

Artigo

Proporcionalidad y porcentajes en la Educación Básica: análisis y propuesta de mejora de una unidad didáctica

Proportionality and percentages in Basic Education: analysis and proposal for the improvement of a didactic unit

Proporcionalidade e porcentagens na Educação Básica: análise e proposta de melhora de uma unidade didática

Gara Acedo Arzola¹
Adriana Breda²
Alicia Sánchez³
Valderez Marina do Rosário Lima⁴

¹Instituto Narcís Monturiol da Barcelona, Barcelona, Catalunya, Espanha

^{2,3}Universitat de Barcelona, Barcelona, Catalunya, Espanha

⁴Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Rio Grande do Sul, Brasil

Resumen

Este trabajo tiene como objetivo describir y analizar la reflexión sistemática, realizada por una futura docente sobre su propia práctica, utilizando los Criterios de Idoneidad Didáctica al implementar, evaluar y rediseñar una unidad didáctica sobre proporcionalidad y porcentajes aplicada a un grupo de estudiantes de primer año de la Educación Secundaria Obligatoria española (11-12 años). El análisis cualitativo del caso indica que la evaluación de la unidad didáctica desarrollada por la futura docente es bastante equilibrada, ya que se basa en todos los componentes de los Criterios de Idoneidad Didáctica. En consecuencia, al otorgar peso al uso de los criterios en el rediseño de la unidad, la futura docente pone más énfasis en: a) el epistémico, en particular, creando estrategias para reducir posibles ambigüedades matemáticas; b) el cognitivo, mejorando el diagnóstico de conocimientos previos de los estudiantes, diseñando tareas de adecuación curricular a las necesidades individuales de los alumnos e incorporando el proceso de autoevaluación para lograr los aprendizajes pretendidos y; c) el mediacional, en particular, adecuando el uso del tiempo necesario para el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje en la resolución de tareas. Se concluye que este tipo de resultado se puede observar en otras investigaciones que versan sobre la reflexión que hace el docente sobre su propia práctica al utilizar la herramienta Criterios de Idoneidad Didáctica.

Abstract

¹ Docente do Instituto Narcís Monturiol da Barcelona. ORCID id: <https://orcid.org/0000-0003-3616-5176>. E-mail: gacedo@xtec.cat

² Docente na Faculdade de Educação da Universitat de Barcelona. Doutora em Educação em Ciências e Matemática. Orcid: <https://orcid.org/0000-0002-7764-0511>. E-mail: adriana.breda@ub.edu

³ Docente na Faculdade de Educação da Universitat de Barcelona. Doutora em Educação Matemática. Orcid: <https://orcid.org/0000-0001-6569-6828> E-mail: asanchezb@ub.edu

⁴ Docente na Faculdade de Educação da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul. Doutora em Educação. Orcid: <https://orcid.org/0000-0002-2676-5840> E-mail: valderez.lima@puers.br



This work aims to describe and analyse the systematic reflection, carried out by a future teacher on her practice when she uses the Didactic Suitability Criteria to implement, evaluate and redesign a didactic unit on proportionality and percentages applied in Basic Education (11-12 years old). The qualitative analysis of this case indicates that the evaluation of the didactic unit developed by the future teacher is quite balanced, as it is based on all the components of the Didactic Suitability Criteria. As a result, when assigning weight to the use of criteria in the redesign of the unit, the future teacher places more emphasis on these dimensions: a) epistemic suitability, in particular, creating strategies to reduce possible mathematics ambiguities; b) cognitive suitability, improving the diagnosis of previous knowledge, designing tasks of curricular adaptation to the individual needs of students and incorporating the self-assessment process to achieve the intended learning and; c) mediational suitability, in particular, adapting the use of the time necessary for the development of the teaching and learning process in solving tasks. It is concluded that this type of result can be observed in other investigations that deal with the teacher's reflection on his practice in teacher training when using the didactic suitability tool.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo descrever e analisar a reflexão sistematizada, realizada por uma futura professora acerca de sua própria prática, quando utiliza os Critérios de Adequação Didática ao implementar, avaliar e redesenhar uma unidade didática sobre proporcionalidade e porcentagens aplicada à uma turma de primeiro ano da Educação Secundária Obrigatória espanhola (11-12 anos). A análise qualitativa do caso indica que a valoração da unidade didática desenvolvida pela futura professora é bastante equilibrada, pois é baseada em todos os componentes dos Critérios de Adequação Didática. Como resultado, ao atribuir peso ao uso dos critérios no redesenho da unidade, a futura professora atribui maior ênfase nas adequações: a) epistêmica, em particular, criando estratégias para reduzir possíveis ambiguidades matemáticas; b) cognitiva, aperfeiçoando o diagnóstico dos conhecimentos prévios dos alunos, desenhando tarefas de adaptação curricular às necessidades individuais dos estudantes e incorporando o processo de autoavaliação para o alcance das aprendizagens pretendidas e; c) de meios, em particular, adequando o uso do tempo necessário para o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem na resolução das tarefas. Conclui-se que esse tipo de resultado pode ser observado em outras pesquisas que tratam da reflexão que o professor faz sobre a sua própria prática ao utilizar a ferramenta Critérios de Adequação Didática.

Palabras clave: Práctica reflexiva, Formación del profesorado, Enseñanza de las matemáticas, Educación básica.

Keywords: Reflective practice, Teacher training, Mathematics teaching, Basic education.

Palavras-chave: Prática reflexiva, Formação de professores, Ensino de matemática, Educação básica.

Introducción

Tal y como se concreta en diversas investigaciones dentro del campo de la Educación Matemática, uno de los puntos clave en términos de obtener una mejora en la calidad de los procesos de aprendizaje y enseñanza es estudiar, analizar y delimitar cuáles son los conocimientos y competencias que debe desarrollar un docente a lo largo de su vida profesional (Godino et al., 2017; Hill;

Ball; Schilling, 2008; Rowland; Huckstep; Thwaites, 2005; Schoenfeld; Kilpatrick, 2008; Shulman, 1986).

Con este fin, durante los últimos años se ha establecido como un beneficioso ejercicio la posterior reflexión sobre la propia práctica docente (Breda; Pino-Fan; Font, 2017; Davis, 2020; Elliott, 1993; Fortuny; Rodríguez, 2012; Hart; Alston; Murata, 2011; Llinares, 2012; Perrenoud, 2004; Schön, 2017; Torres Corona, 2002). Bajo el marco teórico del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción Matemáticos (EOS) (Godino; Batanero; Font, 2007, 2019), y pretendiendo desarrollar una competencia reflexiva y crítica en los profesores de matemáticas, surgen como una interesante herramienta metodológica para pautar dicho ejercicio los Criterios de Idoneidad Didáctica (CID).

Así, como parte última del período de formación, y siendo esta práctica provechosa tanto para ellos mismos como para los propios formadores (Pochulu; Font; Rodríguez, 2016), se propone a los futuros docentes de matemáticas llevar a cabo, basándose en los CID, un autoanálisis crítico sobre el desarrollo e implementación de una unidad didáctica (UD) previamente diseñada e implementada (Breda, 2020; Esqué De Los Ojos; Breda, 2021; Font; Breda; Pino-Fan, 2017; Hernández-García; Breda, 2022). Con el objetivo de ilustrar y verificar lo establecido, este trabajo recoge y analiza las principales cuestiones y conclusiones extraídas por una futura profesora durante la valoración y rediseño de su UD sobre proporcionalidad y porcentajes, ejercicio guiado acorde a los CID.

En la siguiente sección se detalla el marco teórico donde surgen los CID, y se analiza la complejidad y versatilidad en términos matemáticos del eje conceptual que nos ocupa: la proporcionalidad. Seguidamente, en la sección tres, se describen los aspectos metodológicos en los que se basa este estudio, además de la naturaleza y el contexto en el que se impartió la UD. Ya en la cuarta sección se hace el análisis sobre el ejercicio reflexivo de la futura docente para, finalmente, concluir con las mejoras propuestas para el rediseño de la UD y con una serie de consideraciones sobre los resultados del estudio.

2. Marco teórico

El Enfoque Ontosemiótico y los Criterios de Idoneidad Didáctica

Para Godino et al. (2017), el EOS es un sistema teórico que, apoyándose en presupuestos antropológicos y semióticos sobre las matemáticas y, adoptando principios didácticos de tipo socio-constructivista e interaccionista para el estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje, trata de integrar diversas aproximaciones y modelos teóricos usados en la investigación en Educación Matemática. Dentro del conjunto de nociones teóricas que articulan el EOS, en este trabajo nos centraremos en la idoneidad didáctica, que emerge como el criterio general, relativo a las circunstancias contextuales, de adecuación y pertinencia de las acciones de los agentes educativos, de los conocimientos puestos en juego y de los recursos usados en un proceso de estudio matemático (Godino, 2013). En este contexto surgen los CID, basándose en las diferentes facetas que incluye el modelo de conocimiento didáctico-

matemático⁵, establecido por el EOS (Godino et al., 2017): 1) Idoneidad epistémica. Conocimiento didáctico-matemático del profesor sobre el propio contenido. 2) Idoneidad cognitiva. Referente a cómo los estudiantes aprenden, razonan y entienden las matemáticas, y a cómo progresan. 3) Idoneidad interaccional. Acerca del ejercicio docente: organización de las tareas, resolución de dificultades de los estudiantes e interacciones que se puede establecer en el aula. 4) Idoneidad mediacional. Dominio de recursos apropiados y de distinta índole (tecnológicos, materiales y temporales) para potenciar el aprendizaje de los estudiantes. 5) Idoneidad afectiva. Sobre los aspectos emocionales, actitudinales y creencias de los estudiantes con relación a los objetos matemáticos y al propio proceso de estudio. 6) Idoneidad ecológica. Sobre las relaciones del contenido matemático con otras disciplinas, la inclusión de técnicas innovadoras, y los factores curriculares y sociolaborales que condicionan los procesos de instrucción matemática.

Así pues, podemos definir los CID como una serie de principios que pretenden determinar el grado en que un proceso de enseñanza y aprendizaje matemático reúne las características que permiten calificarlo como idóneo o adecuado bajo el EOS, que tienen además una doble funcionalidad: guiar estos procesos y valorar sus implementaciones (Breda; Font; Pino-Fan, 2018). En la siguiente sección, conforme se avanza en el análisis de los resultados, se detallan los criterios, dando una breve descripción de cada principio de idoneidad. También se incluye su desglose en diferentes componentes o indicadores observables, descritos por Breda y Lima (2016) y Breda, Pino-Fan y Font (2017), y necesarios para la operatividad de los CID. Muestra de ello es la unanimidad acerca de que todo proceso de enseñanza y aprendizaje debe implementar “buenas matemáticas” en términos epistémicos, pero ¿qué entiende cada docente de esta descripción?

Tanto los componentes como los indicadores de los criterios de idoneidad didáctica se han confeccionado teniendo en cuenta las tendencias, los principios y los resultados de la investigación en el área de Didáctica de las Matemáticas (Font; Breda; Seckel, 2017). En particular, para la idoneidad epistémica se ha tenido en cuenta un principio fundamental del EOS que, con los matices propios de cada enfoque, es (o puede ser) asumido por otros enfoques teóricos del área. Nos referimos al principio que se puede formular de la siguiente manera: los objetos matemáticos emergen de las prácticas, lo cual conlleva su complejidad (Font; Godino; Gallardo, 2013; Rondero; Font, 2015). De este principio se deriva un componente (representatividad de la complejidad del objeto matemático) cuyo objetivo es que se tenga en cuenta, dentro de lo posible, una muestra representativa de dicha complejidad en el diseño y rediseño de las secuencias didácticas para la enseñanza de un determinado objeto matemático (Pino-Fan et al., 2013).

El componente Representatividad de la complejidad de los objetos matemáticos (entendido como pluralidad de significados parciales) se refiere al grado de representatividad e interconexión de los significados institucionales implementados (o pretendidos) respecto de un significado de referencia (Giacomone; Godino; Beltrán-Pellicer, 2018). Cada uno de estos significados permite resolver tipos de problemas diferentes, por lo cual, si se quiere enseñar

⁵ Conjunto de conocimientos más profundos de la matemática y su enseñanza que debe dominar un profesor, diferente del que adquieren los estudiantes, que se superpone al conocimiento matemático *per-se* (Godino et al., 2017).

una muestra representativa de significados parciales es necesario presentar una muestra variada de problemas (Font; Breda; Seckel, 2017).

La proporcionalidad como objeto matemático y su complejidad

Trabajar la proporcionalidad es una tarea muchas veces difícil de delimitar. Esto es consecuencia del amplio abanico de significados parciales y diferentes representaciones que, de forma histórica y según el contexto, se han atribuido a que dos magnitudes o cantidades sean proporcionales. De hecho, muchas de estas representaciones establecen continuas conexiones entre diferentes bloques del currículum matemático de la Educación Secundaria Obligatoria (ESO)⁶. Tal y como apuntan Torres y Deulofeu (2020), la proporcionalidad la podemos encontrar y relacionar con fracciones, decimales y porcentajes (bloque de Numeración y cálculo), con la función lineal (bloque de Relaciones y cambio), con la medida y relación entre magnitudes (bloque de Medida), con la proporcionalidad geométrica (bloque de Espacio y forma) o con la regla de Laplace y los diagramas gráficos de sectores y barras (bloque de Estadística y azar). De forma generalizada y en términos epistémicos, podemos clasificar estas distintas concepciones, pero interconectadas, en cinco grupos diferentes, según su enfoque (Burgos et al., 2020; Esqué De Los Ojos; Breda, 2021).

Concepción informal-cualitativa, centrada en la comparación multiplicativa de las cantidades que intervienen en los problemas y en la comparación perceptiva, por ejemplo, de la semejanza de formas geométricas.

Concepción clásica de la Antigua Grecia. La definición 20 del libro VII de los Elementos de Euclides (Joyce, 1998) establece que: “Cuatro números son proporcionales cuando lo primero es lo mismo múltiple o la misma parte o las mismas partes del segundo que lo tercero es del cuarto”. Este hecho se denotaba como $a : b = c : d$ (a es a b lo que c es a d).

Concepción geométrica. El teorema de Tales y la semejanza de figuras planas son los ejes teóricos fundamentales en los cuales se articula esta representación de la proporcionalidad.

Concepción aritmética y algebraica. Como formalización de la concepción clásica, surge la representación de la proporcionalidad como relación aritmética y/o algebraica: una proporción es una igualdad de razones (fracciones).

Concepción funcional. La relación proporcional entre dos magnitudes expresada formalmente como una función lineal.

Finalmente, refiriéndonos a la faceta del indicador representatividad que apunta a la propuesta de tareas que requieren razonamientos donde se involucra la proporcionalidad, se pueden distinguir, bajo el criterio de Cramer, Post y Graeber (1993), tres tipos de problemas: De valor faltante: dadas dos magnitudes y conociendo tres valores de estas, se debe encontrar un valor desconocido; De comparación: determinar qué pareja de magnitudes tiene una razón de proporcionalidad mayor o si estas son iguales; Cualitativos de predicción o comparación: con una estructura similar a los anteriores, se pueden resolver sin que sean necesarios cálculos numéricos.

⁶ Sistema educativo español de enseñanza secundaria básica, obligatoria para alumnos de entre 12 y 16 años.

3. Metodología y naturaleza de la unidad didáctica

Esta investigación, de abordaje cualitativa, se enfoca en el estudio de un caso que analiza la reflexión que hace una profesora en ejercicio (estudiante de un máster de formación de profesores de matemáticas de secundaria) de su propia práctica al utilizar los CID para valorar y rediseñar una UD sobre proporcionalidad y porcentajes.

La reflexión que hizo la profesora se incluyó en su trabajo de fin de máster (TFM), que es producto de un análisis de la UD implementada en la asignatura de prácticas profesionales. Es decir, en el Máster Profesional para Formación de Profesores de Matemáticas de Secundaria de Catalunya, hay una asignatura de *Prácticum*, donde el futuro profesor pone en juego los conocimientos adquiridos en el curso, al implementar en la educación básica una unidad didáctica. Luego, en la asignatura *Innovación e Iniciación a la Investigación en Educación Matemática* el futuro profesor recibe herramientas para desarrollar y ordenar la reflexión (descripción, análisis, valoración y rediseño) de la unidad implementada. Finalmente, en la asignatura *Trabajo Fin de Máster* (TFM) se presenta, documentalmente, dicha reflexión. Una de las herramientas para organizar la reflexión son los CID, vistos como conceptos que son generados en espacios controlados a partir de consensos grupales, en lugar de hacerlo como principios ya creados. Así, son presentados a partir del siguiente modelo de instrucción (Esqué De Los Ojos; Breda, 2021; Hernández-García; Breda, 2022): Análisis de casos (sin teoría); Emergencia de diferentes tipos de análisis didáctico (descriptivo, explicativo y valorativo); Tendencias en la enseñanza de las matemáticas; Teoría (el constructo CID); Lectura y comentario de partes de algunos trabajos de fin de máster de cursos anteriores; Prácticas y Trabajo de fin de máster.

La intervención se llevó a cabo en un grupo de alumnos de primer curso de la ESO (11-12 años) de un instituto público de Barcelona. Es importante matizar que dicho centro tiene implementadas metodologías globalizadas en cuanto a contenidos, por lo que la UD se implementó en la asignatura Matemáticas en inglés, y estaba enmarcada en un proyecto anual con una aplicación al mundo real directa: el diseño de una red de carril bici para conectar los diferentes barrios colindantes con el instituto. Esta naturaleza interdisciplinaria y enfocada a una contextualización explícita de las matemáticas, condujo a diseñar la UD como un pequeño proyecto autocontenido (titulado *Puzzle of maps*) que pretendía que el alumnado conociera y trabajara con diferentes datos demográficos de su entorno. Así pues, aunque girara entorno al estudio de la proporcionalidad y los porcentajes, la UD incluía otros contenidos y competencias relacionadas con el cálculo de densidades, con las magnitudes y la medida; y con la recogida y representación de datos.

4. Análisis y resultados: valoración de la UD y propuesta de mejora

Con el objetivo de organizar la reflexión sobre la propia práctica docente y proponer un rediseño de la UD, la profesora hace uso de los CID y su desglose en componentes e indicadores. Para la aplicación de esta herramienta, se ha atribuido una valoración sobre 5 a cada uno de los componentes propuestos, para luego calcular la media aritmética de cada uno de los seis CID. Por cuestiones de espacio, presentamos con detalle las reflexiones y valoraciones

relacionadas a las idoneidades epistémica y cognitiva en cuanto que las demás se explican de forma resumida.

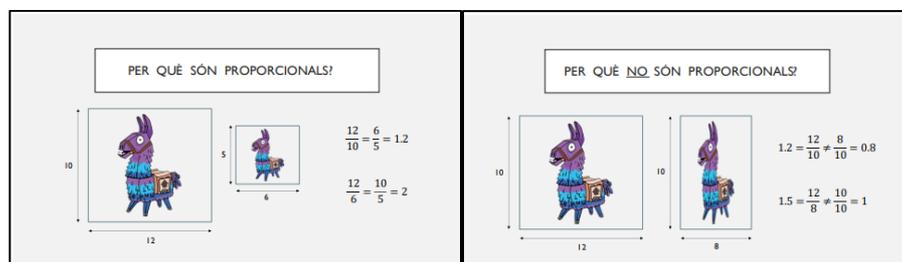
Idoneidad epistémica

El objetivo del principio de *idoneidad epistémica* es discernir sobre la calidad en términos matemáticos del desarrollo de la UD. En otras palabras, se pretende valorar el grado de riqueza a la hora de enseñar matemáticas, diferenciando cuatro indicadores: la presencia de *Errores*, las posibles *Ambigüedades* que pueden inducir a confusión, la *Riqueza de los procesos* implementados y la *Representatividad de la complejidad* de los conceptos trabajados.

Con relación al primer indicador, la profesora argumenta no haber incurrido en errores de cariz matemático durante la práctica docente implementada, por lo que da una valoración de 5 sobre 5. Sin embargo, en cuanto a las ambigüedades, y asumiendo que, debido a su naturaleza poco explícita y a la dificultad de discernir su alcance, el número pudo ser mayor, la profesora da a este indicador una valoración de 2/5. Bajo su criterio y reflexión, esta detecta al menos tres situaciones claras en las que su práctica pudo constatar una posible confusión en el alumnado.

1. En una de las actividades iniciales se pretendía que los alumnos argumentaran si varias parejas de magnitudes eran proporcionales. El hecho de preguntar simplemente sobre si estas parejas tenían “relación” entre si comportó que muchos alumnos respondieran siempre de forma afirmativa, deduciendo, por ejemplo, que la altura y la edad de una persona estaban relacionadas. La profesora, en su reflexión, argumenta que, pese a no ser una afirmación falsa, dado el contexto de introducción de la proporcionalidad a nivel intuitivo, pudo detectar que diversos alumnos se mostraron contrariados al discutir posteriormente que esa no era la respuesta esperada.
2. A la hora de formalizar la idea intuitiva que mostraron los alumnos en debate sobre un caso de proporcionalidad geométrica, no se especificó explícitamente a qué hacían referencia los números usados en la Figura 1.

Figura 1 – Diapositiva proyectada en el aula como primer acercamiento al concepto de proporcionalidad geométrica.

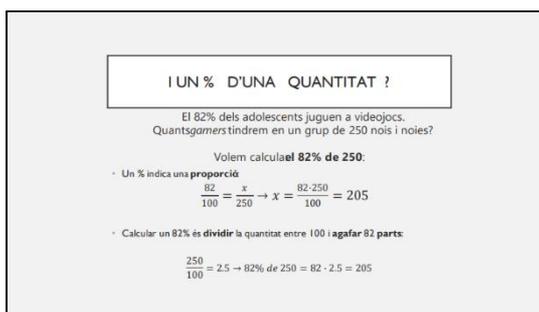


Fuente: (Acedo Arzola, 2021).

Como consecuencia, algunos alumnos retuvieron que esta era la única manera para comprobar que dos imágenes fueran proporcionales (olvidando el criterio equivalente referente al mantenimiento de los ángulos), y, además, que era posible que, para dos imágenes proporcionales, unas de las razones fueran iguales pero las otras no (bases proporcionales, pero no alturas).

1. Durante una sesión sobre porcentajes, se contextualizó la explicación con un ejemplo. Dado que ya se había introducido previamente la representación icónica de fracciones y porcentajes (a través de cuadrículas), la profesora quiso improvisar una representación en la pizarra del problema planteado (Figura 2). Al percatarse que tardaría demasiado en dibujar los 100 cuadrados para después contar y pintar 82, se dio una representación aproximada, dibujando 10 y pintando 8. Además de no corresponderse con la fracción que indicaba el porcentaje, la representación dada no ilustraba el hecho que se quería aclarar: calcular el porcentaje de una cantidad (250 en este caso) es equivalente a dividir el total de los cuadrados entre 100, obteniendo agrupaciones de 2.5 cuadrados, para luego seleccionar el número que el porcentaje nos indica: 82. La profesora advierte que este episodio pudo haber generado incomprensión en el alumnado, principalmente en la conversión de representaciones (fraccionaria-icónica).

Figura 2 – Diapositiva proyectada en el aula como ejemplo de cálculo de un porcentaje de una cantidad dada.



Fuente: (Acedo Arzola, 2021).

En relación con la riqueza de procesos, la profesora, en su reflexión, especifica una serie de procesos indicadores y sus descripciones, los cuales garantizan que una UD sea rica a la hora de trabajar competencias matemáticas (Font; Rubio, 2017). Así pues, tal y como se detalla en la Tabla 1, se hace una valoración en términos de la presencia de estos procesos a lo largo del desarrollo de la UD.

Tabla 1 – Descripción y presencia en la UD de los procesos indicadores de riqueza.

Proceso	Descripción	Presencia en la UD
Comunicación	Usar correctamente el lenguaje matemático (escrito y oral), de forma clara y entendedora para cualquier público.	Constante fomento de una expresión matemática de calidad en todas las actividades.

Exploración y experimentación	Observar y analizar previamente los posibles resultados y resoluciones de una tarea propuesta.	Únicamente en tres actividades.
Formulación de conjeturas	Plantear y hacer hipótesis de cariz matemático general o concreto a la tarea propuesta.	Inexistente.
Argumentación	Discutir, contrastar y razonar las afirmaciones que se dan con justificaciones matemáticas.	La mayoría de las actividades demandaban una argumentación y una justificación (se preguntaba "¿Por qué?"). Aun así, en términos intuitivos y no formales.
Resolución de problemas	Mantener una actitud de investigación en torno al problema planteado. Usar herramientas y estrategias diversas para encontrar una resolución de este.	La resolución de problemas y actividades diversas de forma autónoma estuvo presente en la totalidad de las sesiones de la UD.
Contextualización	Resolver problemas matemáticos contextualizados en el mundo real y la vida cotidiana.	Prácticamente todos los problemas eran contextualizados en entornos cotidianos y/o conocidos por el alumnado.
Interpretación y análisis	Comprender y extraer conclusiones de las respuestas obtenidas durante la resolución de problemas.	La mayoría de las actividades no promovían este proceso de forma autónoma. Algunas de ellas se pudieron debatir en el gran grupo a posteriori de su resolución, haciendo un análisis conjunto para así interpretar los resultados obtenidos individualmente. Por falta de tiempo, la única actividad que tenía esta intención explícita, no se pudo desarrollar de forma satisfactoria.
Conexiones	Relacionar diferentes áreas y conocimientos matemáticos, así como establecer vínculos con otras asignaturas.	Constante relación con temas matemáticos trabajados previamente (geometría plana, cálculo fraccionario, unidades de medida).

Modelización	Traducir un problema en contexto real a lenguaje matemático usando diversas técnicas, con el objetivo de dar una respuesta a la cuestión planteada.	Prácticamente inexistente, aun siendo el principal objetivo de la UD hacer una introducción al potencial de las matemáticas como herramienta modelizadora.
Institucionalización	Asumir los conocimientos adquiridos como válidos para el resto del curso.	Insuficiente.

Fuente: (Acedo Arzola, 2021)

La profesora concluye que la UD presenta una riqueza de procesos media: cuatro de ellos gozan de una fuerte presencia (Comunicación, Resolución de problemas, Contextualización y Conexiones), tres se encuentran en camino de mejorar (Exploración y experimentación, Argumentación e Interpretación y análisis) y tres se presentan insuficientes (Formulación de conjeturas, Modelización e Institucionalización), uno de ellos totalmente inexistente. En particular, resalta la necesidad de prestar especial atención al proceso de modelización, puesto que siendo uno de los procesos fundamentales para poder garantizar la enseñanza de buenas matemáticas, no se le da la importancia suficiente. En este sentido, considera trabajar más en actividades donde se fomente la exploración, la argumentación y la interpretación, puesto que estos procesos llevan como consecuencia directa un espíritu modelizador. La institucionalización de la proporcionalidad es una cuestión que también considera la profesora que debería incorporarse en la UD. Si bien es cierto que constantemente se establecen relaciones y conexiones con otras áreas de las matemáticas y asignaturas, afirma que no se remarcó ni verbalizó suficientemente tal transversalidad. Como valoración final de este indicador, la profesora le asigna 3/5.

Finalmente, sobre el indicador que hace referencia a la representatividad, en cuanto al tratamiento de los diferentes significados parciales y sus interconexiones, la profesora afirma que en la UD se pone de manifiesto en un alto grado. Justifica que pudo cubrir prácticamente en totalidad las diferentes representaciones que la proporcionalidad emana como concepto. A pesar de que la concepción dentro del paradigma de las matemáticas griegas no es el punto de partida ni la notación que se usa en la UD, la profesora argumenta que la forma clásica de la Antigua Grecia de establecer la proporcionalidad entre números es central en el desarrollo de las sesiones. Prueba de ello es la primera definición no intuitiva que se presenta a los alumnos, la cual viene dada a partir de la proporción como igualdad de razones. De hecho, a pesar de que encontremos la definición clásica de proporción numérica en el libro VII (dedicado a la aritmética), en el libro V (dedicado a las magnitudes) de los Elementos de Euclides encontramos las definiciones 5 y 6, que, respectivamente, establecen (Oller Marcén; Gairín Sallán, 2013, n. p):

Se dice que dos magnitudes están en la misma razón, la primera a la segunda y la tercera a la cuarta, cuando, si se toma cualquier equimúltiple del primero y del tercero, y cualquier equimúltiple del segundo y del cuarto, los primeros equimúltiples por igual superan, son iguales o iguales a estos últimos equimúltiples respectivamente tomados en la orden correspondiente;

y “Denominamos proporcionales las magnitudes que tienen la misma razón”. Así pues, la profesora argumenta que, pese a no ser explícito, la representación clásica es precisamente el eje en el que sustenta matemáticamente la UD. Aun así, apunta que se podría haber ampliado ligeramente incluyendo el contexto histórico, puesto que paralelamente al desarrollo de la UD, el alumnado se encontraba trabajando la Antigua Grecia.

En referencia a la concepción geométrica, si bien se reconoce no haber tratado formalmente ni haberse dado las definiciones, como ya se ha indicado previamente analizando las ambigüedades, la primera noción intuitiva de proporcionalidad con la cual se introdujo la UD fue a través de imágenes que, al ampliarlas, mantenían la misma proporción. Siguiendo este hilo conductor se llegó al concepto de escala a través de mapas, concebidos como figuras semejantes al mundo si este fuera plano e, intentando dar un paso más allá, también se hizo una reflexión sobre por qué el perímetro y el área de dos figuras geométricas planas no son proporcionales. Finalmente, la actividad de ampliación de la sesión final estuvo dedicada a dar una primera idea de la proporción áurea como proporción geométrica en lo referente a segmentos, rectángulos y espirales, intentando dar una visión histórica clásica y divulgativa de la proporcionalidad en contextos no matemáticos.

La representación aritmética y algebraica en términos de conceptualización es la que, según el criterio de la profesora, más ha aparecido a lo largo de la UD. El cálculo de la cuarta proporcional y la obtención de un valor desconocido de una tabla proporcional mediante la resolución de una ecuación, de un producto cruzado, la aplicación de una regla de 3 o una reducción a la unidad, se realizaron diariamente. Incluso en el tratamiento de los porcentajes también se dio protagonismo a esta representación y, por lo tanto, al método de cálculo sobre una cantidad dada correspondiente. De esta forma se dejaron atrás otros procedimientos de cálculo que no recurren a la resolución de una ecuación con incógnita y únicamente en un ejercicio de ampliación se plantearon alternativas más prácticas. En lo referente a los porcentajes, a lo que sí se le dio una gran relevancia es a las diferentes representaciones que estos admiten (fraccionaria, decimal e icónica), tratando implícitamente la proporción como equivalencia de fracciones.

La concepción funcional de la proporcionalidad no fue una cuestión trabajada en el aula, principalmente porque, según indica la profesora, el alumnado todavía no conocía el concepto de función. A pesar de esto, sí que se trabajó informalmente esta representación, tanto en el caso de discutir si dos magnitudes son directa o inversamente proporcionales (Figura 3), como para decidir si dos magnitudes no lo son (a través de un ejercicio sobre la relación entre el perímetro y el área de figuras planas, que se generalizó a partir de la expresión cuadrática que aparece en el cálculo del área).

Figura 3 – Diapositivas proyectadas en el aula con el objetivo de dar criterios para discernir la existencia de una relación de proporcionalidad.

COM PODEM COMPROVAR QUE DUES MAGNITUDS SÓN DIRECTAMENT PROPORCIONALS ?

EXEMPLE. Un corredor avança a 3 m/s. La distància recorreguda segons passa el temps és:

temps (s)	1	2	3	...	6	...	24	...
distància (m)	3	6	9	...	18	...	72	...

LA VELOCITAT ÉS LA RAÓ ENTRE LES MAGNITUDS DISTÀNCIA I TEMPS

$$velocitat = \frac{distància}{temps}$$

$$temps = \frac{distància}{velocitat}$$

Temp: 1 hora
 $v = \frac{10 \text{ km}}{1 \text{ h}} = 10 \text{ km/h}$

Temp: 30 minuts = 0.5 hores
 $v = \frac{10 \text{ km}}{0.5 \text{ h}} = 20 \text{ km/h}$

Velocitat = 40 km/h
 $t = \frac{10 \text{ km}}{40 \text{ km/h}} = 0.25 \text{ h} = 15 \text{ min}$

Velocitat = 50 km/h
 $t = \frac{10 \text{ km}}{50 \text{ km/h}} = 0.2 \text{ h} = 12 \text{ min}$

Fuente: (Acedo Arzola, 2021).

En cuanto a la naturaleza del tipo de actividades propuestas, la profesora observa que, a pesar de que en la UD se proponen diferentes tipos de actividades, la mayoría se pueden considerar como problemas de cálculo del valor faltante, siendo menos frecuentes los cualitativos (tanto predictivos o comparativos) o los de comparación, de los cuales únicamente se ha encontrado un único ejercicio. Así pues, asume que, para trabajar los diferentes significados y concepciones previamente mencionadas, como para poder interrelacionarlas, es importante resolver problemas de diferente naturaleza. Ya que, en general, cada significado lleva asociado un tipo de problemas a resolver, por lo que es imprescindible que, con el objetivo de abordar en su totalidad la complejidad de la significación de cualquier objeto matemático, haya una gran variedad de actividades. La profesora considera urgente incorporar más variedad de procedimientos de cálculo, así como de tipos de actividades en referencia a su naturaleza, sobre todo problemas comparativos. Con todo, concluye asignando una valoración a este indicador de 4/5.

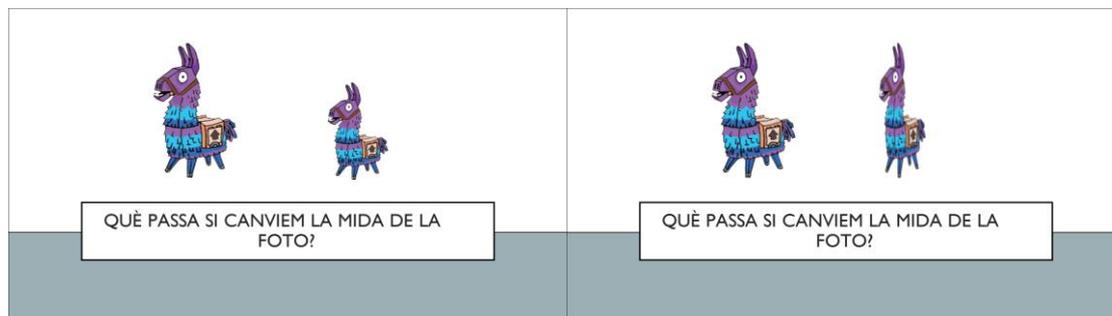
La valoración media de 3.5/5 de la idoneidad epistémica la podemos entender como una calidad de las matemáticas impartidas media, con un amplio margen de mejora. La profesora hace hincapié en un esfuerzo futuro por tratar de forma consciente y exhaustiva las posibles ambigüedades, intentado paliar su efecto adverso con una planificación cuidadosa, minimizando los inevitables momentos de improvisación durante la práctica docente.

Idoneidad cognitiva

El objetivo del principio de idoneidad cognitiva es valorar el grado de eficiencia de la UD en términos del grado de aprendizaje logrado por parte del alumnado. Se pretende identificar las posibles carencias o mejoras en el diseño original de las actividades propuestas en función de indicadores como el tratamiento de los *Conocimientos previos*, la *Adaptación curricular a las diferencias individuales*, la evaluación como herramienta de apropiación del *Aprendizaje*, y la activación de *Procesos de alta demanda cognitiva*.

Para que el aprendizaje sea significativo y se logren los objetivos establecidos, es importante conocer los conocimientos previos del alumnado antes de comenzar con la implementación docente de una nueva temática (Ausubel, 1997). Con este objetivo, y sin contexto previo, la profesora plantea como primera actividad un debate con todo el grupo realizando la pregunta: “¿Qué significa que dos imágenes sean proporcionales?”. Con la ayuda del material de apoyo (Figura 4), se ilustró como se puede cambiar la medida de una fotografía preservando o no la relación entre sus dimensiones y, entre todos, se construyó una primera definición intuitiva del concepto *proporción*.

Figura 4 – Diapositivas proyectadas en el aula: cambio de medida manteniendo y sin mantener la proporción geométrica.



Fuente: (Acedo Arzola, 2021).

Puesto que la actividad fue muy interactiva, la profesora asegura que pudo identificar cuáles eran los puntos en los que prestar más atención. A continuación, los alumnos debían decidir si dos magnitudes son proporcionales o no y hacer un cálculo de proporcionalidad directa. El objetivo era obtener respuestas razonadas basándose en sus conocimientos previos y su intuición, antes de conocer las definiciones y procedimientos formales. En este contexto es donde surge la necesidad de introducir el concepto y el uso de la proporcionalidad. Una vez transcurrido el tiempo pautado, se comentaron las respuestas y se dio la solución a las cuestiones planteadas, iniciando un debate grupal donde se motivó la participación y la argumentación. De esta forma, la profesora asegura que se consiguió que la clase adoptara una actitud curiosa y trabajadora, obteniendo a su vez una idea sobre cuáles eran los conocimientos previos de la clase. Destaca el hecho de realizar las actividades previamente a una explicación teórica para después debatirlas con todo el grupo-clase, ya que pudo determinar el nivel medio de los grupos, identificando así los alumnos que presentaban más dificultades y los que ya tenían una base sólida. La valoración asignada a este indicador fue de 3/5.

En cuanto a medidas de atención a la diversidad, la profesora asegura que el diseño competencial de las actividades permitió que todos los alumnos tuviesen alguna cuestión a aportar para así lograr unos objetivos de aprendizaje básicos. Es importante notar que las configuraciones de los grupos base estaban ideadas para que los equipos de trabajo fuesen heterogéneos, fomentando la ayuda mutua y la participación. Por otro lado, en su reflexión, la profesora valora positivamente la presencia de actividades de ampliación, justificándolas como una herramienta útil para personalizar la unidad a los alumnos con un ritmo o interés más elevado. En el otro extremo, también se proporcionaron actividades en línea para que aquellos alumnos que quisieran repasar y practicar en casa pudieran hacerlo. Además, durante el transcurso de la UD, se intentó que todos los alumnos que lo requerían tuvieran un apoyo más individualizado cuando atravesaban serias dificultades para desarrollar las actividades individualmente o con su grupo base. A pesar de esto, y pese a haber en el aula un alumno con un Plan Individualizado (PI)⁷ y otro caso excepcionalmente difícil por incomprensión del catalán y castellano, solo se adaptó el currículum en casos puntuales, pero no de forma general. La profesora asume que su situación no se

⁷ El Plan individualizado (PI) es el conjunto de apoyos y adaptaciones que un determinado alumno/a pueda necesitar en los diferentes momentos y contextos escolares.

tuvo en suficiente consideración, ya que se tendría que haber previsto previamente. Por estas razones, la valoración final asignada por la profesora para este indicador es de 3/5.

Paralelamente, para poder determinar si el alumnado ha logrado los conocimientos y competencias propuestas, es necesario recurrir a la evaluación, de la cual se hicieron cuatro tipos (Sanmartí, 2020).

Evaluación inicial. Con el objetivo de determinar los conocimientos previos del alumnado, tanto para el docente como para los propios alumnos.

Evaluación formativa. La UD consta de dos tipos de actividades: unas de cariz más general y otras enfocadas a la realización del proyecto. Los problemas y cuestiones planteadas del primer tipo estaban ideadas para que los alumnos pudiesen trabajar los conceptos teóricos que se van introduciendo simultáneamente. Al finalizar cada sesión, los alumnos entregaban sus producciones, las cuales fueron evaluadas y devueltas con comentarios de mejora. La profesora valora positivamente en especial el hecho de que los alumnos pudieran volver a entregarlas de nuevo, obteniendo una segunda valoración. La finalidad de estas entregas era asegurar que los alumnos estuvieran alcanzando los objetivos establecidos para cada sesión. En cuanto a las actividades del proyecto, en la última sesión, los alumnos presentaron un dossier individual en el que figuraban las actividades realizadas en grupo. La finalidad de esta entrega era poder evaluar la capacidad del alumnado de realizar un trabajo a largo plazo y acumulativo, para el cual es necesario la cooperación y la organización. Así, la evaluación del dossier final tenía también un carácter sumativo. También se tuvieron en cuenta otros aspectos actitudinales no referentes exclusivamente a las producciones entregables: participación en clase, autonomía, interés y respeto. En general, la profesora considera que el dossier y las diferentes entregas contribuyeron a una correcta evaluación del nivel en que los alumnos lograron adquirir los conocimientos y competencias planteadas. Aun así, como mejora en referencia a desarrollar una evaluación formativa completa propone como enriquecedor poder disfrutar de espacios donde comentar las producciones del alumnado de forma individual.

Evaluación formadora. Con el fin de que el alumnado pueda ser consciente y protagonista de su propio aprendizaje, de forma que pueda tomar decisiones y actuar según sus propios objetivos, se establecieron una serie de estrategias. Primeramente, durante todo el transcurso de las sesiones, las actividades que los alumnos realizaban en clase se pusieron en común y se fueron corrigiendo y explicando de forma grupal. El objetivo es que hubiera un proceso de autoevaluación y coevaluación conjunta, de forma que cada alumno/a pudiese, a medida que se iban comentando las resoluciones de los ejercicios, corregir sus propios errores, detectándolos e interiorizándolos para así no repetirlos en un futuro. Una estrategia con la misma finalidad fue devolver las producciones de cada alumno con comentarios de mejora. Es importante matizar que no estaban corregidas con las soluciones explícitas, sino que se daban sugerencias tales como “*este procedimiento no es óptimo, ¿podrías resolver el problema empleando menos pasos?*”. De este modo, los alumnos pudieron ser conscientes semanalmente de su progreso y tenían la oportunidad opcional de mejorar su entrega, decidiendo si querían ir más allá o quedarse con la calificación como estaba.

Otro aspecto que la profesora considera interesante es que el examen contaba con la opción de realizar un ejercicio extra, añadiendo dificultad al

mismo. El objetivo era la autorregulación por parte de los alumnos no tan solo de su progreso de aprendizaje continuo, sino también la evaluación final de este, tomando así consciencia de la propia evaluación.

En general, la profesora considera que la evaluación formadora se desarrolló satisfactoriamente a lo largo de la UD: aproximadamente un 25% de los alumnos devolvieron al menos una de las fichas mejorada después de la primera entrega. Un detalle que sugiere cambiar es el hecho de no incluir una calificación la primera vez que se devolvían las actividades entregadas con correcciones y comentarios de mejora. La razón de este matiz viene dada por el hecho de que la mayoría de los retornos que se obtuvieron fueron por parte de los mismos alumnos que, en general, tenían mejores resultados académicos.

Evaluación final y sumativa. Con el fin de evaluar el grado de adquisición de los conocimientos trabajados a lo largo de las sesiones, la realización de una pequeña prueba que los alumnos tenían que resolver individualmente y sin ningún tipo de material de apoyo era la principal herramienta. Sin embargo, aunque todas las partes de la evaluación constaban de carácter sumativo, no se planificó la cuantificación ni el peso exacto que cada actividad supondría a la hora de establecer una gradación final.

A pesar de que la UD planificada contaba con un buen número de herramientas de evaluación, la profesora considera que no resultaron efectivas. La carencia de tiempo y una mala temporalización de las sesiones propiciaron que muchas de las herramientas no pudieran ni siquiera implementarse. Así pues, el alumnado no pudo extraer todo el provecho potencial de la evaluación como una herramienta más para su propio aprendizaje, puesto que no pudieron observar ninguna evolución ni extraer conclusiones a partir de las valoraciones dadas sobre los indicadores especificados en las rúbricas. Sin embargo, la profesora percibe que este hecho no es debido intrínsecamente a la calidad de las herramientas de evaluación creadas y, en consecuencia, asigna una valoración global del indicador *Aprendizaje* de 3/5.

En términos de la concepción constructivista de los procesos de enseñanza y aprendizaje, la metacognición juega un papel crucial (COLL, 2004). Comprender la naturaleza matemática de la proporcionalidad y no solo resolver problemas mecánicos era un objetivo claro en la planificación de la UD. Con el espíritu de que los alumnos fuesen conscientes de que los problemas y cuestiones a resolver no tienen una única forma de hacerlos, la profesora pretendía que aprendieran a establecer estrategias por sí solos con las que se sintieran cómodos, sentirse capaces de entender y adaptarse a las estrategias usadas por otros compañeros. Así pues, el objetivo era presentarles diferentes herramientas para después guiarles y ayudarles en su propio proceso de aprendizaje, en el cual se buscaba potenciar la autonomía en la toma de decisiones, el pensamiento crítico y el entendimiento de las dudas y de los errores como una parte fundamental de este proceso. Con todas estas cuestiones presentes, se desarrollaron mayoritariamente los siguientes procesos matemáticos: 1) *Resolución de problemas*: formulación de preguntas, identificación de problemas y desarrollo de estrategias; 2) *Razonamiento y prueba*: análisis y clasificación de casos, argumentación, extracción de conclusiones y generalización; 3) *Comunicación y representación*: descripción de situaciones, expresión y argumentación, creación y elaboración de representaciones; 4) *Conexiones*: aplicación a contextos no matemáticos,

contextualización, interpretación de situaciones para transformarlos en problemas matemáticos y relación entre diferentes ámbitos matemáticos.

Así, en cada una de las sesiones, se llevaban a cabo una serie de estrategias para, 1) evitar arrastrar carencias a lo largo de las semanas y que se dificultara así la adquisición de los nuevos aprendizajes y, 2) fomentar la expresión por parte del alumnado de sus inquietudes de diferente índole, entre las cuales la profesora destaca recurrir al debate grupal para comentar y poner en común las actividades realizadas. Por otro lado, el trabajo en equipos cooperativos, donde se trabajan aspectos como la asunción de roles concretos, la empatía o la escucha activa (Pujolàs, 2008), se reveló como una estrategia que permitió dotar de una nueva dimensión al autoconocimiento a través de la interacción con los otros miembros del grupo y, por lo tanto, de sus diversas habilidades y diferentes ritmos de trabajo.

A pesar de que la profesora contara con un recurso de autoevaluación, no se pudo implementar por falta de tiempo. La idea era que, en la última sesión y justo después del examen final, los alumnos marcaran y especificaran los conceptos que habían aprendido y los que creían que todavía tenían que trabajar más o no han interiorizado totalmente. También que indicaran las actividades que les habían parecido más provechosas y cuáles no habían sido adecuadas para desarrollar su aprendizaje. El objetivo era que tuvieran una idea clara, organizada y auto percibida del trabajo realizado, de los aspectos que debían mejorar y sobre qué cuestiones no tratadas les gustaría profundizar más. Esta actividad de autoevaluación serviría también a la docente como un feedback de las impresiones del alumnado sobre la organización y el transcurso de la UD. En definitiva, a pesar de haber predisposición para tratar cuestiones metacognitivas con el alumnado, no se diseñaron ni implementaron unas estrategias y/o herramientas que realmente plasmaran la posible materialización de estas intenciones. En consecuencia, y teniendo además la sensación subjetiva de que muchos alumnos no experimentaron el proceso que se buscaba, la docente considera la alta demanda cognitiva como un punto muy mejorable en la planificación de la UD, dándole una valoración de 2.5/5.

Por lo que se refiere a la idoneidad cognitiva, se obtiene la media aritmética más baja: un 2.875/5. La profesora considera que, aunque se logra superar el valor medio, hay diversos aspectos que son objeto de mejora. Entre ellos destaca la adaptación curricular a las necesidades individuales, sobre todo en casos con dificultades cognitivas, así como la inclusión de procesos que respondan a una alta demanda cognitiva. Así pues, propone la incorporación de un pequeño cuestionario auto corregible como herramienta explícita de evaluación inicial, incidiendo a la vez en la metacognición y el desarrollo de la competencia de aprender a aprender. Con el mismo objetivo la docente propone eliminar la pregunta extra del examen para hacer de este una prueba desglosada por niveles, asumiendo cada alumno de forma voluntaria a qué nivel optar.

Teniendo en cuenta que el aprovechamiento y uso de los recursos materiales y tecnológicos se ha valorado como óptimo, y que las características ambientales no dependían directamente de la acción docente, la baja valoración media del principio de *idoneidad mediacional* (3.17/5) se debe a la mala gestión del tiempo, indicador que obtiene la valoración más baja de todo el análisis reflexivo. Siendo, en general, la mala temporalización un fenómeno temático en el diseño de una UD que, además, en el caso que nos ocupa, es totalmente original y enmarcada en un proyecto global innovador, la docente es consciente

que su falta de experiencia jugó un rol determinante. Concluye que, si se quiere mantener la totalidad de las actividades planteadas, se debe ampliar la duración de la intervención.

Las valoraciones dadas a los indicadores referentes a la *idoneidad interaccional* dan como resultado la segunda media aritmética más alta entre los seis principios analizados: 4.25/5. Por lo que respecta a las interacciones entre iguales, propone como mejora la inclusión de una herramienta para trabajar en la convivencia, el respeto y la ayuda mutua, fomentando la inclusión: una diana de coevaluación grupal en términos de trabajo cooperativo. Su incorporación responde a la capacidad de fomentar la corresponsabilidad que surge de la evaluación entre iguales (Pujolàs, 2008). Apunta que la incorporación de esta herramienta también mejorará el indicador referente a las actitudes del alumnado, dentro del principio de *idoneidad afectiva*, el único que se cree con capacidad y medios para potenciar actualmente. El criterio afectivo obtiene una valoración media de 3.67/5 y, de igual modo que con la autonomía (aspecto más crítico del criterio interaccional), apela a una futura adquisición de herramientas y técnicas, derivadas de la experiencia y formaciones específicas, para aumentar la calidad en la gestión de las emociones del alumnado. Finalmente, el principio de *idoneidad ecológica* obtiene la valoración media más alta: 4.5/5, llegando prácticamente a la excelencia.

5. Conclusiones

La profesora hace una valoración bastante completa y equilibrada de la UD implementada –ya que utiliza en su reflexión todos los componentes de los CID– presentando sugerencias para su mejora. En particular, afirma que, como mayor aprendizaje derivado de su intervención, extrae la necesidad de una planificación exhaustiva de las actividades, aspecto a ser considerado, especialmente por un docente novel (Aubanell, 2014).

Durante las sesiones de intervención, la profesora se percató forzosamente de la gran responsabilidad que efectivamente supone para un docente una buena gestión del tiempo disponible. A pesar de ser un rasgo indispensable sea cual sea la especialización impartida, en el caso particular de las matemáticas se hace especialmente evidente. Esto se debe a que, en muchas ocasiones, no entender por nosotros mismos un concepto o un procedimiento concreto puede generar una frustración y una consecuente desmotivación muy grande, hecho que se puede paliar si durante el tiempo disponible en el aula el docente transmite las ideas clave de forma entendible y clara. En el caso práctico debatido, a causa de una mala planificación y temporalización de las actividades, no se pudieron tratar la totalidad de las cuestiones curriculares encomendadas.

Para concluir, el hecho de que la profesora presente una reflexión equilibrada acerca de la UD implementada, está directamente relacionado con las instrucciones que tuvo en el máster de formación de profesores de secundaria, en particular, en el estudio de la herramienta CID en las asignaturas *Innovación e Iniciación a la Investigación en Educación Matemática* y *Trabajo de fin de máster*. Este tipo de resultado se puede observar, también, en otras investigaciones inclinadas a estudiar la reflexión que hace el profesor cuando utiliza la herramienta idoneidad didáctica en el contexto de la enseñanza de la proporcionalidad (Burgos et al., 2018; Esqué De Los Ojos; Breda, 2021).

Referencias

ACEDO ARZOLA, Gara. **Proporcionalitat, mesura i representació de dades a 1r d'ESO: estudi de la idoneïtat didàctica i proposta de millora de la unitat didàctica impartida**. 2021. 113f. Tesis de Fin de Master (Master en Formació de Profesorado de Secundaria de Matemàtiques de Catalunya) — Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelona, 11 jun. 2021.

AUBANELL, Anton. **Carta a un professor novell**. 2014. Disponible em: <<https://feemcat.org/anton-aubanell/#comments>>. Acceso em: 17 jul. 2022.

AUSUBEL, David. Teoría del aprendizaje significativo. **Fascículos de CEIF**, p. 1–10, 1997.

BREDA, Adriana. Características del análisis didáctico realizado por profesores para justificar la mejora en la enseñanza de las matemáticas. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 34, n. 66, p. 69–88, 2020.

BREDA, Adriana; FONT, Vicenç; PINO-FAN, Luis Roberto. Evaluative and normative criteria in didactics of mathematics: The case of didactical suitability construct. **Bolema - Mathematics Education Bulletin**, v. 32, n. 60, p. 255–278, 2018.

BREDA, Adriana; LIMA, Valderez Marina do Rosário. Estudio de caso sobre el análisis didáctico realizado en un trabajo final de un máster para profesores de matemáticas en servicio. **Journal of Research in Mathematics Education**, v. 5, n. 1, p. 207–225, 2016.

BREDA, Adriana; PINO-FAN, Luis Roberto; FONT, Vicenç. Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: Criteria for the reflection and assessment on teaching practice. **Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education**, v. 13, n. 6, p. 1893–1918, 2017.

BURGOS, María et al. Conocimientos y competencia de futuros profesores de matemáticas en tareas de proporcionalidad. **Educação e Pesquisa**, v. 44, n. 0, p. e182013–e182013, 2018.

BURGOS, María et al. Análisis didáctico de una lección sobre proporcionalidad en un libro de texto de primaria con herramientas del enfoque ontosemiótico. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 34, n. 66, p. 40–68, 2020.

COLL, César. **La construcció del coneixement a l'escola cap a l'elaboració d'un marc global de referència per a la educació escolar**. [s.l.] Editorial UOC, 2004.

CRAMER, Kathleen; POST, Thomas; GRAEBER, Anna. Connecting research to teaching: Proportional reasoning. **The Mathematics Teacher**, v. 86, n. 5, p. 404–407, 1993.

DAVIS, Brent. Is 1 a Prime Number? Developing Teacher Knowledge through Concept Study. **Mathematics Teaching in the Middle School**, v. 14, n. 2, 2020.

ELLIOTT, John. **El cambio educativo desde la investigación-acción. SERBIULA (sistema Librum 2.0)**, 1993.

ESQUÉ DE LOS OJOS, Daniel; BREDA, Adriana. Valoración y rediseño de una unidad sobre proporcionalidad, utilizando la herramienta Idoneidad Didáctica. **Uniciencia**, v. 35, n. 1, p. 38–54, 2021.

FONT, Vicenç; BREDA, Adriana; PINO-FAN, Luis Roberto. **Análisis didáctico en un trabajo de fin de máster de un futuro profesor**. Investigación en Educación Matemática XX. **Anais...**Zaragoza: Universidad de Zaragoza: SEIEM, 2017.

FONT, Vicenç; BREDA, Adriana; SECKEL, María José. Algunas implicaciones didácticas derivadas de la complejidad de los objetos matemáticos cuando estos se aplican a distintos contextos. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, v. 10, n. 2, p. 1–23, 2017.

FONT, Vicenç; GODINO, Juan Díaz; GALLARDO, Jesús. The emergence of objects from mathematical practices. **Educational Studies in Mathematics**, v. 82, n. 1, p. 97–124, 2013.

FONT, Vicenç; RUBIO, Norma Violeta. **Procesos matemáticos en el enfoque ontosemiótico**. Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos. **Anais...**Granada: Universidad de Granada, 2017.

FORTUNY, Josep María; RODRÍGUEZ, Rafael. Aprender a mirar con sentido: facilitar la interpretación de las interacciones en el aula. **Avances de Investigación en Educación Matemática**, n. 1, p. 23–37, 2012.

GIACOMONE, Belén; GODINO, Juan Díaz; BELTRÁN-PELLICER, Pablo. Developing the prospective mathematics teachers' didactical suitability analysis competence. **Educação e Pesquisa**, v. 44, p. e172011, 2018.

GODINO, Juan Díaz. Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. **Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática**, v. 8, n. 11, p. 111–132, 2013.

GODINO, Juan Díaz et al. Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. **Bolema - Mathematics Education Bulletin**, v. 31, n. 57, p. 90–113, 2017.

GODINO, Juan Díaz; BATANERO, Carmen; FONT, Vicenç. The onto-semiotic approach to research in mathematics education. **ZDM - International Journal on Mathematics Education**, v. 39, n. 1–2, p. 127–135, 2007.

GODINO, Juan Díaz; BATANERO, Carmen; FONT, Vicenç. The onto-semiotic approach: Implications for the prescriptive character of didactics. **For the Learning of Mathematics**, v. 39, n. 1, p. 37–42, 2019.

HART, Lynn; ALSTON, Alice; MURATA, Aki. Lesson study research and practice in mathematics education: Learning together. **Lesson Study Research and Practice in Mathematics Education: Learning Together**, p. 1–294, 2011.

HERNÁNDEZ-GARCÍA, Joan; BRED A, Adriana. Análisis y rediseño de una unidad didáctica de isometrías planas, mediante los Criterios de Idoneidad Didáctica.

Caminhos da Educação Matemática em Revista (Online), v. 12, n. 2, p. 19–36, 2022.

HILL, Heather; BALL, Deborah Loewenberg; SCHILLING, Stephen. Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 39, n. 4, p. 372–400, 2008.

JOYCE, Dominic. On the topology of desingularizations of Calabi-Yau orbifolds. **arXiv:math/9806146 [math.AG]**, v. 1, 1998.

LLINARES, Salvador. Construcción de conocimiento y desarrollo de una mirada profesional para la práctica de enseñar matemáticas en entornos en línea. **Avances de Investigación en Educación Matemática**, n. 2, p. 53–70, 2012.

OLLER MARCÉN, Antonio Marcén; GAIRÍN SALLÁN, José María. La génesis histórica de los conceptos de razón y proporción y su posterior aritmetización. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, v. 16, n. 3, p. 317–338, 2013.

PERRENOUD, Philippe. **Desarrollar la práctica reflexiva en el oficio de enseñar: profesionalización y razón pedagógica**. Barcelona: Graó, 2004.

PINO-FAN, Luis Roberto et al. Idoneidad epistémica del significado de la derivada en el currículo de bachillerato. **EPISTEMIC SUITABILITY OF THE DERIVATIVE MEANING IN THE HIGH SCHOOL CURRICULUM. (English)**, v. 34, n. 2, p. 123–150, 2013.

POCHULU, Marcel; FONT, Vicenç; RODRÍGUEZ, Mabel. Desarrollo de la competencia en análisis didáctico de formadores de futuros profesores de matemática a través del diseño de tareas. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, v. 19, n. 1, p. 71–98, 2016.

PUJOLÀS, Pere. Cooperar per aprendre i aprendre a cooperar: el treball en equips cooperatius com a recurs i com a contingut. **Suports**, v. 12, n. 1985, p. 21–37, 2008.

RONDERO, Carlos; FONT, Vicenç. Articulation of the mathematical complexity of the arithmetic mean. **Enseñanza de las Ciencias**, v. 33, n. 2, p. 29–49, 2015.

ROWLAND, Tim; HUCKSTEP, Peter; THWAITES, Anne. Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v. 8, n. 3, p. 255–281, 2005.

SANMARTÍ, Neus. **Avaluar és aprendre: l'avaluació per millorar els aprenentatges de l'alumnat en el marc del currículum per competències**. [s.l.] Departament d'Educació. Gabinet Tècnic, 2020.

SCHOENFELD, Alan; KILPATRICK, Jeremy. Toward a Theory of Proficiency in Teaching Mathematics. **International handbook of mathematics teacher education:**

Vol. 2 Tools and Processes in Mathematics Teacher Education, v. 2, p. 321–354, 2008.

SCHÖN, Donald. **The reflective practitioner: How professionals think in action**. [s.l.: s.n.]. Routledge, 2017.

SHULMAN, Lee. Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. **Educational Researcher**, v. 15, n. 2, p. 4–14, 1986.

TORRES CORONA, Teresa. Aprendizaje reflexivo en la educación superior. Madrid: Ediciones Morata. Colección: Manuales de Pedagogía' Brockbank, Anne e Ian McGill. **Manuales de Pedagogía**, v. 2, n. 2, p. 75–78, 2002.

TORRES, Eugenia; DEULOFEU, Jordi. El conocimiento del profesor de matemáticas en la práctica: enseñanza de la proporcionalidad. **REDIMAT**, v. 9, n. 2, p. 147–172, 2020.

Agradecimientos

Este trabajo se desarrolló en el marco de proyectos de investigación en formación docente: Proyecto PID2021-127104NB-I00 financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033/ y por "FEDER Una manera de hacer Europa", Competencias y conocimientos del docente de primaria y secundaria para la enseñanza de las matemáticas en modalidad híbrida (SENACYT/FIED21-002).

Nota: Redacción del artículo y de los respectivos resúmenes en lengua extranjera revisados por Alicia S. Brualla.

Enviado em: 22/02/2024 | Aprovado em: 12/10/2024

