Universitat de Barcelona
Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

Caos en l'ecologia

Autora: Mireia Soto Gómez

Director: Dr. Àngel Jorba Monte
Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 10 de juny de 2024

Abstract

In this work we delve into the world of dynamical systems, both continuous and discrete, studying how certain mathematical models evolve over time. We will see that, for some systems, by varying the initial conditions very little, they can turn into completely different results. This phenomenon is called chaos and is present, as we will see, in several models applied to ecology or climate. The aim of the project is to understand what are the ingredients for chaos, how to detect it and how to measure it.

Resum

En aquest treball ens endinsem al món dels sistemes dinàmics, tant continus com discrets, estudiant com evolucionen certs models matemàtics al llarg del temps. Veurem que, per alguns sistemes, variant una mica les condicions inicials, poden esdevenir resultats completament diferents. Aquest fenòmen s'anomena caos i és present, com veurem, en diversos models aplicats a l'ecologia o al clima. L'objectiu del projecte és entendre quins són els ingredients perquè hi hagi caos, com detectar-lo i com mesurar-lo.

2020 Mathematics Subject Classification. 37C25, 37D45, 39A33

Agraïments

Vull agrair al meu tutor, Dr. Àngel Jorba per acceptar portar el meu treball i facilitar-me tots els recursos per dur-lo a terme.

També vull donar les gràcies a tots els professors del grau per la seva dedicació per transmetre els coneixements matemàtics.

Finalment, a totes les persones que m'han donat suport durant aquest projecte i tota la meva vida universitària, especialment a la meva família i a la meva parella.

Índex

Capítol 1

Introducció

El projecte

Els sistemes dinàmics descriuen l'evolució temporal de models matemàtics i permeten estudiar-ne el comportament futur. És per això que són essencials en nombroses disciplines com l'ecologia, la física, la biologia, l'economia i l'enginyeria. Segons la seva naturalesa, es poden classificar en sistemes dinàmics deterministes i estocàstics. En els primers, l'evolució del sistema està completament determinada per les condicions inicials; en canvi, en els segons, aquesta inclou elements d'atzar. En aquest projecte només treballarem amb sistemes dinàmics deterministes, per tant, donada una condició inicial, el futur del sistema està fixat.

El caos determinista és un fenòmen que presenten alguns sistemes dinàmics amb extremada sensibilitat respecte les condicions inicials i dóna lloc a trajectòries aparentment aleatòries. A la pràctica, això fa que predir el comportament futur del sistema en qüestió sigui impossible.

La motivació d'aquest treball és entendre què és el caos, què cal per que alguns models matemàtics en presentin, com detectar-lo i com mesurar-lo.

Estudiarem en detall l'aplicació logística, exemple de sistema dinàmic discret, molt important en l'ecologia i l'atractor de Lorenz, com a exemple de sistema dinàmic continu, que modela la convecció atmosfèrica. Farem servir simulacions numèriques per entendre i graficar les diferents situacions dels models estudiats, així com un integrador numèric pel càlcul de solucions.

Estructura de la Memòria

Al capítol 1, introduirem les primeres definicions i conceptes bàsics sobre els sistemes dinàmics. Diferenciarem entre els discrets i els continus i parlarem d'òrbites i conjunts invariants.

A continuació, tractarem l'aplicació logística i farem un anàlisi detallat, amb ajuda de programes, per veure il·lustrar la seva dinàmica caòtica.

El capítol 3 està dedicat a l'atractor de Lorenz. Estudiarem les propietats del sistema i veurem que presenta caos.

Seguidament ens dedicarem a mesurar el caos trobat en els models anteriors, gràcies al càlcul dels respectius exponents de Lyapunov.

Finalment, al capítol 6, expliquem el mètode fet servir per integrar les EDOs que han aparegut al llarg de la memòria.

Capítol 2

Sistemes dinàmics continus i discrets

Un sistema dinàmic descriu l'evolució temporal d'un fenòmen físic o biològic, com podria ser l'oscil·lació d'un pèndol de rellotge, el flux de l'aigua en una canonada, el moviment de les partícules a l'aire o el nombre de peixos en un llac. Normalment, voldrem predir el destí del sistema al cap de molt de temps. Per exemple, si estudiem el moviment d'uns quants planetes sota la influència de les seves respectives forces gravitatòries, ens podem preguntar si el sistema persistirà per sempre o els planetes acabaran xocant. En aquest cas, sabem que el moviment del sistema és regular i convergeix cap a un equilibri, però, en general, els sistemes no són tan regulars i condicions inicials molt properes es podrien distanciar molt entre si en molt poc temps.

2.1 Primeres definicions

El concepte de sistema dinàmic té els seus orígens en la mecànica Newtoniana i està subordinat a la noció d'acció d'un semigrup sobre un conjunt:

Definició 2.1.1. *Una acció d'un semigrup A sobre un conjunt M és una aplicació $\phi : A \times M \to M$, que verifica:*

i) $\phi(0, x) = x$, *per a cada* $x \in M$*;*

ii) $\phi(s, \phi(t, x)) = \phi(s + t, x)$, *per a cada* $s, t \in A$ *i cada* $x \in M$.

A cada acció $\phi : A \times M \to M$, assignem una família de transformacions a M:

$$\phi_t : M \to M \; \phi_t(x) = \phi(t, x) \tag{2.1.1}$$

Aquesta família forma un semigrup amb la composició, ja que $\phi_0 = id_M$ i $\phi_s \circ \phi_t = \phi_{s+t}$.

Si A és un grup, aleshores les aplicacions ϕ_s són invertibles amb $(\phi_t)^{-1} = \phi_{-t}$ i la família $\{\phi_t\}_{t \in A}$ esdevé un grup. Aleshores, diem que l'acció és reversible i parlarem de sistemes dinàmics invertibles.

Definició 2.1.2. *Un sistema dinàmic és una acció*

$$\phi : A \times M \to M, \phi = \phi(t, x), \tag{2.1.2}$$

exercida per un semigrup A.

Normalment A s'interpreta com l'interval de temps d'existència del sistema i M com l'espai de fase. Els punts de M representen estats del sistema i $\phi(t, x)$ representa el flux o procés evolutiu a temps t, començant per l'estat inicial $\phi(0, x) = x$. A vegades farem servir la notació $\phi_x(t) = \phi(x, t)$ i $\phi_t(x) = \phi(t, x)$.

Quan $A = \mathbb{N}_0$ o $A = \mathbb{Z}$, parlarem de sistema dinàmic discret i quan $A = \mathbb{R}^+$ o $A = \mathbb{R}$, de sistema dinàmic continu. És fàcil passar d'un sistema dinàmic continu a discret mitjançant l'aplicació de Poincaré. Això ho veurem més endavant.

L'exemple més típic de sistema dinàmic discret és (AIXÒ POTSER NO HO POSO)

2.2 Òrbites i conjunts invariants

Sigui $\phi : S \times M \to M$ un sistema dinàmic i x un punt de M.

Definició 2.2.1. *L'òrbita positiva de x és el conjunt:*

$$\mathcal{O}^+(x) = \{\phi(t, x); t \in S_+\} \tag{2.2.1}$$

Per als sistemes temporalment complets, també podem parlar de l'òrbita negativa de x, que es defineix com:

$$\mathcal{O}^-(x) = \{\phi(-t, x); t \in S_+\} \tag{2.2.2}$$

Aleshores, l'òrbita completa de x és senzillament la unió de d'aquestes dues. És a dir, $\mathcal{O}(x) = \mathcal{O}^+(x) \cup \mathcal{O}^-(x)$.

Per tant, aquests tipus d'òrbites són les imatges de trajectòries al llarg de S_+, $-S_+$ o S respectivament. Notem que si $y \in \mathcal{O}(x)$ vol dir que $y = \phi(t, x)$ i per tant $\mathcal{O}(x) = \mathcal{O}(y)$. En particular, òrbites diferents són disjuntes.

Definició 2.2.2. *Diem que un subconjunt A de M és positivament invariant si*

$$\phi_t(A) \in A \forall t \in S_+ \tag{2.2.3}$$

i invariant si

$$\phi_t(A) \in A \forall t \in S. \tag{2.2.4}$$

L'exemple més senzill de conjunt invariant és el de punt fix:

Definició 2.2.3. *Un punt fix (o punt singular, estacionri o d'equilibri) és un punt $x \in M$ tal que*

$$\phi(x, t) = x, \forall t \in S. \tag{2.2.5}$$

Definició 2.2.4. *Diem que $x \in M$ és un punt periòdic de ϕ si existeix un $T \in S$, $T > 0$ tal que*

$$\phi(T, x) = x. \tag{2.2.6}$$

El període de x és la $T \in S$, $T > 0$ més petita que satisfà la propietat anterior. En el cas dels sistemes dinàmics discrets, els punts periòdics són precisament els punts fixos dels diferents iterats, i per això el seu estudi es redueix al cas dels punts fixos.

Una òrbita es diu òrbita periòdica si un (i per tant, tots) punt de l'òrbita és periòdica.

Les òrbites de punts periòdics també es diuen òrbites periòdiques o òrbites tancades.

Capítol 3

L'aplicació Logística

En aquesta secció, farem servir petits programes en C per il·lustrar un model d'aspecte molt senzill, que presenta una transició al caos. No hi ha una única via cap al caos, però el model que estudiem aquí, en mostra una, la coneguda com a duplicació de períodes. De fet, és el model més senzill del món amb una transició cap al caos.

L'aplicació logística va néixer amb la intenció de trobar un model demogràfic senzill que expliqués la dinàmica d'una població, suposant que aquesta té un creixement més lent a mesura que s'apropa a una quantitat d'individus considerada límit.

Considerem la següent aplicació, coneguda com l'a**plicació logística**:

$$\begin{aligned} F_\mu : [0,1] &\to [0,1] \\ x &\mapsto \mu x(1-x) \end{aligned} \tag{3.0.1}$$

on μ és un paràmetre positiu.

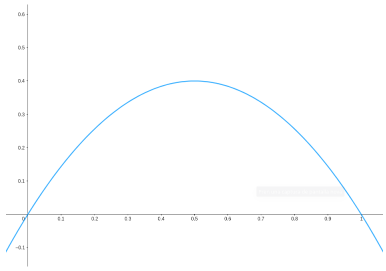
Si $x_{n+1} = F_\mu(x_n)$, obtenim el sistema dinàmic discret:

$$x_{n+1} = \mu x_n(1-x_n) \tag{3.0.2}$$

on x_n representaria el percentatge del màxim teòric d'una població l'any n i μ és a taxa de creixement d'aquesta població.

Ens interessarà estudiar el comportament de les iteracions successives d'aquest mapa, en funció del paràmetre μ, que restringirem al rang $0 \leq \mu \leq 4$ per tal que $0 \leq x \leq 1$. En particular, estudiarem el comportament de x_n per a n gran.

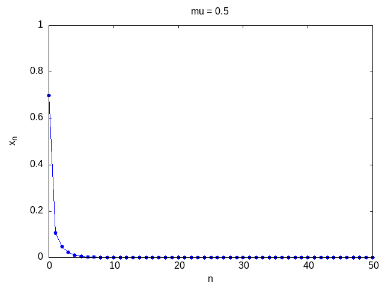
Si grafiquem $F_\mu(x) = \mu x_n(1-x_n)$, obtenim una paràbola invertida que s'anul·la en $x=0$ i $x=1$ i que presenta un únic màxim de $\frac{\mu}{4}$ en $x=\frac{1}{2}$.



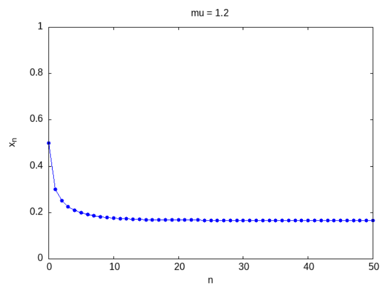
3.1 Doblació de període

Veiem què passa per diferents iteracions successives per a uns quants valors de μ.

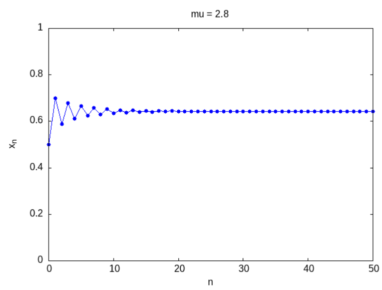
- Si $0 < \mu < 1$, la població eventualment morirà, independentment de la població inicial:



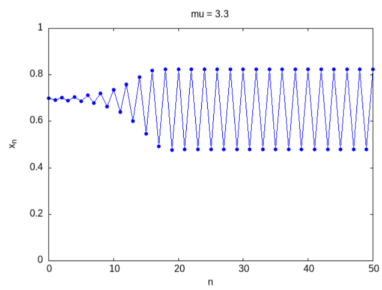
- Si $1 < \mu < 2$, la població s'acostarà ràpidament al valor $\frac{\mu-1}{\mu}$, independentment de la població inicial:



- Si $2 < \mu < 3$, la població també s'acostarà al valor $\frac{\mu-1}{\mu}$, independentment de la població inicial, però primer fluctuarà al voltant d'aquest valor durant un temps:

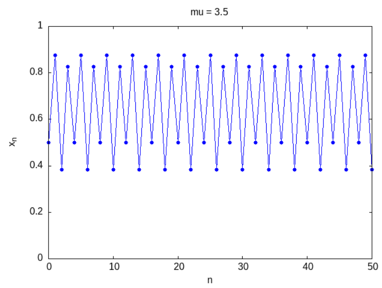


- Si $3 < \mu < 1 + \sqrt{6}$, la població s'acostarà a oscil·lacions permanents entre els dos valors $\frac{r+1\pm\sqrt{(r-3)(r-1)}}{2\mu}$, independentment de la població inicial:



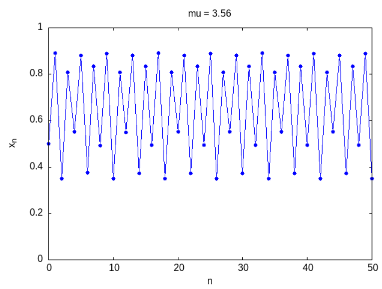
Aquest tipus d'oscil·lació, en el qual x_n es repeteix cada dues iteracions, s'anomena **cicle de període 2**.

- Si $3,44949 < \mu < 3,54409$, la població s'acostarà a oscil·lacions permanents entre quatre valors:



És a dir, el cicle anterior ha duplicat el seu període, creant un **cicle de període 4**.

- Per $\mu > 3,54409$, la població s'acostarà a oscil·lacions permanents entre 8 valors, després 16, 32, 64, 128, 256, 512... etc:



A mesura que anem augmentant la μ, es produeixen més duplicacions de període, que donen lloc a cicles de període 16, 32, 64, 128, 256, 512... etc. Sigui μ_n el valor de μ on apareix per primera vegada un cicle de període 2^n. Tenim que:

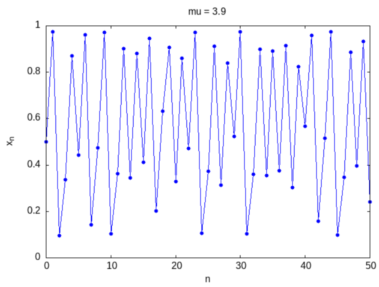
$\mu_1 = 3$	neix un cicle de període 2
$\mu_2 = 3.44948974278317$	4
$\mu_3 = 3.54409035955192$	8
$\mu_4 = 3.56440726609543$	16
$\mu_5 = 3.56875941954382$	32
$\mu_6 = 3.56969160980139$	64
$\mu_7 = 3.56989125937811$	128
$\mu_8 = 3.56993408000001$	256
$\mu_9 = 3.56994317604840$	512
$\mu_10 = 3.56994513734218$	1024
$\mu_11 = 3.56994555739125$	2048
$\mu_12 = 3.56994565120000$	4096
$\mu_13 = 3.56994567413760$	8192
$\mu_14 = 3.56994567520255$	16384
$\mu_15 = 3.56994567536639$	32768
$\mu_16 = 3.56994567540244$	65536
$\vdots$	$\vdots$
$\mu_\infty = 3.5699456\ldots$	∞

Notem que les doblacions de període passen cada vegada més ràpic i finalment, r_∞ convergeix cap a un valor acotat. En el límit quan $n \to \infty$, la distància entre doblacions de període consecutius és la coneguda **constant de Feigenbaum**:

$$\delta = \lim_{n\to\infty} \frac{\mu_{n-1} - \mu_{n-2}}{\mu_n - \mu_{n-1}} = 4.669201609\ldots$$

3.2 Caos i finestres periòdiques

Estudiem ara, què passa quan $\mu > \mu_\infty$. Resulta que per molts valors de μ, la seqüència $\{x_n\}$ mai s'estableix en un punt fix o òrbita periòdica, sinó que té un comportament aperiòdic:



Un podria pensar que a mesura que μ augmenta, el sistema es va tornant més i més caòtic, no és així. Per veure el comportament a llarg termini de tots els valors de μ alhora, he escrit un programa en C que dibuixa el diagrama d'òrbita. Consisteix bàsicament en dos bucles: primer de tot es tria el valor de μ. Aleshores, es genera una òrbita comenÃ§ant per qualsevol condició inicial x_0. Jo, per exemple, he triat $x_0 = 0.5$, però podria haver triat qualsevol altre valor entre 0 i 1. Iterem fins que el sistema s'estabilitzi en alguna cosa i dibuixem uns quants punts a partir d'allà. A continuació, repetim el procés per al següent valor de μ, fins a arribar a $\mu = 4$.

Aquest és el codi en C que he escrit:

```c
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

int main(void){

    int i, j;
    double x[600], mu;

    for(mu=0; mu<=4; mu+=0.0001){
        x[0]=0.5;

        for(i=0; i<600; i++)
            x[i+1]=mu*x[i]*(1.-x[i]);
        for(j=400; j<600; j++)
            printf("%le %le \n", mu, x[j]);
    }
    return 0;
}
```

La Figura 3.1 mostra el dibuix que en resulta.

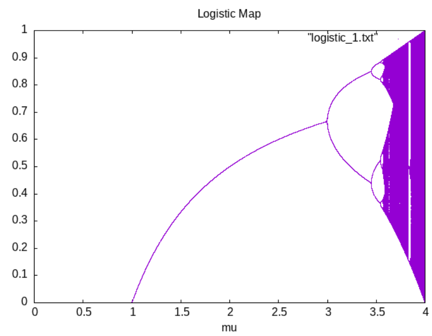


Figura 3.1: Aplicació logística amb $0 < \mu < 4$

Les branques indiquen que al principi, l'atractor és un sol punt. A mesura que μ creix, l'atractor és un cicle de període 2, i després, aquestes dues branques es divideixen simultàniament, donant lloc a un cicle de període 4. Aquesta bifurcació divisió és la duplicació de període esmentada anteriorment. Es produeix una cascada de duplicacions de període addicionals a mesura que μ augmenta, donant lloc a cicles de període 8, 16... i aixií successivament fins que $\mu = \mu_\infty = 3,57$, on la dinàmica es torna caòtica i l'atractor passa de ser un conjunt finit de punts a un conjunt infinit de punts.

Per a $\mu > \mu_\infty$, el diagrama de l'òrbita experimenta una barreja d'ordre i caos. És a dir, alterna finestres periòdiques i zones caòtiques amb infinits punts. La finestra gran que comença a prop de $\mu = 3,83$ conté un cicle de període 3 estable.

Observem que la Figura 3.3 és una còpia en miniatura del diagrama d'òrbites de les anteriors.

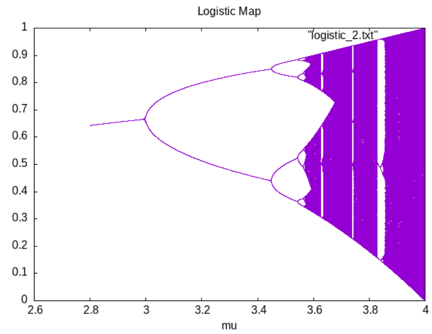


Figura 3.2: Aplicació logística amb $2.8 < \mu < 4$

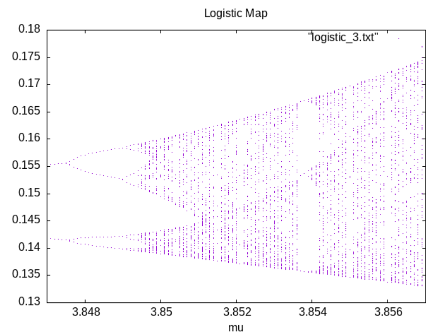


Figura 3.3: Aplicació logística amb $3.847 < \mu < 4$

3.3 Anàlisi

Considerem l'aplicació logística $x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n)$ per $0 \leq x_n \leq 1$ i $0 \leq \mu \leq 4$. Anem a trobar-ne els punts fixos, és a dir, els punts que compleixen que $x^* = f(x^*) = \mu x^*(1-x^*)$. Trobem que o bé $x^* = 0$ o bé $x^* = 1 - \frac{1}{\mu}$, per tant, l'origen és un punt fix $\forall \mu$ i $x^* = \mu x^*(1 - x^*)$ només ho és si $\mu \geq 1$, per tal que x^* pertanyi al domini de definició.

Estudiem ara l'estabilitat d'aquests dos punts fixos trobats. Tenim que

$$f'(x^*) = \mu - 2\mu x^*$$

i per tant

- Punt fix $x^* = 0$:

  Com que $f'(0) = \mu$, el punt $x^* = 0$ és estable per $\mu < 1$ i inestable per $\mu > 1$.

- Punt fix $x^* = 1 - \frac{1}{\mu}$:

  Com que $f'(1 - \frac{1}{\mu}) = \mu - 2\mu(1 - \frac{1}{\mu}) = 2 - \mu$, el punt $x^* = 1 - \frac{1}{\mu}$ és estable per $|2 - \mu| > 1$, és a dir, per $1 < \mu < 3$. És inestable per $\mu > 3$.

Veiem-ne l'anàlisis gràfic:

Per a $\mu < 1$, la paràbola es troba per sota de la diagonal i l'origen és l'únic punt fix. A mesura que μ augmenta, la paràbola també ho fa i es torna tangent a la diagonal quan

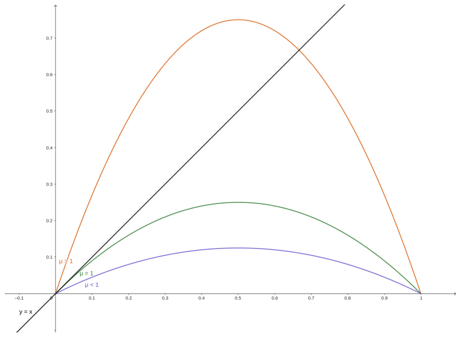


Figura 3.4: x_{n+1} per diferents valors de μ

$\mu = 1$. Per a $\mu > 1$, la paràbola talla la diagonal en el segon punt fix, $x^* = 1 - \frac{1}{\mu}$. Així, en $\mu = 1$ tenim una bifurcació transcrítica.

Veiem ara, que l'aplicació logística té un cicle de període 2 per a $\mu > 3$: per tal que això passi, hi ha d'haver un punt p tal que $f(f(p)) = p$, on $f(x) = \mu x(1-x)$. p seria, aleshores, un punt fix de l'aplicació $f^2(x) = f(f(x))$. Per $\mu > 3$, la funció f^2 és la següent:

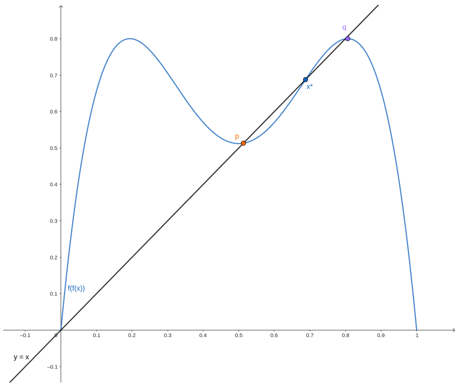


Figura 3.5: f^2 per a $\mu > 3$

Per trobar els punts on la gràfica talla la diagonal, resolem l'equació $f^2(x) = x$.

És a dir, hem de resoldre $f(f(x)) = \mu(\mu x(1-x)) \cdot (1 - (\mu x(1-x))) = x$.

Ara bé, com que sabem que $x^* = 0$ i $x^* = 1 - \frac{1}{\mu}$ satisfan $f(x) = x$, també satisfaran $f(f(x)) = x$. Per tant, podem factoritzar i així simplificar l'equació a resoldre:

$$\mu(\mu x(1-x)) \cdot (1 - (\mu x(1-x))) = x \tag{3.3.1}$$

$$\mu^2 x(1-x) - \mu^3 x^2 (1-x)^2 - x = 0 \tag{3.3.2}$$

Dividint l'equació entre x, queda:

$$\mu^2(1-x) - \mu^3 x(1-x)^2 - 1 = 0 \tag{3.3.3}$$

Dividint ara entre $x - (1 - \frac{1}{\mu})$, obtenim:

$$\mu x^2 - (\mu+1)x + 1 + \frac{1}{\mu} = 0 \tag{3.3.4}$$

Per tant,

$$x = \frac{\mu + 1 \pm \sqrt{\mu^2 - 2\mu - 3}}{2 \cdot \mu} \tag{3.3.5}$$

Aquestes dues arrels obtingudes són reals per a $\mu > 3$, cosa que demostra que existeix un cicle de període 2 per a tots els $\mu > 3$. Quan $\mu = 3$, les arrels coincideixen i valen $x^* = \frac{3+1\pm 0}{2\cdot 3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, la qual cosa mostra que el cicle de període 2 es bifurca de manera conínua a partir de x^*. Per a $\mu < 3$, les arrels són complexes i per tant no existeix cap cicle de període 2.

Procedim ara a anal·litzar l'estabilitat dels cicles de període 2. Per fer-ho, estudiarem l'estabilitat dels punts fixos de l'aplicació $f^2(x)$ trobats:

- $p := \frac{\mu+1-\sqrt{\mu^2-2\mu-3}}{2\cdot\mu}$
- $q := \frac{\mu+1+\sqrt{\mu^2-2\mu-3}}{2\cdot\mu}$

Si p i q són estables, aleshores el cicle de període 2 també ho serà.

Per determinar si p és un punt fix estable de f^2, calculem el multiplicador:

$$\lambda = \frac{d}{dx}(f(f(x)))\bigg|_{x=p} = f'(f(x))f'(x)\big|_{x=p} = f'(f(p))f'(p) = f'(q)f'(p)$$

on hem fet servir la regla de la cadena i que $f(p) = q$.

Notem que obtenim exactament la mateixa λ avaluant l'expressió anterior en $x = q$, ja que $f(q) = p$. Per tant, quan les branques de p i q es bifurquin, ho faran simultàniament.

Calculem ara el valor de λ (en funció de μ).

Recordem que $f(x) = \mu x(1 - x)$, i que $f'(x) = \mu - 2\mu x$. Per tant,

$$\begin{aligned}
\lambda &= f'(q)f'(p) \\
&= \left(\mu - 2\mu\left(\frac{\mu + 1 + \sqrt{\mu^2 - 2\mu - 3}}{2\mu}\right)\right) \cdot \left(\mu - 2\mu\left(\frac{\mu + 1 - \sqrt{\mu^2 - 2\mu - 3}}{2\mu}\right)\right) \\
&= \left(\mu - \mu - 1 - \sqrt{\mu^2 - 2\mu - 3}\right) \cdot \left(\mu - \mu - 1 + \sqrt{\mu^2 - 2\mu - 3}\right) \\
&= (-1 - \sqrt{\mu^2 - 2\mu - 3}) \cdot (-1 + \sqrt{\mu^2 - 2\mu - 3}) \\
&= 1^2 - \sqrt{\mu^2 - 2\mu - 3} \\
&= 1 - \mu^2 + 2\mu + 3 \\
&= 4 + 2\mu - \mu^2.
\end{aligned}$$

Així, el cicle de període 2 és linealment estable per $\left|4 + 2\mu - \mu^2\right| < 1$, és a dir, per $3 < \mu < 1 + \sqrt{6}$.

Observem que el diagrama de bifurcacions reflecteix el que hem vist fins ara:

A la secció 5.2.1, tornarem a veure ben reflectit que que hi ha zones d'ordre dintre del caos, fent servir el càlcul de l'exponent de Lyapunov.

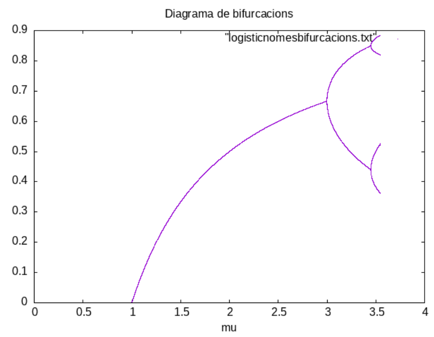


Figura 3.6: Diagrama de bifurcacions aplicació logística

Capítol 4

L'atractor de Lorenz

L'any 1963, el matemàtic i meteoròleg Edward Lorenz, mentre estudiava els límits de la predictibilitat de les condicions meteorològiques, va descobrir i analitzar, amb l'ajuda d'un ordinador, un atractor caòtic sensible a les condicions inicials. El sistema que va considerar és el següent:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\sigma(x - y) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= xy - bz \end{aligned} \tag{4.0.1}$$

on σ, r, i b són paràmetres positius.

Aquest sistema és un model simplificat del moviment convectiu d'una cèl·lula de fluid bidimensional escalfada des de dalt i refredada des de baix. La variable x mesura la velocitat de gir convictiu, la y mesura el gir horitzontal i z el gir vertical del fluid a través de la cèl·lula. El paràmetre σ és proporcional al nombre de Prandtl, que representa la relació entre la viscositat cinemàtica i la seva conductivitat tèrmica, el paràmetre r és proporcional al nombre de Rayleigh, que representa la diferència de temperatura entre la part superior i inferior del sistema, i el paràmetre b és proporcional a les proporcions físiques de la cel·lula. Per tant, els tres paràmetres són positius, ja que representen magnituds físiques.

Els valors més estudiats dels paràmetres són $\sigma = 10$, $r = 28$ i $b = \frac{8}{3}$, però també és interessant estudiar què passa quan r creix de 0 a ∞.

4.1 Propietats del sistema

En primer lloc, observem que el sistema de Lorenz (4.0.1) no és lineal. Concretament, té dos termes quadràtics, xy i xz.

Observem també que hi ha una simetria important en les equacions de Lorenz:

Proposició 4.1.1. *El sistema de Lorenz és invariant sota la transformació* $(x, y, z) \mapsto (-x, -y, z)$.

Demostració. Veiem que substituint (x, y) per $(-x, -y)$ a (4.0.1), obtenim exactament el mateix sistema:

$$\begin{aligned} -\dot{x} &= -\sigma(-x+y) \\ -\dot{y} &= -rx+y+xz \\ \dot{z} &= -(-xy)-bz \end{aligned} \qquad \equiv \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= -\sigma(x-y) \\ \dot{y} &= rx-y-xz \\ \dot{z} &= xy-bz \end{aligned}$$

□

Per tant, si $(x(t), y(t), z(t)$ és una solució, aleshores $(-x(t), -y(t), z(t))$ també ho és.

Proposició 4.1.2. *L'eix z és invariant.*

Demostració. Prenem un punt qualsevol de l'eix z, per exemple, el $(0, 0, z_0)$. Restringing el sistema de Lorenz (4.0.1) a aquest eix, obtenim:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 0 \\ \dot{y} &= 0 \\ \dot{z} &= -bz \end{aligned}$$

Integrant aquestes equacions i aplicant la condició inicial $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, z_0)$, obtenim que:

Per $x(t)$:

$$x(t) = x_0 = 0, \forall t > 0$$

Per $y(t)$:

$$y(t) = y_0 = 0, \forall t > 0$$

Per $z(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= -bz \\ \frac{dz}{z} &= -bdt \\ \int_{z_0}^{z} \frac{ds}{s} &= \int_{t_0}^{t} -bd\tau \\ [\log s]_{z_0}^{z} &= -b \cdot [\tau]_{t_0}^{t} \\ \log z - \log z_0 &= -b \cdot (t - t_0) \\ \log z &= \log z_0 - bt + bt_0 \\ z(t) &= e^{\log z_0} \cdot e^{-bt+bt_0} \end{aligned}$$

Com que $t_0 = 0$, obtenim, finalment, que

$$z(t) = z_0 e^{-bt}, \forall t > 0$$

Per tant, l'eix z és un conjunt invariant, és a dir, que totes les trajectòries que comencen en aquest eix, s'hi queden.

A més a més, notem que

$$\lim_{t\to\infty} z(t) = \lim_{t\to\infty} z_0 e^{-bt} = 0$$

la qual cosa vol dir que les trajectòries que comencen a l'eix z, no només s'hi queden, sinó que també tendeixen l'origen $(0,0,0)$ quan $t \to \infty$. $\square$

Veiem ara, que el sistema de Lorenz és dissipatiu, és a dir, que el volum en l'espai de fases es contrau sota el flux.

Abans, però, enunciem alguns resultats que ens permetran demostrar-ho.

Lema 4.1.3 (Fórmula de Liouville)**.** *Considerem l'equació lineal homogènia definida com $\dot{x} = A(t)x$ i sigui $N(t)$ una matriu de solucions. Aleshores per a tot $t_0 \in I$ tenim que*

$$\det(N(t)) = \det(N(t_0)) \exp\left(\int_{t_0}^{t} \mathrm{Tr}(A(s))\, ds\right) \tag{4.1.1}$$

on $\mathrm{Tr}(B)$ *denota la traça de la matriu* B.

Demostració. Veuere a [10]. $\square$

Lema 4.1.4. *Sigui $\dot{x} = f(x)$ un sistema dinàmic a $\mathbb{R}^n$ amb el corresponent flux $\phi(t,x)$. Sigui U un subconjunt obert acotat de $\mathbb{R}^n$ i $V = \int_U dx$ el seu volum. Per abreviar la notació, escriurem $U(t) = \phi(t,U)$ i $V(t) = \int_{U(t)} dx$. Aleshores,*

$$\dot{V}(t) = \int_{U(t)} div(f(x))dx \tag{4.1.2}$$

Demostració. Per la fórmula del canvi de variables en $\mathbb{R}^n$ tenim que

$$V(t) = \int_{U(t)} dx = \int_U \det(D\varphi(t,x))dx,$$

on $D\varphi(t,x)$ és el Jacobià del flux.

Com que per definició $\Pi(t,x) = D\varphi(t,x)$ satisfà la primera equació variacional,

$$\dot{\Pi}(t,x) = D_x f(\varphi(t,x))\Pi(t,x),$$

la fórmula de Liouville 4.1.3 implica que

$$\det(D\varphi(t,x)) = \exp\left(\int_0^t \mathrm{Tr}(Df(\varphi(s,x)))ds\right),$$

Notem que $\mathrm{Tr}(Df(x)) = \mathrm{div}(f(x))$ i que per tant $\mathrm{Tr}(Df(\varphi(s,x))) = \mathrm{div}(f(\varphi(s,x)))$. És a dir, ens queda que

$$\det(D\varphi(t,x)) = \exp\left(\int_0^t \mathrm{div}(f(\varphi(s,x)))ds\right).$$

Derivant respecte el temps:

$$\frac{d}{dt}\det(D\varphi(t,x)) = \mathrm{div}(f(\varphi(t,x)))\det(D\varphi(t,x)).$$

És a dir, que derivant el volum respecte el temps, obtenim:

$$\dot{V}(t) = \int_U \operatorname{div}(f(\varphi(t,x)) \det(D\varphi(t,x))dx.$$

Aplicant un cop més la fórmula del canvi de variable,

$$\dot{V}(t) = \int_{U(t)} \operatorname{div}(f(x))dx$$

□

Definició 4.1.5. *Un camp f és conservatiu $\iff$ div$(f) = 0$.*

Teorema 4.1.6. *El sistema de Lorenz és dissipatiu, $\forall \sigma, b, r > 0$. És a dir, els volums a l'espai de fase es contrauen sota el flux.*

Demostració. Sigui $V(t)$ un volum arbitrari acotat. El lema 4.1.3 ens diu que

$$\dot{V}(t) = \int_V \operatorname{div}(f(x))dx.$$

Per aplicar aquest resultat al sistema de Lorenz, ens cal calcular-ne la divergència:

$$\operatorname{div}(f(x)) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Veiem que la divergència és constant i estrictament negativa

$$\operatorname{div}(f(x)) = -\sigma - 1 - b = -(\sigma + 1 + b) < 0,$$

ja que $\sigma, b, r > 0$. Per tant, el sistema no és conservatiu.

Com que la variació del volum ve descrita per

$$\dot{V}(t) = -(\sigma + 1 + b)V,$$

resolent l'equació diferencial obtenim que

$$V(t) = e^{-(\sigma+1+b)V(0)},$$

on $V(0)$ denota el volum inicial del conjunt de partida. Això conclou que el sistema de Lorenz ésdissipatiu. qualsevol volum en l'espai de fases es redueix de manera exponencial fins a un conjunt atractor de volum 0. □

Aquesta contracció de volum imposa fortes restriccions sobre les possibles solucions de les equacions de Lorenz. Les proposicions 4.1.7 i 4.1.8 n'il·lustren dues.

Proposició 4.1.7. *Les equacions de Lorenz no presenten solucions quasiperiòdiques.*

Demostració. Demosració per contrdicció. Suposem que existeix una solució quasiperiòdica del sistema de Lorenz. Aleshores, aquesta solució han d'estar sobre la superfície d'un tor invariant respecte el flux. (veure a la secció 8.6. del llibre X). Per tant, el volum interior d'aquest tor hauria de ser constant per tot temps, cosa que contradiu el fet que els volums es contrauen exponencialment. □

Proposició 4.1.8. *El sistema de Lorenz no té punts fixos totalment repulsors ni òrbites tancades totalment repulsores.*

Demostració. Els repulsors són incomptibles amb la contracció del volum, perquè són justament causants de volum: Suposem que englobem un repulsor amb una superfície tancada de condicions inicials properes a l'espai de fase. Imaginem una petita esfera al voltant d'un punt fix, o un tub prim al voltant d'una òrbita tancada. Al cap de poc temps, la superfície s'haurà expandit a mesura que les trajectòries corresponents s'allunyen. Així, augmentaria el volum dins de la superfície, cosa que contradiu el fet que els volums es contrauen. □

Veiem ara que el sistema de Lorenz (4.0.1) té dos tipus de punts fixos: l'origen $(0, 0, 0)$ i C^+ i C^-.

Proposició 4.1.9. *L'origen* $(0, 0, 0)$ *és un punt fix del sistema de Lorenz (4.0.1) per tots els valors dels paràmetres* σ*,* r *i* b*.*

Demostració. Simplement substituint el punt $(0, 0, 0)$ a (4.0.1), veiem que les equacions

$$\begin{aligned} 0 &= -\sigma(0-0) \\ 0 &= r\cdot 0 - 0 - 0\cdot 0 \\ 0 &= 0\cdot 0 - b\cdot 0 \end{aligned}$$

es compleixen per qualsevol valor de σ, r i b. □

Proposició 4.1.10. *Per* $r > 1$*, hi ha un parell de punts fixos simètrics* C^+ *i* C^-

$$\begin{aligned} C^+ &= \left(+\sqrt{b(r-1)}, +\sqrt{b(r-1)}, r-1\right) \\ C^- &= \left(-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1\right) \end{aligned}$$

Demostració. Es tracta de resoldre el sistema

$$\begin{cases} 0 = \sigma(y-x) \\ 0 = rx - y - xz \\ 0 = xy - bz \end{cases}$$

Com que tots els paràmetres σ, r i $b > 0$, passant la σ de la primera equació dividint, trobem que $x = y$. Per tant, el sistema queda:

$$\begin{cases} x = y \\ 0 = rx - x - xz \\ 0 = x^2 - bz \end{cases}$$

i equivalentment

$$\begin{cases} x = y \\ 0 = x(r-1-z) \\ 0 = x^2 - bz \end{cases}$$

Sabem que l'origen és un punt d'equilibri, per tant, suposem que $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$. Aleshores:

$$\begin{cases} x = y \\ z = r-1 \\ x^2 = bz \end{cases}$$

d'on trobem els dos punts fixos que buscàvem:

$$\begin{aligned} C^+ &= \left(+\sqrt{b(r-1)}, +\sqrt{b(r-1)}, r-1\right) \\ C^- &= \left(-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1\right) \end{aligned}$$

□

Observació 4.1.11. Quan $r = 1$, aleshores $C^+ = C^- = (0, 0, 0)$ i tenim, per tant, un sol punt d'equilibri. En el límit $r \to 1^+$, els punts fixos C^+ i C^- tendeixen a l'origen i per tant, tenim una bifurcació del tipus pitchfork a l'origen. (Recordem que una bifurcació del tipus pitchfork és un tipus de bifurcació on el sistema passa d'un sol punt fix a tres).

Estudiem ara l'estabilitat dels punts fixos trobats, començant per la de l'origen:

La linealització a l'origen s'obté ometent els termes no lineals xy i xy de (4.0.1) i és:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= rx - y \\ \dot{z} &= -bz \end{aligned}$$

L'equació per z és independent de la resta i ens mostra que $z(t) \to 0$ a velocitat exponencial. Les altres dues direccions es regeixen pel sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma \\ r & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

amb traça $\tau = -\sigma - 1 < 0$ i determinant $\Delta = \sigma(1 - r)$.

- Si $r > 1$:

  L'origen és un punt de sella, perquè $\Delta < 0$. Tenint en compte que $z(t) \to 0$, la sella té una direcció que s'allunya i dues que s'apropen.

- Si $r < 1$:

  L'origen atrau totes les direccions. Com que $\tau^2 - 4\Delta = (\sigma + 1)^2 - 4\sigma(1 - r) = (\sigma - 1)^2 + 4\sigma r > 0$, l'origen és un punt fix estable.

Proposició 4.1.12. *L'origen és* ***globalment estable*** *per $r < 1$, ja que al $t \to \infty$, tota trajectòria s'aproxima a ell.*

Demostració. Per demostrar la proposició, ens caldrà construir una funció de Lyapunov, que no és res més que una funció definida positiva i C^∞ que disminueix al llarg de les trajectòries. No hi ha cap manera sistemàtica de dissenyar funcions de Lyapunov, però sovint surt bé provar amb expressions que involucren sumes de quadrats.

En el nostre cas, considerem la funció $V(x,y,z) := \frac{1}{\sigma}x^2 + y^2 + z^2$.

Quan $V = constant$, tenim un el·lipsoide concèntric al voltant de l'origen, tal i com mostra la Figura 4.1:

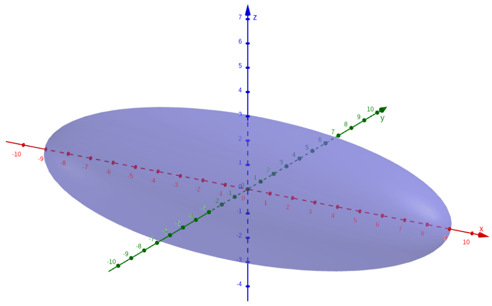


Figura 4.1: $V(x,y,z) = constant$

Si veiem que quan $r < 1$ i $(x,y,z) \neq (0,0,0)$, aleshores $\dot{V} < 0$, ja haurem acabat, perquè això implicaria que V es va fent cada vegada més petit a mesura que avança el temps ($V(x(t)) \to 0$, $t \to \infty$) i que per tant totes les trajectòries tendeixen a l'origen ($x(t) \to 0$, $t \to \infty$).

Calculem, doncs, la derivada de V respecte el temps:

$$\begin{aligned}
V &= \frac{1}{\sigma}x^2 + y^2 + z^2 \\
\dot{V} &= \frac{1}{\sigma}2x\dot{x} + 2y\dot{y} + 2z\dot{z} \\
\frac{1}{2}\dot{V} &= \frac{1}{\sigma}x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}
\end{aligned}$$

Substituïnt $\dot{x} = \sigma(y-x)$, $\dot{y} = rx - y$ i $\dot{z} = -bz$, queda:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\dot{V} &= \frac{1}{\sigma}x\sigma(y-x) + y(rx-y) + z(-bz) \\
&= x(y-x) + yrx - y^2 - bz^2 \\
&= xy - x^2 + yrx - y^2 - bz^2 \\
&= (r+1)xy - x^2 - y^2 - bz^2
\end{aligned}$$

Completant quadrats pels dos primers termes, obtenim:

$$\frac{1}{2}\dot{V} = -\left(x - \frac{r+1}{2}y\right)^2 - \left(1 - \left(\frac{r+1}{2}\right)^2\right)y^2 - bz^2$$

D'on veiem que clarament $\dot{V} \not> 0$, al ser una suma negativa de quadrats. Per tant, en principi poden passar dues coses:

- $\dot{V} < 0$, que és el que voldríem
- $\dot{V} = 0$

Veiem doncs, que no pot passar que $\dot{V} = 0$:

Si fos $\dot{V} = 0$, cadascun dels termes de la dreta s'haurien d'anul·lar per separat. Com que $r < 1$, el terme $\left(\frac{r+1}{2}\right)^2$ ha de ser $\neq 1$, és a dir que $1 - \left(\frac{r+1}{2}\right)^2 \neq 0$, i per tant y ha de ser igual a zero. Al ser $b > 0$, també veiem que z ha de valdre zero. Per tant, hem vist que $y = 0$ i que $z = 0$, que implica que $-x^2 = 0$. Sent així, tindríem que $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, que contradiu directament $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, fet que hem suposat d'entrada. Per tant, hem vist que $\dot{V} \neq 0$.

Acabem de veure, doncs, que $\dot{V} < 0$ quan $r < 1$ i $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, que acaba la demostració. $\square$

Observació 4.1.13. Notem que la proposició anterior implica que per $r < 1$, no pot haver-hi cicles límit ni caos.

Estudiem ara l'estabilitat de la resta de punts fixos: C^+ i C^-. Suposem, que $r > 1$, per tal que aquests existeixin. Considerem la matriu Jacobiana del sistema de Lorenz linealitzat:

$$\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}$$

Calculem-ne els valors propis, trobant les solucions de l'equació

$$\begin{vmatrix} -\sigma - \lambda & \sigma & 0 \\ r & -1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -b - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -\sigma - \lambda & \sigma & 0 \\ r & -1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -b - \lambda \end{vmatrix} &= (-\sigma - \lambda)(-1 - \lambda)(-b - \lambda) - \sigma r(-b - \lambda) \\ &= (-b - \lambda)\left((-\sigma - \lambda)(-1 - \lambda) - \sigma r\right) \\ &= (-b - \lambda)\left(\lambda^2 + (\sigma + 1)\lambda + \sigma - \sigma r\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Solucions:

$$\lambda_1 = -b$$
$$\lambda_2 = \frac{-(\sigma+1) + \sqrt{(\sigma+1)^2 - 4(\sigma - \sigma r)}}{2} = \frac{-(\sigma+1) + \sqrt{(\sigma-1)^2 + 4\sigma r}}{2}$$
$$\lambda_3 = \frac{-(\sigma+1) - \sqrt{(\sigma+1)^2 - 4(\sigma - \sigma r)}}{2} = \frac{-(\sigma+1) - \sqrt{(\sigma-1)^2 + 4\sigma r}}{2}$$

Observació 4.1.14. La part real de tots els valors propis trobats és estrictament negativa, la qual cosa implica que C^+ i C^- són estables. En particular, existeix una direcció, associada a λ_1, que està atreta al punt fix. També es podria arribar a demostrar que al voltant de cada un dels punts fixos existeix un cicle límit inestable, però aquí no ho veurem.

Considerem ara la matriu Jacobiana del sistema de Lorenz no linealitzat:

$$\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r-z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix}$$

Calculem-ne els valors propis, trobant les solucions de l'equació

$$\begin{vmatrix} -\sigma-\lambda & \sigma & 0 \\ r-z & -1-\lambda & -x \\ y & x & -b-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -\sigma-\lambda & \sigma & 0 \\ r-z & -1-\lambda & -x \\ y & x & -b-\lambda \end{vmatrix} &= (-\sigma-\lambda)(-1-\lambda)(-b-\lambda) - \sigma xy \\ &- \sigma(r-z)(-b-\lambda) + (-\sigma-\lambda)x^2 \end{aligned}$$

Arreglant l'expressió, queda

$$-\lambda^3 - b\lambda^2 - \lambda^2 - b\lambda - x^2\lambda - b\sigma + br\sigma - x^2\sigma - xy\sigma - bz\sigma - \lambda^2\sigma - b\lambda\sigma + r\lambda\sigma - z\lambda\sigma - \lambda\sigma = 0 \quad (4.1.3)$$

Substituint $C^+ = (x,y,z) = \left(+\sqrt{b(r-1)}, +\sqrt{b(r-1)}, r-1\right)$, l'equació 4.1.3 queda

$$\begin{aligned} &-\lambda^3 - b\lambda^2 - \lambda^2 - b\lambda - b(r-1)\lambda - b\sigma + br\sigma - \\ &- b(r-1)\sigma - b(r-1)\sigma - b(r-1)\sigma - \lambda^2\sigma - b\lambda\sigma + r\lambda\sigma - (r-1)\lambda\sigma - \lambda\sigma = 0 \end{aligned}$$

Agrupant termes

$$\lambda^3 + (b+1+\sigma)\lambda^2 + b(1+(r-1)+\sigma)\lambda + (-r\sigma + (r-1)\sigma + \sigma)\lambda + 2b\sigma(r-1) = 0$$

i simplificant termes, tenim

$$\lambda^3 + (b+1+\sigma)\lambda^2 + b(\sigma+r)\lambda + 2b\sigma(r-1) = 0 \quad (4.1.4)$$

Observació 4.1.15. Notem que per $C^- = \left(-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1\right)$ queda una expressió idèntica, ja que tots els termes x, y i z de 4.1.3 són quadràtics.

Mirem quan els valors propis tallen l'eix imaginari, és a dir, busquem les solucions de la forma $\lambda = i\omega$, amb $\omega \in \mathbb{R}$. Substituïm, per tant, $\lambda = i\omega$ a 4.1.4

$$(i\omega)^3 + (b+1+\sigma)(i\omega)^2 + b(\sigma+r)(i\omega) + 2b\sigma(r-1) = 0 \tag{4.1.5}$$

Tenim que

- Part real: $-(b+1+\sigma)\omega^2 + 2b\sigma(r-1)$
- Part imaginària: $-\omega^3 + b(\sigma+r)\omega$

D'anul·lar totes dues parts per separat, obtenim següents equacions:

$$\begin{cases} -(b+1+\sigma)\omega^2 + 2b\sigma(r-1) = 0 \\ -\omega^3 + b(\sigma+r)\omega = 0 \end{cases}$$

Per $\omega \neq 0$ (que és una solució que no ens interessa) tenim que

$$\begin{cases} \omega^2 = \frac{2b\sigma(r-1)}{b+1+\sigma} \\ \omega^2 = b(\sigma+r) \end{cases}$$

i igualant les ω^2 trobem que

$$2b\sigma(r-1) = (b+1+\sigma)b(\sigma+r) \tag{4.1.6}$$

Aïllant la r de 4.1.6 s'obté

$$r_H := r = \frac{\sigma(b+\sigma+3)}{\sigma-b-1} \tag{4.1.7}$$

suposant que $\sigma - b - 1 > 0$.

Per tant,

$$\begin{aligned} \lambda &= i\omega \\ &= \pm i\sqrt{b(\sigma+r)} \\ &= \pm i\sqrt{b\left(\sigma + \frac{\sigma(b+\sigma+3)}{\sigma-b-1}\right)} \\ &= \pm i\sqrt{\frac{2b\sigma(\sigma+1)}{\sigma-b-1}} \end{aligned}$$

Aleshores, les tres solucions de 4.1.4 són:

$$\begin{aligned} &\lambda_1 \\ &\lambda_2 = +i\sqrt{\frac{2b\sigma\,(\sigma+1)}{(\sigma-b-1)}} \\ &\lambda_3 = -i\sqrt{\frac{2b\sigma\,(\sigma+1)}{(\sigma-b-1)}} \end{aligned}$$

on $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ ja que sabem que els zeros imaginaris van aparellats.

Com que el terme independent 4.1.4 satisfà

$$2b\sigma(r-1) = (-1)^3\lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

trobem que

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -\frac{2b\sigma(r-1)}{\lambda_2\lambda_3}\\ &= -\frac{2b\sigma(r-1)}{\frac{2b\sigma(\sigma+1)}{\sigma-b-1}}\\ &= -\frac{(r-1)(\sigma-b-1)}{(\sigma+1)}\end{aligned} \tag{4.1.8}$$

i finalment, substituint el valor de $r = r_H$ calculat a 4.1.7, obtenim

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -\frac{\left(\frac{\sigma(\sigma+b+3)}{\sigma-b-1}-1\right)(\sigma-b-1)}{(\sigma+1)}\\ &= -(\sigma+b+1)\end{aligned} \tag{4.1.9}$$

Com que $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ i $\lambda_1 < 0$, podem afirmar que la direcció que hem vist que és atreta pel punt fix en el sistema linealitzat no varia de manera important.

El valor $r_H = \frac{\sigma(b+\sigma+3)}{\sigma-b-1}$, per $\sigma - b - 1 > 0$ és un valor de bifurcació de Hopf subcrítica. Quan $r = r_H$, els punts fixos C^+ i C^- perden estabilitat. (Una bifurcació respecte un cicle límit s'anomena bifurcació de Hopf. La bifurcació de Hopf supercrítica passa quan el cicle límit és creat a partir d'un punt fix inestable i la subcrítica el mateix, però a partir d'un fix estable).

Fins ara, hem vist que el sistema de Lorenz és dissipatiu, és a dir, que les òrbites no se'n poden anar cap a l'infinit i que han de tendir a una superfície de volum zero. Per altra banda, si $r > r_H$, tenim moltes direccions inestables associades als punts fixos. Ara es tractarà de veure com es comporten les trajectòries al anar-nos allunyant de les dinàmiques d'atracció conegudes.

4.2 Caos

Edward Lorenz va fer servir la integraió numèrica per a veure què farien les trajectòries a llarg termini. Concretament, va estudiar el cas $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$ i $r = 28$.

Recordem que

$$r_H = \frac{\sigma(b+\sigma+3)}{\sigma-b-1} = \frac{10(\frac{8}{3}+10+3)}{10-\frac{8}{3}-1} \approx 24.7368$$

per tant, el valor de r que va estudiar Lorenz $r = 28 > 24.7368 \approx r_H$ i ja sabia que alguna cosa estranya havia de passar.

Al integrar des des de la condició inicial $(0, 1, 0)$, a prop del punt de sella a l'origen, podem observar que, després d'un transitori inicial, la solució s'estableix en una oscil·lació irregular que persisteix, però que mai es repeteix exactament. La Figura 4.2 representa l'evolució de la coordenada y respecte el temps per a la solució resultant i reflecteix aquest moviment aperiòdic.

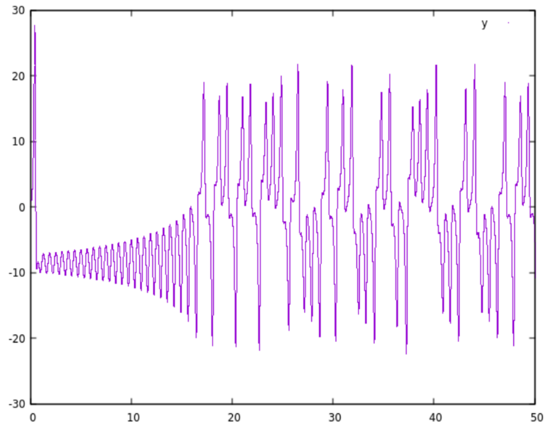


Figura 4.2: Coordenada y respecte el temps

Si representem les coordenades $x(t)$ i $z(t)$, obtenim el famós dibuix en forma d'ales de papallona, tal i com mostra la Figura 4.3. Encara que sembli que la trajectòria s'intersequi amb ella mateixa repetidament, no és així. No ho fa mai.

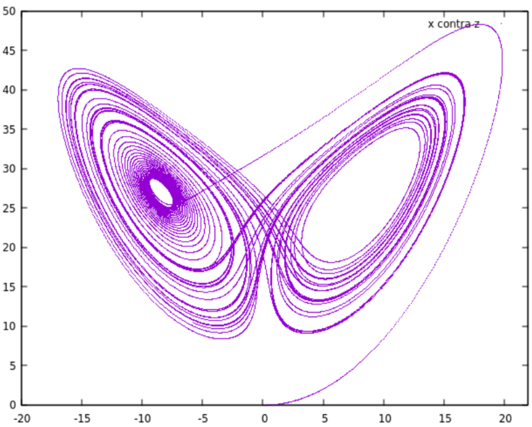


Figura 4.3: Coordenades x contra z

Observem que la trajectòria comença a prop de l'origen, se'n va cap a la dreta i després gira cap al centre d'una espiral a l'esquerra. Aleshores va espiralant lentament cap enfora fins que es dispara cap al costat dret, on també s'hi queda espiralant una estona fins que i se'n torna cap a l'espiral esquerra i així successivament i indefinidament. El nombre de circuits fets a banda i banda varia de manera imprevisible d'un cicle a l'altre.

Veiem ara la trajectòria en tres dimensions, il·lustrada per la Figura 4.4.

Sembla que hi hagi dues superfícies que es fusionen, però això no pot passar, perquè contradiria el teorema d'unicitat de solucions, que ens diu que aquestes, no es poden creuar ni fusionar. Tenim senzillament una il·lusió, causada per la forta contracció de volum del flux (i la insuficient resolució numèrica).

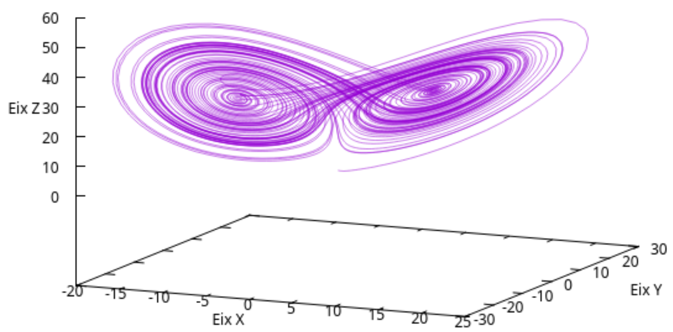


Figura 4.4: Coordenades x, y i z

Capítol 5

Mesura del caos

En aquest projecte treballem amb la següent definició de caos:

Definició 5.0.1. *El **caos** és un comportment aperiòdic a llarg termini en un sistema determinista que mostra una dependència sensible de les condicions inicials.*

Analitzem una mica la definició proporcionada:

Un *comportament aperiòdic a llarg termini* simplement vol dir que hi ha trajectòies que no s'estableixen en punts fixos, òrbites periòdiques o quasi periòdiques al $t \to \infty$.

Amb *sistema determinista* es refereix a que el sistema no té entrades o paràmetres aleatoris. El comportament irregular sorgeix únicament de la no linealitat del sistema.

La *dependència sensible de les condicions inicials* significa que les trajectòries properes se separen exponencialment ràpid. A la següent secció veurem que això vol dir que el sistema té un exponent de Lyapunov positiu.

5.1 Exponents de Lyapunov

L'exponent de Lyapunov d'un sistema dinàmic és una magnitud que caracteritza la velocitat de separació de trajectòries infinitesimalment properes. Si dues trajectòries en l'espai de fase, en el temps inicial, estàn separades pel vector $\delta \mathbf{Z}_0$, tindran una separació de $|\delta \mathbf{Z}(t)| \approx e^{\lambda t} |\delta \mathbf{Z}_0|$, on λ és l'exponent de Lyapunov.

El fet que la velocitat de separació pot ser diferent per a diferents orientacions del vector de separació inicial, dóna lloc a que hi hagi un espectre d'exponents de Lyapunov, de mateixa dimensió que lespai de fases. Ens referim al més gran com a exponent maximal de Lyapunov, que és el que determina una noció de predictibilitat per a un sistema dinàmic. Això és, perquè qualsevol vector de separació inicial arbitrari, normalment conté algun component en la direcció associada a l'exponent maximal de Lyapunov i, a causa de la taxa de creixement exponencial, l'efecte dels altres exponents de Lyapunov s'esborrarà amb el temps.

Si l'exponent maximal de Lyapunov és positiu ($\lambda > 0$), vol dir que les petites desviacions es multipliquen amb el temps, indicant una inestabilitat en el sistema. Si és negatiu ($\lambda < 0$), les petites desviacions es redueixen, indicant una estabilitat en el sistema. Si l'exponent és zero, les desviacions es mantindran constants.

Aquest concete va ser introduït per Aleksandr Lyapunov, un matemàtic rus del segle XIX.

Veiem-ne la definició formal:

Definició 5.1.1. *L'exponent maximal de Lyapunov λ es defineix de la següent manera:*

$$\lambda = \lim_{t\to\infty} \lim_{|\delta \mathbf{Z}_0|\to 0} \frac{1}{t} \ln\left(\frac{|\delta \mathbf{Z}(t)|}{|\delta \mathbf{Z}_0|}\right)$$

El límit $|\delta \mathbf{Z}_0| \to 0$ assegura la validesa de l'aproximació lineal en qualsevol moment.

En general, però, no podrem fer aquest càlcul analíticament i haurem de recórrer a tècniques numèriques. Ho veiem a la següent secció.

5.2 Càlcul numèric

Seguidament, farem el càcul de l'exponent maximal de Lyapunov dels dos principals exemples que hem tractat fins ara: l'aplicació logística i l'atractor de Lorenz, que com ja sabem, el primer es tracta d'un sistema dinàmic discret i el segon continu.

5.2.1 Aplicació Logística

Hem vist que l'aplicació logística presenta òrbites periòdiques per a determinats valors del paràmetre μ, però per ser anomenat çaòtic", un sistema també hauria de mostrar una *dependència sensible respecte les condicions inicials*. És a dir, que les òrbites veïnes se separen les unes de les altres exponencialment ràpid (de mitjana).

Com que ara estem en un cas unidimensional, estenem la definició 5.1.1.

Donada una condició inicial x_0, consiferem un punt proper $x_0 + \delta_0$, on la separació inicial δ_0 és ben petita. Sigui δ_n la separació després dels n iterats. Si $|\delta_n| \approx |\delta_0|e^{\lambda n}$, aleshores λ és l'exponent de Lyapunov. Recordem que un exponent de Lyapunov positiu és una senyal de caos.

Per obtenir una fórmula més explític i programable de λ, treiem logaritmes a l'expressió $|\delta_n| \approx |\delta_0|e^{\lambda n}$ i notem que $\delta_n = f^n(x_0 + \delta_0) - f^n(x_0)$. Aleshores,

$$\begin{aligned}\lambda &\approx \frac{1}{n} \ln \frac{\delta_n}{\delta_0} \\ &= \frac{1}{n} \ln \frac{f^n(x_0+\delta_0) - f^n(x_0)}{\delta_0} \\ &= \frac{1}{n} \ln|(f^n)'(x_0)|\end{aligned}$$

on l'última igualtat s'ha obtingut fent tendir $\delta_0 \to 0$.

Per la regla de la cadena, tenim que

$$(f^n)'(x_0) = \prod_{i=0}^{n-1} f'(x_i)$$

Per tant,

$$\lambda \approx \frac{1}{n} \ln \left(\prod_{i=0}^{n-1} f'(x_i) \right) \tag{5.2.1}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)| \tag{5.2.2}$$

Definició 5.2.1. *Si existeix el límit de $n \to \infty$ de 5.2.2, definim l'exponent de Lyapunov per a l'òrbita que comença a x_0 com:*

$$\lambda = \lim_{n \to \infty} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)| \right\} \tag{5.2.3}$$

Observació 5.2.2. Notem que λ depèn de x_0, però és la mateixa per a tots els x_0 a la conca d'atracció d'un atractor.

Per a punts i cicles fixos estables, λ és negativa i per atractors caòtics, λ és positiva.

Procedim ara a calcular el valor de λ per a l'aplicació logística 3.0.1, que recordem que era:

$$\begin{aligned} F_\mu : [0,1] &\to [0,1] \\ x &\mapsto \mu x(1-x) \end{aligned}$$

on μ és un paràmetre positiu.

Per fer-ho, he escrit un programa en C que, partint d'una condició inicial qualsevol, itera el mapa fins que el transitori decau i aleshores calcula un gran nombre d'iteracions addicionals. Aleshores, calcula $\ln|f'(x_i)| = \ln|\mu - 2\mu x_n|$ i ho afegeix a la suma de logaritmes anteriors. Això es fa per cada valor de μ, i obtenim el resultat següent (en funció, evidentment, de μ):

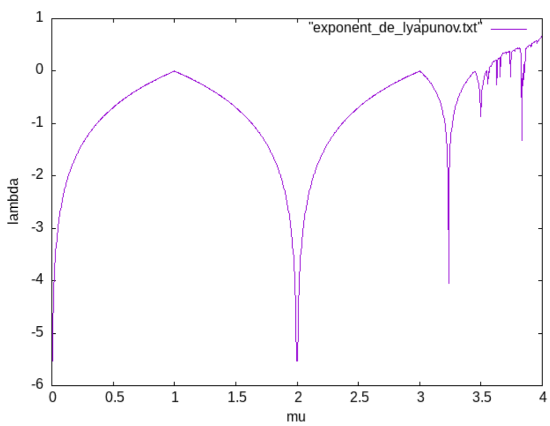


Figura 5.1: Exponent de Lyapunov de l'aplicció logística

Comparant aquest gràfic amb la Figura 2 3.2 del capítol 3, observem que λ es manté negatiu per a $\mu < \mu_\infty \approx 3.57$, i s'acosta al zero a les duplicacions de període. Els pics negatius corresponen als 2^n-cicles que hem anat trobant al capítol 3. Fixem-nos que l'inici del caos és visible al voltant de $\mu \approx 3.57$, quan $\lambda > 0$ per primera vegada. A partir d'aquell valor, l'exponent de Lyapunov va augmentant excepte pels valors de μ pels quals hi ha finestres periòdiques.

Observació 5.2.3. Tots els pics negatius de la 5.1 haurien de baixar fins a $\lambda = -\infty$, però és una línia massa fina per poder ser dibuixada.

5.2.2 Atractor de Lorenz

El moviment de l'atractor de Lorenz presenta una dependència sensible a les condicions inicials, així que dues trajectòries que comencin molt juntes, s'allunyaran ràpidament l'una de l'altra i tindran futurs totalment diferents.

Fent servir la definició d'exponent de Lyapunov 5.1.1 i un programa, trobem que $\lambda \approx 0.905001$.

Ara bé, el sistema de Lorenz no és 1-dimensional com ho era l'aplicació logística, sinó que és tridimensional. Realment un sistema n-dimensional té n exponents de Lyapunov diferents: Considerem l'evolució d'una esfera infinitessimal de condicions inicials pertorbades. Durant la seva evolució, s'anirà distorsionant en un el·lipsoide infinitessimal. Si $\delta_k(t)$ denota la longitud del k-èssim eix principal de l'el·lipsoide, aleshores $\sigma_k(t) \sim \sigma_k(0)e^{\lambda_k t}$, on els λ_k són els exponents de Lyapunov, per $k = 1, ..., n$.

Observació 5.2.4. Quan t és molt gran, el diàmetre de l'el·lipsoide queda controlat pel valor de λ_k més positiu. És per això, que s'anomena **exponent maximal de Lyapunov**, que és justament el que jo he trobat.

Hi ha maneres per trobar tots els exponents de Lyapunov, com per exemple, fent servir el procés d'ortogonalització de Gram-Schmidt, i així l'exponent maximal de Lyapunov no s'empssaria els altres, ja que totes les direccions serien ortogonals entre si, i per tant visibles. Si implementéssim aquesta idea, trobaríem que els tres exponents de Lyapunov del sistema de Lorenz (ja que $n = 3$) són

$$\lambda_1 = 0.905001$$
$$\lambda_2 = -0.000123$$
$$\lambda_3 = -14.571545$$

Quan un sistema té un exponent de Lyapunov positiu, hi ha un horitzó temporal més enllà del qual la predicció es trenca, és a dir, que no té gaire sentit intentar predir a llarg termini, ja que les petites incerteses ràpidament s'agreugen. Justament per aquest fenòment, és impossible predir el temps meteorològic que farà daquí a dues setmanes.

Capítol 6

Mètodes computacionals

En aquest capítol explicaré el funcionament del mètode numèric per integrar EDOs que hem fet servir durant el projecte, pel càlcul de solucions.

6.1 Integració numèrica d'EDOs

Considerem el següent problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = f(t, x(t)) \\ x(a) & = x_0 \end{cases} \tag{6.1.1}$$

on f és una funció analítica sobre el seu domini de definició i $x(t)$ està definida per tot $t \in [a, b]$.

Volem aproximar la funció $x(t)$ a l'interval $[a, b]$. Definim el valor d'$h > 0$ com $h = \frac{b-a}{M}$, per una M gran. Donada la condició inicial $x(a) = x(t_0) = x_0$, el valor de $x(t_0 + h)$ es pot aproximar, mitjançant la sèrie de Taylor, de la següent manera:

$$\begin{aligned} x_0 &= x(t = 0) \\ x_1 &= x_0 + x'(t_0) \cdot h + \frac{x''(t_0)}{2!} \cdot h^2 + ... + \frac{x^{(p)}(t_0)}{p!} \cdot h^p \\ x_2 &= x_1 + x'(t_1) \cdot h + \frac{x''(t_1)}{2!} \cdot h^2 + ... + \frac{x^{(p)}(t_1)}{p!} \cdot h^p \\ &\vdots \\ x_m + 1 &= x_m + x'(t_m) \cdot h + \frac{x''(t_m)}{2!} \cdot h^2 + ... + \frac{x^{(p)}(t_m)}{p!} \cdot h^p \end{aligned} \tag{6.1.2}$$

on $t_m = a + m \cdot h$, $m = 0, 1, 2, 3, ..., M - 1$.

Ens cal, per tant, poder computar els valors de les derivades $x^{(j)}(t_m)$ de manera efectiva. Un dels procediments per obtenir aquests valors és el següent:

Derivem l'equació $x'(t) = f(t, x(t))$ respecte t i l'avaluem en el punt $t = t_m$:

$$
\begin{aligned}
x'(t) &= f(t, x(t)) \\
x''(t) &= f_t(t, x(t)) + f_x(t, x(t)) \cdot x'(t) \\
x''(t_m) &= f_t(t_m, x(t_m)) + f_x(t_m, x(t_m)) \cdot x'(t) \\
x'''(t) &= ... \\
x'''(t_m) &= ...
\end{aligned}
$$

D'aquesta manera, anirem obtenint els valors $x^j(t_m)$ que ens calen per aplicar 6.1.2.

El problema és que anar calculant les derivades successives i anar avaluant-les en t_m és molt costós, així que veurem com fer-ho de manera eficient.

- Step size control ($h > 0$): està basat en una estimació assimptòtica de l'error. Després veurem com l'usuari del programa podrà triar la seva pròpia tècnica de tria del step size control.
- Coneixements sobre $p \in \mathbb{N}$: $p \in \mathbb{N}$ és el nombre de derivades que calcularem.

Com que hem de seleccionar els valors de p i h respectivament, a part de que l'error de truncament sigui menor a ϵ, podem especificar una segona condició.
Aquesta segona condició consistirà en minimitzar el nombre d'operacions que necessitarem per avançar t una unitat.

El programa tindrà tot això incorporat, és a dir, que ell sol decidirà quin ordre p agafa i quina step size control agafa, donat el problema de valor inicial.

Notem que aquest mètode no ha de reduir h per incrementar la precisió, sinó que també pot augmentar l'ordre p.

6.1.1 Diferenciació automàtica

La diferenciació automàtica és un procediment recursiu que permet obtenir el valor de les derivades de certes funcions fins a cert punt, que és justament el que nosaltres necessitem pel programa.

Les funcions que considerarem són aquelles que poden ser obtingudes a partir de sumes, productes, quocients i composicions de funcions elementals com ara polinomis, funcions trigonomètriques, real powers, exponencials i logaritmes.

Notació 1. *Si $a : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \in I \subset \mathbb{R}$ denota una funció C^∞ (smooth, en anglès), denotem com a derivada normalitzada n-èssima a $a^{[n]}(t) = \frac{1}{n!} \cdot a^{(n)}(t)$, on $a^{(n)}(t)$ denota l'enèssima derivada d'a respecte t.*

Ens centrem, doncs, en com calcular $a^{[n]}(t)$.

Assumim que $a(t) = F(b(t), c(t))$ i que coneixem el valor de $b^{[j]}(t)$ i $c^{[j]}(t)$, per a $j = 0, ..., n$ i per a un t donat.

La següent proposició ens dóna l'enèssima derivada d'a en el punt t per a certes funcions F.

Proposició 6.1.1. *Si les funcions b i c són de classe C^m i $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, tenim:*

(1) $a(t) = b(t) \pm c(t) \Rightarrow a^{[n]}(t) = b^{[n]}(t) \pm c^{[n]}(t)$

(2) $a(t) = b(t) \cdot c(t) \Rightarrow a^{[n]}(t) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} b^{[n-j]}(t) \cdot c^{[j]}(t)$

(3) $a(t) = \frac{b(t)}{c(t)} \Rightarrow a^{[n]}(t) = \frac{1}{c^{[0]}(t)} \cdot \left[b^{[n]}(t) - \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c^{[j]}(t) \cdot a^{[n-j]}(t) \right]$

(4) $a(t) = b(t)^{\alpha} \Rightarrow a^{[n]}(t) = \frac{1}{n \cdot b^{[0]}(t)} \cdot \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} (n\alpha - j(\alpha+1)) \cdot b^{[n-j]}(t) \cdot a^{[j]}(t)$

(5) $a(t) = e^{b(t)} \Rightarrow a^{[n]}(t) = \frac{1}{n} \cdot \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} (n-j) \cdot a^{[j]}(t) \cdot b^{[n-j]}(t)$

(6) $a(t) = \ln b(t) \Rightarrow a^{[n]}(t) = \frac{1}{b^{[0]}(t)} \cdot \left[b^{[n]}(t) - \frac{1}{n} \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} (n-j) \cdot b^{[j]}(t) \cdot a^{[n-j]}(t) \right]$

(7) $\begin{cases} a(t) = \cos c(t) \\ b(t) = \sin c(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^{[n]}(t) = \frac{-1}{n} \cdot \displaystyle\sum_{j=1}^{n} j \cdot b^{[n-j]}(t) \cdot c^{[j]}(t) \\ b^{[n]}(t) = \frac{1}{n} \cdot \displaystyle\sum_{j=1}^{n} j \cdot a^{[n-j]}(t) \cdot c^{[j]}(t) \end{cases}$

Demostració. (1) Suposem que $a(t) = b(t) \pm c(t)$.

Volem veure que $a^{[n]}(t) = b^{[n]}(t) \pm c^{[n]}(t)$.

$$a^{[n]}(t) = \frac{1}{n!} \cdot a^{(n)}(t) = \frac{1}{n!} \cdot \left(b^{(n)}(t) \pm c^{(n)}(t) \right) = \frac{1}{n!} \cdot b^{(n)}(t) \pm \frac{1}{n!} \cdot c^{(n)}(t) = b^{[n]}(t) \pm c^{[n]}(t)$$

(2) Suposem que $a(t) = b(t) \cdot c(t)$. Volem veure que $a^{[n]}(t) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} b^{[n-j]}(t) \cdot c^{[j]}(t)$.

Per a demostrar-ho, farem servir la Regla de Leibniz, també coneguda com a regla del producte generlitzada, que diu el següent:

Regla de Leibniz

Si f i g són funcions derivables n cops, llavors la n-èssima deivada del producte $f \cdot g$ ve donada per:

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot f^{(n-k)} \cdot g^{(k)}$$

Demostració. Demostració per inducció.

Cas $n = 1$: $(f \cdot g)' = f'g + fg'$.

Suposem cert per $n \geq 1$, cosa que implica que $(f \cdot g)^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot f^{(n-k)} \cdot g^{(k)}$.

Volem veure que és cert per $n+1$.

Tenim que:

$$(f\cdot g)^{(n+1)} = \left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot f^{(n-k)}\cdot g^{(k)}\right]' =$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot f^{(n+1-k)}\cdot g^{(k)} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot f^{(n-k)}\cdot g^{(k+1)} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot f^{(n+1-k)}\cdot g^{(k)} + \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}\cdot f^{(n+1-k)}\cdot g^{(k)} =$$
$$= \binom{n}{0}f^{(n+1)}g^{(0)} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}f^{(n+1-k)}g^{(k)} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}f^{(n+1-k)}g^{(k)} + \binom{n}{n}f^{(0)}g^{(n+1)}$$
$$= \binom{n+1}{0}f^{(n+1)}g^{(0)} + \Big(\sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right]f^{(n+1-k)}g^{(k)}\Big)\binom{n+1}{n+1}f^{(0)}g^{(n+1)}$$
$$= \binom{n+1}{0}f^{(n+1)}g^{(0)} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}f^{(n+1-k)}g^{(k)}\binom{n+1}{n+1}f^{(0)}g^{(n+1)} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\cdot f^{(n+1-k)}\cdot g^{(k)}$$

□

Coneixent aquest resultat, tenim que:

$$\begin{aligned}
a^{[n]}(t) &= \frac{1}{n!}\cdot a^{(n)}(t) = \frac{1}{n!}\cdot\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}b^{(n-j)}(t)c^{(j)}(t)\\
&= \sum_{j=0}^{n}\frac{1}{n!}\binom{n}{j}b^{(n-j)}(t)c^{(j)}(t) = \sum_{j=0}^{n}\frac{1}{n!}\frac{n!}{j!(n-j)!}b^{(n-j)}(t)c^{(j)}(t)\\
&= \sum_{j=0}^{n}\frac{1}{(n-j)!}b^{(n-j)}(t)\frac{1}{j!}c^{(j)}(t) = \sum_{j=0}^{n}b^{[n-j]}(t)\cdot c^{[j]}(t)
\end{aligned}$$

(3) Suposem que $a(t)=\frac{b(t)}{c(t)} \Rightarrow a(t)\cdot c(t) = b(t)$.

Volem veure que $a^{[n]}(t) = \frac{1}{c^{[0]}(t)}\cdot\left[b^{[n]}(t) - \sum_{j=1}^{n}c^{[j]}(t)\cdot a^{[n-j]}(t)\right]$.

Per a demostrar-ho, farem servir (2) a la igualtat $a(t)\cdot c(t) = b(t)$.

Tenim que:

$$\sum_{j=0}^{n}a^{[n-j]}(t)\cdot c^{(j)}(t) = b^{[n]}(t) \Rightarrow a^{[n]}(t)\cdot c^{[0]}(t) + \sum_{j=1}^{n}a^{[n-j]}(t)\cdot c^{(j)}(t) = b^{[n]}(t) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a^{[n]}(t) = \frac{b^{[n]}(t) - \sum_{j=1}^{n}a^{[n-j]}(t)\cdot c^{(j)}(t)}{c^{[0]}(t)} = \frac{1}{c^{[0]}(t)}\cdot\left[b^{[n]}(t) - \sum_{j=1}^{n}c^{[j]}(t)\cdot a^{[n-j]}(t)\right].$$

(4) Suposem que $a(t) = b(t)^\alpha$.

Volem veure que $a^{[n]}(t) = \frac{1}{n \cdot b^{[0]}(t)} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} (n\alpha - j(\alpha+1)) \cdot b^{[n-j]}(t) \cdot a^{[j]}(t)$

$a(t) = b(t)^\alpha \Rightarrow \ln a(t) = \alpha \cdot \ln b(t) \Rightarrow \frac{1}{a(t)} \cdot a'(t) = \alpha \cdot \frac{1}{b(t)} \cdot b'(t) \Rightarrow$
$\Rightarrow a'(t) \cdot b(t) = \alpha \cdot a(t) \cdot b'(t) \Rightarrow (a'(t) \cdot b(t))^{(n-1)} = \alpha \cdot (a(t) \cdot b'(t))^{(n-1)}$.

Aplicant la Regla de Leibniz a aquesta última igualtat, obtenim que:

$$\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} a^{(j+1)} b^{(n-1-j)} = \alpha \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} a^{(j)} b^{(n-j)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{j!(n-1-j)!} a^{(j+1)} b^{(n-1-j)} = \alpha \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{j!(n-1-j)!} a^{(j)} b^{(n-j)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{j=0}^{n-1} \frac{a^{(j+1)} b^{(n-1-j)}}{j!(n-1-j)!} \cdot \frac{j+1}{j+1} = \alpha \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \frac{a^{(j)}}{j!} \cdot \frac{b^{(n-j)}}{(n-1-j)!} \cdot \frac{n-j}{n-j} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) \cdot a^{[j+1]} \cdot b^{[n-1-j]} = \alpha \cdot \sum_{j=0}^{n-1} (n-j) \cdot a^{[j]} \cdot b^{[n-j]} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n \cdot a^{[n]} \cdot b^{[0]} + \sum_{j=0}^{n-2} (j+1) \cdot a^{[j+1]} \cdot b^{[n-1-j]} = \alpha \cdot \sum_{j=0}^{n-1} (n-j) \cdot a^{[j]} \cdot b^{[n-j]} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n \cdot a^{[n]} \cdot b^{[0]} = \alpha \cdot \sum_{j=0}^{n-1} (n-j) \cdot a^{[j]} \cdot b^{[n-j]} - \sum_{j=0}^{n-2} (j+1) \cdot a^{[j+1]} \cdot b^{[n-1-j]} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n \cdot a^{[n]} \cdot b^{[0]} =$$
$$\alpha \cdot n \cdot a^{[0]} b^{[n]} + \alpha \cdot (n-1) \cdot a^{[1]} b^{[n-1]} + \alpha \cdot (n-2) \cdot a^{[2]} b^{[n-2]} + \ldots + \alpha \cdot 1 \cdot a^{[n-1]} b^{[1]}$$
$$- 1 \cdot a^{[1]} b^{[n-1]} - 2 \cdot a^{[2]} b^{[n-2]} - \ldots - (n-1) \cdot a^{[n-1]} b^{[1]} =$$
$$= \alpha \cdot n \cdot a^{[0]} b^{[n]} + \sum_{j=0}^{n-2} (n\alpha - j(\alpha+1)) \cdot a^{[j]}(t) \cdot b^{[n-j]}(t) = \sum_{j=0}^{n-1} (n\alpha - j(\alpha+1)) \cdot a^{[j]}(t) \cdot b^{[n-j]}(t)$$

$$\Rightarrow n \cdot a^{[n]} \cdot b^{[0]} = \sum_{j=0}^{n-1} (n\alpha - j(\alpha+1)) \cdot a^{[j]}(t) \cdot b^{[n-j]}(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^{[n]} = \frac{1}{n \cdot b^{[0]}} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} (n\alpha - j(\alpha+1)) \cdot a^{[j]}(t) \cdot b^{[n-j]}(t)$$

$$\begin{aligned} na^{[n]} b^{[0]} = & \alpha \cdot n \cdot a^{[0]} b^{[n]} + \alpha \cdot (n-1) \cdot a^{[1]} b^{[n-1]} + \alpha \cdot (n-2) \cdot a^{[2]} b^{[n-2]} + \ldots \\ & + \alpha \cdot 1 \cdot a^{[n-1]} b^{[1]} - 1 \cdot a^{[1]} b^{[n-1]} - 2 \cdot a^{[2]} b^{[n-2]} - \ldots - (n-1) \cdot a^{[n-1]} b^{[1]}, \end{aligned}$$

(5) Suposem que $a(t) = e^{b(t)}$. Volem veure que $a^{[n]}(t) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} (n-j) \cdot a^{[j]}(t) \cdot b^{[n-j]}(t)$.

$a(t) = e^{b(t)} \Rightarrow \ln a(t) = b(t) \Rightarrow \frac{1}{a(t)} \cdot a'(t) = b'(t) \Rightarrow a'(t) = a(t) \cdot b'(t) \Rightarrow$
$\Rightarrow (a'(t))^{(n-1)} = (a(t) \cdot b'(t))^{(n-1)}$.

Aplicant la Regla de Leibniz a aquesta última igualtat, obtenim que:

$$\begin{aligned}
a^{(n)}(t) &= \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \cdot a^{(j)} \cdot b^{(n-j)} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{j!(n-1-j)!} \cdot a^{(j)} \cdot b^{(n-j)}, \\
\frac{n}{n} \cdot \frac{a^{(n)}(t)}{(n-1)!} &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j!(n-1-j)!} \cdot a^{(j)} \cdot b^{(n-j)} \cdot \frac{n-j}{n-j}, \\
\frac{n \cdot a^{(n)}(t)}{n!} &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-j) \cdot a^{(j)} \cdot b^{(n-j)}}{j!(n-j)!}, \\
n \cdot a^{[n]} &= \sum_{j=0}^{n-1} (n-j) \cdot a^{[j]}(t) \cdot b^{[n-j]}(t), \\
a^{[n]}(t) &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} (n-j) \cdot a^{[j]}(t) \cdot b^{[n-j]}(t).
\end{aligned}$$

(6) Suposem que $a(t) = \ln b(t)$.

Volem veure que $a^{[n]}(t) = \frac{1}{b^{[0]}(t)} \cdot \left[b^{[n]}(t) - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} (n-j) \cdot b^{[j]}(t) \cdot a^{[n-j]}(t) \right]$.

$a(t) = \ln b(t) \Rightarrow a'(t) = \frac{1}{b(t)} \cdot b'(t) \Rightarrow$
$\Rightarrow b'(t) = a'(t) \cdot b(t) \Rightarrow (b'(t))^{(n-1)} = (a'(t) \cdot b(t))^{(n-1)}$.

Aplicant la Regla de Leibniz a aquesta última igualtat, obtenim que:

$$b^{(n)} = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \cdot a^{(n-j)} \cdot b^{(j)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^{(n)} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{j!(n-1-j)!} \cdot a^{(n-j)} \cdot b^{(j)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{b^{(n)}}{(n-1)!} \cdot \frac{n}{n} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j!(n-1-j)!} \cdot a^{(n-j)} \cdot b^{(j)} \cdot \frac{n-j}{n-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{b^{(n)}}{n!} \cdot n = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{a^{(n-j)}}{(n-j)!} \cdot \frac{b^{(j)}}{j!} \cdot (n-j) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^{[n]} \cdot n = \sum_{j=0}^{n-1} a^{[n-j]} \cdot b^{[j]} \cdot (n-j) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^{[n]} \cdot n = a^{[n]} \cdot b^{[0]} \cdot n + \sum_{j=1}^{n-1} a^{[n-j]} \cdot b^{[j]} \cdot (n-j) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^{[n]} = \frac{n \cdot b^{[n]} - \sum_{j=1}^{n-1} a^{[n-j]} \cdot b^{[j]} \cdot (n-j)}{n \cdot b^{[0]}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^{[n]} = \frac{1}{b^{[0]}(t)} \cdot \left[b^{[n]}(t) - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} (n-j) \cdot b^{[j]}(t) \cdot a^{[n-j]}(t) \right]$$

(7) Es fa de manera similar als punts anteriors.

□

6.1.2 Grau i step size control

Siguin $\{x_m^{[j]}(t_m)\}_j$ les derivades normalitzades a t_m de la solució de

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(t, x(t)) \\ x(a) &= x_0 \end{cases} \tag{6.1.3}$$

que satisfan $x_m(t_m) = x_m$. Aleshores, si $h = t - t_n$ és prou petit, tenim que

$$x_m(t) = \sum_{j=0}^{\infty} x_m^{[j]}(t_m) h^j.$$

Per tant, volem triar un h_m prou petit i un p_m prou gran per tal que els valors

$$t_{m+1} = t_m + h_m$$

i

$$x_{m+1} = \sum_{j=0}^{p_m} x_m^{[j]}(t_m) h_m^j.$$

$t_{m+1} = t_m + h_m$ i

satisfacin

$$|x_m(t_{m+1}) - x_{m+1}\| \leq \epsilon,$$

on ϵ és la tolerància.

Seguint [9], això es pot aconseguir calculant:

$$\rho_m^{(j)} = \frac{\epsilon}{\|x_m^{[j]}\|_\infty} \cdot \frac{1}{j!}, \quad 1 \leq j \leq p,$$

i després fent servir l'estimació $h_m = \min\{\rho_m^{(N-1)}, \rho_m^{(N)}\}$ per a la mida del pas.

Capítol 7

Conclusions

Hem sabut entendre dinàmiques caòtiques dins del món determinista, els factors que produeixen caos, i com mesurar-lo.

Fent servir mètodes numèrics, hem pogut graficar i anal·litzar el comportament de l'aplicació logística en funció del seu paràmetre μ. Hem vist que a mesura que aquest augmenta, es produeixen més i més duplicacions de període, donant lloc a cicles de període 2^n. Per a $\mu \approx 3.57$ el sistema presenta un comportament aperiòdic i la dinàmica es torna caòtica. Sorprenentment, a mesura que aquest paràmetre segueix augmentant, veiem que el diagrama de l'òrbita presenta una barreja d'ordre i caos. El càlcul de l'exponent de Lyapunov en funció de μ, ha corroborat aquest fet.

Pel que fa a les equacions de Lorenz, hem vist les seves principals propietats i demostrat que és un sistema dissipatiu, és a dir, que els volums a l'espai de fase es contrauen sota el flux. També hem demostrat que no existeixen solucions quasiperiòdiques i que tampoc hi pot haver punts fixos totalment repulsors ni òrbites tancades totalment repulsores. Finalment, amb el càlcul de l'exponent maximal de Lyapunov, hem vist que el sistema és caòtic, i que per tant no podem predir el comportment en un futur gaire llunyà.

Part dels coneixements que hem hagut de fer servir han estat treballats en les assignatures de Models matemàtics i sistemes dinàmics, Equacions diferencials ordinàries i Mètodes numèrics.

Bibliografia

[1] Jordi Bascompte, Jordi Flos (coord.), Emilia Gutiérrez, David Jou, Ramon Margalef, Carles Simó, Ricard V. Solé. *Ordre i caos en ecologia*, Universitat de Barcelona, 1995.

[2] Steven H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos, with applications to physics, biology, chemistry, and enginneering.* 1994.

[3] Kathleen T. Alligood, Tim D. Sauer, James A. Yorke. *CHAOS: An Introduction to Dynamical Systems*, Springer, 2009.

[4] Robert L. Devaney. *An introduction to chaotic dynamical systems*, 2003

[5] Gerald Teschl. *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems*, 2012.

[6] Marian Gidea, Constantin P. Niculescu. *Chaotic Dynamical Systems. An Introduction*, 2002.

[7] Robert M. May. *Simple Mathematical Models With Very Complicated Dynamics*, 1976.

[8] Edward N. Lorenz. *Deterministic Nonperiodic Flow*, 1963.

[9] Àngel Jorba, Maorong Zou. *A software package for the numerical integration of ODEs by means of high-order Taylor methods*, 2001.

[10] J. Sotomayor. Liçoes de equaçoes diferenciais ordinárias, IMPA 1979.