Universitat de Barcelona
Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

EL PROBLEMA DE SUSLIN

Autora: Maria Sarrado Cortadellas

Director: Dr. Enrique Casanovas Ruiz-Fornells
Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 9 de junio de 2024

Abstract

The Suslin's Problem is a well-known discussion in set theory about the characterization of the real line $(\mathbb{R}, <)$. It is known that if we have $(X, <)$ a totally ordered set, without extremes, dense, complete and separable, then $(X, <)$ is isomorphic to the real line $(\mathbb{R}, <)$. The Suslin's problem is the discussion whether, changing the separable hypothesis to the countable chain condition, we can affirm the same result.

Under ZFC it is undecidable, so in this project, we explain this problem in detail, and we also introduce new axioms on which we can discuss the truth, falsity or undecidability of Suslin's hypothesis.

Resumen

El problema de Suslin es una discusión conocida en teoría de conjuntos que habla de la caracterización de la recta real $(\mathbb{R}, <)$. Es conocido que si tenemos $(X, <)$ un conjunto totalmente ordenado, sin extremos, denso, completo y separable, entonces $(X, <)$ es isomorfo a la recta real $(\mathbb{R}, <)$. El problema de Suslin es la discusión de si, cambiando la hipótesis de separable, por la condición de cadena numerable, podemos afirmar el mismo resultado.

Bajo ZFC es indecidible, de modo que en este proyecto, exponemos en detalle este problema e introducimos nuevos axiomas sobre los cuales podremos discutir la veracidad, falsedad o indecidibilidad de la hipótesis de Suslin.

2020 Mathematics Subject Classification. 03E05, 03E35, 03E50, 06A05

Agradecimientos

En primer lugar, quiero agradecer a mi tutor, Enrique Casanovas, por su apoyo y su gran dedicación a lo largo de toda la realización del trabajo. Sus explicaciones han sido una ayuda clave para entender conceptos y argumentos en el proyecto, y, por tanto, ha sido fundamental para su desarrollo.

En segundo lugar, quiero agradecer a mi familia, a mis padres, Tere y Oscar y a mi hermana, Paula, por su paciencia durante estos años académicos.

Finalmente, agradecer a toda la gente que me rodea, a los amigos que han estado siempre, y a aquellos que han aparecido en esta etapa, todos han sido una ayuda incondicional. También a Héctor, por estar siempre y ayudar en todo.

Índice

1. Introducción

1.1. El problema de Suslin en contexto

En 1920, al final del primer volumen de *Fundamenta Mathematicae* apareció una lista de problemas, uno de los cuales se atribuyó a Mikhail Suslin, un matemático ruso nacido en 1894. Dicho problema llegaría a conocerse como el problema de Suslin.

Después de la reunificación de Polonia en 1918, los aspirantes a matemáticos tomaron la decisión de centrarse en la teoría de conjuntos y áreas relacionadas y de publicar una nueva revista para promover la investigación internacional en esta área. Este fue el origen de *Fundamenta Mathematicae*, que se convirtió en el principal conducto académico en "matemáticas fundamentales" durante las décadas de 1920 y 1930. Esa primera lista de problemas tenía que ver con posibles consecuencias de la Hipótesis del Continuo (CH) o cuestiones de la emergente teoría descriptiva de conjuntos. Estos problemas se resolverían, pero, por el contrario, el problema de Suslin crecería en importancia a través de su irresolución.

Georg Cantor, el fundador (junto a Richard Dedekind) de la teoría de conjuntos, había caracterizado los tipos de orden de los racionales y los reales en su *Beiträge* de 1895, la presentación de su teoría de lo transfinito. George Cantor demostró que el orden de los reales es ese conjunto totalmente ordenado, denso, único, sin extremos, completo (es decir, en el que cada subconjunto acotado tiene supremo) y separable (es decir, tiene un subconjunto denso, numerable). El problema de Suslin pregunta si esta última condición puede debilitarse a la condición de cadena numerable (c.c.c.): toda familia de subconjuntos abiertos, disjuntos dos a dos, no vacíos, es numerable. [Kan11]

Es decir, el problema de Suslin es el siguiente:

Supongamos que tenemos un conjunto $(X, <)$ totalmente ordenado, denso, completo, sin extremos, y que tiene la c.c.c. Entonces, ¿$(X, <)$ es isomorfo a la recta real, $(\mathbb{R}, <)$?

La respuesta afirmativa a esta pregunta se conoce como la Hipótesis de Suslin (SH).

Entonces, SH puede ser expresada como: todo conjunto totalmente ordenado, denso que satisfaga la c.c.c. es separable. De este modo, se requiere el estudio de la existencia de un conjunto totalmente ordenado que satisfaga la c.c.c. y no sea separable, es decir, el estudio de la existencia de rectas de Suslin.

Resultó que este problema era indecidible sobre la base de los axiomas habituales (ZFC) de la teoría de conjuntos.

1.2. Motivación

Tal como se comenta anteriormente, el problema de Suslin es indecidible bajo ZFC, es decir, no puede ser demostrado ni rechazado bajo la base de los axiomas habituales (ZFC) de la teoría de conjuntos.

Decimos que un conjunto de afirmaciones S es consistente, y lo escribimos $\mathrm{Con}(S)$ si para ninguna proposición lógica p, se pueden probar p y $\neg p$ simultáneamente.

Se dice que una proposición lógica p es consistente con una teoría T si $T \cup \{p\}$ es consistente, y lo escribiremos $\mathrm{Con}(T + p)$. Si tanto p como $\neg p$ son consistentes con T, entonces decimos que p es independiente de T, es decir, ni p ni $\neg p$ se pueden demostrar a partir de T.

Entonces, en el caso que estudiaremos en esta memoria tenemos:

Con(ZFC) $\rightarrow$ Con(ZFC+$\neg$SH),

Con(ZFC) $\rightarrow$ Con(ZFC+SH).

De este modo, SH es independiente de ZFC.

El objetivo de este trabajo es ver bajo la introducción de qué nuevos axiomas resulta afirmativa, negativa o si continúa siendo indecidible la respuesta cuestionada en el problema de Suslin.

1.3. Estructura de la memoria

La memoria se ha escrito basándose en el libro de Kenneth Kunen *Set Theory: An Introduction to Independence Proofs*, [Kun83] donde Kunen trata, entre otros temas, el problema de Suslin. De este modo, se ha seguido este libro y en la memoria nos encontramos con resultados y demostraciones realizadas por Kunen, además de otras añadidas, propuestas como ejercicios para el lector en [Kun83].

Las demostraciones de la memoria son más detalladas que las que nos encontramos en el libro de Kunen a causa de la falta de argumentación (debida a la suposición de algunos de los argumentos necesarios) de algunos de los resultados que aparecen en las demostraciones.

En el libro *Set Theory* de Thomas Jech [Jec78] también se encuentran muchos de los conceptos y de las demostraciones vistas en la memoria, de modo que este libro se ha consultado en alguna ocasión, aún sin llegar a utilizar explícitamente sus resultados.

También hay que tener en cuenta que se dan por conocidos los resultados vistos en la asignatura de Teoría de Conjuntos Elemental.

La estructura seguida en el trabajo es la siguiente:

El trabajo se inicia con una serie de conceptos preliminares, necesarios para la compresión del trabajo por parte del lector. Dentro de esta sección trataremos tanto conceptos y resultados básicos de teoría de conjuntos (vistos y demostrados en el curso de Teoría de Conjuntos Elemental), como definiciones generales de árboles, puesto que son conceptos que aparecerán de forma muy recurrente a lo largo de toda la memoria.

Posteriormente, hablaremos de árboles κ-Suslin y κ-árboles, conceptos que serán claves para llegar a los resultados deseados. Dentro de este apartado introduciremos también el concepto de árbol bien podado y veremos que para todo κ regular, todo κ-árbol tiene un κ-subárbol bien podado, un resultado interesante que será útil en otras varias ocasiones. Finalmente, hablaremos también de árboles κ-Aronszajn puesto que dentro de este tipo de árboles se encuentran los árboles κ-Suslin.

A continuación introduciremos la hipótesis de Suslin (SH), viendo de dónde surge su relevancia. Para ello introduciremos el concepto c.c.c. y de recta de Suslin y veremos la equivalencia entre la existencia de árboles ω_1-Suslin y la existencia de rectas de Suslin.

Más tarde, enunciaremos el axioma de Martin (MA) con el objetivo de ver si añadiéndolo a ZFC, entonces se cumple o no SH. Como introducimos un nuevo axioma, lo trataremos con detalle y demostraremos resultados como que MA(2^ω) es falso y veremos también algunas equivalencias de MA(κ). Finalmente, demostraremos que MA(ω_1) implica SH.

Hablaremos seguidamente del axioma $\Diamond$ definiendo los conceptos previos necesarios, entre los cuales se encuentran las definiciones de filtro, c.u.b. o estacionario. Introduciremos también el concepto de árbol siempre-ramificado y veremos que si tenemos un ω_1-árbol siempre-ramificado en el que toda anticadena maximal es numerable, entonces este árbol es ω_1-Suslin. De nuevo, al introducir un nuevo axioma, lo trataremos con detalle, viendo resultados relevantes como algunas propiedades referentes al filtro $\mathrm{Cub}(\mu)$ y a funciones finitarias, con el objetivo de llegar a demostrar que $\Diamond$ implica $\neg$SH.

Finalmente, trataremos también la hipótesis del continuo (CH) y su versión generalizada (GCH), por ser un tema de gran interés en la teoría de conjuntos. Veremos su relación con los axiomas introducidos viendo que $\Diamond$ implica CH y que $\mathrm{MA}(\omega_1)$ implica $\neg$CH.

2. Preliminares

En este capítulo veremos una serie de herramientas que nos servirán para formular el problema de Suslin así como obtener resultados sobre su estudio.

2.1. Definiciones básicas de teoría de conjuntos

Definamos primero los axiomas de ZFC, ya que es la teoría que seguiremos a lo largo de toda la memoria.

Definición 2.1. *En lógica y matemáticas, los axiomas de Zermelo-Fraenkel, son un sistema axiomático concebido para formular la teoría de conjuntos. Se abrevian como ZF o complementados por el axioma de elección, como ZFC. ZFC consta de los siguientes nueve axiomas:*

1. *Axioma de extensionalidad*

$$\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B) \to A = B.$$

2. *Principio de separación*

   Para cada propiedad $P(x)$ enunciada en lógica de primer orden,

$$\forall A \exists B \forall x(x \in B \leftrightarrow (x \in A \wedge P(x))).$$

3. *Axioma del par*

$$\forall xy \exists A \forall u(u \in A \leftrightarrow (u = x \vee u = y)).$$

4. *Axioma de la unión*

$$\forall A \exists B \forall x(x \in B \leftrightarrow \exists y(x \in y \wedge y \in A)).$$

5. *Axioma del conjunto potencia*

$$\forall A \exists B \forall x(x \in B \leftrightarrow x \subseteq A).$$

6. *Axioma del infinito*

$$\exists A(\emptyset \notin A \wedge (\forall x \in A) x \cup \{x\} \in A).$$

7. *Axioma de regularidad*

$$\forall A(A \neq \emptyset \to \exists x(x \in A \wedge A \cap x = \emptyset)).$$

8. *Axioma del reemplazo*

   Para cada propiedad $F(x, y)$ enunciada en lógica de primer orden,

$$\forall xyz(F(x, y) \wedge F(x, z) \to y = z) \to \forall A \exists B \forall u(u \in B \leftrightarrow \exists y(y \in A \wedge F(y, u))).$$

9. *Axioma de elección*

$$\forall A(\emptyset \notin A \to \exists f(f : A \to \bigcup A \wedge (\forall x \in A) f(x) \in x)).$$

Veamos a continuación unas nociones básicas sobre órdenes, puesto que son conceptos que aparecerán a lo largo de todo el trabajo.

Definición 2.2. *Un preorden es un par $(A, \leq)$ tal que A es un conjunto y $\leq$ es una relación en A transitiva y reflexiva. Decimos que $(A, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado si además $\leq$ es una relación antisimétrica en A.*

Introduzcamos además otro concepto que nos puede resultar útil en algunos contextos.

Definición 2.3. *Un orden parcial estricto (o irreflexivo) es un par $(A, <)$ donde $<$ es una relación en A irreflexiva y transitiva (y, por lo tanto, asimétrica).*

Observación 2.4. A partir de ahora, definiremos los conceptos para conjuntos parcialmente ordenados, pero observemos que se pueden también definir los siguientes conceptos para órdenes parciales estrictos, ya que, sea $(A, <)$ un orden parcial estricto, podemos definir la relación transitiva, reflexiva y antisimétrica $\leq$ en A como: sean $x, y \in A$, $x \leq y \leftrightarrow x < y \vee x = y$.

De igual modo, dada $\leq$ una relación transitiva, reflexiva y antisimétrica, podemos definir la relación irreflexiva y transitiva $<$ como: sean $x, y \in A$, $x < y \leftrightarrow x \leq y \wedge x \neq y$.

Definición 2.5. *Sea $(A, \leq)$ un preorden. Decimos que dos elementos $p, q \in A$ son compatibles si*

$$\exists r \in A(r \leq p \wedge r \leq q).$$

Decimos que son incompatibles y lo escribimos $p \perp q$ si, por lo contrario,

$$\neg \exists r \in A(r \leq p \wedge r \leq q).$$

Definición 2.6. *Sea $(\mathbb{P}, \leq)$ un preorden, una cadena en $\mathbb{P}$ es un conjunto $C \subseteq \mathbb{P}$ tal que $\forall p, q \in C(p \leq q \vee q \leq p)$. Una anticadena en $\mathbb{P}$ es un conjunto $A \subseteq \mathbb{P}$ tal que $\forall p, q \in A(p \neq q \rightarrow p \perp q)$.*

Definición 2.7. *Un conjunto totalmente ordenado es un par $(A, \leq)$ tal que A es un conjunto y $\leq$ es una relación en A transitiva, reflexiva, antisimétrica y que cumple la propiedad: $\forall x, y \in A$ $(x \leq y \vee y \geq x)$.*

Definición 2.8. *Un conjunto bien ordenado es un conjunto $(A, \leq)$ totalmente ordenado en el que todo subconjunto no vacío de A tiene un elemento mínimo. En este caso, decimos que $\leq$ es un buen orden o que $\leq$ bien ordena A.*

Definamos ahora los ordinales.

Definición 2.9. *Un ordinal es un conjunto transitivo α en el que la pertenencia*

$$\in_\alpha = \{(a, b) \mid a \in \alpha \wedge b \in \alpha \wedge a \in b\}$$

es un buen orden.

Notación 2.10. *Usamos las variables α, β, γ para referirnos a ordinales.*

Definición 2.11. *La clase de los ordinales es* $\mathrm{On} = \{\alpha \mid \alpha$ *es un ordinal*$\}$.

Observación 2.12. $\in$ es el orden parcial estricto de la clase de los ordinales On.

Notación 2.13. *Si α y β son ordinales y no hay confusión, usamos $<$ para el orden $\in$, es decir $\alpha < \beta \leftrightarrow \alpha \in \beta$.*

Definición 2.14. *El tipo de orden de un conjunto bien ordenado $(A, <)$ es el único ordinal α tal que $(A, <) \cong (\alpha, \in_\alpha)$. Usamos la notación $\mathrm{OT}(A, <)$ para denotar el tipo de orden de $(A, <)$.*

Definición 2.15. *La función sucesor en la clase* On *de los ordinales se define como*

$$S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}.$$

Definición 2.16. *Definimos el ordinal* 0 *como* $0 = \emptyset$.

Definición 2.17. *Decimos que un ordinal α es sucesor si $\alpha = S(\beta)$ para algún ordinal β. Decimos que un ordinal es límite si no es 0 ni es un sucesor.*

Introduzcamos ahora la aritmética ordinal, puesto que la usaremos a lo largo del trabajo. Definiremos las operaciones suma, producto y exponenciación ordinal y veremos (sin demostrar) algunos resultados importantes.

Definición 2.18. *La suma ordinal es la operación* $+ : \mathrm{On} \times \mathrm{On} \to \mathrm{On}$ *caracterizada como:*

1. $\alpha + 0 = \alpha$.
2. $\alpha + S(\beta) = S(\alpha + \beta)$.
3. *Si δ es límite,* $\alpha + \delta = \sup_{\beta<\delta} \alpha + \beta$.

Definición 2.19. *El producto ordinal es la operación* $\cdot : \mathrm{On} \times \mathrm{On} \to \mathrm{On}$ *caracterizada como:*

1. $\alpha \cdot 0 = 0$.
2. $\alpha \cdot S(\beta) = \alpha \cdot \beta + \alpha$.
3. *Si δ es límite,* $\alpha \cdot \delta = \sup_{\beta<\delta} \alpha \cdot \beta$.

Definición 2.20. *La exponenciación ordinal es la operación* $\exp : \mathrm{On} \times \mathrm{On} \to \mathrm{On}$ *caracterizada como:*

1. $\alpha^0 = 1$.
2. $\alpha^{S(\beta)} = \alpha^\beta \cdot \alpha$.
3. *Si δ es límite,* $\alpha^\delta = \sup_{\beta<\delta} \alpha^\beta$.

Algunas propiedades de las operaciones con ordinales son:

Lema 2.21.

1. $\beta < \gamma \to \alpha + \beta < \alpha + \gamma \wedge \beta + \alpha < \gamma + \alpha$.
2. $\beta < \gamma \wedge \alpha \neq 0 \to \alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \gamma \wedge \beta \cdot \alpha < \gamma \cdot \alpha$.
3. $\alpha > 1 \wedge \beta < \gamma \to \alpha^\beta < \alpha^\gamma$.
4. $0 < \beta < \gamma \to \beta^\alpha < \gamma^\alpha$.

5. $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.

6. $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$.

7. $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$.

8. $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^{\beta} \cdot \alpha^{\gamma}$.

9. $\alpha^{\beta \cdot \gamma} = (\alpha^{\beta})^{\gamma}$.

Veamos ahora la división con resto, enunciamos esta proposición debido a que aparecerá en algún resultado posterior.

Proposición 2.22. *(División con resto) Para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathrm{On}$ con $\beta \neq 0$ existe un único par de ordinales γ, η tales que*

$$\alpha = \beta \cdot \gamma + \eta \text{ y } \eta < \beta.$$

Definamos también el conjunto de los naturales.

Definición 2.23. *Un conjunto A es inductivo si $\emptyset \in A$ y siempre que $x \in A$, también $x \cup \{x\} \in A$.*

Definición 2.24. *El conjunto de los números naturales se define como el menor conjunto inductivo. Usamos la notación ω para referirnos a él.*

Definición 2.25. *Definimos la función sucesor $S : \omega \to \omega$ como $S(n) = n \cup \{n\}$ para cada $n \in \omega$.*

Observación 2.26. Todo número natural es un ordinal y ω es un ordinal.

Hablemos ahora de cardinales.

Definición 2.27. *Un cardinal es un ordinal que no es biyectable con ningún ordinal menor que él.*

Notación 2.28. *Usamos las variables κ, μ, λ para referirnos a cardinales.*

Definición 2.29. *Sean κ, μ cardinales, definimos la relación $\leq$ de modo que $\kappa \leq \mu$ si y solo si hay una aplicación inyectiva $f : \kappa \to \mu$. Definimos $<$ de modo que $\kappa < \mu$ si y solo si $\kappa < \mu$ y $\kappa \nsim \mu$ (escribimos $\kappa \sim \mu$ para indicar que existe una biyección $f : \kappa \to \mu$).*

Introduzcamos a continuación la aritmética cardinal. Definiremos las operaciones suma, producto y exponenciación cardinal y veremos algunas propiedades (sin demostrarlas).

Definición 2.30. *Definimos la cardinalidad de un conjunto A como el menor ordinal α tal que $A \sim \alpha$. Usamos la notación $|A|$ para referirnos a la cardinalidad de A. $|A|$ es un cardinal.*

Definición 2.31. *Definimos la suma cardinal:*

$$\kappa + \mu = |(\kappa \times \{0\}) \cup (\mu \times \{1\})|.$$

Definición 2.32. *Definimos el producto cardinal:*

$$\kappa \cdot \mu = |\kappa \times \mu|.$$

Definición 2.33. *Definimos la exponenciación cardinal:*

$$\kappa^\mu = |\{f \mid f : \mu \to \kappa\}|.$$

Algunas propiedades importantes sobre la aritmética cardinal son:

Lema 2.34.

1. $(\kappa + \mu) + \lambda = \kappa + (\mu + \lambda)$ *y* $(\kappa \cdot \mu) \cdot \lambda = \kappa \cdot (\mu \cdot \lambda)$.
2. $\kappa + \mu = \mu + \kappa$ *y* $\kappa \cdot \mu = \mu \cdot \kappa$.
3. $\kappa + 0 = \kappa$, $\kappa \cdot 0 = 0$ *y* $\kappa \cdot 1 = \kappa$.
4. $\kappa \leq \kappa' \wedge \mu \leq \mu' \to \kappa + \mu \leq \kappa' + \mu' \wedge \kappa \cdot \mu \leq \kappa' \cdot \mu' \wedge \kappa^\mu \leq \kappa'^{\mu'}$.
5. $\kappa \cdot (\mu + \lambda) = \kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \mu$.
6. $\kappa^{\lambda+\mu} = \kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu$.
7. $(\kappa \cdot \lambda)^\mu = \kappa^\mu \cdot \lambda^\mu$.
8. $(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda \cdot \mu}$.
9. $\kappa^0 = 1$ *y* $\kappa^1 = \kappa$.

Teorema 2.35. *Si* $\kappa \geq \omega$*, entonces* $\kappa \cdot \kappa = \kappa$.

Proposición 2.36. *Si* $\kappa \geq \omega$*, entonces* $\kappa^\kappa = 2^\kappa = |\mathscr{P}(\kappa)| > \kappa$.

Definición 2.37. *La cofinalidad de un cardinal infinito* κ *es el menor cardinal* μ *para el que existe una familia de cardinales* $(\kappa_i \mid i \in \mu)$ *tales que* $\kappa_i < \kappa$ *para cada* $i \in \mu$ *y* $\kappa = \sum_{i \in \mu} \kappa_i$*. Usamos la notación* $\mathrm{cf}(\kappa)$ *para referirnos a la cofinalidad de* κ.

Definición 2.38. *Decimos que un cardinal infinito* κ *es regular si* $\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$ *y en otro caso, decimos que es singular.*

Observación 2.39. Todo número natural es un cardinal y ω es un cardinal.

Definición 2.40. *Para cada cardinal* κ*, definimos* κ^+ *como el cardinal que satisface* $\kappa < \kappa^+$ *y tal que no hay ningún otro cardinal en medio. Lo llamamos el cardinal siguiente a* κ.

Sea $\omega_0 = \omega$*, definimos recursivamente* $\omega_{\alpha+1} = (\omega_\alpha)^+$*. Para* γ *límite, definimos* $\omega_\gamma = \sup\{\omega_\alpha \mid \alpha < \gamma\}$.

En particular, definimos $\omega_1 = \omega^+$*. Observemos que* ω_1 *es la clase de todos los ordinales numerables. Se trata del menor ordinal no numerable y del menor cardinal que es mayor que* ω.

Definición 2.41. ${}^B A = \{f \mid f \text{ es una función } \wedge f : B \to A\}$.

Veamos un resultado que utilizaremos más adelante. Lo demostraremos puesto que no está visto en el temario de Teoría de Conjuntos Elemental.

Definición 2.42. *Definimos* $\mathrm{Sym}(\omega)$ *como el conjunto formado por las funciones biyectivas de* ω *en* ω.

Proposición 2.43. $|\operatorname{Sym}(\omega)| = 2^\omega$.

Demostración. $\operatorname{Sym}(\omega) \subseteq {}^\omega\omega$ de modo que

$$|\operatorname{Sym}(\omega)| \leq |{}^\omega\omega| = \omega^\omega = 2^\omega.$$

Por otra parte, sea $A = \{x \subseteq \omega \mid |\omega \setminus x| \neq 1\}$, entonces $A \sim \mathscr{P}(\omega)$ puesto que $\mathscr{P}(\omega) = A \dot\cup \{x \subseteq \omega \mid |\omega \setminus x| = 1\}$ y $\{x \subseteq \omega \mid |\omega \setminus x| = 1\} \sim \{x \subseteq \omega \mid |x| = 1\} \sim \omega$.

Mostraremos que existe una función $f : A \to \operatorname{Sym}(\omega)$ inyectiva, con lo cual tendremos $2^\omega = |A| \leq |\operatorname{Sym}(\omega)|$. Asignamos a cada $x \in A$ una $f_x \in \operatorname{Sym}(\omega)$ tal que $x = \{n \in \omega \mid f_x(n) = n\}$. Es claro que la asignación de x a f_x será inyectiva. Para obtener f_x necesitamos una biyección g_x de $\omega \setminus x$ tal que $g_x(n) \neq n$ pata todo $n \in \omega \setminus x$ pues en ese caso se puede poner

$$f_x = id_x \cup g_x.$$

Para obtener g_x hay dos casos, según $\omega \setminus x$ sea finito o infinito. En el caso finito (si $\omega \setminus x = \emptyset$ es claro) enumeramos $\omega \setminus x = \{n_1 < \cdots < n_k\}$ y ponemos $g_x(n_i) = n_{i+1}$ si $i < k$ y $g_x(n_k) = n_1$. En el caso $\omega \setminus x$ infinito, tenemos x_1, x_2 conjuntos infinitos disjuntos tales que $\omega \setminus x = x_1 \dot\cup x_2$. Fijamos entonces una biyección $h : x_1 \to x_2$ y ponemos $g_x(n) = h(n)$ si $n \in x_1$ y $g_x(n) = h^{-1}(n)$ si $n \in x_2$.

□

Recordemos también el lema de Zorn.

Lema 2.44. *Todo conjunto parcialmente ordenado, en el que todo subconjunto totalmente ordenado tiene una cota superior, tiene un elemento maximal.*

2.2. Definiciones y nociones de árboles

Veamos a continuación la definición de árbol, así como sus principales elementos y otras definiciones relacionadas.

Definición 2.45. *Un árbol es un conjunto parcialmente ordenado, $(T, \leq)$ tal que para todo $x \in T$, $\{y \in T \mid y < x\}$ está bien ordenado por $<$.*

Definición 2.46. *Sea $(T, \leq)$ un árbol, una cadena en T es un conjunto $C \subseteq T$ totalmente ordenado por $\leq$. Una anticadena en T es un conjunto $A \subseteq T$ tal que $\forall x, y \in A$ $(x \neq y \to (x \nleq y \wedge y \nleq x))$.*

Observación 2.47. Notemos que hemos definido los conceptos de cadena y de anticadena tanto para preórdenes como para árboles. La definición de cadena sí es equivalente en ambos casos, pero hay que tener en cuenta que, en general, la definición de anticadena en preórdenes no es equivalente a la definición de anticadena en árboles.

Sea $\mathbb{P} = (T, \geq)$, entonces sí coincide la definición de anticadena en preórdenes y en árboles.

Definición 2.48. *Sea $(T, \leq)$ un árbol, definimos:*

1. *Sea $x \in T$, la altura de x en T es* $\operatorname{ht}(x, T) = \operatorname{OT}(\{y \in T \mid y < x\})$.
2. *Para cada ordinal α, el α-ésimo nivel de T es* $\operatorname{Lev}_\alpha(T) = \{x \in T \mid \operatorname{ht}(x, T) = \alpha\}$.

3. *La altura de T, o $\mathrm{ht}(T)$ es el menor α tal que $\mathrm{Lev}_\alpha(T) = \emptyset$.*

4. *Un subárbol de T es un subconjunto $T' \subseteq T$ con el orden inducido tal que $\forall x \in T'$ $\forall y \in T$ $(y < x \to y \in T')$.*

Veamos un ejemplo para clarificar estos conceptos introducidos.

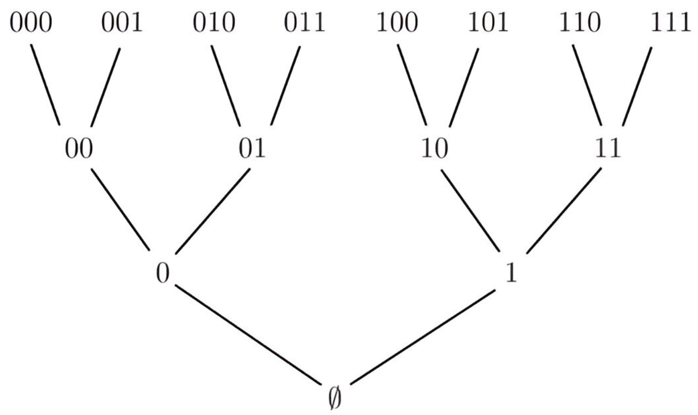
Ejemplo 2.49. Para cualquier conjunto I, definimos ${}^{<\delta}I = \bigcup\{{}^{\alpha}I \mid \alpha < \delta\}$ y le llamamos árbol I-ário completo de longitud δ.

Podemos pensar los elementos de ${}^{\alpha}I$ como secuencias de elementos de I de longitud α. En ${}^{<\delta}I$, definimos la relación $s \leq t$ si $s \subseteq t$, es decir, la secuencia t extiende s.

Si $\alpha < \delta$, entonces $\mathrm{Lev}_\alpha({}^{<\delta}I) = {}^{\alpha}I$ y $\mathrm{ht}({}^{<\delta}I) = \delta$.

Si $I = 2$ nos referimos al árbol ${}^{<\delta}2$ como el árbol binario completo de longitud δ.

El árbol ${}^{<4}2$ sería:



3. Árboles κ-Suslin y κ-árboles

Introduzcamos primero el concepto de árbol κ-Suslin.

Definición 3.1. *Para todo κ cardinal infinito, un árbol κ-Suslin es un árbol T tal que $|T| = \kappa$ y en el que cada cadena y cada anticadena en T tienen cardinalidad menor que κ.*

Estudiemos primero los árboles κ-Suslin en los que κ es regular. Para ello, definamos un nuevo concepto.

Definición 3.2. *Para todo κ cardinal regular, un κ-árbol es un árbol T de altura κ tal que $\forall\alpha < \kappa$ $(|\operatorname{Lev}_\alpha(T)| < \kappa)$.*

Entonces, en el caso de que κ sea regular, tenemos la siguiente relación entre árboles κ-Suslin y κ-árboles.

Lema 3.3. *Para cualquier κ regular, todo árbol κ-Suslin es un κ-árbol.*

Demostración. Sea T un árbol κ-Suslin, tenemos que $|T| = \kappa$ y que toda cadena y anticadena de T tienen cardinalidad menor que κ. Entonces, $\operatorname{Lev}_\kappa(T) = \emptyset$ puesto que si existiese $x \in \operatorname{Lev}_\kappa(T) = \{y \in T \mid \operatorname{ht}(y, T) = \kappa\}$ tendríamos que $x \in T$ y que $\operatorname{ht}(x, T) = \operatorname{OT}(\{y \in T \mid y < x\}) = \kappa$, es decir, $\{y \in T \mid y < x\}$ sería una cadena de cardinalidad κ, que contradice el hecho que toda cadena tiene cardinalidad menor que κ. De este modo, como $\operatorname{Lev}_\kappa(T) = \{x \in T \mid \operatorname{ht}(x, T) = \kappa\} = \emptyset$, tenemos que $\operatorname{ht}(T) \leq \kappa$ ya que, por definición, $\operatorname{ht}(T)$ es el menor α tal que $\operatorname{Lev}_\alpha(T) = \emptyset$.

Como cada $\operatorname{Lev}_\alpha(T)$ es una anticadena, por ser T un árbol κ-Suslin, $|\operatorname{Lev}_\alpha(T)| < \kappa$ $\forall\alpha < \kappa$.

Como κ es regular, κ es el menor cardinal μ para el que existe una familia de cardinales $(\kappa_i \mid i \in \mu)$ tales que $\kappa_i < \kappa$ para cada $i \in \mu$ y $\kappa = \sum_{i\in\mu} \kappa_i$.

Si tuviésemos $\operatorname{ht}(T) < \kappa$, como podemos expresar $T = \bigcup\{\operatorname{Lev}_\alpha(T) \mid \alpha < \operatorname{ht}(T)\}$, cogiendo $\kappa_\alpha = |\operatorname{Lev}_\alpha(T)| < \kappa$, tendríamos $|T| \leq \sum_{\alpha<\operatorname{ht}(T)} |\operatorname{Lev}_\alpha(T)| = \sum_{\alpha<\operatorname{ht}(T)} \kappa_\alpha < \kappa$ (la última desigualdad es debida a que $\operatorname{ht}(T) < \kappa$, que $\kappa_\alpha < \kappa$ y a que κ es regular) contradiciendo que T es un árbol κ-Suslin. De este modo, $\operatorname{ht}(T) \not< \kappa$.

Hemos visto que $\operatorname{ht}(T) \leq \kappa$ y que $\operatorname{ht}(T) \not< \kappa$, de modo que tenemos que $\operatorname{ht}(T) = \kappa$, tal como queríamos ver.

Como hemos comprobado que $\operatorname{ht}(T) = \kappa$ y que $\forall\alpha < \kappa$ $(|\operatorname{Lev}_\alpha(T)| < \kappa)$, tenemos que T es un κ-árbol.

□

Veamos ahora que no existen árboles ω-Suslin.

Lema 3.4. *Lema de König: Si T es un ω-árbol, entonces T tiene una cadena infinita.*

Demostración. Como T es un ω-árbol, entonces T es un árbol de altura ω tal que $\forall\alpha < \omega$ $(|\operatorname{Lev}_\alpha(T)| < \omega)$.

Cogemos $x_0 \in \operatorname{Lev}_0(T) = \{x \in T \mid \operatorname{ht}(x, T) = 0\}$ tal que $\{y \in T \mid y \geq x_0\}$ sea infinito. Observemos que esto es posible, ya que $\operatorname{Lev}_0(T)$ es finito, T infinito y todo elemento de T es mayor o igual que algún elemento de $\operatorname{Lev}_0(T)$.

Supongamos inductivamente que $\{y \in T \mid y \geq x_n\}$ es infinito donde $x_n \in \mathrm{Lev}_n(T)$ y $x_n > x_{n-1}$. Vamos a buscar un elemento $x_{n+1} > x_n$ con $x_{n+1} \in \mathrm{Lev}_{n+1}(T)$ tal que $\{y \in T \mid y \geq x_{n+1}\}$ sea infinito.

Definimos $S = \{y \in \mathrm{Lev}_{n+1}(T) \mid y > x_n\}$. Podemos escribir $\{y \in T \mid y > x_n\} = \bigcup_{z \in S}\{y \in T \mid y \geq z\}$. Entonces, alguno de los elementos de la unión es infinito, puesto que si todos fuesen finitos, tendríamos la unión finita de elementos finitos y entonces $\{y \in T \mid y \geq x_n\}$ sería finito, contradiciendo la hipótesis de inducción. De este modo, $\{y \in T \mid y \geq z\}$ es infinito para algún $z \in \mathrm{Lev}_{n+1}(T)$ con $z > x_n$, es decir, existe un $x_{n+1} > x_n$ tal que $x_{n+1} \in \mathrm{Lev}_{n+1}(T)$ y que cumple que $\{y \in T \mid y \geq x_{n+1}\}$ es infinito, tal y como queríamos ver.

De esta forma, $\{x_n \mid n \in \omega\}$ es una cadena infinita en T.

□

Hemos visto entonces que todo ω-árbol T tiene una cadena infinita, de modo que T no puede ser un árbol ω-Suslin. Además, por el lema 3.3, teníamos que todo árbol ω-Suslin es un ω-árbol, de modo que con estos dos lemas podemos afirmar que no existen árboles ω-Suslin.

Observemos ahora qué sucede cuando κ es un cardinal singular.

Lema 3.5. *Si κ es singular, entonces existe un árbol κ-Suslin.*

Demostración. Como κ es singular, $\mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$, es decir, el menor cardinal μ para el que existe una familia de cardinales $(\kappa_i \mid i \in \mu)$ tales que $\kappa_i < \kappa$ para cada $i \in \mu$ y $\kappa = \sum_{i\in\mu} \kappa_i$ es menor que κ. Podemos escribir entonces $\kappa = \sum_{i\in\mu} \kappa_i$, donde $\kappa_i < \kappa$ y $\mu < \kappa$.

Queremos ver que existe un árbol κ-Suslin, es decir, un árbol T tal que $|T| = \kappa$ y tal que toda cadena y toda anticadena tienen cardinalidad menor que κ.

Tomando $A_i = \kappa_i \times \{i\}$ copias disjuntas de los buenos órdenes κ_i, con su orden correspondiente, y definiendo T como la unión de estas copias disjuntas, tenemos que $|T| = |\bigcup_{i\in\mu} A_i| = \sum_{i\in\mu} |A_i| = \sum_{i\in\mu} \kappa_i = \kappa$.

Como $\kappa_i < \kappa$ para todo $i \in \mu$ y por como hemos definido T, toda cadena en T es un subconjunto de algún $A_i = \kappa_i \times \{i\}$, tenemos que toda cadena tiene cardinalidad menor que κ.

Por otra parte, una anticadena maximal C contendrá un elemento de cada A_i y como $i < \mu$, tenemos que la cardinalidad de C es menor que κ. Como por el lema de Zorn toda anticadena está contenida en una anticadena maximal, entonces toda anticadena tiene cardinalidad menor que κ.

Queda demostrado que el árbol definido T es κ-Suslin.

□

3.1. Árboles bien podados

Introduzcamos en esta sección el concepto de árbol bien podado, así como un resultado sobre este tipo de árboles. Esto nos ayudará a obtener resultados posteriormente.

Definición 3.6. *Un κ-árbol bien podado es un κ-árbol T, tal que $|\mathrm{Lev}_0(T)| = 1$ y*

$$\forall x \in T \forall \alpha (\mathrm{ht}(x, T) < \alpha < \kappa \to \exists y \in \mathrm{Lev}_\alpha(T)(x < y)).$$

Lema 3.7. *Si κ es regular y T es un κ-árbol, entonces T tiene un κ-subárbol bien podado.*

Demostración. Sea T' el conjunto formado por los $x \in T$ tales que

$$|\{z \in T \mid z > x\}| = \kappa.$$

Observemos primero que T' es un subárbol de T. Claramente $T' \subseteq T$. Además, para todo $x \in T'$, $|\{z \in T \mid z > x\}| = \kappa$. Sea $y \in T$ tal que $y < x$, entonces se tiene $\{z \in T \mid z > x\} \subseteq \{z \in T \mid z > y\}$ de modo que $|\{z \in T \mid z > y\}| \geq |\{z \in T \mid z > x\}| = \kappa$ y por la regularidad de κ, $|\{z \in T \mid z > y\}| = \kappa$ de modo que $y \in T'$.

Veamos a continuación que T' cumple la condición

$$\forall x \in T' \forall \alpha (\mathrm{ht}(x, T') < \alpha < \kappa \to \exists y \in \mathrm{Lev}_\alpha(T')(x < y)).$$

Fijado $x \in T'$ y α tal que $\mathrm{ht}(x, T') < \alpha < \kappa$, definimos $Y = \{y \in \mathrm{Lev}_\alpha(T) \mid x < y\}$. Veamos ahora que $\{z \in T \mid z > x \wedge \mathrm{ht}(z, T) > \alpha\}$ tiene cardinalidad κ. Por una parte, tenemos que $|\{z \in T \mid z > x \wedge \mathrm{ht}(z, T) = \alpha\}| < \kappa$ por ser T un κ-árbol. Por otra parte, $|\{z \in T \mid z > x \wedge \mathrm{ht}(z, T) < \alpha\}| = |\bigcup_{\beta<\alpha}\{z \in T \mid z < x \wedge \mathrm{ht}(z, T) < \beta\}| < \kappa$. Esta última desigualdad es cierta, debido a la regularidad de κ, puesto que tenemos la unión de menos de κ elementos de cardinalidad menor que κ. Por tanto, como $|\{z \in T \mid z > x\}| = \kappa$, debe cumplirse que $|\{z \in T \mid z > x \wedge \mathrm{ht}(z, T) > \alpha\}| = \kappa$.

Cada elemento de $\{z \in T \mid z > x \wedge \mathrm{ht}(z, T) > \alpha\}$ está por encima de algún elemento de Y. Como $|\{z \in T \mid z > x \wedge \mathrm{ht}(z, T) > \alpha\}| = \kappa$ y $|Y| < \kappa$ (usando de nuevo que T es un κ-árbol), existe un $y \in Y$ tal que $|\{z \in T \mid z > y\}| = \kappa$ de modo que esta y está en T'. Esto demuestra la condición de que $\forall x \in T' \forall \alpha (\mathrm{ht}(x, T') < \alpha < \kappa \to \exists y \in \mathrm{Lev}_\alpha(T')(x < y))$.

Ahora, por cada $x \in \mathrm{Lev}_0(T')$, tenemos que $\{y \in T' \mid y \geq x\}$ es un subárbol de T bien podado.

□

3.2. Árboles de Aronszajn

Introduzcamos a continuación el concepto de árboles de Aronszajn, ya que son árboles que incluyen a los árboles κ-Suslin y, por tanto, son de interés para este trabajo. Definámoslos.

Definición 3.8. *Para cualquier κ regular, un árbol κ-Aronszajn T es un κ-árbol tal que cada cadena en T tiene cardinalidad menor que κ.*

De este modo, queda claro por la definición de árbol κ-Aronszajn que todo árbol κ-Suslin es un árbol κ-Aronszajn. En el lema 3.4 hemos visto que todo ω-árbol tiene una cadena infinita, de modo que no existen árboles ω-Aronszajn. La existencia de un árbol ω_1-Suslin es independiente de ZFC, sin embargo, veamos que siempre existe un árbol ω_1-Aronszajn.

Definición 3.9. *Sea κ un cardinal, definimos $[A]^\kappa$ como el conjunto formado por los subconjuntos de A que tienen cardinalidad κ. De forma similar, usamos $[A]^{<\kappa}$ para referirnos a los subconjuntos de A que tienen cardinalidad menor que κ.*

Teorema 3.10. *Existe un árbol ω_1-Aronszajn.*

Demostración. Definimos

$$T = \{s \in {}^{<\omega_1}\omega \mid s \text{ inyectiva}\} = \{s \in \bigcup\{{}^{\alpha}\omega \mid \alpha < \omega_1\} \mid s \text{ inyectiva}\}.$$

Claramente $(T, \subseteq)$ es un subárbol de ${}^{<\omega_1}\omega$.

Para demostrar el enunciado de este teorema procederemos del siguiente modo: veremos primero que $\mathrm{ht}(T) = \omega_1$ y que se cumple que toda cadena en T es numerable. Sin embargo, observaremos que T no es un ω_1-árbol, de modo que posteriormente definiremos un nuevo árbol T^* que sea ω_1-Aronszajn a partir de T.

Tenemos que $\mathrm{ht}(T) = \omega_1$ puesto que para todo $\alpha < \omega_1$, existe una función inyectiva de α en ω (cuando $\alpha < \omega_1$, α es un ordinal, y, por lo tanto, es un conjunto bien ordenado. Además, α es numerable) y no existe una función inyectiva de ω_1 en ω (puesto que ω es numerable y ω_1 no lo es).

Veamos ahora que toda cadena en T es numerable. Si C fuese una cadena no numerable en T, entonces $\bigcup C$ sería una función inyectiva de ω_1 en ω, que no es posible. Por lo tanto, cada cadena en T es numerable, es decir, para toda C cadena en T, $|C| < \omega_1$.

Veamos a continuación que T no es un árbol ω_1-Aronszajn ya que no es un ω_1-árbol. Para demostrar esto, observemos que $|\operatorname{Lev}_\alpha(T)|$ no es numerable para todo α tal que $\omega \leq \alpha \leq \omega_1$. Para ello demostraremos que $|\operatorname{Lev}_\omega(T)| = 2^\omega$. Los elementos de $\operatorname{Lev}_\alpha(T)$ son las funciones $f : \alpha \to \omega$ inyectivas, de modo que los elementos de $\operatorname{Lev}_\omega(T)$ son las funciones $f : \omega \to \omega$ inyectivas. Debemos ver cuántas hay.

Sean $f, g \in \operatorname{Lev}_\omega(T)$, definimos la relación $f \approx g \leftrightarrow \operatorname{rec}(f) = \operatorname{rec}(g)$. Observamos que $\approx$ es una relación de equivalencia en el conjunto $\operatorname{Lev}_\omega(T)$. Podemos entonces escribir $\operatorname{Lev}_\omega(T) = \bigcup \operatorname{Lev}_\omega(T)/\approx = \bigcup_{x \in \operatorname{Lev}_\omega(T)/\approx} x$. Calculemos $|\operatorname{Lev}_\omega(T)/\approx|$ y $|[f]_\approx|$.

Tenemos que $|\operatorname{Lev}_\omega(T)/\approx| = |[\omega]^\omega|$ y sabemos $\mathscr{P}(\omega) = [\omega]^\omega \dot\cup [\omega]^{<\omega}$. Por una parte, $|[\omega]^{<\omega}| = |\bigcup_{n<\omega}[\omega]^n| = \omega$ puesto que $[\omega]^n = 1$ si $n = 0$ y $[\omega]^n = \omega$ en caso contrario. Por otra parte, $|\mathscr{P}(\omega)| = 2^\omega$ y como $|\mathscr{P}(\omega)| = |[\omega]^\omega \dot\cup [\omega]^{<\omega}| = |[\omega]^\omega| + \omega = \max\{|[\omega]^\omega|, \omega\}$, necesariamente $|[\omega]^\omega| = 2^\omega$.

Calculemos ahora $|[f]_\approx|$. Para ello veamos primero cuáles son los elementos de $[f]_\approx$. Si $g \approx f$, entonces existe h tal que $h = g \circ f^{-1} \in \operatorname{Sym}(\omega)$ y podemos escribir $g = h \circ f$. Veamos ahora que esta h es única. Si tuviésemos $g = h' \circ f$ con $h' \in \operatorname{Sym}(\omega)$, entonces tendríamos $h' = g \circ f^{-1}$, de modo que $h' = h$. De este modo, $[f]_\approx = \{h \circ f \mid h \in \operatorname{Sym}(\omega)\}$ y, por tanto, $|[f]_\approx| = |\operatorname{Sym}(\omega)| = 2^\omega$.

Recordemos que teníamos $\operatorname{Lev}_\omega(T) = \bigcup \operatorname{Lev}_\omega(T)/\approx = \bigcup_{x \in \operatorname{Lev}_\omega(T)/\approx} x$, de este modo, $|\operatorname{Lev}_\omega(T)| = 2^\omega \cdot 2^\omega = 2^\omega$.

Hemos visto que T no es un árbol ω_1-Aronszajn. Vamos a construir ahora un subárbol de T que sea ω_1-Aronszajn.

Si $s, t \in {}^{\alpha}\omega$, definimos la relación $s \sim t$ si y solo si $\{\xi < \alpha \mid s(\xi) \neq t(\xi)\}$ es finito. Veamos primero que esta es una relación de equivalencia:

1. Reflexiva: Claramente, si $s \in {}^{\alpha}\omega$, entonces $s \sim s$ puesto que $\{\xi < \alpha \mid s(\xi) \neq s(\xi)\}$ es finito (vacío).

2. Simétrica: Sean $s, t \in {}^{\alpha}\omega$, $\{\xi < \alpha \mid s(\xi) \neq t(\xi)\} = \{\xi < \alpha \mid t(\xi) \neq s(\xi)\}$ y, por lo tanto, la relación es simétrica.

3. Transitiva: Sean $s, t, r \in {}^{\alpha}\omega$. Si $s \sim t$ y $t \sim r$ tenemos que $\{\xi < \alpha \mid s(\xi) \neq t(\xi)\}$ y $\{\xi < \alpha \mid t(\xi) \neq r(\xi)\}$ son finitos y su unión $\{\xi < \alpha \mid s(\xi) \neq t(\xi) \vee t(\xi) \neq r(\xi)\}$ es finita por ser la unión de dos conjuntos finitos. Como $\{\xi < \alpha \mid s(\xi) \neq r(\xi)\}$ es un subconjunto de $\{\xi < \alpha \mid s(\xi) \neq t(\xi) \vee t(\xi) \neq r(\xi)\}$, tenemos que $s \sim r$.

Construiremos una familia $(s_\alpha \mid \alpha < \omega_1)$ tal que:

(1) $s_\alpha \in {}^{\alpha}\omega$ es inyectiva.

(2) $\alpha < \beta \to s_\alpha \sim s_\beta \restriction \alpha$.

(3) $\omega \setminus \mathrm{rec}(s_\alpha)$ es infinito.

Si existe esta $(s_\alpha \mid \alpha < \omega_1)$ entonces definimos

$$T^* = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \{t \in \mathrm{Lev}_\alpha(T) \mid t \sim s_\alpha\}.$$

Veamos que T^* es un árbol ω_1-Aronszajn, es decir, que es un ω_1-árbol y que toda cadena en T^* tiene cardinalidad menor que ω_1.

Veamos primero T^* es un subárbol de T. Claramente $T^* \subseteq T$. Sea $t \in T^*$ y $t' \in T$, veamos que si $t' \subseteq t$, entonces $t' \in T^*$. Como $t \in T^*$, existe un $\alpha < \omega_1$ tal que $t \in \mathrm{Lev}_\alpha(T)$ y $t \sim s_\alpha$. Como $t' \in T$ y $t' \subseteq t$, entonces existe $\beta < \alpha$ tal que $t' \in \mathrm{Lev}_\beta(T)$ y $t' = t \restriction \beta$. Por (2), $s_\beta \sim s_\alpha \restriction \beta$ y como $t \sim s_\alpha$ (puesto que $t \in T^*$), $t' = t \restriction \beta \sim s_\alpha \restriction \beta \sim s_\beta$ y, por tanto, $t' \in T^*$.

Como ya hemos visto antes, toda cadena en T tiene cardinalidad menor que ω_1 y, por lo tanto, continúa siendo cierto para las cadenas de T^* ya que este es un subárbol de T.

Falta ahora ver que T^* es un ω_1-árbol. Por (1), tenemos que para todo $\alpha < \omega_1$, $s_\alpha \in T^*$ y, por lo tanto $\mathrm{Lev}_\alpha(T^*) \neq \emptyset$, de modo que $\mathrm{ht}(T^*) = \omega_1$.

Veamos ahora que $\forall \alpha < \omega_1(|\mathrm{Lev}_\alpha(T^*)| < \omega_1)$. Para ello, sea $s \in {}^{\alpha}\omega$ y $[s]$ su clase de equivalencia, podemos definir la función $f : [s] \longrightarrow [\alpha]^{<\omega} \times \bigcup_{x \in [\alpha]^{<\omega}} {}^{x}\omega$ que envía a cada $t \in [s]$, $(X_t, t \restriction X_t)$ donde $X_t = \{\xi < \alpha \mid t(\xi) \neq s(\xi)\}$. Probemos que $[\alpha]^{<\omega} \times \bigcup_{x \in [\alpha]^{<\omega}} {}^{x}\omega$ es un conjunto numerable. Para ello, veamos que tanto $[\alpha]^{<\omega}$ como $\bigcup_{x \in [\alpha]^{<\omega}} {}^{x}\omega$ son numerables.

Sabemos que $|[\alpha]^{<\omega}| = \begin{cases} 2^{|\alpha|} & \text{si} \quad \alpha \text{ es finito} \\ |\alpha| & \text{si} \quad \alpha \text{ es infinito} \end{cases}$
y, por lo tanto, es numerable. Por otra parte, $\bigcup_{x \in [\alpha]^{<\omega}} {}^{x}\omega$ es la unión numerable de conjuntos numerables, y, por lo tanto, es numerable. Entonces, $[\alpha]^{<\omega} \times \bigcup_{x \in [\alpha]^{<\omega}} {}^{x}\omega$ es numerable por ser el producto de conjuntos numerables. Por otra parte, demostremos que la función definida f es inyectiva. Para ello, sean $t, t' \in [s]$, supongamos que $f(t) = f(t')$, es decir, $(X_t, t \restriction X_t) = (X_{t'}, t' \restriction X_{t'})$:

1. Si $\xi \notin X_t = X_{t'}$, entonces tenemos que $t(\xi) = s(\xi) = t'(\xi)$.
2. Si $\xi \in X_t = X_{t'}$, entonces tenemos que $t \restriction X_t = t' \restriction X_{t'}$, de modo que $t(\xi) = t'(\xi)$.

En cualquier caso, si $f(t) = (X_t, t \restriction X_t) = (X_{t'}, t' \restriction X_{t'}) = f(t')$, entonces $t = t'$, de modo que la función es inyectiva.

Como hemos definido una función inyectiva de $[s]$ en el conjunto $[\alpha]^{<\omega} \times \bigcup_{x\in[\alpha]^{<\omega}} {}^x\omega$ numerable, entonces $[s]$ también es numerable. Tenemos que $t \in \operatorname{Lev}_\alpha(T^*)$ si y solo si $t \in \operatorname{Lev}_\alpha(T)$ y $t \sim s_\alpha$, es decir, $t \in [s_\alpha]$. Como $s_\alpha \in {}^\alpha\omega$, tenemos que $|[s_\alpha]| < \omega_1$ para todo $\alpha < \omega_1$, de modo que $|\operatorname{Lev}_\alpha(T^*)| < \omega_1$ para todo $\alpha < \omega_1$.

De este modo, hemos visto que T^* es un árbol ω_1-Aronszajn.

Para finalizar la demostración, debemos ver que existe $(s_\alpha \mid \alpha < \omega_1)$. Para ello construiremos la sucesión inductivamente. Supongamos que s_α está construido de manera que se cumpla (1)-(3). Veamos ahora la construcción del siguiente elemento de la sucesión, distinguiendo los casos sucesor y límite.

Para el caso sucesor, cogemos cualquier $n \in \omega \setminus \operatorname{rec}(s_\alpha)$ y definimos $s_{\alpha+1} = s_\alpha \cup \{(\alpha, n)\}$. Con esta definición se cumple (1), ya que $s_\alpha \in {}^\alpha\omega$ y es inyectiva y al añadir (α, n), como $n \in \omega \setminus \operatorname{rec}(s_\alpha)$, $s_{\alpha+1} \in {}^{\alpha+1}\omega$ y es también inyectiva. Claramente se sigue cumpliendo (2) por como hemos definido $s_{\alpha+1}$. Además, como $\omega \setminus \operatorname{rec}(s_\alpha)$ es infinito, entonces $\omega \setminus \operatorname{rec}(s_{\alpha+1}) = \omega \setminus (\operatorname{rec}(s_\alpha) \cup \{n\})$ también es infinito.

Supongamos ahora que tenemos s_α para todo $\alpha < \gamma$ donde γ es un límite. Fijamos α_n para $n < \omega$ de manera que $\alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots$ y que $\sup_n \alpha_n = \gamma$. Veamos primero que existe esta sucesión:

Como γ es un ordinal límite y es numerable, podemos afirmar $\gamma = \{\beta_n \mid n \in \omega\}$. Cogemos entonces $\alpha_0 = \beta_0$ arbitrario. Supongamos construida una sucesión de modo que $\alpha_n \geq \beta_n$ y $\alpha_0 < \dots < \alpha_n$. Definimos ahora $\alpha_{n+1} = \max\{\alpha_n, \beta_{n+1}\} + 1 < \gamma$ (por ser γ límite). Tenemos entonces $\alpha_n < \alpha_{n+1}$ y $\alpha_{n+1} \geq \beta_{n+1}$ tal y como queríamos ver.

Definimos ahora $t_0 = s_{\alpha_0}$ y escogemos de forma inductiva $t_n : \alpha_n \to \omega$ tal que t_n sea inyectiva, $t_n \sim s_{\alpha_n}$ (es decir, $\{\xi < \alpha \mid t_n(\xi) \neq s_{\alpha_n}(\xi)\}$ es finito) y $t_n \restriction \alpha_{n-1} = t_{n-1}$. Veamos la construcción de t_{n+1}:

Definimos $t_{n+1} : \alpha_{n+1} \to \omega$ como $t_{n+1} = t_n \cup s_{\alpha_{n+1}} \restriction (\alpha_{n+1} \setminus (\alpha_n \cup X)) \cup f_X$ donde f_X es una función que envía a los elementos de X ($X \subseteq \alpha_{n+1} \setminus \alpha_n$ definido posteriormente) elementos que no pertenezcan a los recorridos de t_n ni de $s_{\alpha_{n+1}} \restriction (\alpha_{n+1} \setminus (\alpha_n \cup X))$.

Entonces, t_{n+1} es una función inyectiva por ser la unión de funciones inyectivas cuyos dominios y recorridos son disjuntos.

Veamos ahora la construcción de X. Sabemos que $t_{n+1} \restriction \alpha_n = t_n \sim s_{\alpha_n} \sim s_{\alpha_{n+1}} \restriction \alpha_n$ es decir, t_n y $s_{\alpha_{n+1}} \restriction \alpha_n$ difieren en un número finito de puntos, llamemos Y a este conjunto de puntos. De este modo, t_n y $s_{\alpha_{n+1}} \restriction (\alpha_{n+1} \setminus \alpha_n)$ son iguales en un conjunto de puntos $X \subseteq Y$, de modo que X que tiene menos o igual elementos que Y, por tanto, X también es finito.

Sea $t = \bigcup_n t_n$. Entonces, $t \in {}^\gamma\omega$ y t es inyectiva, ya que para toda $n < \omega$, t_n son funciones inyectivas y la sucesión está formada por funciones que se van extendiendo. Si definimos $s_\gamma = t$, entonces (1) se cumple y para $\alpha < \gamma$, entonces $s_\alpha \sim s_\gamma \restriction \alpha$ de modo que se cumple también (2). Sin embargo, (3) podría fallar, puesto que $\omega \setminus \operatorname{rec}(t)$ podría ser finito. Para arreglar esto definimos $s_\gamma(\alpha_n) = t(\alpha_{2n})$ y $s_\gamma(\xi) = t(\xi)$ para $\xi \notin \{\alpha_n \mid n \in \omega\}$. Veamos que ahora se cumplen las condiciones (1)-(3):

Veamos (1). Tenemos que $s_\gamma \in {}^\gamma\omega$ puesto que $t \in {}^\gamma\omega$. Veamos que s_γ es inyectiva distinguiendo los distintos casos posibles:

1. Si $s_\gamma(\alpha_n) = s_\gamma(\xi)$ donde $\xi \notin \{\alpha_n \mid n \in \omega\}$, entonces tendríamos $t(\alpha_{2n}) = t(\xi)$ y como t es inyectiva, $\alpha_{2n} = \xi$ pero esto no es posible, ya que $\xi \notin \{\alpha_n \mid n \in \omega\}$.

2. Si $s_\gamma(\alpha_n) = s_\gamma(\alpha_m)$, entonces tendríamos $t(\alpha_{2n}) = t(\alpha_{2m})$ y como t es inyectiva, entonces $\alpha_{2n} = \alpha_{2m}$ de donde obtenemos que $\alpha_n = \alpha_m$.

3. Si $s_\gamma(\xi) = s_\gamma(\xi')$ donde $\xi, \xi' \notin \{\alpha_n \mid n \in \omega\}$ tendríamos que $t(\xi) = t(\xi')$ y como t es inyectiva, entonces $\xi = \xi'$.

Por otra parte, (2) siguen cumpliéndose, ya que $\alpha < \beta \to s_\alpha \sim s_\beta \upharpoonright \alpha$ no se ve afectada por la modificación en la construcción.

Finalmente, veamos (3). Tenemos que $\{t(\alpha_{2n+1}) \mid n \in \omega\}$ es un conjunto infinito y además

$$\{t(\alpha_{2n+1}) \mid n \in \omega\} \subseteq (\omega \setminus \mathrm{rec}(s_\gamma)),$$

de modo que $\omega \setminus \mathrm{rec}(s_\alpha)$ es infinito.

□

Veamos ahora que un árbol construido como en el teorema anterior no puede ser un árbol ω_1-Suslin.

Lema 3.11. *Ningún árbol ω_1-Aronszajn que es subárbol de $\{s \in {}^{<\omega_1}\omega \mid s$ es inyectiva$\}$ puede ser un árbol ω_1-Suslin.*

Demostración. Supongamos que T es un árbol ω_1-Aronszajn, subárbol de $\{s \in {}^{<\omega_1}\omega \mid s \text{ es inyectiva}\}$. Entonces, T es un ω_1-árbol tal que toda cadena en T tiene cardinalidad menor que ω_1.

Queremos ver que T no es un árbol ω_1-Suslin, es decir, que existe alguna anticadena con cardinalidad mayor o igual que ω_1.

Veamos que, para todo $n \in \omega$, $\{s \in T \mid \exists \alpha < \omega_1(\mathrm{dom}(s) = \alpha + 1 \wedge s(\alpha) = n)\}$ es una anticadena. Fijado un $n < \omega$ cualquiera, consideramos dos elementos cualesquiera del conjunto definido, de modo que $s \in {}^{\alpha+1}\omega$, $s' \in {}^{\beta+1}\omega$ y $s(\alpha) = s'(\beta) = n$. Suponemos sin pérdida de generalidad $\beta < \alpha$ (el caso $\beta = \alpha$ es obvio). Claramente $s \nsubseteq s'$ puesto que el dominio de s es mayor que el de s'. Tampoco es posible que $s' \subseteq s$ puesto que si fuese cierto, tendríamos $s(\alpha) = s'(\alpha) = n$ y $s(\beta) = n$, con $\alpha \neq \beta$, contradiciendo la inyectividad de s. Esto demuestra que $\{s \in T \mid \exists \alpha < \omega_1(\mathrm{dom}(s) = \alpha + 1 \wedge s(\alpha) = n)\}$ es una anticadena para todo $n \in \omega$.

Dado que la altura del árbol es ω_1, hay ω_1 posibles valores para α en la condición $\mathrm{dom}(s) = \alpha + 1$. Además, para cada elección de α, existe alguna función $s \in {}^{\alpha+1}\omega$ inyectiva que asigna el valor n en el nivel α. Por lo tanto, la cardinalidad de la anticadena $\{s \in T \mid \exists \alpha(\mathrm{dom}(s) = \alpha + 1 \wedge s(\alpha) = n)\}$ será al menos ω_1 para cada $n \in \omega$ y tenemos, por lo tanto, anticadenas con cardinalidad mayor o igual que ω_1. De este modo, T no es un árbol ω_1-Suslin.

□

Veamos un resultado más referente a los árboles κ-Aronszajn bien podados.

Lema 3.12. *Sea κ regular, T un árbol κ-Aronszajn bien podado y $x \in T$, entonces,*

$$\forall n < \omega \exists \alpha > \mathrm{ht}(x, T)(|\{y \in \mathrm{Lev}_\alpha(T) \mid y > x\}| \geq n).$$

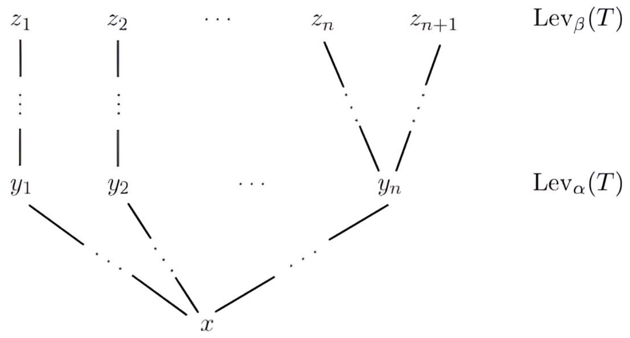
Demostración. El caso $n = 1$ es claro, por ser T un árbol bien podado.

Estudiaremos ahora el caso $n = 2$.

Si tuviésemos $|\{y \in \mathrm{Lev}_\alpha(T) \mid y > x\}| = 1$ para todo $\alpha > \mathrm{ht}(x, T)$, tendríamos entonces que $\{y \in T \mid y > x\}$ contiene elementos de todos los niveles por encima de x (y, por lo tanto, tiene cardinalidad κ) y este conjunto sería una cadena. Esto no es posible, puesto que T es un árbol κ-Aronszajn y, por tanto, toda cadena debe tener cardinalidad menor que κ.

Para $n > 2$ procederemos por inducción.

Suponemos que se satisficiese para n. Fijado $\alpha > \mathrm{ht}(x, T)$, sean $y_1, \ldots, y_n \in \mathrm{Lev}_\alpha(T)$ con cada $y_i > x$. Ahora podemos afirmar por el caso $n = 2$ que existe un $\beta > \alpha$ tal que hay $z_n, z_{n+1} \in \mathrm{Lev}_\beta(T)$ con $z_n, z_{n+1} > y_n$. Para $i < n$, hay $z_i \in \mathrm{Lev}_\beta(T)$ con $z_i > y_i$. Entonces $\{z_1, \ldots, z_{n+1}\}$ establece el lema para $n + 1$. Veamos el siguiente dibujo para visualizarlo mejor.



□

4. Hipótesis de Suslin (SH)

Introduzcamos a continuación las definiciones de denso y de separable tanto para conjuntos totalmente ordenados como para espacios topológicos.

Definición 4.1. *Sea* $(\mathbb{P}, \leq)$ *un conjunto totalmente ordenado y sea* $A \subseteq \mathbb{P}$*, decimos que* A *es denso en* $\mathbb{P}$ *si* $\forall p, q \in \mathbb{P}(p < q \to \exists r \in A(p < r < q))$.

Decimos que un conjunto totalmente ordenado $(\mathbb{P}, \leq)$ *es denso en sí mismo si* $\forall p, q \in \mathbb{P}(p < q \to \exists r \in \mathbb{P}(p < r < q))$.

Un conjunto totalmente ordenado es separable si incluye un subconjunto denso numerable.

Definición 4.2. *Un conjunto totalmente ordenado* $(\mathbb{P}, \leq)$ *es completo si todo subconjunto acotado de* $\mathbb{P}$ *tiene supremo.*

Definición 4.3. *Sea* X *un espacio topológico y* $A \subseteq X$*. Se dice que* A *es denso en* X *si para todo abierto no vacío* U *de* X*, se cumple* $A \cap U \neq \emptyset$.

Un espacio topológico es separable si incluye un subconjunto denso numerable.

Definición 4.4. *La topología del orden es la topología que puede definirse sobre un conjunto totalmente ordenado. Si* $(X, \leq)$ *es un conjunto totalmente ordenado, la topología del orden en* X *está generada por los intervalos:*

$$\{x \mid a < x\},$$

$$\{x \mid x < b\}$$

para todo a, b *en* X*. Siempre que* X *tenga al menos dos elementos, esto equivale a decir que los intervalos abiertos*

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\},$$

junto con los intervalos anteriores forman una base para la topología del orden. Los conjuntos abiertos en X *son los conjuntos que son uniones de tales intervalos.*

Si no hay mayor ni menor elemento, bastan los intervalos de la forma (a, b) *para definir una base de la topología del orden.*

Observación 4.5. En un conjunto totalmente ordenado, con la topología del orden, las definiciones de denso y de separable para conjuntos totalmente ordenados son equivalentes a las respectivas definiciones para topologías.

Tal como se comenta en la introducción, el problema de Suslin nace de un intento de caracterización de la recta real $(\mathbb{R}, <)$. Con la condición de que el espacio sea separable, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 4.6. *Sea* $(X, <)$ *un conjunto totalmente ordenado no vacío, que no tiene extremos y que es denso, completo y separable, entonces* $(X, <)$ *es isomorfo a la recta real* $(\mathbb{R}, <)$.

Para ver este resultado, veamos primero el Teorema de Cantor, que dice lo siguiente:

Proposición 4.7. *Sea $(L, \leq)$ un conjunto totalmente ordenado no vacío, que no tiene extremos y que es numerable y denso, entonces $(L, \leq)$ es isomorfo a $(\mathbb{Q}, <)$.*

Demostración. Veamos un resultado previo para ver que es posible construir un isomorfismo de orden $g : \mathbb{Q} \to L$.

Sea $A \subseteq \mathbb{Q}$ y $B \subseteq L$ donde A, B son finitos. Sea g un isomorfismo de orden de A en B. Si $q \in \mathbb{Q} \setminus A$, entonces existe un isomorfismo de orden h que extiende g y que cumple $\mathrm{dom}(h) = A \cup \{q\}$ y $\mathrm{rec}(h) \subseteq L$. Si $l \in L \setminus B$, entonces existe un isomorfismo de orden h que extiende g y que cumple $\mathrm{dom}(h) \subseteq \mathbb{Q}$ y $\mathrm{rec}(h) = B \cup \{l\}$. Veámoslo.

Si $A = \emptyset$, sea $q \in \mathbb{Q}$, podemos definir $g(q) = l$ donde $l \in L$ cualquiera.

Sean $A \subseteq \mathbb{Q}$, $B \subseteq L$ finitos, $A \neq \emptyset$ y $g : A \to B$ isomorfismo de orden. Sea $q \in \mathbb{Q} \setminus A$, escogemos $l \in L \setminus B$ que tenga las mismas relaciones de orden con $l_1, \cdots, l_n$ que la que q tiene con $q_1, \cdots, q_n$. Esta elección es posible, ya que L no tiene extremos y es denso. Definimos entonces h como $h(q) = l$ y $h(x) = g(x)$ para $x \in A$. Sea $l \in L \setminus B$, escogemos $q \in \mathbb{Q} \setminus A$ que tenga las mismas relaciones de orden con $q_1, \cdots, q_n$ que la que l tiene con $l_1, \cdots, l_n$. Esta elección es posible, ya que $\mathbb{Q}$ no tiene extremos y es denso. Definimos entonces h como $h(q) = l$ y $h(x) = g(x)$ para $x \in A$. Esto demuestra la afirmación.

Volvamos ahora a la demostración de la proposición inicial. Veamos que podemos definir un isomorfismo $g : \mathbb{Q} \to L$ inductivamente, añadiendo en cada paso un nuevo punto a su dominio o recorrido.

Tenemos $\mathbb{Q} = \{q_n \mid n < \omega\}$ y $L = \{l_n \mid n < \omega\}$. Definimos ahora $g_0 = \emptyset$. Supongamos $n > 0$ y que hemos construido una cadena finita $g_0 \subseteq g_1 \subseteq \cdots \subseteq g_{n-1}$ de modo que, para todo $i < n$, $g_i : A_i \to B_i$ son isomorfismos de orden y $A_i \subseteq \mathbb{Q}$ y $B_i \subseteq L$ son conjuntos finitos.

Entonces, por la afirmación anterior, podemos extender g_{n-1} del siguiente modo:

Si $q_n \in \mathbb{Q} \setminus A_{n-1}$, usando el lema previo, existe un isomorfismo de orden g_n que extiende g_{n-1} y que cumple que $\mathrm{dom}(g_n) = A_{n-1} \cup \{m_n\} = A_n$. Definimos $B_n = \mathrm{rec}(g_n) \subseteq L$.

Si $l_n \in L \setminus B_{n-1}$, usando el lema previo, existe un isomorfismo de orden g_n que extiende g_{n-1} y que cumple que $\mathrm{rec}(g_n) = B_{n-1} \cup \{m_n\} = B_n$. Definimos $A_n = \mathrm{dom}(g_n) \subseteq \mathbb{Q}$.

Si $m_n \in A_{n-1} \cup B_{n-1}$ definimos $g_n = g_{n-1}$, $A_n = A_{n-1}$ y $B_n = B_{n-1}$.

g_n está definida para toda n y como g_n extiende g_{n-1}, podemos construir un isomorfismo de orden $g = \bigcup_{n=0}^{\infty} g_n$. Esta construcción garantiza que $\mathrm{dom}(g) = \mathbb{Q}$ y $\mathrm{rec}(g) = L$.

Con esto hemos demostrado el teorema de Cantor.

□

Demostración de 4.6. Por ser X un conjunto separable, sabemos que existe un subconjunto $D \subseteq X$ denso en la topología del orden y numerable. Veamos que D cumple las hipótesis del Teorema de Cantor.

Claramente $(D, <)$ es un conjunto totalmente ordenado por serlo $(X, <)$. Además, también es denso en el orden, por serlo en la topología del orden.

Por otra parte, $(D, <)$ no tiene extremos, puesto que si tuviese un extremo inferior (idéntico para el caso superior), tendríamos entonces que existe un elemento $d \in D$ tal que $\forall x \in D(d < x)$. Por otra parte, D es denso en X, de modo que para todo (a, b) abierto de X, $D \cap (a, b) \neq \emptyset$. Como X no tiene extremos, $\exists z \in X$ tal que $z < d$, de modo que (z, d) es un abierto de X y, por tanto, tendríamos $(z, d) \cap D \neq \emptyset$ contradiciendo que no hay ningún elemento menor que d en D.

Entonces, por el teorema de Cantor, existe un isomorfismo de orden $f : \mathbb{Q} \to D$. Para cada irracional p, definimos $\mathbb{Q}_p = \{q \in \mathbb{Q} \mid q < p\}$. Podemos extender f a un isomorfismo de orden $g : \mathbb{R} \to X$ definiendo $g(p) = \sup f[\mathbb{Q}_p]$ (que existe por la completitud de X) para p irracional y $g(q) = f(q)$ si $q \in \mathbb{Q}$. De este modo $f[\mathbb{Q}_p]$ está acotado en X por $g(p)$.

Falta ver que g es un isomorfismo de orden, es decir, que es una función biyectiva que preserva el orden. Veamos primero la exhaustividad. Sabemos que f es exhaustiva, de modo que para todo $x \in D \subseteq X$, existe un $q \in \mathbb{Q}$ tal que $f(q) = x$ y como g extiende a f, $g(q) = x$. Ahora, si $x \in X \setminus D$, entonces existe algún p irracional tal que $x = \sup f[\mathbb{Q}_p]$, de modo que $g(p) = x$. Para ver que g es inyectiva, es suficiente ver que preserva el orden, es decir, que sean $r, s \in \mathbb{R}$, si $r < s$, entonces $g(r) < g(s)$. Veámoslo por casos:

1. $r, s \in \mathbb{Q}$.
   $g(r) = f(r)$ y $g(s) = f(s)$ y como f es un isomorfismo de orden, $g(r) < g(s)$.

2. $r \in \mathbb{Q}$ y $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
   $g(r) = f(r)$ y $g(s) = \sup f[\mathbb{Q}_s]$. Como $r < s$, se tiene $g(r) = f(r) < \sup f[\mathbb{Q}_s] = g(s)$. La desigualdad es estricta por ser $\mathbb{Q}_s$ denso.

3. $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ y $s \in \mathbb{Q}$.
   $g(r) = \sup f[\mathbb{Q}_r]$ y $g(s) = f(s)$. Para todo $t \in \mathbb{Q}_r$, tenemos que $t \in \mathbb{Q}$ y que $t < r$ y como $r < s$, $g(t) = f(t) < f(s) = g(s)$. Entonces, $g(r) = \sup f[\mathbb{Q}_r] < g(s)$.

4. $r, s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
   $g(r) = \sup f[\mathbb{Q}_r]$ y $g(s) = \sup f[\mathbb{Q}_s]$. Como $r < s$, $\mathbb{Q}_r \subset \mathbb{Q}_s$ de modo que $g(r) < g(s)$. La desigualdad es estricta por ser $\mathbb{Q}_s$ y $\mathbb{Q}_r$ densos.

$\square$

El problema de Suslin cuestiona qué pasa si cambiamos en la proposición 4.6 la condición de separable por la condición de cadena numerable. Definamos entonces la condición de cadena numerable tanto para espacios topológicos como para órdenes.

Definición 4.8. *Un espacio topológico X tiene la condición de cadena numerable (c.c.c.) si no existe una familia no numerable de subconjuntos abiertos de X disjuntos dos a dos, no vacíos.*

Definición 4.9. *Un preorden $(\mathbb{P}, \leq)$ tiene la c.c.c. si cada anticadena en $\mathbb{P}$ es numerable.*

Observación 4.10. En un conjunto totalmente ordenado, con la topología del orden, la definición de c.c.c. para órdenes es equivalente con la definición de c.c.c. para topologías.

Definamos ahora formalmente el concepto de recta de Suslin así como la hipótesis de Suslin.

Definición 4.11. *Una recta de Suslin es un conjunto totalmente ordenado $(X, <)$ que tiene la c.c.c. pero que no es separable. La hipótesis de Suslin (SH) dice: "No existen rectas de Suslin".*

Observación 4.12. Tal como se comenta en la introducción de la memoria, es un resultado conocido que tanto SH como $\neg$SH son consistentes con ZFC, es decir, que si ZFC es consistente, entonces tenemos que Con(ZFC+SH) y Con(ZFC+$\neg$SH). De este modo, SH es independiente de ZFC.

Veamos un resultado inicial sobre rectas de Suslin.

Teorema 4.13. *Si hay una recta de Suslin, entonces hay una recta de Suslin X tal que:*

(1) X es denso en el orden.

(2) Ningún subconjunto abierto de X no vacío es separable.

Demostración. Sea Y una recta de Suslin cualquiera. Definimos una relación de equivalencia $\sim$ en Y de manera que $x \sim y$ si y solo si el intervalo que forman es separable. Veamos que es una relación de equivalencia:

1. Reflexiva: Cierto, puesto que sea $x \in Y$, definiendo $(x, x) = \emptyset$, cualquier conjunto es separable en sí mismo, por tanto $x \sim x$.

2. Simétrica: Sean $x, y \in Y$, $x < y$ (sin pérdida de generalidad) con $x \sim y$, entonces (x, y) es separable. Como $y \sim x$ si y solo si (x, y) es separable, esto es también cierto.

3. Transitiva: Sean $x, y, z \in Y$ tales que $x \sim y$, $y \sim z$. Veamos por casos que $x \sim z$.

   a) $x < y < z$ (ídem para $z < y < x$):
   Tenemos entonces (x, y) y (y, z) separables. Entonces $(x, z) = (x, y) \cup \{y\} \cup (y, z)$ que es claramente separable, de modo que $x \sim z$.

   b) $x < z < y$ (ídem para $y < x < z$, $y < z < x$ y $z < x < y$):
   Entonces $(x, z) \subseteq (x, y)$ que es separable, y, por tanto, (x, z) es separable y entonces $x \sim z$.

Sea X el conjunto de clases de $\sim$-equivalencia. Si $I \in X$, veamos que entonces I es convexo. Sean $x, y \in I$ tales que $x < y$, entonces $x \sim y$, de modo que (x, y) separable. Sea $z \in (x, y)$, entonces $(x, z) \subseteq (x, y)$ de modo que (x, z) es separable. Esto implica que $x \sim z$, de modo que $z \in I$. De este modo, $(x, y) \subseteq I$.

Ordenamos totalmente X de manera que $I < J$ si y solo si algún elemento de I es menor que algún elemento de J. De hecho, si algún elemento de I es menor que algún elemento de J, esto se cumple para todos los elementos de I y J. Veámoslo:

Suponemos que existen $a \in I, b \in J$ tales que $a < b$. Supongamos ahora que existen $x \neq a \in I, y \neq b \in J$ tales que $x > y$. Como $a, x \in I$, $a \sim x$ y como $b, y \in J, b \sim y$. Veamos por casos que esto no es posible y que, por tanto, $x < y$.

1. $a < x$ y $b < y$:

   Como $a < b$ y $x > y$, tendríamos $a < b < y < x$ de modo que $(a, b) \subseteq (a, x)$ y entonces $a \sim b$ que no es posible si $I \neq J$.

2. $a < x$ y $y < b$:

   Como $a < b$ y $x > y$, tendríamos cuatro posibles situaciones:

   a) $a < y < x < b$ o $y < a < x < b$: $(y, x) \subseteq (y, b)$ y tendríamos $y \sim x$.

   b) $a < y < b < x$ o $y < a < b < x$: $(a, b) \subseteq (a, x)$ y tendríamos $a \sim b$.

3. $x < a$ y $b < y$:

   Esto es contradictorio, ya que, por una parte, $y < x$ pero por otra $x < a < b < y$.

4. $x < a$ y $y < b$:

   Como $a < b$ y $x > y$, tendríamos $y < x < a < b$ de modo que $(a,b) \subseteq (y,b)$ y entonces $a \sim b$ que no es posible si $I \neq J$.

Cada $I \in X$ es separable. Para demostrarlo, consideramos $\mathscr{M}$ la colección disjunta y maximal de intervalos abiertos no vacíos de la forma (x,y) con $x, y \in I$ $(x \sim y)$. $\mathscr{M}$ es numerable ya que Y tiene la c.c.c., así que podemos escribir $\mathscr{M} = \{(x_n, y_n) \mid n \in \omega\}$. Como $x_n \sim y_n$, (x_n, y_n) es separable, definimos D_n como un subconjunto numerable denso de (x_n, y_n). Sea $D = \bigcup_n D_n$, D es denso en $\bigcup_n (x_n, y_n)$. Si $z \in I$ y $z \in (x,y) \subseteq I$, entonces (x,y) interseca algún (x_n, y_n) por la maximalidad de $\mathscr{M}$. Esto implica que $z \in D$ a no ser que z sea el primer o el último elemento de I. De este modo, D juntamente con el primer y último elemento de I (si I tiene primer o último elemento) forma un subconjunto de I denso y numerable, es decir, I es separable.

Veamos (1). Para ver que X es denso en el orden, supongamos que $I < J$ pero que $(I,J) = \emptyset$. Escogemos $x \in I$ y $y \in J$, entonces $x, y \in I \cup J$ y $x < y$ y, por tanto, $(x,y) \subseteq I \cup J$ (por la convexidad de los elementos de X), que es separable (por ser la unión de conjuntos separables numerables) y, por tanto $x \sim y$, que contradice que $I < J$.

Para ver (2), es suficiente ver que (I,J) no es separable cuando $I < J$, ya que todo abierto de X contiene algún intervalo de la forma (I,J). Supongamos que sí lo es, es decir, supongamos que tiene algún subconjunto denso numerable. Consideramos el conjunto $\{K_n \mid 2 \leq n < \omega\}$ denso en (I,J) con $K_0 = I$, $K_1 = J$. En Y, definimos D_n un subconjunto de K_n numerable y denso, entonces $\bigcup_n D_n$ es denso en $\bigcup\{L \mid I \leq L \leq J\}$, así que los puntos de I son equivalentes a puntos de J, una contradicción.

Comprobemos ahora que X es una recta de Suslin. Claramente (2) implica que X no es separable. Veamos que X tiene la c.c.c.

Supongamos que no es así, es decir que existe una familia no numerable de subconjuntos de X abiertos, disjuntos dos a dos y no vacíos, tendríamos entonces intervalos abiertos disjuntos en X, (I_α, J_α) donde $\alpha < \omega_1$. Escogiendo $x_\alpha \in I_\alpha$ e $y_\alpha \in J_\alpha$, entonces (x_α, y_α) sería una familia de elementos disjuntos dos a dos y no vacíos en Y, contradiciendo la c.c.c. de Y.

□

Veamos ahora la equivalencia entre la existencia de árboles ω_1-Suslin y la existencia de rectas de Suslin. Para ello recordemos primero el concepto de clausura topológica, puesto que aparecerá en la demostración.

Definición 4.14. *Sea X un espacio topológico, definimos la clausura de un subespacio $Y \subseteq X$ y lo denotamos* $\mathrm{cl}(Y)$ *o bien* $\bar{Y}$ *como:*

$$\mathrm{cl}(Y) = \bar{Y} = \{x \in X \mid \forall V (x \in V \subseteq X \rightarrow V \cap Y \neq \emptyset)\}.$$

Teorema 4.15. *Existe un árbol ω_1-Suslin si y solo si existe una recta de Suslin.*

Demostración. Supongamos primero que existe un árbol ω_1-Suslin.

Tenemos entonces un árbol T tal que $|T| = \omega_1$ y toda cadena y anticadena de T tienen cardinalidad menor que ω_1. Por el lema 3.7, podemos suponer que T es un árbol bien podado. Definimos el conjunto

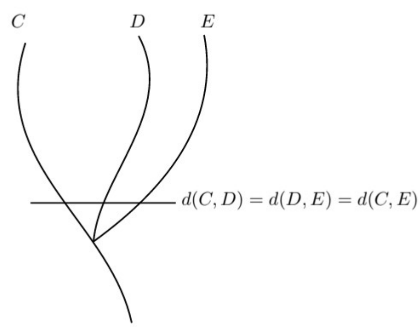
$$L = \{C \subseteq T \mid C \text{ es una cadena maximal en } T\}.$$

Si $C \in L$, entonces existe un ordinal $h(C)$ tal que C contiene exactamente un elemento de $\mathrm{Lev}_\alpha(T)$ para $\alpha < h(C)$ y no contiene elementos de $\mathrm{Lev}_\alpha(T)$ para $\alpha \geq h(C)$. Como T es un árbol ω_1-Suslin, toda cadena tiene cardinalidad menor que ω_1 y, por lo tanto $h(C) < \omega_1$. Como T es un árbol bien podado, una cadena maximal no puede tener un elemento mayor y, por tanto, cada $h(C)$ es un ordinal límite. Ahora, para $\alpha < h(C)$, definimos $C(\alpha)$ como el elemento de C en el nivel α.

Ordenamos L de la siguiente forma: fijamos $(T, \prec)$ un conjunto totalmente ordenado arbitrario. Si $C, D \in L$ y $C \neq D$, definimos $d(C, D)$ como el menor α tal que $C(\alpha) \neq D(\alpha)$. Observamos que entonces $d(C, D) < \text{mín}(h(C), h(D))$. Definimos $C \lhd D$ si y solo si $C(d(C, D)) \prec D(d(C, D))$ (relación definida para $C \neq D$).

Veamos que $(L, \lhd)$ es un conjunto totalmente ordenado. La antisimetría y la totalidad son directas por la totalidad de la relación $\prec$. Veamos la transitividad. Sean $C, D, E \in L$ distintas tales que $C \lhd D$ y $D \lhd E$ (claramente debemos tener $C \neq D$ y $D \neq E$ por como hemos definido el orden $\lhd$, tampoco se puede dar $C = E$ ya que en este caso tendríamos $C \lhd D$ y $D \lhd C$ que no es posible, ya que esto resultaría en $C(d(C, D)) = D(d(C, D))$ que contradice la definición de d) tenemos entonces $C(d(C, D)) \prec D(d(C, D))$ y $D(d(D, E)) \prec E(d(D, E))$. Queremos ver que $C(d(C, E)) \prec E(d(C, E))$. Separamos por casos:

1. $d(C, D) = d(D, E) = d(C, E)$:

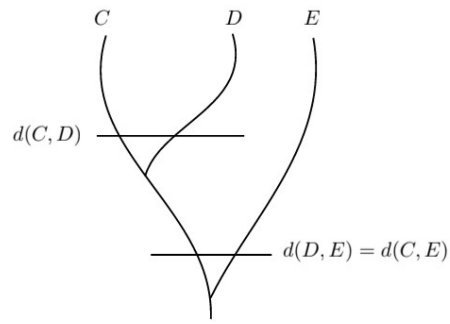


Como $C \lhd D$, $C(d(C, D)) \prec D(d(C, D))$ y como $D \lhd E$, $D(d(D, E)) \prec E(d(D, E))$. Entonces,

$$C(d(C, E)) = C(d(C, D)) \prec D(d(C, D)) = D(d(D, E)) \prec E(d(D, E)) = E(d(C, E)),$$

de modo que $C \lhd E$.

2. $d(C, D) > d(D, E) = d(C, E)$:

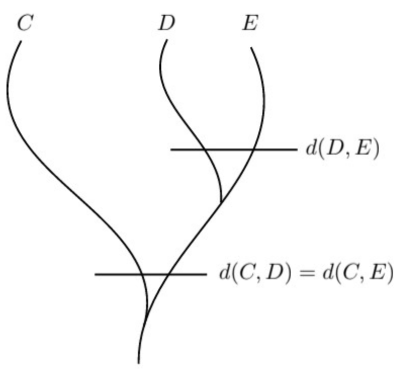


Como $C \lhd D$, $C(d(C,D)) \prec D(d(C,D))$ y como $D \lhd E$, $D(d(D,E)) \prec E(d(D,E))$. Entonces,

$$C(d(C,E)) = D(d(D,E)) \prec E(d(D,E)) = E(d(C,E)),$$

de modo que $C \lhd E$.

3. $d(C, D) = d(C, E) < d(D, E)$:

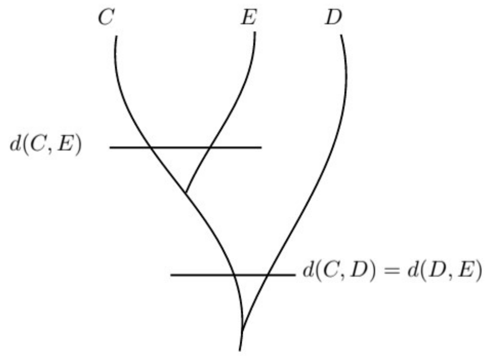


Como $C \lhd D$, $C(d(C,D)) \prec D(d(C,D))$ y como $D \lhd E$, $D(d(D,E)) \prec E(d(D,E))$. Entonces,

$$C(d(C,E)) = C(d(C,D)) \prec D(d(C,D)) = E(d(C,D)) = E(d(C,E)),$$

de modo que $C \lhd E$.

4. $d(C, D) = d(D, E) < d(C, E)$:



Como $C \lhd D$, $C(d(C, D)) \prec D(d(C, D))$ y como $D \lhd E$, $D(d(D, E)) \prec E(d(D, E))$.

Entonces,

$$D(d(C, D)) = D(d(D, E)) \prec E(d(D, E)) = C(d(D, E)) = C(d(C, D)).$$

En este caso tenemos $C(d(C, D)) \prec D(d(C, D))$ y $D(d(C, D)) \prec C(d(C, D))$, de modo que tendríamos $C(d(C, D)) = D(d(C, D))$, que no es posible por la definición de d.

Tenemos entonces que $(L, \lhd)$ es un conjunto totalmente ordenado.

Veamos que $(L, \lhd)$ es una recta de Suslin.

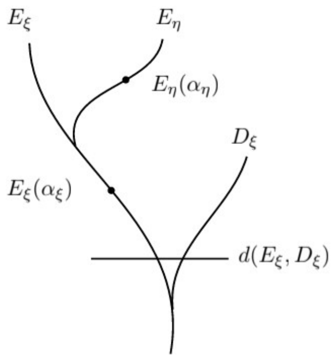
Primero, para ver que L tiene la c.c.c., supongamos que $\{(C_\xi, D_\xi) \mid \xi < \omega_1\}$ es una familia de intervalos abiertos disjuntos dos a dos, no vacíos. Tomamos $E_\xi \in (C_\xi, D_\xi)$ y por ser $h(E_\xi)$ un ordinal límite, podemos tomar α_ξ de manera que

$$\max(d(C_\xi, E_\xi), d(E_\xi, D_\xi)) < \alpha_\xi < h(E_\xi).$$

Entonces, veamos que $\{E_\xi(\alpha_\xi) \mid \xi < \omega_1\}$ formaría una anticadena en T. Sean $\xi, \eta < \omega_1$. Tenemos que ver que $E_\xi(\alpha_\xi)$ y $E_\eta(\alpha_\eta)$ no son comparables. Supongamos que sí lo son, es decir, suponemos sin pérdida de generalidad que $E_\xi(\alpha_\xi) \leq E_\eta(\alpha_\eta)$. Como los intervalos (C_ξ, D_ξ) y (C_η, D_η) son disjuntos, podemos distinguir dos casos:

1. $C_\xi \lhd E_\xi \lhd D_\xi \trianglelefteq C_\eta \lhd E_\eta \lhd D_\eta$:

   Como $E_\xi(\alpha_\xi) \leq E_\eta(\alpha_\eta)$ y $\alpha_\xi > d(E_\xi, D_\xi)$, tenemos:

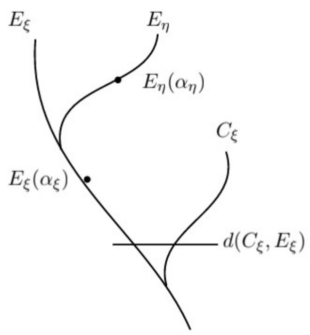


Por una parte, tenemos $E_\xi \lhd D_\xi$. Por otra parte, como $D_\xi \lhd E_\eta$, entonces

$$D_\xi(d(E_\xi, D_\xi)) = D_\xi(d(D_\xi, E_\eta)) \prec E_\eta(d(D_\xi, E_\eta)) = E_\xi(d(D_\xi, E_\eta)) = E_\xi(d(D_\xi, E_\xi)).$$

Tendríamos entonces $E_\xi \lhd D_\xi$ y $D_\xi \lhd E_\xi$ que es una contradicción.

2. $C_\eta \lhd E_\eta \lhd D_\eta \unlhd C_\xi \lhd E_\xi \lhd D_\xi$:
   Como $E_\xi(\alpha_\xi) \leq E_\eta(\alpha_\eta)$ y $\alpha_\xi > d(C_\xi, E_\xi)$, tenemos:



Por una parte, tenemos $E_\eta \lhd C_\xi$. Por otra parte, como $C_\xi \lhd E_\xi$, entonces

$$C_\xi(d(E_\eta, C_\xi)) = C_\xi(d(C_\xi, E_\xi)) \prec E_\xi(d(C_\xi, E_\xi)) = E_\xi(d(C_\xi, E_\eta)) = E_\eta(d(E_\eta, C_\xi)).$$

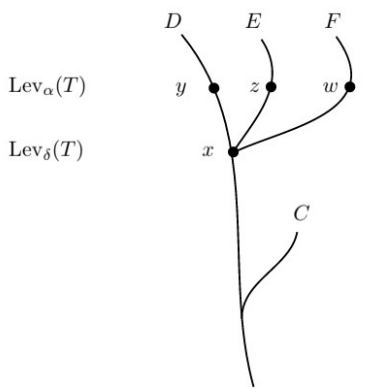
Tendríamos entonces $E_\eta \lhd C_\xi$ y $C_\xi \lhd E_\eta$ que es una contradicción.

El hecho de que $\{E_\xi(\alpha_\xi) \mid \xi < \omega_1\}$ forme una anticadena en T contradice que T sea un árbol ω_1-Suslin, ya que $\{E_\xi(\alpha_\xi) \mid \xi < \omega_1\}$ tiene cardinalidad ω_1 y en un árbol ω_1-Suslin, toda anticadena debe tener cardinalidad menor que ω_1. Esto finaliza la demostración de que L tiene la c.c.c.

Para demostrar que L no es separable (es decir, que no tiene ningún subconjunto denso numerable), veamos que es suficiente ver que para cada $\delta < \omega_1$, $\{C \mid h(C) < \delta\}$ no es denso en L.

Para cualquier A subconjunto de L, definimos $\delta = \sup\{h(C) \mid C \in A\} + 1$. Entonces, $A \subseteq \{C \mid h(C) < \delta\}$. De este modo, si $\{C \mid h(C) < \delta\}$ no es denso, A tampoco será denso y, por lo tanto, es suficiente ver que para cada $\delta < \omega_1$, $\{C \mid h(C) < \delta\}$ no es denso en L. Veamos ahora esto último.

Sea $x \in \mathrm{Lev}_\delta(T)$, por el lema 3.12, $\exists \alpha > \delta$ $(|\{y \in \mathrm{Lev}_\alpha \mid y > x\}| \geq 3)$, es decir, existe un $\alpha > \delta$ con tres elementos distintos $y, z, w \in \mathrm{Lev}_\alpha(T)$ por encima de x. Sean D, E, F elementos de L que contienen a y, z, w respectivamente. Supongamos que están ordenados de forma que $D \lhd E \lhd F$, entonces (D, F) es un intervalo no vacío (ya que $E \in (D, F)$), pero como $x \in D \cap F$, (D, F) no contiene ningún $C \in L$ con $h(C) < \delta$, ya que si así fuese, tendríamos entonces $D \lhd C \lhd F$. Por una parte $D \lhd C$, por otra parte, como $C \lhd F$, $d(D, C) = d(C, F)$ y $D(d(C, D)) = F(d(C, F))$, tendríamos $C(d(C, D)) = C(d(C, F)) \prec F(d(C, F)) = D(d(C, D))$ y, por lo tanto, $C \lhd D$. Entonces se concluye $D(d(D, C)) = C(d(D, C))$ que no es posible por la definición de $d(D, C)$. Visualicémoslo con el dibujo.



Queda visto entonces que $(L, \lhd)$ es una recta de Suslin.

Veamos ahora la otra implicación del enunciado del teorema. Para ello, supongamos que existe una recta de Suslin, $(L, \lhd)$, es decir, que $(L, \lhd)$ es un conjunto totalmente ordenado que tiene la c.c.c. pero que no es separable.

Por el teorema 4.13, podemos suponer que L es denso en el orden y que ningún subconjunto de L abierto no vacío es separable. Sea $\mathscr{I}$ el conjunto de todos los intervalos de L no vacíos, los elementos de $\mathscr{I}$ son de la forma (a, b) tal que $a \lhd b$. $\mathscr{I}$ es preordenado por inclusión inversa: $I \leq J$ si y solo si $J \subseteq I$. Debemos ahora definir un subconjunto $T \subseteq \mathscr{I}$ de manera que $(T, \leq)$ sea un árbol de Suslin.

Para definir T, primero vamos a encontrar $\mathscr{I}_\beta \subseteq \mathscr{I}$ para $\beta < \omega_1$ de manera que para cada β:

(1) Los elementos de $\mathscr{I}_\beta$ son disjuntos dos a dos.

(2) $\bigcup \mathscr{I}_\beta$ es denso en L.

(3) Si $\alpha < \beta$, $I \in \mathscr{I}_\alpha$ y $J \in \mathscr{I}_\beta$ entonces:

    (a) $I \cap J = \emptyset$, o bien

    (b) $J \subseteq I$ y $I \setminus \mathrm{cl}(J) \neq \emptyset$.

Supondremos primero que es posible definir $(\mathscr{I}_\beta \mid \beta < \omega_1)$ y luego veremos su construcción.

Definimos $T = \bigcup_\beta \mathscr{I}_\beta$. Veamos que $(T, \leq)$ es un árbol:

1. $(T, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado por serlo la inclusión.

2. $\forall\, I \in T$, $T_I = \{J \in T \mid J \supset I\}$ está bien ordenado por $\supset$:

   Para ver la totalidad de $(T_I, \supset)$, cogemos dos elementos distintos $J, K \in T_I$. De este modo, como $J, K \in T_I$ tenemos que $J, K \in T$, de modo que $J \in \mathscr{I}_\alpha$ y $K \in \mathscr{I}_\beta$ para algunos $\alpha, \beta < \omega_1$ y además $J, K \supset I$. Por esto último, $J \cap K \neq \emptyset$ y, por lo tanto, por (1), $\alpha \neq \beta$. De este modo, si $\alpha < \beta$ por (3) y por el hecho que $J \cap K \neq \emptyset$, tenemos que $K \subset J$ (análogo si $\beta < \alpha$). Además, todo subconjunto de T_I no vacío tiene elemento mínimo debido a que $I \subset J$ $\forall J \in T_I$.

Veamos ahora un resultado previo que nos ayudará a ver que $\forall \beta < \omega_1(\mathscr{I}_\beta = \mathrm{Lev}_\beta(T))$.

Si $\alpha < \beta$, $\forall I \in \mathscr{I}_\beta$ $\exists J \in \mathscr{I}_\alpha$ tal que $I \subset J$. Veámoslo:

Sea $\alpha < \beta$ y $I \in \mathscr{I}_\beta$, como $\bigcup \mathscr{I}_\alpha$ es denso en L, entonces existe un $x \in I \cap \bigcup \mathscr{I}_\alpha$, de modo que hay un $J \in \mathscr{I}_\alpha$ tal que $x \in J$. De este modo, $x \in I \cap J$ y, por tanto, $I \cap J \neq \emptyset$ y por (3), $I \subseteq J$ y $J \setminus \mathrm{cl}(I) \neq \emptyset$, de modo que $I \neq J$ y, por tanto, $I \subset J$.

Estudiemos ahora que $\mathscr{I}_\beta = \mathrm{Lev}_\beta(T)$ viendo las dos inclusiones. Veamos primero que $\forall \beta < \omega_1(\mathscr{I}_\beta \subseteq \mathrm{Lev}_\beta(T))$.

Sea $\alpha < \omega_1$ y $I \in \mathscr{I}_\alpha$, por la afirmación anterior existe $(I_\beta \mid \beta < \alpha)$ tal que $I_\beta \in \mathscr{I}_\beta$ y $I_\beta \supset I_{\beta'}$ siempre que $\beta < \beta' < \alpha$ y además $I \subset I_\beta$ $\forall \beta < \alpha$. La existencia de esta cadena muestra que $\mathrm{ht}(I, T) \geq \alpha$. Veámoslo:

Tenemos $\mathrm{ht}(I, T) = \mathrm{OT}(\{J \mid J < I\}) = \mathrm{OT}(W)$ definiendo $W = \{J \mid J < I\} = \{J \mid J \supset I\}$. Existe entonces una función $f : \alpha \to W$ estrictamente creciente, y $W \cong \mathrm{OT}(W) = \mathrm{ht}(I, T)$, de modo que la función $g : \alpha \to \mathrm{ht}(I, T)$ también es estrictamente creciente. Ahora, para cualesquiera α, β, si tenemos una función $f : \alpha \to \beta$ estrictamente creciente, entonces $\alpha \leq \beta$ ya que si fuese $\beta < \alpha$ tendríamos $f : \alpha \to \alpha$ estrictamente creciente y existiría un $\gamma < \alpha$ tal que $f(\delta) < \gamma$ para todo $\delta < \gamma$. Como $f(\gamma) \geq \gamma$, no puede ser que $f(\gamma) < \gamma$. De este modo, como $g : \alpha \to \mathrm{ht}(I, T)$ es estrictamente creciente, entonces $\alpha \leq \mathrm{ht}(I, T)$.

Supongamos ahora que $\mathrm{ht}(I, T) > \alpha$. Entonces existe un intervalo J tal que $I > J$ y $J > I_\beta$ para todo $\beta < \alpha$. Como $J \subset I_\beta$ para $\beta < \alpha$, entonces $J \notin \mathscr{I}_\beta$ (puesto que los elementos de $\mathscr{I}_\beta$ son disjuntos y $I_\beta \in \mathscr{I}_\beta$) y como $I \subset J$, entonces $J \notin \mathscr{I}_\alpha$ (puesto que los elementos de $\mathscr{I}_\alpha$ son disjuntos y $I \in \mathscr{I}_\alpha$). De este modo, existe un $\eta > \alpha$ tal que $J \in \mathscr{I}_\eta$. Como $I \cap J \neq \emptyset$, entonces por (3) tendríamos $J \subset I$ pero esto contradice que $I \subset J$. De este modo, $\mathrm{ht}(I, T) = \alpha$, es decir, $I \in \mathrm{Lev}_\alpha(T)$, como queríamos ver.

Veamos ahora la otra inclusión, es decir, demostremos que $\forall \beta < \omega_1(\mathscr{I}_\beta \supseteq \mathrm{Lev}_\beta(T))$.

Sea $I \in \mathrm{Lev}_\alpha(T)$ pero $I \notin \mathscr{I}_\alpha$. Entonces $I \in \mathscr{I}_\beta$ para algún $\beta \neq \alpha$ y, por lo tanto, $I \in \mathscr{I}_\beta \subseteq \mathrm{Lev}_\beta(T)$ por la otra inclusión ya vista. De este modo, $I \in \mathrm{Lev}_\alpha(T)$ y

$I \in \mathrm{Lev}_\beta(T)$ que no es posible, ya que los niveles de un árbol son disjuntos. Por tanto, si $I \in \mathrm{Lev}_\alpha(T)$ entonces $I \in \mathscr{I}_\alpha$.

Sea $A \subseteq T$ una anticadena en T, entonces los elementos de A son disjuntos dos a dos (si tuviésemos $I, J \in A$, por ser A una anticadena $I \not\subseteq J \wedge J \not\subseteq I$ y, por lo tanto, I y J son disjuntos), por lo tanto, debido a que $T \subseteq \mathscr{I}$ y $\mathscr{I}$ es el conjunto de todos los intervalos de L, como L tiene la c.c.c., $|A| < \omega_1$.

Por otra parte, T no puede tener cadenas no numerables, puesto que si $\{I_\xi \mid \xi < \omega_1\}$ fuese una cadena no numerable, podríamos coger $\xi, \eta < \omega_1$ tales que $\xi < \eta \to I_\xi \leq I_\eta$. Entonces por (3), como $I_\xi \cap I_\eta \neq \emptyset$ tendríamos,

$$\xi < \eta \to (I_\eta \subseteq I_\xi \wedge I_\xi \setminus \mathrm{cl}(I_\eta) \neq \emptyset),$$

y $\{I_\xi \setminus \mathrm{cl}(I_{\xi+1}) \mid \xi < \omega_1\}$ sería una familia no numerable de subconjuntos de L, puesto que $\{I_\xi \mid \xi < \omega_1\}$ es una cadena no numerable. Además, veamos que los elementos de este conjunto son disjuntos dos a dos: sean $I, J \in \{I_\xi \setminus \mathrm{cl}(I_{\xi+1}) \mid \xi < \omega_1\}$, entonces, $I = I_\xi \setminus \mathrm{cl}(I_{\xi+1})$ y $J = I_\eta \setminus \mathrm{cl}(I_{\eta+1})$ con $\xi, \eta < \omega_1$ y $\xi \neq \eta$. Podemos suponer $\xi < \eta$ sin pérdida de generalidad y tenemos entonces $\xi < \xi + 1 \leq \eta < \eta + 1$ de manera que $I_{\eta+1} \subseteq I_\eta \subseteq I_{\xi+1} \subseteq I_\xi$. Entonces, $I \cap J = (I_\xi \setminus \mathrm{cl}(I_{\xi+1})) \cap (I_\eta \setminus \mathrm{cl}(I_{\eta+1})) = (I_\eta \cap I_\xi) \setminus (\mathrm{cl}(I_{\eta+1}) \cup \mathrm{cl}(I_{\xi+1})) = I_\eta \setminus \mathrm{cl}(I_{\xi+1}) \subseteq I_{\xi+1} \setminus \mathrm{cl}(I_{\xi+1}) = \emptyset$.

Además, todo elemento de $\{I_\xi \setminus \mathrm{cl}(I_{\xi+1}) \mid \xi < \omega_1\}$ es no vacío por (3).

Hemos encontrado entonces una familia no numerable de subconjuntos de L no vacíos, disjuntos dos a dos, contradiciendo la c.c.c. de L. De este modo, toda cadena tiene cardinalidad menor que ω_1.

Finalmente, $|T| = \omega_1$, ya que (2) implica en particular que $\forall \beta < \omega_1 (\mathscr{I}_\beta \neq \emptyset)$.

De este modo, T es un árbol ω_1-Suslin.

Falta ver ahora que es posible definir $(\mathscr{I}_\beta | \beta < \omega_1)$. Lo haremos por inducción. Definimos $\mathscr{I}_0$ como cualquier subfamilia de $\mathscr{I}$ disjunta y maximal (observemos que podemos afirmar la existencia de una subfamilia maximal, puesto que toda cadena es numerable y, por tanto, podemos aplicar el lema de Zorn). Entonces, $\bigcup \mathscr{I}_0$ es denso en L, ya que si no lo fuese, existiría algún punto $x \in L$ que no está en ningún intervalo abierto de $\mathscr{I}_0$ de manera que surgiría una contradicción con la maximalidad de $\mathscr{I}_0$, ya que no podemos agregar un nuevo intervalo abierto que contenga a x sin violar la maximalidad.

Ahora, dado $\mathscr{I}_\alpha$, debemos definir inductivamente $\mathscr{I}_{\alpha+1}$ y $\mathscr{I}_\gamma$ con $\gamma > \alpha$ límite.

Veamos primero la construcción para el caso sucesor. Primero, para $I \in \mathscr{I}_\alpha$, definimos como $\mathscr{K}_I$ una subfamilia disjunta maximal de

$$\{K \in \mathscr{I} \mid K \subseteq I \wedge I \setminus \mathrm{cl}(K) \neq \emptyset\}.$$

Existe una subfamilia disjunta maximal del conjunto por el lema de Zorn, ya que toda cadena del conjunto está acotada por I. Definimos entonces $\mathscr{I}_{\alpha+1} = \bigcup \{\mathscr{K}_I \mid I \in \mathscr{I}_\alpha\}$. Comprobemos que esta definición cumple las condiciones (1)-(3).

Para ver (1) debemos ver que los elementos de $\mathscr{I}_{\alpha+1}$ son disjuntos dos a dos. Sean $I, J \in \mathscr{I}_{\alpha+1}$, hay dos casos:

1. $I, J \in \mathscr{K}_K$ para un $K \in \mathscr{I}_\alpha$. Por definición, $\mathscr{K}_K$ es una familia disjunta y, por tanto, I y J son disjuntos.

2. $I \in \mathscr{K}_K$ y $J \in \mathscr{K}_L$ con $K, L \in \mathscr{I}_\alpha$ distintos. Como $K, L \in \mathscr{I}_\alpha$, por (1) sabemos que K y L son disjuntos. Como $I \in \mathscr{K}_K$, $I \subseteq K$ y como $J \in \mathscr{K}_L$, $J \subseteq L$. Entonces, como K y L son disjuntos, también lo son I y J.

Veamos (2), es decir, que $\bigcup \mathscr{I}_{\alpha+1}$ es denso en L. Sabemos que $\bigcup \mathscr{I}_\alpha$ es denso en L y, por lo tanto, $\forall I \in \mathscr{I}\ \exists J \in \bigcup \mathscr{I}_\alpha$ tal que $I \cap J \neq \emptyset$. Tomamos ahora $K \subset I \cap J$. Claramente $K \subset I \cap J \subseteq J$ y además, $J \setminus \mathrm{cl}(K) \neq \emptyset$. De este modo, $K \in \mathscr{K}_J \subseteq \bigcup \mathscr{I}_{\alpha+1}$. Por otra parte, $K \cap I \neq \emptyset$. Hemos visto entonces que para todo $I \in \mathscr{I}$, $I \cap K \neq \emptyset$ con $K \in \bigcup \mathscr{I}_{\alpha+1}$, de modo que $\bigcup \mathscr{I}_{\alpha+1}$ es denso en L.

Para ver (3), veamos que si tenemos $\beta < \alpha + 1$, $I \in \mathscr{I}_\beta$, $J \in \mathscr{I}_{\alpha+1}$ entonces:

(a) $I \cap J = \emptyset$, o bien

(b) $J \subseteq I \wedge I \setminus \mathrm{cl}(J) \neq \emptyset$.

Supongamos primero el caso $\beta < \alpha$. Como $J \in \mathscr{I}_{\alpha+1}$, $J \in \mathscr{K}_L$ para algún $L \in \mathscr{I}_\alpha$. Recordemos que $\mathscr{K}_L$ es una subfamilia disjunta maximal de $\{K \in \mathscr{I} \mid K \subseteq L \wedge L \setminus \mathrm{cl}(K) \neq \emptyset\}$. Entonces, $J \subseteq L \in \mathscr{I}_\alpha$ y $L \setminus \mathrm{cl}(J) \neq \emptyset$. Como $I \in \mathscr{I}_\beta$ y $L \in \mathscr{I}_\alpha$ tenemos:

(a) $I \cap L = \emptyset$, o bien

(b) $L \subseteq I \wedge I \setminus \mathrm{cl}(L) \neq \emptyset$.

En el primer caso, tenemos $J \subseteq L$ y $I \cap L = \emptyset$ de modo que $J \cap I = \emptyset$. En el segundo caso, $J \subseteq L$ y como $L \subseteq I$, entonces $J \subseteq I$. Por otra parte, $L \setminus \mathrm{cl}(J) \subseteq I \setminus \mathrm{cl}(J)$ y como $L \setminus \mathrm{cl}(J) \neq \emptyset$, entonces $I \setminus \mathrm{cl}(J) \neq \emptyset$.

Veamos ahora el caso $\beta = \alpha$. Tenemos $I \in \mathscr{I}_\alpha$ y $J \in \mathscr{I}_{\alpha+1}$. Como $J \in \mathscr{I}_{\alpha+1}$, $J \in \mathscr{K}_L$ para alguna $L \in \mathscr{I}_\alpha$. Entonces, $J \subseteq L \in \mathscr{I}_\alpha$ y $L \setminus \mathrm{cl}(J) \neq \emptyset$. Como $I, L \in \mathscr{I}_\alpha$, entonces $I \cap L = \emptyset$ y tenemos entonces $J \subseteq L$ y $I \cap L = \emptyset$ de modo que $J \cap I = \emptyset$.

Hemos visto entonces que siempre se cumple (a) o (b), de modo que se satisface (3) para $\mathscr{I}_{\alpha+1}$. Esto finaliza la construcción de $\mathscr{I}_{\alpha+1}$.

Debemos definir ahora $\mathscr{I}_\gamma$ con $\gamma > \alpha$ límite. Para ello suponemos que hemos definido $\mathscr{I}_\alpha$ para $\alpha < \gamma$ cumpliendo (1)-(3) para $\alpha < \beta < \gamma$.

Definimos $\mathscr{I}_\gamma$ como una subfamilia de $\mathscr{K}$ maximal disjunta donde

$$\mathscr{K} = \{K \in \mathscr{I} \mid \forall \alpha < \gamma \forall I \in \mathscr{I}_\alpha [I \cap K = \emptyset \vee (K \subseteq I \wedge I \setminus \mathrm{cl}(K) \neq \emptyset)]\}.$$

Podemos afirmar la existencia de esta subfamilia maximal gracias al lema de Zorn, puesto que toda cadena de $\mathscr{K}$ está acotada por I.

Notemos que (1) y (3) se ven directos en $\mathscr{I}_\gamma$, por su definición. Veamos entonces que se satisface también (2).

Que $\bigcup \mathscr{I}_\gamma$ sea denso en L se sigue de la maximalidad de $\mathscr{I}_\gamma$, si podemos demostrar que para todo $J \in \mathscr{I}$, $\exists K \in \mathscr{K} (K \subseteq J)$. Veámoslo:

Sea E el conjunto de los extremos, derecho e izquierdo de todos los intervalos de $\bigcup_{\alpha<\gamma} \mathscr{I}_\alpha$. E es numerable por tener L la c.c.c. y J no es separable por ser un intervalo. Entonces, podemos fijar $K_1 \in \mathscr{I}$ con $K_1 \subseteq J$ y $K_1 \cap E = \emptyset$. Si $I \in \bigcup_{\alpha<\gamma} \mathscr{I}_\alpha$, entonces K_1

no contiene los puntos finales de I, así que $I \cap K_1 = \emptyset$ o $K_1 \subseteq I$. Tomamos ahora $K \in \mathscr{I}$ con $K \subseteq K_1$ y $K_1 \setminus \mathrm{cl}(K) \neq \emptyset$. Entonces, $K \subseteq J$ y $K \in \mathscr{K}$, como queríamos ver.

$\square$

Hemos visto en este capítulo la equivalencia entre la existencia de árboles ω_1-Suslin y la existencia de rectas de Suslin de modo que el estudio de la hipótesis de Suslin equivale al estudio de la existencia de árboles ω_1-Suslin. Es decir, la no existencia de árboles ω_1-Suslin implica que si tenemos un conjunto X totalmente ordenado, denso, completo y sin extremos, y que tiene la c.c.c., entonces, X es isomorfo a la recta real, $\mathbb{R}$.

5. Axioma de Martin (MA)

Definamos primero los conceptos de denso y de filtro en un preorden, necesarios para enunciar el axioma de Martin.

Definición 5.1. *Sea* $(\mathbb{P}, \leq)$ *un preorden,* $D \subseteq \mathbb{P}$ *es denso en* $\mathbb{P}$ *si* $\forall p \in \mathbb{P}\ \exists q \leq p(q \in D)$.

Observación 5.2. Observemos que hemos introducido una nueva definición de denso. Debemos tener en cuenta que este concepto es distinto al definido para conjuntos totalmente ordenados y para topologías.

Definición 5.3. *Sea* $(\mathbb{P}, \leq)$ *un preorden,* $G \subseteq \mathbb{P}$ *es un filtro en* $\mathbb{P}$ *si:*

(a) $\forall p, q \in G\ \exists r \in G(r \leq p \wedge r \leq q)$ *y,*

(b) $\forall p \in G\ \forall q \in \mathbb{P}(p \leq q \to q \in G)$.

Definición 5.4. $\mathrm{MA}(\kappa)$ *es la afirmación: Sea* $(\mathbb{P}, \leq)$ *un preorden que tiene la c.c.c. y es no vacío. Sea* $\mathscr{D}$ *una familia de* $\leq \kappa$ *subconjuntos densos de* $\mathbb{P}$*, entonces hay un filtro* G *en* $\mathbb{P}$ *tal que* $\forall D \in \mathscr{D}(G \cap D \neq \emptyset)$.

Definición 5.5. MA *es la afirmación:* $\forall \kappa < 2^\omega(\mathrm{MA}(\kappa))$.

Observación 5.6. Es conocida la consistencia de MA con ZFC, es decir, si Con(ZFC), entonces Con(ZFC+MA). De hecho, de forma más general, MA es independiente de ZFC.

Veamos un primer resultado sobre $\mathrm{MA}(2^\omega)$.

Lema 5.7. $\mathrm{MA}(2^\omega)$ *es falso.*

Demostración. Sea $\mathbb{P}$ el conjunto de las funciones parciales finitas de ω a 2, es decir,

$$\mathbb{P} = \{p \mid p \subseteq \omega \times 2 \wedge |p| < \omega \wedge p \text{ es una función}\}.$$

Sean $p, q \in \mathbb{P}$, definimos $p \leq q$ si y solo si $q \subseteq p$ (si y solo si p extiende q como una función, es decir, p y q coinciden en el dominio de q).

Entonces, p y q son compatibles si y solo si $\exists r \in \mathbb{P}(r \leq p \wedge r \leq q)$, que es equivalente a $\exists r \in \mathbb{P}(p \subseteq r \wedge q \subseteq r)$. Esto equivale a $\exists r \in \mathbb{P}(p \text{ y } r \text{ coinciden en } \mathrm{dom}(p) \wedge q \text{ y } r \text{ coinciden en } \mathrm{dom}(q))$ que a su vez equivale a: p y q coinciden en $\mathrm{dom}(p) \cap \mathrm{dom}(q)$. En caso de que p y q sean compatibles, $p \cup q$ es una extensión de ambas p y q, es decir, $p \cup q \leq p$ y $p \cup q \leq q$.

Claramente $\mathbb{P}$ tiene la c.c.c., ya que toda anticadena A de $\mathbb{P}$ cumple $A \subseteq \mathbb{P}$, de modo que $|A| \leq |\mathbb{P}| = \omega$.

Sea G un filtro en $\mathbb{P}$, por definición, $\forall p, q \in G \exists r \in G(r \leq p \wedge r \leq q)$, de modo que los elementos de G son compatibles por pares y definiendo $f = f_G = \bigcup G$, entonces f_G es una función tal que $\mathrm{dom}(f_G) \subseteq \omega$.

Sea $h : \omega \to 2$, definimos los conjuntos $E_h = \{p \in \mathbb{P} \mid \exists n \in \mathrm{dom}(p)(p(n) \neq h(n))\}$ y $D_n = \{p \in \mathbb{P} \mid n \in \mathrm{dom}(p)\}$. Claramente E_h y D_n son densos en $\mathbb{P}$. Sea $\mathscr{D} = \{D_n \mid n \in \omega\} \cup \{E_h \mid h \in {}^\omega 2\}$, entonces $|\mathscr{D}| = 2^\omega$. Como G es un filtro en $\mathbb{P}$, suponiendo cierto $\mathrm{MA}(2^\omega)$, tendríamos que $G \cap D \neq \emptyset$ para todo $D \in \mathscr{D}$ y entonces f_G

sería una función de ω (ya que interseca todo D_n) a 2 que difiere de cada función de ω en 2 (ya que interseca cada E_h), que es imposible.

$\square$

Queremos estudiar ahora una serie de equivalencias de MA(κ). Para ello definamos primero el concepto de álgebra de Boole así como otros relacionados.

Definición 5.8. *Un álgebra de Boole es una estructura de la forma* $(A, \sqcap, \sqcup, \bar{}, 0, 1)$, *donde* $0, 1 \in A$, $\bar{}$ *es una aplicación de* A *en* A *y* $\sqcap$, $\sqcup$ *son operaciones binarias en* A *y se cumple:*

1. *Conmutatividad:* $a \sqcap b = b \sqcap a$ *y* $a \sqcup b = b \sqcup a$.
2. *Asociatividad:* $a \sqcap (b \sqcap c) = (a \sqcap b) \sqcap c$ *y* $a \sqcup (b \sqcup c) = (a \sqcup b) \sqcup c$.
3. *Distributividad:* $a \sqcap (b \sqcup c) = (a \sqcap b) \sqcup (a \sqcap c)$ *y* $a \sqcup (b \sqcap c) = (a \sqcup b) \sqcap (a \sqcup c)$.
4. *Idempotencia:* $a \sqcap a = a$ *y* $a \sqcup a = a$.
5. $\bar{\bar{a}} = a$.
6. $\bar{0} = 1$ *y* $\bar{1} = 0$.
7. $a \sqcap 0 = 0$ *y* $a \sqcap 1 = a$.
8. $a \sqcup 0 = a$ *y* $a \sqcup 1 = 1$.
9. $a \sqcup \bar{a} = 1$ *y* $a \sqcap \bar{a} = 0$.
10. $\overline{(a \sqcap b)} = (\bar{a} \sqcup \bar{b})$ *y* $\overline{(a \sqcup b)} = (\bar{a} \sqcap \bar{b})$.
11. $0 \neq 1$.

Definición 5.9. *Sea* $\mathscr{B}$ *un álgebra de Boole, definimos el orden de* $\mathscr{B}$ *de modo que sean* $a, b \in \mathscr{B}$, $a \leq b \leftrightarrow a \sqcup b = b \leftrightarrow a \sqcap b = a \leftrightarrow a \sqcap \bar{b} = 0 \leftrightarrow \bar{a} \sqcup b = 1$.

Definición 5.10. *Sea* $\mathscr{B}$ *un álgebra de Boole, decimos que* $\mathscr{B}$ *es completa si todo subconjunto* $S \subseteq \mathscr{B}$ *tiene tanto supremo como ínfimo en el orden* $\leq$ *definido.*

Veamos un resultado sobre álgebras de Boole.

Lema 5.11. *Sea* $(\mathbb{P}, \leq)$ *un conjunto parcialmente ordenado. Entonces hay un álgebra de Boole completa* $\mathscr{B}$ *y una función* $i : \mathbb{P} \to \mathscr{B} \setminus \{0\}$ *tal que:*

(1) $i(\mathbb{P})$ *es denso en* $\mathscr{B} \setminus \{0\}$.

(2) $\forall p, q \in \mathbb{P}(p \leq q \to i(p) \leq i(q))$.

(3) $\forall p, q \in \mathbb{P}(p \perp q \leftrightarrow i(p) \sqcap i(q) = 0)$.

Demostración. Sea $p \in \mathbb{P}$, definimos $N_p = \{q \in \mathbb{P} \mid q \leq p\}$. Cogemos como $\mathbb{P}$ la topología que tiene como base $\{N_p \mid p \in \mathbb{P}\}$. Los N_p forman una base, ya que si $q \in N_p$, entonces $q \leq p$ y $N_q = \{r \in \mathbb{P} \mid r \leq q\} \subseteq \{r \in \mathbb{P} \mid r \leq p\} = N_p$. Para cada p, N_p es el conjunto abierto más pequeño que contiene a p.

Definimos $\mathscr{B} = \text{ro}(\mathbb{P})$. Esto quiere decir que $\mathscr{B}$ es el álgebra regular abierta de $\mathbb{P}$, de modo que los elementos de $\mathscr{B}$ son los conjuntos $b \subseteq \mathbb{P}$ regulares (b es regular si y solo si

$b = \operatorname{int}\operatorname{cl}(b)$) y abiertos. Además, las operaciones algebraicas en $\operatorname{ro}(\mathbb{P})$ son $a \sqcap b = a \cap b$, $a \sqcup b = \operatorname{int}\operatorname{cl}(a \cup b)$ y $\bar{a} = \operatorname{int}(\mathbb{P} \setminus a)$. Observemos también que $a \leq b \leftrightarrow a \subseteq b$. Entonces, por como hemos definido $\mathscr{B}$, es un álgebra de Boole completa. Una demostración de que, para todo espacio topológico X, $\operatorname{ro}(X)$ es un álgebra de Boole completa se encuentra en [Hal74].

Por otra parte, definimos la función $i : \mathbb{P} \to \mathscr{B} \setminus \{0\}$ de modo que, para todo $p \in \mathbb{P}$, $i(p) = \operatorname{int}\operatorname{cl}(N_p)$.

Pasemos ahora a verificar las condiciones (1)-(3).

Para verificar (1), escogemos $b \in \mathscr{B} \setminus \{0\}$. Fijamos $p \in b$, entonces $N_p \subseteq b$, de modo que si $i(p) = \operatorname{int}\operatorname{cl}(N_p) \subseteq \operatorname{int}\operatorname{cl}(b) = b$.

La afirmación (2) es obvia, ya que si $p \leq q$, $N_p \subseteq N_q$. De este modo, $i(p) = \operatorname{int}\operatorname{cl}(N_p) \subseteq \operatorname{int}\operatorname{cl}(N_q) = i(q)$.

Para (3), veamos las dos implicaciones.

Supongamos primero que p y q son compatibles y fijamos $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \leq p$ y $r \leq q$. Por (2), $i(r) \leq i(p)$ e $i(r) \leq i(q)$, de modo que $i(p) \sqcap i(q) \neq 0$.

Supongamos ahora que $p \perp q$, es decir, p y q son incompatibles. Entonces $N_p \cap N_q = \emptyset$. Como N_q es abierto, $\operatorname{cl}(N_p) \cap N_q = \emptyset$, de modo que $i(p) \cap N_q = \operatorname{int}\operatorname{cl}(N_p) \cap N_q = \emptyset$. Como $i(p)$ es abierto, $i(p) \cap \operatorname{cl}(N_q) = \emptyset$, es decir $i(p) \sqcap i(q) = \operatorname{int}\operatorname{cl}(N_p) \sqcap \operatorname{int}\operatorname{cl}(N_q) = 0$.

$\square$

Definamos ahora una serie de conceptos topológicos que aparecerán en el siguiente teorema.

Definición 5.12. *Decimos que un espacio topológico X es de Hausdorff si para todo par de puntos x e y distintos de X existen abiertos U y V tales que $x \in U \subseteq X$ e $y \in V \subseteq X$ que cumplen $U \cap V = \emptyset$.*

Definición 5.13. *Un recubrimiento abierto de un subconjunto $A \subseteq X$ de un espacio topológico, es una familia de conjuntos abiertos $\{U_i\}_{i \in I}$ de X, tales que:*

$$A \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Definición 5.14. *Decimos que un espacio topológico X es compacto si para todo recubrimiento abierto de X, existe un subrecubrimiento finito del mismo.*

Definición 5.15. *Decimos que un espacio topológico X es regular si para cada conjunto cerrado F de X y cada punto $x \notin F$, existen abiertos U, V tales que $x \in U \subseteq X$ y $F \subseteq V \subseteq X$ de manera que $U \cap V = \emptyset$.*

Definición 5.16. *Definimos anticadena en un álgebra de Boole $\mathscr{B}$ como un conjunto $A \subseteq \mathscr{B} \setminus \{0\}$ tal que*

$$\forall a, b \in A (a \neq b \to a \sqcap b = 0).$$

Observación 5.17. La definición de anticadena en $\mathscr{B}$ es equivalente a la definición de anticadena para el preorden de $\mathscr{B} \setminus \{0\}$.

Veamos ahora las equivalencias de $\mathrm{MA}(\kappa)$.

Observación 5.18. En la siguiente demostración utilizaremos un teorema que veremos más adelante, el teorema 6.16, junto con los conceptos necesarios, que se encuentran en las definiciones 6.14 y 6.15. Este resultado únicamente nos ayuda a afirmar la existencia de un conjunto, así como información de su cardinalidad. Como de momento no es de más interés, se verá con detalle más adelante junto a otros resultados relacionados.

Teorema 5.19. *Para todo $\kappa \geq \omega$, son equivalentes:*

(a) MA(κ).

(b) MA(κ) *restringido a conjuntos parcialmente ordenados de cardinalidad menor o igual que κ.*

(c) MA(κ) *restringido a un álgebra de Boole completa.*

(d) Si X es cualquier espacio de Hausdorff, compacto, que tiene la c.c.c. y U_α son conjuntos densos abiertos para $\alpha < \kappa$, entonces $\bigcap_{\alpha<\kappa} U_\alpha \neq \emptyset$.

Demostración. Claramente la forma general de MA(κ) implica cualquiera de sus formas restringidas, de modo que ya tenemos que (a) implica tanto a (b) como a (c).

Veamos primero que (b) implica (a). Para ello, asumamos MA(κ) restringida a conjuntos parcialmente ordenados de cardinalidad menor o igual que κ.

Sea $(\mathbb{T}, <)$ un conjunto parcialmente ordenado de cardinalidad arbitraria que tenga la c.c.c., y $\mathscr{D}$ una familia $\leq \kappa$ subconjuntos de $\mathbb{T}$ densos, debemos encontrar un filtro $H \subseteq \mathbb{T}$ que interseque cada $D \in \mathscr{D}$ aplicando la forma restringida de MA(κ) a un suborden $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{T}$ adecuado con $|\mathbb{P}| \leq \kappa$. Veamos primero que podemos encontrar $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{T}$ de modo que:

(1) $|\mathbb{P}| \leq \kappa$.

(2) $D \cap \mathbb{P}$ es denso en $\mathbb{P}$ para todo $D \in \mathscr{D}$.

(3) Si $p, q \in \mathbb{P}$, p y q son compatibles en $\mathbb{P}$ si y solo si son compatibles en $\mathbb{T}$.

Para $D \in \mathscr{D}$, definimos $f_D : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ tal que

$$\forall p \in \mathbb{T}(f_D(p) \in D \wedge f_D(p) \leq p),$$

y $g : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ tal que

$$\forall p, q \in \mathbb{T}(p, q \text{ compatibles} \to g(p,q) \leq p \wedge g(p,q) \leq q).$$

De este modo, podemos escoger $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{T}$ tal que $|\mathbb{P}| \leq \kappa$ y $\mathbb{P}$ sea cerrado bajo g y bajo cada f_D (esto es posible por el teorema 6.16).

Entonces, veamos que $\mathbb{P}$ satisface (3) por ser $\mathbb{P}$ cerrado bajo g. Sean $p, q \in \mathbb{P}$ compatibles en $\mathbb{P}$, entonces $\exists r \in \mathbb{P}(r \leq p \wedge r \leq q)$, como $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{T}$, entonces $r \in \mathbb{P} \subseteq \mathbb{T}$ de modo que p, q son compatibles en $\mathbb{T}$. Supongamos ahora que $p, q \in \mathbb{P} \subseteq \mathbb{T}$ son compatibles en $\mathbb{T}$, entonces $\exists r \in \mathbb{P}(r \leq p \wedge r \leq q)$. Como $\mathbb{P}$ es cerrado bajo g, $g(p,q) \in \mathbb{P}$ y $g(p,q) \leq p \wedge g(p,q) \leq q$ por como hemos definido la función g. De este modo, p, q son compatibles en $\mathbb{P}$.

Por otra parte, veamos que se satisface (2) por ser $\mathbb{P}$ cerrado bajo f_D. Como $\mathbb{P}$ es cerrado bajo f_D, si $p \in \mathbb{P}$, entonces $f_D(p) \in \mathbb{P}$, y por como hemos definido f_D, $f_D(p) \leq p$ y $f_D(p) \in D$, de modo que tenemos que $D \cap \mathbb{P}$ es denso en $\mathbb{P}$ para todo $D \in \mathscr{D}$.

(3) implica que $\mathbb{P}$ tiene la c.c.c., ya que no existe familia no numerable de subconjuntos de $\mathbb{P}$ disjuntos 2 a 2 no vacíos (por tener $\mathbb{T}$ la c.c.c.). De este modo, podemos aplicar la forma restringida de MA(κ) a $\mathbb{P}$ obteniendo un filtro G en $\mathbb{P}$ tal que

$$\forall D \in \mathscr{D}(G \cap D \cap \mathbb{P} \neq \emptyset).$$

Definamos ahora H como:

$$H = \{q \in \mathbb{T} \mid \exists p \in G(p \leq q)\},$$

y comprobemos que H es un filtro en $\mathbb{T}$ que interseca cada $D \in \mathscr{D}$. Para ello, veamos primero que H es un filtro en $\mathbb{T}$, comprobando las dos condiciones necesarias.

Sean $p, q \in H$, entonces $\exists r, s \in G(r \leq p \wedge s \leq q)$. Entonces, por ser G un filtro en $\mathbb{P}$, $\exists t \in G(t \leq r \wedge t \leq s)$, de este modo, $\exists t \in G(t \leq p \wedge t \leq q)$, y como $G \subseteq H$ (ya que $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{T}$), H cumple la primera condición de filtro.

Sea ahora $p \in H$ y $q \in \mathbb{T}$ tales que $p \leq q$. Como $p \in H$, entonces $\exists r \in G(r \leq p)$ y como $p \leq q$, entonces $r \leq q$, de modo que $q \in H$.

Observamos finalmente que H interseca cada $D \in \mathscr{D}$. Esto es cierto puesto que ya sabemos que $G \cap D \cap \mathbb{P} \neq \emptyset$ para todo $D \in \mathscr{D}$, y $G \cap D \cap \mathbb{P} \subseteq H \cap D$, de modo que $\forall D \in \mathscr{D}(H \cap D \neq \emptyset)$.

Veamos ahora que (c) implica (b). Para ello, asumamos MA(κ) restringida a un álgebra de Boole completa.

Consideramos $(\mathbb{P}, <)$ un conjunto arbitrario, parcialmente ordenado, de cardinalidad menor o igual que κ y que tenga c.c.c. y $\mathscr{D}$ una familia de $\leq \kappa$ subconjuntos de $\mathbb{P}$ densos. Sean $\mathscr{B}$ y i como en el lema 5.11, entonces $\mathscr{B}$ tiene la c.c.c., ya que si $\{b_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$ fuese una anticadena en $\mathscr{B}$, para todo $\alpha < \omega_1$ podríamos por (1) (de 5.11) encontrar $p_\alpha \in \mathbb{P}$ con $i(p_\alpha) \leq b_\alpha$. Entonces, $\{p_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$ sería una anticadena en $\mathbb{P}$. Veamos esto último con más detalle:

Si $\{p_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$ no fuese una anticadena en $\mathbb{P}$, existirían $\alpha, \beta < \omega_1$ tales que $p_\alpha \leq p_\beta$ (idéntico en el caso $p_\beta \leq p_\alpha$). Por (2) (de 5.11), tendríamos entonces $i(p_\alpha) \leq i(p_\beta)$ y, por lo tanto, $i(p_\alpha) \leq b_\alpha$ y $i(p_\alpha) \leq i(p_\beta) \leq b_\beta$, de modo que $b_\alpha \sqcap b_\beta \neq 0$, contradiciendo que $\{b_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$ es una anticadena en $\mathscr{B} \setminus \{0\}$.

Tenemos entonces que $\{p_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$ sería una anticadena en $\mathbb{P}$, pero esto no es posible, ya que $\mathbb{P}$ tiene la c.c.c. Por lo tanto, $\mathscr{B}$ tiene la c.c.c.

Sea $D \in \mathscr{D}$, $i(D)$ es denso en $\mathscr{B} \setminus \{0\}$, ya que, por ser $i(\mathbb{P})$ denso en $\mathscr{B} \setminus \{0\}$, para toda $b \in \mathscr{B} \setminus \{0\}$, existe una $p \in \mathbb{P}$ tal que $i(p) \leq b$ y además, por ser D denso en $\mathbb{P}$, existe una $q \in D$ con $q \leq p$. Por (2) (de 5.11), como $q \leq p$, entonces $i(q) \leq i(p) \leq b$ y $i(q) \in i(D)$.

Por la forma restringida de MA(κ) a $\mathscr{B}$, hay un filtro G en $\mathscr{B}$ tal que $G \cap i(D) \neq \emptyset$ para cada $D \in \mathscr{D}$. Sea $H = i^{-1}(G)$, entonces $H \cap D \neq \emptyset$ para cada $D \in \mathscr{D}$. Sin embargo, H podría no ser un filtro, puesto que es claro, por (2) (de 5.11), que H satisface

$$\forall p \in H \forall q \in \mathbb{P}(q \geq p \to q \in H),$$

pero la dificultad está con

$$\forall p, q \in H \exists r \in H(r \leq p \wedge r \leq q),$$

ya que sean $p, q \in H$, entonces p y q podrían no tener una extensión común en H. Para remediar esto, definimos

$$D_{pq} = \{r \in \mathbb{P} \mid (r \leq p \wedge r \leq q) \vee r \perp p \vee r \perp q\}.$$

Veamos primero que D_{pq} es denso en $\mathbb{P}$ para todos $p, q \in \mathbb{P}$. Fijamos $r_0 \in \mathbb{P}$. Si existe un $s \in \mathbb{P}$ tal que $s \leq r_0$ y s es incompatible con alguna p o q, entones, s está en D_{pq}. Si no, entonces en particular r_0 es compatible con p, así que fijamos $r_1 \in \mathbb{P}$ tal que $r_1 \leq r_0$ y $r_1 \leq p$. Como r_1 es compatible con q, fijamos $r_2 \in \mathbb{P}$ tal que $r_2 \leq r_1$ y $r_2 \leq q$. Como $r_2 \leq r_1 \leq p$, $r_2 \leq r_0$ con $r_2 \in D_{pq}$.

Ahora, como $|\mathbb{P}| \leq \kappa$, podemos asumir que cada $D_{pq} \in \mathscr{D}$ ya que añadiendo $\{D_{pq} \mid p, q \in \mathbb{P}\}$ a $\mathscr{D}$ seguimos teniendo $|\mathscr{D}| \leq \kappa$. En este caso, sean $p, q \in H$, fijamos $r \in H \cap D_{pq}$. Como los elementos de H son compatibles dos a dos, no podemos tener $r \perp p$ o $r \perp q$, así que $r \leq p$ y $r \leq q$. De este modo, se satisface también la condición de filtro $\forall p, q \in H \exists r \in H(r \leq p \wedge r \leq q)$ y, por tanto, H es un filtro que cumple que $H \cap D \neq \emptyset$ para todo $D \in \mathscr{D}$.

Hemos entonces demostrado que MA(κ) restringida a un álgebra de Boole completa implica MA(κ) restringida a órdenes parciales con cardinalidad menor o igual que κ. De este modo, ya hemos visto que (a), (b) y (c) son equivalentes.

Veamos ahora que (a) implica (d). Para ello asumimos MA(κ).

Consideramos X un espacio de Hausdorff, compacto, que cumple la c.c.c. y sean U_α conjuntos densos abiertos con $\alpha < \kappa$.

Recordemos que es un sabido resultado de topología que son equivalentes:

1. X es compacto.
2. Si $\{F_i\}_{i \in I}$ es una familia de subconjuntos cerrados en X con la propiedad de la intersección finita (la intersección de toda subfamilia finita no vacía tiene intersección no nula), entonces $\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$.

Sea $\mathbb{P} = \{p \subseteq X \mid p \text{ abierto } \wedge p \neq \emptyset\}$, con $p \leq q$ si y solo si $p \subseteq q$. Entonces $p \perp q$ si y solo si $p \cap q = \emptyset$, de modo que $\mathbb{P}$ tiene la c.c.c., ya que X la tiene. Si G es un filtro en $\mathbb{P}$, entonces para todo $p, q \in G$ existe un $r \in G$ tal que $r \leq p$ y $r \leq q$, es decir, $r \subseteq p$ y $r \subseteq p$. Por tanto, $p \cap q \neq \emptyset$. De este modo, G tiene la propiedad de intersección finita, así que por la compacidad de X, $\bigcap\{\bar{p} \mid p \in G\} \neq \emptyset$. Para cada α, definimos $D_\alpha = \{p \in \mathbb{P} \mid \bar{p} \subseteq U_\alpha\}$. Veamos ahora que D_α es denso en $\mathbb{P}$.

Queremos ver que $\forall q \in \mathbb{P} \exists p \in D_\alpha (p \leq q)$. Sea $q \in \mathbb{P}$, como U_α es denso en X, $U_\alpha \cap q \neq \emptyset$ de modo que $\exists a \in U_\alpha \cap q$. Como X es regular, existen conjuntos p, Z tales que $a \in p \subseteq Z \subseteq U_\alpha \cap q$ con p abierto y Z cerrado. Por ser p abierto y Z cerrado y $p \subseteq Z$, tenemos que $\bar{p} \subseteq Z$, de modo que $p \in D_\alpha$. Como también $p \subseteq q$, hemos demostrado que D_α es denso en $\mathbb{P}$.

Tenemos entonces $G \cap D_\alpha \neq \emptyset$ para todo $\alpha < \kappa$. Veamos ahora que $\bigcap\{\bar{p} \mid p \in G\}$ es un subconjunto de $\bigcap_{\alpha<\kappa} U_\alpha$. Sea $a \in \bigcap\{\bar{p} \mid p \in G\}$, tenemos que $\forall p \in G(a \in \bar{p})$, por tanto, existe algún $p \in G$ tal que $p \in D_\alpha$ (ya que $G \cap D_\alpha \neq \emptyset$), es decir, $\bar{p} \subseteq U_\alpha$. De este modo, $a \in \bar{p} \subseteq U_\alpha$.

Entonces $\bigcap\{\bar{p} \mid p \in G\}$ es un subconjunto no vacío de $\bigcap_{\alpha<\kappa} U_\alpha$, de modo que $\bigcap_{\alpha<\kappa} U_\alpha \neq \emptyset$.

Finalmente, veamos que (d) implica (c).

Sea $\mathscr{B}$ un álgebra de Boole con la c.c.c. y $\mathscr{D}$ una familia de $\leq \kappa$ subconjuntos densos de $\mathscr{B} \setminus \{0\}$. Suponiendo (d), debemos encontrar un filtro $G \subseteq \mathscr{B}$ que interseque cada elemento de $\mathscr{D}$. No es necesario aquí que $\mathscr{B}$ sea completo.

Sea X el espacio Stone (espacio de Hausdorff compacto totalmente desconectado, es decir, que tiene solo elementos únicos como subconjuntos conexos) de $\mathscr{B}$. Los elementos de X son los ultrafiltros de $\mathscr{B}$ (colecciones de subconjuntos de $\mathscr{B}$, tales que, son filtros y no puede agrandarse como filtro) y si $b \in \mathscr{B}$, un conjunto básico abierto en X está dado por

$$N_b = \{G \in X \mid b \in G\}.$$

Tenemos que $N_b \cap N_c = \emptyset$ si y solo si $b \sqcap c = \emptyset$, de modo que X tiene la c.c.c., por tenerla $\mathscr{B}$. Ahora, para cada $D \in \mathscr{D}$, definimos

$$W_D = \bigcup\{N_b \mid b \in D\}$$

W_D es abierto y denso topológicamente en D, ya que si algún N_c fuese disjunto de W_D, entonces tendríamos $N_c \cap N_b = \emptyset$ para todo $b \in D$, es decir, $c \sqcap b = \emptyset$ para todo $b \in D$. Esto es imposible, ya que D es denso en $\mathscr{B} \setminus \{0\}$ en el orden y de este modo, D contiene una extensión de c.

Por (d), tenemos que $\bigcap\{W_D \mid D \in \mathscr{D}\} \neq \emptyset$ de modo que podemos tomar un elemento $G \in \bigcap\{W_D \mid D \in \mathscr{D}\}$. Entonces G es un filtro por serlo los elementos de X y $G \in W_D$ para todo $D \in \mathscr{D}$, así que $\exists b \in D(G \in N_b)$, de modo que $\exists b \in D(b \in G)$. Por lo tanto, $G \cap D \neq \emptyset$.

$\square$

Veamos ahora la relación entre el axioma de Martin y la hipótesis de Suslin.

Teorema 5.20. MA(ω_1) *implica que no existen árboles ω_1-Suslin (SH).*

Demostración. Supongamos que existe $(T, \leq)$ un árbol ω_1-Suslin y sea $\mathbb{P} = (T, \geq)$ el orden inverso de T. Como T es ω_1-Suslin, T no tiene anticadenas no numerables y, por tanto, $\mathbb{P}$ tampoco, de modo que $\mathbb{P}$ tiene la c.c.c.

Por el lema 3.7, podemos asumir que T es un árbol bien podado, en cuyo caso $D_\alpha = \{x \in T \mid \mathrm{ht}(x, T) > \alpha\}$ es denso en $\mathbb{P}$ ya que $\forall p \in \mathbb{P}\ \exists q \geq p(q \in D_\alpha)$.

De este modo, $(\mathbb{P}, \geq)$ es un preorden c.c.c. no vacío y $\{D_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$ una familia de $\leq \omega_1$ subconjuntos densos de $\mathbb{P}$. Por MA(ω_1), hay un filtro $G \subseteq \mathbb{P}$ tal que $\forall \alpha < \omega_1 (G \cap D_\alpha \neq \emptyset)$. Entonces, G es una cadena (ya que si tuviésemos x, y dos elementos no comparables, por ser G un filtro tendríamos que $\exists r \in G$ tal que $r \geq p \wedge r \geq q$ y con $p \perp q$, esto contradice que T sea un árbol).

Veamos ahora que G no es numerable. Supongamos que sí lo es. Entonces $\forall g \in G$, sea $\alpha_g = \mathrm{ht}(g, T)$, tendríamos que $\{\alpha_g \mid g \in G\}$ es numerable. Por ser $\{\alpha_g \mid g \in G\}$ numerable, podemos fijar un $\alpha < \omega_1$ tal que $\forall g \in G(\alpha > \alpha_g)$. Como hemos visto anteriormente, por ser G un filtro, $G \cap D_\alpha \neq \emptyset$, de modo que existe $g \in G \cap D_\alpha$ y, por lo tanto, tendríamos $\alpha_g > \alpha$, contradiciendo que $\alpha > \alpha_g$.

Entonces, tenemos que G es una cadena no numerable, contradiciendo el hecho de que T es un árbol ω_1-Suslin.

$\square$

Hemos visto en este capítulo que la introducción del axioma de Martin MA(ω_1) implica la hipótesis de Suslin, es decir, que si tenemos un conjunto X totalmente ordenado, denso, completo y sin extremos, y que tiene la c.c.c., entonces X es isomorfo a la recta real, $\mathbb{R}$.

6. Axioma $\diamondsuit$

Veamos una serie de conceptos previos, necesarios para enunciar el axioma $\diamondsuit$.

Definición 6.1. *Sea A un conjunto no vacío, un filtro en A es un subconjunto $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(A)$ tal que:*

(a) $A \in \mathscr{F}$ *y* $\emptyset \notin \mathscr{F}$.

(b) $\forall X, Y \in \mathscr{F}(X \cap Y \in \mathscr{F})$.

(c) $\forall X \in \mathscr{F}\ \forall Y \subseteq A(X \subseteq Y \to Y \in \mathscr{F})$.

Observación 6.2. Un filtro en A es un filtro en $\mathscr{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$ en el sentido de la definición 5.3.

Definición 6.3. *Sea A un conjunto no vacío, un ideal en A es un subconjunto $\mathscr{I} \subseteq \mathscr{P}(A)$ tal que:*

(a) $\emptyset \in \mathscr{I}$ *y* $A \notin \mathscr{I}$.

(b) $\forall X, Y \in \mathscr{I}(X \cup Y \in \mathscr{I})$.

(c) $\forall X \in \mathscr{I}\ \forall Y \subseteq A(X \supseteq Y \to Y \in \mathscr{I})$.

Definición 6.4. *Si $\mathscr{I}$ es un ideal en A, el filtro dual $\mathscr{I}^*$ es $\mathscr{I}^* = \{X \subseteq A \mid A \setminus X \in \mathscr{I}\}$.*

Si $\mathscr{F}$ es un filtro en A, el ideal dual $\mathscr{F}^*$ es $\mathscr{F}^* = \{X \subseteq A \mid A \setminus X \in \mathscr{F}\}$.

Definición 6.5. *Decimos que un ideal $\mathscr{I}$ es κ-completo si*

$$\forall \mathscr{A} \subseteq \mathscr{I}(|\mathscr{A}| < \kappa \to \bigcup \mathscr{A} \in \mathscr{I}).$$

Decimos que un filtro $\mathscr{F}$ es κ-completo si

$$\forall \mathscr{A} \subseteq \mathscr{F}(|\mathscr{A}| < \kappa \to \bigcap \mathscr{A} \in \mathscr{F}).$$

Introduzcamos el concepto de conjunto c.u.b. y definamos el filtro $\mathrm{Cub}(\mu)$.

Definición 6.6. *Para cualquier μ ordinal límite, un conjunto $C \subseteq \mu$ es cerrado si para todo límite $\delta < \mu$, si $C \cap \delta$ no está acotado en δ, entonces $\delta \in C$.*

Definición 6.7. *Decimos que un conjunto $C \subseteq \mu$ es c.u.b. (closed unbounded) en μ si C es cerrado y no acotado en μ.*

Definición 6.8. *Si $\mathrm{cf}(\mu) \geq \omega$, el filtro c.u.b. en μ, denotado Cub(μ), es*

$$Cub(\mu) = \{X \subseteq \mu \mid \exists C \subseteq X(C \text{ es c.u.b en } \mu)\}.$$

Vamos ahora una serie de resultados previos que nos ayudarán a ver que el axioma $\diamondsuit$ implica la negación de SH.

Veamos primero algunos resultados sobre los conjuntos c.u.b. y concretamente sobre el filtro $\mathrm{Cub}(\mu)$.

Lema 6.9. *Si* $\mathrm{cf}(\mu) > \omega$*, entonces*

(a) La intersección de cualquier familia de menos de $\mathrm{cf}(\mu)$ *subconjuntos c.u.b. de* μ *es c.u.b.*

(b) Cub(μ*) es un filtro* $\mathrm{cf}(\mu)$*-completo.*

Demostración. Probemos (a). Sea C_α c.u.b. en μ para todo $\alpha < \lambda$, donde $\lambda < \mathrm{cf}(\mu)$. Definimos $D = \bigcap_{\alpha<\lambda} C_\alpha$.

Veamos primero que D es un conjunto cerrado.

Sea $\delta = \sup B$, con $B \subseteq D = \bigcap_{\alpha<\lambda} C_\alpha$. Así, $B \subseteq C_\alpha$ para todo $\alpha < \lambda$. Como C_α es cerrado para todo $\alpha < \lambda$, si $\gamma = \sup E$ con $E \subseteq C_\alpha$, entonces $\gamma \in C_\alpha$. De este modo, $\delta \in C_\alpha$ $\forall \alpha < \lambda$ y, por tanto, $\delta \in \bigcap_{\alpha<\lambda} C_\alpha = D$.

Veamos ahora que D no está acotado.

Definimos $f_\alpha(\xi)$ el menor elemento de C_α mayor que ξ y definimos también $g(\xi) = \sup\{f_\alpha(\xi) \mid \alpha < \lambda\}$. Entonces $\xi < g(\xi) < \mu$ puesto que $\mathrm{cf}(\mu) > \lambda$ (es decir, no podemos escribir $\mu = \sum_{i\in\lambda} \mu_i$).

Sea $g^0(\xi) = \xi$, $g^{n+1}(\xi) = g(g^n(\xi))$ y $g^\omega(\xi) = \sup\{g^n(\xi) \mid n < \omega\}$. Entonces se tiene $\xi < g^\omega(\xi) < \mu$ puesto que $\mathrm{cf}(\mu) > \omega$. Para cada α, por ser C_α c.u.b., C_α no está acotado en $g^\omega(\xi)$, de modo que $g^\omega(\xi) \in C_\alpha$ para todo $\alpha < \lambda$, así que $g^\omega(\xi) \in \bigcap_{\alpha<\lambda} C_\alpha = D$. Entonces, para cada ξ, $g^\omega(\xi)$ es un elemento de D mayor que ξ, de modo que D no está acotado.

Para ver (b), veamos primero que $\mathrm{Cub}(\mu)$ es un filtro en μ:

(a) Se cumple $\mu \in \mathrm{Cub}(\mu)$ y $\emptyset \notin \mathrm{Cub}(\mu)$.

(b) $\forall X, Y \in \mathrm{Cub}(\mu)(X \cap Y \in \mathrm{Cub}(\mu))$:

Si $X, Y \in \mathrm{Cub}(\mu)$, entonces, existen $C \subseteq X$, $D \subseteq Y$ tales que C, D son c.u.b. en μ. Entonces, por (a), $C \cap D$ es c.u.b. en μ y como $C \cap D \subseteq X \cap Y$, $X \cap Y \in \mathrm{Cub}(\mu)$.

(c) $\forall X \in \mathrm{Cub}(\mu)\ \forall Y \subseteq \mu(X \subseteq Y \to Y \in \mathrm{Cub}(\mu))$:

Sea $X \in \mathrm{Cub}(\mu)$, existe $C \subseteq X$ tal que C es c.u.b. en μ. Sea $Y \subseteq \mu$ tal que $X \subseteq Y$, entonces $C \subseteq X \subseteq Y$, de modo que $Y \in \mathrm{Cub}(\mu)$.

Veamos ahora que $\mathrm{Cub}(\mu)$ es $\mathrm{cf}(\mu)$-completo.

Sea $X_\alpha \in \mathrm{Cub}(\mu) = \{X \subseteq \mu \mid \exists C \subseteq X(C \text{ c.u.b en } \mu)\}$ para $\alpha < \lambda$, donde $\lambda < \mathrm{cf}(\mu)$. Para todo $\alpha < \lambda$ escogemos $C_\alpha \subseteq X_\alpha$ c.u.b. en μ. Entonces, $\bigcap_{\alpha<\lambda} C_\alpha \subseteq \bigcap_{\alpha<\lambda} X_\alpha$, veamos que $\bigcap_{\alpha<\lambda} X_\alpha \in Cub(\mu)$. Como $X_\alpha \subseteq \mu$ para todo $\alpha < \lambda$, $\bigcap_{\alpha<\lambda} X_\alpha \subseteq \mu$. Por el apartado (a), $\bigcap_{\alpha<\lambda} C_\alpha$ es c.u.b. y $\bigcap_{\alpha<\lambda} C_\alpha \subseteq \bigcap_{\alpha<\lambda} X_\alpha$, de modo que $\bigcap_{\alpha<\lambda} X_\alpha \in Cub(\mu)$

□

Veamos cómo se define un conjunto estacionario. Esta definición será también necesaria para enunciar el axioma $\Diamond$.

Definición 6.10. *Si* $\mathrm{cf}(\mu) > \omega$*, decimos que* $X \subseteq \mu$ *es estacionario si* $X \notin Cub^*(\mu)$ *y, contrariamente, decimos que* X *es no-estacionario si* $X \in Cub^*(\mu)$*.*

Veamos un resultado que nos ayudará a estudiar los conjuntos estacionarios.

Lema 6.11. *Sea* $\mathrm{cf}(\mu) > \omega$ *y* $X \subseteq \mu$*.* X *es estacionario si y solo si* $X \cap C \neq \emptyset$ *para todo* C *c.u.b. en* μ*.*

Demostración. Supongamos primero que X es estacionario.

Entonces $X \subseteq \mu$ y no existe ningún $D \subseteq \mu \setminus X$ tal que D sea c.u.b. en μ. De este modo, sea $C \subseteq \mu$ c.u.b., entonces $C \not\subseteq \mu \setminus X$ por ser X estacionario. Queda probado que $C \cap X \neq \emptyset$.

Veamos ahora la otra implicación, suponiendo que $X \cap C \neq \emptyset$ para todo C c.u.b. en μ.

Supongamos que $X \subseteq \mu$ es no-estacionario. Entonces, $\exists D \subseteq \mu \setminus X (D$ c.u.b. en $\mu)$. Como D es c.u.b. en μ, entonces $X \cap D \neq \emptyset$ pero esto no es posible, ya que $D \subseteq \mu \setminus X$. De este modo, hemos llegado a contradicción y, por tanto, X es estacionario.

□

Introduzcamos una nueva definición junto a un resultado que utilizaremos posteriormente.

Definición 6.12. *Decimos que un árbol* $(T, \leq)$ *es siempre-ramificado si, para todo* $x \in T$*,* $\{y \in T \mid y > x\}$ *no está totalmente ordenado por* $<$*.*

Teorema 6.13. *Sea* $(T, \leq)$ *un* ω_1*-árbol siempre-ramificado en el que toda anticadena maximal es numerable. Entonces* T *es un árbol* ω_1*-Suslin.*

Demostración. Por el lema de Zorn, toda anticadena está contenida en una anticadena maximal, de modo que toda anticadena es numerable, por serlo toda anticadena maximal.

Probemos ahora que $|T| = \omega_1$. Por una parte, podemos escribir $T = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathrm{Lev}_\alpha(T)$, de modo que $|T| = |\bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathrm{Lev}_\alpha(T)| = \sum_{\alpha<\omega_1} |\mathrm{Lev}_\alpha(T)| \leq \omega_1$ (ya que $|\mathrm{Lev}_\alpha(T)| < \omega_1$ por ser $\mathrm{Lev}_\alpha(T)$ una anticadena para todo $\alpha < \omega_1$). Además, $|T| \geq \omega_1$ ya que por ser T un ω_1-árbol, $\mathrm{ht}(T) = \omega_1$, es decir, para todo $\alpha < \omega_1$, existe un $x \in \mathrm{Lev}_\alpha(T)$.

Supongamos que B fuese una cadena no numerable. Podemos asumir que B es maximal, de modo que B intersecaría cada nivel de T. Como T es siempre-ramificado, para cada $x \in T$ existe un $f(x) > x$ tal que $f(x) \notin B$. Ahora, podemos coger inductivamente $x_\alpha \in B$ para $\alpha < \omega_1$ de modo que $\mathrm{ht}(x_\alpha, T) > \sup\{\mathrm{ht}(f(x_\beta), T) \mid \beta < \alpha\}$. Entonces, $\{f(x_\alpha) \mid \alpha < \omega_1\}$ sería una anticadena no numerable. Veamos que es una anticadena:

Sean $\alpha, \beta < \omega_1$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\alpha > \beta$. Tenemos entonces $f(x_\alpha) > x_\alpha$ y $f(x_\beta) > x_\beta$ con $x_\alpha, x_\beta \in B$, tales que $f(x_\alpha), f(x_\beta) \notin B$, de modo que

$$\mathrm{ht}(f(x_\alpha), T) > \mathrm{ht}(x_\alpha, T) \text{ y } \mathrm{ht}(f(x_\beta), T) > \mathrm{ht}(x_\beta, T).$$

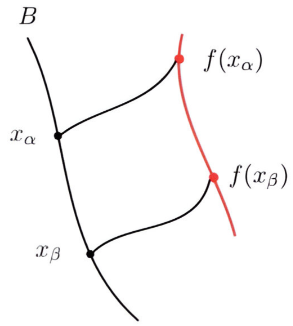
Por otra parte,

$$\mathrm{ht}(x_\alpha, T) > \sup\{\mathrm{ht}(f(x_\xi), T) \mid \xi < \alpha\} \text{ y } \mathrm{ht}(x_\beta, T) > \sup\{\mathrm{ht}(f(x_\xi), T) \mid \xi < \beta\},$$

es decir, tenemos:

$$\mathrm{ht}(x_\beta, T) < \mathrm{ht}(f(x_\beta), T) < \mathrm{ht}(x_\alpha, T) < \mathrm{ht}(f(x_\alpha), T).$$

Como $x_\alpha, x_\beta \in B$ y B es una cadena, tenemos que $x_\beta < x_\alpha$. Claramente no es posible que $f(x_\alpha) < f(x_\beta)$ puesto que $\mathrm{ht}(f(x_\alpha), T) > \mathrm{ht}(f(x_\beta), T)$. Supongamos entonces que $f(x_\beta) \leq f(x_\alpha)$. Entonces tendríamos:



Es decir, $x_\alpha \leq f(x_\alpha)$ y $f(x_\beta) \leq f(x_\alpha)$ con $x_\alpha \in B$ y $f(x_\beta) \notin B$, contradiciendo que T sea un árbol. Por tanto, $f(x_\alpha)$ y $f(x_\beta)$ no son comparables y, por tanto, $\{f(x_\alpha) \mid \alpha < \omega_1\}$ es una anticadena, claramente no numerable. Por lo tanto, toda cadena es numerable y, por tanto, T es un árbol ω_1-Suslin.

$\square$

Veamos ahora conceptos y resultados relacionados con funciones finitarias. Estos resultados nos ayudarán posteriormente a ver que el axioma $\Diamond$ implica la negación de SH.

Definición 6.14. *Una función n-aria en A es una función $f : A^n \to A$ si $n > 0$ o un elemento de A si $n = 0$.*

Una función finitaria es una función n-aria para algún n.

Sea $B \subseteq A$, decimos que B es cerrado bajo f si $f(B^n) \subseteq B$ (o $f \in B$ cuando $n = 0$).

Definición 6.15. *Si $\mathscr{I}$ es un conjunto de funciones finitarias en A y $B \subseteq A$, definimos la clausura de B bajo $\mathscr{I}$ como el subconjunto $C \subseteq A$ más pequeño tal que $B \subseteq C$ y C es cerrado bajo todas las funciones de $\mathscr{I}$.*

Teorema 6.16. *Sea κ un cardinal infinito. Sea $A \subseteq B$, $|A| \leq \kappa$ y $\mathscr{F}$ un conjunto de $\leq \kappa$ funciones finitarias en B, entonces la clausura de A bajo $\mathscr{F}$ tiene cardinalidad menor o igual que κ.*

Demostración. Sea $f \in \mathscr{F}$, $f : B^{m_f} \to B$ con $m_f < \omega$. Definimos $A_0 = A$ y $A_{n+1} = A_n \cup \bigcup_{f \in \mathscr{F}} f[A_n^{m_f}]$. Veamos por inducción sobre n que $|A_n| \leq \kappa$ para toda n:

Tenemos el caso inicial $|A_0| = |A| \leq \kappa$. Supongamos ahora que $|A_n| \leq \kappa$ y veamos que es cierto para $n+1$.

Tenemos que $A_{n+1} = A_n \cup \bigcup_{f \in \mathscr{F}} f[A_n^{m_f}]$, de modo que $|A_{n+1}| = |A_n \cup \bigcup_{f \in \mathscr{F}} f[A_n^{m_f}]| \leq |A_n| + |\bigcup_{f \in \mathscr{F}} f[A_n^{m_f}]|$. Como $|A_n^{m_f}| \leq \kappa$, $|f[A_n^{m_f}]| \leq \kappa$. Además, $|\mathscr{F}| \leq \kappa$, de modo que $|\bigcup_{f \in \mathscr{F}} f[A_n^{m_f}]| \leq \kappa$.

De este modo, utilizando lo que hemos visto y la hipótesis de inducción, $|A_{n+1}| \leq \kappa + \kappa = \kappa$.

Definimos ahora $\mathrm{cl}(A) = \bigcup_{n<\omega} A_n$. Veamos que efectivamente es la clausura de A. Para ello, veamos primero que $\bigcup_{n<\omega} A_n$ es cerrado bajo toda función de $\mathscr{F}$:

Sea $f \in \mathscr{F}$ y sean $a_1, \ldots, a_{m_f} \in \bigcup_{n<\omega} A_n$, existe un $n < \omega$ tal que $a_1, \ldots, a_{m_f} \in A_n$, de modo que $f(a_1, \ldots, a_{m_f}) \in A_{n+1} \subseteq \bigcup_{n<\omega} A_n$.

Veamos ahora que $\bigcup_{n<\omega} A_n$ es el subconjunto de B más pequeño que contiene a A y que es cerrado bajo toda función de $\mathscr{F}$:

Sea C un conjunto tal que $A \subseteq C \subseteq B$ y sea C cerrado bajo toda función $f \in \mathscr{F}$, veamos que $\bigcup_{n<\omega} A_n \subseteq C$. Tenemos $A_0 = A \subseteq C$. Supongamos inductivamente que $A_n \subseteq C$. Por ser C cerrado bajo toda función de $\mathscr{F}$, $f[A_n^{m_f}] \subseteq f[C^{m_f}] \subseteq C$, de modo que $A_{n+1} = A_n \cup \bigcup_{f \in \mathscr{F}} f[A_n^{m_f}] \subseteq C$.

Por tanto, $\bigcup_{n<\omega} A_n$ es el subconjunto de B más pequeño que contiene a A y que es cerrado bajo toda función de $\mathscr{F}$, de modo que $\bigcup_{n<\omega} A_n$ es la clausura de A.

Veamos finalmente que la cardinalidad de la clausura es menor o igual que κ. Hemos visto que $|A_n| \leq \kappa$ y κ es un cardinal infinito, de modo que $|\operatorname{cl}(A)| = |\bigcup_{n<\omega} A_n| \leq \kappa$.

□

Lema 6.17. *Sea $\kappa > \omega$ regular y sea $\mathscr{F}$ un conjunto de $< \kappa$ funciones finitarias en κ, entonces $C = \{\gamma < \kappa \mid \gamma$ es cerrado bajo $\mathscr{F}\}$ es c.u.b. en κ.*

Demostración. Veamos primero que C es cerrado en κ.

Supongamos $\delta < \kappa$ límite tal que $\delta = \sup A$ donde $A \subseteq C$. Queremos ver que $\delta \in C$, es decir, que δ es cerrado bajo $\mathscr{F}$. Sea $f \in \mathscr{F}$, $f : \kappa^{m_f} \to \kappa$. Sean $\xi_1, \ldots, \xi_{m_f}$ ordinales menores que δ, entonces, para todo $i = 1, \ldots, m_f$ existe $\alpha_i \in A$ tal que $\xi_i \in \alpha_i$. De este modo, tomando $\alpha = \text{máx}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{m_f}\}$ se tiene $\xi_1, \ldots, \xi_{m_f} \in \alpha \in A$. Como $\alpha \in A \subseteq C$, α es cerrado bajo $\mathscr{F}$ y se concluye $f(\xi_1, \ldots, \xi_{m_f}) \in \alpha < \delta$.

Veamos ahora que C no está acotado.

Definimos primero $G(\xi)$ la clausura de ξ bajo $\mathscr{F}$, es decir, $G(\xi)$ es el subconjunto de κ más pequeño tal que $\xi \subseteq G(\xi)$ y $G(\xi)$ es cerrado bajo todas las funciones de $\mathscr{F}$. Entonces $\xi \subseteq G(\xi) \subseteq \kappa$. Veamos que $|G(\xi)| < \kappa$, separando en dos casos posibles, según κ sea sucesor o límite.

1. $\kappa = \mu^+$:

   $|\xi| \leq \mu$ y $|\mathscr{F}| \leq \mu$. Entonces, por el teorema 6.16, $|G(\xi)| \leq \mu < \kappa$.

2. κ es un cardinal límite:

   Como $|\xi| < \kappa$, existe μ tal que $|\xi| < \mu < \kappa$ y como $|\mathscr{F}| < \kappa$, existe μ' tal que $|\mathscr{F}| < \mu' < \kappa$. Entonces, por el teorema 6.16, $|G(\xi)| \leq \mu + \mu' < \kappa$.

Si $G(\xi)$ estuviese acotado en κ, entonces para todo $\alpha < \kappa$, existiría un $\beta \in G(\xi)$ tal que $\alpha < \beta$. De este modo tendríamos $\bigcup G(\xi) = \kappa$ pero esto no es posible por la regularidad de κ. Podemos escoger $g(\xi)$ donde $g : \kappa \to \kappa$ de modo que $\xi < g(\xi) < \kappa$ y $G(\xi) \subseteq g(\xi)$. Sea g^n el n-ésimo iterado de g y $g^\omega(\xi) = \sup_n g^n(\xi)$. Claramente $g^\omega(\xi) > \xi$, por lo tanto, solo falta ver que $g^\omega(\xi)$ es un elemento de C. Para ello, tenemos que ver que $g^\omega(\xi)$ es cerrado bajo $\mathscr{F}$:

Sea $f \in \mathscr{F}$, $f : \kappa^{m_f} \to \kappa$. Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m_f} \in g^\omega(\xi)$, entonces existe n_i tal que $\alpha_i \in g^{n_i}(\xi)$ para toda $i = 1, \ldots, m_f$. De este modo, sea $n = \text{máx}\{n_1, \ldots, n_{m_f}\}$, tenemos $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m_f} \in g^n(\xi) \subseteq G(g^n(\xi))$. Por tanto, como $G(g^n(\xi))$ es cerrado bajo $\mathscr{F}$, $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m_f}) \in G(g^n(\xi)) \subseteq g^{n+1}(\xi) \subseteq g^\omega(\xi)$.

□

Definición 6.18. *Definimos* $T_\alpha = \bigcup\{\mathrm{Lev}_\beta(T) \mid \beta < \alpha\}$.

Lema 6.19. *Sea* $T = (\omega_1, \lhd)$ *un* ω_1*-árbol. Entonces:*

(a) $C = \{\alpha < \omega_1 \mid T_\alpha = \alpha\}$ *es c.u.b.*

(b) Si $A \subset \omega_1$ *es una anticadena maximal en* T*, entonces* $C = \{\alpha < \omega_1 \mid T_\alpha = \alpha \wedge A \cap T_\alpha$ *es una anticadena maximal en* $T_\alpha\}$ *es c.u.b. en* ω_1*.*

Demostración. Probemos (a):

Veamos primero que C es cerrado.

Sea $\delta = \sup B$ donde $B \subseteq C$. Podemos suponer δ límite, ya que en otro caso el supremo sería el máximo y es claro que $T_\delta = \delta$. Tenemos entonces $T_\delta = \bigcup_{\alpha<\delta} T_\alpha = \bigcup_{\alpha\in B} T_\alpha = \bigcup_{\alpha\in B} \alpha = \delta$, como queríamos ver.

Veamos ahora que C no está acotado.

Definimos $f(\xi) = \mathrm{ht}(\xi, T)$ y $g(\xi) = \sup\{\eta \mid \eta \in \mathrm{Lev}_\xi(T)\}$. Por el lema 6.17, el conjunto de α cerrado bajo f y g forma un c.u.b. Probemos que $T_\alpha = \alpha$ para cualquier α:

Veamos primero la inclusión $\alpha \subseteq T_\alpha$. Sea $\xi \in \alpha$, tomamos $\beta = \mathrm{ht}(\xi, T) = f(\xi)$, por ser α cerrado bajo f, entonces $f(\xi) = \beta < \alpha$ y, por tanto, tenemos que $\xi \in \mathrm{Lev}_\beta(T) \subseteq T_\alpha$.

Para la otra inclusión, sea $\xi \in T_\alpha$, entonces $\exists \beta < \alpha$ tal que $\xi \in \mathrm{Lev}_\beta(T)$. De este modo, $\xi \leq \sup\{\eta \mid \eta \in \mathrm{Lev}_\beta(T) = g(\beta) < \alpha$. La última desigualdad es debida a que α es cerrado bajo g.

Probemos ahora (b):

Veamos primero que C es cerrado.

Sea $\delta = \sup B$ donde $B \subseteq C$. Podemos suponer δ límite, ya que en otro caso el supremo sería el máximo. Debemos ver que $T_\delta = \delta$ y que $A \cap T_\delta$ es una anticadena maximal. Como hemos visto en la demostración de (a), $T_\delta = \delta$, por tanto, únicamente falta ver que $A \cap T_\delta$ es una anticadena maximal en $T_\delta = \delta$. Claramente $A \cap T_\delta$ es una anticadena, por serlo A. Supongamos que no es maximal. Entonces, existiría un $\beta < \delta$ no comparable con ningún elemento de $A \cap T_\delta = A \cap \delta$. Por ser δ límite tendríamos que existe un β' tal que $\beta < \beta' \in B \subseteq C$, con $\beta' < \delta$. De este modo tendríamos que β no es comparable con ningún elemento de $A \cap \beta'$ y, por lo tanto, que $A \cap \beta'$ no es maximal en β', contradiciendo que $\beta' \in C$.

Finalmente, veamos que C no está acotado.

Definimos $h(\xi)$ algún elemento de A comparable con $\xi \in T$ (de este modo, si $\xi \in A$, entonces $h(\xi) = \xi$). De nuevo, por el lema 6.17, el conjunto de α cerrado bajo f, g y h forma un c.u.b, de modo que únicamente falta ver que, para todo α, $T_\alpha = \alpha$ y que $A \cap T_\alpha$ es maximal en T_α. Por (a), por ser α cerrado bajo f y g ya tenemos que $T_\alpha = \alpha$. Falta ver entonces que $A \cap T_\alpha$ es maximal en T_α para todo α. Notemos que $A \cap T_\alpha$ es una anticadena maximal en T_α si y solo si todo $x \in T_\alpha \setminus A \cap T_\alpha = T_\alpha \setminus A$ es comparable con algún elemento de $A \cap T_\alpha$. De este modo, $A \cap T_\alpha$ puesto que para todo $x \in T_\alpha \setminus A$, $h(x)$ es un elemento de $A \cap T_\alpha$ comparable con x.

□

Enunciemos ahora el axioma $\Diamond$ y veamos un último resultado previo a la demostración de que el axioma $\Diamond$ implica $\neg$SH.

Definición 6.20. *El axioma $\diamondsuit$ es la afirmación: Hay conjuntos $A_\alpha \subseteq \alpha$ para $\alpha < \omega_1$ tales que*

$$\forall A \subseteq \omega_1(\{\alpha < \omega_1 \mid A \cap \alpha = A_\alpha\} \text{ es estacionario}).$$

Definición 6.21. *La secuencia $(A_\alpha \mid \alpha < \omega_1)$ se llama $\diamondsuit$-secuencia.*

Observación 6.22. Es conocida la consistencia de $\diamondsuit$ con ZFC, es decir, si Con(ZFC), entonces Con(ZFC+$\diamondsuit$). De hecho, de forma más general, $\diamondsuit$ es independiente de ZFC.

Teorema 6.23. *Sea $T = (\omega_1, \lhd)$ un ω_1-árbol siempre-ramificado y sea $(A_\alpha \mid \alpha < \omega_1)$ una $\diamondsuit$-secuencia. Supongamos que para cada $\alpha < \omega_1$ límite,*

$$(T_\alpha = \alpha \wedge A_\alpha \text{ es una anticadena maximal en } \alpha) \to \forall x \in \mathrm{Lev}_\alpha(T) \exists y \in A_\alpha(y \lhd x). \quad (*)$$

Entonces T es un árbol ω_1-Suslin.

Demostración. Por el teorema 6.13, es suficiente ver que toda anticadena maximal A en T es numerable. Por el lema 6.19.

$$C = \{\alpha < \omega_1 \mid \alpha \text{ es un límite } \wedge T_\alpha = \alpha \wedge A \cap T_\alpha \text{ es maximal en } T_\alpha\}$$

es c.u.b. en ω_1. Como $\{\alpha < \omega_1 \mid A \cap \alpha = A_\alpha\}$ es estacionario, podemos fijar un $\alpha \in C$, tal que $A \cap \alpha = A_\alpha$. Por $(*)$, como $A_\alpha = A \cap T_\alpha$ es una anticadena maximal, si $z \in T$ y $\mathrm{ht}(z, T) \geq \alpha$, entonces z está por encima de algún elemento de $A_\alpha = A \cap \alpha$ ya que si $\mathrm{ht}(z, T) = \alpha$, es directamente la hipótesis de $(*)$ y si $\mathrm{ht}(z, T) > \alpha$, existe un z' con $\mathrm{ht}(z', T) = \alpha$ tal que $z \rhd z'$ y podemos aplicar $(*)$ a z', de modo que z' está por encima de algún elemento $y \in A_\alpha$ y, por tanto, $z \rhd z' \rhd y \in A_\alpha$. De este modo $z \notin A$ ya que es comparable con algún elemento de A y A es una anticadena.

Hemos visto que si $z \in T$ con $\mathrm{ht}(z, T) \geq \alpha$, entonces $z \notin A$, de modo que si $z \in A$, entonces $\mathrm{ht}(z, T) < \alpha$, es decir, existe un $\beta < \alpha$ tal que $z \in \mathrm{Lev}_\beta(T) \subseteq T_\alpha$. Se concluye que $z \in A$ implica $z \in A \cap T_\alpha = A_\alpha$, es decir, $A \subseteq A_\alpha$. Por otra parte, claramente, $A_\alpha = A \cap \alpha \subseteq A$, de modo que $A = A_\alpha \subseteq \alpha$ y, por tanto, A es numerable.

$\square$

Teorema 6.24. *El axioma $\diamondsuit$ implica que existe un árbol ω_1-Suslin ($\neg$SH).*

Demostración. Sea $I_\beta = \{\omega \cdot \beta + n \mid n \in \omega\}$. Observemos que es una partición de ω: por la división con resto (proposición 2.22), podemos escribir cada ordinal como $\omega \cdot \beta + n$ con $n < \omega$, de forma única. Además, los I_β son conjuntos disjuntos, que demuestra que I_β es una partición de ω.

Ahora, fijamos una $\diamondsuit$-secuencia $(A_\alpha \mid \alpha < \omega_1)$. Definimos $T = (\omega_1, \lhd)$ construyendo $\lhd$ de forma inductiva de modo que:

(1) $\lhd$ es un orden en ω_1 y para cada $\beta < \omega_1$, $\mathrm{Lev}_\beta(T) = I_\beta$.

(2) Para cada $\beta < \omega_1$ y $n < \omega$, $(\omega \cdot \beta + n) \lhd (\omega \cdot (\beta + 1) + 2n)$ y $(\omega \cdot \beta + n) \lhd (\omega \cdot (\beta + 1) + 2n + 1)$.

(3) Si $\beta < \alpha < \omega_1$ y $x \in I_\beta$, entonces $\exists y \in I_\alpha(x \lhd y)$.

(4) Se cumple $(*)$ del lema 6.23, es decir, $(T_\alpha = \alpha \wedge A_\alpha$ es una anticadena maximal en $\alpha) \to \forall x \in \mathrm{Lev}_\alpha(T) \exists y \in A_\alpha(y \lhd x)$.

Entonces, para demostrar el enunciado del teorema, debemos ver que existe este orden $\lhd$ y que si existe, entonces T es ω_1-Suslin.

Asumamos primero que $\lhd$ puede ser construido.

Por (1), para todo $\beta < \omega_1$, $|\operatorname{Lev}_\beta(T)| = |I_\beta| < \omega_1$ y claramente $\operatorname{ht}(T) = \omega_1$. De este modo, ya tenemos que T es un ω_1-árbol. Por otra parte, (2) garantiza que T es siempre-ramificado. Tenemos entonces que se cumple $(*)$ de (4), de modo que T es un árbol ω_1-Suslin.

Veamos ahora que es posible construir $\lhd$.

Asumamos primero que esta construcción es cierta para todo $\beta < \alpha$. Notemos que $T_\alpha = \omega \cdot \alpha$ ya que $T_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \operatorname{Lev}_\beta(T) = \bigcup_{\beta<\alpha} I_\beta = \bigcup_{\beta<\alpha}\{\omega\cdot\beta+n \mid n \in \omega\} = \omega\cdot\alpha$. Para construir $\lhd$ de forma inductiva, asumamos que $\lhd$ ha sido definido para los elementos de $\omega\cdot\alpha$ tales que (1)-(4) se mantiene bajo α, y describamos como extender $\lhd$ a los elementos de $\omega\cdot\alpha \cup I_\alpha$. Veamos los dos casos: α sucesor, y α límite.

Veamos primero el caso en que α es sucesor, es decir, $\alpha = \beta + 1$. Sea $x \in \omega\cdot\alpha = T_\alpha$, entonces o bien $x = (\omega\cdot\beta+n)$ o bien $x \lhd (\omega\cdot\beta+n)$. Definimos entonces el orden $x \lhd (\omega\cdot\alpha+2n)$ y $x \lhd (\omega\cdot\alpha + 2n + 1)$ si y solo si $x \unlhd (\omega\cdot\beta + n)$.

Esto preserva (1), ya que hemos cogido como elementos de $\operatorname{Lev}_\alpha(T)$ los elementos I_α. También se preserva (2), puesto que para los elementos hasta el nivel menor que β era cierto por hipótesis y ahora, para los elementos de I_β, también es cierto por como hemos construido el orden para los elementos de este nivel. Para el nivel α no hay que ver nada, puesto que el árbol no está definido para elementos superiores. Se mantiene también (3) puesto que sea $\gamma < \delta$ y $x \in I_\gamma$, por la hipótesis de inducción, ya teníamos que si $\delta < \alpha$, entonces $\exists y \in I_\delta(x \lhd y)$. Para el caso $\delta = \alpha$, tenemos que $\exists y \in I_\beta(x \lhd y)$ y por como hemos construido el orden, $y \lhd (\omega\cdot\alpha + 2n)$, de modo que $x \lhd (\omega\cdot\alpha+2n) \in I_\alpha$. Finalmente, (4) se cumple, puesto que la construcción del nivel α no dice nada sobre los sucesores de α.

Hemos visto entonces que con la construcción dada para el caso α sucesor, se mantienen (1)-(4).

Supongamos ahora que α es un límite. Para cada $x \in T_\alpha = \omega\cdot\alpha$, definimos $B(x)$ una cadena en T_α tal que $x \in B(x)$ y $B(x)$ interseca $I_\eta = \operatorname{Lev}_\eta(T_\alpha)$ para cada $\eta < \alpha$: primero escogemos $\xi_m = \xi_m(x)$ para $m < \omega$, tal que $\operatorname{ht}(x) < \xi_0 < \xi_1 < \dots$ y $\sup\{\xi_m \mid m \in \omega\} = \alpha$. Entonces escogemos inductivamente $y_m = y_m(x) \in I_{\xi_n}$ tal que $x \lhd y_0 \lhd y_1 \lhd \dots$ (esto es posible por (3)). Entonces, tomamos

$$B(x) = \{z \in T_\alpha \mid \exists n(z \lhd y_n(x))\}.$$

Veamos primero que este conjunto satisface las condiciones anteriores. Por una parte, $x \in B(x)$ puesto que $x \in T_\alpha$ y $x \lhd y_0$. Además, $B(x) \cap \operatorname{Lev}_\eta(T_\alpha) \neq \emptyset$ para cada $\eta < \alpha$ ya que si $z \in B(x)$, $z \in T_\alpha$ y $z \lhd y_n$ para algún n donde $y_n \in \operatorname{Lev}_{\xi_n}$ con $\xi_n \leq \alpha$.

Ahora, sea $\omega\cdot\alpha = \{x_n \mid n \in \omega\}$, definimos para $z \in \omega\cdot\alpha$, $z \lhd (\omega\cdot\alpha + n)$ si y solo si $z \in B(x_n)$.

El hecho de que $B(x_n)$ interseque cada nivel de T_α implica que $\omega\cdot\alpha+n$ tiene altura α en T, de modo que se cumple (1). Se ve claramente que (2) y (3) se continúan preservando por como hemos construido el orden en el nivel α. Finalmente, la condición (4) en el nivel α solo es un problema si $\omega\cdot\alpha = \alpha$ y A_α es una anticadena maximal en T_α, así que asumimos que este es el caso. Modificamos entonces la construcción de $B(x)$ para $x \in T_\alpha$. Primero escogemos $y_0(x)$ de modo que $x \lhd y_0(x)$ y $\exists z \in A_\alpha(z \lhd y_0(x))$, que es posible, ya que x es comparable con algún elemento de A_α. Entonces, $\xi_0(x) = \mathrm{ht}(y_0(x))$. Escogemos ahora $\xi_m(x)(1 \leq m < \omega)$ y $y_m(x)(1 \leq m < \omega)$ como anteriormente y de nuevo

$$B(x) = \{z \in T_\alpha \mid \exists n(z \lhd y_n(x))\}.$$

Entonces cada $B(x)$ interseca A_α de modo que (4) también se sostiene.

$\square$

Hemos demostrado en este capítulo que asumiendo el axioma $\diamondsuit$, entonces no se cumple la hipótesis del Suslin y, por tanto, si tenemos un conjunto X totalmente ordenado, denso, completo y sin extremos, y que tiene la c.c.c., entonces no podemos afirmar que X sea isomorfo a la recta real, $\mathbb{R}$.

7. Hipótesis del continuo (CH)

En teoría de conjuntos, la hipótesis del continuo es un enunciado de gran interés. Es por ello que se incluye este apartado en la memoria, donde discutiremos las relaciones entre la hipótesis del continuo y los axiomas que hemos introducido.

Enunciemos entonces la hipótesis del continuo, así como su versión generalizada.

Definición 7.1. *La hipótesis del continuo (CH) es la afirmación:* $2^\omega = \omega_1$.

Definición 7.2. *La hipótesis generalizada del continuo (GCH) es la afirmación:* $\forall\alpha(2^{\omega_\alpha} = \omega_{\alpha+1})$.

Observación 7.3. Es conocido que tanto CH como GCH son independientes de ZFC.

Proposición 7.4. *El axioma $\diamondsuit$ implica la hipótesis del continuo (CH).*

Demostración. Sea $(A_\alpha \mid \alpha < \omega_1)$ una $\diamondsuit$-secuencia, entonces tenemos que

$$\forall A \subseteq \omega_1 \exists \alpha < \omega_1 (A \cap \alpha = A_\alpha),$$

donde $A_\alpha \subseteq \alpha$. Tenemos también entonces

$$\forall A \subseteq \omega \exists \alpha > \omega (A = A_\alpha),$$

ya que, sea $A \subseteq \omega$ existe algún $\alpha > \omega$ tal que $A = A \cap \omega \subseteq A \cap \alpha = A_\alpha \subseteq A$.

De este modo, el conjunto $\{A_\alpha \mid A_\alpha \subseteq \omega\}$ contiene todos los subconjuntos de ω, es decir, $\{A_\alpha \mid A_\alpha \subseteq \omega\} = \mathscr{P}(\omega)$.

Como $|\{A_\alpha \mid A_\alpha \subseteq \omega\}| = \omega_1$ y $|\mathscr{P}(\omega)| = 2^\omega$, tenemos $2^\omega = \omega_1$.

□

Observación 7.5. Como habíamos comentado al introducir el axioma $\diamondsuit$, si Con(ZFC), también Con(ZFC+$\diamondsuit$). Como hemos visto que el axioma $\diamondsuit$ implica la hipótesis del continuo, tenemos también Con(ZFC+$\diamondsuit$+CH). De hecho, es un resultado conocido que Con(ZFC+$\diamondsuit$+GCH).

Por otra parte, hemos visto en el teorema 6.24 que el axioma $\diamondsuit$ implica la negación de la hipótesis de Suslin. De este modo, de nuevo suponiendo la consistencia de ZFC, tenemos Con(ZFC+$\neg$SH+GCH).

Además, Jensen demostró que suponiendo la consistencia de ZFC, entonces se da también Con(ZFC+SH+GCH).

Por tanto, tenemos que si ZFC es consistente, entonces Con(ZFC+$\neg$SH+GCH) y Con(ZFC+SH+GCH), es decir, SH es independiente de GCH.

Proposición 7.6. MA(ω_1) *implica la negación de la hipótesis del continuo ($\neg$CH).*

Demostración. Por el lema 5.7, sabemos que MA(2^ω) es falso. De este modo, MA(ω_1) implica la negación de la hipótesis del continuo, ya que si no fuese así, tendríamos $2^\omega = \omega_1$ y como MA(2^ω) es falso, también lo sería MA(ω_1).

□

Observación 7.7. Como habíamos comentado al introducir el axioma de Martin, si Con(ZFC), también Con(ZFC+MA). Como MA(ω_1) es un resultado concreto de MA y hemos visto ahora que MA(ω_1) implica la negación de la hipótesis del continuo, tenemos Con(ZFC+MA+$\neg$CH) y, por tanto, también Con(ZFC+MA+$\neg$GCH).

8. Conclusiones

A lo largo de la memoria, hemos introducido el problema de Suslin, llamando hipótesis de Suslin a la respuesta afirmativa a la pregunta: supongamos que tenemos un conjunto denso $(X, <)$ totalmente ordenado, completo, sin extremos, y que X tiene la c.c.c. Entonces, ¿$(X, <)$ es isomorfo a la recta real, $(\mathbb{R}, <)$?

Tal como se comenta en la introducción, la hipótesis de Suslin puede ser expresada como: todo conjunto totalmente ordenado, denso que satisfaga la c.c.c. es separable, de modo que se requiere el estudio de la existencia de un conjunto totalmente ordenado que satisfaga la c.c.c. y no sea separable, es decir, el estudio de la existencia de rectas de Suslin. Así se ha abordado el trabajo.

Dentro de los principales resultados a los que hemos llegado se encuentra que, bajo el axioma de Martin $\mathrm{MA}(\omega_1)$, no existen árboles ω_1-Suslin. Como también se ha visto la equivalencia entre la existencia de árboles ω_1-Suslin y la existencia de rectas de Suslin, tenemos que $\mathrm{MA}(\omega_1)$ implica que no existen rectas de Suslin. De este modo, bajo el axioma de Martin $\mathrm{MA}(\omega_1)$, si tenemos un conjunto denso $(X, <)$ totalmente ordenado, completo, sin extremos, y que X tiene la c.c.c., entonces, $(X, <)$ es isomorfo a la recta real, $(\mathbb{R}, <)$.

Hemos demostrado también que el axioma $\diamondsuit$ implica la existencia de árboles ω_1-Suslin y, por lo tanto, de rectas de Suslin. De este modo, bajo el axioma $\diamondsuit$, si tenemos un conjunto denso $(X, <)$ totalmente ordenado, completo, sin extremos, y que X tiene la c.c.c., entonces no podemos afirmar que $(X, <)$ sea isomorfo a la recta real, $(\mathbb{R}, <)$.

Hemos visto también que el axioma $\diamondsuit$ implica la hipótesis del continuo, mientras que $\mathrm{MA}(\omega_1)$ implica la negación de la hipótesis del continuo.

Referencias

[DJ74] K.J. Devlin y H. Johnsbraten. *The Souslin Problem*. Vol. 405. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1974.

[Hal74] P.R. Halmos. *Lectures on Boolean Algebras*. Springer-Verlag, New York, 1974.

[Jec78] T. Jech. *Set Theory*. Vol. 79. Pure and Applied Mathematics. Academic Press, INC, 1978.

[Kan11] A. Kanamori. «Historical Remarks on Suslin's Problem». En: *Set Theory, Arithmetic, and Foundations of Mathematics: Theorems, Philosophies*. Ed. por J. Kennedy y R. Kossak. Vol. 36. Lecture Notes in Logic. Association for Symbolic Logic, 2011, págs. 1-12. URL: `https://math.bu.edu/people/aki/18.pdf`.

[Kun83] K. Kunen. *Set Theory: An Introduction to Independence Proofs*. Vol. 102. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. North-Holland, 1983.

Índice alfabético