Universitat de Barcelona

Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

TEOREMES DE COMPLETESA EN LÒGIQUES BASADES EN T-NORMES CONTÍNUES

Autor: Miquel Trullols Salat

Director: Dr. Joan Gispert Brasó

Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 10 de juny de 2024

Abstract

In this Final Degree Project, we deal with the logics based in continuous t-norms as many-valued logics with values in the real interval [0,1]. We introduce the basic examples of these kinds of logics: Gödel logic, Lukasiewicz logic and product logic. Furthermore, we define the basic fuzzy logic as the logic of all the continuous t-norms.
Petr Hájek, in [12], presented the Hilbert calculus BL to be complete with respect to the basic logic, but he did not prove its completeness. This proof is in [4].
This project wants to show the steps to get the BL calculus completeness with respect to the logic of all the continuous t-norms. To get this proof, we need to obtain the completeness theorems for Gödel, Lukasiewicz and product logics.

Resum

En aquest Treball de Final de Grau, tractem les lògiques basades en t-normes contínues com a lògiques multivalorades que prenen valors a l'interval real [0,1]. Introduim els exemples bàsics d'aquest tipus de lògiques: la lògica de Gödel, la lògica de Lukasiewicz i la lògica producte. A més, definim la lògica bàsica fuzzy com la lògica de totes les t-normes contínues.
Petr Hájek a [12] va presentar el càlcul BL de tipus Hilbert per ser complet respecte la lògica bàsica, però no en demostrà la seva completesa. Aquesta demostració es pot trobar a [4].
Aquest treball pretén mostrar els passos per obtenir la completesa del càlcul BL respecte la lògica de totes les t-normes contínues. Per a aquesta demostració, necessitem primer obtenir els teoremes de completesa de les lògiques de Gödel, Lukasiewicz i producte.

2020 Mathematics Subject Classification. 03B50, 03B52, 03G10, 03G20, 03G25, 06D20, 06D35, 06d99

Agraïments

Vull agrair al meu tutor del treball, el Doctor Joan Gispert Brasó, la seva inestimable ajuda i orientació. M'ha guiat amb el treball i m'ha engrescat a seguir amb aquest en les reunions setmanals, m'ha recomanat llibres on cercar informació i m'ha ajudat a entendre conceptes que m'eren complicats en un principi.
M'agradaria agrair a la meva família tot el recolzament i suport rebut.

Índex

Introducció

El projecte

En aquest treball, tractem les lògiques multivalorades a l'interval real [0,1] basades en t-normes contínues.
Una t-norma és una aplicació binària en [0,1] que modelitza les propietats de la intersecció en els conjunts fuzzy. Destaquem la t-norma de Gödel, la de Lukasiewicz i la producte. Per a cada t-norma contínua podem definir una lògica associada. Per estudiar tot allò que tenen en comú aquestes lògiques, Hájek a [12] va definir la lògica bàsica fuzzy com la lògica de totes les t-normes contínues i va proposar un càlcul de Hilbert per ser complet: el càlcul BL.
L'objectiu del treball és demostrar el teorema de completesa del càlcul BL d'aquesta lògica. Per això, enunciarem primer un teorema de caracterització de totes les t-normes contínues que ens diu que tota t-norma contínua és suma ordinal de la t-norma de Gödel, la de Lukasiewicz i la producte.
La demostració d'aquest teorema de completesa s'assoleix en tres passos. El primer pas és la demostració de la completesa del càlcul respecte la semàntica de la classe de totes les BL-àlgebres. En el segon pas, es redueix aquesta classe a la classe d les BL-àlgebres totalment ordenades. El tercer pas és la demostració final del teorema de completesa del càlcul BL respecte la lògica bàsica, tot fent ús d'una generalització del teorema de Mostert-Shields a BL-cadenes i de les demostracions dels teoremes de completesa de la lògica de Gödel, la de Lukasiewicz i la producte.
Tot i que he acudit a diferents fonts, tal i com hom pot comprovar a les referències, he consultat especialment el llibre *Metamathematics of Fuzzy Logic* de Petr Hájek [12] i pel que fa a la demostració del teorema de completesa de la lògica bàsica fuzzy he seguit l'article [5].

Estructura de la Memòria

El treball comença amb uns premilinars, on definim els conjunts fuzzy que proposa Zadeh el 1965 a [17]. Generalitzem les operacions conjuntistes clàssiques i trobem les t-normes, t-conormes i complement fuzzy. Mostrem les tres t-normes bàsiques: la de Gödel, la de Lukasiewicz i la producte. Enunciem el teorema de Mostert-Shields (teorema 1.6), que caracteritza les t-normes contínues com a suma ordinal d'aquestes tres t-normes.
Tot seguit, introduim les lògiques fuzzy basades en t-normes contínues com a lògiques multivalorades que prenen valors a l'interval real [0,1]. En particular, definim les lògiques de Gödel i Lukasiewicz i mostrem el seu context històric.
Acabem el capítol definint la lògica bàsica que va introduir Hájek a [12] que serà el motiu del nostre estudi.
El segon capítol està totalment dedicat al càlcul Hilbert. Donem el càlcul BL que introduí Hájek a [12] i mostrem algunes propietats que seran importants per demostrar el teorema de completesa d'aquest càlcul respecte la lògica bàsica. Al final del capítol, veiem les lògiques de Gödel, Lukasiewicz i producte com a extensions axiomàtiques del càlcul BL.
En el tercer capítol introduim la semàntica algebraica de les BL-àlgebres. Després de demostrar algunes propietats algebraiques, obtenim el teorema de completesa del càlcul BL respecte aquesta semàntica (teorema 3.17). Cal comentar que la construcció de l'àlgebra de Lindenbaum-Tarski juga un paper clau per demostrar la completesa. Acabem el capítol veient que els càlculs de Gödel, Lukasiewicz i producte són complets respecte unes classes

de BL-àlgebres: les G-àlgebres, MV-àlgebres i àlgebres producte, respectivament.
A continuació, introduim un capítol eminentment algebraic que ens permet demostrar el teorema de completesa del càlcul BL respecte la classe de totes les BL-cadenes (teorema 4.18). Per això, demostrem el teorema de representació subdirecte (teorema 4.17) que ens diu que tota BL-àlgebra és producte subdirecte de BL-cadenes. Veiem que podem particularitzar aquest resultat a les G-àlgebres, MV-àlgebres i $\prod$-àlgebres.
Finalment, en el darrer capítol, es demostra el teorema de completesa del càlcul BL respecte la lògica bàsica (teorema 5.44). En primer lloc, demostrem els teoremes de completesa de les lògiques de Gödel, de Lukasiewicz i producte (teoremes 5.14, 5.27 i 5.34, respectivament). Tots tres es basen en una bona caracterització de les seves cadenes (proposició 5.7, teorema 5.23 i teorema 5.31, respectivament) i en teoremes d'immersió (total o parcial) en les àlgebres estàndards (teoremes 5.12, 5.26 i 5.33, respectivament).
Finalment, la demostració del teorema de completesa l'obtenim a partir de la generalització del teorema de Mostert-Shields a BL-cadenes (teorema 5.42) i de la immersió local de tota BL-cadena en la classe de les àlgebres estàndards definides a partir de t-normes contínues (teorema 5.43).
Acabem el treball amb un capítol de conclusions i un de referències.
Com ja hem dit anteriorment, la bibliografia principal del treball és el llibre de Hájek [12], per a la demostració de la completesa he seguit [5] i per a la part d'introducció a conjunts fuzzy hem usat [6].

1 Preliminars

1.1 Conjunts Fuzzy

Lofty Zadeh va introduir la noció de conjunts fuzzy el 1965 a [17] per generalitzar la noció de conjunt clàssic. En un conjunt clàssic, la funció característica del conjunt determina el conjunt perquè indica quins elements en pertanyen. Així, L. Zadeh el 1965 va donar la següent definició [6, chapter 6]:

Definició 1.1. *Un conjunt fuzzy F (sobre un univers U) és caracteritzat per una aplicació de U en [0,1] que indica el grau de pertinença dels elements u en F.*
$F : U \to [0,1]$ *de manera que* $u \mapsto F(u)$*, on* $F(u)$ *indica el grau de pertinença de l'element* u *en el conjunt F.*

D'aquesta manera 1 indica la pertinença total i 0 la no-pertinença total. Així, hom pot pensar que conjunt clàssic és un conjunt fuzzy on la seva funció característica només pren com a valors el 0 i l'1.
De la mateixa manera que a la teoria de conjunts clàssica, hem d'introduir les operacions bàsiques conjuntistes i hem de poder definir una intersecció, unió i complementari de conjunts fuzzy. Zadeh va proposar com a definició d'intersecció, unió i complementari de conjunts fuzzy els següents:
Siguin X,Y dos conjunts fuzzy.

- Intersecció: $X \cap Y : U \to [0,1]$ tal que $a \mapsto min\{X(a), Y(a)\}$
- Unió: $X \cup Y : U \to [0,1]$ tal que $a \mapsto max\{X(a), Y(a)\}$
- Complementari: $X^c : U \to [0,1]$ tal que $a \mapsto 1 - X(a)$

Tanmateix, aquesta tria és subjectiva. Podem pensar quines són les propietats que ha de complir la unió, intersecció i complementari de conjunts fuzzy de manera que generalitzi les operacions clàssiques. D'aquí neixen els conceptes de t-norma, t-conorma i complement fuzzy, que seran els equivalents a intersecció, unió i complementari fuzzy, respectivament.

Definició 1.2. *Una norma triangular (o t-norma) és una operació binària* $\&$ *en [0,1] que satisfà les següents propietats:*

- *commutativitat: per tot* $a, b \in [0,1]$*,* $a\&b = b\&a$
- *associativitat: per tot* $a, b, c \in [0,1]$*,* $(a\&b)\&c = a\&(b\&c)$
- *1 és element neutre: per tot* $a \in [0,1]$*,* $a\&1 = 1\&a = a$
- *és monòtona creixent en les dues components: per tot* $a, b, c \in [0,1]$*, si* $a \leq b$ *aleshores* $a\&c \leq b\&c$ *i* $c\&a \leq c\&b$*.*

Proposició 1.3. *Sigui* $\&$ *una t-norma. 0 és element absorbent, és a dir, per tot* $a \in [0,1]$*,* $0\&a = 0$*.*

Demostració:
Tenim que $0\&1 = 0$ per ser 1 element neutre. Ara, sigui $a \in [0,1]$. Com que $a \leq 1$, aleshores $0 \leq 0\&a \leq 0\&1 = 0$. Per tant, per tot $a \in [0,1]$, $0\&a = 0$. $\square$

Direm que una t-norma és contínua si ho és en $[0,1] \times [0,1]$.

Exemples 1.4. Mostrem tres t-normes contínues, que seran molt importants i ens referirem a elles al llarg del treball.

1. t-norma de Gödel: $x\&y = x \wedge y = min\{x, y\}$,
2. t-norma de Lukasiewicz: $x\&y = x \odot y = max(0, x + y - 1)$,
3. t-norma producte: $x\&y = x \cdot y$.

A continuació, definim la suma ordinal de t-normes, que ens permet construir t-normes a partir d'altres, tal i com [8].

Definició 1.5. *Sigui $\{\&_i : i \in I\}$ una família comptable de t-normes i per cada $i \in I$ $A_i = [a_i, b_i] \subseteq [0, 1]$ de forma que*

- $\cup_{i \in I} A_i = [0, 1]$,
- *Si $i < j$ per tot $a \in A_i$ i per tot $b \in A_j$, aleshores $a \leq b$.*
- *Si $i < j$ i $A_i \cap A_j \neq \emptyset$, aleshores $b_i = a_j$ i $A_i \cap A_j = \{a_j\}$*

Definim la suma ordinal $\oplus^P_{i \in I}(\&_i)$:
Per tot $a, b \in [0, 1]$,

$$a \oplus^P_{i \in I} (\&_i) b = \begin{cases} f_i(f_i^{-1}(a) \&_i f_i^{-1}(b)) & si \quad a, b \in A_i \\ \\ min\{a, b\} & altrament \end{cases}$$

on per cada $i \in I$, $f_i : [0, 1] \to [a_i, b_i]$ és l'isomorfisme lineal de [0,1] en A_i.

Tot seguit, enunciem el teorema de Mostert-Shields, que ens caracteritza les t-normes contínues [14].

Teorema 1.6. *Teorema de Mostert-Shields*
& és una t-norma contínua si i només si & és una suma ordinal de t-normes de Gödel, Lukasiewicz i producte (o sigui, $\& = \oplus_{i \in I}(\&_i)$ on per cada $i \in I$, $\&_i$ és isomorf a la t-norma de Gödel, a la de Lukasiewicz o a la producte).

Definició 1.7. *Una conorma triangular (o t-conorma) és una operació binària $\sqcup$ en [0,1] que satisfà les següents propietats:*

- *commutativitat: per tot $a, b \in [0, 1]$, $a \sqcup b = b \sqcup a$*
- *associativitat: per tot $a, b, c \in [0, 1]$, $(a \sqcup b) \sqcup c = a \sqcup (b \sqcup c)$*
- *0 és element neutre: per tot $a \in [0, 1]$, $a \sqcup 0 = 0 \sqcup a = a$*
- *és monòtona creixent en cada component: per tot $a, b, c \in [0, 1]$, si $a \leq b$ aleshores $a \sqcup c \leq b \sqcup c$ i $c \sqcup a \leq c \sqcup b$.*

Definició 1.8. *Un complement fuzzy és una operació unària $\sim$ en [0,1] tal que:*

- $\sim 0 = 1$ *i* $\sim 1 = 0$
- *per tot $a, b \in [0, 1]$, si $a \leq b$, aleshores $\sim b \leq \sim a$*

- *per tot* $a \in [0,1]$, $a \leq \sim\sim a$.

Un complement serà clàssic quan per tot $a \in [0,1]$, $a = \sim\sim a$.
El següent resultat ens diu que hi ha una equivalència entre t-normes i t-conormes [8].

Proposició 1.9. *Sigui* $\sim$ *un complement clàssic, sigui* $\&$ *una t-norma i sigui* $\sqcup$ *una t-conorma.*

- *Si definim* $a \sqcup_{\&} b := \sim((\sim a)\&(\sim b))$, *aleshores* $\sqcup_{\&}$ *és una t-conorma.*
- *Si definim* $a \&_{\sqcup} b := \sim((\sim a) \sqcup (\sim b))$, *aleshores* $\&_{\sqcup}$ *és una t-norma.*
- $\&_{\sqcup_{\&}} = \&$ *i* $\sqcup_{\&_{\sqcup}} = \sqcup$.

1.2 Lògica

En aquest apartat s'introduiran les lògiques fuzzy com a lògiques multivalorades amb valors a l'interval real $[0,1]$.
A la lògica clàssica les connectives conjunció, disjunció i negació estan lligades amb la intersecció, la unió i el complementari. A la lògica fuzzy, la conjunció, la intersecció i la negació fuzzy estaran lligades amb la t-norma, la t-conorma i el complement fuzzy.
Ens manca doncs definir una implicació fuzzy.

Definició 1.10. *Sigui* $\&$ *una t-norma. Definim una R-implicació* $\rightarrow$ *associada a* $\&$ *com una operació binària en [0,1] que satisfà que:*
Per tot $a, b, c \in [0,1]$, $a\&b \leq c \iff a \leq b \rightarrow c$.

Proposició 1.11. *Sigui* $\&$ *una t-norma i sigui* $\rightarrow$ *una R-implicació associada a* $\&$. *Aleshores,* $a \rightarrow b = sup\{c \in [0,1] : a\&c \leq b\}$.

<u>Demostració:</u>
Tenim que $a \rightarrow b \leq a \rightarrow b$. Ara, com que $\rightarrow$ és una R-implicació, aleshores $a\&(a \rightarrow b) = (a \rightarrow b)\&a \leq b$. Així, $a \rightarrow b \in \{c \in [0,1] : a\&c \leq b\}$.
Vegem que és el màxim. Sigui $d \in \{c \in [0,1] : a\&c \leq b\}$, aleshores $a\&d \leq b$ i, com que $\rightarrow$ és una R-implicació, aleshores $d \leq a \rightarrow b$. En conseqüència, $a \rightarrow b = max\{c \in [0,1] : a\&c \leq b\} = sup\{c \in [0,1] : a\&c \leq b\}$. □

Corol·lari 1.12. *Si* $a \leq b$, *aleshores* $a \rightarrow b = 1$.

<u>Demostració:</u>
$a \leq b$ implica que $1\&a \leq b$. Per tant, $1 \leq a \rightarrow b \leq 1$. □

Observació 1.13. Amb aquest resultat, trobem que tota R-implicació queda determinada de manera única per una t-norma. Això ens portarà a escriure la R-implicació com $\rightarrow_{\&}$ o, quan pel context ja s'entengui, només com $\rightarrow$.

Exemples 1.14. Per a les tres t-normes abans esmentades trobem:

1. la R-implicació de Gödel: $a \rightarrow_{\wedge} b = \begin{cases} 1 & si \quad a \leq b \\ b & altrament \end{cases}$
2. la R-implicació de Lukasiewicz: $a \rightarrow_{\odot} b = min\{1, 1-a+b\}$

3. la R-implicació producte: $a \rightarrow_. b = \begin{cases} 1 & si \quad a \leq b \\ b/a & altrament \end{cases}$

A partir del teorema de Mostert-Shields, ens podem preguntar també quina és la R-implicació d'una t-norma suma-ordinal de t-normes de Gödel, Lukasiewicz i producte. Si tenim present la notació utilitzada a la definició 1.5, obtenim:

Definició 1.15. *Sigui & una t-norma suma ordinal de t-normes. Per tot $a, b \in [0,1]$,*

$$a \rightarrow_{\&} b := \begin{cases} 1 & si \quad a \leq b \\ f_i(f_i^{-1}(a) \rightarrow f_i^{-1}(b)) & si \quad a > b; a, b \in A_i \\ b & altrament \end{cases}$$

Observació 1.16. Una t-norma & té R-implicació si i només si és contínua per l'esquerra en les dues components [10].

Definició 1.17. *Sigui & una t-norma i sigui $\rightarrow$ la R-implicació associada a &, definim la negació associada a $\rightarrow$ com $\neg : [0,1] \rightarrow [0,1]$ tal que $a \mapsto \neg a = a \rightarrow 0$.*

Exemples 1.18. Mostrem les negacions associades a les R-implicacions de Gödel, Lukasiewicz i producte.

1. Negació de Gödel: $\neg_{\wedge} a = \begin{cases} 1 & si \quad a = 0 \\ 0 & altrament \end{cases}$
2. Negació de Lukasiewicz: $\neg_{\odot} a = 1 - a$
3. Negació producte: $\neg_. a = \begin{cases} 1 & si \quad a = 0 \\ 0 & altrament \end{cases}$

Observem que tot i que la R-implicació de Gödel és diferent a la producte, les dues negacions coincideixen.

Així, donada una t-norma, tenim una implicació i una negació. Tanmateix, no podem assegurar que aquesta negació sigui clàssica. Per això, introduim la següent àlgebra.

Definició 1.19. *Sigui & una t-norma contínua (de fet, amb contínua per l'esquerra ja n'hi ha prou), definim l'àlgebra estàndard associada a la t-norma & com*

$$[0,1]_{\&} = \langle [0,1], \&, \rightarrow_{\&}, \wedge, \vee, \neg_{\&}, 0, 1 \rangle$$

de manera que $\rightarrow_{\&}$ és la R-implicació de la t-norma &, $\neg_{\&}$ és la negació associada a la R-implicació, $\wedge$ i $\vee$ s'interpreten com el mínim i màxim, respectivament, i, $\perp = 0$ i $\top = 1$.

Exemples 1.20. Trobem les àlgebres estàndard de Gödel, Lukasiewicz i producte:

- àlgebra estàndard de Gödel: $[0,1]_{\wedge} = \langle [0,1], \wedge, \rightarrow_{\wedge}, \wedge, \vee, \neg_{\wedge}, 0, 1 \rangle$
  En aquest cas, s'identifica la t-norma i $\wedge$, perquè són la mateixa operació.
- àlgebra estàndard de Lukasiewicz: $[0,1]_{\odot} = \langle [0,1], \odot, \rightarrow_{\odot}, \wedge, \vee, \neg_{\odot}, 0, 1 \rangle$

- àlgebra estàndard producte: $[0,1]_{\cdot} = \langle [0,1], \cdot, \rightarrow_{\cdot}, \wedge, \vee, \neg_{\cdot}, 0, 1\rangle$

Tal i com hem comentat a la introducció el nostre objectiu és estudiar les lògiques basades en t-normes contínues. Per aquest motiu, cal definir quin llenguatge proposicional utilitzarem i què és un lògica.
Sigui X el conjunt de variables, suposem que el nombre de variables és comptable. Considerem el següent llenguatge:

$$\pounds = \{\&, \rightarrow, \wedge, \vee, \neg, \top, \bot\},$$

on $\&, \rightarrow, \wedge, \vee, \neg$ són connectives i $\top, \bot$ constants.
Designarem per $Prop_{\pounds}(X)$ (o simplement per $Prop(X)$) el conjunt de fórmules en aquest llenguatge. Definim $Prop(X)$ per recursió.

- $x \in Prop(X)$ per tota $x \in X$;
- si $\varphi \in Prop(X)$, aleshores $(\neg\varphi) \in Prop(X)$;
- si $\varphi, \psi \in Prop(X)$, aleshores $(\varphi \wedge \psi) \in Prop(X)$, $(\varphi \vee \psi) \in Prop(X)$, $(\varphi\&\psi) \in Prop(X)$ i $(\varphi \rightarrow \psi) \in Prop(X)$;
- $\bot \in Prop(X)$ i $\top \in Prop(X)$.

Definició 1.21. *Sigui* $\rhd \subseteq P(Prop(X)) \times Prop(X)$. *Diem que* $\rhd$ *és una relació de conseqüència estructural, si per tot* $\Sigma, \Delta \subseteq Prop(X)$ *i* $\varphi, \psi \in Prop(X)$ *es satisfà:*

- *Axioma:* $\varphi \rhd \varphi$
- *Monotonia: si* $\Delta \subseteq \Sigma$ *i* $\Delta \rhd \varphi$, *aleshores* $\Sigma \rhd \varphi$
- *Tall: si* $\Sigma \rhd \varphi$ *i* $\varphi \rhd \psi$, *aleshores* $\Sigma \rhd \psi$.
- *Estructuralitat: Sigui* σ *una substitució. Si* $\Sigma \rhd \varphi$, *aleshores* $\sigma[\Sigma] \rhd \sigma(\varphi)$.

Si, a més a més, es compleix que:
si $\Sigma \rhd \varphi$, *aleshores existeix* $\Delta \subseteq \Sigma$ *finit tal que* $\Delta \rhd \varphi$,
aleshores diem que $\rhd$ *és una relació de conseqüència estructural finitària.*

Definició 1.22. *Una lògica proposicional és una parella* $\langle Prop(X), \rhd\rangle$. *on* $\rhd \subseteq P(Prop(X)) \times Prop(X)$ *és una relació de conseqüència estructural.*

Per definir les lògiques associades a t-normes, necessitem introduir el concepte d'interpretació.

Definició 1.23. *Sigui* $\&$ *una t-norma contínua i sigui* $[0,1]_{\&} = \langle [0,1], \&, \rightarrow_{\&}, \wedge, \vee, \neg_{\&}, 0, 1\rangle$ *la seva àlgebra estàndard. Definim una* $[0,1]_{\&}$*-interpretació com una aplicació* $I : Prop(X) \rightarrow [0,1]_{\&}$ *tal que:*

1. $I(\bot) = 0$
2. $I(\varphi \rightarrow \psi) = I(\varphi) \rightarrow_{\&} I(\psi)$
3. $I(\varphi\&\psi) = I(\varphi)\&I(\psi)$

4. $I(\varphi \wedge \psi) = I(\varphi) \wedge I(\psi)$
5. $I(\varphi \vee \psi) = I(\varphi) \vee I(\psi)$
6. $I(\neg\varphi) = \neg_{\&} I(\varphi)$

Definició 1.24. *Definim la lògica fuzzy associada a una t-norma & com l'obtinguda de la següent manera:*
Per tot $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Prop(X)$,
$\Sigma \models_{[0,1]_{\&}} \varphi$ *si i només si per tota $[0,1]_{\&}$-interpretació I tal que $I(\psi) = 1$ per tota $\psi \in \Sigma$, aleshores $I(\varphi) = 1$.*

Per cada àlgebra, tenim una lògica. El nostre objectiu és veure què tenen en comú aquestes lògiques.
Observem que, a partir de les tres t-normes abans esmentades, podem definir les següents lògiques:

1. La lògica de Gödel:
   Per tot $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Prop(X)$,
   $\Sigma \models_{[0,1]_{\wedge}} \varphi$ si i només si per tota $[0,1]_{\wedge}$-interpretació I tal que $I(\psi) = 1$ per tota $\psi \in \Sigma$, aleshores $I(\varphi) = 1$.
2. La lògica de Lukasiewicz:
   Per tot $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Prop(X)$,
   $\Sigma \models_{[0,1]_{\odot}} \varphi$ si i només si per tota $[0,1]_{\odot}$-interpretació I tal que $I(\psi) = 1$ per tota $\psi \in \Sigma$, aleshores $I(\varphi) = 1$.
3. La lògica producte:
   Per tot $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Prop(X)$,
   $\Sigma \models_{[0,1]_{\cdot}} \varphi$ si i només si per tota $[0,1]_{\cdot}$-interpretació I tal que $I(\psi) = 1$ per tota $\psi \in \Sigma$, aleshores $I(\varphi) = 1$.

La lògica de Lukasiewicz va ser introduïda històricament amb un altre llenguatge el 1930 a [13]. Lukasiewicz va introduir l'àlgebra de Lukasiewicz. En aquest cas el llenguatge és $L = \{\neg, \rightarrow\}$:

$$[0,1]_L = \langle [0,1], \rightarrow, \neg, 0, 1 \rangle$$

on $\rightarrow, \neg$ són la R-implicació de Lukasiewicz i i la negació de Lukasiewicz, exemples 1.14 i 1.18, respectivament.

Observació 1.25. Es pot veure que $[0,1]_L$ és equivalent a l'àlgebra estàndard associada a $\odot$. N'hi ha prou amb veure que $\odot, \wedge, \vee$ són terme-definibles a partir de $\rightarrow, \neg$: $a \odot b := \neg(a \rightarrow \neg b)$, $a \wedge b := a \odot (a \rightarrow b)$ i $a \vee b := (a \rightarrow b) \rightarrow b$.
Així, definim la lògica $\models_{[0,1]_L}$ de la mateixa manera que $\models_{[0,1]_{\odot}}$.

Lukasiewicz proposà el càlcul infinitvalorat de Lukasiewicz $\vdash_{L_\infty}$ a [13] amb la pretensió de ser complet respecte la lògica $\models_{[0,1]_L}$ en el sentit feble. És a dir, per tota $\varphi \in Prop(X)$, $\vdash_{L_\infty} \varphi \iff \models_{[0,1]_L} \varphi$.
Axiomes:

1. $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
2. $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$

3. $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$
4. $((\varphi \to \psi) \to \psi) \to ((\psi \to \varphi) \to \varphi)$

Regla: $\varphi, \varphi \to \psi \ / \ \psi$ (Modus Ponens)
Chang demostrà la completesa feble d'aquest càlcul per a aquesta lògica el 1959 a [1].

D'altra banda, la lògica de Gödel va ser històricament introduïda com a extensió de la lògica intuicionista i com a lògica multivalorada el 1932 per Gödel a [9]. En aquest cas el llenguatge és $L = \{\neg, \to, \wedge, \vee\}$.

$$[0,1]_G = \langle [0,1], \to, \wedge, \vee, \neg, 0, 1\rangle$$

on $a \wedge b = min\{a,b\}$, $a \vee b = max\{a,b\}$ i $\to, \neg$ són la R-implicació de Gödel i i la negació de Gödel, exemples 1.14 i 1.18, respectivament.

Observació 1.26. Es pot veure que $[0,1]_G$ és equivalent a l'àlgebra estàndard associada a $\wedge$: són la mateixa àlgebra, però la presentació amb l'àlgebra estàndard té l'operació $\wedge$ repetida. Per tant, definim la lògica $\models_{[0,1]_G}$ de la mateixa manera que $\models_{[0,1]_\wedge}$.

El càlcul per a aquesta lògica, el càlcul infinitvalorat de Gödel $\vdash_{G_\infty}$, està format per un seguit d'axiomes (els nou primers són els de la lògica intuicionista) i una regla.
Axiomes:

1. $\varphi \to (\psi \to \varphi)$
2. $\varphi \to (\psi \to \varphi \wedge \psi)$
3. $\varphi \wedge \psi \to \varphi$
4. $\varphi \wedge \psi \to \psi$
5. $\varphi \to \varphi \vee \psi$
6. $\psi \to \varphi \vee \psi$
7. $\varphi \vee \psi \to ((\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to \chi))$
8. $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\varphi \to \chi))$
9. $\perp \to \varphi$
10. $(\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)$

Regla: $\varphi, \varphi \to \psi \ / \ \psi$ (Modus Ponens)

Dummett demostrà la completesa feble d'aquest càlcul l'any 1959 a [7]: per tota $\varphi \in Prop(X)$, $\vdash_{G_\infty} \varphi \iff \models_{[0,1]_G} \varphi$. Veurem que aquest teorema de completesa es pot estendre de la següent manera: per tot $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Prop(X)$, $\Sigma \vdash_{G_\infty} \varphi \iff \Sigma \models_{[0,1]_G} \varphi$.

Recordem a partir d'una t-norma contínua & tenim una lògica $\models_{[0,1]_\&}$. Volem veure què tenen en comú aquestes lògiques basades en t-normes contínues. Per això, definim la lògica fuzzy bàsica.

Definició 1.27. *Definim la lògica fuzzy bàsica:*
Per tot $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Prop(X)$,
$\Sigma \models_{\&-cont} \varphi$ *si i només si per tota t-norma contínua &,* $\Sigma \models_{[0,1]_\&} \varphi$.

2 Càlcul BL i extensions

En aquest capítol presentarem els diferents càlculs del treball. A més, aportarem propietats de caire tècnic que ens seran necessàries per demostrar els teoremes de completesa. Cal dir que no demostrarem totes les propietats, només algunes a tall d'exemple, la resta es poden trobar en [12].
Convé esmentar que tot càlcul $\vdash$ és una relació de conseqüència estructural finitària.
Donarem tots aquests càlculs amb l'objectiu que siguin complets respecte a les lògiques definides anteriorment.

2.1 Càlcul BL

Petr Hájek a [12, definició 2.2.4] va proposar el següent càlcul per ser complet respecte la lògica fuzzy bàsica, $\models_{\&-cont}$.

Definició 2.1. *Definim el càlcul BL, $\vdash_{BL}$ a partir dels següents axiomes i regla:*
Axiomes:

1. $(\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$
2. $(\varphi \& \psi) \to \varphi$
3. $(\varphi \& \psi) \to (\psi \& \varphi)$
4. $(\varphi \& (\varphi \to \psi)) \to (\psi \& (\psi \to \varphi))$
5. $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \& \psi) \to \chi)$
6. $((\varphi \& \psi) \to \chi) \to (\varphi \to (\psi \to \chi))$
7. $((\varphi \to \psi) \to \chi) \to (((\psi \to \varphi) \to \chi) \to \chi)$
8. $\bot \to \varphi$

Regla: $\varphi, \varphi \to \psi \ / \ \psi$ (Modus Ponens)

Observació 2.2. En aquest càlcul, les connectives $\wedge, \vee, \neg$ són definibles a partir de les connectives $\&, \to$ i de la constant $\bot$:
$\varphi \wedge \psi := \varphi \& (\varphi \to \psi)$, $\varphi \vee \psi := ((\varphi \to \psi) \to \psi) \wedge ((\psi \to \varphi) \to \varphi)$ i $\neg\varphi := \varphi \to \bot$
De la mateixa manera podem definir $\top := \bot \to \bot$.

Definició 2.3. *Siguin $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Prop(X)$. Una demostració de φ a partir de Σ és una seqüència de fórmules $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ on $\varphi_n = \varphi$ i tal que cada φ_i és una instància d'axioma de BL o $\varphi_i \in \Sigma$ o bé existeixen $j, k < i$ de manera que φ_i s'obté a partir de φ_j, φ_k per Modus Ponens.*
Diem que φ és provable en Σ (notació: $\Sigma \vdash_{BL} \varphi$) si i només si existeix una demostració de φ a partir de Σ.

Observació 2.4. Només en aquesta subsecció, usarem el símbol $\vdash$ per referir-nos a $\vdash_{BL}$.

Tal i com trobem a [12], podem enunciar el següent lema. Només provem els quatre primers punts, la resta es trobem demostrats a [12, capítol 2].

Lema 2.5. *BL prova les següents propietats:*

1. $\varphi \to (\psi \to \varphi)$
2. $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\psi \to (\varphi \to \chi))$
3. $\varphi \to \varphi$
4. $(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$
5. $(\varphi \& (\varphi \to \psi)) \to \psi$
6. $\varphi \to (\psi \to (\varphi \& \psi))$
7. $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \& \chi) \to (\psi \& \chi))$
8. $(\varphi \& \psi) \& \chi \to \varphi \& (\psi \& \chi)$, $\varphi \& (\psi \& \chi) \to (\varphi \& \psi) \& \chi$
9. $(\varphi \& \psi) \to (\varphi \wedge \psi)$
10. $\varphi \to (\varphi \vee \psi)$, $\psi \to (\varphi \vee \psi)$
11. $((\varphi \to \psi) \wedge (\varphi \to \chi)) \to (\varphi \to (\psi \wedge \chi))$
12. $((\varphi \to \chi) \wedge (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \vee \psi) \to \chi)$
13. $(\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)$
14. $\top$
15. $\varphi \to (\top \& \varphi)$
16. $(\top \to \varphi) \to \varphi$
17. $((\varphi_1 \to \psi_1) \& (\varphi_2 \to \psi_2)) \to ((\varphi_1 \& \varphi_2) \to (\psi_1 \& \psi_2))$
18. $\varphi \to ((\varphi \to \bot) \to \bot)$
19. $((\varphi \vee \psi) \to \bot) \to ((\varphi \to \bot) \wedge (\psi \to \bot))$, $((\varphi \to \bot) \wedge (\psi \to \bot)) \to ((\varphi \vee \psi) \to \bot)$
20. $((\varphi \to \bot) \vee (\psi \to \bot)) \to ((\varphi \wedge \psi) \to \bot)$, $((\varphi \wedge \psi) \to \bot) \to ((\varphi \to \bot) \vee (\psi \to \bot))$

Demostració de les quatre primeres propietats:

1. $\varphi \to (\psi \to \varphi)$
   Per l'axioma 2, tenim $\vdash (\varphi \& \psi) \to \varphi$
   Per l'axioma 6, $\vdash ((\varphi \& \psi) \to \varphi) \to (\varphi \to (\psi \to \varphi))$
   Per Modus Ponens, $\vdash \varphi \to (\psi \to \varphi)$

2. $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\psi \to (\varphi \to \chi))$
   Per l'axioma 1, $\vdash ((\psi \& \varphi) \to (\varphi \& \psi)) \to (((\varphi \& \psi) \to \chi) \to ((\psi \& \varphi) \to \chi)))$
   Per l'axioma 3, $\vdash (\psi \& \varphi) \to (\varphi \& \psi)$
   Per Modus Ponens de les anteriors, $\vdash ((\varphi \& \psi) \to \chi) \to ((\psi \& \varphi) \to \chi))$
   Apliquem l'axioma 6 als dos costats de la implicació i obtenim el resultat.

3. $\varphi \to \varphi$
   Apliquem Modus Ponens entre els punts 1 i 2 del lema i obtenim $\vdash \psi \to (\varphi \to \varphi)$
   Prenem com a ψ un dels axiomes i obtenim el resultat desitjat.

4. $(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$
   Per l'axioma 2, tenim $\vdash (\varphi \& (\varphi \to \psi)) \to \varphi$ i per la definició de $\wedge$ ja hem acabat. $\square$

2.2 Càlcul de Gödel

En el capítol anterior ja hem donat un càlcul per a la lògica de Gödel. A continuació, donarem una presentació equivalent, que proposa Hájek a [12].

Definició 2.6. *Càlcul de Gödel, $\vdash_G$.*
Axiomes:

1. $(\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$
2. $(\varphi \& \psi) \to \varphi$
3. $(\varphi \& \psi) \to (\psi \& \varphi)$
4. $(\varphi \& (\varphi \to \psi)) \to (\psi \& (\psi \to \varphi))$
5. $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \& \psi) \to \chi)$
6. $((\varphi \& \psi) \to \chi) \to (\varphi \to (\psi \to \chi))$
7. $((\varphi \to \psi) \to \chi) \to (((\psi \to \varphi) \to \chi) \to \chi)$
8. $\bot \to \varphi$
9. $\varphi \to (\varphi \& \varphi)$

Regla: $\varphi, \varphi \to \psi$ / ψ (Modus Ponens)

Observació 2.7. Aquest càlcul utilitza les connectives $\to, \wedge, \vee, \&$ i la constant $\bot$. Observem que aquest càlcul és una extensió del càlcul BL perquè els vuit primers axiomes són els del càlcul BL.

Observació 2.8. A més, amb aquesta presentació del cálcul $\vdash_G (\varphi \& \psi) \to (\varphi \wedge \psi)$ i $\vdash_G (\varphi \wedge \psi) \to (\varphi \& \psi)$.
La primera implicació la trobem en el càlcul BL i per tant, és veritat en G.
D'altra banda, al càlcul BL es compleix que $\vdash_{BL} (\varphi \wedge \psi) \to \varphi$ i $\vdash_{BL} (\varphi \wedge \psi) \to \psi$. Ara, usem el lema 2.5.6: $\vdash_{BL} ((\varphi \wedge \psi) \to \varphi) \to (((\varphi \wedge \psi) \to \psi) \to (((\varphi \wedge \psi) \to \varphi) \& ((\varphi \wedge \psi) \to \psi)))$ i usant Modus Ponens dos cops, obtenim $\vdash_{BL} (((\varphi \wedge \psi) \to \varphi) \& ((\varphi \wedge \psi) \to \psi))$. Ara, utilitzem un lema del càlcul BL $\vdash_{BL} (((\varphi \wedge \psi) \to \varphi) \& ((\varphi \wedge \psi) \to \psi)) \to (((\varphi \wedge \psi) \& (\varphi \wedge \psi)) \to (\varphi \& \psi))$ i per Modus Ponens, $\vdash_{BL} [(\varphi \wedge \psi) \& (\varphi \wedge \psi)] \to (\varphi \& \psi)$. Ara, com que amb la nova instància d'axioma tenim $(\varphi \wedge \psi) \to [(\varphi \wedge \psi) \& (\varphi \wedge \psi)]$, podem fer servir l'instància d'axioma 1 i $[(\varphi \wedge \psi) \to ((\varphi \wedge \psi) \& (\varphi \wedge \psi))] \to [(((\varphi \wedge \psi) \& (\varphi \wedge \psi)) \to (\varphi \& \psi)) \to ((\varphi \wedge \psi) \to (\varphi \& \psi))]$ i amb Modus Ponens dos cops obtenim $(\varphi \wedge \psi) \to (\varphi \& \psi)$.

2.3 Càlcul de Lukasiewicz

D'igual manera que en el cas de Gödel, per Lukasiewicz també donem una presentació equivalent del càlcul en el mateix llenguatge que en el cas BL. Aquesta presentació fou proposada per Hájek a [12].

Definició 2.9. *El càlcul de Lukasiewicz, $\vdash_L$.*
Axiomes:

1. $(\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$

2. $(\varphi \& \psi) \to \varphi$

3. $(\varphi \& \psi) \to (\psi \& \varphi)$

4. $(\varphi \& (\varphi \to \psi)) \to (\psi \& (\psi \to \varphi))$

5. $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \& \psi) \to \chi)$

6. $((\varphi \& \psi) \to \chi) \to (\varphi \to (\psi \to \chi))$

7. $((\varphi \to \psi) \to \chi) \to (((\psi \to \varphi) \to \chi) \to \chi)$

8. $\perp \to \varphi$

9. $\neg\neg\varphi \to \varphi$

Regla: $\varphi, \varphi \to \psi \;/\; \psi$ *(Modus Ponens)*

Observació 2.10. $\neg$ es defineix de la mateixa manera que a BL. Observem que aquest càlcul també és una extensió del càlcul BL perquè els vuit primers axiomes són els del càlcul BL.

2.4 Càlcul producte

A diferència dels dos càlculs anteriors, el càlcul producte no té un equivalent històric anterior a la definició de lògica basada en t-normes. De la mateixa manera que els anteriors, el proposà Hájek a [12].
Cal dir que el càlcul producte és una extensió del càlcul BL: té els mateixos axiomes afegint-ne dos de nous i utilitzem la mateixa regla. Utilitza les mateixes connectives i la negació que apareix és la definida al càlcul BL.

Definició 2.11. *Definim el càlcul producte,* $\vdash_P$ *a partir dels següents axiomes i regla:*
Axiomes:

1. $(\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$

2. $(\varphi \& \psi) \to \varphi$

3. $(\varphi \& \psi) \to (\psi \& \varphi)$

4. $(\varphi \& (\varphi \to \psi)) \to (\psi \& (\psi \to \varphi))$

5. $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \& \psi) \to \chi)$

6. $((\varphi \& \psi) \to \chi) \to (\varphi \to (\psi \to \chi))$

7. $((\varphi \to \psi) \to \chi) \to (((\psi \to \varphi) \to \chi) \to \chi)$

8. $\perp \to \varphi$

9. $\neg\neg\chi \to ((\varphi \& \chi) \to (\psi \& \chi) \to (\varphi \to \psi))$

10. $\varphi \wedge \neg\varphi \to \perp$

Regla: $\varphi, \varphi \to \psi \;/\; \psi$ *(Modus Ponens)*

3 BL-àlgebres

Aquest capítol està dedicat a la introducció de les semàntiques algebraiques dels càlculs BL, Gödel, Lukasiewicz i producte definits en el capítol anterior.

3.1 Propietats algebraiques

Definició 3.1. *Un reticle és una àlgebra $\boldsymbol{A} = \langle A, \wedge, \vee \rangle$ de tipus $(2, 2)$ en què es compleixen les següents equacions:*

$$x \wedge x \approx x$$

$$x \vee x \approx x$$

$$x \wedge y \approx y \wedge x$$

$$x \vee y \approx y \vee x$$

$$x \wedge (y \wedge z) \approx (x \wedge y) \wedge z$$

$$x \vee (y \vee z) \approx (x \vee y) \vee z$$

$$x \wedge (x \vee y) \approx x$$

$$x \vee (x \wedge y) \approx x$$

Observació 3.2. Podem definir l'odre associat al reticle com $x \leq y$ si $x \wedge y = x$. Vegem que, en efecte, es tracta d'una relació d'ordre (reflexiva, antisimètrica i transitiva).

- Reflexiva: com que $x \wedge x = x$, aleshores $x \leq x$.
- Antisimètrica: Suposem que $x \leq y$ i que $y \leq x$, aleshores $x = x \wedge y = y \wedge x = y$. Per tant, $x = y$.
- Transitiva: Suposem que $x \leq y$ i que $y \leq z$. Aleshores $x = x \wedge y$ i $y = y \wedge z$. Així, $x = x \wedge y = x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z = x \wedge z$. Per tant, $x \leq z$.

Així, amb aquesta relació d'ordre $\leq$, $\langle L, \leq \rangle$ és un conjunt ordenat, on $x \wedge y$ és l'ínfim de x, y i $x \vee y$ el suprem de x, y.
De la mateixa manera, si tenim $\langle L, \leq \rangle$ un conjunt ordenat on cada parella d'elements té el seu suprem i ínfim, podem prendre $x \wedge y = inf(x, y)$ i $x \vee y = sup(x, y)$ i, aleshores, $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ és un reticle.

Definició 3.3. *Un reticle residuat és una àlgebra $(L, \wedge, \vee, \&, \rightarrow, 0, 1)$ de tipus $(2, 2, 2, 2, 0, 0)$ tal que:*

1. *$(L, \wedge, \vee, 0, 1)$ és un reticle acotat, és a dir, 1 és l'element més gran i 0 el més petit (respecte l'ordre del reticle $\leq$).*
2. *$(L, \&, 1)$ és un semigrup commutatiu amb 1 com a element unitat, és a dir, satisfà aquestes equacions:*
   $x\&(y\&z) \approx (x\&y)\&z \qquad x\&y \approx y\&x \qquad x\&1 \approx x$
3. *$\&$ i $\rightarrow$ formen una parella adjunta, és a dir, per a tot $a, b, c \in L$*
   $c \leq a \rightarrow b$ sii $a\&c \leq b$.

Aquest tercer punt es coneix com la propietat de residuació.

Definició 3.4. *Una BL-àlgebra és un reticle residuat* $(L, \wedge, \vee, \&, \to, 0, 1)$ *tal que satisfà les següents equacions:*

$$x \wedge y \approx x\&(x \to y)$$

$$(x \to y) \vee (y \to x) \approx 1.$$

Observació 3.5. Cal esmentar que es pot definir una BL-àlegebra de forma equacional ja que els punts 1, 2 i 3 de la definició de reticle residuat es poden posar en forma d'equació. Pel que fa al primer punt, s'afegeixen les equacions $0 \wedge x \approx 0$ i $x \wedge 1 \approx x$. El segon punt està posat ja en forma equacional i el tercer punt el podem escriure com $x \to (y \to z) \approx (x\&y) \to z$, tal i com podem deduir de [8].

Aquesta presentació equacional ens serà útil més endavant quan parlem de filtres.

Lema 3.6. *Sigui* $\boldsymbol{L}$ *una BL-àlgebra. Per cada* $a, b, c \in \boldsymbol{L}$*, tenim que:*

1. $a \leq b$ *sii* $a \to b = 1$
2. $a\&(a \to b) \leq b$ *i* $a \leq (b \to (a\&b))$
3. $a \leq b$ *implica que* $a\&c \leq b\&c$, $(c \to a) \leq (c \to b)$, $(b \to c) \leq (a \to c)$
4. $(a \vee b)\&c = (a\&c) \vee (b\&c)$
5. $a \vee b = ((a \to b) \to b) \wedge ((b \to a) \to a)$

Demostració:

1. $a \leq b$ sii $1\&a \leq b$ sii $1 \leq a \to b$ sii $a \to b = 1$.
2. Com que $(a \to b) \leq (a \to b)$ i $(\&, \to)$ formen una parella adjunta, aleshores $a\&(a \to b) \leq b$. De la mateixa manera, com que $a\&b \leq a\&b$, per la residuació obtenim $a \leq (b \to (a\&b))$.
3. Sigui $a \leq b$, aleshores pel punt 2 del lema $a \leq b \leq (c \to (b\&c))$, Ara, per la residuació, tenim la desigualtat buscada.
   A més, si $a \leq b$, aleshores $c\&(c \to a) \leq a \leq b$. Per tant, per la residuació, $(c \to a) \leq (c \to b)$.
   Finalment, com que $a \leq b$, aleshores $a\&(b \to c) \leq b\&(b \to c) \leq c$. Per tant, per la residuació, $(b \to c) \leq (a \to c)$.
4. Provarem les dues desigualtats.
   Com que $a \leq a \vee b$, aleshores pel punt 3 del lema $a\&c \leq (a \vee b)\&c$. Amb el mateix raonament, $b\&c \leq (a \vee b)\&c$. Per tant, $(a\&c) \vee (b\&c) \leq (a \vee b)\&c$.
   Com que $a\&c \leq (a\&c) \vee (b\&c)$, aleshores per la residuació $a \leq (c \to (a\&c) \vee (b\&c))$. Pel mateix raonament, $b \leq (c \to (a\&c) \vee (b\&c))$. Per tant, $(a \vee b) \leq (c \to (a\&c) \vee (b\&c))$. Ara, per la residuació obtenim $(a \vee b)\&c \leq (a\&c) \vee (b\&c)$.
5. Provarem les dues desigualtats.
   D'una banda, $(a \to b)\&(a \vee b) = (a\&(a \to b)) \vee (b\&(b \to a)) \leq b \vee b = b$. Per tant, per residuació tenim $a \vee b \leq (a \to b) \to b$. De la mateixa manera, $a \vee b \leq (b \to a) \to a$. En conseqüència, $a \vee b \leq ((a \to b) \to b) \wedge ((b \to a) \to a)$.
   D'altra banda, $[((a \to b) \to b) \wedge ((b \to a) \to a)] = [...]\&((a \to b) \vee (b \to a)) = ([...]\&(a \to b)) \vee ([...]\&(b \to a)) \leq [((a \to b) \to b)\&(a \to b)] \vee [((b \to a) \to a)\&(b \to a)] \leq b \vee a$. □

Exemples 3.7.

- L'àlgebra estàndard de Gödel, $[0,1]_\wedge = \langle [0,1], \wedge, \rightarrow_\wedge, \wedge, \vee, \neg_\wedge, 0, 1\rangle$, és una BL-àlgebra. Comprovem-ho.
  1. $([0,1], \wedge, \vee, 0, 1)$ és un reticle acotat. Siguin $a, b, c \in [0,1]$:
     (a) $a \wedge a = min\{a,a\} = a = max\{a,a\} = a \vee a$
     (b) $a \wedge b = min\{a,b\} = b \wedge a$
     (c) $a \vee b = max\{a,b\} = b \vee a$
     (d) $a \wedge (b \wedge c) = min\{a, min\{b,c\}\} = min\{a,b,c\} = min\{min\{a,b\},c\} = (a \wedge b) \wedge c$
     (e) $a \vee (b \vee c) = max\{a, max\{b,c\}\} = max\{a,b,c\} = max\{max\{a,b\},c\} = (a \vee b) \vee c$
     (f) Com que $a \leq max\{a,b\}$, aleshores $a \wedge (a \vee b) = a$.
     (g) Com que $min\{a,b\} \leq a$, aleshores $a \vee (a \wedge b) = a$.
  2. $([0,1], \wedge, 1)$ és un semigrup commutatiu amb element neutre 1 perquè & és una t-norma (és a dir, és commutativa, associativa i 1 és element neutre).
  3. Es compleix la residuació perquè $\rightarrow_\wedge$ és la R-implicació associada a $\wedge$.
  4. Siguin $a, b \in [0,1]$. Fem casos: $a \leq b$ i $b \leq a$. Si $a \leq b$, aleshores $a \wedge b = a$ i $a \wedge (a \rightarrow b) = a \wedge 1 = a$. Si $b \leq a$, aleshores $a \wedge b = b$ i $a \wedge (a \rightarrow b) = a \wedge b = b$. En tots els casos es compleix que $a \wedge b = a \wedge (a \rightarrow b)$.
  5. Siguin $a, b \in [0,1]$. Com que $([0,1], \leq)$ és un ordre total, aleshores $a \leq b$ o $b \leq a$. Per tant, $a \rightarrow b = 1$ o $b \rightarrow a = 1$. Així, $(a \rightarrow b) \vee (b \rightarrow a) = 1$.

- De la mateixa manera, l'àlgebra estàndard de Lukasiewicz i l'àlgebra estàndard producte són BL-àlgebres.

- Prenem la següent àlgebra $\mathbf{L} = \langle [0,1], \wedge, \vee, \&, \rightarrow, 0, 1\rangle$, de manera que $\wedge$ i $\vee$ són el mínim i el màxim, respectivament. Definim & i $\rightarrow$ de la següent manera:
  Per tot $a, b \in [0,1]$,
  $$a\&b = \begin{cases} a \cdot b & si \quad a, b \in [0, 1/2] \\ min\{a,b\} & altrament \end{cases}$$
  $$a \rightarrow b = \begin{cases} 1 & si \quad a \leq b \\ b/a & si \quad a, b \in [0, 1/2] \text{ i } b > a \\ b & altrament \end{cases}$$
  Així, $([0,1], \wedge, \vee, 0, 1)$ és un reticle acotat. Podem comprovar sense fer casos que es compleixen les propietats 2 i 3 de reticle residuat perquè & és una suma ordinal de t-normes, concretament, producte i Gödel. Per tant, & és una t-norma. A més, $\rightarrow$ és la R-implicació associada a & i, per tant, es compleix la residuació. Fent casos, es comprova fàcilment que es satisfan les equacions de BL-àlgebra. Pert tant, $\mathbf{L}$ és una BL-àlgebra.

- Siguin $c, d \in (0,1)$ tals que $c < d$. Sigui $\mathbf{L} = \langle \{0, c, d, 1\}, \wedge, \vee, \&, \rightarrow, 0, 1\rangle$ de manera que & és la t-norma de Gödel restringida a $\{0, c, d, 1\}$, $\rightarrow$ és la seva R-implicació associada restringida a $\{0, c, d, 1\}$ i $\wedge$ i $\vee$ s'intrepreten com el mínim i el máxim respectivament, aleshores $\mathbf{L}$ és una BL-àlgebra.

- Siguin $\mathbf{A} = \langle A, \wedge_A, \vee_A, \&_A, \rightarrow_A, 0_A, 1_A\rangle$ i $\mathbf{B} = \langle B, \wedge_B, \vee_B, \&_B, \rightarrow_B, 0_B, 1_B\rangle$ dues BL-àlgebres. Si prenem $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \langle A \times B, \wedge, \vee, \&, \rightarrow, 0, 1\rangle$ de manera que definim cada operació component a component (és a dir, per exemple, $(a,b) \wedge (c,d) = (a \wedge_A c, b \wedge_B d))$ i de manera que $0 = (0_A, 0_B)$ i $1 = (1_A, 1_B)$, $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ és una BL-àlgebra. Observem que aquesta BL-àlgebra no és totalment ordenada: si $(a,b),(c,d) \in A \times B$ amb $a < c$ i $d < b$, aleshores no puc comparar els parells perquè $(a,b) \not\leq (c,d)$ i $(c,d) \not\leq (a,b)$.

Definició 3.8. *Sigui $\boldsymbol{L} = (L, \wedge, \vee, \&, \rightarrow, 0, 1)$ una BL-àlgebra. Definirem una $\boldsymbol{L}$-interpretació com una aplicació $I : Prop(X) \rightarrow \boldsymbol{L}$ tal que:*

1. $I(\bot) = 0$
2. $I(\varphi \rightarrow \psi) = I(\varphi) \rightarrow I(\psi)$
3. $I(\varphi \& \psi) = I(\varphi) \& I(\psi)$
4. $I(\varphi \wedge \psi) = I(\varphi) \wedge I(\psi)$
5. $I(\varphi \vee \psi) = I(\varphi) \vee I(\psi)$
6. $I(\neg\varphi) = I(\varphi) \rightarrow 0$

Observació 3.9. Tot i usar la mateixa notació, fem notar que confonem, com es fa habitualment, el símbol de la connectiva amb el símbol de l'operació de l'àlgebra.

Una fórmula φ serà una $\boldsymbol{L}$-tautologia si per tota I $\boldsymbol{L}$-interpretació $I(\varphi) = 1$.

Definició 3.10. *Direm que φ és conseqüència lògica de Σ respecte la classe de totes les BL-àlgebres (escriurem $\Sigma \models_{BL} \varphi$) si i només si per tota BL-àlgebra $\boldsymbol{L}$ i per tota $\boldsymbol{L}$-interpretació I, si $I(\psi) = 1$ per tota $\psi \in \Sigma$, aleshores $I(\varphi) = 1$.*

3.2 Coherència del càlcul BL

A continuació, enunciarem i demostrarem la coherència del càlcul BL respecte la lògica $\models_{BL}$.

Teorema 3.11. *Teorema de coherència de BL*
Siguin $\Sigma \cup \varphi \subseteq Prop(X)$,
Si $\Sigma \vdash_{BL} \varphi$, aleshores $\Sigma \models_{BL} \varphi$.

<u>Demostració:</u>
Cal provar que tots els axiomes són tautologies, que es compleix la regla de Modus Ponens i que coincideixen $\vee, \wedge$ del càlcul i de la BL-àlgebra.
Sigui $\mathbf{L}$ una BL-àlgebra i sigui I una $\mathbf{L}$-interpretació.

1. $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$
   Volem veure que $1 = I((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)))$.
   Això serà cert si $1 = (I(\varphi) \rightarrow I(\psi)) \rightarrow ((I(\psi) \rightarrow I(\chi)) \rightarrow (I(\varphi) \rightarrow I(\chi)))$ sii (per 4.6.1) $(I(\varphi) \rightarrow I(\psi)) \leq ((I(\psi) \rightarrow I(\chi)) \rightarrow (I(\varphi) \rightarrow I(\chi)))$. Ara, per la propietat de residuació i per la propietat commutativa de &, aquesta desigualtat és equivalent a $(I(\varphi) \rightarrow I(\psi)) \& (I(\psi) \rightarrow I(\chi)) \leq (I(\varphi) \rightarrow I(\chi))$. Un altre cop, per la residuació i l'associativitat de &, és equivalent a $(I(\varphi) \& (I(\varphi) \rightarrow I(\psi))) \& (I(\psi) \rightarrow I(\chi)) \leq I(\chi)$. Ara, al terme de l'esquerra de la desigualtat utilitzem el lema 3.6.2 dues vegades: $(I(\varphi) \& (I(\varphi) \rightarrow I(\psi))) \& (I(\psi) \rightarrow I(\chi)) \leq I(\psi) \& (I(\psi) \rightarrow I(\chi)) \leq I(\chi)$. Per tant, hem obtingut la desigualtat desitjada i $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$ és una $\mathbf{L}$-tautologia per tota $\mathbf{L}$-interpretació.

2. $(\varphi \& \psi) \to \varphi$
   Volem veure que $I((\varphi \& \psi) \to \varphi) = 1$.
   Com que $(I(\varphi)\&I(\psi)) \leq I(\varphi)\&1 = I(\varphi)$, aleshores per la propietat de residuació es compleix la igualtat i $(\varphi\&\psi) \to \varphi$ és una **L**-tautologia per tota **L**-interpretació.

3. $(\varphi\&\psi) \to (\psi\&\varphi)$
   Volem veure que $I((\varphi\&\psi) \to (\psi\&\varphi)) = 1$.
   Això és equivalent, pel lema 3.6.1, a $I(\varphi)\&I(\psi) \leq I(\psi)\&I(\varphi)$, que és veritat per la commutativitat de &.

4. $(\varphi\&(\varphi \to \psi)) \to (\psi\&(\psi \to \varphi))$
   Volem veure que $I((\varphi\&(\varphi \to \psi)) \to (\psi\&(\psi \to \varphi))) = 1$.
   Com que estem en una BL-àlgebra, aleshores $I(\varphi)\&(I(\varphi) \to I(\psi)) = I(\varphi) \wedge I(\psi)$. Ara, podem utilitzar la commutativitat de $\wedge$ i, per tant, $I(\varphi) \wedge I(\psi) = I(\psi) \wedge I(\varphi)$. Per tant, $I(\varphi)\&(I(\varphi) \to I(\psi)) = I(\psi)\&(I(\psi) \to I(\varphi))$ i, en particular, $I(\varphi)\&(I(\varphi) \to I(\psi)) \leq I(\psi)\&(I(\psi) \to I(\varphi))$.

5. $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi\&\psi) \to \chi)$
   Volem veure que $I((\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi\&\psi) \to \chi)) = 1$. Això és equivalent a $I(\varphi) \to (I(\psi) \to I(\chi)) \leq (I(\varphi)\&I(\psi)) \to I(\chi)$ sii (per la propietat de residuació) $(I(\varphi) \to (I(\psi) \to I(\chi)))\&(I(\varphi)\&I(\psi)) \leq I(\chi)$. Ens fixem només en l'expressió de l'esquerra de la desigualtat, per la commutativitat i associativitat de &, $(I(\varphi) \to (I(\psi) \to I(\chi)))\&(I(\varphi)\&I(\psi)) = I(\psi)\&(I(\varphi)\&(I(\varphi) \to (I(\psi) \to I(\chi))))$ i, pel lema 4.6.2, $I(\psi)\&(I(\varphi)\&(I(\varphi) \to (I(\psi) \to I(\chi)))) \leq I(\psi)\&(I(\psi) \to I(\chi)) \leq I(\chi)$ i ja hem acabat.

6. $((\varphi\&\psi) \to \chi) \to (\varphi \to (\psi \to \chi))$
   Volem veure que $I(((\varphi\&\psi) \to \chi) \to (\varphi \to (\psi \to \chi))) = 1$.
   $I(((\varphi\&\psi) \to \chi) \to (\varphi \to (\psi \to \chi)))$ és equivalent, per la propietat de residuació a $((I(\varphi)\&I(\psi)) \to I(\chi)) \leq (I(\varphi) \to (I(\psi) \to I(\chi)))$. Ara, per la propietat de la residuació i la commutativitat i associativitat de &, tenim $(I(\varphi)\&I(\psi))\&((I(\varphi)\&I(\psi)) \to I(\chi)) \leq I(\chi)$, que és veritat pel lema 3.6.2.

7. $((\varphi \to \psi) \to \chi) \to (((\psi \to \varphi) \to \chi) \to \chi)$
   Hem de veure que $I(((\varphi \to \psi) \to \chi) \to (((\psi \to \varphi) \to \chi) \to \chi)) = 1$.
   $I(((\varphi \to \psi) \to \chi) \to (((\psi \to \varphi) \to \chi) \to \chi)) = 1$ és equivalent a $((I(\varphi) \to I(\psi)) \to I(\chi)) \leq (((I(\psi) \to I(\varphi)) \to I(\chi)) \to I(\chi))$ sii (per la propietat de residuació) $((I(\psi) \to I(\varphi)) \to I(\chi))\&((I(\varphi) \to I(\psi)) \to I(\chi)) \leq I(\chi)$.
   Per provar aquesta desigualtat, partirem de $((x \to y) \to z)\&((y \to x) \to z) = [((x \to y) \to z)\&((y \to x) \to z)]\&((x \to y) \vee (y \to x)) = [...]\&(x \to y) \vee [...]\&(y \to x) \leq [((x \to y) \to z)\&(x \to y)] \vee [((y \to x) \to z)\&(y \to x)] \leq z \vee z = z$.
   Per tant, si prenem $I(\psi) = x, I(\varphi) = y, I(\chi) = z$ ja haurem acabat.

8. $\perp \to \varphi$
   Volem veure que $I(\perp \to \varphi) = 1$.
   Com que $I(\perp) = 0$ i $0 \leq I(\varphi)$, aleshores $I(\perp \to \varphi) = 1$.

Provarem ara la regla de Modus Ponens. Suposem que $I(\varphi) = 1 = I(\varphi \to \psi)$. Volem veure que $I(\psi) = 1$.
Com que $I(\varphi \to \psi) = 1$, aleshores pel lema 3.6.1, $I(\varphi) \leq I(\psi)$ i com que $I(\varphi) = 1$, obtenim que $I(\psi) = 1$.

Per definició de $\wedge$ a la BL-àlgebra i pel lema 3.6.5, podem afirmar que coincideixen $\wedge$ i $\vee$ del càlcul amb els de la BL-àlgebra. $\square$

3.3 Completesa del càlcul BL

En aquest apartat, demostrarem la completesa del càlcul BL respecte la semàntica $\models_{BL}$.

Observació 3.12. Només en aquest apartat, usarem el símbol $\vdash$ per referir-nos a $\vdash_{BL}$.

Definició 3.13. *Siguin* $\Sigma \cup \{\varphi, \psi\} \subseteq Prop(X)$*. Diem que* $\varphi \sim_\Sigma \psi$ *si i només si* $\Sigma \vdash \varphi \to \psi$ *i* $\Sigma \vdash \psi \to \varphi$*.*

Vegem que la relació que acabem de definir es tracta d'una relació d'equivalència.

1. Reflexiva: Pel punt 3 del lema 2.5, sabem que $\vdash \varphi \to \varphi$. Per tant, per monotonia obtenim $\Sigma \vdash \varphi \to \varphi$.

2. Simètrica: Si $\Sigma \vdash \varphi \to \psi$ i $\Sigma \vdash \psi \to \varphi$, aleshores $\Sigma \vdash \psi \to \varphi$ i $\Sigma \vdash \varphi \to \psi$.

3. Transitiva: Suposem que $\Sigma \vdash \varphi \to \psi$ i $\Sigma \vdash \psi \to \varphi$ i que $\Sigma \vdash \psi \to \chi$ i $\Sigma \vdash \chi \to \psi$. Volem veure que $\Sigma \vdash \varphi \to \chi$ i $\Sigma \vdash \chi \to \varphi$.
   Per una instància de l'axioma 1 i monotonia, $\Sigma \vdash (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$ i com que $\Sigma \vdash \varphi \to \psi$, per Modus Ponens, obtenim $\Sigma \vdash (\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)$. Ara, com que $\Sigma \vdash \psi \to \chi$, tornem a aplicar Modus Ponens i obtenim $\Sigma \vdash \varphi \to \chi$.
   L'altre raonament és anàleg.

Com que es tracta d'una equivalència, podem definir ara $[\varphi]_\Sigma := \{\psi \in Prop(X) : \varphi \sim_\Sigma \psi\}$. A més, $0 := [\bot]_\Sigma$ i $1 := [\top]_\Sigma$. Comprovem ara que es tracta d'una congruència. Només caldrà veure que la relació preserva $(\&, \to)$ ja que les altres connectives les podem definir a partir d'aquestes. Suposem que $[\varphi_1]_\Sigma = [\varphi_2]_\Sigma$.

- Volem veure $[\varphi_1 \& \psi]_\Sigma = [\varphi_2 \& \psi]_\Sigma$.
  Si $[\varphi_1]_\Sigma = [\varphi_2]_\Sigma$, aleshores $\Sigma \vdash \varphi_1 \to \varphi_2$ i $\Sigma \vdash \varphi_2 \to \varphi_1$ i podem utilitzar el lema $(\varphi_1 \to \varphi_2) \to ((\varphi_1 \& \psi) \to (\varphi_2 \& \psi))$ i el corresponent intercanviant φ_1, φ_2 i, si apliquem Modus Ponens obtenim $\Sigma \vdash (\varphi_1 \& \psi) \to (\varphi_2 \& \psi)$ i $\Sigma \vdash (\varphi_2 \& \psi) \to (\varphi_1 \& \psi)$. Per consegüent, $[\varphi_1 \& \psi]_\Sigma = [\varphi_2 \& \psi]_\Sigma$.

- Volem veure $[\varphi_1 \to \psi]_\Sigma = [\varphi_2 \to \psi]_\Sigma$.
  Si $[\varphi_1]_\Sigma = [\varphi_2]_\Sigma$, aleshores $\Sigma \vdash \varphi_1 \to \varphi_2$ i $\Sigma \vdash \varphi_2 \to \varphi_1$. Cal veure que $\Sigma \vdash (\varphi_1 \to \psi) \to (\varphi_2 \to \psi)$ i $\Sigma \vdash (\varphi_2 \to \psi) \to (\varphi_1 \to \psi)$. Com a instància de l'axioma 1 tenim $\Sigma \vdash (\varphi_2 \to \varphi_1) \to ((\varphi_1 \to \psi) \to (\varphi_2 \to \psi))$ i ara, per Modus Ponens, obtenim $\Sigma \vdash (\varphi_1 \to \psi) \to (\varphi_2 \to \psi)$. Amb el mateix raonament, obtenim $\Sigma \vdash (\varphi_2 \to \psi) \to (\varphi_1 \to \psi)$.

- Volem veure $[\psi \to \varphi_1]_\Sigma = [\psi \to \varphi_2]_\Sigma$.
  Si $[\varphi_1]_\Sigma = [\varphi_2]_\Sigma$, aleshores $\Sigma \vdash \varphi_1 \to \varphi_2$ i $\Sigma \vdash \varphi_2 \to \varphi_1$. Cal veure que $\Sigma \vdash (\psi \to \varphi_1) \to (\psi \to \varphi_2)$ i $\Sigma \vdash (\psi \to \varphi_2) \to (\psi \to \varphi_1)$.
  Per una instància de l'axioma 1, tenim $\vdash (\psi \to \varphi_1) \to ((\varphi_1 \to \varphi_2) \to (\psi \to \varphi_2))$. Ara, pel lema 2.5.2, sabem que $\vdash ((\psi \to \varphi_1) \to ((\varphi_1 \to \varphi_2) \to (\psi \to \varphi_2))) \to ((\varphi_1 \to \varphi_2) \to ((\psi \to \varphi_1) \to (\psi \to \varphi_2)))$. Ara, podem aplicar Modus Ponens i obtenim $\vdash (\psi \to \varphi_1) \to (\psi \to \varphi_2)$. Per monotonia, $\Sigma \vdash (\psi \to \varphi_1) \to (\psi \to \varphi_2)$.
  L'altre raonament és anàleg intercanviant els papers de φ_1, φ_2.

Un cop hem comprovat l'equivalència i la congruència, definim les BL-àlgebres de Lindenbaum-Tarski (relatives a Σ).

Definició 3.14. *Sigui $\Sigma \subseteq Prop(X)$, definim l'àlgebra de Lindenbaum-Tarski com $L_\Sigma := (Prop(X)/\sim_\Sigma, \wedge, \vee, \&, \rightarrow, 0, 1)$, de manera que:*

$$[\varphi]_\Sigma \wedge [\psi]_\Sigma = [\varphi \wedge \psi]_\Sigma$$
$$[\varphi]_\Sigma \vee [\psi]_\Sigma = [\varphi \vee \psi]_\Sigma$$
$$[\varphi]_\Sigma \& [\psi]_\Sigma = [\varphi \& \psi]_\Sigma$$
$$[\varphi]_\Sigma \rightarrow [\psi]_\Sigma = [\varphi \rightarrow \psi]_\Sigma$$
$$1 = [\top]_\Sigma = \{\psi : \Sigma \vdash \psi\}$$
$$0 = [\bot]_\Sigma$$

Proposició 3.15. *L_Σ és una BL-àlgebra.*

Demostració:

- $(Prop(X)/\sim_\Sigma, \wedge, \vee, 0, 1)$ és un reticle acotat.
  Farem ús de l'observació 3.2, definim un ordre $[\varphi]_\Sigma \leq [\psi]_\Sigma \iff \Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi$.
  Clarament, és una relació d'ordre ja que és reflexiva, transitiva i, per la definició de classes equivalents, antisimètrica.
  - Cal demostrar ara que $[\varphi \wedge \psi]_\Sigma = inf\{[\varphi]_\Sigma, [\psi]_\Sigma\}$.
    Cal veure que és una cota inferior de $\{[\varphi]_\Sigma, [\psi]_\Sigma\}$ i que és la major d'aquestes cotes inferiors.
    Com que $\vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$ (lema vist al càlcul BL), aleshores per monotonia, $\Sigma \vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$ i, per tant, $[\varphi \wedge \psi]_\Sigma \leq [\varphi]_\Sigma$. Ara, com que $\vdash (\varphi \& (\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow \psi$, per la definició de $\wedge$ i per monotonia, $\Sigma \vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \psi$. Per tant, $[\varphi \wedge \psi]_\Sigma \leq [\varphi]_\Sigma$ i $[\varphi \wedge \psi]_\Sigma \leq [\psi]_\Sigma$.
    Sigui $[\chi]_\Sigma$ una altra cota inferior de $[\varphi]_\Sigma$ i de $[\psi]_\Sigma$. Aleshores, $\Sigma \vdash \chi \rightarrow \varphi$ i $\Sigma \vdash \chi \rightarrow \psi$. Usem una de les propietats del lema 2.5: $\vdash (\chi \rightarrow \varphi) \rightarrow ((\chi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\chi \rightarrow \varphi) \& (\chi \rightarrow \psi)))$ i per monotonia i usant Modus Ponens dos cops, obtenim $\Sigma \vdash ((\chi \rightarrow \varphi) \& (\chi \rightarrow \psi))$. Ara, utilitzem un lema del càlcul BL $\vdash ((\chi \rightarrow \varphi) \& (\chi \rightarrow \psi)) \rightarrow ((\chi \rightarrow \varphi) \wedge (\chi \rightarrow \psi))$ i per monotonia i Modus Ponens, $\Sigma \vdash ((\chi \rightarrow \varphi) \wedge (\chi \rightarrow \psi))$. Finalment, utilitzem el lema $\vdash ((\chi \rightarrow \varphi) \wedge (\chi \rightarrow \psi)) \rightarrow (\chi \rightarrow (\varphi \wedge \psi))$, per monotonia i Modus Ponens, acabem amb $\Sigma \vdash \chi \rightarrow (\varphi \wedge \psi)$. En conseqüència, $[\chi]_\Sigma \leq [\varphi \wedge \psi]_\Sigma$.
  - Passem a demostrar ara que $[\varphi \vee \psi]_\Sigma = sup\{[\varphi]_\Sigma, [\psi]_\Sigma\}$.
    Cal veure que és una cota superior de $\{[\varphi]_\Sigma, [\psi]_\Sigma\}$ i que és la menor d'aquestes cotes superiors.
    Com que $\vdash \varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$ (lema vist al càlcul BL), aleshores per monotonia, $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$ i, per tant, $[\varphi]_\Sigma \leq [\varphi \vee \psi]_\Sigma$. De la mateixa manera, $[\psi]_\Sigma \leq [\varphi \vee \psi]_\Sigma$.
    Sigui $[\chi]_\Sigma$ una altra cota superior de $[\varphi]_\Sigma$ i de $[\psi]_\Sigma$. Aleshores, $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \chi$ i $\Sigma \vdash \psi \rightarrow \chi$. Per tant, usem el lema $\vdash (\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \chi) \& (\psi \rightarrow \chi)))$ i per monotonia i Modus Ponens aplicat dos cops, obtenim $\vdash ((\varphi \rightarrow \chi) \& (\psi \rightarrow \chi))$. Ara, pel lema $\vdash ((\varphi \rightarrow \chi) \& (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \chi) \wedge (\psi \rightarrow \chi))$ i la monotonia i Modus Ponens, obtenim $\Sigma \vdash (\varphi \rightarrow \chi) \wedge (\psi \rightarrow \chi))$. Utilitzem el lema $\vdash ((\varphi \rightarrow \chi) \wedge (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \vee \psi) \rightarrow \chi)$, la monotonia i Modus Ponens i obtenim $\Sigma \vdash (\varphi \vee \psi) \rightarrow \chi$. En conseqüència, $[\varphi \vee \psi]_\Sigma \leq [\chi]_\Sigma$.

- Per veure que 0 és el mínim, només cal fixar-se en l'axioma 8: per tota fórmula φ, $\Sigma \vdash \bot \to \varphi$. Per tant, per tota fórmual φ, $0 = [\bot]_\Sigma \leq [\varphi]_\Sigma$.
- Cal veure que 1 és el màxim. Cal veure que per tota fórmula φ, $\Sigma \vdash \varphi \to \top$. Només cal utilitzar els següents lemes $\vdash \top$ i $\vdash \top \to (\varphi \to \top)$. Si apliquem Modus Ponens obtenim $\vdash \varphi \to \top$ i per monotonia obtenim el resultat esperat.

Per tant, $(Prop(X)/\sim_\Sigma, \wedge, \vee, 0, 1)$, per l'observació 3.2, és un reticle amb element mínim 0 i màxim 1.

- $(Prop(X)/\sim_\Sigma, \&, 1)$ és un semigrup commutatiu amb element unitat 1.
  - Per la propietat associativa hem de utilitzar el lema $\vdash (\varphi\&\psi)\&\chi \to \varphi\&(\psi\&\chi)$ i $\vdash \varphi\&(\psi\&\chi) \to (\varphi\&\psi)\&\chi$ i la monotonia ja que aleshores $[(\varphi\&\psi)\&\chi]_\Sigma \leq [\varphi\&(\psi\&\chi)]_\Sigma$ i $[\varphi\&(\psi\&\chi)]_\Sigma \leq [(\varphi\&\psi)\&\chi]_\Sigma$ i per l'antisimetria obtenim la igualtat.
  - Per comprovar la commutativitat n'hi ha prou amb l'axioma $\vdash (\varphi\&\psi) \to (\psi\&\varphi)$ i la monotonia ja que aleshores $[\varphi\&\psi]_\Sigma \leq [\psi\&\varphi]_\Sigma$. De manera anàloga, $[\psi\&\varphi]_\Sigma \leq [\varphi\&\psi]_\Sigma$ i, per tant, obtenim la igualtat per l'antisimetria.
  - Finalment, per comprovar que 1 és l'element neutre, només ens hem de fixar amb l'instància d'axioma $\vdash (\varphi\&\top) \to \varphi$ i amb el lema $\vdash \varphi \to (\top\&\varphi)$ i la monotonia.
- Es compleix la propietat de la residuació.
  $[\chi]_\Sigma \leq [\varphi]_\Sigma \to [\psi]_\Sigma$ si i només si $\Sigma \vdash \chi \to (\varphi \to \psi)$ si i només si (pels axiomes 5 i 6 i per Modus Ponens) $\Sigma \vdash (\chi\&\varphi) \to \psi$ si i només si $[\chi\&\varphi]_\Sigma \leq [\psi]_\Sigma$.

  Per tant, L_Σ és un reticle residuat.
- Es compleix $[\varphi \wedge \psi]_\Sigma = [\varphi]_\Sigma \& [\varphi \to \psi]_\Sigma$ per la definició de $\wedge$ en el càlcul BL.
- Es compleix $[\varphi \to \psi]_\Sigma \vee [\psi \to \varphi]_\Sigma = 1$
  Una desigualtat és clara ja que 1 és el màxim. Per tant, només cal veure que $1 \leq [\varphi \to \psi]_\Sigma \vee [\psi \to \varphi]_\Sigma$. Pel lema 2.5 sabem que $\vdash (\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)$. Tenim a més per un altre lema inicial que $\vdash ((\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)) \to (\top \to ((\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)))$. Si apliquem Modus Ponens i la monotonia, aleshores $\Sigma \vdash \top \to ((\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi))$.

Per tant, L_Σ és una BL-àlgebra. $\square$

Teorema 3.16. *Siguin* $\Sigma \cup \varphi \subseteq Prop(X)$*,*
Si $\Sigma \models_{BL} \varphi$*, aleshores* $\Sigma \vdash_{BL} \varphi$*.*

Demostració:
Ho demostrarem pel contrarrecíproc. Veurem que si $\Sigma \nvdash_{BL} \varphi$, aleshores $\Sigma \nvDash_{BL} \varphi$.
Fem èmfasi a puntualitzar que $\Sigma \nvDash_{BL} \varphi$ vol dir que existeix una BL-àlgebra $\mathbf{L}$ tal que $\Sigma \nvDash \varphi$, és a dir, existeix una BL-àlgebra $\mathbf{L}$ i una $\mathbf{L}$-interpretació h tal que $h(\psi) = 1$ per tot $\psi \in \Sigma$ i $h(\varphi) \neq 1$.
Prenem la BL-àlgebra de la proposició L_Σ i la L_Σ-interpretació $h : Prop(X) \to L_\Sigma$ tal que $\varphi \mapsto [\varphi]_\Sigma$.
Aleshores, cal veure que per tota $\psi \in \Sigma, [\psi]_\Sigma = 1$. Per tant, cal veure que per tota $\psi \in \Sigma$, $\Sigma \vdash \psi \to \top$ i $\Sigma \vdash \top \to \psi$.
$\Sigma \vdash \psi \to \top$ és equivalent a $\Sigma \vdash \psi \to (\bot \to \bot)$ si i només si (pels axiomes 5 i 6 i Modus

Ponens) $\Sigma \vdash (\psi \& \bot) \to \bot$, que és veritat per la commutativitat de & i per l'axioma 2.
Ara, $\Sigma \vdash \top \to \psi$. Per un lema inicial i la monotonia, $\Sigma \vdash \psi \to (\top \to \psi)$ i com que $\Sigma \vdash \psi$, aleshores per Modus Ponens $\Sigma \vdash \top \to \psi$.
A més, cal veure que $[\varphi]_\Sigma \neq 1$, o sigui que $\Sigma \nvdash \varphi \to \top$ o $\Sigma \nvdash \top \to \varphi$. Veurem que $\Sigma \nvdash \top \to \varphi$. Suposem que $\Sigma \vdash \top \to \varphi$, aleshores si tenim present el lema $\vdash (\top \to \varphi) \to \varphi$ i apliquem Modus Ponens, obtenim que $\Sigma \vdash \varphi$, que és una contradicció amb el que havíem suposat. Per tant, per reducció a l'absurd, hem demostrat que $\Sigma \nvdash \top \to \varphi$ i, en conseqüència, $[\varphi]_\Sigma \neq 1$.
Per tant, pel contrarrecíproc hem demostrat que si $\Sigma \models_{BL} \varphi$, aleshores $\Sigma \vdash_{BL} \varphi$. □

Teorema 3.17. *Teorema de completesa del càlcul BL respecte la classe de les BL-àlgebres Siguin $\Sigma \cup \varphi \subseteq Prop(X)$,*
$\Sigma \models_{BL} \varphi$ si i només si $\Sigma \vdash_{BL} \varphi$.

Demostració:
El teorema 3.11 i el teorema 3.16 són les dues implicacions.
Per tant, el càlcul BL és complet. □

3.4 G-àlgebres, MV-àlgebres i àlgebres producte

De la mateixa manera que en el cas de les BL-àlgebres, els càlculs que hem donat són complets respecte unes classes d'àlgebres.
En aquest apartat, ens centrem a obtenir els teoremes de completesa dels càlculs de Gödel, Lukasiewicz i producte respecte les classes de les G-àlgebres, les MV-àlgebres i les àlgebres producte.

Definició 3.18. *Una àlgebra de Gödel (o G-àlgebra) és una BL-àlgebra on es satisfà la següent equació:*

$$x \& x \approx x.$$

Exemples 3.19.

- L'àlgebra estàndard de Gödel $[0,1]_\wedge = \langle [0,1], \&, \to, \wedge, \vee, \neg, 0, 1 \rangle$ és una G-àlgebra. Ja hem vist que és una BL-àlgebra. Comprovem ara que satisfà l'equació $x \& x \approx x$. Sigui $a \in [0,1]$, aleshores $a \& a = a \wedge a = a$.
- Siguin $c, d \in (0,1)$ tals que $c < d$. Sigui $\mathbf{L} = \langle \{0, c, d, 1\}, \wedge, \vee, \&, \to, 0, 1 \rangle$ de manera que & és la t-norma de Gödel restringida a $\{0, c, d, 1\}$, $\to$ és la seva R-implicació associada restringida a $\{0, c, d, 1\}$ i $\wedge$ i $\vee$ s'intrepreten com el mínim i el màxim respectivament, aleshores $\mathbf{L}$ és una G-àlgebra.

Definició 3.20. *Una MV-àlgebra és una BL-àlgebra on es satisfà la següent equació:*

$$x \approx ((x \to 0) \to 0).$$

Exemples 3.21.

- L'àlgebra estàndard de Lukasiewicz $[0,1]_\odot = \langle [0,1], \odot, \to_\odot, \wedge, \vee, \neg_\odot, 0, 1 \rangle$ és una MV-àlgebra. Comprovem-ho.
Sigui $a \in [0,1]$, aleshores $(a \to 0) \to 0 = (1-a) \to 0 = 1 - (1-a) = a$.

- Sigui $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ i sigui $S = \{0, 1/n, 2/n, ..., n-1/n, 1\}$. Prenem $\&, \rightarrow$ com la t-norma de Lukasiewicz i la seva R-implicació restringides a S. A més, considerem el mínim i el màxim com a $\wedge$ i $\vee$. Tenim que $\langle S, \wedge, \vee, \&, \rightarrow, 0, 1\rangle$ és una MV-àlgebra.

Definició 3.22. *Una àlgebra producte (o $\prod$-àlgebra) és una BL-àlgebra on es satisfan les dues equacions:*

$$((z \rightarrow 0) \rightarrow 0) \wedge ((x\&z \rightarrow y\&z) \rightarrow (x \rightarrow y)) \approx ((z \rightarrow 0) \rightarrow 0)$$

$$x \wedge (x \rightarrow 0) \approx 0$$

Exemples 3.23.

- L'àlgebra estàndard producte $[0,1]_\cdot = \langle [0,1], \cdot, \rightarrow_\cdot, \wedge, \vee, \neg_\cdot, 0, 1\rangle$ és una $\prod$-àlgebra.

  1. Siguin $a, b, c \in [0,1]$. Cal veure que $(c \rightarrow 0) \rightarrow 0 \leq ((a \cdot c) \rightarrow (b \cdot c)) \rightarrow (a \rightarrow b)$.
     Si $c = 0$, aleshores $(c \rightarrow 0) \rightarrow 0 = 1 \rightarrow 0 = 0$ i es compleix la desigualtat.
     Si $c \neq 0$, aleshores $(c \rightarrow 0) \rightarrow 0 = 1$. Per tant, cal veure que $(a \cdot c \rightarrow b \cdot c) \leq a \rightarrow b$. Tornem a fer casos: $a \cdot c \leq b \cdot c$ o $b \cdot c < a \cdot c$.
     Si $a \cdot c \leq b \cdot c$, aleshores $a \leq b$, $a \rightarrow b = 1$ i la desigualtat és veritat.
     Si $b \cdot c < a \cdot c$, aleshores $b < a$ i $(a \cdot c \rightarrow b \cdot c) = (b \cdot c)/(a \cdot c) = b/a$. Com que $b < a$, aleshores $a \rightarrow b = b/a$.
     En tots els casos es compleix $(c \rightarrow 0) \rightarrow 0 \leq ((a \cdot c) \rightarrow (b \cdot c)) \rightarrow (a \rightarrow b)$.
  2. Sigui $a \in [0,1]$. Si $a \neq 0$, aleshores $a \wedge (a \rightarrow 0) = a \wedge 0 = 0$. Si $a = 0$, aleshores $0 \wedge (0 \rightarrow 0) = 0$. Per tant, per tot $a \in [0,1]$, $a \wedge (a \rightarrow 0) = 0$.

- Sigui $0 < c < 1$. Sigui $S = \{0,1\} \cup \{c^n : n \geq 1\}$. Prenem $\&, \rightarrow$ com la t-norma producte i la seva R-implicació restringides a S. A més, considerem el mínim i el màxim com a $\wedge$ i $\vee$. Tenim que $\langle S, \wedge, \vee, \&, \rightarrow, 0, 1\rangle$ és una $\prod$-àlgebra.

Anàlogament, donarem semàntica algebraica pels càlculs.

Definició 3.24. *Direm que φ és conseqüència lògica de Σ respecte la classe de totes les G-àlgebres (escriurem $\Sigma \models_G \varphi$) si i només si per tota G-àlgebra $\boldsymbol{L}$ i per tota $\boldsymbol{L}$-interpretació I, si $I(\psi) = 1$ per tota $\psi \in \Sigma$, aleshores $I(\varphi) = 1$.*

Definició 3.25. *Direm que φ és conseqüència lògica de Σ respecte la classe de totes les MV-àlgebres (escriurem $\Sigma \models_{MV} \varphi$) si i només si per tota MV-àlgebra $\boldsymbol{L}$ i per tota $\boldsymbol{L}$-interpretació I, si $I(\psi) = 1$ per tota $\psi \in \Sigma$, aleshores $I(\varphi) = 1$.*

Definició 3.26. *Direm que φ és conseqüència lògica de Σ respecte la classe de totes les $\prod$-àlgebres (escriurem $\Sigma \models_P \varphi$) si i només si per tota $\prod$-àlgebra $\boldsymbol{L}$ i per tota $\boldsymbol{L}$-interpretació I, si $I(\psi) = 1$ per tota $\psi \in \Sigma$, aleshores $I(\varphi) = 1$.*

Com en el cas de BL, la construcció de l'àlgebra de Lindenbaum-Tarski juga un paper clau. Els teoremes de completesa per als càlculs de Gödel, Lukasiewicz i producte es demostren de manera anàloga al del càlcul BL. Enunciem aquests teoremes de completesa.

Teorema 3.27. *Teorema de completesa del càlcul de Gödel respecte la classe de les G-àlgebres*
Siguin $\Sigma \cup \varphi \subseteq Prop(X)$,
$\Sigma \models_G \varphi$ si i només si $\Sigma \vdash_G \varphi$.

Teorema 3.28. *Teorema de completesa del càlcul de Lukasiewicz respecte la classe de les MV-àlgebres*
Siguin $\Sigma \cup \varphi \subseteq Prop(X)$,
$\Sigma \models_{MV} \varphi$ *si i només si* $\Sigma \vdash_L \varphi$.

Teorema 3.29. *Teorema de completesa del càlcul producte respecte la classe de les* $\prod$-*àlgebres*
Siguin $\Sigma \cup \varphi \subseteq Prop(X)$,
$\Sigma \models_P \varphi$ *si i només si* $\Sigma \vdash_P \varphi$.

Per veure la coherència dels tres càlculs, cal tenir present que tant el càlcul de Gödel, com el de Lukasiewicz com el càlcul producte són cadascun una extensió del càlcul BL. Per tant, podem fer ús del teorema 3.11.

- Sigui **L** una G-àlgebra i sigui I una **L**-interpretació.
  Pel comentari que acabem de fer, per veure que el càlcul de Gödel és coherent, només cal comprovar que l'axioma $\varphi \to (\varphi \& \varphi)$ és una **L**-tautologia.
  Volem veure que $1 = I(\varphi \to (\varphi\&\varphi))$. Com que $I(\varphi) = I(\varphi)\&I(\varphi)$, aleshores, en particular, $I(\varphi) \leq I(\varphi\&\varphi)$. Per tant, $I(\varphi \to (\varphi\&\varphi)) = 1$.

- Sigui **L** una MV-àlgebra i sigui I una **L**-interpretació.
  De la mateixa manera, per veure la coherència del càlcul de Lukasiewicz, només cal comprovar que l'axioma $((\varphi \to \perp) \to \perp) \to \varphi$ és una **L**-tautologia.
  Volem veure que $1 = I[((\varphi \to \perp) \to \perp) \to \varphi]$. Com que $I(\varphi) = [I(\varphi) \to 0] \to 0$, aleshores, en particular, $[I(\varphi) \to 0] \to 0 \leq I(\varphi)$. Per tant, $I[((\varphi \to \perp) \to \perp) \to \varphi] = 1$.

- Sigui **L** una $\prod$-àlgebra i sigui I una **L**-interpretació.
  Per veure la coherència del càlcul producte, només ens queda comprovar que els axiomes $(\varphi \wedge (\varphi \to \perp)) \to \perp$ i $((\chi \to \perp) \to \perp) \to ((\varphi\&\chi \to \psi\&\chi) \to (\varphi \to \psi))$ són **L**-tautologies.
  Volem veure que $1 = I[(\varphi \wedge (\varphi \to \perp)) \to \perp]$ i que $1 = I[((\chi \to \perp) \to \perp) \to ((\varphi\&\chi \to \psi\&\chi) \to (\varphi \to \psi))]$.
  Com que $I(\varphi) \wedge (I(\varphi) \to 0) = 0$, aleshores l'axioma 9 és una **L**-tautologia.
  Com que $((I(\chi) \to 0) \to 0) \wedge ((I(\varphi)\&I(\chi) \to I(\psi)\&I(\chi)) \to (I(\varphi) \to I(\psi))) = (I(\chi) \to 0) \to 0$, aleshores $(I(\chi) \to 0) \to 0 \leq (I(\varphi)\&I(\chi) \to I(\psi)\&I(\chi)) \to (I(\varphi) \to I(\psi))$. Per tant, l'axioma 10 és una **L**-tautologia.

De la mateixa manera que amb el càlcul BL, definim una relació per a cada càlcul que en tots les casos són congruències.

Definició 3.30. *Siguin* $\Sigma \cup \{\varphi, \psi\} \subseteq Prop(X)$. *Diem que* $\varphi \sim_{\Sigma_G} \psi$ *si i només si* $\Sigma \vdash_G \varphi \to \psi$ *i* $\Sigma \vdash_G \psi \to \varphi$.

Definició 3.31. *Siguin* $\Sigma \cup \{\varphi, \psi\} \subseteq Prop(X)$. *Diem que* $\varphi \sim_{\Sigma_L} \psi$ *si i només si* $\Sigma \vdash_L \varphi \to \psi$ *i* $\Sigma \vdash_L \psi \to \varphi$.

Definició 3.32. *Siguin* $\Sigma \cup \{\varphi, \psi\} \subseteq Prop(X)$. *Diem que* $\varphi \sim_{\Sigma_P} \psi$ *si i només si* $\Sigma \vdash_P \varphi \to \psi$ *i* $\Sigma \vdash_P \psi \to \varphi$.

Construim les àlgebres de Lindenbaum-Tarski dels tres casos.

Teorema 3.33. *Sigui* $\Sigma \subseteq Prop(X)$,

- $(Prop(X)/\sim_{\Sigma_G}, \wedge, \vee, \&, \rightarrow, 0, 1)$ *és una G-àlgebra, on* $1 = \{\psi : \Sigma \vdash_G \psi\}$ *i* $0 = [\bot]_{\Sigma_G}$.
- $(Prop(X)/\sim_{\Sigma_L}, \wedge, \vee, \&, \rightarrow, 0, 1)$ *és una MV-àlgebra, on* $1 = \{\psi : \Sigma \vdash_L \psi\}$ *i* $0 = [\bot]_{\Sigma_L}$.
- $(Prop(X)/\sim_{\Sigma_P}, \wedge, \vee, \&, \rightarrow, 0, 1)$ *és una* $\prod$*-àlgebra, on* $1 = \{\psi : \Sigma \vdash_P \psi\}$ *i* $0 = [\bot]_{\Sigma_P}$.

Demostració:
Podem raonar com en el càlcul BL i només caldrà provar:

- $[\varphi]_{\Sigma_G} = [\varphi\&\varphi]_{\Sigma_G}$.
  Per una instància de l'axioma 2 més la monotonia obtenim $\Sigma \vdash_G (\varphi\&\varphi) \rightarrow \varphi$. Per una instància de l'axioma 9 i la monotonia obtenim $\Sigma \vdash_G \varphi \rightarrow (\varphi\&\varphi)$. Per tant, $[\varphi]_{\Sigma_G} = [\varphi\&\varphi]_{\Sigma_G}$.
- $[\varphi]_{\Sigma_L} = [(\varphi \rightarrow \bot) \rightarrow \bot]_{\Sigma_L}$.
  Per una instància de l'axioma 9 més la monotonia obtenim $\Sigma \vdash_L ((\varphi \rightarrow \bot) \rightarrow \bot) \rightarrow \varphi$. Pel punt 18 del lema 2.5 i la monotonia tenim $\Sigma \vdash_L \varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \bot) \rightarrow \bot)$. Per tant, $[\varphi]_{\Sigma_L} = [(\varphi \rightarrow \bot) \rightarrow \bot]_{\Sigma_L}$.
- $[\varphi \wedge (\varphi \rightarrow \bot)]_{\Sigma_P} = [\bot]_{\Sigma_P}$ i $[((\chi \rightarrow \bot) \rightarrow \bot) \wedge ((\varphi\&\chi \rightarrow \psi\&\chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi))]_{\Sigma_P} = [(\chi \rightarrow \bot) \rightarrow \bot]_{\Sigma_P}$.
  Per una instància de l'axioma 8 més la monotonia obtenim $\Sigma \vdash_P \bot \rightarrow (\varphi \wedge (\varphi \rightarrow \bot))$.
  Per una instància de l'axioma 10 i la monotonia $\Sigma \vdash_P (\varphi \wedge (\varphi \rightarrow \bot)) \rightarrow \bot$.
  Per una instància de l'axioma 9 més la monotonia obtenim $\Sigma \vdash_P ((\chi \rightarrow \bot) \rightarrow \bot) \rightarrow ((\varphi\&\chi \rightarrow \psi\&\chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi))$. Ara, com que el càlcul producte és una extensió del càlcul BL, pel lema 2.5.3 i la monotonia $\Sigma \vdash_P ((\chi \rightarrow \bot) \rightarrow \bot) \rightarrow ((\chi \rightarrow \bot) \rightarrow \bot)$. Pel lema 2.5.6, doblement Modus Ponens i la monotonia, obtenim $\Sigma \vdash_P [((\chi \rightarrow \bot) \rightarrow \bot) \rightarrow ((\chi \rightarrow \bot) \rightarrow \bot)]\&[((\chi \rightarrow \bot) \rightarrow \bot) \rightarrow ((\varphi\&\chi \rightarrow \psi\&\chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi))]$. Pel lema 2.5.9, Modus Ponens i la monotonia, $\Sigma \vdash_P [((\chi \rightarrow \bot) \rightarrow \bot) \rightarrow ((\chi \rightarrow \bot) \rightarrow \bot)] \wedge [((\chi \rightarrow \bot) \rightarrow \bot) \rightarrow ((\varphi\&\chi \rightarrow \psi\&\chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi))]$. Pel lema 2.5.11, Modus Ponens i la monotonia, $\Sigma \vdash_P ((\chi \rightarrow \bot) \rightarrow \bot) \rightarrow [((\chi \rightarrow \bot) \rightarrow \bot) \wedge ((\varphi\&\chi \rightarrow \psi\&\chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi))]$. D'altra banda, pel lema 2.5.4 i la monotonia, obtenim $\Sigma \vdash_P [((\chi \rightarrow \bot) \rightarrow \bot) \wedge ((\varphi\&\chi \rightarrow \psi\&\chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi))] \rightarrow ((\chi \rightarrow \bot) \rightarrow \bot)$.
  $\square$

Demostrem el teorema de de completesa del càlcul de Gödel respecte la classe de les G-àlgebres. Els teoremes de completesa dels altres càlculs es demostren amb el mateix raonament.
Demostració Teorema 3.27:
Ja hem demostrat la coherència del càlcul de Gödel.
Cal veure la implicació contrària. Raonem pel contrarrecíproc. Suposem que $\Sigma \nvdash_G \varphi$ i volem veure que $\Sigma \nvDash_G \varphi$.
Per tant, volem veure que existeix una G-àlgebra **L** i una **L**-interpretació I de manera que $I(\psi) = 1$ per tot $\psi \in \Sigma$ i $I(\varphi) \neq 1$.
Prenem com a G-àlgebra $L_{\Sigma_G} = (Prop(X)/\sim_{\Sigma_G}, \wedge, \vee, \&, \rightarrow, 0, 1)$ i com a L_{Σ_G}-interpretació $I : Prop(X) \rightarrow (Prop(X)/\sim_{\Sigma_G}, \wedge, \vee, \&, \rightarrow, 0, 1)$ tal que $\varphi \mapsto [\varphi]_{\Sigma_G}$. Com que $I(\psi) = 1$ si i només si $\Sigma \vdash_G \psi$, aleshores per tot $\psi \in \Sigma$, $I(\psi) = 1$ i $I(\varphi) \neq 1$. Per tant, $\Sigma \nvDash_G \varphi$. $\square$

4 BL-cadenes

4.1 Propietats algebraiques i descomposició en producte subdirecte de BL-cadenes

En el capítol anterior hem vist el Teoremes de Completesa del càlcul BL, Gödel, Lukasiewicz i producte respecte a les classes de les BL-àlgebres, G-àlgebres, MV-àlgebres i àlgebres producte. En aquest capítol, obtindrem uns teoremes de completesa dels càlculs respecte les subclasses de les àlgebres totalment ordenades.

Definició 4.1. *Una BL-cadena és una BL-àlgebra tal que el seu ordre associat $\leq$ és total.*

Definim la semàntica respecte les BL-cadenes. Direm que φ és conseqüència lògica de Σ respecte la classe de les BL-cadenes (escriurem $\Sigma \models_{BLc} \varphi$) si i només si per tota BL-cadena $\mathbf{L}$ i per tota $\mathbf{L}$-interpretació I, si $I(\psi) = 1$ per tota $\psi \in \Sigma$, aleshores $I(\varphi) = 1$.
L'objectiu d'aquest capítol és demostrar el Teorema de Completesa del càlcul BL respecte la semàntica de les BL-cadenes:
Siguin $\Sigma \cup \varphi \subseteq Prop(X)$,
$\Sigma \models_{BLc} \varphi$ si i només si $\Sigma \vdash_{BL} \varphi$.

Per demostrar els teoremes de completesa, obtindrem un teorema de representació en producte subdirecte de BL-cadenes. Per demostrar aquest resultat, necessitem primer introduir la noció de filtre i àlgebra quocient.

Definició 4.2. *Sigui $\mathbf{L}$=$(L, \wedge, \vee, \&, \rightarrow, 0, 1)$ un reticle residuat. Un filtre de $\mathbf{L}$ és un subconjunt no buit $F \subseteq L$ tal que per cada $a, b \in L$:*

1. *si $a \in F$ i $b \in F$, aleshores $a\&b \in F$*
2. *si $a \in F$ i $a \leq b$, aleshores $b \in F$.*

Observació 4.3. Si F és un filtre, aleshores com que F és no buit, per la propietat 2 de la definició de filtre, $1 \in F$.

Teorema 4.4. *Sigui $\mathbf{L}$ una BL-àlgebra. Sigui F(L) el conjunt de filtres de $\mathbf{L}$ i sigui Cong(L) el conjunt de congruències de $\mathbf{L}$, aleshores $(F(L), \subseteq) \cong (Cong(L), \subseteq)$.*

Demostració:

- Sigui $h : (Cong(L), \subseteq) \rightarrow (F(L), \subseteq)$, tal que $\theta \mapsto h(\theta) = [1]_\theta$.
  Cal veure que h està ben definida, cal veure que $[1]_\theta$ és un filtre. Recordem que $[1]_\theta = \{x \in L : x \sim_\theta 1\}$. $1 \in [1]_\theta$ i per tant, no és buit. Siguin $a, b \in [1]_\theta$, aleshores $[a\&b]_\theta = [a]_\theta \& [b]_\theta = [1]_\theta \& [1]_\theta = [1]_\theta$. Per tant, $a\&b \in [1]_\theta$. Ara, sigui $a \in [1]_\theta$ i $a \leq b$, aleshores $a \rightarrow b = 1$. Per tant, $[a]_\theta \rightarrow [b]_\theta = [1]_\theta$ i $[1]_\theta = [a]_\theta \leq [b]_\theta$. Per tant, $[1]_\theta = [b]_\theta$. Així, $b \in [1]_\theta$.
- Sigui $g : (F(L), \subseteq) \rightarrow (Cong(L), \subseteq)$, tal que $F \mapsto \sim_F$, on si $a, b \in L$, $a \sim_F b \iff (a \rightarrow b) \in F$ i $(b \rightarrow a) \in F$. Cal veure que $\sim_F$ és una congruència.
  - Provem que es tracta primer d'una equivalència $\sim_F$.
    * Reflexiva: Com que per tot a, $a \leq a$, aleshores $(a \rightarrow a) = 1 \in F$.

* Simètrica: Suposem que $a \sim_F b$, aleshores $(a \to b) \in F$ i $(b \to a) \in F$ i, per tant, $b \sim_F a$.
* Transitiva: Suposem que $a \sim_F b$ i que $b \sim_F c$. Volem veure que $(a \to c) \in F$ i $(c \to a) \in F$. $(c \to b)\&(b \to a) \leq (c \to a)$ si i només si $c\&((c \to b)\&(b \to a)) \leq a$, que és veritat ja que $c\&((c \to b)\&(b \to a)) = (c\&(c \to b))\&(b \to a) \leq b\&(b \to a) \leq a$. Per la definició de filtre, $(c \to a) \in F$.

  Amb un raonament anàleg veiem que $(a \to c) \in F$.

Per tant, ara podem definir $[x]_{\sim_F} = \{y \in L : x \sim_F y\}$.
Comprovem que es tracta d'una congruència, o sigui, que es preserven les operacions. Només cal veure que es preserva $\&, \to$ ja que les altres connectives són definibles a partir d'aquestes.
Suposem que $[x]_{\sim_F} = [y]_{\sim_F}$ i sigui $z \in L$.

* Vegem que $[x\&z]_{\sim_F} = [y\&z]_{\sim_F}$.

  Cal veure que $((x\&z) \to (y\&z)) \in F$ i que $((y\&z) \to (x\&z)) \in F$.

  Provarem primer que $(x \to y) \leq ((x\&z) \to (y\&z))$.

  $(x \to y) \leq ((x\&z) \to (y\&z))$ si i només si per la propietat de residuació $((x\&z)\&(x \to y)) \leq (y\&z)$ si i només si (per la commutativitat i l'associativitat de & $(z\&(x\&(x \to y))) \leq (y\&z)$ si i només si pel lema 3.6.2, $(z\&y) \leq (y\&z)$, que és veritat per la commutativitat de &.

  Ara, per la propietat 2 de la definició 4.2, com que per hipòtesi $(x \to y) \in F$, tenim que $((x\&z) \to (y\&z)) \in F$.

  Per comprovar que $((y\&z) \to (x\&z)) \in F$ cal fer un raonament anàleg a l'anterior amb $(y \to x) \in F$.

  Com que $((x\&z) \to (y\&z)) \in F$ i $((y\&z) \to (x\&z)) \in F$, aleshores $[x\&z]_{\sim_F} = [y\&z]_{\sim_F}$.
* Vegem que $[x \to z]_{\sim_F} = [y \to z]_{\sim_F}$.

  Cal veure que $((x \to z) \to (y \to z)) \in F$ i que $((y \to z) \to (x \to z)) \in F$.

  Demostrem que $(x \to y) \leq ((y \to z) \to (x \to z))$.

  $(x \to y) \leq ((y \to z) \to (x \to z))$ si i només si per la residuació i la la commutativitat de & $((x \to y)\&(y \to z)) \leq (x \to z)$ si i només si per la residuació i l'associativitat de & $((x\&(x \to y))\&(y \to z)) \leq z$, que és veritat per l'aplicació doble del lema 3.6.2.

  Ara, per la propietat 2 de la definició 4.2, com que per hipòtesi $(x \to y) \in F$, tenim que $((y \to z) \to (x \to z)) \in F$.

  Per comprovar que $((x \to z) \to (y \to z)) \in F$ cal fer un raonament anàleg amb $(y \to x) \in F$.

  Per tant, $[x \to z]_{\sim_F} = [y \to z]_{\sim_F}$.
* Vegem que $[z \to x]_{\sim_F} = [z \to y]_{\sim_F}$.

  Cal veure que $((z \to x) \to (z \to y)) \in F$ i que $((z \to y) \to (z \to x)) \in F$.

  Demostrem que $(x \to y) \leq ((z \to x) \to (z \to y))$.

  $(x \to y) \leq ((z \to x) \to (z \to y))$ si i només si, per la residuació (dos cops) i la commutativitat i associativitat de &, $((z\&(z \to x))\&(x \to y)) \leq y$, que és veritat pel lema 3.6.2 aplicat dos cops.

  Ara, per la propietat 2 de la definició 4.2, com que per hipòtesi $(x \to y) \in F$, tenim que $((z \to x) \to (z \to y)) \in F$.

  Per comprovar que $((z \to y) \to (z \to x)) \in F$ cal fer un raonament anàleg amb $(y \to x) \in F$.

  Per tant, $[z \to x]_{\sim_F} = [z \to y]_{\sim_F}$.

- Cal comprovar que si $F \subseteq G$, aleshores $\sim_F \subseteq \sim_G$.
Siguin $a, b \in L$. Suposem que $a \sim_F b$, aleshores $(a \to b) \in F$ i $(b \to a) \in F$. Com que $F \subseteq G$, aleshores $(a \to b) \in G$ i $(b \to a) \in G$. Per tant, $a \sim_G b$.

- Cal comprovar que si $\sim_F \subseteq \sim_G$, aleshores $F \subseteq G$. Sigui $a \in F$, aleshores $a \to 1 = 1 \in F$ i $1 \to a = a \in F$. Per tant, $a \sim_F 1$ i com que $\sim_F \subseteq \sim_G$, aleshores $a \sim_G 1$. Per tant, $a \to 1 \in G$ i $1 \to a = a \in G$. Així, $a \in [1]_G$ i, per tant, $F \subseteq G$.

- $h \circ g = id_F$ i $g \circ h = id_\theta$. Comprovem-ho.
Sigui F un filtre. Sigui $a \in F$, aleshores $a \in [1]_\theta$ i, per tant, $a \in (h \circ g)(F)$. De la mateixa manera, si $a \in (h \circ g)(F)$, aleshores $a \in [1]_\theta$ i per tant, $1 \to a = a \in F$.
Sigui θ una congruència. Si $a \sim_\theta 1$, aleshores $a \in [1]_\theta$ i per tant, $a \to 1 = 1 \in [1]_\theta$ i $1 \to a = a \in [1]_\theta$. Per tant, $a \in [1]_{\sim_{[1]_\theta}}$. Altrament, si $a \in [1]_{\sim_{[1]_\theta}}$, aleshores $a \in [1]_\theta$. Per tant, $a \sim_\theta 1$. □

Un cop demostrat el teorema, en aquest capítol parlarem indistintament de filtres i congruències.
Com que $\sim_F$ és una congruència i com que sabem que tot quocient satisfà les mateixes equacions, si recordem que podem definir una BL-àlgebra a partir d'unes equacions, aleshores el quocient $\mathbf{L}/\sim_F$ preservarà les equacions i $\mathbf{L}/\sim_F$ serà una BL-àlgebra.

Observació 4.5. Farem un abús del llenguatge i escriurem $\mathbf{L}/F$ en lloc de $\mathbf{L}/\sim_F$ i, $[a]_F$ en lloc d'escriure $[a]_{\sim_F}$.

Definició 4.6. *Direm que un filtre F és propi quan $F \neq L$.*

Definició 4.7. *Diem que un filtre F és primer quan és propi i per tot $a, b \in L$, si $a \vee b \in F$, aleshores $a \in F$ o $b \in F$.*

Observació 4.8. Sigui $\mathbf{L}$ un reticle residuat lineal (o sigui, per a tot $a, b \in L$ es compleix que $(a \to b) \vee (b \to a) = 1$) i sigui F un filtre, és equivalent que F sigui primer i que per tot $a, b \in L$, $a \to b \in F$ o $b \to a \in F$.
Demostració:

- Suposem que F és un filtre primer. Aleshores, per a tot $a, b \in L$ es compleix que $(a \to b) \vee (b \to a) = 1 \in F$ i, per definició de filtre primer, per tot $a, b \in L$, $(a \to b) \in F$ o $(b \to a) \in F$.

- Suposem ara que per tot $a, b \in L$, $a \to b \in F$ o $b \to a \in F$.
Si $(a \vee b) \in F$, i suposem que $(a \to b) \in F$, aleshores $(a \to b)\&(a \vee b) \in F$, per la propietat 1 de ser filtre. Ara, per la propietat distributiva de & i $\vee$, $(a \to b)\&(a \vee b) = (a\&(a \to b)) \vee (b\&(a \to b)) \leq b \vee b = b$. Per tant, $(a \to b)\&(a \vee b) \leq b$ i, per la propietat 2 de ser filtre, $b \in F$. Per tant, $a \in F$ o $b \in F$.
Si $(a \vee b) \in F$ i $(b \to a) \in F$, aleshores $(b \to a)\&(a \vee b) \in F$, per la propietat 1 de filtre. Ara, per la distributiva de & i $\vee$, $(a \to b)\&(a \vee b) = (a\&(b \to a)) \vee (b\&(b \to a)) \leq a \vee a = a$. Per tant, $(a \to b)\&(a \vee b) \leq a$ i, per la propietat 2 de ser filtre, $a \in F$. Per tant, $a \in F$ o $b \in F$. □

Proposició 4.9. *Sigui $\mathbf{L}$ una BL-àlgebra i sigui F un filtre.*
$\mathbf{L}/F$ és una BL-cadena si i només si F és un filtre primer.

Demostració:
Abans de demostrar la doble implicació, vegem que $[x]_F \leq [y]_F$ si i només si $(x \to y) \in F$.

$[x]_F \leq [y]_F$ si i només si $[x]_F \to [y]_F = [1]_F$ si i només si $[x \to y]_F = [1]_F$ si i només si $(x \to y) \in F$.

Ara ja podem demostrar la doble implicació.
$\Rightarrow$] Suposem que $\mathbf{L}/F$ és una BL-cadena. Siguin $x, y \in L$. Com que $\leq$ és un ordre total en $\mathbf{L}/F$, aleshores $[x]_F \leq [y]_F$ o $[y]_F \leq [x]_F$. Si $[x]_F \leq [y]_F$, aleshores $(x \to y) \in F$. Si $[y]_F \leq [x]_F$, aleshores $(y \to x) \in F$. Per tant, en els dos casos $(x \to y) \in F$ o $(y \to x) \in F$ i per l'equivalència de l'observació 4.8, F és primer.
$\Leftarrow$] Suposem que F és primer. Siguin $\alpha, \beta \in \mathbf{L}/F$ de manera que $\alpha = [a]_F$ per a un cert $a \in L$ i $\beta = [b]_F$ per a un cert $b \in L$. Ara, com que F és primer per l'equivalència de l'observació 4.8, aleshores $(a \to b) \in F$ o $(b \to a) \in F$. Per tant, $\alpha = [a]_F \leq [b]_F = \beta$ o $\beta = [b]_F \leq [a]_F = \alpha$. Per tant, $\leq$ és total i $\mathbf{L}/F$ és una BL-cadena. ☐

Definició 4.10. *Sigui $\boldsymbol{L}$ una BL-àlgebra i sigui $\emptyset \neq B \subseteq L$, definim el filtre generat per B com $F(B) = \{x \in L : t_1\&...\&t_n \leq x$ per a certs $t_1, ..., t_n \in B\}$.*

En efecte $F(B)$ és un filtre perquè:

- $1 \in F(B)$ i aleshores $\emptyset \neq F(B)$.
- si $a, b \in F(B)$, aleshores $t_{a1}\&...\&t_{an} \leq a$ i $t_{b1}\&...\&t_{bm} \leq b$ i, per tant, $t_{a1}\&...\&t_{an}\&t_{b1}\&...\&t_{bm} \leq a\&b$ i $a\&b \in F(B)$.
- si $a \in F(B)$ i $a \leq b$, aleshores $t_{a1}\&...\&t_{an} \leq a \leq b$ i, per tant, $b \in F(B)$.

Proposició 4.11. *Sigui $\boldsymbol{L}$ una BL-àlgebra i sigui $\emptyset \neq B \subseteq L$. $F(B)$ és el filtre més petit que conté B.*

Demostració:
Veurem primer que $B \subseteq F(B)$. Sigui $b \in B$, com que $b \leq b$, aleshores $b \in F(B)$.
Ara, volem veure que és el filtre més petit que conté B. Suposem que hi ha un altre filtre $B \subseteq F$, volem veure que $F(B) \subseteq F$. Sigui $b \in F(B)$, aleshores existeixen $t_1, ..., t_n \in B$ tals que $t_1\&...\&t_n \leq b$. Com que $t_1, ..., t_n \in B$, aleshores $t_1, ..., t_n \in F$ i, per la propietat 1 de ser filtre, $t_1\&...\&t_n \in F$. Ara, per la propietat 2 de ser filtre, com que $t_1\&...\&t_n \leq b$, aleshores $b \in F$. Per tant, $F(B) \subseteq F$. ☐

Observació 4.12. Sigui $\mathbf{L}$=$(L, \wedge, \vee, \&, \to, 0, 1)$ una BL-àlgebra, sigui $a \in L$ i sigui $n \in \mathbb{N}$, $2 \leq n$, denotarem per $a^0 = 1$, $a^1 = a$ i $a^n = a\&...\&a$ (n-1 vegades &).

Lema 4.13. *Sigui $\boldsymbol{L}$=$(L, \wedge, \vee, \&, \to, 0, 1)$ un reticle residuat i siguin $b, c \in L$. $F(\{b \vee c\}) = F(\{b\}) \cap F(\{c\})$.*

Demostració:
Veurem les dues inclusions.
$\subseteq$] Si $a \in F(b \vee c)$, aleshores $(b \vee c)^n \leq a$ per algun $n \in \mathbb{N}$. Per tant, si tenim present el lema 3.6.4, $\vee_{j+k=n} b^j \& c^k \leq a$. Per tant, $b^n \leq a$ i $c^n \leq a$ i $a \in F(b) \cap F(c)$.
$\supseteq$] Ara si $a \in F(b) \cap F(c)$, aleshores $b^k \leq a$ i $c^m \leq a$ per a certs $k, m \in \mathbb{N}$. Per tant, $b^k \& c^m \leq a$ i, aleshores $(b \vee c)^{k+m} = \vee_{i+j=k+m} b^i \& c^j \leq a$ i per tant, $a \in F(b \vee c)$. ☐
Anàlogament es pot estendre aquest resultat de la següent forma.

Proposició 4.14. *Sigui $\boldsymbol{L}$=$(L, \wedge, \vee, \&, \to, 0, 1)$ un reticle residuat i siguin $b, c \in L$. Si $G \subseteq L$, aleshores $F(G \cup \{b \vee c\}) = F(G \cup \{b\}) \cap F(G \cup \{c\})$.*

Corol·lari 4.15. *Sigui* $\boldsymbol{L}$ *una BL-àlgebra, aleshores*
$\{1\} = \cap$ *filtres primers de* $\boldsymbol{L}$*.*

Lema 4.16. *Sigui* $\boldsymbol{L}$ *una BL-àlgebra i sigui* $a \in L$*,* $a \neq 1$*. Aleshores hi ha un filtre primer* F *de* $\boldsymbol{L}$ *que no conté* a*.*

Demostració:
Observem que si $a \neq 1$, aleshores $F = \{1\}$ és un filtre que no conté a.
Sigui H el conjunt dels filtres propis que no contenen a, o sigui, $H = \{F :$ F filtre propi que no conté a$\}$. Observem que $H \neq \emptyset$ ja que $F = \{1\} \in H$.
H és parcialment ordenat respecte la inclusió.
Si $\{F_i : i \in I\} \subseteq H$ és una cadena amb la inclusió, és a dir per tot $j, k \in I$, $F_j \subseteq F_k$ o $F_k \subseteq F_j$. Observem que $\cup_{i \in I} F_i$ és una cota superior de $\{F_i : i \in I\}$ en H, ja que per tot $F \in \{F_i : i \in I\}$, $F \subseteq \cup_{i \in I} F_i$. Vegem que $\cup_{i \in I} F_i$ és un filtre que pertany a H.

- Com que $F_1 \neq \emptyset$, aleshores $\emptyset \neq \cup_{i \in I} F_i$
- Siguin $b, c \in \cup_{i \in I} F_i$, aleshores existeixen $n, m \in \mathbb{N}$ tals que $b \in F_n$ i $c \in F_m$. Com que $\{F_i : i \in I\} \subseteq H$ és una cadena en H, aleshores $F_n \subseteq F_m$ o $F_m \subseteq F_n$. En el primer cas, $b \& c \in F_m$ i per tant, $b \& c \in \cup_{i \in I} F_i$. En el segon cas, $b \& c \in F_n$ i per tant, $b \& c \in \cup_{i \in I} F_i$.
- Siguin $b \in \cup_{i \in I} F_i$ i $b \leq c$. Com que existeix $n \in \mathbb{N}$ tal que $b \in F_n$, aleshores $c \in F_n$ i, per tant, $c \in \cup_{i \in I} F_i$.
- Com que per tot $i \in I$, $a \notin F_i$, aleshores $a \notin \cup_{i \in I} F_i$.

En conseqüència, tota cadena de H respecte la inclusió té cota superior en H.
Pel lema de Zorn, H té maximals.
Sigui G un filtre maximal, volem veure que G és primer.
Siguin $b, c \in L$ tals que $b \vee c \in G$, volem veure que $b \in G$ o $c \in G$.
Com que $b \vee c \in G$, aleshores $G = G \cup \{b \vee c\}$. Per la proposició 4.11, $G \subseteq F(G)$. Com que G és maximal, $G = F(G) = F(G \cup \{b \vee c\})$. Ara apliquem la proposició 4.14 i obtenim que $G = F(G \cup \{b\}) \cap F(G \cup \{c\})$. Si $b \notin G$ i $c \notin G$, aleshores com que G és maximal $F(G \vee \{b\}) = F(G \vee \{c\}) = L$ i per tant, $G = L \cap L = L$ i arribem a contradicció perquè G és un filtre propi. Per tant, $b \in G$ o $c \in G$. Per tant, G és primer. □

Tot seguit enunciem i demostrem un teorema que podem trobar a [12].

Teorema 4.17. *Teorema de representació en BL-cadenes*
Tota BL-àlgebra és representable com a producte subdirecte de BL-cadenes. Sigui $\boldsymbol{L}$ *una BL-àlgebra i sigui* U *el conjunt de tots els filtres primers de* $\boldsymbol{L}$*, la representació ve donada per* $\boldsymbol{L} \hookrightarrow \prod_{F \in U} \boldsymbol{L}/F$*, de manera que* $x \mapsto ([x]_F)_{F \in U}$*.*
En conseqüència, tota BL-àlgebra és submergible en un producte directe de BL-cadenes.

Demostració:
Sigui $\mathbf{L}$ una BL-àlgebra i sigui U el conjunt de tots els filtres primers de $\mathbf{L}$. Sigui $h : \mathbf{L} \to \prod_{F \in U} \mathbf{L}/F$, que envia $x \mapsto ([x]_F)_{F \in U}$, només cal veure que és un homomorfisme i una immersió. Provem que h és una immersió. Sabem que es tracta d'un homomorfisme perquè es tracten de congruències i és producte directe perquè les operacions es comporten component a component. Només cal veure que l'aplicació és injectiva.

Siguin $a, b \in \mathbf{L}$, tals que $a \neq b$, volem veure que $h(a) = ([a]_F)_{F\in U} \neq ([b]_F)_{F\in U} = h(b)$. Com que $a \neq b$, aleshores $a \to b \neq 1$ o $b \to a \neq 1$. Per tant, $(a \to b) \wedge (b \to a) \neq 1$. Com que $(a \to b) \wedge (b \to a) \neq 1$, aleshores existeix un filtre primer F tal que $(a \to b) \wedge (b \to a) \notin F$. Per tant, $[(a \to b) \wedge (b \to a)]_F \neq [1]_F$. Per tant, $([a]_F \to [b]_F) \wedge ([b]_F \to [a]_F) \neq [1]_F$. En conseqüència, $[a]_F \neq [b]_F$. Per tant, $h(a) \neq h(b)$. $\square$

Teorema 4.18. *Teorema de Completesa del càlcul BL respecte la classe de les BL-cadenes Siguin $\Sigma \cup \varphi \subseteq Prop(X)$,*
$\Sigma \vdash_{BL} \varphi$ si i només si $\Sigma \models_{BLc} \varphi$.

Demostració:
$\Rightarrow$] Suposem que $\Sigma \vdash_{BL} \varphi$ i volem veure que $\Sigma \models_{BLc} \varphi$.
Com que $\Sigma \vdash_{BL} \varphi$, aleshores pel Teorema de Completesa respecte la classe de les BL-àlgebres, $\Sigma \models_{BL} \varphi$. Ara, com que una BL-cadena és, en particular, una BL-àlgebra, es compleix que si $\Sigma \models_{BL} \varphi$, aleshores $\Sigma \models_{BLc} \varphi$. Per tant, si $\Sigma \vdash_{BL} \varphi$, aleshores $\Sigma \models_{BLc} \varphi$.

$\Leftarrow$] Suposem ara que $\Sigma \models_{BLc} \varphi$ i volem veure que $\Sigma \vdash_{BL} \varphi$.
Ho demostrarem pel contrarrecíproc. Suposem que $\Sigma \nvdash_{BL} \varphi$ i volem veure que $\Sigma \nvDash_{BLc} \varphi$.
Com que $\Sigma \nvdash_{BL} \varphi$, aleshores, pel Teorema de Completesa respecte la classe de les BL-àlgebres, $\Sigma \nvDash_{BL} \varphi$.
Per tant, suposem que existeix una BL-àlgebra $\mathbf{L}$ i una $\mathbf{L}$-interpretació $I : Prop(X) \to \mathbf{L}$ tal que per tot $\psi \in \Sigma$, $I(\psi) = 1$ i $I(\varphi) \neq 1$.
Ara, utilitzant el teorema 4.17, $\mathbf{L}$ és submergible en $\prod_{F\in U} \mathbf{L}/F$, on U és el conjunt de filtres primers de $\mathbf{L}$. O sigui, existeix $h : \mathbf{L} \hookrightarrow \prod_{F\in U} \mathbf{L}/F$, que envia $x \mapsto ([x]_F)_{F\in U}$.
Per la proposició 4.9, sabem que per cada filtre primer F, $\mathbf{L}/F$ és una BL-cadena. Ara pel lema 4.16, com que $I(\varphi) \neq 1$, sabem que existeix un filtre primer que no conté $I(\varphi)$. Anomenem aquest filtre F_j. Com que $I(\varphi) \notin F_j$, aleshores $[I(\varphi)]_{F_j} \neq [1]_{F_j}$. Prenem $\prod_j \circ h \circ I : Prop(X) \to \mathbf{L}/F_j$, que és una $\mathbf{L}/F_j$-interpretació. Ens trobem aleshores que $(\prod_j \circ h \circ I)(\psi) = (\prod_j \circ h)(1) = \prod_j([1]_F)_{F\in U} = [1]_{F_j}$, per tot $\psi \in \Sigma$ i que $(\prod_j \circ h \circ I)(\varphi) \neq [1]_{F_j}$.
Així, hem trobat una BL-cadena $\mathbf{K}$ i una $\mathbf{K}$-interpretació $I : Prop(X) \to \mathbf{K}$ tal que per tot $\psi \in \Sigma$, $I(\psi) = 1$ i $I(\varphi) \neq 1$.
Per tant, hem demostrat que si $\Sigma \nvdash_{BL} \varphi$, aleshores $\Sigma \nvDash_{BLc} \varphi$. $\square$

4.2 G-cadenes, MV-cadenes i cadenes producte

De la mateixa manera que en el capítol 4, volem obtenir els teoremes de completesa dels càlculs de Gödel, Lukasiewicz i producte respecte les classes de les G-cadenes, MV-cadenes i cadenes producte, respectivament.

Definició 4.19. *Una G-cadena és una G-àlgebra totalment ordenada.*

Definició 4.20. *Una MV-cadena és una MV-àlgebra totalment ordenada.*

Definició 4.21. *Una $\prod$-cadena és una $\prod$-àlgebra totalment ordenada.*

Exemples 4.22.

- L'àlgebra estàndard de Gödel és una G-cadena perquè l'ordre és total.
- L'àlgebra estàndard de Lukasiewicz és una MV-cadena perquè l'ordre és total.

- L'àlgebra estàndard producte és una cadena producte perquè l'ordre és total.
- Siguin $c, d \in (0,1)$ tals que $c < d$. Sigui $\mathbf{L} = \langle \{0, c, d, 1\}, \wedge, \vee, \&, \rightarrow, 0, 1\rangle$ de manera que & és la t-norma de Gödel restringida a $\{0, c, d, 1\}$, $\rightarrow$ és la seva R-implicació associada restringida a $\{0, c, d, 1\}$ i $\wedge$ i $\vee$ s'intrepreten com el mínim i el máxim respectivament, aleshores $\mathbf{L}$ és una G-cadena.
- Sigui $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ i sigui $S = \{0, 1/n, 2/n, ..., n-1/n, 1\}$. Prenem $\&, \rightarrow$ com la t-norma de Lukasiewicz i la seva R-implicació restringides a S. A més, considerem el mínim i el màxim com a $\wedge$ i $\vee$. Tenim que $\langle S, \wedge, \vee, \&, \rightarrow, 0, 1\rangle$ és una MV-cadena.
- Sigui $0 < c < 1$. Sigui $S = \{0, 1\} \cup \{c^n : n \geq 1\}$. Prenem $\&, \rightarrow$ com la t-norma producte i la seva R-implicació restringides a S. A més, considerem el mínim i el màxim com a $\wedge$ i $\vee$. Tenim que $\langle S, \wedge, \vee, \&, \rightarrow, 0, 1\rangle$ és una $\prod$-cadena.

Definició 4.23. $\Sigma \models_{Gc} \varphi$ *si i només si per tota G-cadena* $\boldsymbol{L}$ *i per tota* $\boldsymbol{L}$*-interpretació* I*, si* $I(\psi) = 1$ *per tota* $\psi \in \Sigma$*, aleshores* $I(\varphi) = 1$.

Definició 4.24. $\Sigma \models_{MVc} \varphi$ *si i només si per tota MV-cadena* $\boldsymbol{L}$ *i per tota* $\boldsymbol{L}$*-interpretació* I*, si* $I(\psi) = 1$ *per tota* $\psi \in \Sigma$*, aleshores* $I(\varphi) = 1$.

Definició 4.25. $\Sigma \models_{Pc} \varphi$ *si i només si per tota* $\prod$*-cadena* $\boldsymbol{L}$ *i per tota* $\boldsymbol{L}$*-interpretació* I*, si* $I(\psi) = 1$ *per tota* $\psi \in \Sigma$*, aleshores* $I(\varphi) = 1$.

Tota G-àlgebra (respectivament, MV-àlgebra i $\prod$-àlgebra) és, en particular, una BL-àlgebra. Per tant, pel teorema 4.17, tota G-àlgebra (respectivament, MV-àlgebra i $\prod$-àlgebra) és submergible en un producte directe de BL-cadenes, on cada component és la BL-àlgebra original quocient per un filtre primer. Com que tant les G-àlgebres, les MV-àlgebres i les àlgebres producte estan definides com a BL-àlgebres que satisfan certes equacions, els seus quocients també satisfan aquestes equacions.
Comprovem-ho.

1. Sigui $\mathbf{L}$ una G-àlgebra. Aleshores es satisfà l'equació
$$x \& x \approx x.$$
Per tant, per tot $a \in L$, $a \& a = a$. En conseqüència, per tot $\alpha \in \mathbf{L}/\theta$, tenim $\alpha = [a]_\theta = [a \& a]_\theta = [a]_\theta \& [a]_\theta = \alpha \& \alpha$.
2. Sigui $\mathbf{L}$ una MV-àlgebra. Aleshores es satisfà l'equació
$$(x \rightarrow 0) \rightarrow 0 \approx x.$$
Per tant, per tot $a \in L$, $(a \rightarrow 0) \rightarrow 0 = a$. En conseqüència, per tot $\alpha \in \mathbf{L}/\theta$, si $0 = [0]_\theta$, tenim que $\alpha = [a]_\theta = [(a \rightarrow 0) \rightarrow 0]_\theta = ([a]_\theta \rightarrow [0]_\theta) \rightarrow [0]_\theta = (\alpha \rightarrow 0) \rightarrow 0$.
3. Sigui $\mathbf{L}$ una $\prod$-àlgebra. Aleshores es satisfan les equacions
$$((z \rightarrow 0) \rightarrow 0) \wedge ((x \& z \rightarrow y \& z) \rightarrow (x \rightarrow y)) \approx ((z \rightarrow 0) \rightarrow 0),$$
$$x \wedge (x \rightarrow 0) \approx 0.$$
En conseqüència, per tot $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{L}/\theta$, si $0 = [0]_\theta$, tenim que
$((\gamma \rightarrow 0) \rightarrow 0) \wedge ((\alpha \& \gamma \rightarrow \beta \& \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)) =$
$(([c]_\theta \rightarrow [0]_\theta) \rightarrow [0]_\theta) \wedge (([a]_\theta \& [c]_\theta \rightarrow [b]_\theta \& [c]_\theta) \rightarrow ([a]_\theta \rightarrow [b]_\theta)) = [((c \rightarrow 0) \rightarrow 0) \wedge ((a \& c \rightarrow b \& c) \rightarrow (a \rightarrow b))]_\theta = [((c \rightarrow 0) \rightarrow 0)]_\theta = (\gamma \rightarrow 0) \rightarrow 0$.
$\alpha \wedge (\alpha \rightarrow 0) = [a]_\theta \wedge ([a]_\theta \rightarrow [0]_\theta) = [a \wedge (a \rightarrow 0)]_\theta = [0]_\theta = 0$.

Per tant, podem enunciar els diferents teoremes de representació.

Teorema 4.26.

- *Tota G-àlgebra és representable com a producte subdirecte de G-cadenes.*
- *Tota MV-àlgebra és representable com a producte subdirecte de MV-cadenes.*
- *Tota $\prod$-àlgebra és representable com a producte subdirecte de $\prod$-cadenes.*

Amb aquests teoremes ja podem enunciar la completesa dels càlculs respecte aquestes classes d'àlgebres.

Teorema 4.27. *Teorema de Completesa del càlcul de Gödel respecte la classe de les G-cadenes*
Siguin $\Sigma \cup \varphi \subseteq Prop(X)$,
$\Sigma \vdash_G \varphi$ *si i només si* $\Sigma \models_{Gc} \varphi$.

Teorema 4.28. *Teorema de Completesa del càlcul de Lukasiewicz respecte la classe de les MV-cadenes*
Siguin $\Sigma \cup \varphi \subseteq Prop(X)$,
$\Sigma \vdash_L \varphi$ *si i només si* $\Sigma \models_{MVc} \varphi$.

Teorema 4.29. *Teorema de Completesa del càlcul producte respecte la classe de les $\prod$-cadenes*
Siguin $\Sigma \cup \varphi \subseteq Prop(X)$,
$\Sigma \vdash_P \varphi$ *si i només si* $\Sigma \models_{Pc} \varphi$.

La demostració d'aquests teoremes és anàloga a la demostració del teorema 4.18.

5 Teoremes de completesa estàndard

5.1 Lògica de Gödel

Aquest capítol el destinarem a aprofundir en les G-àlgebres i a demostrar el teorema de completesa del càlcul de Gödel respecte l'àlgebra estàndard de Gödel.
Podem trobar una definició alternativa a 3.18 que, en realitat, és la definició original a partir d'una àlgebra de Heyting. Donem la definicó d'àlgebra de Heyting de manera equacional, tot i que no és la més típica, tal i com [16].

Definició 5.1. *Una àlgebra de Heyting és una àlgebra* $\boldsymbol{L}$=$\langle L, \wedge, \vee, \rightarrow, 0, 1\rangle$ *de tipus (2,2,2,0,0) tal que* $(L, \wedge, \vee, 0, 1)$ *és un reticle acotat i tal que* $\boldsymbol{L}$ *satisfà les següents equacions:*

- $x \wedge (x \rightarrow y) \approx x \wedge y$
- $x \wedge (y \rightarrow z) \approx x \wedge [(x \wedge y) \rightarrow (x \wedge z)]$
- $x \rightarrow x \approx 1$
- $(x \wedge y) \rightarrow y \approx 1$

Definició 5.2. *Una àlgebra de Gödel (o G-àlgebra) és una àlgebra de Heyting que satisfà la prelinealitat, o sigui,* $(x \rightarrow y) \vee (y \rightarrow x) \approx 1$

Observació 5.3. Amb la definició de G-àlgebra de 3.18, obtenim que & i $\wedge$ són equivalents.
Demostració:
Demostrem que per tot $a, b \in L$, $a \wedge b \leq a\&b$ i $a\&b \leq a \wedge b$.
$a \wedge b = a\&(a \rightarrow b) = (a\&a)\&(a \rightarrow b) = a\&(a\&(a \rightarrow b)) \leq a\&b$
Com que $a\&b \leq a$ i $a\&b \leq b$, aleshores $a\&b \leq (a \wedge b)$. □

Observació 5.4. Les dues definicions 3.18 i 5.1 de G-àlgebres són equivalents.
Demostració:
$\Rightarrow$] Sigui $(L, \wedge, \vee, \&, \rightarrow, 0, 1)$ una G-àlgebra pensada com una BL-àlgebra. Per definició, $(L, \wedge, \vee, 0, 1)$ és un reticle acotat i $(x \rightarrow y) \vee (y \rightarrow x) \approx 1$. A més, com que identifiquem & amb $\wedge$, aleshores $x \wedge (x \rightarrow y) \approx x \wedge y$. Els punts 3 i 4 de la definició 5.1 són immediats perquè $x \leq x$ i $x \wedge y \leq y$, respectivament.
Finalment, cal veure que per tot $a, b, c \in L$, $a \wedge (b \rightarrow c) = a \wedge [(a \wedge b) \rightarrow (a \wedge c)]$.
$b \rightarrow c \leq (a \wedge b) \rightarrow (a \wedge c)$ si i només si per la residuació i l'observació 5.3, $(a \wedge b) \wedge (b \rightarrow c) \leq (a \wedge c)$ si i només si $a \wedge (b \wedge c) \leq a \wedge c$, que és veritat. Per tant, $a \wedge (b \rightarrow c) \leq a \wedge [(a \wedge b) \rightarrow (a \wedge c)]$.
Ara, $a \wedge (a \wedge b \rightarrow a \wedge c) \leq a$. Cal veure que $a \wedge (a \wedge b \rightarrow a \wedge c) \leq b \rightarrow c$. $a \wedge (a \wedge b \rightarrow a \wedge c) \leq b \rightarrow c$ si i només si $(a \wedge b \rightarrow a \wedge c) \leq a \rightarrow (b \rightarrow c)$. Com que $a \wedge c \leq c$, aleshores $a \wedge b \rightarrow a \wedge c \leq a \wedge b \rightarrow c$. Sabem que $a \wedge b \rightarrow c = a \rightarrow (b \rightarrow c)$, per la identificació de & i $\wedge$ i l'observació 3.5. Per tant, també obtenim l'altra desigualtat.
$\Leftarrow$] Només caldrà veure la residuació. Si $c \leq (a \rightarrow b)$, aleshores $a \wedge c \leq a \wedge (a \rightarrow b) = a \wedge b \leq b$. Si $a \wedge c \leq b$, aleshores $c \wedge (a \rightarrow b) = c \wedge [(c \wedge a) \rightarrow (c \wedge b)]$. Com que $c \wedge a \leq c \wedge b$, aleshores $(c \wedge a) \wedge (c \wedge b) = c \wedge a$ i per tant, $(c \wedge a) \rightarrow (c \rightarrow b) = [(c \wedge a) \wedge (c \wedge b)] \rightarrow (c \wedge b) = 1$. Per tant, $c \wedge (a \rightarrow b) = c \wedge [(c \wedge a) \rightarrow (c \wedge b)] = c \wedge 1 = c$. □

Lema 5.5. *Sigui* $\boldsymbol{L}$=$(L, \&, \wedge, \vee, \rightarrow, 0, 1)$ *una G-cadena. Per cada* $a, b \in L$,

$$(a \rightarrow b) = \begin{cases} 1 & si \quad a \leq b \\ b & altrament \end{cases}$$

$$a \wedge b = min\{a, b\}$$
$$a \vee b = max\{a, b\}$$

Demostració:
Només cal demostrar que si $a > b$, aleshores $a \to b = b$. Mirem les dues desigualtats.
Si $c \leq a \to b$, aleshores per la residuació $a \wedge c \leq b$. Com que estem suposant que $a > b$ i **L** és una G-cadena. aleshores $a \wedge c = c$ i, per tant, $c \leq b$. Com que si $c \leq a \to b$, aleshores $c \leq b$, tenim que, en particular, $(a \to b) \leq b$.
Com que $a \leq 1$, aleshores $(1 \to b) \leq (a \to b)$. Ara, com que $b \leq (1 \to b)$ (ja que per la residuació $1\&b \leq b$), aleshores $b \leq (a \to b)$. $\square$

Lema 5.6. *Sigui* $\boldsymbol{L}$=$(L, \&, \wedge, \vee, \to, 0, 1)$ *una G-cadena. Si* $H \subseteq L$ *i* $\{0, 1\} \subseteq H$*, aleshores* $(H, \&|_H, \wedge|_H, \vee|_H, \to|_H, 0, 1)$ *és una G-cadena.*

Demostració:
Només cal veure que les operacions estan ben definides. Siguin $a, b \in H \subseteq L$, com que **L** és una G-cadena, aleshores $a \leq b$ o $b \leq a$. Si $a \leq b$, aleshores $a\&|_H b = a\&b = a \wedge b = a \wedge|_H b = a$, $a \vee_H b = a \vee b = b$, $a \to|_H b = a \to b = 1$ i $b \to|_H a = b \to a = a$. Si $b \leq a$, aleshores $a\&|_H b = a\&b = a \wedge b = a \wedge|_H b = b$, $a \vee|_H b = a \vee b = a$, $a \to|_H b = a \to b = b$ i $b \to|_H a = b \to a = 1$. Per tant, totes les operacions estan ben definides. Per tant, $(H, \&|_H \wedge|_H, \vee|_H, \to|_H, 0, 1)$ és una G-cadena. $\square$

A continuació donem una caracterització de com són les G-cadenes.

Proposició 5.7.

1. *Sigui* $(L, \leq, 0, 1)$ *un ordre lineal amb mńim 0 i màxim 1. Si definim* $(L, \leq, 0, 1)^* := (L, \wedge, \vee, \to, 0, 1)$, *de manera que per tot* $x, y \in L$, $x \wedge y := min\{x, y\}$, $x \vee y := max\{x, y\}$ *i* $x \to y := \begin{cases} 1 & si \quad x \leq y \\ y & altrament \end{cases}$, *aleshores* $(L, \leq, 0, 1)^*$ *és una G-cadena.*
2. *Sigui* $(L, \wedge, \vee, \to, 0, 1)$ *és una G-cadena. Si definim* $(L, \wedge, \vee, \to, 0, 1)' := (L, \leq, 0, 1)$, *de manera que per tot* $x, y \in L$, $x \leq y$ *si i només si* $x \wedge y = x$, *aleshores* $(L, \wedge, \vee, \to, 0, 1)'$ *és un ordre lineal amb mínim 0 i màxim 1.*
3. $[(L, \leq, 0, 1)^*]' = (L, \leq, 0, 1)$ *i* $[(L, \wedge, \vee, \to, 0, 1)']^* = (L, \wedge, \vee, \to, 0, 1)$.

Demostració:

1. És immediat comprovar que $(L, \wedge, \vee, 0, 1)$ és un reticle acotat. Comprovem les altres cinc propietats, segons la definició 5.1. Siguin $a, b, c \in L$:
   (a) Si $a \leq b$, aleshores $a \wedge b = a = a \wedge 1 = a \wedge (a \to b)$. Si $b \leq a$, aleshores $a \wedge b = b = a \wedge b = a \wedge (a \to b)$.
   (b) Hi ha 6 casos: $a \leq b \leq c$, $a \leq c \leq b$, $b \leq a \leq c$, $b \leq c \leq a$, $c \leq a \leq b$ i $c \leq b \leq a$. Si $a \leq b \leq c$, aleshores $a \wedge (b \to c) = a \wedge 1 = a = a \wedge 1 = a \wedge [(a \wedge b) \to (a \wedge c)]$. Els altres cinc casos també surten pas a pas.
   (c) Com que $a \leq a$, aleshores $a \to a = 1$.
   (d) Com que $a \wedge b \leq b$, aleshores $(a \wedge b) \to b = 1$.

(e) Com que $a \leq b$ o $b \leq a$, aleshores $a \to b = 1$ o $b \to a = 1$. Per tant, $(a \to b) \vee (b \to a) = 1$.

2. És immediat perquè prenem l'ordre del reticle, que és total.

3. Com que sempre estem tractant el mateix ordre, les igualtats es compleixen. □

Per tant, a partir d'un ordre lineal amb extrems podem obtenir una G-cadena i viceversa. Enunciem un parell de teoremes i un lema que són vitals de cara a la demostració de la completesa, que podem trobar a [2].

Teorema 5.8. *Tot ordre lineal és submergible en un ordre lineal dens.*

Teorema 5.9. *Tot ordre lineal dens numerable és isomorf a* $(\mathbb{Q}, \leq)$ *(i amb extrems a* $([0,1] \cap \mathbb{Q}, \leq)$*).*

Lema 5.10. *Tot ordre lineal comptable (o sigui, finit o numerable) amb extrems és submergible en* $([0,1] \cap \mathbb{Q}, \leq)$.

Com que $[0,1] \cap \mathbb{Q} \subseteq [0,1]$, aleshores:

Corol·lari 5.11. *Tor ordre lineal comptable (o sigui, finit o numerable) amb extrems és submergible en* $([0,1], \leq)$.

Del corol·lari 5.11 i de la proposició 5.7 deduïm el següent teorema.

Teorema 5.12. *Tota G-cadena comptable és submergible en* $[0,1]_\wedge$.

Demostració:
Sigui $\mathbf{L}$ una G-cadena comptable tal que $\mathbf{L} = (L, \leq, 0, 1)^*$ per a un cert ordre lineal comptable $(L, \leq, 0, 1)$ amb extrems. Pel corol·lari anterior, existeix una immersió $h : (L, 0, 1, \leq) \to ([0,1], \leq)$ (aquesta immersió preserva l'ordre).
Per demostrar l'enunciat del teorema, només cal veure que es preserven les operacions $0, \to, \&$ (ja que les altre són definibles a partir d'aquestes).

- Tenim que $h(0_L) = 0$.

- Siguin $a_i, a_j, a_k \in L$. Volem veure que si $a_i \& a_j = a_k$, aleshores $h(a_i) \& h(a_j) = h(a_k)$. Com que h preserva l'ordre, si $a \leq b$, aleshores $h(a) \leq h(b)$. Per l'observació 5.3 i el lema 5.5, si $a_i \leq a_j$, aleshores $a_i \& a_j = a_i$. A més, $h(a_i) \leq h(a_j)$ i per tant, $h(a_i) \& h(a_j) = h(a_i)$. El cas $a_j \leq a_i$ és anàleg.

- Siguin $a_i, a_j, a_k \in L$. Volem veure que si $a_i \to a_j = a_k$, aleshores $h(a_i) \to h(a_j) = h(a_k)$.
  Cas 1: $a_i \leq a_j$
  Si $a_i \leq a_j$, aleshores $a_i \to a_j = 1_L$. Com que h preserva l'ordre, aleshores $h(a_i) \leq h(a_j)$ i $h(a_i) \to h(a_j) = 1$.
  Cas 2: $a_j > a_i$
  Si $a_i > a_j$, aleshores $a_i \to a_j = a_j$ i $h(a_i) > h(a_j)$. Per tant, $h(a_i) \to h(a_j) = h(a_j)$.

Així, hem obtingut que $\mathbf{L}$ és submergible en $[0,1]_\wedge$. □

Observació 5.13. Sigui $\varphi \in Prop(X)$, $Var(\varphi) := \{x \in X : x$ és una variable de $\varphi\}$ i $Sub(\varphi) := \{\psi \in Prop(X) : \psi$ és subfórmula de $\varphi\}$. Ara, sigui $\Sigma \subseteq Prop(X)$, $Var(\Sigma) := \cup_{\psi\in\Sigma} Var(\psi)$ i $Sub(\Sigma) := \cup_{\psi\in\Sigma} Sub(\psi)$.

Teorema 5.14. *Teorema de completesa del càlcul de Gödel respecte l'àlgebra estàndard de Gödel:*
Siguin $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Prop(X)$
$\Sigma \vdash_G \varphi$ si i només si $\Sigma \models_{[0,1]_\wedge} \varphi$.

<u>Demostració:</u>
Veurem les dues implicacions.
$\Rightarrow$] Suposem que $\Sigma \vdash_G \varphi$. Aleshores, pel teorema de completesa del càlcul de Gödel respecte la classe de les G-cadenes, tenim que $\Sigma \models_{Gc} \varphi$. Com que l'àlgebra estàndard de Gödel és un G-cadena, aleshores $\Sigma \models_{[0,1]_\wedge} \varphi$.
$\Leftarrow$] Ho demostrarem pel contrarrecíproc. Suposem que $\Sigma \nvdash_G \varphi$. Aleshores, pel teorema de completesa del càlcul de Gödel respecte la classe de les G-cadenes, tenim que $\Sigma \not\models_{Gc} \varphi$. Com que $\Sigma \not\models_{Gc} \varphi$, aleshores existeix una G-cadena $\mathbf{L}$ i una $\mathbf{L}$-interpretació I tal que $I(\psi) = 1$ per a tot $\psi \in \Sigma$ i $I(\varphi) \neq 1$.
Sigui $J = Var(\{\varphi\}\cup\Sigma)$. Prenem la subàlgebra generada per $\{I(x_i) : x_i \in J\}$ i l'anomenem $\mathbf{B}$. $\mathbf{B}$ és numerable perquè les operacions són finitàries i a més, hem suposat que hi havia un nombre numerable de variables. Per tant, $\Sigma \not\models_{\mathbf{L}} \varphi$ implica que $\Sigma \not\models_{\mathbf{B}} \varphi$. Com que $\mathbf{B}$ és una G-cadena, existeix $h : \mathbf{B} \hookrightarrow [0,1]_\wedge$, que preserva les operacions. Prenem ara la $[0,1]_\wedge$-interpretació $I_h : Prop(X) \to [0,1]_\wedge$ de manera que $x \mapsto h \circ I(x)$.
Com que h és una immersió i $I(\varphi) \neq 1$ i $I(\psi) = 1$, per tot $\psi \in \Sigma$, aleshores $I_h(\psi) = 1$, per tota $\psi \in \Sigma$ i $I_h(\varphi) \neq 1$. Per tant, $\Sigma \not\models_{[0,1]_\wedge} \varphi$. $\square$

5.2 Lògica de Lukasiewicz

Aquest capítol el destinarem a aprofundir en les MV-àlgebres i a demostrar el teorema de completesa del càlcul de Lukasiewicz respecte l'àlgebra estàndard de Lukasiewicz. Recordem que el càlcul original de Lukasiewicz es defineix només amb dues connectives primitives: $\to$ i $\neg$.
A continuació, donarem una presentació equivalent a les MV-àlgebres en el llenguatge $\{\to, \neg\}$.

Definició 5.15. *Una àlgebra de Wajsberg és una àlgebra $\langle L, \to, \neg \rangle$ de tipus (2,1) que satisfà les següents equacions:*

$$(x \to x) \to y \approx y$$

$$(x \to y) \to ((y \to z) \to (x \to z)) \approx x \to x$$

$$((x \to y) \to y) \approx ((y \to x) \to x)$$

$$(\neg x \to \neg y) \to (y \to x) \approx x \to x.$$

Lema 5.16. *Sigui $(L, \to, \neg)$ una àlgebra de Wajsberg. Es compleix que, per tot $a, b \in L$:*

$$a \to a = b \to b$$

<u>Demostració:</u>
Totes les justificacions vindran de les equacions de la definició 5.15.
$a \to a = (a \to a) \to (a \to a)$ per la primera equació,
$(a \to a) \to (a \to a) = ((a \to a) \to (b \to b)) \to (((b \to b) \to b) \to ((a \to a) \to b))$ per la segona equació,
$((a \to a) \to (b \to b)) \to (((b \to b) \to b) \to ((a \to a) \to b)) = (b \to b) \to (((b \to b) \to b) \to b)$ per la primera equació aplicada en dos llocs,
$(b \to b) \to (((b \to b) \to b) \to b) = (b \to b) \to (b \to b)$ per la primera equació i,
$(b \to b) \to (b \to b) = b \to b$ per la primera equació.
En conseqüència, $x \to x$ és una constant algebraica i definim $1 := x \to x$. □

Lema 5.17. *Sigui $\boldsymbol{L}$ una MV-àlgebra tal i com l'hem definit a 3.20. Per tot $a, b \in L$:*

- $a \to b = (b \to 0) \to (a \to 0)$
- $a \& b = (a \to (b \to 0)) \to 0$

<u>Demostració:</u>

- Sigui $c \in L$ tal que $c \leq a \to b$, aleshores per la residuació, $c \& a \leq b = (b \to 0) \to 0$. Un altre cop per la residuació 3 cops $c \leq (b \to 0) \to (a \to 0)$. Per tant, $a \to b \leq (b \to 0) \to (a \to 0)$. L'altra desigualtat s'obté amb el mateix raonament.
- Veurem les dues desigualtats.
  $a \& b \leq (a \to (b \to 0)) \to 0$ si i només si $(a \to (b \to 0)) \& (a \& b) \leq 0$ si i només si $a \to (b \to 0) \leq a \to (b \to 0)$, que és veritat. L'altra desigualtat s'obté de forma similar. □

Observació 5.18. Vegem que les dues presentacions són equivalents.
<u>Demostració:</u>

- Si **L** és una MV-àlgebra, aleshores $\langle L, \to, \neg\rangle$ és una àlgebra de Wajsberg, on $\neg x := x \to 0$.
  Comprovem les quatre propietats. Siguin $a, b, c \in L$.
  - Cal veure que $(a \to a) \to b = b$. Com que $a \to a = 1$, cal veure que $1 \to b = b$. Pel lema 3.6.5 sabem que $a \vee 1 = ((a \to 1) \to 1) \wedge ((1 \to a) \to a)$. Ara, $a \vee 1 = 1$. Per tant, $((a \to 1) \to 1) \wedge ((1 \to a) \to a) = 1$. Per tant, $(a \to 1) \to 1 = 1$ i $(1 \to a) \to a = 1$. Com que $(1 \to a) \to a = 1$, aleshores $(1 \to a) \leq a$. D'altra banda, com que $a = a\&1 \leq a$, aleshores per la residuació $a \leq (1 \to a)$. Per tant, $a = 1 \to a$.
  - Cal veure que $(a \to b) \to ((b \to c) \to (a \to c)) = a \to a$. Com que $a \leq a$, aleshores $a \to a = 1$. Per tant, $(a \to b) \to ((b \to c) \to (a \to c)) = 1$ si i només si per la residuació (3 cops) i la commutativitat i l'associativitat de &, $(a\&(a \to b))\&(b \to c) \leq c$, que és veritat perquè $(a\&(a \to b))\&(b \to c) \leq b\&(b \to c) \leq c$.
  - Cal veure $(a \to b) \to b \leq (b \to a) \to a$ i viceversa. Per la definició de $\vee$, cal veure que $(a \to b) \to b \leq a \vee b$. Recordem que $(a \vee b) \to 0 = (a \to 0) \wedge (b \to 0)$.
    $((a \to b) \to b) \to 0 = ((b \to 0) \to ((a \to b) \to 0)) \to 0$ pel lema 5.17,
    $= (b \to 0)\&(a \to b)$ pel lema 5.17,
    $= (b \to 0)\&((b \to 0) \to (a \to 0) = (b \to 0) \wedge (a \to 0)$.
    Per tant, $((a \to b) \to b) \to 0 = (a \vee b) \to 0$ i per la residuació ja ho tenim.
  - Cal veure que $((a \to 0) \to (b \to 0)) \to (b \to a) = a \to a$. $a \to a = 1$, per tant, $((a \to 0) \to (b \to 0)) \to (b \to a) = 1$ si i només si $((a \to 0) \to (b \to 0)) \leq (b \to a)$, que és veritat pel lema 5.17.
- Si **L** és una àlgebra de Wajsberg, $0 := \neg 1$ i definim $\&, \wedge, \vee$ de manera que, per tot $a, b \in L$, $a\&b := (a \to (b \to 0)) \to 0$, $a \wedge b := a\&(a \to b)$ i $a \vee b := (a \to b) \to b$. Aleshores, $(L, \wedge, \vee, \&, \to, 0, 1)$ és una MV-àlgebra. □

Ara, donarem una altra definició equivalent de MV-àlgebra. De fet, és la definició original, la podem trobar a [3], però depèn d'un altre llenguatge.

Definició 5.19. *Una MV-àlgebra és una àlgebra $\langle L, \oplus, \neg, 0\rangle$ de tipus (2,1,0) que satisfà les següents equacions:*

$$x \oplus (y \oplus z) \simeq (x \oplus y) \oplus z$$

$$x \oplus y \approx y \oplus x$$

$$x \oplus 0 \approx x$$

$$\neg\neg x \approx x$$

$$x \oplus \neg 0 \approx \neg 0$$

$$\neg(\neg x \oplus y) \oplus y \approx \neg(\neg y \oplus x) \oplus x$$

Observació 5.20. Comprovem que aquesta definició és equivalent a la definició 3.20.
Demostració:
Si partim de la definició 3.20 i definim $\neg a := a \to 0$ i $a \oplus b := ((a \to 0)\&(b \to 0)) \to 0 = \neg(\neg a\&\neg b)$, comprovem que es compleixen les propietats de la definició 5.19.

- $a \oplus (b \oplus c) = a \oplus [\neg(\neg b\&\neg c)] = \neg[\neg a\&\neg\neg(\neg b\&\neg c)] = \neg[\neg a\&(\neg b\&\neg c)] = \neg[(\neg a\&\neg b)\&\neg c] = \neg[\neg\neg(\neg a\&\neg b)\&\neg c] = \neg[\neg(a \oplus b)\&\neg c] = (a \oplus b) \oplus c$.

- Com que & és commutativa, aleshores $a \oplus b = b \oplus a$.
- $a \oplus 0 = \neg(\neg a \& \neg 0) = \neg(\neg a \& 1) = \neg\neg a = a$.
- Tal i com hem definit $\neg$ i per la propietat $(a \to 0) \to 0 = a$, clarament es compleix.
- $x \oplus \neg 0 = \neg(\neg x \& \neg\neg 0) = \neg(\neg x \& 0) = \neg 0$.
- $\neg(\neg a \oplus b) \oplus b = \neg(\neg\neg(\neg a \oplus b) \& \neg b) = \neg((\neg a \oplus b) \& \neg b) = \neg(\neg(\neg\neg a \& \neg b) \& \neg b) = \neg(\neg(a \& \neg b) \& \neg b)$.
  De la mateixa manera, $\neg(\neg b \oplus a) \oplus a = \neg(\neg\neg(\neg b \oplus a) \& \neg a) = \neg((\neg b \oplus a) \& \neg a) = \neg(\neg(\neg\neg b \& \neg a) \& \neg a) = \neg(\neg(b \& \neg a) \& \neg a)$.
  Ara, volem veure que $\neg(\neg(a \& \neg b) \& \neg b) = \neg(\neg(b \& \neg a) \& \neg a)$.
  Ara, pel lema 6.18, $\neg(\neg(a \& \neg b) \& \neg b) = \neg(\neg\neg(\neg b \to \neg a) \& \neg b) = \neg((\neg b \to \neg a) \& \neg b) = \neg(\neg b \wedge \neg a)$. Amb el mateix raonament, $\neg(\neg(b \& \neg a) \& \neg a) = \neg((\neg a \to \neg b) \& \neg a) = \neg(\neg b \wedge \neg a)$. Per tant, són iguals i hem acabat.

Si partim de la definició 5.19, per obtenir la definició 3.20 cal definir $1 := \neg 0$, per tot $a, b \in L$, $a \& b := \neg(\neg a \oplus \neg b)$, $a \to b := \neg a \oplus b$, $a \vee b := (a \& \neg b) \oplus b$ i $a \wedge b := a \& (\neg a \oplus b)$.
□

Un cop hem vist les diferents presentacions d'una MV-àlgebra, volem trobar una caracterització de les MV-cadenes.

Definició 5.21. *Sigui $\boldsymbol{G} = \langle G, +, -, 0, \leq_G \rangle$ un grup abelià totalment ordenat. Sigui $u \in G$, $0 \leq_G u$, $\Gamma(\boldsymbol{G}, u)$ és l'àlgebra $\langle [0,u], \oplus, \neg, 0 \rangle$ de tipus (2,1,0), on $[0,u] = \{g \in G : 0 \leq_G g \leq_G u\}$ i per tot $a, b \in [0,u]$, $a \oplus b := \begin{cases} a+b & \text{si} \quad a+b \leq u \\ u & \text{altrament} \end{cases}$ i $\neg a := u - a$.*

Proposició 5.22. *Sigui $\boldsymbol{G} = \langle G, +, -, 0, \leq_G \rangle$ un grup abelià totalment ordenat. Sigui $u \in G$, $0 \leq_G u$, aleshores $\Gamma(\boldsymbol{G}, u)$ és una MV-àlgebra.*

<u>Demostració:</u>
Siguin $a, b \in [0, u]$:

1. L'associativitat de $\oplus$ es demostra fàcilment fent tots els casos i amb l'associativitat de $+$.
2. Com que $a + b = b + a$, aleshores $a \oplus b = b \oplus a$.
3. Com que $a = a + 0 \leq u$, aleshores $a \oplus 0 = a$.
4. $\neg\neg a = u - (u - a) = a$.
5. Com que $\neg 0 = u$ i $a + u \not\leq u$, aleshores $a \oplus \neg 0 = u = \neg 0$.
6. Cal fer casos i en tots obtenim la igualtat. □

Tot seguit, enunciem un teorema de caracterització de les MV-cadenes que va ser provat per Chang [13] i que posteriorment el generalitzà Mundici a totes les MV-àlgebres a [15].

Teorema 5.23. *Per tota MV-cadena $\boldsymbol{L}$ existeix un grup abelià totalment ordenat $\boldsymbol{G}$ i existeix $u \in G$, $0 \leq_G u$, tal que $\boldsymbol{L} = \Gamma(\boldsymbol{G}, u)$.*

Expliquem tot seguit què vol dir que una àlgebra sigui parcialment submergible en una altra.

Definició 5.24. *Siguin* $\boldsymbol{A} = \langle A; f^A : f \in F\rangle$ *i* $\boldsymbol{B} = \langle B; f^B : f \in F\rangle$ *dues àlgebres del mateix tipus. Diem que* $\boldsymbol{A}$ *és parcialment submergible en* $\boldsymbol{B}$ *si i només si tota àlgebra parcial finita d'*$\boldsymbol{A}$ *és submergible en* $\boldsymbol{B}$*. És a dir, per tot* $\{a_1, ..., a_n\} \in A$ *existeix una injecció* $h : \{a_1, ..., a_n\} \to B$ *tal que si per* $\{b_1, ..., b_m\} \subseteq \{a_1, ..., a_n\}$*, si* $f^A(b_1, ..., b_m) \in \{a_1, ..., a_n\}$*, aleshores* $h(f^A(b_1, ..., b_m)) = f^B(h(b_1), ..., h(b_m))$*.*

El següent resultat fou presentat per Gurevich i Kokorin l'any 1963, [11].

Teorema 5.25. *Tot grup abelià totalment ordenat és parcialment submergible en* $\mathbb{R}$*.*

Ara, a partir de la caracterització del teorema 5.23 podem obtenir el següent resultat.

Lema 5.26. *Tota MV-cadena és parcialment submergible en* $[0,1]_{\odot}$*.*

Demostració:
Sigui $\mathbf{L}$ una MV-àlgebra tal que $\mathbf{L}$=$\Gamma(\mathbf{G}, u)$, per un cert grup $\mathbf{G}$=$\langle G, +, -, 0, \leq_G\rangle$ abelià totalment ordenat i per un cert $u \in G$ tal que $0 \leq_G u$.
Sigui $S = \{a_0, a_1, ..., a_n\} \subseteq \mathbf{L}$. Aleshores, $S = \{a_0, a_1, ..., a_n\} \subseteq G$. Prenem $S^* = S \cup \{0, u\} \cup \{a_i + a_j > u : 0 \leq i, j \leq n\} \cup \{u - a_i : 0 \leq i \leq n\}$.
Com que S^* és un subconjunt d'un grup abelià totalment ordenat, aleshores tenim una immersió local $f : S^* \to \mathbb{R}$ que preserva les operacions $+, -, \wedge, \vee$ (i també l'ordre). Podem definir g com f restringida a $S \cup \{0, u\}$. Veurem que $g : S \cup \{0, u\} \to \Gamma(\mathbb{R}, f(u))$ és la immersió local que busquem. Serà suficient comprovar que g preserva $\oplus, \neg, 0$, ja que les altres operacions són definibles a partir d'aquestes.

- Clarament, $g(0) = f(0) = 0_{\Gamma(\mathbb{R}, f(u))}$ i $g(u) = f(u)$.
- Suposem que $a_i \oplus a_j = a_k$ i volem veure que $g(a_i) \oplus g(a_j) = g(a_k)$.
  Cas 1: $a_i + a_j \leq u$
  Si $a_i + a_j \leq u$, aleshores $a_i \oplus a_j = a_i + a_j = a_k \leq u$ i $f(a_i + a_j) \leq f(u)$. Per tant, com que $a_i, a_j, a_k \in S$, tenim que $g(a_i) + g(a_j) = g(a_k) \leq g(u)$ i, per tant, $g(a_i) \oplus g(a_j) = g(a_k)$.
  Cas 2: $a_i + a_j > u$
  Si $a_i + a_j > u$, aleshores $a_i \oplus a_j = u = a_k$. A més, com que $a_i + a_j > u$, aleshores $f(a_i + a_j) > f(u)$. Com que $a_i + a_j \in S^*$, aleshores $f(a_i + a_j) = f(a_i) + f(a_j) > f(u)$. Per tant, $g(a_i) + g(a_j) > g(u)$. Per tant, $g(a_i) \oplus g(a_j) = g(u) = g(a_k)$.
- Suposem ara que $\neg a_i = a_j$ i volem veure que $\neg g(a_i) = g(a_j)$.
  Com que $\neg a_i = u + (-a_i)$ i $u \in S^*$ i $-a_i \in S^*$ (per tant, $f(-a_i) = -f(a_i)$), aleshores $\neg f(a_i) = f(u) + (-f(a_i)) = f(a_j)$. Com que $a_i, a_j, u \in S$, aleshores $\neg g(a_i) = g(u) + (-g(a_i)) = g(a_j)$.

Com les altres operacions es poden definir a partir d'aquestes, ja ho tenim.
Per tant, $S \hookrightarrow \Gamma(\mathbb{R}, g(u))$. Ara, com que $\Gamma(\mathbb{R}, g(u)) \cong \Gamma(\mathbb{R}, 1)$ (amb l'isomorfisme $h : \Gamma(\mathbb{R}, g(u)) \to \Gamma(\mathbb{R}, 1)$ de manera que $a \mapsto a/g(u)$), aleshores $S \hookrightarrow \Gamma(\mathbb{R}, 1) \cong [0,1]_{\odot}$ □

Teorema 5.27. *Teorema de completesa del càlcul de Lukasiewicz respecte la MV-àlgebra estàndard.*
Siguin $\Sigma \cup \varphi \subseteq Prop(X)$*,*
$\varphi_1, ..., \varphi_n \vdash_L \varphi$ *si i només si* $\varphi_1, ..., \varphi_n \models_{[0,1]_{\odot}} \varphi$*.*

Demostració:

$\Rightarrow$] Suposem que $\varphi_1, ..., \varphi_n \vdash_L \varphi$, aleshores pel teorema de completesa respecte la classe de les MV-cadenes $\varphi_1, ..., \varphi_n \models_{MVc} \varphi$. Com que $[0,1]_\odot$ és una MV-cadena, aleshores $\varphi_1, ..., \varphi_n \models_{[0,1]_\odot} \varphi$.

$\Leftarrow$] La implicació contrària la demostrarem pel contrarrecíproc. Suposem que $\varphi_1, ..., \varphi_n \nvdash_L \varphi$ i volem veure que $\varphi_1, ..., \varphi_n \not\models_{[0,1]_\odot} \varphi$. Si $\varphi_1, ..., \varphi_n \nvdash_L \varphi$, aleshores pel teorema de completesa respecte la classe de les MV-cadenes, $\varphi_1, ..., \varphi_n \not\models_{MVc} \varphi$. Per tant, existeix una MV-cadena $\mathbf{L}$ i una $\mathbf{L}$-interpretació I de manera que $I(\varphi_1) = ... = I(\varphi_n) = 1$ i $I(\varphi) \neq 1$.

Prenem ara $Sub(\{\varphi_1, ..., \varphi_n, \varphi\})$ i anomenem $S = \{I(\psi) : \psi \in Sub(\{\varphi_1, ..., \varphi_n, \varphi\})\}$. Observem que S és un subconjunt finit de $\mathbf{L}$ i, pel lema 5.26, existeix $h : S \to [0,1]_\odot$ de manera que preserva les operacions. Prenem ara la interpretació $I_h : Prop(X) \to [0,1]_\odot$ de manera que $x \mapsto \begin{cases} h \circ I(x) & si \quad x \in Var(\{\varphi_1, ..., \varphi_n, \varphi\}) \\ 0 & altrament \end{cases}$

Volem veure que per tota $\psi \in Sub(\{\varphi_1, ..., \varphi_n, \varphi\})$, $I_h(\psi) = h \circ I(\psi)$. Raonem per inducció. Sigui $\psi \in Sub(\{\varphi_1, ..., \varphi_n, \varphi\})$.

- Si $\psi = x$, aleshores $\psi \in Var(\{\varphi_1, ..., \varphi_n, \varphi\})$. Per tant, $I_h(\psi) = h \circ I(\psi)$.
- Sigui $\psi = \neg\chi$. Com que $\chi \in Sub(\{\varphi_1, ..., \varphi_n, \varphi\})$, per hipòtesi d'inducció, $I_h(\chi) = h \circ I(\chi)$. Com que $\chi, \neg\chi \in Sub(\{\varphi_1, ..., \varphi_n, \varphi\})$, aleshores $I(\chi), I(\neg\chi) \in S$. Ara, com que h és una immersió parcial, aleshores $I_h(\psi) = \neg I_h(\chi) = \neg h(I(\chi)) = h(\neg I(\chi)) = h(I(\neg\chi)) = h \circ I(\psi)$. Per tant, $I_h(\psi) = h \circ I(\psi)$.
- Sigui $\psi = \psi_1 \oplus \psi_2$. Com que $\psi_1, \psi_2 \in Sub(\{\varphi_1, ..., \varphi_n, \varphi\})$, aleshores $I_h(\psi_1) = h \circ I(\psi_1)$ i $I_h(\psi_2) = h \circ I(\psi_2)$, per hipòtesi d'inducció. Tenim que $I(\psi_1), I(\psi_2), I(\psi_1 \oplus \psi_2) \in S$. Com que h és una immersió parcial, aleshores $I_h(\psi) = I_h(\psi_1) \oplus I_h(\psi_2) = h(I(\psi_1)) \oplus h(I(\psi_2)) = h(I(\psi_1) \oplus I(\psi_2)) = h(I(\psi_1 \oplus \psi_2)) = h \circ I(\psi)$.

Per tant, hem acabat la inducció i obtenim que, com que h preserva les operacions, $I_h(\varphi_1) = I_h(\varphi_n) = 1$ i $I_h(\varphi) \neq 1$. Per tant, $\varphi_1, ..., \varphi_n \not\models_{[0,1]_\odot} \varphi$. $\square$

5.3 Lògica producte

Com en els dos anteriors apartats, aquest també el destinem a demostrar la completesa. Volem demostrar el teorema de completesa del càlcul producte respecte l'àlgebra estàndard producte.
Comencem veient algunes propietats algebraiques que utilitzarem més endavant.

Lema 5.28. *Sigui* $\boldsymbol{L}$ *una* $\prod$*-cadena i siguin* $a, b, c \in L$*, aleshores:*

- *Si* $a > 0$*, aleshores* $a \to 0 = 0$.
- $c > 0$*, aleshores* $a\&c = b\&c$ *implica que* $a = b$.

Demostració:

- Tenim que $a \wedge (a \to 0) = 0$. Com que $a > 0$, aleshores $a \to 0 = 0$.
- Si $c > 0$, aleshores $c \to 0 = 0$ i, per tant, $(c \to 0) \to 0 = 1$. Per tant, $1 \leq ((a\&c) \to (b\&c)) \to (a \to b)$. Si suposem que $a\&c = b\&c$, aleshores $(a\&c) \to (b\&c) = 1$ i, per tant, $a \to b = 1$ i $a \leq b$. De la mateixa manera, girant a, b obtenim $b \leq a$. Per tant, $a = b$. □

Necessitem obtenir una caracterització de les cadenes producte.

Definició 5.29. *Per tot grup abelià totalment ordenat* $\boldsymbol{G}= (G, +, -, 0, \leq)$*, definim* $\prod(\boldsymbol{G})$ *com l'àlgebra* $\boldsymbol{L} = (L, \&, \to, \wedge, \vee, 0_L, 1_L)$ *de tipus* $(2, 2, 2, 2, 2, 0, 0)$*, on* $L = Neg_G \cup \{\perp\}$*, aquí* $Neg_G = \{x \in G : x \leq 0_G\}$ *i* $\perp$ *és un nou element més petit que qualsevol element* $a \in Neg_G$ *i de manera que:*
$a\&b = a + b$ *per tot* $a, b \in Neg_G$ *i* $\perp\&a = a\&\perp = \perp$*, per tot* $a \in L$

$$a \to b := \begin{cases} 0_G & si \quad a \leq b; a, b \in L \\ b - a & si \quad a > b; a, b \in L - \{\perp\} \\ \perp & si \quad b = \perp < a \end{cases}$$

$a \wedge b = min\{a, b\}$*,* $a \vee b = max\{a, b\}$*,* $0_L = \perp$ *i* $1_L = 0_G$.

Proposició 5.30. *Sigui* $\boldsymbol{G}$ *un grup abelià totalment, aleshores* $\prod(\boldsymbol{G})$ *és una* $\prod$*-cadena.*

Demostració:
Sigui **G** un grup abelià totalment ordenat, aleshores clarament $(L, \wedge, \vee, 0_L, 1_L)$ és un reticle i és acotat perquè $\perp \wedge a = \perp = 0_L$ i $0_G \wedge a = a$ per tot $a \in L$.
Cal veure que $(L, \&, 1_L)$ és un semigrup commutatiu amb element neutre 1_L. & és commutativa perquè si $a, b \in Neg_G$, aleshores $a\&b = a+b = b+a = b\&a$ i si $b = \perp$, aleshores $a\&\perp = \perp\&a = \perp$. També l'operació és associativa i 1 és l'element neutre (si $a \neq \perp$, $a\&1_L = a + 0_G = a$ i si $a = \perp$, $\perp\&1_L = \perp$).
Amb casos comprovem la propietat de la residuació i l'equació $x \wedge y \simeq x\&(x \to y)$.
Com que **G** és totalment ordenat, per tot $a, b \in L$ $a \leq b$ o $b \leq a$. Per tant, per tot $a, b \in L$, $(a \to b) \vee (b \to a) = 0_G = 1_L$.
Si $a \neq \perp$, aleshores $a \to \perp = \perp$ i $a \wedge (a \to \perp) = \perp = 0_L$. A més, $\perp \wedge (\perp \to \perp) = \perp$.
L'última equació d'una $\prod$-àlgebra també es satisfà per casos. □

El següent teorema el podem trobar a [12], només indiquem com es demostra.

Teorema 5.31. *Sigui $\boldsymbol{L} = \langle L, \&, \to, \wedge, \vee, 0_L, 1_L\rangle$ una cadena producte. Existeix un grup abelià totalment ordenat $\boldsymbol{L'} = \boldsymbol{G} = \langle G, +, -, 0_G, \leq_G\rangle$ de manera que $L - \{0_L\} = Neg_G = \{g \in G : g \leq_G 0_G\}$ i de manera que, per tot $g, h \in L - \{0\}$,*

$$0_G = 1_L$$

$$g +_G h = g\&h$$

$$g \leq_G h \iff g \leq h$$

A més, per $g \geq h$, $g \to h = h -_G g$.
Per tant, $\boldsymbol{L} = \prod(\boldsymbol{L'})$.

<u>Demostració:</u>
Com que **L** és una $\prod$-àlgebra, aleshores $(L, \&, 1_L)$ és un semigrup commutatiu amb 1 com a element unitat. Com que si $a\&b = 0$, aleshores $a = 0$ o $b = 0$, pel lema 5.28, $(L - \{0_L\}, \&, 1_L)$ és un semigrup commutatiu amb 1 com a element unitat. Ara, a partir d'aquest semigrup amb un procés estàndard de simetrització obtenim el grup abelià totalment ordenat **G** tal que $\mathbf{L} = \prod(\mathbf{G})$. □

Observació 5.32. Sigui **G** un grup abelià totalment, aleshores $[\prod(\mathbf{G})]' = \mathbf{G}$.
De la mateixa manera, sigui **L** una G-cadena, aleshores $\mathbf{L}=\prod(\mathbf{L}')$.

Tornem a utilitzar el teorema 5.25.

Lema 5.33. *Tota $\prod$-cadena és parcialment submergible en* $[0, 1]$..

<u>Demostració:</u>
Sigui **L** una $\prod$-cadena tal que $\mathbf{L}=\prod(\mathbf{G})$, per un cert grup $\mathbf{G}=\langle G, +, -, 0_G, \leq_G\rangle$ abelià totalment ordenat.
Sigui $S = \{a_1, ..., a_n, 1\} \subseteq L$. Prenem $S^* = S - \{0_L\} \cup \{-b : b \in S - \{0_L\}\}$. Com que S^* és un subconjunt d'un grup abelià totalment ordenat, aleshores existeix $f : S^* \hookrightarrow \mathbb{R}$ que preserva les operacions $+, -$ i l'ordre. Prenem ara $h : \{a_1, ..., a_n\} \cup \{0_L\} \hookrightarrow \prod(\mathbb{R})$ de manera que $a_i \mapsto f(a_i)$ si $a_i \in S - \{0_L\}$ i $0_L \mapsto \perp$, volem veure que és una immersió. Com que f preserva l'ordre estricte i $\perp$ és el més petit de $\prod(\mathbb{R}, +, -, 0, \leq)$, aleshores h preserva l'ordre estricte. Només caldrà mirar que preserva $0_L, \&, \to$. Fem èmfasi a recordar que $0_L = \perp_{\prod(\mathbf{G})}$ i que $1_L = 0_G$.

- Tenim que $h(0_L) = \perp$.
- Suposem que $a_i\&a_j = a_k$ i volem veure que $h(a_i)\&h(a_j) = h(a_k)$.
  Cas 1: $a_i \neq 0_L$ i $a_j \neq 0_L$
  Com que $a_i \neq 0_L \neq a_j$, aleshores, pel lema 5.28, $a_k \neq 0_L$. Tenim doncs que $a_i\&a_j = a_i + a_j = a_k$. Per tant, $h(a_i)\&h(a_j) = f(a_i) + f(a_j) = f(a_k) = h(a_k)$.
  Cas 2: $a_i = 0_L$
  Sense pèrdua de generalitat, fem el cas $a_i \neq 0_L$ (per la commutativitat de &).
  Si $a_i = 0_L$, aleshores $a_k = a_i\&a_j = 0_L$. Per tant, $h(a_i)\&h(a_j) = \perp\&h(a_j) = \perp = h(a_k)$.
- Volem veure que si $a_i \to a_j = a_k$, aleshores $h(a_i) \to h(a_j) = h(a_k)$.
  Cas 1: $a_i \leq a_j$
  Si $a_i \leq a_j$, aleshores $a_i \to a_j = 1_L = 0_G$. Com que h preserva l'ordre, $h(a_i) \leq h(a_j)$.

Per tant, $h(a_i) \to h(a_j) = 0_{\mathbb{R}} = 1_{\prod(\mathbb{R},+,-,0,\leq)}$.
Cas 2: $a_i > a_j$ i $a_j \neq 0_L = \perp_{\prod(\mathbf{G})}$
Tenim que $h(a_k) = f(a_i \to a_j) = f(a_j + (-a_i)) = f(a_j) + f(-a_i) = f(a_j) + (-f(a_i)) = f(a_i) \to f(a_j) = h(a_i) \to h(a_j)$.
Cas 3: $a_i > a_j$ i $a_j = 0_L = \perp_{\prod(\mathbf{G})}$
Com que $a_j = 0$ i $a_i > a_j$, aleshores $a_i \to a_j = a_j = 0_L = a_k$. Tenim doncs que $h(a_j) = \perp$ i $h(a_i) \to \perp = \perp = h(a_k)$.

Com les altres operacions es poden definir a partir d'aquestes, tenim que S és submergible en $\prod(\mathbb{R},+,-,0,\leq)$. Ara, com que $\prod(\mathbb{R},+,-,0,\leq) \cong \prod(\mathbb{R}^+,\cdot,^{-1},1,\leq)$ amb l'isomorfisme $a \mapsto e^a$ si $a \neq \perp$ i $\perp \mapsto \perp$. Com que $\prod(\mathbb{R}^+,\cdot,^{-1},1,\leq) = [0,1]_\cdot$, obtenim que S és submergible en $[0,1]_\cdot$. $\square$

Teorema 5.34. *Teorema de completesa respecte la $\prod$-àlgebra estàndard.*
Siguin $\{\varphi_1, ..., \varphi_n, \varphi\} \subseteq Prop(X)$,
$\varphi_1, ..., \varphi_n \vdash_P \varphi$ *si i només si* $\varphi_1, ..., \varphi_n \models_{[0,1]_\cdot} \varphi$.

Demostració:
$\Rightarrow$] Suposem que $\varphi_1, ..., \varphi_n \vdash_P \varphi$, aleshores pel teorema de completesa respecte la classe de les $\prod$-cadenes $\varphi_1, ..., \varphi_n \models_{Pc} \varphi$. Com que $[0,1]_\cdot$ és una P-cadena, aleshores $\varphi_1, ..., \varphi_n \models_{[0,1]_\cdot} \varphi$.
$\Leftarrow$] La implicació contrària la demostrarem pel contrarrecíproc. Suposem que $\varphi_1, ..., \varphi_n \nvdash_P \varphi$ i volem veure que $\varphi_1, ..., \varphi_n \not\models_{[0,1]_\cdot} \varphi$. Si $\varphi_1, ..., \varphi_n \nvdash_P \varphi$, aleshores pel teorema de completesa respecte la classe de les $\prod$-cadenes, $\varphi_1, ..., \varphi_n \not\models_{Pc} \varphi$. Per tant, existeix una P-cadena $\mathbf{L}$ i una $\mathbf{L}$-interpretació I de manera que $I(\varphi_1) = ... = I(\varphi_n) = 1$ i $I(\varphi) \neq 1$.
Prenem ara $Sub(\{\varphi_1, ..., \varphi_n, \varphi\})$ i anomenem $S = \{I(\psi) : \psi \in Sub(\{\varphi_1, ..., \varphi_n, \varphi\})\}$. Observem que S és un subconjunt finit de $\mathbf{L}$ i, pel lema 5.33, existeix $h : S \to [0,1]_\cdot$ de manera que preserva les operacions. Prenem ara la interpretació $I_h : Prop(X) \to [0,1]_\cdot$ de manera que $x \mapsto \begin{cases} h \circ I(x) & si \quad x \in Var(\{\varphi_1, ..., \varphi_n, \varphi\}) \\ 0 & altrament. \end{cases}$
De forma anàloga a la de Lukasiewicz, obtenim $I_h(\varphi_1) = ... = I_h(\varphi_n) = 1$ i $I_h(\varphi) \neq 1$. Per tant, $\varphi_1, ..., \varphi_n \not\models_{[0,1]_\cdot} \varphi$. $\square$

5.4 Lògica fuzzy bàsica

Finalment en aquest apartat demostrarem la completesa estàndard del càlcul BL. Per obtenir aquesta completesa, demostrarem que tota BL-cadena **A** és localment submergible en la classe de les BL-àlgebres estàndard, és a dir, tota àlgebra parcial finita d'**A** és submergible en alguna àlgebra de la classe de les BL-àlgebres estàndard.
Per això necessitem primer obtenir algun tipus de caracterització de les BL-cadenes.

Definició 5.35. *Sigui $\boldsymbol{L}$ una BL-àlgebra i sigui $z \in L$. Diem que z és idempotent si i només si $z\&z = z$.*

Definició 5.36. *Una parella (X, Y) és un tall d'una BL-cadena $\boldsymbol{L}$ si es satisfan les següents condicions:*

- $X \cup Y = L$,
- $x \leq y$, *per tot* $x \in X$ *i per tot* $y \in Y$,
- Y *és tancat per* $\&$,
- $x\&y = x$, *per tot* $x \in X$ *i per tot* $y \in Y$.

Lema 5.37. *Sigui (X, Y) un tall d'una BL-cadena $\boldsymbol{L}$. Si $X \cap Y \neq \emptyset$, aleshores $X \cap Y = \{z\}$, de manera que z és un idempotent de $\boldsymbol{L}$.*

Demostració:
Si $X \cap Y \neq \emptyset$, aleshores existeix $z \in X \cap Y$. Ara, pel quart punt de la definició 5.36, tenim que com que $z \in X$ i $z \in Y$, aleshores $z\&z = z$. Per tant, z és idempotent.
D'altra banda, cal veure que la intersecció dels dos conjunts és només un punt. Suposem que existeixen $z, u \in X \cap Y$. Pel segon punt de la definició 5.36, com que $z \in X$ i $u \in Y$, aleshores $z \leq u$. De la mateixa manera, com que $u \in X$ i $z \in Y$, aleshores $u \leq z$. Per tant, $z = u$. □

Definició 5.38. *Direm que una BL-cadena és saturada si per cada tall (X, Y) de $\boldsymbol{L}$ existeix un element idempotent $z \in L$ tal que $x \leq u \leq y$, per cada $x \in X$ i $y \in Y$.*

Observació 5.39. Sigui **L**$=(L, \wedge, \vee, \& \rightarrow, 0, 1)$ una cadena no saturada. Aleshores existeix un tall (X, Y) de **L** de manera que no existeix $z \in L$ idempotent tal que $x \leq z \leq y$, per tot $x \in X$ i per tot $y \in Y$. Pel lema 5.37, aleshores $X \cap Y = \emptyset$ (ja que si $X \cap Y \neq \emptyset$, aleshores sí que existiria aquest element idempotent).
Ara, si afegim un nou element u a L, de manera que $X \cap Y = \{u\}$, en el tall (X, Y) trobarem un idempotent z.
Aquest plantejament el podem fer amb tots els talls i obtenim el següent resultat:

Proposició 5.40. *Sigui $\boldsymbol{L}$ una BL-cadena. Existeix una BL-cadena saturada $\boldsymbol{C}$ tal que $\boldsymbol{L}$ és submergible en $\boldsymbol{C}$.*

Passem a definir què és una suma ordinal de BL-cadenes, que generalitza la noció de suma ordinal de t-normes.

Definició 5.41. *Sigui $\langle I, \leq \rangle$ un conjunt totalment ordenat de manera que té un primer element, que anomenarem 0.*

Sigui $\{(L_i, \wedge_i, \vee_i, \&_i, \rightarrow_i, 0_i, 1_i)\}_{i\in I}$ *una família de BL-cadenes. Definim la suma ordinal de BL-cadenes com:*

$$\sqcup_{i\in I} C_i = (\dot\cup_{i\in I}(L_i - \{1_i\}) \cup \{1\}, \wedge, \vee, \&, \rightarrow, 0, 1)$$

de manera que $0 = 0_0$ *i* 1 *és un element nou que afegim i que és més gran que tots els altres.*
Per una qüestió de notació, escriurem $C_i = L_i - \{1_i\}$.
Definim l'ordre: $x \leq y$ *si i només si (*$x, y \in C_i$ *i* $x \leq_i y$*) o (*$x \in C_i$, $y \in C_j$ *i* $i < j$*) o* $y = 1$.
Podem definir aleshores $\&, \rightarrow$*:*

- $x\&y = \begin{cases} x\&_i y & si \quad x, y \in C_i \\ x & si \quad x \in C_i, y \notin C_i; x \leq y \\ y & si \quad y \in C_i, x \notin C_i; y \leq x \end{cases}$

- $x \rightarrow y = \begin{cases} 1 & si \quad x \leq y \\ x \rightarrow_i y & si \quad x, y \in C_i; y \leq x \\ y & si \quad x \in C_i, y \in C_j,\ i > j \ o \ x = 1 \end{cases}$

Obtenim que la suma ordinal de BL-cadenes és una BL-cadena.

El següent resultat ens caracteritza la BL-cadena saturada [5]:

Teorema 5.42. *Tota cadena saturada* C *es pot escriure com* $C = \sqcup_{i\in I} M_i$*, on* I *és un conjunt totalment ordenat amb màxim i mínim i cada* M_i *és una G-cadena, MV-cadena o P-cadena.*

A continuació, usant les diferents immersions (locals o totals) que tenim en el cas de les MV-cadenes, G-cadenes o $\prod$-cadenes, obtenim:

Teorema 5.43. *Tota BL-cadena és localment submergible en la classe de les àlgebres estàndards associades a t-normes contínues.*

Demostració:
Sigui $\mathbf{L}$=$(L, \wedge, \vee, \&, \rightarrow, 0, 1)$ una BL-cadena. Per la proposició 6.40 i el teorema 6.42, aleshores $\mathbf{L} \hookrightarrow \sqcup_{i\in I} B_i$, on cada B_i és una G-cadena, MV-cadena o $\prod$-cadena.
Sigui $\{a_1, ..., a_n, 0, 1\} \subseteq L$, aleshores existeix $J = \{0, j_1, ..., j_l\} \subseteq I$ de manera que $\{a_1, .., a_n, 0, 1\} \hookrightarrow \sqcup_{j\in J} B_j$. Tal i com hem vist als capítols anteriors, sabem que cada B_j (que és una G-cadena, MV-cadena o $\prod$-cadena) és localment submergible en l'àlgebra estàndard de Gödel, Lukasiewicz o producte, respectivament.
Volem veure que existeix una immersió $h : \{a_1, ..., a_n, 0, 1\} \hookrightarrow \sqcup_{j\in J}[0, 1]_{\&_j}$, on $\&_j = \wedge$ si B_j és una G-cadena, $\&_j = \odot$ si B_j és una MV-cadena i $\&_j = \cdot$ és una $\prod$-cadena. Prenem $h : \{a_1, ..., a_n, 0, 1\} \hookrightarrow \sqcup_{j\in J}[0, 1]_{\&_j}$ de manera que $a \mapsto h(a) = h_j(a)$ si $a \in B_j$ i $1 \mapsto 1$.
Com que cada h_j preserva l'ordre i la suma ordinal preserva l'ordre, aleshores h preserva l'ordre (i és una immersió). Vegem que preserva $0, \&, \rightarrow$ (les altres operacions són definibles a partir d'aquestes).

- $h(0) = h_0(0) = 0$, perquè $0 \in B_0$.

- Vegem que si $a_i \to a_j = a_k$, aleshores $h(a_i) \to h(a_j) = h(a_k)$.
  Cas 1: $a_i \leq a_j$
  Si $a_i \leq a_j$, aleshores $a_i \to a_j = 1$. Com que h preserva l'ordre, aleshores $h(a_i) \leq h(a_j)$. Per tant, $h(a_i) \to h(a_j) = 1 = h(1)$.
  Cas 2: $a_i \in B_{n_i}$, $a_j \in B_{n_j}$ amb $n_i > n_j$
  Com que $a_i \in B_{n_i}$, $a_j \in B_{n_j}$ amb $n_i > n_j$, aleshores $a_i \to a_j = a_j$. Com que h preserva l'ordre i $a_i > a_j$, $h(a_i) > h(a_j)$ i $h(a_i) \to h(a_j) = h(a_j)$ (ja que $h(a_i) \in [0,1]_{\&_{n_i}}$ i $h(a_j) \in [0,1]_{\&_{n_j}}$ amb $n_i > n_j$).
  Cas 3: $a_i, a_j \in B_{n_i}$ amb $a_i > a_j$
  Com que $a_i, a_j \in B_{n_i}$ i $a_i > a_j$, aleshores $a_k \in B_{n_i}$ i $h(a_i) \to h(a_j) = h_{n_i}(a_i) \to h_{n_i}(a_j) = h_{n_i}(a_i \to_{\&_{n_i}} a_j) = h_{n_i}(a_k) = h(a_k)$.
  Cas 4: $a_i = 1$ i $a_j \neq 1$
  Com que $1 > a_j$, aleshores $1 \to a_j = a_j$. Ara, $1 \to h(a_j) = h(a_j)$.

- Vegem que si $a_i \& a_j = a_k$, aleshores $h(a_i) \& h(a_j) = h(a_k)$.
  Cas 1: $a_i, a_j \in B_{n_i}$
  Si $a_i, a_j \in B_{n_i}$, aleshores $a_k \in B_{n_i}$ i, per tant, $h(a_i) \& h(a_j) = h_{n_i}(a_i) \& h_{n_i}(a_j) = h_{n_i}(a_i \&_{n_i} a_j) = h_{n_i}(a_k) = h(a_k)$.
  Cas 2: $a_i \in B_{n_i}$, $a_j \notin B_{n_i}$ amb $a_i \leq a_j$
  Sense pèrdua de generalitat, suposem $a_i \in B_{n_i}$, $a_j \notin B_{n_i}$ amb $a_i \leq a_j$ (per la commutativitat de &).
  Tenim que $a_i \& a_j = a_i$. Com que h preserva l'ordre $h(a_i) \leq h(a_j)$ i com que $h(a_j) \notin [0,1]_{\&_{n_i}}$, aleshores $h(a_i) \& h(a_j) = h(a_i)$.

Pel teorema de Mostert-Shields, tenim una t-norma contínua $\& = \sqcup_{j \in J} \&_j$ i per tant, $[0,1]_\& \cong \sqcup_{j \in J} [0,1]_{\&_j}$. Per tant, ja hem acabat. □

Teorema 5.44. *Teorema de completesa del càlcul BL respecte la classe de les àlgebres estàndards associades a t-normes contínues*
Siguin $\{\varphi_1, ..., \varphi_n, \varphi\} \subseteq Prop(X)$, $\varphi_1, ..., \varphi_n \vdash_{BL} \varphi$ *si i només si* $\varphi_1, ..., \varphi_n \models_{\&-cont} \varphi$

Demostració:
$\Rightarrow]$ Suposem primer que $\varphi_1, ..., \varphi_n \vdash_{BL} \varphi$. Pel teorema de completesa del càlcul BL respecte la classe de les BL-cadenes, aleshores $\varphi_1, ..., \varphi_n \models_{BLc} \varphi$. Ara, com que per tota t-norma contínua &, la seva àlgebra estàndard és, en particular, una BL-cadena, aleshores $\varphi_1, ..., \varphi_n \models_{\&-cont} \varphi$.
$\Leftarrow]$ Per veure la implicació contrària, raonarem pel contrarrecíproc. Suposem que $\varphi_1, ..., \varphi_n \nvdash_{BL} \varphi$. Pel teorema de completesa del càlcul BL respecte la classe de les BL-cadenes, aleshores $\varphi_1, ..., \varphi_n \not\models_{BLc} \varphi$. Per tant, existeix una BL-cadena $\mathbf{L}$ i una $\mathbf{L}$-interpretació I tal que $I(\varphi_1) = ... = I(\varphi_n) = 1$ i $I(\varphi) \neq 1$.
Tenim que $\mathbf{L} \hookrightarrow \sqcup_{i \in I} B_i$, on cada B_i és una G-cadena, MV-cadena o $\prod$-cadena. Prenem ara $Sub(\{\varphi_1, ..., \varphi_n, \varphi\})$ i anomenem $S = \{I(\psi) : \psi \in Sub(\{\varphi_1, ..., \varphi_n, \varphi\})\}$. Observem que S és un subconjunt finit de $\mathbf{L}$ i, pel teorema 5.43, existeix $h : S \hookrightarrow [0,1]_\&$, per a una certa t-norma &, de manera que h és una immersió que preserva les operacions. Prenem ara la $[0,1]_\&$-interpretació $I_h : Prop(X) \to [0,1]_\&$ de manera que

$$x \mapsto \begin{cases} h \circ I(x) & si \quad x \in Var(\{\varphi_1, ..., \varphi_n, \varphi\}) \\ 0 & altrament. \end{cases}$$

De forma anàloga als anteriors teoremes de completesa, per inducció, obtenim $I_h(\varphi_1) = ... = I_h(\varphi_n) = 1$ i $I_h(\varphi) \neq 1$. Per tant, $\varphi_1, ..., \varphi_n \not\models_{[0,1]_\&} \varphi$. □

6 Conclusions

Com a conclusió principal, m'agradaria destacar que el treball ha estat un procés que m'ha permès comprovar que, tot i que l'esquema de la demostració de la completesa dels càlculs de Gödel, Lukasiewicz, producte i BL respecte les seves àlgebres estàndard (en els tres primers casos) o respecte la classe de les àlgebres estàndards associades a t-normes contínues (en el cas de BL) és semblant, tenim parts diferenciades.

En tots els teoremes de completesa d'aquest treball, sempre hi hagut una implicació molt més senzilla i l'altra ha estat força més tècnica. Aquesta última implicació sempre l'he demostrada pel contrarrecíproc.

He començat introduint la semàntica de les BL-àlgebres i demostrant la completesa del càlcul BL respecte aquesta semàntica. En aquest capítol, he definit l'àlgebra de Lindenbaum-Tarski que ha jugat un paper clau. El fet de poder tractar els càlculs de Gödel, Lukasiewicz i producte com a extensions del càlcul BL m'ha permès demostrar la completesa d'aquests càlculs respecte les subclasses corresponents de forma anàloga a BL.

En el capítol de les BL-cadenes, les BL-àlgebres totalment ordenades, un cop he intoduït la seva lògica, he necessitat definir què és un filtre. Tot seguit, he vist que podem parlar indistintament de filtres i congruències i aleshores he pogut demostrar el Teorema de representació en BL-cadenes. Així, els diferents teoremes de completesa d'aquest capítol els he pogut demostrar de la mateixa manera que la completesa del càlcul BL respecte la classe de les BL-cadenes.

Arribats a aquest punt, ha començat la demostració dels teoremes de completesa que volíem veure en un inici.

Al càlcul de Gödel la completesa respecte l'àlgebra estàndard de Gödel és forta, però no és finitària. Atès que podem identificar una G-cadena amb un ordre lineal amb extrems i tot ordre lineal comptable amb extrems és submergible en $([0, 1], \leq)$ (com a conseqüencia d'uns teoremes que podem trobar a [2]), he pogut obtenir la demostració que buscava.

En canvi, per a la lògica de Lukasiewicz i producte hem utilitzat un resultat fruit de l'estudi de Gurevich i Kokorin, que afirma que tot grup abelià totalment ordenat és parcialment submergible en [0,1] [11]. En conseqüència, fruit de la caracterització de les MV-cadenes i les $\prod$-cadenes, en aquests casos, la completesa els càlculs que he obtingut ha estat forta finitària respecte les seves àlgebres estàndards.

Pel que fa a la lògica bàsica fuzzy, també he pogut obtenir que tota BL-cadena és localment submergible en la classe de les àlgebres estàndards associades a t-normes contínues. Aquí he fet ús principalment de la suma ordinal de BL-cadenes, d'un resultat que caracteritza les BL-cadenes saturades [5] i del teorema de Mostert-Shields [14]. Fruit d'això, he obtingut la completesa forta finitària del càlcul BL que proposà Hájek a [12] respecte la lògica fuzzy bàsica (la lògica de les t-normes contínues).

Finalment, com a conclusió de caire més personal, m'agradaria afegir que quan vaig contactar per primer cop amb el meu tutor, la lògica fuzzy m'era completament desconeguda. No sabia què era una t-norma, ni una R-implicació i encara menys una BL-àlgebra. Uns mesos més tard, puc afirmar que, tot i no ser-ne un expert, m'ha agradat endinsar-me en la branca de les lògiques multivalorades basades en t-normes contínues.

Referències

[1] Chang, C. C.; A New Proof of the Completeness of the Lukasiewicz Axioms. *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol.93 (1), p.74-80, 1959.

[2] Chang, C. C.; *Model Theory*, North-Holland, 1973.

[3] Cignoli, R. L. O.; D'Ottoviano, I. M. L.; Mundici, D.: *Algebraic Foundations of Many-valued Reasoning*, Kluwer Academic Publishers, 2000.

[4] Cignoli, R.; Esteva, F.; Godo, L.; Torrens, A.: Basic fuzzy logic is the logic of continuous t-norms and their residua. *Soft Comput 4*, 106-112, 2000.

[5] Cignoli, R.; Torrens, A.: Standard completeness of Hájek basic logic and decompositions of BL-chains. *Soft Comput 9*, 862-868, 2005.

[6] Dubois, D.; Esteva, F.; Godo, L.; Prade, H.: Chapter 6, Fuzzy-set Based Logic - An History-oriented Presentation of their Main Developments. *Handbook of the History of Logic. Volume 8: The Many Valued and Nonmonotonic Turn in Logic*, North-Holland, 2004.

[7] Dummett, M.: A propositional calculus with denumerable matrix. *J. Symb. Logic 24*, 97-106, 1959.

[8] Gispert, J.: Apunts Modelització Matemàtica de Formes de Raonament, capítol 3. Curs 2023-2024.

[9] Gödel, K.: Zum intuitionistischen Aussagenkalkül. *Anzeiger Akademie der Wissenschaften Wien, Math.-naturwissensch. Klasse 69*, 65-66, 1932.

[10] Gottwald, S.: *A Treatise on Many-Valued Logics, volume 9 of Studies in Logic and Computation*. Research Studies Press, Baldock, 2001.

[11] Gurevich, Y. S.; Kokorin, A. I. Universal equivalence of ordered Abelian groups. *Algebra i Logika 2*, 37-39, 1963.

[12] Hájek, P.: *Metamathematics of Fuzzy Logic*, Kluwer Academic Publishers, 1998.

[13] Lukasiewicz, J.; Tarski, A.: Untersuchungen über den Aussagenkalkül. *Comptes Rendus de la Siciete des Sciences et des Letters de Varsovie, cl. iii 23*, 1-21, 1930.

[14] Mostert, P. S.; Shields, A. L.: On the structure of semigroups on a compact manifold with boundary. *Annals of Math. 65*, 117-143, 1957.

[15] Mundici, D.: Interpretation of AF C*-algebras in Lukasiewicz's sentential calculus. *Journal of Functional Analysis 65*, 179-193, 1986.

[16] Sankappanavar, H. P.: De Morgan Semi-Heyting and Heyting Algebras, https://arxiv.org/pdf/1807.00268, 2018.

[17] Zadeh, L. A.: Fuzzy sets, *Information and Control*, 8, 338-353, 1965.