathbb{R}^N} g\omega_k\,dx$ si $k \in \{1, \dots, m\}$.

Observem ara que és clar que $u_m' = \sum_{k=1}^{m} d_{m,k}'\omega_k$ i que, per tant,

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_m'(t)\omega_k\,dx = \left\langle u_m'(t), \omega_k \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \sum_{j=1}^{m} d_{m,j}'(t)\langle \omega_j, \omega_k \rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} = d_{m,k}'(t). \tag{4.1.16}$$

Tot fent ús de la bilinealitat de B es té que

$$\langle L(u_m(t)), \omega_k \rangle = B(u_m(t), \omega_k) = \sum_{j=1}^{m} d_{m,j}(t)B(\omega_j, \omega_k) \tag{4.1.17}$$

i, si combinem les expressions (4.1.16) i (4.1.17) per a exigir que se satisfaci (4), passa que

$$d_{m,k}'(t) = \sum_{j=1}^{m} d_{m,j}(t)B(\omega_k, \omega_j) = 0, \tag{4.1.18}$$

que és una equació diferencial lineal amb coeficients constants que, juntament amb les condicions del comentari de l'equació (4.1.15), esdevé el següent problema de Cauchy

$$\begin{aligned} D_m' + M_m D_m &= 0, \text{ en } [0,T] \\ D_m(0) &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} g\omega_1\,dx, \dots, \int_{\mathbb{R}^N} g\omega_m\,dx \right), \end{aligned} \tag{4.1.19}$$

on $D_m(t) \coloneqq (d_{m,1}(t), \ldots, d_{m,m}(t))$ i $M_m \coloneqq (B(\omega_k, \omega_j))_{1\le k,j\le m}$. La teoria clàssica d'equacions diferencials garanteix que D_m existeix, que és única i que $D_m \in (\mathcal{C}^\infty([0,T]))^m$, que és el que volíem demostrar. $\square$

Proposició 4.1.6. Per a cada $m \in \mathbb{N}$, sigui $u_m : [0,T] \to F_m$ una funció amb les propietats del teorema (4.1.5). Aleshores, existeix un nombre real $C > 0$ tal que

$$\|u_m\|_{L^\infty([0,T];L^2(\mathbb{R}^N))} + \|u_m\|_{L^2([0,T];H^1(\mathbb{R}^N))} + \|u'_m\|_{L^2([0,T];H^{-1}(\mathbb{R}^N))} \le Ce^{2\gamma T}\|g\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}. \tag{4.1.20}$$

Demostració. Del teorema (4.1.5), es té que $\int_{\mathbb{R}^N}(u'_m(t) + L(u_m(t)))\omega_k\,dx = 0$, per a $k \in \{1, \ldots, m\}$ i com que $u_m(t) \in F_m$, $\int_{\mathbb{R}^N}(u'_m(t) + L(u_m(t)))u_m(t)\,dx = 0$, d'on

$$0 = \int_{\mathbb{R}^N} u'_m(t)u_m(t) + B(u_m(t), u_m(t))\,dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u_m(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\right) + B(u_m(t), u_m(t)) \tag{4.1.21}$$

i com que en virtut de la proposició (4.1.4) es té que

$$\gamma\|u_m\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + B(u_m, u_m) \ge \beta\|u_m\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)}. \tag{4.1.22}$$

Si combinem les expressions (4.1.21) i (4.1.22), deduïm que

$$\frac{d}{dt}\left(\|u_m(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\right) \le \frac{d}{dt}\left(\|u_m(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\right) + 2\beta\|u_m(t)\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} \le 2\gamma\|u_m(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}. \tag{4.1.23}$$

Ara, el lema de Grönwall ens permet de dir que

$$\|u_m(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \le e^{2\gamma t}\|u_m(0)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \le e^{2\gamma t}\|g\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}. \tag{4.1.24}$$

D'aquesta primera desigualtat ja es pot deduir que

$$\|u_m\|_{L^\infty([0,T];L^2(\mathbb{R}^N))} \le e^{2\gamma T}\|g\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \tag{4.1.25}$$

Si integrem ara en $(0,t)$ els dos últims membres de la desigualtat (4.1.23) es té que i

$$\begin{aligned}\|u_m(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} - \|u_m(0)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + 2\beta\int_0^t \|u_m(s)\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)}\,ds &\le 2\gamma\int_0^t \|u_m(s)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\,ds \\ &\le 2\gamma\int_0^t e^{2\gamma s}\|g\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\,ds \\ &\le \left(e^{2\gamma t} - 1\right)\|g\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}.\end{aligned} \tag{4.1.26}$$

Tot plegat,

$$2\beta\int_0^T \|u_m(s)\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)}\,ds \le \|u_m(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + 2\beta\int_0^T \|u_m(s)\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)}\,ds \le e^{2\gamma T}\|g\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}, \tag{4.1.27}$$

que implica que

$$\|u_m\|_{L^2([0,T];H^1(\mathbb{R}^N))} \le Ce^{2\gamma T}\|g\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}, \tag{4.1.28}$$

per a alguna constant $C > 0$.

Per a acabar, de cara a obtenir un control de u'_m en $L^2([0,T];H^{-1}(\mathbb{R}^N))$, escollim una funció $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $\|v\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \le 1$ i observem que podem expressar $v = v_1 + v_2$, on $v_1 \in F_m$ i $v_2 \in F_m^{\perp}$. Així doncs, com que $\{\omega_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ són ortogonals dos a dos en $H^1(\mathbb{R}^N)$, a conseqüència de la desigualtat de Bessel resulta que $\|v_1\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq \|v\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq 1$. A més a més, com que $v_1 \in F_m$ i $v_2 \in F_m^{\perp}$, també es té que $\int_{\mathbb{R}^N} (u_m'(t) + L(u_m(t)))\, v_1\, dx = 0$ perquè per a qualsevol $k \in \mathbb{N}$, $\langle v_2, \omega_k\rangle_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \langle v, \omega_k\rangle_{H^1(\mathbb{R}^N)} - \langle v_1, \omega_k\rangle_{H^1(\mathbb{R}^N)} = 0$, i que

$$\langle u_m'(t), v(t)\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} u_m' v\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} u_m'(t) v_1\, dx = -\int_{\mathbb{R}^N} L(u_m(t)) v_1\, dx = -B(u_m(t), v_1). \tag{4.1.29}$$

Si ara combinem aquesta última igualtat amb el fet que $\|v\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq 1$ i amb la inequació que es desprèn de la continuïtat de B que es detalla en (4.1.4), s'obté que

$$\big|\langle u_m'(t), v\rangle\big| = \big|-B(u_m(t), v^1)\big| \leq C\|u_m(t)\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}\|v_1\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u_m(t)\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}, \tag{4.1.30}$$

que permet de concloure que $\|u_m'(t)\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u_m(t)\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}$ i que, per tant,

$$\|u_m'\|_{L^2([0,T];H^{-1}(\mathbb{R}^N))} \leq C\|u_m\|_{L^2([0,T];H^1(\mathbb{R}^N))} \tag{4.1.31}$$

Si ara reunim les desigualtats (4.1.25), (4.1.28) i (4.1.31), obtenim la inequació que buscàvem. □

Ara sí, demostrem l'existència i la unicitat de solucions del problema de Cauchy (4.0.1).

Teorema 4.1.7. Per a qualsevol funció $g \in L^2(\mathbb{R}^N)$, existeix una única funció $u \in L^2([0,T]; H^1(\mathbb{R}^N))$ tal que $u' \in L^2([0,T]; H^{-1}(\mathbb{R}^N))$ que és solució el problema de Cauchy

$$\begin{aligned} u' + L(u) &= 0 \\ u(0) &= g, \end{aligned} \tag{4.1.32}$$

on $L : L^2([0,T]; H^1(\mathbb{R}^N)) \to L^2([0,T]; H^1(\mathbb{R}^N))$ és l'operador definit per $L(u) := -\mathrm{div}\left(\frac{1}{2}A \cdot \nabla u + bu\right)$, $A \in (H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N))^{N\times N}$ és una matriu simètrica, fitada i uniformement el·líptica, i $b \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap W^{1,\frac{2^*}{2^*-2}}(\mathbb{R}^N)$ és un camp vectorial tal que $\mathrm{div}\, b \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Demostració. Tot mantenint les notacions de la proposició anterior, com que la successió $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ és fitada en $L^2([0,T]; H^1(\mathbb{R}^N))$ en virtut de la proposició (4.1.6), el teorema de Banach-Alaoglu ens permet d'extreure'n una successió parcial, que també denotem com $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, que convergeixi feblement cap a un element $u \in L^2([0,T]; H^1(\mathbb{R}^N))$. Si tornem a invocar la proposició (4.1.6), resulta que $\{u_m'\}_{m\in\mathbb{N}}$ és una successió fitada en $L^2([0,T]; H^{-1}(\mathbb{R}^N))$ i, de nou, el teorema de Banach-Alaoglu garanteix l'existència d'una successió parcial de $\{u_m'\}_{m\in\mathbb{N}}$, que també denotem com $\{u_m'\}_{m\in\mathbb{N}}$, que convergeixi feblement cap a un element $\tilde{u} \in L^2([0,T]; H^{-1}(\mathbb{R}^N))$. De resultes del fet que $u_m' = \frac{d}{dt}u_m$ enteses com a distribucions, es té que $\tilde{u} = u'$, d'on es dedueix que $u' \in L^2([0,T]; H^{-1}(\mathbb{R}^N))$.

Vegem ara que u és solució feble de l'equació. Fixem dos nombres $n, m \in \mathbb{N}$ tals que $m \geq n$, i escollim una funció $v \in \mathcal{C}^1([0,T]; H^1(\mathbb{R}^N))$ de la forma $v := \sum_{k=1}^n d_k(t)\omega_k$, on $d_k : [0,T] \to \mathbb{R}$ són funcions suaus per a qualsevol $k \in \{1, \ldots, m\}$. Com que el teorema (4.1.5) assegura que $\int_{\mathbb{R}^N} u_m'(t)\omega_k\, dx + \int_{\mathbb{R}^N} L(u_m(t))\omega_k\, dx = 0$ per a qualssevol $k \in \{1, \ldots, m\}$ i $t \in [0,T]$, deduïm de la linealitat de les operacions i del fet que $n \leq m$ que

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u_m'(t)v(t)\, dx\, dt + \int_0^T B(u_m(t), v(t))\, dt = 0. \tag{4.1.33}$$

Per tant,

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^T B(u_m(t),v(t))\,dt = \int_0^T B(u(t),v(t))\,dt \tag{4.1.34}$$

perquè $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ convergeix feblement cap a u en $L^2([0,T];H^1(\mathbb{R}^N))$ i perquè $B(\cdot,v)\in L^2([0,T];H^{-1}(\mathbb{R}^N))\cong (L^2([0,T];H^1(\mathbb{R}^N)))^*$. Anàlogament, com que $\{u'_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ convergeix feblement cap a u' en $L^2([0,T];H^{-1}(\mathbb{R}^N))$,

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u'_m(t)v(t)\,dx\,dt \to \langle u'(t),v(t)\rangle. \tag{4.1.35}$$

Com que $u'\in L^2([0,T];H^{-1}(\mathbb{R}^N))$, es conclou que

$$\int_0^T \langle u'(t),v(t)\rangle\,dt + \int_0^T B(u(t),v(t))\,dt = 0. \tag{4.1.36}$$

De resultes del fet que les combinacions lineals finites de la forma de v són denses en $L^2([0,T];H^1(\mathbb{R}^N))$, l'equació (4.1.36) és vàlida per a qualsevol $v\in L^2([0,T];H^1(\mathbb{R}^N))$ també. En particular, per les funcions de la forma $v(t)(x):=\varphi(t)\psi(x)$. Així doncs,

$$\int_0^T \varphi(t)\left(\langle u'(t),\psi\rangle + B(u(t),\psi)\right)\,dt = \int_0^T \langle u'(t),\varphi(t)\psi\rangle\,dt + \int_0^T B(u(t),\varphi(t)\psi)\,dt = 0, \tag{4.1.37}$$

que implica que $\langle u'(t),\psi\rangle + B(u(t),\psi) = 0$ per a qualsevol $\psi\in H^1(\mathbb{R}^N)$ i gairebé per a tot $t\in[0,T]$.

Per ara hem demostrat que u verifica els punts (1) i (2). Vegem que $u(0)=g$.

Primer de tot, notem que per a qualssevol $v\in\mathcal{C}^1([0,T];H^1(\mathbb{R}^N))$ es té que

$$\frac{d}{dt}\left(\langle u(t),v(t)\rangle\right) = \langle u(t),v'(t)\rangle + \langle u'(t),v(t)\rangle, \tag{4.1.38}$$

tal com assegura el punt (3) del lema (4.1.3). Integrem cadascun dels membres de la igualtat (4.1.38):

$$\int_0^T \langle u'(t),v(t)\rangle\,dt + \int_0^T \langle u(t),v'(t)\rangle\,dt = \int_{\mathbb{R}^N} u(T)v(T)\,dx - \int_{\mathbb{R}^N} u(0)v(0)\,dx. \tag{4.1.39}$$

Per a justificar-ho, n'hi ha prou si es comprova la validesa de la igualtat per a qualsevol v que sigui combinació lineal finita d'elements de $\{\omega_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, per a després generalitzar-la a qualsevol $v\in\mathcal{C}^1([0,T];H^1(\mathbb{R}^N))$ mitjançant arguments de densitat. Si combinem aquesta última igualtat amb l'expressió (4.1.36), es té que

$$\int_0^T -\langle u(t),v'(t)\rangle\,dt + \int_0^T B(u(t),v(t))\,dt = \int_{\mathbb{R}^N} u(0)v(0)\,dx \tag{4.1.40}$$

per a qualsevol $v\in\mathcal{C}^1([0,T];H^1(\mathbb{R}^N))$ tal que $v(T)=0\in H^1(\mathbb{R}^N)$. Un argument similar combinat amb la igualtat (4.1.33) ens permet de deduir que

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} -u_m(t)v'(t)\,dx\,dt + \int_0^T B(u_m(t),v(t))\,dt = \int_{\mathbb{R}^N} u_m(0)v(0)\,dx. \tag{4.1.41}$$

Ens disposem a calcular límit (feble) de cada membre de l'equació anterior, tal com hem fet en (4.1.33), i obtenim, d'una banda, que

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} -u_m(t)v'(t)\,dx\,dt + &\int_0^T B(u_m(t),v(t))\,dt \\ = \int_0^T -\langle u(t),v'(t)\rangle\,dt &+ \int_0^T B(u(t),v(t))\,dt;\end{aligned} \tag{4.1.42}$$

i de l'altra, que

$$\lim_{m\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} u_m(0)v(0)\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} gv(0)\,dx. \tag{4.1.43}$$

Tot plegat, reunint les equacions (4.1.40), (4.1.41), (4.1.42) i (4.1.43), concloem amb el fet que

$$\int_{\mathbb{R}^N} gv(0)\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} u(0)v(0)\,dx. \tag{4.1.44}$$

Com que $v \in \mathcal{C}^1([0,T];H^1(\mathbb{R}^N))$ és arbitrària, $v(0)$ també, d'on es desprèn que $u(0) = g$ en $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Demostrem ara la unicitat de solucions. Com que $\langle u'(t),\psi\rangle + B(u(t),\psi) = 0$ per a qualsevol $\psi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ i gairebé per a tot $t \in [0,T]$, es té que $\langle u'(t),u(t)\rangle + B(u(t),u(t)) = 0$ gairebé per a tot $t \in [0,T]$ i si hi involucrem la desigualtat (4.1.20), obtenim que $B(u(t),u(t)) \geq \beta\|u(t)\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} - \gamma\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \geq -\gamma\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}$ i, en virtut del punt (2) del lema (4.1.3),

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u^2(t)\,dx\right) = \langle u'(t),u(t)\rangle \leq \gamma\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}. \tag{4.1.45}$$

Aleshores, un lema de Grönwall ens facilita la fita $\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq e^{2\gamma t}\|u(0)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}$. En particular, si u_1 i u_2 són dues solucions del problema de Cauchy (4.1.32), $u_1 - u_2$ també n'és solució, però amb condició inicial $g = 0$ en $L^2(\mathbb{R}^N)$. Per tant, si fem Ãºs de la desigualtat (4.1.45), deduïm que

$$\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|u_1 - u_2\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq e^{2\gamma t}\|u_1(0) - u_2(0)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} = 0. \tag{4.1.46}$$

Per tant, $u_1 = u_2$ en $L^2(\mathbb{R}^N)$. Com que u_1 i u_2 són solucions febles del problema de Cauchy, $u_1, u_2 \in \mathcal{C}([0,T];L^2(\mathbb{R}^N))$ i, per tant, $u_1(t) = u_2(t)$ per a qualsevol $t \in [0,T]$. □

4.1.2 Bases ortonormals de $L^2(\mathbb{R}^N)$ i sistemes ortogonals de $H^1(\mathbb{R}^N)$

Dediquem aquesta subsecció a trobar una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R}^N)$ que sigui un sistema ortogonal de $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Abordem primer el cas $N = 1$, comencem definint els polinomis d'Hermite. Per a $n \in \mathbb{N}$, el n-èsim polinomi d'Hermite ve definit per

$$H_n(x) := (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right). \tag{4.1.47}$$

Enunciem tot alguns resultats elementals sobre aquesta família de polinomis.

Proposició 4.1.8. Els polinomis d'Hermite verifiquen les següents propietats.

1. Per a qualsevol $n \in \mathbb{N}$, H_n és un polinomi de grau n.

2. Són ortogonals dos a dos en $L^2(\mathbb{R})$ respecte del pes $\omega(x) := e^{-x^2}$. Concretament, per a $n, m \in \mathbb{N}$ qualssevol,
$$\int_{\mathbb{R}} H_m(x) H_n(x) \omega(x)\, dx = \delta_{n,m} 2^n n! \sqrt{\pi}. \tag{4.1.48}$$

3. El conjunt $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ és una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R}^N)$ respecte del pes ω, i un sistema ortogonal de $H^1(\mathbb{R}^N)$ respecte del pes ω.

4. Satisfan la relació de recurrència $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$ i $H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x)$ per a qualsevol $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 4.1.9. Siguin $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ i $\{g_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ dues bases de $L^2(\mathbb{R}^N)$ i de $L^2(\mathbb{R}^M)$, respectivament, per a $M \in \mathbb{N}$, que siguin un sistema ortogonal de $H^1(\mathbb{R}^N)$. Aleshores, $\{h_{i,j}\}_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ és una base de $L^2(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M)$ i de $H^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M)$, on $h_{i,j}(x,y) := f_i(x) g_j(y)$.

Demostració. La prova d'aquest resultat és conseqüència del teorema de Fubini. □

Per a $N > 1$, podem trobar una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R}^N)$ que sigui un sistema ortogonal de $H^1(\mathbb{R}^N)$ mitjançant una normalització adient dels polinomis d'Hermite i el teorema anterior.

4.2 Coeficients no uniformement el·líptics

Tot resseguint l'esquema (3.1), centrem-nos primer en obtenir algunes fites formals a partir de (4.0.1).

Lema 4.2.1. Suposem que u és una solució suau de (4.0.1). Aleshores,
$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{u^2}{2}\, dx + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u^2}{2} \operatorname{div} b\, dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |A \cdot \nabla u|^2\, dx = 0. \tag{4.2.1}$$

Demostració. Partint de (4.0.1), podem multiplicar formalment per u cada banda de la igualtat i després integrar-les en $\mathbb{R}^N$.

El segon terme l'obtenim de la manera següent: per una banda, si integrem per parts l'expressió, resulta que
$$\int_{\mathbb{R}^N} u\partial_i(b_i u)\, dx = -\int_{\mathbb{R}^N} u\partial_i(u) b_i\, dx = -\int_{\mathbb{R}^N} u \cdot (b \cdot \nabla u)\, dx; \tag{4.2.2}$$
per altra banda, també és clar que
$$\int_{\mathbb{R}^N} u\partial_i(b_i u) = \int_{\mathbb{R}^N} u \cdot (\partial_i(u) b_i + u\partial_i(b_i))\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} u^2 \operatorname{div} b\, dx + \int_{\mathbb{R}^N} u \cdot (b \cdot \nabla u)\, dx. \tag{4.2.3}$$
Tot combinant les dues igualtats passa que
$$\int_{\mathbb{R}^N} u\partial_i(b_i u)\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} u^2 \operatorname{div} b\, dx - \int_{\mathbb{R}^N} u\partial_i(b_i u)\, dx, \tag{4.2.4}$$

d'on es desprèn el resultat desitjat.

Pel que fa al tercer terme, primer integrem l'expressió per parts i després el reescrivim en funció de σ i de ∇u:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\partial_i(\sigma_{ik}\sigma_{jk}\partial_j u)u\,dx &= -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(\sigma_{ik}\sigma_{jk}\partial_j u)\partial_i u\,dx \\ &= -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{i,j=1}^{N}(\sigma_{ik}\partial_i u)(\sigma_{jk}\partial_j u)\,dx \\ &= -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{N}\sigma_{ik}\partial_i u\right)^2 dx = -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\|\sigma^t\cdot\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\,dx.\end{aligned} \tag{4.2.5}$$

□

El resultat anterior ens permet observar que, en cas que div $b \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, hauríem d'exigir que $u \in L^\infty([0,T];L^2(\mathbb{R}^N)\cap L^\infty(\mathbb{R}^N))$ i que $\sigma^t\cdot\nabla u \in L^2([0,T];L^2(\mathbb{R}^N))$ per tal que (4.2.1) tingui sentit. I per tant, que $g \in L^2(\mathbb{R}^N)\cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ també. Buscarem, doncs, solucions en l'espai

$$X \coloneqq \{u \in L^\infty([0,T];L^2(\mathbb{R}^N)\cap L^\infty(\mathbb{R}^N)) : \sigma^t\cdot\nabla u \in L^2([0,T];L^2(\mathbb{R}^N))\}. \tag{4.2.6}$$

4.2.1 Resultat d'existència

Per a demostrar l'existència de solucions en X del problema de Cauchy (4.0.1), suposem que $g \in L^2(\mathbb{R}^N)\cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ i les hipòtesis del darrer paràgraf, i mol·lifiquem tant b com σ: $b_\varepsilon \coloneqq \rho_\varepsilon \star b$, $\sigma_\varepsilon \coloneqq \rho_\varepsilon\star\sigma$, per a $\varepsilon > 0$. Aleshores, com que b_ε i $A_\varepsilon \coloneqq \sigma_\varepsilon^t\cdot\sigma_\varepsilon$ satisfan les hipòtesis de la secció (4.1), existeix alguna solució u_ε de l'equació

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + \text{div }(b_\varepsilon u_\varepsilon) - \frac{1}{2}\text{div }(\sigma_\varepsilon^t\cdot\sigma_\varepsilon\cdot\nabla u_\varepsilon) = 0. \tag{4.2.7}$$

Com que $b_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ i $\sigma_\varepsilon \in (\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N))^{N\times N}$, les manipulacions formals efectuades en (4.2.1) poden ser demostrades rigorosament i, per tant, per a cada $\varepsilon > 0$ obtenim una solució $u_\varepsilon \in X$. Observem tot seguit que la successió $\{u_\varepsilon\}_\varepsilon \subset X$ és fitada en X en virtut del teorema (4.2.2), que és dir que existeixi una constant $C > 0$ independent de ε tal que

$$\|u_\varepsilon\|_{L^2([0,T];L^2(\mathbb{R}^N))} + \|\sigma_\varepsilon\cdot\nabla u_\varepsilon\|_{L^2([0,T];L^2(\mathbb{R}^N))} \le C. \tag{4.2.8}$$

En efecte, podem emprar el teorema (4.2.2) a les solucions u_ε de l'equació amb coeficients σ_ε, b_ε i u_ε, per a obtenir que

$$\|u_\varepsilon\|_{L^\infty([0,T];L^2(\mathbb{R}^N))} \le \|g_\varepsilon\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}e^{2T\|\text{div}(b)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}} \tag{4.2.9}$$

i també que

$$\|u_\varepsilon\|_{L^2([0,T];H^1(\mathbb{R}^N))} \le \|g_\varepsilon\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}e^{2T\|\text{div}(b)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}}. \tag{4.2.10}$$

Per a acabar, com que $\|\text{div}(b_\varepsilon)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \le \|\text{div}(b)\|$ i $\|u^0_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \le \|u^0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$, la quantitat $e^{2T\|\text{div}(b_\varepsilon)\|_{L^\infty}}$ és fitada independentment de ε i, per tant, es compleixen les hipòtesis del teeorema de Banach-Alaoglu. Fet pel qual, la successió u_ε té un límit feble en X i, de fet, és solució (feble) del problema de Cauchy.

Teorema 4.2.2. Si u és una solució suau de l'equació $u_t + L(u) = 0$, amb $L(u) = -\text{div}\left(\frac{1}{2}A\nabla u - bu\right)$, i mantenint les notacions i hipòtesis de A i b, aleshores

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^N} u^2\,dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \text{div}(b)u^2\,dx - \int_{\mathbb{R}^N} \|\sigma\cdot\nabla u\|^2_{\mathbb{R}^N}\,dx = 0. \tag{4.2.11}$$

Addicionalment, es tenen les tres desigualtats següents:

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^\infty([0,T];L^2(\mathbb{R}^N))} &\leq \|u(0)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} e^{2T\|\text{div}(b)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}} \\
\|\sigma\cdot\nabla u\|_{L^\infty([0,T];L^2(\mathbb{R}^N))} &\leq \|u(0)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} e^{2T\|\text{div}(b)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}} \\
\|u'\|_{L^2([0,T];H^{-1}(\mathbb{R}^N))} &\leq C\cdot\left(\|u\|_{L^\infty([0,T];L^2(\mathbb{R}^N))} + \|\sigma\cdot\nabla u\|_{L^2([0,T];L^2(\mathbb{R}^N))}\right),
\end{aligned} \tag{4.2.12}$$

per a algun nombre $C > 0$.

4.2.2 Resultat d'unicitat

En aquesta secció demostrem la unicitat de la solució de l'equació de (4.0.1).

Teorema 4.2.3. Siguin $b \in (W^{1,1}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N))^N$ un camp vectorial autònom en $\mathbb{R}^N$ tal que $\text{div}(b) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ i $\frac{b}{1+|\cdot|_{\mathbb{R}^N}} \in (L^\infty(\mathbb{R}^N))^N$, i $\sigma \in (H^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N))^{N\times N}$ un camp vectorial autònom en $\mathbb{R}^{N\times N}$ tal que $\frac{\sigma}{1+|\cdot|_{\mathbb{R}^N}} \in (L^\infty(\mathbb{R}^N))^{N\times N}$. Aleshores, per a qualsevol funció $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)\cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, el problema de Cauchy

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + \text{div}(bu) - \frac{1}{2}\cdot\text{div}(\sigma^t\cdot\sigma\cdot\nabla u) &= 0 \\
u(0,x) &= u_0
\end{aligned} \tag{4.2.13}$$

té una única solució en

$$X = \{u \in L^\infty([0,T];L^2(\mathbb{R}^N)\cap L^\infty(\mathbb{R}^N)) : \sigma^t\cdot\nabla u \in L^2([0,T];L^2(\mathbb{R}^N))\}. \tag{4.2.14}$$

En un primer pas ho demostrem quan l'equació està definida en el cub $[0,1]^N \subset \mathbb{R}^N$. En un segon pas, estendrem aquest resultat per a generalitzar-ho a $\mathbb{R}^N$. Abans, però, cal enunciar alguns resultats sobre les propietats dels commutadors.

Resultats de regularització

En aquesta subsecció establim alguns resultats bàsics que després usarem per a demostrar la unicitat.

Primer de tot, considerem un nucli regularitzador $\rho_\varepsilon := \frac{1}{\varepsilon^N}\rho(\frac{\cdot}{\varepsilon})$, i considerem la convolució de ρ_ε amb cada membre de la igualtat (4.2.13) per a obtenir que

$$\frac{\partial \rho_\varepsilon \star u}{\partial t} + \rho_\varepsilon \star \text{div}\ (bu) - \frac{1}{2}\rho_\varepsilon \star \text{div}\ (\sigma^t\cdot\sigma\cdot\nabla u) = 0. \tag{4.2.15}$$

Estudiem ara els dos últims sumands de la igualtat anterior. Introduïm ara la notació del commutador: per a $f, h \in L^1(\mathbb{R}^N)$ i c un operador diferencial, posem $[f,c](h) :=$

$f \star (c \cdot h) - c \cdot (f \star h)$. Per a agilitzar la lectura i l'escriptura de les equacions, usarem la notació d'Einstein. Tenim que

$$\begin{aligned}\rho_\varepsilon \star \partial_i(b_i u) &= \rho_\varepsilon \star ((\partial_i b_i)u) + \rho_\varepsilon \star (b_i \partial_i u)\\ &= \rho_\varepsilon \star ((\partial_i b_i)u) + \rho_\varepsilon \star (b_i \partial_i u) + (-\partial_i(b_i)(\rho_\varepsilon \star u) - b_i\partial_i(\rho_\varepsilon \star u) + \partial_i(b_i(\rho_\varepsilon \star u))\\ &= \rho_\varepsilon \star ((\partial_i b_i)u) - \partial_i(b_i)(\rho_\varepsilon \star u) + \rho_\varepsilon \star (b_i \partial_i u) - b_i\partial_i(\rho_\varepsilon \star u) + \partial_i(b_i(\rho_\varepsilon \star u))\\ &= [\rho_\varepsilon, \partial_i b_i](u) + [\rho_\varepsilon, b_i\partial_i](u) + \partial_i(b_i(\rho_\varepsilon \star u)) = Q_\varepsilon + \partial_i(b_i(\rho_\varepsilon \star u)),\end{aligned} \tag{4.2.16}$$

on $Q_\varepsilon := [\rho_\varepsilon, \partial_i b_i](u) + [\rho_\varepsilon, b_i\partial_i](u)$.

De la mateixa manera,

$$\begin{aligned}\rho_\varepsilon \star \partial_i(\sigma_{ik}\sigma_{jk}\partial_j u) &= \partial_i(\rho_\varepsilon \star (\sigma_{ik}\sigma_{jk}\partial_j u))\\ &= \partial_i(\rho_\varepsilon \star (\sigma_{ik}\sigma_{jk}\partial_j u)) - \partial_i(\sigma_{ik}\sigma_{jk}\partial_j(\rho_\varepsilon \star u)) + \partial_i(\sigma_{ik}\sigma_{jk}\partial_j(\rho_\varepsilon \star u))\\ &= \partial_i([\rho_\varepsilon, \sigma_{ik}\sigma_{jk}\partial_j](u)) + \partial_i(\sigma_{ik}\sigma_{jk}\partial_j(\rho_\varepsilon \star u))\\ &= \partial_i(\sigma_{ik}[\rho_\varepsilon, \sigma_{jk}\partial_j](u) + [\rho_\varepsilon, \sigma_{ik}](\sigma_{jk}\partial_j u)) + \partial_i(\sigma_{ik}\sigma_{ij}\partial_j(\rho_\varepsilon \star u))\\ &= \partial_i(\sigma_{ik}[\rho_\varepsilon, \sigma_{jk}\partial_j](u)) + [\rho_\varepsilon, \partial_i\sigma_{ik}](\sigma_{jk}\partial_j u)\\ &\qquad + [\rho_\varepsilon, \sigma_{ik}\partial_i](\sigma_{jk}\partial_j u) + \partial_i(\sigma_{ik}\sigma_{jk}\partial_j(\rho_\varepsilon \star u))\\ &= \partial_i(\sigma_{ik}R_\varepsilon) + S_\varepsilon + T_\varepsilon + \partial_i(\sigma_{ik}\sigma_{jk}\partial_j(\rho_\varepsilon \star u)),\end{aligned} \tag{4.2.17}$$

on $R_\varepsilon := [\rho_\varepsilon, \sigma_{jk}\partial_j](u)$, $S_\varepsilon := [\rho_\varepsilon, \partial_i\sigma_{ik}](\sigma_{jk}\partial_j u)$ i $T_\varepsilon := [\rho_\varepsilon, \sigma_{ik}\partial_i](\sigma_{jk}\partial_j u)$.

La quarta igualtat és conseqüència d'aquesta igualtat

$$\begin{aligned}[\rho_\varepsilon, \sigma_{ik}\sigma_{jk}\partial_j](u) &= \rho_\varepsilon \star (\sigma_{ik}\sigma_{jk}\partial_j u) - \sigma_{ik}\sigma_{jk}\partial_j(\rho_\varepsilon \star u)\\ &= \sigma_{ik}\left(\rho_\varepsilon \star (\sigma_{jk}\partial_j u) - \sigma_{jk}\partial_j(\rho_\varepsilon \star u)\right)\\ &\qquad + \rho_\varepsilon \star (\sigma_{ik}\sigma_{jk}\partial_j u) - \sigma_{ik}(\rho_\varepsilon \star (\sigma_{jk}\partial_j u))\\ &= \sigma_{ik}[\rho_\varepsilon, \sigma_{jk}\partial_j](u) + [\rho_\varepsilon, \sigma_{ik}](\sigma_{jk}\partial_j u).\end{aligned} \tag{4.2.18}$$

i la cinquena, d'aquesta altra

$$\begin{aligned}\partial_i([\rho_\varepsilon, \sigma_{ik}](\sigma_{jk}\partial_j u)) &= \rho_\varepsilon \star \partial_i(\sigma_{ik}\sigma_{jk}\partial_j u) - \partial_i(\sigma_{ik}(\rho_\varepsilon \star (\sigma_{jk}\partial_j u)))\\ &= \rho_\varepsilon \star (\partial_i(\sigma_{ik})\sigma_{jk}\partial_j u) + \rho_\varepsilon \star (\sigma_{ik}\partial_i(\sigma_{jk}\partial_j u))\\ &- \partial_i(\sigma_{ik})(\rho_\varepsilon \star (\sigma_{jk}\partial_j u)) - \sigma_{ik}\partial_i(\rho_\varepsilon \star (\sigma_{jk}\partial_j u))\\ &= \rho_\varepsilon \star (\partial_i(\sigma_{ik})\sigma_{jk}\partial_j u) - \partial_i(\sigma_{ik})(\rho_\varepsilon \star (\sigma_{jk}\partial_j u))\\ &\qquad + \rho_\varepsilon \star (\sigma_{ik}\partial_i(\sigma_{jk}\partial_j u)) - \sigma_{ik}\partial_i(\rho_\varepsilon \star (\sigma_{jk}\partial_j u))\\ &= [\rho_\varepsilon, \partial_i\sigma_{ik}](\sigma_{jk}\partial_j u) + [\rho_\varepsilon, \sigma_{ik\partial_i}](\sigma_{jk}\partial_j u).\end{aligned} \tag{4.2.19}$$

Tot plegat, obtenim que

$$\partial_t u_\varepsilon + \partial_i(u_\varepsilon b_i) - \frac{1}{2}\partial_i(\sigma_{ik}\sigma_{jk}\partial_j u_\varepsilon) = -Q_\varepsilon + \frac{1}{2}\left(\partial_i(\sigma_{ik}R_\varepsilon) + S_\varepsilon + T_\varepsilon\right) \tag{4.2.20}$$

que és l'equació de Fokker-Planck amb un terme d'error en la part dreta de la igualtat, que tot seguit estudiarem. Per a obtenir resultats sobre les convergències de Q_ε, R_ε, S_ε i T_ε ens cal el següent lema sobre la convergència dels commutadors.

Lema 4.2.4. Siguin $r, \alpha \in [1, \infty]$, $f \in L^r_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ i $c \in (W^{1,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N))^N$. Considerem $\beta \in [1, \infty]$ tal que $\frac{1}{\beta} = \frac{1}{r} + \frac{1}{\alpha}$. Aleshores,

1. $[\rho_\varepsilon, c\cdot\nabla](f)$ tendeix cap a zero en $L^\beta_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ si $\varepsilon\to 0$.
2. $[\rho_\varepsilon, \mathrm{div}(c)](f)$ tendeix cap a zero en $L^\beta_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ si $\varepsilon\to 0$.

Demostració. El primer resultat és una reformulació del teorema del commutador (3.3.2). Pel que fa al segon resultat, observem que

$$[\rho_\varepsilon, \mathrm{div}(c)](f) = \rho_\varepsilon \star (\mathrm{div}(c)\cdot f) - \mathrm{div}(c)\cdot(\rho_\varepsilon\star f). \tag{4.2.21}$$

Pel que fa al primer sumand, com que $c\in (W^{1,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N))^N$, resulta que $\mathrm{div}(c)\in L^\alpha_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ i, si ho combinem amb el fet que $\frac{1}{\beta}=\frac{1}{r}+\frac{1}{\alpha}$, passa que $\mathrm{div}(c)\cdot f\in L^\beta_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$, d'on concloem que $\rho_\varepsilon\star(\mathrm{div}(c)f)$ convergeix cap a $\mathrm{div}(b)f$ en $L^\beta_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ si $\varepsilon\to 0$.

Quant al segon sumand, es té que $\rho_\varepsilon\star f$ convergeix cap a f en $L^r_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ si $\varepsilon\to 0$ i, com que $\mathrm{div}(c)\in L^\alpha_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$, $\mathrm{div}(c)\cdot(\rho_\varepsilon\star f)$ convergeix cap a $\mathrm{div}(b)\cdot f$ en $L^\beta_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ si $\varepsilon\to 0$, fet que acaba la demostració. $\square$

Del lema anterior es dedueix que, si $b\in (W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N))^N$, aleshores $Q_\varepsilon := [\rho_\varepsilon, \partial_i b_i](u) + [\rho_\varepsilon, b_i\partial_i](u) \to 0$ en $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ si $\varepsilon\to 0$. Encara més, com que b és autònom i $u\in L^\infty([0,T]; L^2(\mathbb{R}^N)\cap L^\infty(\mathbb{R}^N))$, la convergència és uniforme en el temps.

De la mateixa manera, si $\sigma\in (W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N))^{N\times N}$, $R_\varepsilon = [\rho_\varepsilon, \sigma_{jk}\partial_j u](u)\to 0$ en $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ si $\varepsilon\to 0$. De nou, aquesta convergència també és uniforme per a $t\in[0,T]$, si $u\in X$.

També es té que $S_\varepsilon, T_\varepsilon\to 0$ en $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$, en el supòsit que $\sigma\in (W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N))^{N\times N}$ i que $\sigma^t\cdot\nabla u\in L^2([0,T]; L^2(\mathbb{R}^N))$.

Finalment, reescriure la igualtat (4.2.20) com

$$\partial_t p_\varepsilon + \partial_i(u_\varepsilon b_i) - \frac{1}{2}\partial_i(\sigma_{ik}\sigma_{jk}\partial_j u_\varepsilon) = U_\varepsilon + \frac{1}{2}\partial_i(\sigma_{ik}R_\varepsilon), \tag{4.2.22}$$

on $U_\varepsilon := -Q_\varepsilon + \frac{1}{2}S_\varepsilon + \frac{1}{2}T_\varepsilon$. En virtut dels comentaris de les convergències de Q_ε, S_ε i T_ε es té que, sota les hipòtesis que $b\in (W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N))^N$, $\mathrm{div}\ b\in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\sigma\in (W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N))^{N\times N}$ i que $\sigma^t\cdot\nabla u\in L^2([0,T]; L^2(\mathbb{R}^N))$, resulta que $U_\varepsilon\to 0$ en $L^\infty([0,T]; L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)) + L^2([0,T]; L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N))$, si $\varepsilon\to 0$; i que $R_\varepsilon\to 0$ en $L^\infty([0,T]; L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N))$, si $\varepsilon\to 0$.

Demostració en el cub $[0,1]^N$

Observem que, com que l'equació és lineal, n'hi ha prou si veiem que, per a la condició inicial $u(0,x)=0$ per a qualsevol $x\in[0,1]^N$, la solució $u\in X$ verifica que $u(t,x)=0$, per a qualsevol $(t,x)\in[0,\infty)\times[0,1]^N$.

Primer, considerem la convolució de ρ_ε amb cada membre de l'equació (4.2.13), com hem fet en l'apartat anterior. Obtenim que

$$\partial_t u_\varepsilon + \partial_i(u_\varepsilon b_i) - \frac{1}{2}\partial_i(\sigma_{ik}\sigma_{jk}\partial_j u_\varepsilon) = U_\varepsilon + \frac{1}{2}\partial_i(\sigma_{ik}R_\varepsilon). \tag{4.2.23}$$

Ara multipliquem cadascun dels membres de la igualtat anterior per p_ε i després els integrem en $[0,1]^N$. Resseguint els càlculs de (4.2.1), resulta que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{[0,1]^N}\frac{u_\varepsilon^2(t,\cdot)}{2}\,dx + \frac{1}{2}\int_{[0,1]^N}u_\varepsilon^2(t,\cdot)\mathrm{div}\ b\,dx + \frac{1}{2}\int_{[0,1]^N}\left\|\sigma^t\cdot\nabla u_\varepsilon(t,\cdot)\right\|^2_{\mathbb{R}^N}\,dx \\ = \int_{[0,1]^N}U_\varepsilon(t,\cdot)u_\varepsilon(t,\cdot)\,dx - \frac{1}{2}\int_{[0,1]^N}(\sigma^t\cdot\nabla u_\varepsilon(t,\cdot))R_\varepsilon(t,\cdot)\,dx.\end{aligned} \tag{4.2.24}$$

Ara integrem cada membre de la igualtat respecte de t en $[0,1]$:

$$\int_{[0,1]^N} \frac{u_\varepsilon^2(t,\cdot)}{2}\,dx\,dt + \frac{1}{2}\int_0^t \int_{[0,1]^N} u_\varepsilon^2 \mathrm{div}\; b\,dx\,dt + \frac{1}{2}\int_0^t \int_{[0,1]^N} \left\|\sigma^t \cdot \nabla u_\varepsilon\right\|_{\mathbb{R}^N}^2 \,dx\,dt$$
$$= \int_0^t \int_{[0,1]^N} U_\varepsilon u_\varepsilon\,dx\,dt - \frac{1}{2}\int_0^t \int_{[0,1]^N} (\sigma^t \cdot \nabla u_\varepsilon) R_\varepsilon\,dx\,dt. \tag{4.2.25}$$

Com que

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} u_\varepsilon^2(t,\cdot)\mathrm{div}\; b\,dx\right| \le \|\mathrm{div}\; b\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \int_{\mathbb{R}^N} u_\varepsilon^2(t,\cdot)\,dx \tag{4.2.26}$$

i també

$$0 \le \int_0^t \int_{[0,1]^N} \left\|\sigma^t \cdot \nabla u_\varepsilon\right\|_{\mathbb{R}^N}^2 \,dx\,dt. \tag{4.2.27}$$

Ara notem que $u_\varepsilon(t,\cdot)$ és fitada en $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ i que $\sigma^t \cdot \nabla u_\varepsilon$ és fitada en $L^2(\mathbb{R}^N)$. Per tant, els resultats de convergència de la subsecció (4.2.2) asseguren que la part dreta de (4.2.25) va cap a zero quan $\varepsilon \to 0$. Tot plegat, obtenim que

$$\int_{[0,1]^N} \frac{u^2(t,\cdot)}{2}\,dx + \frac{1}{2}\int_0^t \int_{[0,1]^N} u^2 \mathrm{div}\; b\,dx\,dt + \frac{1}{2}\int_0^t \int_{[0,1]^N} \|\sigma^t \cdot \nabla u\|_{\mathbb{R}^N}^2 \,dx\,dt = 0, \tag{4.2.28}$$

i si fem ús de (4.2.26), de (4.2.27) i del fet que $0 \le \int_{[0,1]^N} \frac{u^2(t,\cdot)}{2}\,dx$,

$$\int_{[0,1]^N} u^2(t,\cdot)\,dx \le \|\mathrm{div}\; b\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \int_0^t \int_{[0,1]^N} u^2\,dx\,dt. \tag{4.2.29}$$

D'aquesta última desigualtat deduïm que $u^2 \equiv 0$ perquè, com que $u \in X$

$$\int_{[0,1]^N} u^2(t,\cdot)\,dx \le 2t\|u\|_{L^\infty([0,T];L^2(\mathbb{R}^N))}, \tag{4.2.30}$$

per a qualsevol $t \in [0,T]$. Com que és una igualtat funcional, n'hi ha prou si prenem $t \in [0,T]$ tan petit com faci falta.

Demostració en $\mathbb{R}^N$

En aquest segon pas, demostrarem la proposició en el cas general. Introduïm una funció de tall no negativa $\varphi_R := \varphi(\frac{\cdot}{R})$, on $\varphi \equiv 1$ en $B(0,1)$ i $\varphi \equiv 0$ en $\mathbb{R}^N \setminus B(0,2)$. Ara refem els passos de l'apartat anterior, amb la diferència que, en lloc de multiplicar cada membre de l'equació per ρ_ε, els multipliquem per $u_\varepsilon \varphi_R$:

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{u_\varepsilon^2(t,\cdot)}{2}\varphi_R\,dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u_\varepsilon^2(t,\cdot)\varphi_R \mathrm{div}\; b\,dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left\|\sigma^t \cdot \nabla u_\varepsilon(t,\cdot)\right\|_{\mathbb{R}^N}^2 \varphi_R\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u_\varepsilon^2(t,\cdot) b \cdot \nabla\varphi_R\,dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u_\varepsilon(t,\cdot)(\sigma^t \cdot \nabla u_\varepsilon(t,\cdot)) \cdot (\sigma^t \cdot \nabla\varphi_R)\,dx$$
$$+ \int_{[0,1]^N} U_\varepsilon(t,\cdot) u_\varepsilon(t,\cdot)\varphi_R\,dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (\sigma^t \cdot \nabla u_\varepsilon(t,\cdot)) R_\varepsilon(t,\cdot)\varphi_R\,dx$$
$$- \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u_\varepsilon(t,\cdot)(\sigma^t \cdot \nabla\varphi_R) R_\varepsilon(t,\cdot)\,dx. \tag{4.2.31}$$

Ara observem que, com que $\nabla\varphi_R(x) = \frac{1}{R}\nabla\varphi\left(\frac{x}{R}\right)$ i φ és constant en $B(0,1)$, el suport de $u_\varepsilon^2(t,\cdot)b\cdot\nabla\varphi_R$ és la corona $C_R := \{x\in\mathbb{R}^N : R\le |x|\le 2R\}$ i, per tant,

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u_\varepsilon^2(t,\cdot)b\cdot\nabla\varphi_R\,dx\right|\\
=&\left|\frac{1}{2R}\int_{C_R} u_\varepsilon^2(t,x)\left(b(x)\cdot\nabla\varphi\left(\frac{x}{R}\right)\right)\,dx\right|\\
\le&\frac{1}{2R}\|u_\varepsilon^2(t,\cdot)\|_{L^1(C_R)}\left\|b\cdot\nabla\varphi\left(\frac{\cdot}{R}\right)\right\|_{L^\infty(C_R)}\\
\le&\frac{1}{2R}\|u_\varepsilon^2(t,\cdot)\|_{L^1(\{R\le|x|\})}\|\cos(\alpha(\cdot))\|_{L^\infty(C_R)}\|b\|_{L^\infty(C_R)}\left\|\nabla\varphi\left(\frac{\cdot}{R}\right)\right\|_{L^\infty(C_R)}\\
\le&\frac{1+2R}{2R}\|\cos(\alpha(\cdot))\|_{L^\infty(C_R)}\|u_\varepsilon^2(t,\cdot)\|_{L^1(\{R\le|x|\})}\left\|\frac{b}{1+|\cdot|}\right\|_{L^\infty(C_R)}\left\|\nabla\varphi\left(\frac{\cdot}{R}\right)\right\|_{L^\infty(C_R)}\\
\le&\frac{1+2R}{2R}\|\cos(\alpha(\cdot))\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\|u_\varepsilon^2(t,\cdot)\|_{L^1(\{R\le|x|\})}\left\|\frac{b}{1+|\cdot|}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\left\|\nabla\varphi\left(\frac{\cdot}{R}\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}
\end{aligned}
\tag{4.2.32}
$$

i quan $R\to\infty$, la quantitat va cap a zero (uniformement en $\varepsilon\le 1$) i L^∞ en t, perquè $\|u_\varepsilon^2(t,\cdot)\|_{L^1(\{R\le|x|\})}\to 0$ quan $R\to\infty$, ja que $u^2(t,\cdot)\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$. En les fites anteriors, $\alpha:\mathbb{R}\to[0,2\pi]$ és l'aplicació que assigna a cada x la mesura d'angle entre $b(x)$ (o, si cal, un representant continu de $b\in(W^{1,1}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N))^N$) i $\nabla\varphi\left(\frac{x}{R}\right)$.

De la mateixa manera, obtenim que, si $\lambda := \|\cos(\alpha(\cdot))\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$,

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{R}^N} u_\varepsilon(t,\cdot)(\sigma^t\cdot\nabla u_\varepsilon(t,\cdot))\cdot(\sigma^t\nabla\varphi_R)\,dx\right|\\
\le&\ \frac{\lambda}{R}\|u_\varepsilon(t,\cdot)\sigma^t\cdot\nabla u_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^1(C_R)}\|\sigma^t\|_{(L^\infty(C_R))^{N\times K}}\left\|\nabla\varphi\left(\frac{\cdot}{R}\right)\right\|_{L^\infty(C_R)}\\
\le&\ \frac{1+2R}{R}\lambda\left\|\frac{\sigma}{1+|\cdot|}\right\|_{(L^\infty(C_R))^{N\times K}}\left\|\nabla\varphi\left(\frac{\cdot}{R}\right)\right\|_{L^\infty(C_R)}\|u_\varepsilon(t,\cdot)\sigma^t\cdot\nabla u_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^1(R\le|x|)}\\
\le&\ \frac{1+2R}{R}\lambda\left\|\frac{\sigma}{1+|\cdot|}\right\|_{(L^\infty(\mathbb{R}^N))^{N\times K}}\left\|\nabla\varphi\left(\frac{\cdot}{R}\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\|u_\varepsilon(t,\cdot)\sigma^t\cdot\nabla u_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^1(R\le|x|)}
\end{aligned}
\tag{4.2.33}
$$

i quan $R\to\infty$, la quantitat va cap a zero (uniformement en $\varepsilon\le 1$) i L^1 en el temps.

Tot plegat, si posem

$$
W(t,\varepsilon,R) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u_\varepsilon^2(t,\cdot)b\cdot\nabla\varphi_R\,dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u_\varepsilon(t,\cdot)(\sigma^t\cdot\nabla u_\varepsilon)\cdot(\sigma^t\cdot\nabla\varphi_R)\,dx \tag{4.2.34}
$$

resulta que $W(t,\varepsilon,R)$ va cap a zero si $R\to\infty$, uniformement en $\varepsilon\le 1$ i L^1 en el temps.

Ara examinem l'últim terme de (4.2.31). Definim

$$
V(t,\varepsilon,R) := -\int_{\mathbb{R}^N} u_\varepsilon(t,\cdot)(\sigma^t\cdot\nabla\varphi_R)R_\varepsilon(t,\cdot)\,dx \tag{4.2.35}
$$

i notem que una fita de $|V(t,\varepsilon,R)|$ és

$$
\frac{1+2R}{R}\lambda\left\|\frac{\sigma}{1+|\cdot|}\right\|_{(L^\infty(\mathbb{R}^N))^{N\times K}}\left\|\nabla\varphi\left(\frac{\cdot}{R}\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\|u_\varepsilon(t,\cdot)R_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^1(\{|x|\le 2R\})}. \tag{4.2.36}
$$

Ara podem reescriure l'equació (4.2.31), on en lloc d'integrar en $\mathbb{R}^N$, integrem en $[0,1]^N$. Aleshores, recuperem l'equació (4.2.24) amb la diferència que en comptes de multiplicar cada membre de (4.2.23) per u_ε, el multipliquem per $u_\varepsilon \varphi_R$, i que s'hi han d'afegir els termes W i V. Tot plegat, i després d'haver integrat en t com en (4.2.25),

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]^N} \frac{u_\varepsilon^2}{2}\varphi_R(t)\,dx &+ \frac{1}{2}\int_0^t \int_{[0,1]^N} u_\varepsilon^2 \mathrm{div}\ b\varphi_R\,dx\,ds \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t \int_{[0,1]^N} \left\|\sigma^t \cdot \nabla u_\varepsilon\right\|^2_{\mathbb{R}^N} \varphi_R\,dx\,ds \\ = \int_0^t \int_{[0,1]^N} U_\varepsilon u_\varepsilon\,dx\,ds &- \frac{1}{2}\int_0^t \int_{[0,1]^N} (\sigma^t \cdot \nabla u_\varepsilon) R_\varepsilon\,dx\,ds \\ &+ \int_0^t V(s,\varepsilon,R)\,ds + \int_0^t W(s,\varepsilon,R)\,ds.\end{aligned} \tag{4.2.37}$$

Fixem ara $\eta > 0$, com que W va cap a zero en L^1 en el temps, existeix un nombre $R > 0$ tal que

$$|W(s,\varepsilon,R)\,ds| \leq \eta \tag{4.2.38}$$

per a qualsevol $t \in [0,T]$. Per a tal radi, fem tendir $\varepsilon \to 0$. Els dos primers termes de la part dreta de la igualtat (4.2.37) van cap a zero a conseqüència de les convergències dels commutadors; i el tercer també per la desigualtat (4.2.36). Tot plegat, en el límit, obtenim que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{u^2}{2}\varphi_R\,dx \leq \eta + C\int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} u^2 \varphi_R\,dx\,dt. \tag{4.2.39}$$

Ara usem la desigualtat de Grönwall i obtenim que

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u^2 \varphi_R\,dx\,dt \leq \frac{\eta}{C}\left(e^{Ct} - 1\right) \tag{4.2.40}$$

i, per a acabar, com que si $R \to \infty$, es té que

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u^2\,dx\,dt \leq \frac{\eta}{C}\left(e^{Ct} - 1\right) \tag{4.2.41}$$

només fa falta escollir η suficientment petit per a concloure que $p = 0$, i això finalitza la prova.

Bibliografia

[1] E. Bruè, M. Colombo, and A. Kumar, “Sharp nonuniqueness in the transport equation with sobolev velocity field,” 2024.

[2] G. Crippa, *The flow associated to weakly differentiable vector fields.* PhD thesis, Scuola Normale Superiore di Pisa, 2007.

[3] L. C. Evans, *Partial differencial equations.* American Mathematical Society, 2010.

[4] R. DiPerna and P. Lions, “Ordinary differential equations, transport theory and sobolev spaces,” 1989.

[5] L. Marino, “Transport equations with low regularity vector fields,” Master’s thesis, University of Warwick, 2017.