



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

EL TEOREMA DELS QUATRE COLORS

Autor: Eloi Baeta Trias

Director: Dr. Arnau Padrol Sureda
Realitzat a: Departament de
Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 15 de gener de 2025

Abstract

El teorema que ens esforçarem a demostrar en aquest Treball de fi de Grau és el dels quatre colors. Plantejat per primera vegada per correspondència entre els matemàtics A. De Morgan i W. Hamilton l'any 1852. Dos anys més tard, l'any 1854, es publica en la revista *The Athenaeum* un plantejament més formal.

No va ser fins cent vint-i-cinc anys més tard des del primer plantejament, l'any 1977, que es va demostrar el resultat. La prova, a càrrec de K. Appel i W. Haken, va ser pionera en l'ús de programes informàtics per a demostrar resultats matemàtics. Precisament per aquest motiu, la demostració va generar prou controvèrsia.

Demostrarem en aquest treball resultats necessaris, discutirem l'estratègia utilitzada per la primera i la segona prova (més establerta i simplificada, a càrrec de N. Robertson, D. Sanders, P. Seymour i R. Thomas) i justifiarem la validesa dels resultats obtinguts computacionalment per ordinadors.

Agraïments

Vull agrair primerament aquest treball, com no podria ser d'una altra manera, a l'Arnau, qui m'ha dirigit i tutelat, segurament sense saber-ho, de la millor manera que podria haver demanat. Animant-me sempre a redactar un treball que fos meu, que em sentís, en acabar-lo, molt propi. Deixant-me sempre espai perquè intentés jo resoldre els entrebancs a la meva manera, i alhora, proporcionant-me les eines per poder fer-ho. Sempre, també, disposat a dedicar-me temps i esforços quan no me'n sortia, i per veure quin podria ser el millor camí endavant quan sí. En una altra nota, he trobat precíós com ha aconseguit, durant tot el procés que ha estat redactar aquest treball, fer-me sentir orgullós de la feina que he fet, sobretot, perquè ho ha aconseguit fins i tot en els moments que més difícil m'ha semblat acabar produint un treball amb cara i ulls. Potser els continguts apresos en si, tard o d'hora, em volin del cap, però, no crec que obli mai com i amb qui els vaig aprendre. Ha estat tot un plaer poder treballar amb tu, Arnau.

Als matemàtics autors dels continguts sobre els quals m'he recolzat per aprendre i poder redactar el meu treball. Crec que en acabar jo aquest treball, potser puc fer-me una idea de com de colossal i immens és el valor de la seva feina i treball.

Més personalment, a algunes persones que m'ho posen molt fàcil per estimar-les i que m'han fet sentir també molt estimat en moments difícils. Al Jan, al Ferran, al Roc, al Gerard, al Pol, a l'Alba, al Lluís i a la Marina, gràcies per tot.

Als meus pares, l'Eduard i la Isabel, qui sempre m'han ofert un suport que ha ressonat en totes les passes del meu camí fins aquí.

I a la Martina.

Tothom que he esmentat, i malauradament segur que també gent que no, m'ho ha posat molt fàcil. Altre cop, gràcies.

Índex

1	Introducció	1
2	Contraexemples mínims	4
2.1	Estratègia	4
2.2	Propietats	6
3	Mètode de descàrrega: conjunts inevitables	18
3.1	Exemple del mètode	18
3.2	Primer conjunt inevitable pel problema dels 4 colors	19
4	Reductibilitat	25
4.1	D-reductibilitat	25
4.2	Comprovació de reductibilitat sobre configuracions bones	25
5	Revisió dels resultats i on queda curta la nostra prova	28
5.1	Configuracions no reduïbles del nostre conjunt inevitable	28
5.2	Nou conjunt inevitable	30
5.3	Mètode de descàrrega alternatiu	32

1 Introducció

Començarem aquest treball contextualitzant històricament el problema dels quatre colors, així com introduint terminologia i estratègies preliminars per discutir-lo adequadament.

El problema fou inicialment formulat de manera molt innocent, l'any 1852, per correspondència entre el matemàtic A. De Morgan i el també matemàtic W. Hamilton. El primer plantejava al segon, que un estudiant seu li va demanar una raó per la qual era cert que per qualsevol possible divisió (en regions) d'una 'figura', eren suficients només quatre colors per a poder trobar una assignació entre les regions i quatre colors de tal manera que dues regions adjacents rebessin diferents colors. En aquesta carta, A. De Morgan ensenyava un exemple en el qual tres colors no eren suficients, establint una cota inferior al nombre de colors necessaris per acolorir qualsevol figura. I preguntava a W. Hamilton si no es podia trobar una figura amb una subdivisió on cinc colors fossin necessaris.

Dos anys més tard, l'any 1854, F.G. publicava a la revista britànica *The Athenaeum* un plantejament més formal del problema i feia incís en no haver trobat mai cap exemple en el qual fossin estrictament necessaris cinc colors. Confessava però, no poder demostrar-ho per figures amb més de cinc subdivisions. I demanava on podria trobar la prova pel cas general (que no existia) comentant l'aparent simplicitat del problema i la seva sorpresa al no haver-se creuat mai amb cap demostració d'aquest durant el seu estudi matemàtic.

A. Kempe publica a l'*American Journal of Mathematics* l'any 1879 una prova de la conjectura, malauradament errònia. Pretenia demostrar la conjectura a través d'inducció sobre el nombre de regions p d'un mapa M qualsevol (on un mapa és una subdivisió en regions del pla). Assumia que qualsevol mapa dins d'una restricció d'aquests (tal que demostrar la propietat sobre la restricció és suficient per demostrar la conjectura per qualsevol mapa) amb $p \leq r$ regions és 4-colorable. Seguint, considerava un mapa M_{r+1} amb $r + 1$ regions. Havent demostrat que qualsevol mapa dins la restricció conté una regió P_k amb exactament k regions adjacents per $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, tenim que M_{r+1} conté una d'aquestes possibles regions P_k . Per cada cas, demostrava que M_{r+1} és, efectivament, també 4-colorable. Considerava un mapa M_r amb r regions construït a partir de M_{r+1} tot eliminant una frontera entre la regió P_k de M_{r+1} i una de les regions adjacents (4-colorable per hipòtesi d'inducció) i demostrava a partir d'una 4-coloració qualsevol de M_r que M_{r+1} també és 4-colorable. Com hem comentat, però, la prova tenia un error que va ser esmentat per P. Heawood l'any 1890. En el cas que M_{r+1} conté P_5 els seus arguments fallen. La seva feina, però, va ser suficient per demostrar el teorema dels cinc colors, i les tècniques que va utilitzar van ser indispensables per la demostració del teorema dels quatre colors.

Les dues demostracions correctes del teorema dels quatre colors es basen a obtenir conjunts finits de configuracions tals que una apareix en qualsevol possible

contraexemple mínim, i demostracions del fet que les configuracions d'aquest conjunt són reduïbles, és a dir, no poden aparèixer en contraexemples mínims. Si fos el cas, tenim demostrat per reducció a l'absurd que no existeixen contraexemples mínims del que es desprèn que no existeixen contraexemples i, per tant, el teorema és cert. Veurem més endavant la definició de contraexemples mínims, configuració i la implicació comentada. Es pot veure prou clarament la similitud entre aquesta estratègia i la de A. Kempe.

Des de l'intent de demostració de A. Kempe a la publicació de les dues proves que hem comentat, diversos matemàtics van publicar resultats al llarg dels anys sobre conjunts inevitables (conjunts de configuracions tals que una apareix segur en qualsevol possible contraexemple mínim) i reductibilitat de configuracions, sense arribar mai a combinar adequadament les dues parts.

Un pas important en l'obtenció de conjunts inevitables va ser la invenció del mètode de descàrrega per H. Heesch. Aquest va permetre avançar més efectivament en l'obtenció de conjunts inevitables.

Són K. Appel i W. Haken qui per primera vegada, l'any 1977, demostren que existeix un conjunt inevitable de 1936 configuracions reduïbles pel teorema dels quatre colors. Ho aconseguen però, comprovant amb ordinador la reductibilitat de les seves configuracions. Aquesta aproximació va ser pionera, en el sentit d'utilitzar programes informàtics per demostrar propietats desitjades d'objectes matemàtics. El càlcul, però, és pràcticament impossible de reproduir a mà, el que va fer que la seva demostració no fos immediatament i global acceptada. No va ajudar tampoc el fet que se n'hi van trobar errors, tot i que sempre es van poder corregir amb petites modificacions de la demostració original.

L'any 1994 es publica una demostració alternativa del teorema per part de N. Robertson, D. Sanders, P. Seymour i R. Thomas. Aquesta segueix la mateixa estratègia que hem descrit, però utilitza certs resultats addicionals per arribar a un conjunt inevitable molt més petit, amb només 600 configuracions tals que són reduïbles.

Com hem esmentat repetidament, el teorema dels quatre colors estableix que per qualsevol mapa existeix una 4-coloració de les seves cares en un màxim de 4 colors de tal manera que dues cares amb una frontera comuna no comparteixin color.

El primer pas és en el nostre treball, és traduir el problema al llenguatge dels grafs. De cada mapa M en podem construir el graf dual $D(M)$, assignant a cada cara un vèrtex i afegint una aresta entre dos vèrtexs (si les respectives cares eren veïnes) per cada aresta comuna en el mapa i un bucle per cada aresta que només té una cara incident, és a dir, un pont.

Observem que podem operar sobre qualsevol mapa de tal manera que la propietat de ser 4-colorable es mantingui en el nou mapa, i que el graf dual d'aquest nou mapa no tingui arestes dobles o bucles.

Això ho aconseguim contraient en un punt tots els ponts i totes les arestes excepte una les quals són incidents a les dues mateixes cares. Per la definició de graf dual, només obtenim arestes dobles o bucles en aquests casos, i així els evitem. El mapa resultant és essencialment el mateix per al problema que tractem perquè les adjacències entre cares es mantenen. Així doncs, veiem que demostrar la propietat de ser 4-colorable sobre els grafs plans simples és equivalent a demostrar-la sobre els mapes. Es poden trobar il·lustracions sobre el procés que hem comentat que l'esclareixen molt adequadament a [14]

Estructura de la Memòria

Veurem al llarg de les tres seccions principals d'aquest treball, que no pot existir cap graf que sigui un contraexemple pel teorema dels quatre colors. Per això, ens basem en tot l'après a partir dels continguts [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12], [13], [14] que es troben a les referències.

Al llarg de la primera, veurem algunes propietats que ha de complir qualsevol suposat contraexemple mínim (altre cop, definits més endavant), com ara la seva k – *connectivitat* o una cota inferior pels graus dels seus vèrtexs.

En la segona, il·lustrarem el mètode de descàrrega amb el qual construirem un conjunt finit de configuracions (si fa o no fa, subgrafs amb algunes propietats estipulades) les quals com a mínim una d'elles ha d'aparèixer en qualsevol dels suposats contraexemples que considerarem (altre cop, mínims), això serà, construir un conjunt inevitable de configuracions pels contraexemples mínims del problema dels quatre colors.

Per acabar, discutirem la metodologia amb la qual és possible comprovar amb ordinador la reductibilitat de les configuracions que formen el nostre conjunt inevitable, sent la reductibilitat la propietat que indica, com hem comentat, que una configuració no pot ser present en un contraexemple mínim.

També veurem on queda curt pel que fa a resultats el nostre treball, i com s'hauria de complementar.

2 Contraexemples mínims

En aquesta primera secció, comentarem l'estratègia de la prova del teorema, que es demostra per reducció a l'absurd arran de suposar que existeixen contraexemples, és a dir, que existeix com a mínim un graf pla G tal que no és 4-colorable.

També demostrarem propietats dels elements d'un subconjunt d'aquests suposats contraexemples necessàries per arribar a contradicció. Dels elements d'aquest subconjunt, en direm contraexemples mínims.

2.1 Estratègia

És senzill veure que en cas que existeixi un conjunt de contraexemples no nul pel teorema dels quatre colors, entre aquests en tenim alguns tals que la suma del nombre dels seus vèrtexs i el nombre de les seves arestes és menor o igual que la dels altres contraexemples. Per tant, si demostrarem que no existeixen aquests grafs, per contrarecíproc, tenim que no existeixen contraexemples. Aquest subconjunt de contraexemples, seran els contraexemples mínims.

La demostració del teorema s'obté per reducció a l'absurd, com ja hem comentat. Suposarem que no existeixen contraexemples mínims i construirem un conjunt inevitable finit de configuracions per a qualsevol suposat contraexemple mínim del teorema dels quatre colors. És a dir, un conjunt tal, que qualsevol contraexemple mínim conté un element d'aquest conjunt. Seguit, amb l'ajuda de l'ordinador, es comprova que efectivament, totes aquestes configuracions, són reduïbles (sent la reduïbilitat la propietat que indica que una configuració no pot ser continguda en un contraexemple mínim). Amb el qual tindríem que qualsevol contraexemple mínim conté una configuració reduïble, arribant així a contradicció. En aquest cas, no existeixen contraexemples mínims i, per tant, no existeixen contraexemples

Definim adequadament a continuació tots aquests conceptes esmentats.

Definició 2.1. *Un graf pla G és una parella ordenada $(V(G), E(G))$ de conjunts finits que compleixen les següents propietats:*

1. $V(G) \subseteq \mathbb{R}^2$;
2. tota aresta $e \in E(G)$ és un arc entre dos vèrtexs diferents;
3. dues arestes diferents no tenen els mateixos dos extrems;
4. l'interior (com a tot l'arc excepte els extrems) de cada aresta no conté vèrtexs ni punts de cap altra aresta.

Diem que dos vèrtexs $u, v \in V(G)$ són adjacents (o veïns), si són els dos extrems d'alguna aresta de G , i notem $(u, v) \in E(G)$

Es desprèn de la definició de graf pla, que no considerem grafs amb arestes dobles o bucles.

Definició 2.2. Una 4-coloració d'un graf G és una assignació de quatre colors (codificats per 1, 2, 3, 4) als vèrtexs de G tal que dos vèrtexs adjacents reben diferent color. És a dir, una 4-coloració és una aplicació

$$\begin{array}{ccc} c: & V(G) & \longrightarrow \{1, 2, 3, 4\} \\ & v & \longmapsto c(v) \end{array}$$

tal que per qualsevol dos vèrtexs $u, v \in V(G)$, si $(u, v) \in E(G)$ o $(v, u) \in E(G)$, aleshores $c(u) \neq c(v)$. I finalment, diem que un graf G és 4-colorable (o que admet una 4-coloració) si existeix una 4-coloració de G .

Definició 2.3. Definim un ordre parcial en els grafs plans de la següent manera. Sigui G i H grafs plans,

$$H < G \text{ si i només si } |V(H)| + |E(H)| < |V(G)| + |E(G)|$$

Definició 2.4. Diem que G és un contraexemple mínim (del teorema dels quatre colors) si G és un graf pla tal que no existeix una 4-coloració de G i si cap altre contraexemple és menor que G amb l'ordre que hem definit. És a dir, per qualsevol graf pla H , si H és contraexemple del teorema dels quatre colors, tenim $H \not< G$.

Tenim, doncs, que si G és un contraexemple mínim, qualsevol graf pla H tal que $H < G$ admet una 4-coloració.

Per aquesta propietat dels contraexemples mínims, podem demostrar també per reducció a l'absurd diverses propietats sobre aquests. Sigui G un contraexemple mínim. Definirem grafs $H < G$ a partir de G que admeten una 4-coloració a partir de la qual podrem trobar una 4-coloració de G , arribant així a contradicció.

Definim també configuració i reductibilitat.

Notació 1. Sigui S un conjunt. Notem $\mathcal{P}(S)$ al conjunt de parts de S .

Definició 2.5. Una configuració és una parella ordenada (K, γ_K) on K és un graf pla i γ_K és una aplicació

$$\gamma_K: V(K) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$$

Les explicitem de manera més laxa quan ho fem, per estalviar feina innecessària, sempre que quedi prou clara la configuració. El conjunt $\gamma_K(u)$ per $u \in V(K)$ seran els valors que pot prendre el grau d' u en el contraexemple mínim que continui la configuració. Serà sempre, o bé un valor concret, o bé tots els enters majors que una cota inferior.

Observem que en qualsevol graf pla, els veïns de cada vèrtex tenen un ordre concret.

Notació 2. Sigui G un graf pla, i sigui $v \in V(G)$. Notem $d_G(v)$ el grau de v en G .

Definició 2.6. Diem que un graf pla G conté una configuració (K, γ_K) si existeix una aplicació $f : V(K) \rightarrow V(G)$ tal que satisfà les següents propietats:

1. per $u, v \in V(K)$, si $(u, v) \in E(K)$, aleshores $(f(u), f(v)) \in E(G)$;
2. per $u \in V(K)$, si $v_1, \dots, v_n$ són els vèrtexs adjacents a u en K , en aquest mateix ordre, aleshores, $f(v_1), \dots, f(v_n)$ són els vèrtexs adjacents a $f(u)$ en G en aquest mateix ordre també. És a dir, f preserva l'ordre d'adjacències;
3. per $v \in V(K)$ es compleix $d_G(f(v)) \in \gamma_K(v)$.

Definició 2.7. Diem que una configuració K és reduïble, si un contraexemple mínim no la pot contenir, en el sentit que si la contingués, podríem 4-acolorir G i no seria, per tant, un contraexemple mínim.

2.2 Propietats

Demostrarem en aquesta secció certes propietats dels contraexemples mínims tot demostrant que certes configuracions són reduïbles pel teorema dels quatre colors. Aquestes demostracions es poden fer enrevessades, i, de fet, no segueixen del tot la metodologia general amb la qual es demostra, com veurem en la secció quatre, la reductibilitat de la gran majoria de configuracions en les proves acceptades del teorema.

Tot i això, en fem un particular incís perquè il·lustren, aquestes demostracions, la direcció dels esforços amb els quals es va atacar el problema abans d'afegir programes informàtics per obtenir resultats.

Seria ideal, poder demostrar la reductibilitat d'un conjunt inevitable de configuracions amb arguments més similars als d'aquesta secció, i no haver de dependre de càlculs d'ordinador tan extensius. Malauradament, no s'ha aconseguit mai.

Notació 3. Sigui G un graf, v un vèrtex de G i S un subconjunt de vèrtexs de G . Notem $G - v$ i $G - S$ el graf resultant d'eliminar el vèrtex v de G i les arestes incidents amb v i el graf resultant d'eliminar tots els vèrtexs $u \in S$ de G i les arestes incidents a qualsevol vèrtex $u \in S$ respectivament.

Proposició 2.8. Si G és un contraexemple mínim aleshores G és connex

Demostració. Demostrem per reducció a l'absurd. Suposem que no és connex. Siguin $H_1, \dots, H_n$ les components connexes de G . Els grafs $H_1, \dots, H_n$ admeten cadascun una 4-coloració c_i , ja que $H_i < G$ per $i = 1, \dots, n$, i, G és mínim. Definim la 4-coloració c tal que $c(v) = c_i(v)$ si $v \in H_i$. Tenim que c és una 4-coloració de G i tenim, per tant, contradicció per ser G contraexemple. $\square$

Observem que en el que resta de secció, farem servir incidentalment la noció de configuració. Comentem que cometrem un abús de notació a l'hora de definir-les per facilitar la presentació i alleugerar la lectura. Creiem que queden prou clares les configuracions que estem considerant.

Proposició 2.9. *Si G és un contraexemple mínim, totes les cares de G són triangles, és a dir, un k – cicle amb $k \geq 4$ i amb l'interior o l'exterior sense vèrtexs és una configuració reduïble. Per tant, G és una triangulació.*

Demostració. Demostrem per reducció a l'absurd. Suposem que G té una cara tal que la seva frontera és un cicle C amb longitud major que tres i amb l'interior sense vèrtexs (anàlogament amb l'exterior). Tenim, doncs, per planaritat de G , dos vèrtexs $u, v \in V(C)$ que no són adjacents. Considerem H el graf resultant d'identificar u i v en un vèrtex x en l'interior de C . H admet una 4-coloració c' , ja que $H < G$ (té un vèrtex menys) i G és mínim. Definim $c|_{V(G) \setminus \{u,v\}} = c'$ i $c(u) = c(v) = c'(x)$. Amb el qual G és 4-colorable i per hipòtesi un contraexemple amb el que tenim la contradicció. $\square$

Proposició 2.10. *Un contraexemple mínim G no té cap vèrtex v de grau 1, 2 o 3. És a dir, els vèrtexs de grau 1, 2, o 3 són configuracions reduïbles.*

Demostració. Demostrem per reducció a l'absurd. Suposem $v \in G$ tal que $d_G(v) = 3$. Considerem el graf pla $H = G - v$. H admet una 4-coloració c' , ja que $H < G$ i G és mínim. Aquesta 4-coloració l'estenem a una 4-coloració c de G . En G , v té 3 vèrtexs adjacents. Sigui u_1, u_2 i u_3 aquests vèrtexs. Tenim que existeix $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ tal que $k \notin \{c'(u_1), c'(u_2), c'(u_3)\}$. Definim $c|_{V(G) \setminus v} = c'$ i $c(v) = k$ amb el que tenim una 4-coloració de G . Tenim contradicció per ser G contraexemple. Els altres dos casos es resolen de forma anàloga. $\square$

Observem que de manera anàloga, podem veure que un contraexemple mínim pel teorema dels cinc colors, no conté cap vèrtex de grau 1, 2, 3 o 4. En tenir accés a un color més, podem procedir de la mateixa manera i assignar al vèrtex v que hem eliminat per obtenir H el color que quedi per assignar en els vèrtexs adjacents a v .

Definició 2.11. *Sigui G un graf i $S \subseteq V(G)$. Definim el subgraf induït $G(S)$ com el graf amb conjunt de vèrtexs $V(G(S)) = S$ i conjunt d'arestes $E(G(S)) \subseteq E(G)$ tal que $e \in E(G(S))$, si i només si, els dos extrems u, v de e en G són tals que $u, v \in S$.*

Definició 2.12. *Sigui G un graf pla i c una 4-coloració de G . Sigui $a, b \in \{1, 2, 3, 4\}$, $a \neq b$ i $u \in G$ tal que $c(u) = a$ o $c(u) = b$. Sigui S el subconjunt de vèrtexs de G tals que c els hi assigna el color a o b . És a dir, $S = \{v \in V(G) \mid c(v) \in \{a, b\}\}$. Definim la (a, b) – cadena de Kempe K que conté u en G amb la 4-coloració c com la component connexa de $G(S)$ que conté u .*

Ometrem esmentar la 4-coloració si no hi ha ambigüitat.

Observem que si tenim una 4-coloració c_1 d'un graf G i una (a, b) -cadena de Kempe K , podem obtenir una 4-coloració c_2 alternativa. Definim c_2 tal que $c_2|_{V(G) \setminus V(K)} = c_1$

$$\text{i per } u \in V(K), c_2(u) = \begin{cases} a & \text{si } c_1(u) = b \\ b & \text{si } c_1(u) = a \end{cases}$$

c_2 també és una 4-coloració de G . Diem que obtenim c_2 a través d'un intercanvi de Kempe.

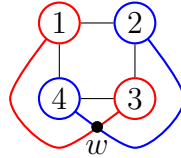
Proposició 2.13. *Un contraexemple mínim G no té cap vèrtex de grau 4. És a dir, un vèrtex de grau 4 és una configuració reduïble.*

Demostració. Demostrem per reducció a l'absurd. Sigui G un contraexemple i $v \in G$ tal que $d_G(v) = 4$. Considerem $H = G - v < G$ que admet una 4-coloració c' per ser G mínim. Siguin u_1, u_2, u_3, u_4 els vèrtexs veïns de v en sentit horari en G .

Si $\{c'(u_1), c'(u_2), c'(u_3), c'(u_4)\} \neq \{1, 2, 3, 4\}$ estenem c' a c de tal manera que $c|_{V(G) \setminus v} = c'$ i $c(v) = a$ amb $a \in \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{c'(u_1), c'(u_2), c'(u_3), c'(u_4)\}$. Tindríem així contradicció per ser G contraexemple.

Si $\{c'(u_1), c'(u_2), c'(u_3), c'(u_4)\} = \{1, 2, 3, 4\}$, suposem sense pèrdua de generalitat $c'(u_i) = i$ per $i = 1, 2, 3, 4$ i considerem les cadenes de Kempe K_1 i K_2 tals que K_1 és la $(1, 3)$ -cadena de Kempe que conté u_1 i K_2 és la $(2, 4)$ -cadena de Kempe que conté u_2 en H amb la 4-coloració c' . Observem que no podem tenir alhora $u_3 \in K_1$ i $u_4 \in K_2$ perquè aleshores K_1 i K_2 intersecarien per planaritat de G i tindríem $w \in V(K_1) \cap V(K_2)$ que no pot ocórrer perquè K_1 i K_2 són en colors complementaris, és a dir, tenim que per tot $w_1 \in K_1$, $c'(w_1) = 1$ o 3 i per tot $w_2 \in K_2$, $c'(w_2) = 2$ o 4 .

Si $u_3 \in K_1$ i $u_4 \in K_2$



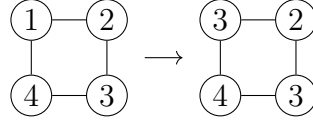
$\textcircled{k}$ Vèrtex que rep el color k

— K_1

— K_2

Si $u_3 \notin K_1$, intercanviem els colors en la cadena K_1 i obtenim la 4-coloració c'' de H amb $c''(u_i) \in \{2, 3, 4\}$ per $i = 1, 2, 3, 4$ que podem estendre a una 4-coloració c de G de la mateixa manera que en la proposició anterior. Il·lustrem els vèrtexs u_1, u_2, u_3, u_4 en el graf $H = G - v$.

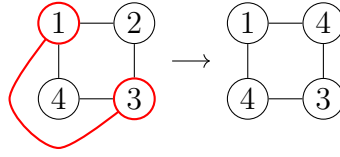
$u_3 \notin K_1$:



(k) Vèrtex que rep el color k

Si, en canvi, $u_3 \in K_1$ i $u_4 \notin K_2$, intercanviem els colors de la cadena K_2 i procedim igual.

$u_3 \in K_1$:



(k) Vèrtex que rep el color k

— K_1

En tot cas, tenim contradicció per ser G contraexemple. $\square$

Observem altre cop, que de manera anàloga, podem demostrar que cap contraexemple mínim pel teorema dels cinc colors conté un vèrtex v de grau cinc. En el pitjor dels casos, $H = G - v$ acoloreix els veïns $u_1, \dots, u_5$ de v utilitzant els cinc colors. En aquest cas, i com hem comentat, de manera anàloga, veiem que no podem tenir alhora dues cadenes de Kempe en colors complementaris que continguin la primera u_1 i u_4 , i la segona u_2 i u_5 . Per tant, ens podem deslliurar d'un dels colors a través de l'intercanvi de Kempe permès.

Veiem ara que és prou senzill obtenir un conjunt inevitable de configuracions reduïbles pel teorema dels cinc colors utilitzant alguns resultats previs.

Proposició 2.14. *Sigui G un graf pla connex tal que $|V(G)| \geq 3$. Aleshores es compleix*

$$|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6.$$

Proposició 2.15. *Sigui G un graf pla. Aleshores existeix $v \in V(G)$ tal que $d_G(v) \leq 5$*

Demostració. Demostrem per reducció a l'absurd. Suposem que $d_G(v) \geq 6$ per tot $v \in V(G)$. Tenim, doncs,

$$2|E(G)| = \sum_{v \in V(G)} d_G(v) \geq 6|V(G)|.$$

Per tant,

$$|E(G)| \geq 3|V(G)|$$

i tenim doncs contradicció amb la proposició anterior. $\square$

Proposició 2.16. *El conjunt $A = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ amb v_k un vèrtex de grau k és un conjunt inevitable de configuracions reduïbles pel teorema dels cinc colors.*

Demostració. Es desprèn de la proposició anterior (la inevitabilitat) i d'haver vist anteriorment que són reduïbles. $\square$

D'aquesta manera es va demostrar el teorema dels cinc colors a partir de la prova errònia del teorema dels quatre colors de Kempe. Hem comentat que ell la va escriure utilitzant la inducció, però és senzill passar d'un mètode de demostració a l'altre (sent l'altre, clarament, la reducció a l'absurd).

Estudiarem ara la k - connectivitat d'un contraexemple mínim G pel teorema dels quatre colors. Per a això, demostrem primer el següent teorema i corresponent corol·lari.

Teorema 2.17. *Sigui G una triangulació plana connexa amb $|V(G)| \geq 4$. Sigui $S \subset V(G)$ un conjunt desconnectant, això és, que $G - S$ no és connex. Siguin G_1 i G_2 dues components connexes de $G - S$. Aleshores, $G(S)$ conté un cicle C que separa les components G_1 i G_2 .*

Demostració. Siguin $v_1 \in V(G_1)$ i $v_2 \in V(G_2)$. Pel teorema de la corba de Jordan és suficient veure que no existeix un camí

$$\gamma: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus G(S)$$

tal que $\gamma(0) = v_1$ i $\gamma(1) = v_2$.

Demostrem per reducció a l'absurd. Suposem que existeix γ , i veiem que podem construir una successió finita de vèrtexs tals que cap pertany a S i tals que cadascun és adjacent al següent en G , fet que contradiu que v_1 i v_2 no formen part de la mateixa component connexa de $G - S$. Siguin $T_1, \dots, T_n$ els triangles de G pels quals passa γ . Definim una aplicació

$$\begin{aligned} f: \{T_1, \dots, T_n\} &\longrightarrow V(G) \\ T_i &\longmapsto f(T_i) = u_i \end{aligned}$$

de tal manera que $u_i \in T_{i+1}$, per $i = 1, \dots, n-1$ i $u_i \in T_i$ i $u_i \notin S$ per $i = 1, \dots, n$. Definim també $u_0 = v_1$.

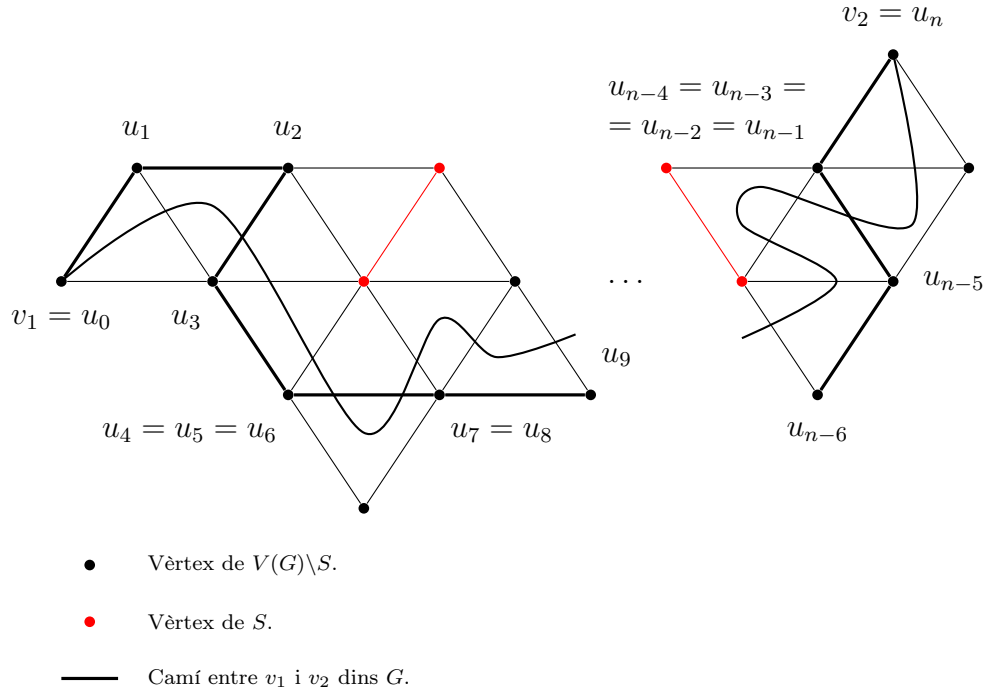
Per $i = 1, \dots, n-1$, sigui e_i la i - èssima aresta de G que γ creua. Sabem que $e_i \notin E(G(S))$, i per això, com a mínim un dels extrems d' e_i no pertany a S i e_i és incident amb els triangles T_i i T_{i+1} . Si e_i és l'aresta oposada a u_{i-1} (és a dir,

és l'única aresta del triangle T_i tal que u_i no n'és incident), definim $f(T_i) = u_i$ amb u_i el vèrtex incident a e_i que no pertany a S (si cap dels dos vèrtexs incidents a e_i pertany a S , en podem escollir qualsevol dels dos). Si, en canvi, e_i és incident a u_{i-1} , definim $f(T_i) = u_{i-1}$.

Sigui com sigui, observem que $u_i \in e_i$ per $i = 1, \dots, n-1$, per tant, es compleix $u_i \in T_i$ i $u_i \in T_{i+1}$ per $i = 1, \dots, n-1$. Definim per últim $f(T_n) = u_n = v_2 \in T_n$.

D'aquesta manera tenim la successió de vèrtexs $\{v_1 = u_0, u_1, \dots, u_{n-1}, u_n = v_2\}$ amb $u_i \in T_{i+1}$, per $i = 0, \dots, n-1$ i $u_i \in T_i$ i $u_i \notin S$ per $i = 0, \dots, n$. Per tant, dos vèrtexs successius formen part del mateix triangle, i com que tots els vèrtexs d'un mateix triangle són adjacents en G , i cap d'aquests forma part de S , tenim arestes que uneixen les parelles de vèrtexs successius tals que, les arestes, no formen part de $E(G(S))$, amb el que v_1 i v_2 formen part de la mateixa component connexa de $G - S$ i hem arribat a contradicció.

Il·lustrem un exemple:



□

Definició 2.18. Definim S un conjunt desconnectant mínim si $G - S$ no és connex, però sí que ho és $G - S'$ per tot $S' \subsetneq S$.

Corol·lari 2.19. Sigui G una triangulació plana connexa i sigui S un conjunt desconnectant mínim. Aleshores $G(S)$ és un cicle.

Demostració. Pel teorema anterior, $G(S)$ conté un cicle C que desconnecta el graf G . Tenim $G(S) = C$. Si no ho fos, S no seria mínim. □

Proposició 2.20. *Si G és un contraexemple mínim, aleshores, G és 4-connex.*

No incloem la demostració perquè veurem la de la següent proposició.

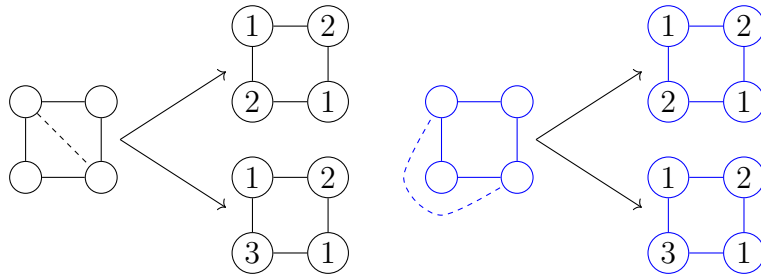
Notació 4. *Notarem, si tenim un graf G que conté un k -cicle C amb vèrtexs $\{v_1, \dots, v_k\}$ en sentit horari i una coloració c de G , $c(C) = (a_1, \dots, a_k)$ si i només si $c(v_1) = a_1, \dots, c(v_k) = a_k$.*

Proposició 2.21. *Si G és un contraexemple mínim, aleshores, G és 5-connex.*

Demostració. Pel corol·lari i la proposició anterior, és suficient veure que G no conté un 4-cicle separador.

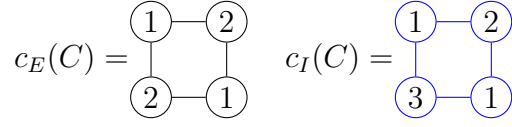
Demostrem per reducció a l'absurd. Suposem que G conté un 4-cicle C que separa G en dues o més components. Aquestes les podem separar segons si són internes o externes, i en tenim com a mínim una de cada, ja que, si no, tindríem una cara de G que no és un triangle, i, sabem que tot contraexemple mínim és una triangulació. Sigui v_1, v_2, v_3, v_4 els vèrtexs de C en sentit horari. Sigui $I \subset V(G)$ els vèrtexs interiors i $E \subset V(G)$ els vèrtexs exteriors. Definim $E + C = G - I$ i $I + C = G - E$ i definim també H_1 i H_2 com els grafs resultants d'identificar v_1 i v_3 en un sol vèrtex x en el graf $E + C$ i també v_1 i v_3 en un vèrtex y en el graf $I + C$ respectivament.

H_1 i H_2 admeten coloracions c'_E i c'_I perquè són menors que G . Aquestes les podem estendre a coloracions c_E i c_I de $E + C$ i de $I + C$ respectivament prenent $c_E(v_1) = c_E(v_3) = c'_E(x)$ i $c_E|_{V(E+C) \setminus \{v_1, v_3\}} = c'_E$ i $c_I(v_1) = c_I(v_3) = c'_I(y)$ i $c_I|_{V(I+C) \setminus \{v_1, v_3\}} = c'_I$. Tenim doncs coloracions c_E i c_I de $E + C$ i de $I + C$ respectivament tals que són en tres colors sobre els vèrtexs de C . Podem assumir sense pèrdua de generalitat, $c_E(C) = (1, 2, 1, 2)$ o $c_E(C) = (1, 2, 1, 3)$ i $c_I(C) = (1, 2, 1, 2)$ o $c_I(C) = (1, 2, 1, 3)$. Això és, perquè podríem obtenir aquestes coloracions a partir d'una permutació dels colors sobre qualsevol possible 4-coloració de C tal que els vèrtexs v_1 i v_3 reben el mateix color. És a dir, les coloracions c_E i c_I són aquestes llevat d'una possible permutació. Farem un seguit d'il·lustracions per complementar la demostració. Les línies discontinúes representen les identifications, els vèrtexs en negre són els vèrtexs de C en $C + E$ i els blaus són els vèrtexs de C també, però en $C + I$. En cas que aparegui un vèrtex numerat, serà el valor que li assigni una 4-coloració.

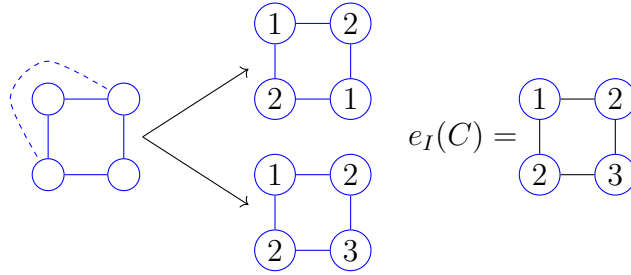


Veiem a continuació, que, o bé $c_E(C) = c_I(C)$, o bé podem obtenir coloracions e_E i e_I alternatives de $E + C$ i de $I + C$ respectivament tals que $e_E(C) = e_I(C)$.

Suposem $c_E(C) \neq c_I(C)$, $c_E(C) = (1, 2, 1, 2)$ i $c_I(C) = (1, 2, 1, 3)$ (en cas contrari repetim la demostració intercanviant els papers de c_E i c_I).

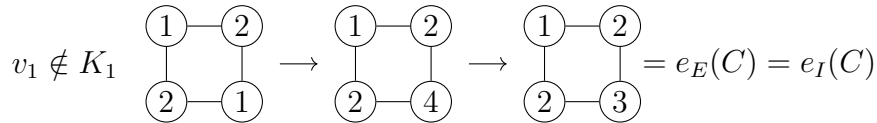


Considerem el graf H resultant d'identificar v_2 i v_4 en un vèrtex z en el graf $I + C$. H admet una 4-coloració e'_I que podem estendre altre cop a una 4-coloració e_I de $I + C$. Podem assumir ara també, gràcies a possibles permutacions dels colors, que $e_I(C) = (1, 2, 1, 2)$ o bé $e_I(C) = (1, 2, 3, 2)$. En el primer cas, ja tenim coloracions de $E + C$ i de $I + C$ que coincideixen en $V(C)$ (c_E i e_I respectivament). Suposem doncs $e_I(C) = (1, 2, 3, 2)$.

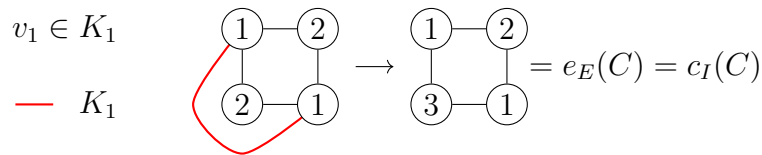


Siguin K_1 i K_2 la $(1, 4)$ -cadena de Kempe que conté v_3 i la $(2, 3)$ -cadena de Kempe que conté v_4 en $E + C$ amb la 4-coloració c_E respectivament. Observem que no podem tenir alhora $v_1 \in K_1$ i $v_2 \in K_2$ perquè intersecarien per planaritat de G (ja hem vist que dues cadenes de Kempe de colors complementaris no poden intersecar).

Suposem $v_1 \notin K_1$. Podem obtenir una 4-coloració alternativa e'_E de $E + C$ intercanviant els colors de la cadena K_1 , tal que $e'_E(C) = (1, 2, 4, 2)$ i aquesta 4-coloració compleix que permutant en ella tots els quates per tres i viceversa, obtenim la 4-coloració e_E tal que $e_E(C) = (1, 2, 3, 2) = e_I(C)$.



Si, en canvi, $v_1 \in K_1$, tenim $v_2 \notin K_2$ i podem obtenir la 4-coloració e_E de $E + C$ intercanviant els colors de la cadena K_2 , tal que $e_E(C) = (1, 2, 1, 3) = c_I(C)$, i definir $e_I = c_I$.



En tot cas, tenim coloracions e_E de $E + C$ i e_I de $I + C$ tals que $e_E(C) = e_I(C)$.

És fàcil veure ara que G admet una 4-coloració c . Cap vèrtex de I és adjacent amb cap vèrtex de E i $V(I) \cap V(E) = \emptyset$, per tant, definim la 4-coloració c tal que

$$\text{per } v \in G, c(v) = \begin{cases} e_I(v) & \text{si } v \in I \\ e_E(v) & \text{si } v \in E \\ e_E(v) = e_I(v) & \text{si } v \in C \end{cases}$$

□

Proposició 2.22. *Sigui G un contraexemple mínim. G no conté un 5-cicle separador C excepte si l'interior o l'exterior és un sol vèrtex. És a dir, un 5-cicle tal que l'interior o l'exterior són més d'un vèrtex és una configuració reduïble.*

Demostració. Demostrem per reducció a l'absurd de manera similar a la proposició anterior. Suposem que G conté un 5-cicle separador C tal que l'interior i l'exterior no són un sol vèrtex. Siguin v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 els vèrtexs de C en sentit horari i siguin $I \subset V(G)$ els vèrtexs interiors i $E \subset V(G)$ els vèrtexs exteriors.

Definim $E + C = G - I$ i $I + C = G - E$ i definim també H_1 i H_2 com els grafs resultants d'identificar tots els vèrtexs del conjunt I en un sol vèrtex x en el graf G i tots els vèrtexs del conjunt E en un sol vèrtex y també en el graf G . Aquests vèrtexs x i y són adjacents en H_1 i H_2 respectivament a tots els vèrtexs de C , per no ser trivials l'interior i l'exterior, i perquè sabem que el grau mínim dels vèrtexs de G és cinc.

H_1 i H_2 admeten coloracions tals que acobreixen $V(C)$ com a molt en tres colors. Per ser cinc senar, ha de ser exactament en tres colors. Suposem sense pèrdua de generalitat que els colors són 1, 2 i 3. Per tant, tenim coloracions c_E i c_I de $E + C$ i de $I + C$ tals que són en tres colors sobre C . Les coloracions c_E i c_I indueixen coloracions sobre C , i aquestes queden unívocament determinades, excepte per permutacions de colors, pel vèrtex de C que no comparteix color amb cap altre vèrtex de C . D'aquest vèrtex v en direm vèrtex únic, i notarem, per c una 4-coloració de $E + C$ o de $I + C$, $m(c) = v$.

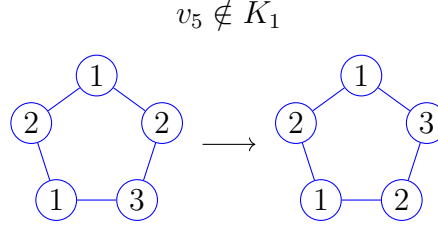
Suposarem $m(c_E) = v_1$. Si $m(c_I) = v_1$, tenim la mateixa 4-coloració en C llevat d'una permutació dels colors, i aleshores podríem obtenir una 4-coloració de G combinant de la mateixa manera que en la proposició anterior c_E i c_I .

Si $m(c_E) \neq m(c_I)$, podem suposar que $m(c_I) = v_2$ o $m(c_I) = v_3$. Veurem ara, que si $m(c_I) = v_3$, podem obtenir coloracions alternatives d_E i d_I de $E + C$ i $I + C$ respectivament tals que, o bé $m(d_I) = v_2$, o bé $d_E(C) = d_I(C)$.

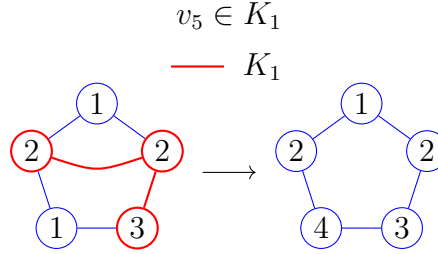
Si $m(c_E) = v_1$ i $m(c_I) = v_3$, tenim $c_E(C) = (3, 1, 2, 1, 3)$ i $c_I(C) = (1, 2, 3, 1, 2)$ llevat de possibles permutacions. Siguin K_1 i K_2 la $(2, 3)$ -cadena de Kempe que conté v_2 i la $(1, 4)$ -cadena de Kempe que conté v_4 amb la coloració c_I en $I + C$ respectivament. Altre cop, no podem tenir alhora $v_5 \in K_1$ i $v_1 \in K_2$ per planaritat de G , i, per tant, de $I + C$.

Si $v_5 \notin K_1$, podem obtenir la 4-coloració d_I de $I + C$ tal que $d_I(C) = (1, 3, 2, 1, 2)$

amb un intercanvi de Kempe sobre els vèrtexs de K_1 amb el que $m(d_I) = v_2$. Il·lustrarem alguns passos: els vèrtexs en negre són els vèrtexs de C en $C + E$ i els blaus són els vèrtexs de C també, però en $C + I$. Altre cop, les numeracions corresponen al valor que assigna la 4-coloració, i les línies discontinúes representen identifications.



Si, en canvi, $v_5 \in K_1$, tenim $v_1 \notin K_2$ i podem obtenir la 4-coloració d_I de $I + C$ tal que $d_I(C) = (1, 2, 3, 4, 2)$.

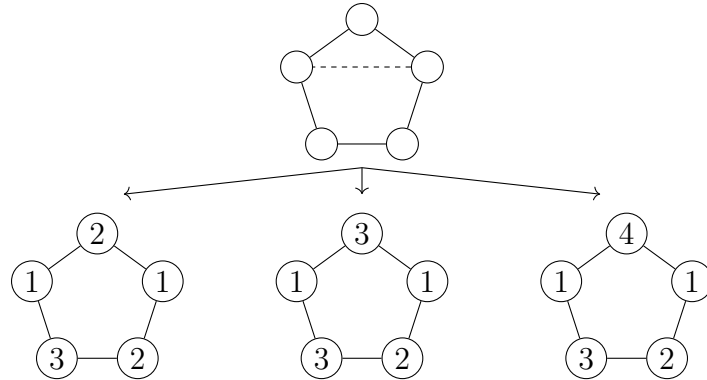


Obtenim en aquest cas, també una 4-coloració d_E alternativa de $E + C$ en la qual $d_E(v_2) = d_E(v_5)$. La obtenim identificant aquests dos vèrtexs en $E + C$, acolorint el graf resultat, i estenent-la a la coloració d_E de $E + C$ com hem fet en la proposició anterior. Sense pèrdua de generalitat, suposem $d_E(C) = (x, 1, 2, 3, 1)$.

Si $x = 2$, aleshores $d_E(C) = (2, 1, 2, 3, 1)$ i $m(d_E) = v_4$ que és adjacent a $m(c_I) = v_3$.

Si $x = 3$, $m(d_E) = m(c_I)$ i, per tant, llevat de permutació, $d_E(C) = d_I(C)$.

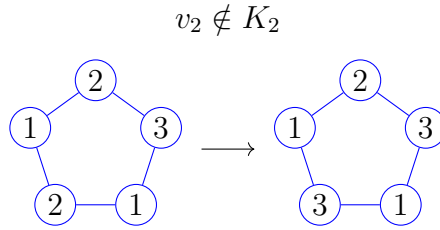
I finalment, si $x = 4$, $d_E(C) = d_I(C)$ llevat d'una permutació dels colors.



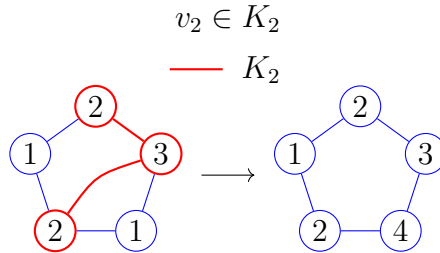
Per tant, podem suposar que, o bé $c_E(C) = c_I(C)$, o bé $m(c_E) = v_1$ i $m(c_I) = v_2$. Veiem ara que sempre podem obtenir coloracions que coincideixen en C de $I + C$ i de $E + C$ a partir de coloracions c_E i c_I de $C + E$ i de $C + I$ tals que $m(c_E) = v_1$ i $m(c_I) = v_2$.

Siguin ara K_1 i K_2 la $(1, 4)$ - *cadena de Kempe* que conté v_3 i la $(2, 3)$ - *cadena de Kempe* que conté v_4 en $I + C$ amb la 4-coloració c_I tal que $c_I(C) = (2, 3, 1, 2, 1)$ respectivament. Altre cop, no podem tenir alhora $v_5 \in K_1$ i $v_2 \in K_2$.

Si $v_2 \notin K_2$ (tenim també $v_1 \notin K_2$), podem obtenir la 4-coloració d_I de $I + C$ mitjançant un intercanvi de Kempe tal que $d_I(C) = (2, 3, 1, 3, 1)$ i, per tant, $m(d_I) = v_1 = m(d_E)$.



Si, en canvi, $v_2 \in K_2$, aleshores, $v_5 \notin K_1$ i podem obtenir la 4-coloració d_I de $I + C$ tal que $d_I(C) = (2, 3, 4, 2, 1)$.

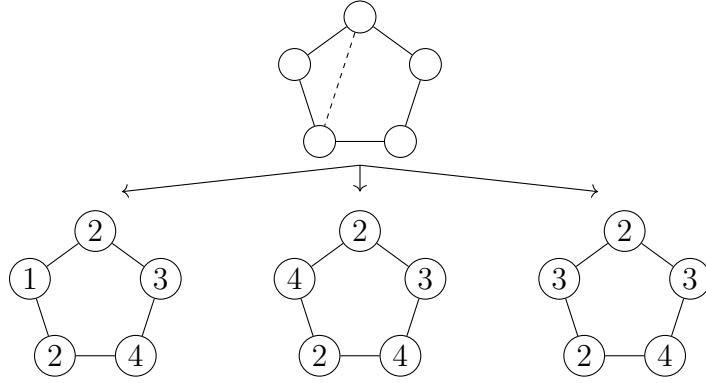


En aquest cas, de la mateixa manera que abans, obtenim una 4-coloració d_E de $E + C$ tal que $d_E(v_1) = d_E(v_4)$. Sense pèrdua de generalitat, $d_E(C) = (2, 3, 4, 2, x)$.

Si $x = 1$, $d_E(C) = d_I(C)$.

Si $x = 4$, $d_E = (2, 3, 4, 2, 4)$ i, per tant, $m(d_E) = v_2 = m(c_I)$ i aleshores $d_E(C) = d_I(C)$ llevat d'una permutació dels colors.

Finalment, si $x = 3$, $d_E(C) = (2, 3, 4, 2, 3)$ i $m(d_E) = v_3$.



Hem obtingut, en el pitjor dels casos, a partir de coloracions c_E i c_I de $E + C$ i de $I + C$ tals que $m(c_E) = v_1$ i $m(c_I) = v_2$ respectivament, coloracions d_E i c_I de $E + C$ i de $I + C$ respectivament tals que $m(d_E) = v_3$ i $m(c_I) = v_2$. Repetint el procés intercanviant els papers de $E + C$ i $I + C$, podem obtenir coloracions d_E i d_I de $E + C$ i de $I + C$ respectivament tals que $m(d_E) = v_3$ i $m(d_I) = v_4$. Iterant dues vegades més, obtenim dues coloracions e_E i e_I de $E + C$ i de $I + C$ respectivament tals que $m(e_E) = v_5$ i $m(e_I) = v_1$, per tant, tenim les coloracions c_E i e_I de $E + C$ i de $I + C$ respectivament tals que $m(c_E) = m(e_I)$ i, per tant, $c_E(C) = e_I(C)$ llevat d'una permutació dels colors. $\square$

Amb aquesta proposició tenim que qualsevol 5 – *cicle separador* en un contraexemple mínim G separa el graf en components on com a mínim una és trivial. Pel resultat que un conjunt desconnectant mínim és un cicle, tenim que G és essencialment 6-connex. Això és, que per qualsevol conjunt $S \subset V(G)$ amb $|S| = 5$ i tal que $G - S$ no és connex, tenim que S és un 5 – *cicle* tal que el seu interior (o exterior) és un sol vèrtex.

Tenim doncs, que qualsevol contraexemple mínim, és una triangulació, cinc és una cota inferior pels graus dels seus vèrtexs, i és essencialment 6-connex.

3 Mètode de descàrrega: conjunts inevitables

En aquesta secció il·lustrarem el mètode amb el qual obtindrem un conjunt de configuracions tals que com a mínim una d'elles apareix en qualsevol possible contraexemple mínim.

Sigui G un graf. Definirem una funció ξ que anomenarem càrrega

$$\begin{aligned} \xi: V(G) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto \xi(v) \end{aligned}$$

tal que coneguem $\sum_{v \in V(G)} \xi(v)$. I definirem un algorisme de descàrrega el qual donada una càrrega inicial ξ_0 obtindrà una segona càrrega ξ_1 . Aquest algorisme el definim localment i tal que $\sum_{v \in V(G)} \xi_0(v) = \sum_{v \in V(G)} \xi_1(v)$. Donat un conjunt de configuracions, demostrarem per contradicció que un graf amb certes propietats conté alguna d'aquestes configuracions. Suposarem que no en conté cap, i aplicant l'algorisme arribem a contradicció veient $\sum_{v \in V(G)} \xi_0(v) \neq \sum_{v \in V(G)} \xi_1(v)$

Definició 3.1. *Sigui S un conjunt finit de configuracions i G un graf. Diem que S és un conjunt inevitable per G si G conté com a mínim alguna configuració de S .*

3.1 Exemple del mètode

Proposició 3.2. *Sigui G un graf qualsevol tal que el grau mitjà sobre G , $\bar{d}(G)$, és menor que 3. Sigui $S = \{v_0, v_1, l_1, l_2, l_3, l_4, l_5\}$ amb v_i un vèrtex de grau i per $i = 0, 1$ i l_i un vèrtex de grau 2 amb un veí de grau i en G per $i = 1, 2, 3, 4, 5$. S és un conjunt inevitable per G .*

Demostració. Definim la càrrega inicial ξ_0

$$\begin{aligned} \xi_0: V(G) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ v &\longmapsto \xi_0(v) = d(v) \end{aligned}$$

tenim $\sum_{v \in V(G)} \xi_0(v) = n\bar{d}(G) < 3n$. Definim l'algorisme de descàrrega tal que els vèr-

texs de grau 2 reben càrrega $\frac{1}{2}$ de cada veí. Això és, $\xi_1(v) = \begin{cases} 2 + 1 - \frac{k_v}{2} & \text{si } d(v) = 2 \\ \xi_0 - \frac{k_v}{2} & \text{si } d(v) \neq 2 \end{cases}$

on k_v és el nombre de veïns de grau 2 de v . Suposem que G no conté cap element de S . Veiem que $\xi_1(v) \geq 3$ per tot $v \in v(G)$. Tenim per hipòtesi, $d(v) \geq 2$ per tot $v \in V(G)$ (perquè suposem G no conté v_1 ni v_2). Tenim que pels vèrtexs v de grau 2, 3, 4, 5, $k_v = 0$ (perquè G no conté l_i per $i = 1, 2, 3, 4, 5$). Per tant, els vèrtexs v de grau 2 queden amb $\xi_1(v) = 2 + 1$ i els vèrtexs w de grau 3, 4, 5 no perden

carrega i queden amb $\xi_1(w) \geq 3$. Sigui $t \in V(G)$ amb $d_G(t) = m \geq 6$. Tenim $\xi_1(t) = m - \frac{k_t}{2} \geq m - \frac{m}{2} = \frac{m}{2} \geq 3$. Tenim doncs $\xi_1(v) \geq 3$ per tot $v \in G$, per tant, $3n > \sum_{v \in V(G)} \xi_0(v) = \sum_{v \in V(G)} \xi_1(v) \geq 3n$ que és clarament una contradicció. $\square$

3.2 Primer conjunt inevitable pel problema dels 4 colors

Utilitzarem ara el mètode de descàrrega per trobar un conjunt inevitable de configuracions per una triangulació plana G essencialment 6-connexa tal que $\min\{d_G(v) \mid v \in V(G)\} \geq 5$.

Com hem comentat, suposarem que un graf amb aquestes propietats no conté cap de les configuracions del conjunt a demostrar inevitable. Per tant, podríem obviar aquestes propietats, i afegir al conjunt inevitable les configuracions que en demostrar-se la seva no presència ens les proporcionen. En suposar que aquestes configuracions no formen part del contraexemple mínim, Tindríem les mateixes propietats.

No procedim així, primerament perquè queda més recollida tota la demostració si no ho fem, i, en segon lloc, perquè la reductibilitat de les configuracions del conjunt inevitable, es demostra com comentarem en la secció quatre, altre cop, utilitzant programes informàtics, i és, per tant, interessant separar-les.

Necessitem primer trobar una càrrega inicial ξ_0 tal que coneguem $\sum_{v \in V(G)} \xi_0(v)$.

Sigui $n = |V(G)|$ i $e = |E(G)|$.

Tenim $e = 3n - 6$ per ser G triangulació. Observem

$$\sum_{v \in V(G)} 6 - d_G(v) = 6n - \sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 6n - 2e = 6n - 2(3n - 6) = 12$$

ja que, com que cada aresta 'compta' per dos vèrtexs,

$$\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2e.$$

Per tant, podem definir $\xi_0(v) = 6 - d_G(v)$ per $v \in V(G)$

Notació 5. Notarem v_k un vèrtex de grau k .

Farem servir a continuació, ara més explícitament, la noció de configuració. Altre cop cometrem un abús de notació a l'hora de definir les configuracions que considerem en la següent proposició, pels mateixos motius que abans.

Proposició 3.3. *Sigui G una triangulació essencialment 6-connexa tal que $\min\{d_G(v) \mid v \in V(G)\} \geq 5$. Sigui K el conjunt de totes les configuracions*

amb un v_j amb com a molt $j - 2$ vèrtexs v_5 adjacents per $j = 9, 10, 11$, i sigui $A = K \cup \{v_6, v_7, T, U, K_j\}$ on T és un v_5 amb tres veïns v_5 consecutius i U és un v_8 amb cinc veïns v_5 consecutius. Aleshores A és un conjunt inevitable de configuracions per G .

Demostració. Demostrem per reducció a l'absurd. Suposem que G no conté cap element d' A . Definim $\xi_0(v) = 6 - d_G(v)$ per $v \in V(G)$. Per ser G triangulació, els veïns de cada vèrtex v formen un cicle, en direm C_v , tal que cada vèrtex del cicle només és adjacent al precedent i al posterior vèrtex del cicle, per connectivitat de G . Per tant, cada vèrtex de C_v , té només dos veïns que pertanyen a C_v . Fixem v_k amb $k \geq 8$. Siguin $u_1, \dots, u_n$ els vèrtexs de grau cinc de C_{v_k} , definim el pes

$$w_{v_k}: \begin{array}{ccc} \{u_1, \dots, u_n\} & \longrightarrow & \{1, 2\} \\ s & \longmapsto & w_{v_k}(s) \end{array}$$

$$\text{tal que } w_{v_k}(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } s \text{ té un veí de grau cinc en } C_{v_k} \\ 2 & \text{altrament} \end{cases}$$

i transferirem càrrega des dels vèrtexs u de grau cinc als vèrtexs v_k amb $k \geq 8$ veïns d' u segons el seu pes $w_{v_k}(u)$. Notem p_{v_k} i q_{v_k} la quantitat de vèrtexs v_5 amb pes 1 i amb pes 2 en C_{v_k} respectivament. u transfereix a cada veí v_k amb $k \geq 8$ una càrrega de

$$\frac{w_{v_k}(u)|\xi_0(v_k)|}{p_{v_k} + 2q_{v_k}} = \frac{w_{v_k}(u)(k-6)}{p_{v_k} + 2q_{v_k}}$$

Sigui u un vèrtex de G i siguin $v_1, \dots, v_s$ els veïns de grau $k \geq 8$ d' u . Així, tenim:

$$\xi_1(u) = \begin{cases} \xi_0(u) - \sum_{i=0}^s \frac{w_{v_i}(u)|\xi_0(v_i)|}{p_{v_i} + 2q_{v_i}} & \text{si } d_G(u) = 5 \\ \xi_0(u) + p_u \frac{|\xi_0(u)|}{p_u + 2q_u} + q_u \frac{2|\xi_0(u)|}{p_u + 2q_u} & \text{si } d_G(u) \geq 8 \end{cases}$$

La nova càrrega ξ_1 és negativa o 0 per tots els vèrtexs de G . Veiem per què. Primer de tot, els vèrtexs v que augmenten de càrrega són els de grau $d_G(v) = k \geq 8$. Reben exactament una càrrega de

$$p_v \frac{(k-6)}{p_v + 2q_v} + q_v \frac{2(k-6)}{p_v + 2q_v},$$

per tant, queden amb càrrega total

$$6 - k + \frac{p_v(k-6)}{p_v + 2q_v} + \frac{2q_v(k-6)}{p_v + 2q_v} = 6 - k + \frac{p_v + 2q_v}{p_v + 2q_v}(k - 6) = 6 - k + k - 6 = 0$$

Veiem ara els vèrtexs v_5 . Sigui u un vèrtex v_5 qualsevol. u no pot tenir quatre o cinc veïns v_5 , ni tres veïns v_5 consecutius per haver suposat que G no conté T . Per tant, en té tres no consecutius, dos, un, o cap. Veiem els pesos que té u respecte als vèrtexs veïns v_k amb $k \geq 8$ (en direm vèrtexs majors) en tots els casos, i veiem

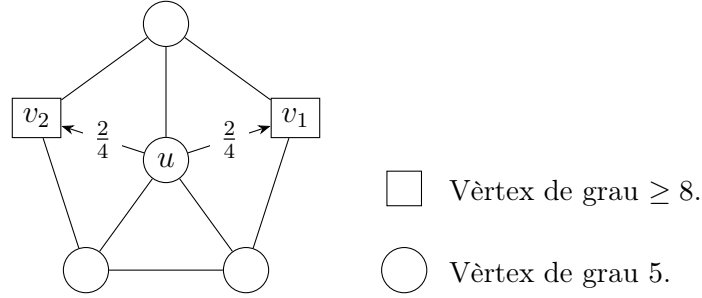
que, si u envia com a mínim $\frac{w_{v_i}(u)}{4}$ càrrega als veïns majors, u quedaria amb càrrega final $\xi_1(u) \leq 0$. Siguin $v_1, \dots, v_n$ els veïns majors d' u .

Cas 1: u té tres veïns v_5 no consecutius en C_u . I els altres dos veïns, són, doncs, vèrtexs majors no consecutius en C_u . Siguin aquests dos vèrtexs majors v_1 i v_2 . Veiem que $w_{v_1}(u) = w_{v_2}(u) = 2$, per tant, la càrrega final d' u , $\xi_1(u)$, quedaria

$$\xi_1(u) \leq 1 - \frac{2}{4} - \frac{2}{4} = 0$$

si u envia com a mínim la quantitat de càrrega que hem comentat a cada veí major.

Cas 1:



Cas 2: u té dos veïns v_5 consecutius en C_u . Els altres tres, són, doncs, vèrtexs majors consecutius en C_u . Siguin v_1, v_2, v_3 aquests vèrtexs en sentit horari. Els pesos queden doncs: $w_{v_1}(u) = w_{v_3}(u) = 1$ i $w_{v_2}(u) = 2$ i, per tant, la càrrega final quedaria

$$\xi_1(u) \leq 1 - \frac{1}{4} - \frac{2}{4} - \frac{1}{2} = 0$$

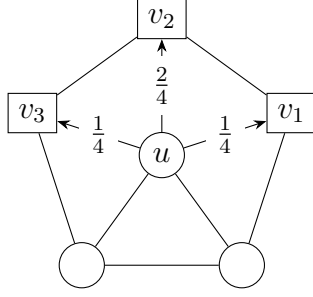
si u envia com a mínim la quantitat de càrrega que hem comentat a cada veí major.

Cas 3: u té dos veïns v_5 no consecutius en C_u . Els altres tres, són, doncs, vèrtexs majors, dos dels quals són consecutius i l'altre no en C_u . Siguin v_1, v_2, v_3 aquests vèrtexs en sentit horari. Suposem v_1, v_2 són consecutius en C_u . Els pesos queden doncs: $w_{v_1}(u) = w_{v_2}(u) = 1$ i $w_{v_3}(u) = 2$ i, per tant, la càrrega final quedaria

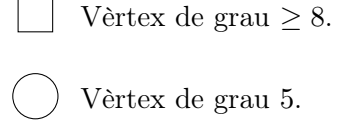
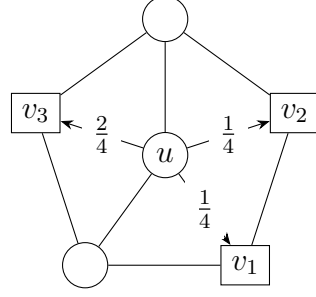
$$\xi_1(u) \leq 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{2}{4} = 0$$

si u envia com a mínim la quantitat de càrrega que hem comentat a cada veí major.

Cas 2:



Cas 3:



Cas 4: u té un veí v_5 . Els altres quatre, són, doncs, vèrtexs majors consecutius en C_u . Siguin v_1, v_2, v_3, v_4 aquests vèrtexs en sentit horari. Els pesos queden doncs: $w_{v_1}(u) = w_{v_4}(u) = 1$ i $w_{v_2}(u) = w_{v_3} = 2$ i, per tant, la càrrega final quedaria

$$\xi_1(u) \leq 1 - \frac{1}{4} - \frac{2}{4} - \frac{2}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} \leq 0$$

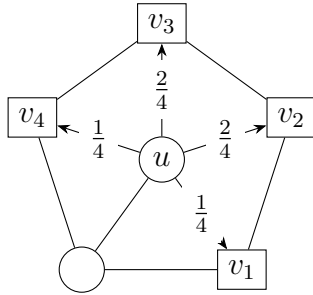
si u envia com a mínim la quantitat de càrrega que hem comentat a cada veí major.

Cas 5: u té cinc veïns majors. Siguin v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 aquests vèrtexs en sentit horari. Els pesos queden doncs: $w_{v_i}(u) = 2$ per $i = 1, 2, 3, 4, 5$ i, per tant, la càrrega final quedaria

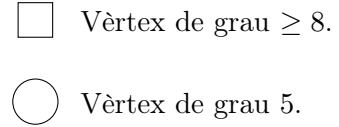
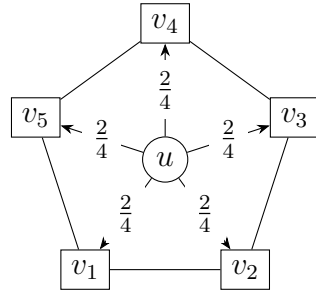
$$\xi_1(u) \leq 1 - 5 \frac{2}{4} = -\frac{3}{2} \leq 0$$

si u envia com a mínim la quantitat de càrrega que hem comentat a cada veí major.

Cas 4:



Cas 5:



Siguin altre cop u un vèrtex v_5 qualsevol i v un vèrtex v_k amb $k \geq 8$ adjacent a u . Veiem ara que la quantitat de càrrega que envia u a v és més gran que $\frac{w_v(u)}{4}$. Separem per casos sobre k .

Cas $k > 11$: Tenim $p_v + q_v \leq k$, i en particular $q_v \leq k$. Recordem que la càrrega que perd u i guanya v és

$$\frac{w_v(u)(k-6)}{p_v + 2q_v}$$

Veiem que,

$$\frac{w_v(u)(k-6)}{p_v+2q_v} \geq \frac{w_v(u)(k-6)}{2k} \geq \frac{w_v(u)}{4},$$

ja que,

$$p_v + q_v + q_v \leq k + k, \text{ i, } \frac{k-6}{2k} \geq \frac{1}{4} \text{ per } k > 11$$

Cas $k = 9, 10, 11$. Com que G no conté K_j per $j = 9, 10, 11$, tenim $p_v + q_v \leq k - 2$. Siguin $u_1, \dots, u_n$ els vèrtexs v_5 adjacents a v , i sigui H el graf format pels vèrtexs u_i per $i = 1, \dots, n$ i tal que dos vèrtexs $u_j, u_l \in H$ són adjacents en H si ho són en C_{v_k} . H està format per vèrtexs de grau zero, i per camins. Els extrems d'aquests camins són els vèrtexs $w_{v_k}^{-1}(1)$, per tant, p_v és parell (cada camí té exactament dos extrems que corresponen a un vèrtex de $w_{v_k}^{-1}(1)$). Veiem que $q_v \leq k - 4$.

Si $p_v = 0$,

$$q_v \leq \frac{k}{2} \leq k - 4 \text{ si } k = 9, 10, 11,$$

ja que H consisteix forçosament només de vèrtexs aïllats.

Si $p_v \geq 2$,

$$q_v = p_v + q_v - p_v \leq p_v + q_v - 2 \leq k - 4$$

perquè

$$p_v + q_v \leq k - 2,$$

per tant,

$$\frac{w_{v_k}(u)(k-6)}{p_v+2q_v} \geq \frac{w_{v_k}(u)(k-6)}{2k-6} \geq \frac{w_{v_k}(u)}{4}$$

perquè

$$p_v + q_v \leq k - 2, \text{ i, } q_v \leq k - 4 \text{ i per tant, } p_v + q_v + q_v \leq (k - 2) + (k - 4) = 2k - 6$$

i perquè

$$\frac{k-6}{2k-6} \geq \frac{1}{4} \text{ per } k = 9, 10, 11$$

Cas $k = 8$: Com que G no conté U , v té com a molt sis veïns v_5 (si en té més, en té segur cinc consecutius). Per tant, $p_v + q_v \leq 6$. Si $p_v + q_v = 6$, Les components de H , definit com en el cas anterior, tenen com a molt quatre vèrtexs, altre cop, perquè G no conté U . Per tant, H té dues components cadascuna amb tres vèrtexs, o una amb quatre i l'altre amb dos. En tot cas, $p_v = 4$ i $q_v = 2$, i, per tant, $p_v + 2q_v = 8$. Si $p_v + q_v = 5$, H pot tenir les següents seqüències de nombres de vèrtexs per component: $(4, 1)$, $(3, 2)$, $(3, 1, 1)$, $(2, 2, 1)$. En tots els casos, $p_v + 2q_v \leq 8$. Si $p_v + q_v \leq 4$, tenim $p_v + 2q_v \leq 8$ (es pot comprovar directament per casos sobre els valors que poden prendre p_v i q_v). Per tant,

$$\frac{w_{v_k}(u)(8-6)}{p_v+2q_v} \geq \frac{2w_{v_k}(u)}{8} = \frac{w_{v_k}(u)}{4}$$

Queda doncs demostrat que cada vèrtex u de grau cinc envia a cada veí v_k amb $k \geq 8$ una càrrega igual o major que $\frac{w_{v_k}(u)}{4}$, i hem vist que en aquest cas, v_5 queda amb càrrega $\xi_1(u) \leq 0$. Juntament amb el resultat que els vèrtexs v_k amb $k \geq 8$ reben prou poca càrrega per quedar també amb càrrega $\xi_1(v) \leq 0$, i sabent que la suma de càrrega inicial $\sum_{t \in V(G)} \xi_0(t) = \sum_{t \in V(G)} 6 - d_G(t) = 12$, tenim una contradicció, a

l'haver transferit càrrega de manera que no canviï el valor de la suma de càrregues. Per tant, com a mínim, una de les configuracions d' A ha d'aparèixer en qualsevol triangulació G *essencialment 6-connexa* tal que $\min\{d_G(v) \mid v \in V(G)\} = 5$. $\square$

Observem que qualsevol possible contraexemple mínim compleix les hipòtesis sobre G , per tant, A també és un conjunt inevitable per a qualsevol possible contraexemple mínim, és a dir, qualsevol possible contraexemple mínim G , conté un element d' A .

4 Reductibilitat

En aquesta secció discutirem la manera de comprovar que un contraexemple mínim no pot contenir certes configuracions, és a dir, la manera de demostrar que una configuració és reduïble, amb l'objectiu d'arribar a demostrar que totes les configuracions d'un conjunt inevitable són reduïbles.

4.1 D-reductibilitat

Veurem un cas concret de reductibilitat, la D – reductibilitat.

Definició 4.1. *Sigui K una configuració. Direm que K és una configuració bona si sempre que un contraexemple mínim G la conté, G també conté una configuració estesa $\overline{K}$ tal que K n'és una subconfiguració i $Q = \overline{K} - K$ és un cicle.*

Proposició 4.2. *Existeix un conjunt inevitable de configuracions bones.*

Demostració. La demostració es desprèn de les propietats dels contraexemples mínims, com ara la connectivitat i que són triangulacions i de les funcions γ de les configuracions d'un conjunt inevitable obtingut per K. Appel i W. Haken [1], [2]. $\square$

Definició 4.3. *Sigui G un contraexemple mínim que conté la configuració bona K . Sigui c una 4-coloració de $U = G - K$ qualsevol, i $c' = c|_{V(Q)}$. Diem que K és D -reduïble si o bé existeix una 4-coloració d de $\overline{K}$ tal que $d|_{V(Q)} = c'$, o bé existeix un conjunt d'intercanvis de Kempe sobre la 4-coloració c tal que la 4-coloració resultant e compleixi l'anterior propietat.*

4.2 Comprovació de reducibilitat sobre configuracions bones

Podem veure ara a l'abast l'últim pas a demostrar per veure que no existeixen contraexemples mínims (i, per tant, no existeixen contraexemples) pel teorema dels quatre colors. Tenim un conjunt A de configuracions tals que qualsevol contraexemple mínim G conté un element $K \in A$. El següent pas és veure que si un contraexemple mínim G conté un element d' A , G admet una 4-coloració, contradient que G sigui contraexemple. Això ho veiem demostrant que tots els elements d' A (o qualsevol conjunt inevitable pels contraexemples mínims) són D -reduïbles.

Observem que la configuració complementària $U = G - K$ admet una 4-coloració c , per ser G contraexemple mínim, que indueix una 4-coloració c' de $Q = \overline{K} - K$. Però donades les configuracions, no tenim informació sobre U ni sobre c . Per tant, hem de veure que per qualsevol possible c' 4-coloració de Q , podem obtenir una 4-coloració d de $\overline{K}$ tal que $d|_{V(Q)} = c'$, i tindrem aleshores que K és reduïble perquè c induiria forçosament una d'aquestes coloracions c' que sabem que podem estendre a $\overline{K}$ i podríem obtenir una 4-coloració de G combinant c i d , ja que coincideixen en els vèrtexs de Q . Veurem a continuació com comprovar que existeix d per cada possible c' 4-coloració de Q per cada configuració d' A .

Sigui G un contraexemple mínim que conté la configuració bona K . Sigui $U = G - K$ i $Q = \overline{K} - K$. Per comprovar la D-reductibilitat de K , hem de considerar els següents conjunts:

$$\mathcal{C}_Q = \{c \mid c \text{ és una coloració de } Q\}$$

$$\mathcal{C}_U = \{c \mid c \text{ és una coloració de } U\}$$

$$\mathcal{C}_{\overline{K}} = \{c \mid c \text{ és una coloració de } \overline{K}\}$$

$$\mathcal{C}_{\overline{K}|Q} = \{c' \mid c' = c|_{V(Q)} \text{ amb } c \in \mathcal{C}_{\overline{K}}\}$$

Per comprovar la reductibilitat d'una configuració K , es generen i llisten tots els elements de $\mathcal{C}_Q$ i tots els de $\mathcal{C}_{\overline{K}|Q}$ (és possible perquè tenim un nombre finit de vèrtexs i un nombre finit de colors en els dos casos). Per cada $c' \in \mathcal{C}_Q$, comprovem primerament si $c' \in \mathcal{C}_{\overline{K}|Q}$. En cas afirmatiu, passem al següent element de $\mathcal{C}_Q$, ja que tenim que c' la podem estendre a una 4-coloració de $\overline{K}$. Si $c' \notin \mathcal{C}_{\overline{K}|Q}$, hem de trobar una 4-coloració d de Q que puguem obtenir a partir de c' tal que $d \in \mathcal{C}_{\overline{K}|Q}$. Això ho farem llistant els possibles residus de Kempe (definit a continuació) i trobant un conjunt d'intercanvis de Kempe sobre c' tal que la 4-coloració resultant d sigui la desitjada.

Definició 4.4. *Sigui K una configuració bona, G un contraexemple mínim que conté K i c una 4-coloració de $U = G - K$. Sigui $Q = \overline{K} - K$ i $\pi = \alpha\beta/\gamma\delta$ una partició dels colors de c . Anomenem residus de Kempe als conjunts de vèrtexs de Q que formen part de la mateixa, o bé (α, β) –cadena de Kempe o bé (γ, δ) –cadena de Kempe en U . Anomenem $R(c, \pi)$ al conjunt de residus de Kempe.*

Veiem doncs que es desprèn de la definició anterior la manera com podem obtenir diferents coloracions de Q segons la 4-coloració de U . Podem dur a terme intercanvis de Kempe sobre els residus de Q , no sobre les cadenes de Kempe de Q . Encara, però, aquests intercanvis depenen d' U i de la 4-coloració de U , sobre els quals no tenim informació.

Altre cop, si $c' \notin \mathcal{C}_{\overline{K}|Q}$, cal considerar les cadenes de Kempe que es generen en Q amb la partició π i la 4-coloració c' i tots els possibles conjunts $R(c, \pi)$, que n'hi ha finits per finitud de cadenes de Kempe en Q i finitud de maneres com es poden agrupar. Per cada $R(c, \pi)$ doncs, cal trobar-ne un subconjunt F tal que, si en cada residu $r \in F$, executem un intercanvi de Kempe en c' , en obtenir la nova 4-coloració d , aquesta pertany a $\mathcal{C}_{\overline{K}|Q}$.

Comentar altre cop que cal dur a terme aquest càlcul per cada possible $R(c, \pi)$, perquè sabem que per G contraexemple mínim que conté una configuració bona K , $U = G - K$ admet una 4-coloració c , però com que no tenim informació sobre aquesta, i, per tant, no tenim informació sobre les cadenes de Kempe en aquesta,

cal veure que per qualsevol de les possibles agrupacions en cadenes de Kempe dels vèrtexs de Q podríem obtenir la coloració d' U desitjada, tal que indueixi una coloració de Q que pertanyi a $\mathcal{C}|_{\overline{K}|Q}$.

Si no trobéssim que per la partició triada, queda demostrat que K és D-reduïble, procedim igual amb una altra partició dels colors. Només cal trobar el resultat per una d'elles.

5 Revisió dels resultats i on queda curta la nostra prova

Arribats a aquest punt, caldria elaborar l'algorisme per la generació de tots els possibles conjunts $R(c, \pi)$ pels cicles $Q = \overline{K} - K$ amb K una configuració del nostre conjunt inevitable, i la manera d'iterar sobre els possibles subconjunts de residus i la generació de les coloracions alternatives comentades a partir d'aquests subconjunts. Caldria també elaborar l'algorisme per generar les possibles coloracions de $\overline{K}$ i de Q . En aquest aspecte queda molt curt aquest treball.

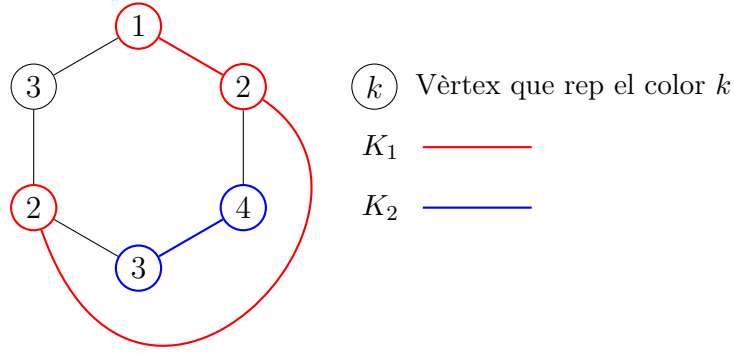
Comentarem a continuació, però, que no només queda curt en aquest aspecte, i per què tot i que tinguéssim aquests algorismes, no quedaria demostrat el teorema dels quatre colors.

5.1 Configuracions no reduïbles del nostre conjunt inevitable

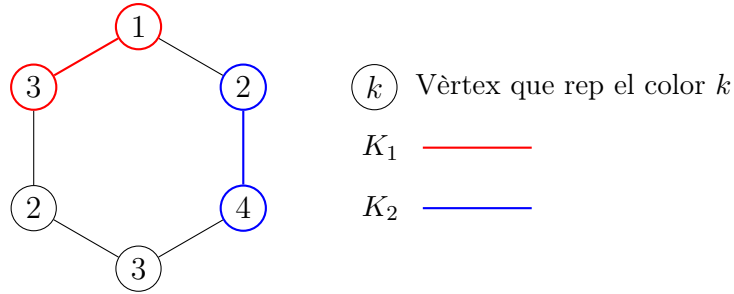
Veiem ara amb un exemple que no totes les configuracions del conjunt inevitable trobat en la secció tres són D-reduïbles.

Si un contraexemple mínim G conté la configuració $K = u$ amb u un vèrtex de grau sis, tindríem $Q = \overline{K} - K$ és un 6 - *cicle*. Siguin $v_1, \dots, v_6$ els seus vèrtexs en sentit horari. Per ser G contraexemple mínim, tindríem que $U = G - v$ admet una 4-coloració c . Depenent de U , aquesta 4-coloració podria ser perfectament tal que $c(v_1) = 1$, $c(v_2) = 2$, $c(v_3) = 4$, $c(v_4) = 3$, $c(v_5) = 2$, $c(v_6) = 3$.

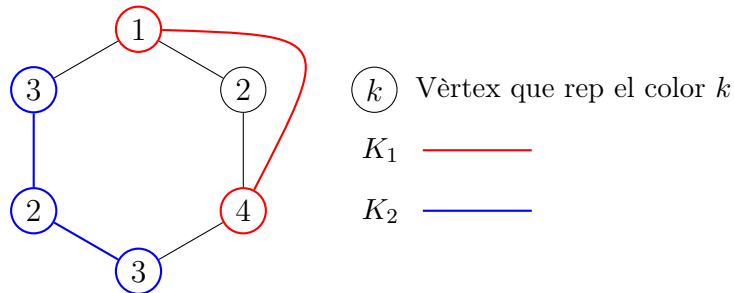
Prenem la primera partició $\pi = 1, 2/3, 4$. Pot ser, que en $U = G - v$, v_1 , v_2 i v_5 formin part de la mateixa $(1, 2)$ - *cadena de Kempe* K_1 i v_3 i v_4 formin part de la mateixa $(3, 4)$ - *cadena de Kempe* K_2 . En aquest cas, no podem obtenir una 4-coloració alternativa d' U tal que la puguem estendre a G , ja que tant si intercanviem els colors dels vèrtexs de K_1 , com si no, continua havent-hi vèrtexs de C en colors u i dos. El mateix passa amb la cadena K_2 , i amb els altres vèrtexs de Q . Per tant, sempre tindrem una 4-coloració d' U tal que els vèrtexs de C reben quatre colors diferents. Observem però, que encara que $v_5 \notin K_1$, seguiríem tenint el mateix problema.



Si prenem la partició $\pi = 1, 3/2, 4$, la cosa no millora. v_1 i v_6 formen part de la mateixa $(1, 3)$ – *cadena de Kempe* K_1 en U i v_2 i v_3 formen part de la mateixa $(2, 4)$ – *cadena de Kempe* K_2 també en U . En aquest cas, no podem tampoc desfer-nos de cap dels colors en C .



Finalment, si prenem la partició $\pi = 1, 4/3$, pot ser que en U , v_1 i v_3 formin part de la mateixa $(1, 4)$ – *cadena de Kempe* K_1 i v_4 , v_5 i v_6 formen segur part de la mateixa $(2, 3)$ – *cadena de Kempe* K_2 , i en aquest cas, tornem a tenir el mateix problema.



Hem vist, per tant, que l'algorisme descrit en la secció quatre no arribaria a afirmar que la configuració $K = u$ amb u un vèrtex de grau sis és D-reduïble. Per solucionar la situació, podríem demostrar la reductibilitat d'un vèrtex v_6 amb arguments més similars als de la primera secció, obtenint coloracions d' U amb millors propietats. O podríem modificar l'input de l'algorisme que verifica la D-reductibilitat. Això seria,

trobar un altre conjunt inevitable de configuracions. El que ens porta al següent punt, trobar un nou conjunt inevitable.

5.2 Nou conjunt inevitable

El següent pas és doncs trobar un 'millor' conjunt inevitable de configuracions. Millor en el sentit que no contingui configuracions que sabem que no són D-reduïbles, com un vèrtex de grau sis.

Primer eliminem del nostre conjunt inevitable la configuració v_6 . Podem intentar ara, modificar l'algorisme de descarrega per tal que, tot i la possible presència de vèrtexs de grau sis, continuem arribant a una càrrega final no positiva per tots els vèrtexs. No és l'alternativa més senzilla.

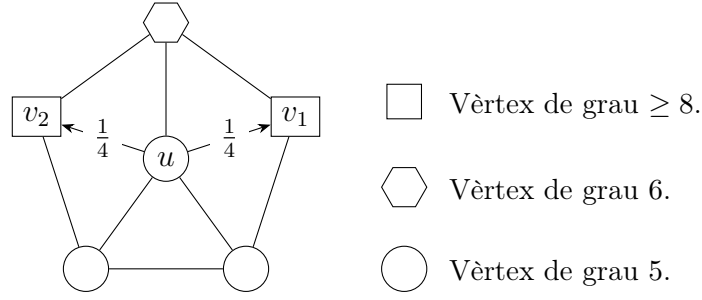
Podem també, afegir altres configuracions al conjunt a demostrar inevitable, de tal manera que sense modificar l'algorisme, es descarreguin tots els vèrtexs. Una manera, en el nostre cas, prou poc elegant d'aconseguir això, seria afegir al nostre conjunt a demostrar inevitable la configuració que consisteix en un vèrtex de grau sis adjacent a un vèrtex de grau cinc. Com que amb el nostre algorisme només augmenten de càrrega els vèrtexs adjacents als vèrtexs de grau cinc, cap vèrtex de grau sis augmentaria de càrrega i, per tant, tots els vèrtexs de grau sis quedarien amb càrrega final igual a la càrrega inicial, és a dir, 0. Els altres vèrtexs quedarien descarregats pels mateixos arguments de la demostració.

Si filem una mica més prim, però, podem veure que podem permetre adjacències entre vèrtexs de grau cinc i de grau sis. Si modifiquem lleugerament l'algorisme, per tal que permeti ara la presència de vèrtexs de grau sis de tal manera que quedi

$$\xi_1(u) = \begin{cases} \xi_0(u) - \sum_{i=0}^s \frac{w_{v_i}(u)|\xi_0(v_i)|}{p_{v_i}+2q_{v_i}} & \text{si } d_G(u) = 5 \\ \xi_0(u) & \text{si } d_G(u) = 6 \\ \xi_0(u) + p_u \frac{|\xi_0(u)|}{p_u+2q_u} + q_u \frac{2|\xi_0(u)|}{p_u+2q_u} & \text{si } d_G(u) \geq 8. \end{cases}$$

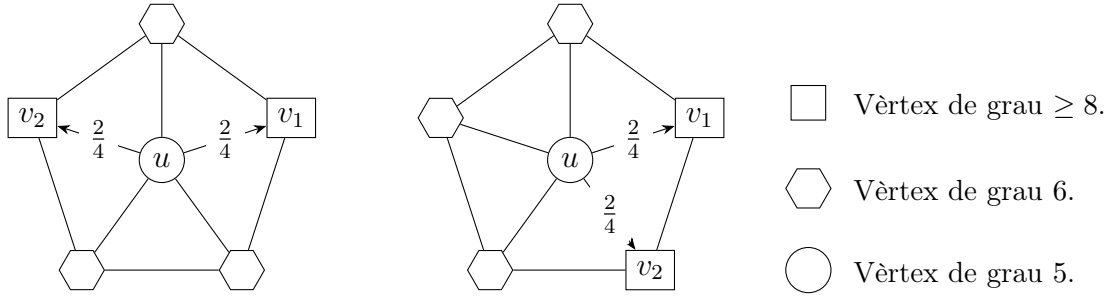
On altre cop, $v_1, \dots, v_s$ són els veïns de grau $k \geq 8$ d'un vèrtex de G . Tenim, doncs, que els vèrtexs de grau $k \geq 8$ queden descarregats, pel mateix argument i els de grau sis queden amb càrrega final exactament zero.

Veiem, però, que així com estan les coses, els vèrtexs de grau cinc podríem quedar amb càrrega positiva, en el cas, per exemple, que tinguin només dos veïns de grau $k \geq 8$ no consecutius, i un veí de grau sis. En aquest cas, segons els pesos definits, no seria suficient demostrar que la càrrega enviada als vèrtexs v de grau $k \geq 8$ sigui major o igual a $\frac{w_v(u)}{4}$.

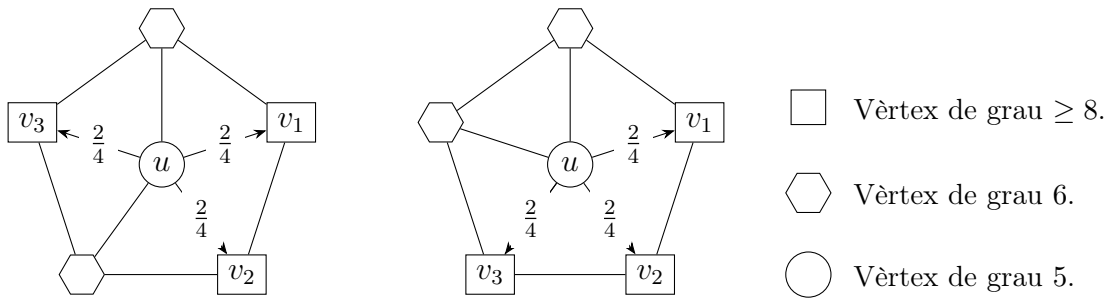


Caldria, doncs, o bé redefinir l'algorisme de descàrrega, per exemple, redefinint els pesos, o evitar aquesta situació (i totes aquelles en les quals tinguem el mateix problema).

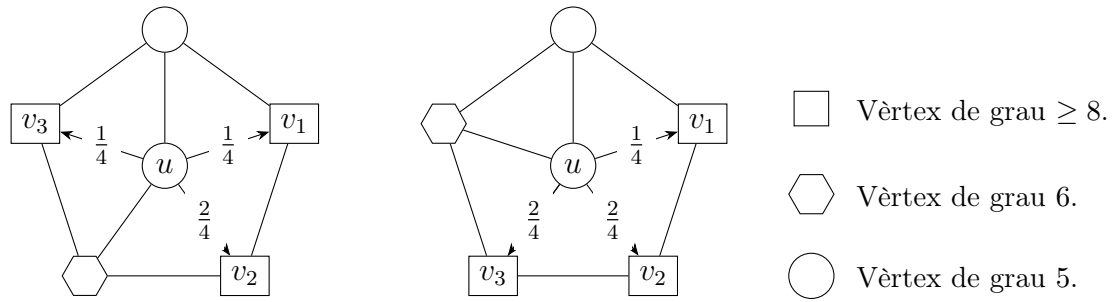
Podríem afegir al conjunt a demostrar inevitable les adjacències entre vèrtexs de grau cinc i de grau sis que ens generin aquests problemes, permetent només els casos on els vèrtexs de grau cinc quedin sobradament descarregats. Podríem permetre, per exemple, un vèrtex v_5 amb tres vèrtexs v_6 consecutius o no, i dos vèrtexs v_k amb $k \geq 8$ adjacents a v_5 .



També podríem permetre un vèrtex v_5 amb dos vèrtexs v_6 consecutius o no, i tres vèrtexs v_k amb $k \geq 8$ adjacents a v_5 .



Les últimes configuracions que hem considerat a permetre, són un vèrtex v_5 amb un vèrtex v_6 , un vèrtex v_6 i tres vèrtexs v_k consecutius o no, amb $k \geq 8$ adjacents a v_5 .



Caldria, doncs, afegir al conjunt a demostrar inevitable, totes les altres possibles maneres com un vèrtex v_5 és adjacent a un vèrtex v_6 .

La millor manera d'aconseguir un nou conjunt inevitable, en el nostre cas, seria combinar les dues opcions. Redefinir l'algorisme de descàrrega, treure les configuracions que sabem no són D-reduïbles i afegir-ne de noves que poden ser-ho.

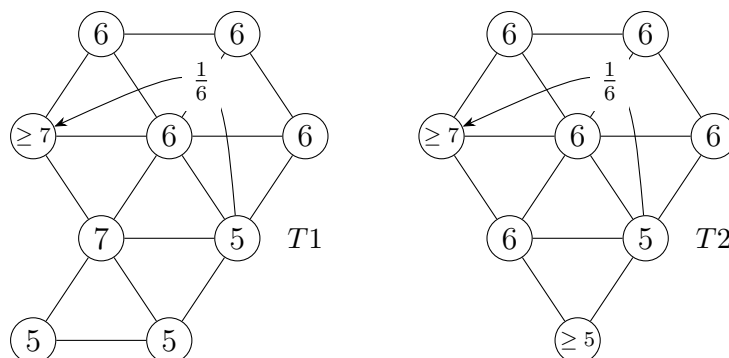
El següent pas seria, explicitar adequadament el nou conjunt inevitable que hem comentat implícitament, i executar el programa per comprovar-ne la D-reductibilitat. En cas que es trobessin configuracions no D-reduïbles, tornar a millorar el conjunt inevitable.

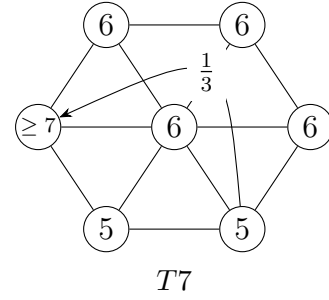
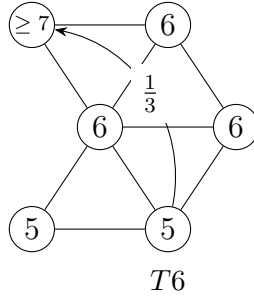
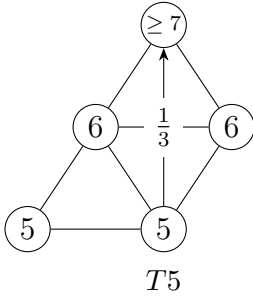
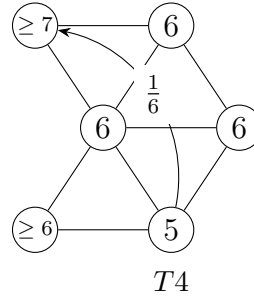
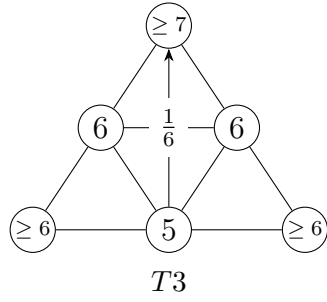
5.3 Mètode de descàrrega alternatiu

En la primera prova del teorema, K. Appel i W. Haken, defineixen una llista de transferències de càrregues dibuixant-les, i n'extreuen el conjunt inevitable. Afegint transferències, podien millorar més senzillament l'algorisme de descàrrega. En posarem algun exemple i les explicarem a continuació.

Aquestes transferències són de dos tipus. Transferències seguint arestes que uneixen vèrtexs de grau cinc amb vèrtexs de grau set o més (com en el nostre algorisme, en el sentit de ser transferències al llarg d'arestes), i transferències a través d'una, dues o tres arestes que uneixen dos vèrtexs de grau sis. Les segones reben el nom de T – *dischargings* i són les que il·lustrarem.

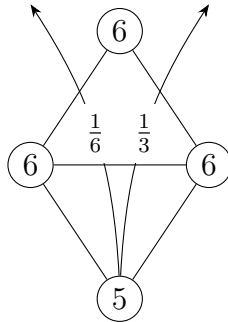
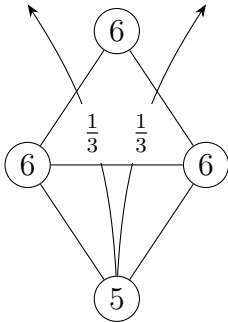
Si apareix a la triangulació una de les configuracions dibuixades a continuació (amb l'orientació explicitada o una altra), es transfereix càrrega segons indica la fletxa.



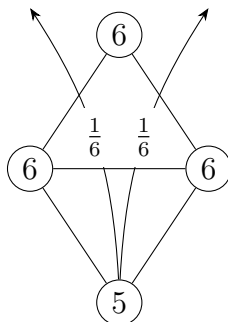
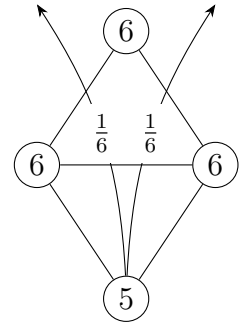


(k) Vèrtex amb restricció sobre el seu grau.

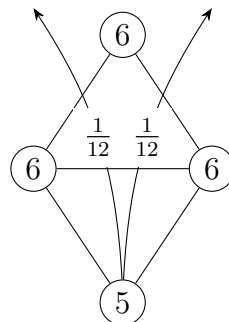
S'afegeix, a aquestes normes de transferència, les següents excepcions. Si ocorren dos T – *dischargings* des d'un mateix vèrtex v_5 a través de la mateixa primera aresta, però s'arriba a diferents vèrtexs majors (en el seu cas, els vèrtexs majors són vèrtexs amb grau $k \geq 7$), es modifica la quantitat enviada. Ho il·lustrem a continuació.



Canviem
per:

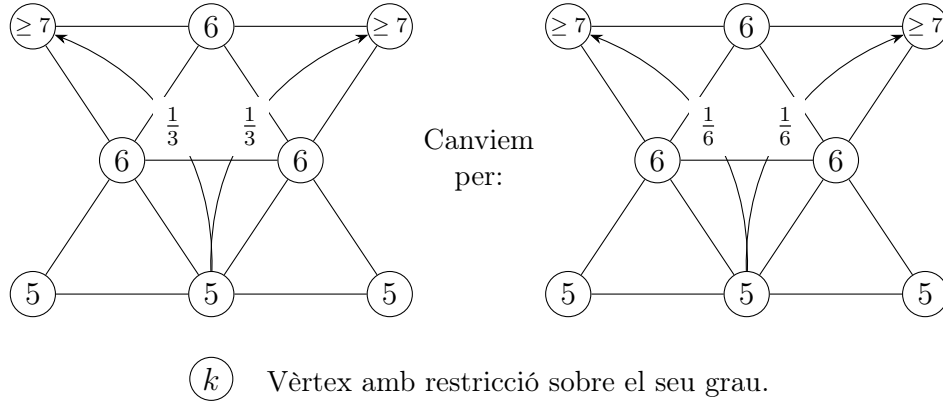


Canviem
per:



(k) Vèrtex amb restricció sobre el seu grau.

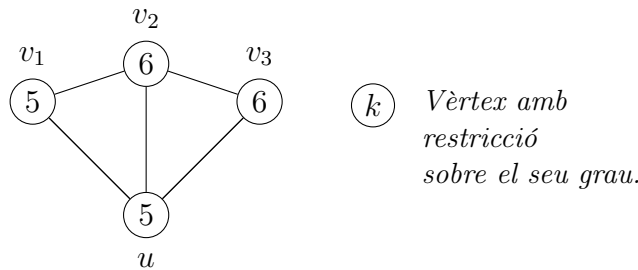
Posem un exemple on sigui necessària una d'aquestes modificacions. Si apareix la següent configuració en la triangulació, hauríem de fer dos T -dischargings $T6$, als quals canviem la càrrega transferida com il·lustrem també.



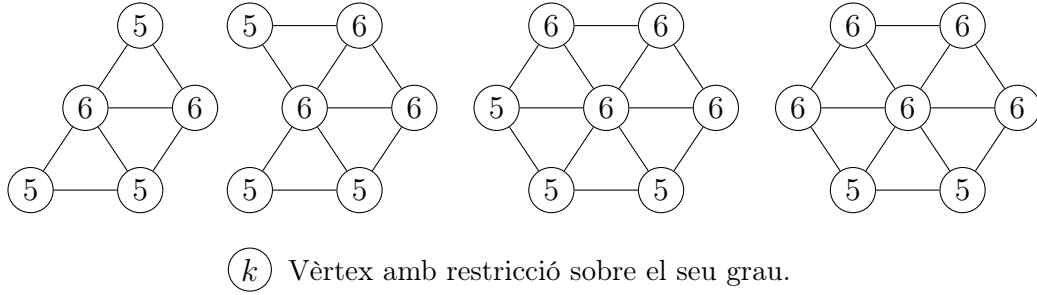
K. Appel i W. Haken, en el seu paper, defineixen també les transferències de càrrega de curt abast, seguint arestes que uneixen un vèrtex de grau cinc amb un vèrtex de grau set o més. Es poden trobar a [1]. També defineixen un conjunt A de 1834 configuracions que es pot trobar a [2]. Com hem fet nosaltres a la secció 3, suposen que una triangulació essencialment 6-connexa qualsevol no conté cap element del conjunt A i demostren que aleshores, aplicar les transferències descarregaria tots els vèrtexs de la triangulació, arribant a contradicció per haver establert una càrrega inicial com la nostra, la qual sumada sobre tots els vèrtexs és dotze.

Afegim un resultat que demostren K. Appel i W. Haken a [1] per mostrar com utilitzen les normes de transferència i el seu conjunt inevitable.

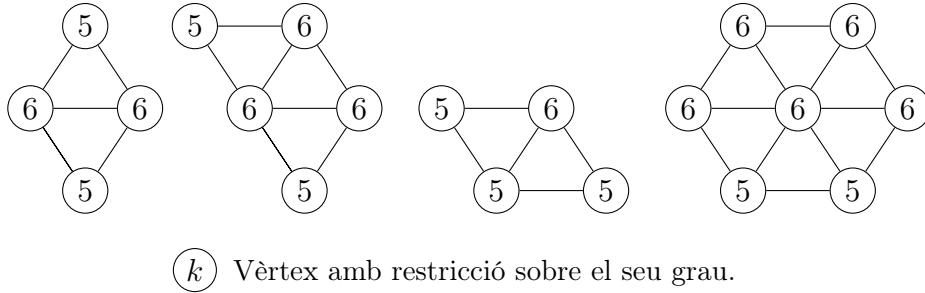
Proposició 5.1. *Sigui G una triangulació essencialment 6-connexa que no conté cap element del conjunt A de 1834 configuracions. Sigui $u \in V(G)$ un vèrtex de grau cinc amb tres vèrtexs adjacents v_1, v_2, v_3 consecutius de graus cinc, sis i sis respectivament. Aleshores, es transfereix $\frac{1}{3}$ de càrrega des de u a través de l'aresta que té per extrems v_2 i v_3 .*



Demostració. Demostrem per reducció a l'absurd. Suposem que cap T -discharging transfereix la càrrega comentada. Tenim, doncs, que cap de les configuracions amb les que definim les normes de transferència $T5, T6, T7$ apareix en G , perquè aleshores Tindríem just el T -discharging que hem suposat que no tenim. Per tant, G conté una de les següents quatre configuracions:



I, per tant, necessàriament conté una de les següents configuracions, que formen part del conjunt A :



□

Demostren de manera anàloga proposicions similars.

Demostren també, que si després d'aplicar els T – *dischargings* i un subconjunt de les normes de descàrrega seguint arestes, les que anomenen L – *Situations*, algun vèrtex v_5 queda amb càrrega terminal major que zero, la triangulació conté forçosament una d'entre les configuracions d'una llista. D'aquesta llista, s'eliminen les configuracions que apareixen en A , i les restants es revisen. D'aquesta revisió s'obté que en tots aquests casos, hi ha present una configuració tal que, aplicar també les altres normes de descàrrega seguint arestes, les L – *Situations*, seria suficient perquè la càrrega terminal de tots els vèrtexs v_5 sigui igual o menor que zero.

De les normes de transferència, directament s'obté que cap vèrtex de grau sis rep càrrega, per tant, la càrrega terminal d'aquests vèrtexs és igual a la inicial, que és zero.

Demostren també, que els vèrtexs v_k amb $k \geq 7$ tenen tots càrrega terminal menor o igual que zero, arribant així a contradicció, amb el que demostren la inevitabilitat del seu conjunt.

Un cop aquí, com ja hem comentat, comproven amb ordinador la reductibilitat de les configuracions del conjunt A , demostrant així el teorema dels quatre colors.

Comentari final al lector

El treball acaba aquí, amb la meva esperança, de tot cor, d'haver aconseguit que al lector li hagi resultat agradable i lleugera la lectura, d'haver-me explicat de manera prou entenedora, i, sobretot, d'haver aconseguit que aprengui alguna cosa nova que hagi trobat interessant.

El teorema dels quatre colors, he descobert, té molta història a la qual hi ha contribuït un munt de matemàtics, amb un munt de feina. Feina que ha resultat indispensable per assolir la demostració, i feina que no. Tanmateix, animo al lector, si ha trobat el treball mínimament interessant, a explorar aquests continguts en els quals he basat el meu treball.

Finalment, vull agrair el temps dedicat a la lectura de les meves paraules. Gràcies.

Referències

- [1] Appel, K.; Haken, W.: Every planar map is four colorable. Part I: Discharging, *Illinois Journal of Mathematics*, 429-490, 1977.
- [2] Appel, K.; Haken, W.: Every planar map is four colorable. Part II: Reducibility, *Illinois Journal of Mathematics*, 491-567, 1977.
- [3] Robertson, N.; Sanders, D.; Seymour, P.; Thomas, R.: The four-colour theorem, *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 2-44, 1997.
- [4] Birkhoff, G.: The reducibility of maps, *American Journal of Mathematics*, 115-122, 1913.
- [5] Kempe, A.: On the geographical problem of the four colours, *American Journal of Mathematics*, 193-198, 1879.
- [6] Cranston, A.; West, D.: An introduction to the discharging method via graph coloring, *Discrete Mathematics (revista)*, 766-769, 2016.
- [7] Patra, A.; Mondal, P.; Krishnan, L.: Heawood's theorem on 5-colorability of planar graphs, *CSA E0 221: Discrete Structures*, 1-4, 2014.
- [8] Diestel, R.: Graph theory, segona edició, *Springer*, 70, 2000.
- [9] Soifer, A.: The new mathematical coloring book, segona edició, *Springer*, 231-235, 2024.
- [10] Allaire, F.; Swart, R.: A systematic approach to the determination of reducible configurations in the four-color conjecture, *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 340-344, 1978.
- [11] Wilson, R.: Four colours suffice (diapositives), *University of Illinois Urbana-Champaign*, 1-39, 2017.
- [12] Aigner, M.; Ziegler, G.: Proofs from the book, segona edició, *Springer*, 161-164, 1999.
- [13] Bondy, J.; Murty, U.: Graph theory, *Springer*, 391-405, 2008.
- [14] Saaty, T.; Kainen, P.: The four-color problem: assaults and conquest, *McGraw-Hill*, 52-83, 1977.