



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

DOBLE GRAU DE MATEMÀTIQUES I ADMINISTRACIÓ I DIRECCIÓ D'EMPRESSES

Treball final de grau

LES FUNCIONS RACIONALS EN EL PLA I EL DUOPOLI DE COURNOT

Autora: Aïda Barranco Aresté

Director: Dr. Xavier Jarque i Ribera

Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 13 de gener de 2025

Abstract

In this document we will analyze plane maps with denominators that are undefined at one or more of their points, due to the denominator vanishing in at least one of the components of the function. We will introduce some new related concepts, *focal point* and *prefocal curve*, which are essential elements that appear when studying this type of functions. The next step will be the development of two examples using the analysed concepts with all the necessary calculations. Finally, we will present an economic application in our quotidian lifes: Cournot competition in the context of a duopoly.

Resum

Aquest treball estudiarà el comportament de les funcions en el pla amb denominador que en algun dels seus punts no estan definides, degut a l'anul·lació del denominador d'almenys alguna de les dues components. S'introduiran els conceptes de *punt focal* i *corba prefocal*, elements imprescindibles que apareixen a l'estudiar aquest tipus de funcions. Tot seguit es desenvoluparan dos exemples aplicant els conceptes prèviament analitzats amb els càlculs pertinents pas a pas. Finalment es plantejarà una aplicació econòmica d'aquestes funcions que podem trobar en la vida quotidiana: el model de Cournot; vist en un duopoli de dues empreses privades.

Agraïments

Vull agrair aquesta memòria a tots els docents que han col·laborat, de manera directa o indirecta, al meu aprenentatge al llarg de tot el grau fent possible d'aquesta manera arribar a aquest punt.

Especialment, agraeixo al meu tutor, el Dr. Xavier Jarque i Ribera, per l'acompanyament i suport en el desenvolupament d'aquest treball.

Índex

1	Introducció	1
2	Definicions prèvies	5
2.1	Casos generals	5
2.2	Funcions invertibles	12
2.3	Funcions no invertibles	13
3	Exemples	16
3.1	Una funció no invertible amb una línia prefocal	16
3.2	El mètode de la secant	19
4	Aplicacions a models econòmics	25
4.1	El model de Cournot	25
4.1.1	El model matemàtic	27
4.1.2	Exercici acadèmic amb càlculs	31
4.2	Dinàmica del duopoli de Cournot en dues empreses	32
5	Conclusions	41

Capítol 1

Introducció

El projecte

A continuació es desenvolupa un treball de final de grau sobre les funcions en el pla amb components racionals i una aplicació d'aquestes funcions en una versió avançada del model de Cournot clàssic. Com n'és evident, el document combina principalment aspectes de dues disciplines fonamentals: les matemàtiques i l'economia. Així doncs, el treball s'estructura en dues parts principals força diferenciades però alhora interrelacionades: una primera part purament teòrica i matemàtica i una segona part dedicada a aplicacions que podem trobar en l'economia.

La memòria que es presenta en aquest treball final de grau és un estudi sobre un tipus concret de sistemes dinàmics del pla (dimensió 2) on les components de les funcions que els defineixen són funcions racionals. Naturalment, les seves components tenen denominadors que, eventualment, s'anul·len. Aquesta circumstància en determina, en gran mesura i després d'un estudi rigorós, la dinàmica global. És per això que també es coneixen com sistemes dinàmics “amb denominadors”. De fet, dels punts del pla que anul·len el o els denominadors, segons siguin una o dues de les seves components les que tenen denominador, els que tenen un paper encara més rellevant són els que, simultàniament, també anul·len els corresponents numeradors.

Així doncs, com dèiem, el treball que esmentem vol aprofundir en les propietats generals d'aquests sistemes dinàmics. No obstant, també es vol incidir en possibles aplicacions d'aquest estudi “abstracte” proposant-ne dos models coneguts i particulars. L'un és el mètode de la secant que s'ha estudiat al grau com a mètode numèric per al càlcul de zeros de funcions polinòmiques d'una variable. Mostrarem que hom pot veure que aquest mètode iteratiu (en anglès “*root-finding*” *algorithm*) es pot escriure i reinterpretar com un sistema dinàmic racional del pla $\mathbb{R}^2$ amb denominador en una, i només una, de les seves components.

La segona aplicació que considerarem en aquesta memòria és una versió avançada (o modificada, si es vol) del model clàssic de Cournot per tal d'estudiar el comportament estratègic de dues (duopoli) o diverses (oligopoli) empreses que competeixen en quantitats de producció en un mercat de productes homogenis. Aquesta variació del model de Cournot també es redueix a l'estudi d'un sistema dinàmic discret generat per dues components amb denominador amb la peculiaritat que el denominador és comú per ambdues components.

El punt de partida del nostre treball és un article (de fet, una sèrie d'articles), [1], dels autors Bischi, Gardini i Mira on estudien el cas de sistemes dinàmics $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de la forma

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(x, y) \\ \frac{N(x, y)}{D(x, y)} \end{pmatrix}$$

on $F(x, y)$, $N(x, y)$ i $D(x, y)$ són funcions diferenciables per a tot punt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Els punts del pla que compleixen la condició $D(x, y) = 0$ jugaran un paper crucial en la dinàmica del sistema. Donarem les definicions de *punt focal* i *corba prefocal* i estudiarem diferents comportaments dels punts que s'hi troben al voltant, considerant diferents arcs que creuin el *conjunt de no definició* (on el denominador s'anul·la). Trobarem, així mateix, una correspondència 1-a-1 entre el pendent d'arcs que passen pels punts focals i les seves imatges per la funció T .

Com es veurà més endavant, en aquest estudi ens centrarem només en els punts focals *simples*, que seran aquells que produeixin les bifurcacions de primera classe. No es tindran en compte en el document les bifurcacions de segona classe, que seran considerades no generals. Diferenciarem també les funcions segons siguin invertibles o no ho siguin. En aquest segon cas podrem calcular la corba anomenada *conjunt crític* que actuarà com un tipus de frontera dinàmica separant regions del pla segons el nombre de punts que hi van a parar per la funció T . Aplicarem tots els conceptes treballats en un primer exemple més aviat acadèmic: una funció no invertible amb una sola línia prefocal on el pla quedarà dividit en dues regions Z_0 i Z_2 .

Un altre text que resulta una base d'aquest treball és l'article dels autors Garijo i Jarque, [2], on s'estudia el mètode numèric de la secant per a trobar les arrels d'un polinomi d'una variable vist en forma de sistema dinàmic amb denominador. Per definició, un *sistema dinàmic discret* sobre un espai X és una funció $f : X \rightarrow X$ i les òrbites induïdes per aquesta partint d'un punt o condició inicial $x_0 \in X$. Matemàticament això es representa com la seqüència $\{x_n := f^n(x_0)\}_{n \geq 0}$ on f^n denota la composició n -èssima de la funció f . Aquesta formulació és especialment útil per a poder analitzar la convergència del mètode, així com els seus punts fixos i altres esdeveniments associats.

Quant al model econòmic de l'oligopoli de Cournot clàssic, es considera un dels punts claus per en la formulació dels fonaments de la disciplina de Teoria de Jocs així com també de l'Organització Industrial. Aquest tipus d'estudis acadèmics, entre molts altres, han esdevingut les bases per elaborar sistemes dinàmics discrets que representen l'evolució d'un joc en el mercat. L'eina d'anàlisi econòmica esmentada es basa en la premissa de que els competidors són conscients de la producció de la resta de participants en el mercat i prenen les decisions pròpies en funció de la producció de la resta.

La competència en Cournot (l'ingrés marginal és igual al cost marginal) resulta un punt intermig entre el model de competència perfecta (el preu és igual al cost marginal) i el monopoli (una sola empresa domina el mercat). Per tant, ens trobem en un mercat de competència imperfecta; però, considerarem que els productes brindats són homogenis, la qual cosa implica que el consumidor final no es capaç de distingir quin de tots els productes ha fabricat el producte o ha ofert el servei del que està gaudint. Podem també observar que un mercat oligopolístic no és eficient, ja que els competidors només volen maximitzar els seus guanys en lloc de maximitzar el benestar del conjunt de participants.

En la Teoria de Jocs, un equilibri de Nash és aquella solució per a un joc en que cada jugador coneix i ha triat la seva millor estratègia tot coneixent les estratègies de la resta de jugadors. Si tots els participants mantenen el seu full de ruta, cada membre de forma

individual no podrà situar-se en una posició millor modificant la seva decisió. En el tipus mercat esmentat, el preu en l'equilibri en el que els membres es veuen obligats a competir està establert per un equilibri de Nash, ja que cap d'ells tindrà incentius en moure's de la quantitat assolida. A més a més, l'estabilitat d'aquest equilibri n'és la clau. Com ja hem dit, buscant la igualtat entre els marginals, les empreses decidiran si augmentar o disminuir la producció que ofereixen al mercat per tal d'arribar a l'òptim i un cop assolit, no se'n mouran.

El teorema de Cournot permet als economistes fer prediccions sobre com reaccionaran els competidors en un mercat oligopolístic i, com llavors els preus s'ajustaran; tal i com explica Sonia D. en [7]. El principal avantatge del model podriem dir que és l'ajuda a predir els comportaments dels mercats en funció de l'oferta i la demanda i, d'aquesta manera, permetre als diferents (i limitats) competidors establir estratègies en el joc (quina quantitat cal produir i a quin preu convé fer-ho). Actualment podem trobar oligopolis, per exemple, en la indústria de producció energètica.

Com resulta evident, les companyies que participen en l'oligopoli busquen maximitzar els seus beneficis privats de manera simultània, però poden també optar per contribuir a millorar, en part, el benestar del consumidor. Basant-se en una funció de preu o demanda inversa lineal, autors com Askar han estudiat profundament la dinàmica del comportament de Cournot sota aquesta premissa en articles com [3], aplicant tècniques molt similars a l'estudi de les funcions racionals en el pla com les que aprofunditzarem en aquest document.

En el nostre estudi en concret, prendrem una funció d'utilitat simètrica i quadràtica com a problema del consumidor, que tindrà com a objectiu maximitzar-ne el seu benestar. Per aproximar-nos una mica més a la realitat, determinarem una restricció pressupostària a aquesta utilitat. Amb un seguit de càlculs d'optimització, s'obtindrà el preu i la quantitat òptima a produir resultant del pertinent equilibri de Nash.

Essencialment, aquest treball persegueix dos objectius principals. En primer lloc, aprofundir en el concepte, el funcionament i les propietats dels sistemes dinàmics racionals del pla. En segon lloc, poder aplicar les propietats i elements trobats en la primera part a models específics. Com ja s'ha mencionat, la investigació es fomentarà en un seguit d'articles que proporcionaran una entrada tant teòrica com pràctica en el camp d'estudi. L'enfocament establert en el document podria també obrir la porta a nous estudis per a modelitzar situacions del món real (amb dimensions superiors), oferint eines per entendre la interacció entre competència i optimització en contextos econòmics.

Estructura de la Memòria

Per concloure aquesta introducció resumim com s'ha estructurat el treball presentat en aquesta memòria. Com ja s'ha esmentat prèviament, el document està dividit en dos grans blocs. Els Capítols 2 i 3 tindran com a punt de partida les matemàtiques. Diferent és en el Capítol 4, on s'hi tractaran temes econòmics. Veiem tot seguit un breu resum del contingut de cada un dels capítols i les seves seccions respectives.

El Capítol 2 constitueix el fonament teòric principal del treball essent una base sòlida sobre la qual es construirà la resta del document. Es presenten les funcions del pla amb components racionals. Hi trobem una Secció general, la Secció 2.1, on s'introdueixen les nocions bàsiques i imprescindibles per a comprendre aquest tipus de funcions. Tot seguit,

en les Seccions 2.2 i 2.3 s'estudien propietats concretes caracteritzant si les funcions són invertibles o no són invertibles, respectivament.

En el Capítol 3 s'apliquen els conceptes teòrics presentats en el Capítol 2, mostrant la utilitat en diferents contextos matemàtics i numèrics. Hi trobarem dos exemples de funcions del pla amb una component racional. Per una banda, en la Secció 3.1 s'estudia una funció amb quatre paràmetres reals a determinar. Mitjançant l'anàlisi de punts singulars i altres elements destacables, veurem que és no invertible i hi aplicarem les propietats ja estudiades. D'altra banda, en la Secció 3.2 aprofundirem el mètode numèric de la secant per a trobar les arrels d'un polinomi tot transformant-lo en un sistema dinàmic discret amb una component racional a través d'un canvi de variable.

En el següent Capítol, el Capítol 4, es dedica a explorar una aplicació econòmica concreta, centrant-nos en el model econòmic de Cournot. Primerament hi trobarem una introducció teòrica al model (definirem en què consisteix i quin paper té en la nostra l'economia, més concretament quan apareix en forma de duopoli). A continuació es presenta el plantejament matemàtic del model a través d'una funció d'utilitat a maximitzar i mitjançant un seguit de càlculs s'arriba al plantejament de la maximització ponderada per part de les empreses del benefici privat i del consumidor en forma de funció del pla amb una sola component amb denominador comú.

Finalment, en el Capítol 5 es sintetitza el treball en una breu conclusió marcant els resultats obtinguts i plantejant possibles extensions del treball.

Capítol 2

Definicions prèvies

L'objectiu principal d'aquest Capítol serà estudiar les funcions que tenen per espai, tant de sortida com arribada, el pla. Es podrien considerar infinits tipus de funcions i totes elles tindrien les seves característiques i aplicacions distintives, per això nosaltres ens centrarem en aquelles funcions que tenen una característica que les fa ser peculiars, l'existència d'un denominador en una de les seves components. El punt de partida d'aquest estudi serà l'article sobre les funcions del pla amb denominador dels autors Bischi, Gardini i Mira, [1].

És habitual trobar funcions en el pla definides per $x' = F(x, y)$ i $y' = G(x, y)$ en les quals almenys una de les dues componens, F i/o G , pugui ser una funció racional. Si el denominador d'aquest quocient s'anul·la, poden succeir esdeveniments particulars que cal estudiar detalladament, com ara l'aparició d'infinits o d'indeterminacions. En aquest Capítol aprofundirem en aquest tipus de situacions, considerant primer un cas general comú i a continuació separarem les funcions en dos grans blocs, aquelles que són invertibles i aquelles que no ho són. Dins de cada bloc estudiarem els diferents casos en els que ens podem trobar i definirem els múltiples elements que hi apareixen esdevenint imprescindibles per a poder-les estudiar.

2.1 Casos generals

Començarem considerant funcions en el pla d'una forma més general, només donant-ne l'estructura bàsica i en definirem els elements principals que hi apareixen per a poder contextualitzar i entendre tot el que es desenvoluparà al llarg d'aquest document. Amb l'aparició del denominador, el quocient de la o les components d'una determinada funció pot ser finit, anul·lar-se en el denominador, o que tant el numerador com el denominador esdevinguin nuls i d'aquesta forma obtenir la indeterminació $0/0$. Separarem els tres casos i observarem com es comporta la nostra funció estudiada en cada un d'ells.

Sigui $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una funció de la forma $(x', y') = T(x, y)$, amb

$$T : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(x, y) \\ G(x, y) \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

on $F(x, y)$ i $G(x, y)$ assumirem en tot moment que són funcions diferenciables i amb

denominador. És a dir,

$$F(x, y) = \frac{N_1(x, y)}{D_1(x, y)} \quad G(x, y) = \frac{N_2(x, y)}{D_2(x, y)}$$

de tal manera que N_1, N_2, D_1, D_2 estan definides a tot $\mathbb{R}^2$.

Podem suposar, per a que resulti més senzill, que només una de les dues funcions esmentades és una funció racional. Considerem doncs, per simplificar, que la primera funció no té denominador, per tant, $D_1(x, y) = 1$. Aleshores la nostra funció quedarà expressada de la següent manera:

$$T : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(x, y) \\ \frac{N(x, y)}{D(x, y)} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

El nostre objectiu principal serà conèixer què succeeix quan calculem la imatge d'un punt del pla per aquesta funció.

Definició 2.1. *Anomenem conjunt de no definició per T , δ_S , a la corba del pla formada pel conjunt de punts en els quals $D(x, y) = 0$ i per tant la funció T no està ben definida. Matemàticament,*

$$\delta_S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid D(x, y) = 0\}.$$

Suposarem que δ_S és una corba suau en el pla.

La recurrència obtinguda per la iteració de la funció T estarà ben definida sempre i quan el punt (x_0, y_0) que es prengui com a la condició inicial pertanyi al conjunt del pla

$$E := \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{k=0}^{\infty} T^{-k}(\delta_S).$$

Un cop determinat això, cal veure què passa amb els punts que no pertanyen a aquest conjunt. Com ja hem avançat, a l'hora de calcular la imatge d'un punt per T ens podem trobar en tres situacions ben diferents. Tot seguit separarem i analitzarem els tres casos possibles tenint en compte si s'anul·len o no el numerador i el denominador de la funció $G(x, y)$. Sigui (x_0, y_0) un punt del pla qualsevol.

CAS 1: $D(x_0, y_0) \neq 0$.

És evident que l'aplicació $T : E \rightarrow E$ està ben definida per a tots els punts que compleixen aquesta la condició, per tant, per a tot element de l'espai E existeix una imatge concreta i calculable.

CAS 2: $D(x_0, y_0) = 0$ però $N(x_0, y_0) \neq 0$.

Sigui γ una arc en el pla que talli la corba δ_S en el punt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Volem saber quina és la imatge de l'arc per T , tenint en compte que aquesta no està definida en el punt mencionat. És a dir, el nostre objectiu és calcular

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} T(\gamma(\tau)) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left(F(x, y), \frac{N(x, y)}{D(x, y)} \right). \quad (2.3)$$

Suposem que en un petit entorn del punt (x_0, y_0) la corba γ està parametritzada per $\tau \in (-\epsilon, +\epsilon)$ de la forma

$$\gamma(\tau) : \begin{cases} x(\tau) = x_0 + \xi_1\tau + \xi_2\tau^2 + \dots \\ y(\tau) = y_0 + \eta_1\tau + \eta_2\tau^2 + \dots \end{cases} \quad \tau \neq 0. \quad (2.4)$$

Aleshores, en aquest entorn, podem considerar que la corba γ està formada per dos arcs, $\gamma = \gamma_- \cup \gamma_+$, essent γ_- el segment de la corba γ considerant $\tau \in (-\epsilon, 0)$ i γ_+ el segment de la corba γ considerant $\tau \in (0, +\epsilon)$; tal i com es mostra en la Figura 2.1. És evident que $\lim_{\tau \rightarrow 0} \gamma_-(\tau) = (x_0, y_0) \quad \forall \tau < 0$ i $\lim_{\tau \rightarrow 0} \gamma_+(\tau) = (x_0, y_0) \quad \forall \tau > 0$. Per tant, existeix el límit, és finit i coincideix en $\tau = 0$.

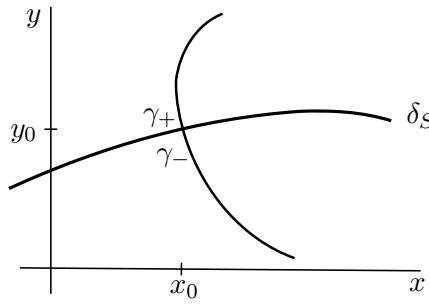


Figura 2.1: La corba γ que creua el conjunt de no definició en el punt (x_0, y_0) la podem representar per la unió de dos arcs: γ_+ , per $\tau > 0$, i γ_- , per $\tau < 0$.

Calculant el límit a mesura que ens apropem al punt de tall tenim,

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} T(\gamma(\tau)) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left(F(x(\tau), y(\tau)), \frac{N(x(\tau), y(\tau))}{D(x(\tau), y(\tau))} \right) = (F(x_0, y_0), \pm\infty).$$

Per tant, la imatge $T(\gamma(\tau))$ està formada per dos arcs disjunts asimptòtics a la recta vertical $x = F(x_0, y_0)$. El signe de l'infinit de la segona component dependrà del comportament de $N(x, y)$ i $D(x, y)$ al voltant del punt (x_0, y_0) , veguem-ho. Com que $N(x, y)$ és continua, no s'anulla en un entorn del punt (x_0, y_0) (ja que estem considerant el cas $N(x_0, y_0) \neq 0$). Podem suposar doncs que $N(x, y) > 0$ (es pot prendre el mateix argument per a raonar el cas anàleg $N(x, y) < 0$). Ens trobem davant quatre casuístiques diferents. Tal i com es veu en la Figura 2.2, en les dues representacions superiors s'observa el comportament de $T(\gamma(\tau))$ quan el denominador de la funció G canvia de signe en el punt en que la corba $\gamma(\tau)$ creua el conjunt de no definició, δ_S . Contràriament, en les dues representacions inferiors, el denominador $D(x, y)$ manté el signe que tenia abans de tallar la corba δ_S .

CAS 3: $D(x_0, y_0) = 0$ i $N(x_0, y_0) = 0$.

El tercer cas que ens podem trobar és el que resulta més intreressant, donat que apareixen nous elements en el pla. En la segona component de la imatge obtenim una indeterminació, ja que, tant el numerador com el denominador s'anul·len. En aquest cas és possible que el límit existeixi i tingui un valor finit, però també podria ocórrer que no fos així. D'aquesta manera, si el límit existeix, la imatge d'un arc $\gamma(\tau)$ com el que hem

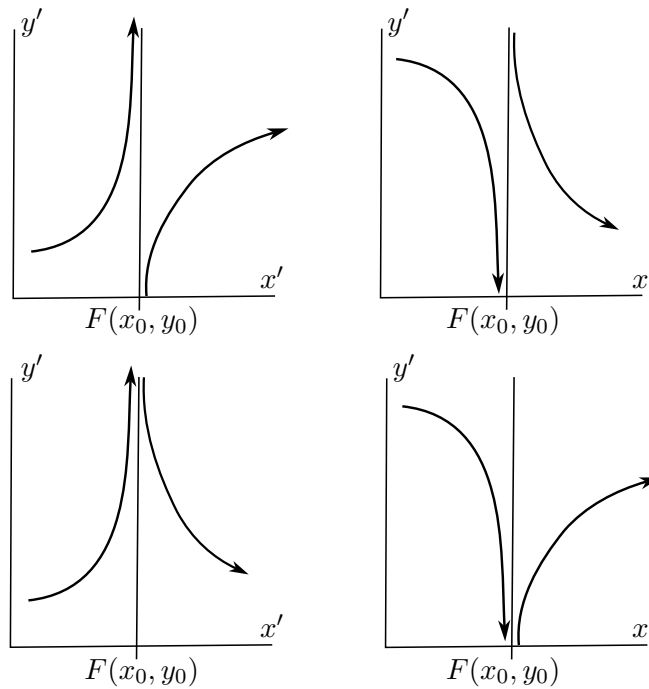


Figura 2.2: Les quatre casuístiques que ens podem trobar quan calculem la imatge per T de la corba $\gamma(\tau)$ que talla la corba δ_S en el punt $(x_0, y_0) \in \delta_S$. En els dos gràfics superiors observem els casos en que el denominador canvia de signe en el punt en que la corba γ creua el conjunt de no definició. En els dos gràfics inferiors, quan succeeix aquest aconteixement, el denominador de la funció G no canvia de signe.

considerat en el cas anterior serà un altre arc que creuarà la recta asimptòtica en el punt $(F(x_0, y_0), y)$ amb

$$y = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{N(x(\tau), y(\tau))}{D(x(\tau), y(\tau))}.$$

Definició 2.2. Sigui T una funció amb una expressió com (2.1). Anomenem punt focal $Q = (x_0, y_0)$, o punt d'indeterminació, a aquell punt el qual la seva imatge per T en almenys una de les dues components és de la forma $0/0$ i existeixen arcs $\gamma(\tau)$, tal que $\gamma(0) = Q$ i el límit $\lim_{\tau \rightarrow 0} T(\gamma(\tau))$ és finit.

Definició 2.3. El conjunt de tots els valors finits derivats de prendre diferents arcs $\gamma(\tau)$ que passen per Q s'anomena conjunt prefocal, o corba prefocal, i es denota per δ_Q .

Observació 2.4. En el cas de les funcions que nosaltres estem estudiant, δ_Q és la recta vertical $x = F(x_Q, y_Q)$.

En la Figura 2.3 podem veure el comportament per T de diferents arcs que creuen el conjunt de no definició δ_S , en punts diferents. Quan el creuament es produeix exactament en el punt focal, la imatge per T és contínua. Podem veure també que en els dos punts que no són focals, el comportament és el mateix que en el segon cas que hem considerat anteriorment.

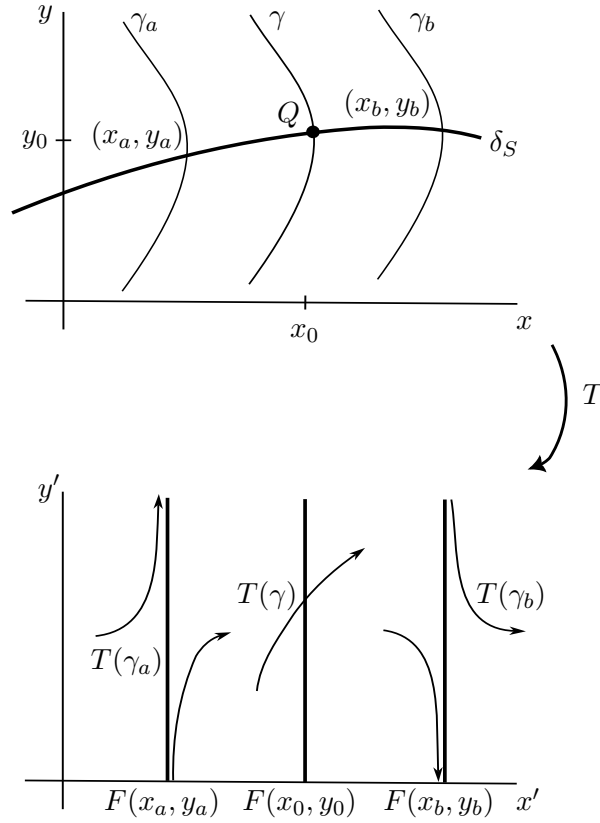


Figura 2.3: Imatge per T de diferents arcs γ_i que creuen la corba δ_s en diversos punts, essent el punt Q un punt focal. En el punt focal la imatge per T és contínua, en altres punts del conjunt de no definició diferents al punt focal, la imatge són dues corbes asimptòtiques a la recta vertical $x = F(x_0, y_0)$.

Considerem ara el sistema d'equacions el qual consisteix en anul·lar tant el numerador com el denominador de la component racional de la nostra funció, és a dir,

$$\begin{cases} N(x, y) = 0 \\ D(x, y) = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

Definició 2.5. Direm que un punt focal $Q = (x_0, y_0)$ és simple si és solució del sistema (2.5) i els vectors tangents a les corbes $D(x, y)$ i $N(x, y)$ en el punt $D(x_0, y_0) = N(x_0, y_0)$ són linealment independents.

Lema 2.6. Un punt $Q = (x_0, y_0)$ és un punt focal simple $\Leftrightarrow N_x D_y - N_y D_x \neq 0$ i Q és solució de l'Equació (2.5); essent

$$N_x := \frac{\partial N}{\partial x}(x_0, y_0), \quad N_y := \frac{\partial N}{\partial y}(x_0, y_0), \quad D_x := \frac{\partial D}{\partial x}(x_0, y_0) \quad i \quad D_y := \frac{\partial D}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Demostració. Aquesta prova resulta pràcticament trivial, ja que, tal i com hem definit què significa que Q sigui un punt focal simple, només ens cal provar que això és equivalent a que els vectors tangents a les corbes $D(x, y)$ i $N(x, y)$ en els punts $D(x_0, y_0) = N(x_0, y_0) = Q$, siguin linealment independents i que $N_x D_y - N_y D_x \neq 0$.

Considerem $N(\tau)$ i $D(\tau)$ dues corbes transversals tals que $N(0) = D(0) = Q$. Siguin $Tg_D = (D_y, -D_x)$ i $Tg_N = (N_y, -N_x)$ els vectors tangents a les corbes N i D en el punt Q , respectivament. Aleshores els dos vectors seran linealment independents si i només si el producte escalar $\langle Tg_D, Tg_N \rangle \neq 0$. Desenvolupant aquesta expressió obtenim exactament la condició $N_x D_y - N_y D_x \neq 0$. $\square$

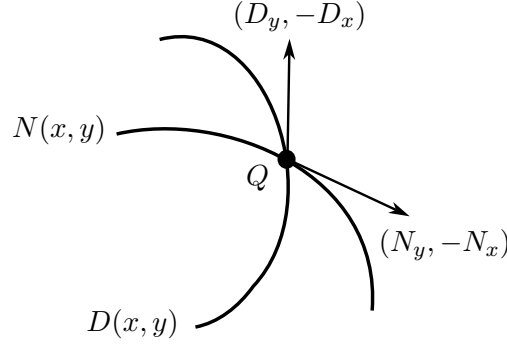


Figura 2.4: Representació de les corbes transversals $D(x, y)$ i $N(x, y)$ que es tallen exactament en el punt focal Q . També apareixen representats els seus respectius vectors tangents.

En el desenvolupament d'aquest treball ens centrarem només en els punts focals simples, per tal d'evitar trobar-nos amb bifurcacions de segon grau o superiors per les quals caldria un estudi més extens i profund de les intencions que es pretenen en aquest document.

Proposició 2.7. *Sigui T una funció del pla de com (2.2) i sigui Q un punt focal simple del que en deriva la corba prefocal δ_Q . Aleshores existeix una relació 1-a-1 entre el pendent d'un arc γ no tangent a δ_S que passa per Q i el punt $(F(Q), y)$ per on $T(\gamma)$ tallant δ_Q existeixi, definida per $m \rightarrow (F(Q), y(m))$, amb*

$$y(m) = \frac{N_x + mN_y}{D_x + mD_y} \quad (2.6)$$

Recíprocament, també es dona la relació $(F(Q), y) \rightarrow m(y)$ amb

$$m(y) = \frac{D_x y - N_x}{N_y - D_y y} \quad (2.7)$$

Demostració. Considerem un arc parametritzat com (2.4) que talli la corba δ_S en el punt $Q = (x_0, y_0)$. En un entorn molt proper a Q , on $\tau \approx 0$, podem aproximar l'arc per la seva part lineal, és a dir, per la recta $y - y_0 = m(x - x_0)$, on definim $\xi_1 = x - x_0$ i $\eta_1 = y - y_0$. Aleshores, el pendent de l'arc en el punt Q és $m = \frac{\eta_1}{\xi_1}$. Com que les funcions $N(x, y)$ i $D(x, y)$ són diferenciables, podem aplicar el desenvolupament de Taylor a primer ordre en aquest punt i expressar-les com

$$\begin{aligned} N(x, y) &= N(x_0, y_0) + N_x(x - x_0) + N_y(y - y_0) + O_2(\|(x, y)\|^2) \\ D(x, y) &= D(x_0, y_0) + D_x(x - x_0) + D_y(y - y_0) + O'_2(\|(x, y)\|^2) \end{aligned}$$

on O_2 i O'_2 representen els termes d'ordres superiors. A més a més, com que les funcions $N(x, y)$ i $D(x, y)$ s'anul·len en el punt Q , tenim

$$\begin{aligned} N(x, y) &= N_x \xi_1 + N_y \eta_1 + O_2(\|(x, y)\|^2) \\ D(x, y) &= D_x \xi_1 + D_y \eta_1 + O'_2(\|(x, y)\|^2) \end{aligned}$$

Aleshores, tenint en compte que Q és un punt focal simple,

$$y = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{N(x(\tau), y(\tau))}{D(x(\tau), y(\tau))} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{N(x_0, y_0) + N_x(x - x_0) + N_y(y - y_0)}{D(x_0, y_0) + D_x(x - x_0) + D_y(y - y_0)} = \frac{N_x \xi_1 + N_y \eta_1}{D_x \xi_1 + D_y \eta_1}$$

Aquest límit existeix i és finit, ja que el denominador no s'anul·la en un entorn de Q donat que, pel Lema 2.6, el pendent $m = \frac{\eta_1}{\xi_1}$ de l'arc γ en el punt Q és diferent al pendent de la corba δ_S en aquest mateix punt.

Finalment, fent servir les definicions $\xi_1 = x - x_0$, $\eta_1 = y - y_0$, $m = \frac{\eta_1}{\xi_1}$ i substituint en l'expressió anterior, obtenim que la imatge de la segona component per T depèn únicamet de les coordenades del punt inicial i del pendent de l'arc que talla la corba δ_S :

$$y = \frac{N_x + mN_y}{D_x + mD_y}$$

De la mateixa manera, aïllant m d'aquesta l'expressió obtenim

$$m = \frac{D_x y - N_x}{N_y - D_y y}$$

□

Tal i com acabem de veure, hi ha una relació directa entre el pendent m i la segona component de la imatge d'un punt focal per T . Recordem també que la primera component té un valor calculable i finit $F(Q)$.

Corol·lari 2.8. *Diferents arcs γ_i que tallin la corba δ_S en un mateix punt focal Q amb diferents pendents m_i , són enviats per T als diferents arcs ω_i que tallen la recta vertical δ_Q en diferents punts.*

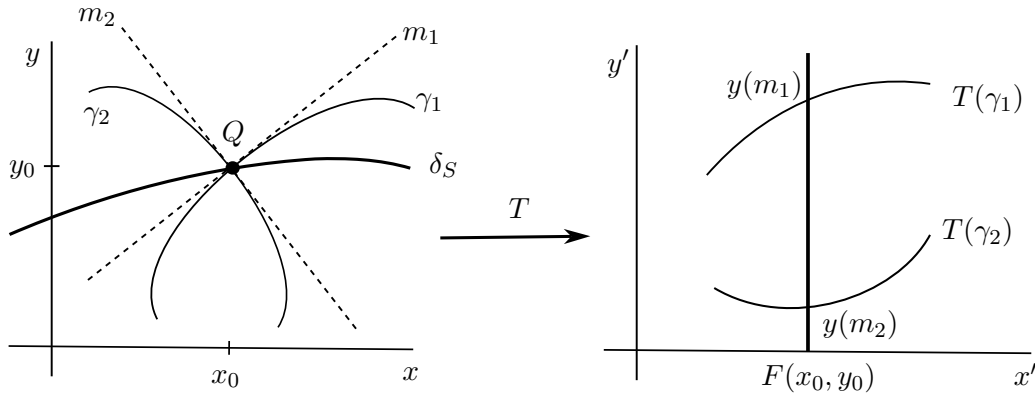


Figura 2.5: Les imatges per T de diferents arcs que tallen la corba δ_s en un mateix punt focal Q són arcs del pla que tallen la recta $F(Q)$ en una altura determinada que depèn només del pendent de l'arc inicial.

Vist d'una altra manera, el corol·lari ens diu que quan girem el pendent d'un arc que talla la recta δ_S en un punt focal Q , la imatge d'aquest punt va recorrent la recta δ_Q en una direcció concreta, depenent de quin sigui el sentit de rotació que s'ha escollit inicialment.

2.2 Funcions invertibles

Un cop vistos els elements genèrics que podem trobar en les funcions del pla amb una component racional, ens centrarem en un grup més concret dins aquesta varietat. L'aplicació T amb la que nosaltres treballem podria ser tant invertible globalment, és a dir, que tot punt de la imatge tingui una única preimatge, o podria passar que donat un punt de la imatge, aquest tingui més d'una preimatge. En aquesta Secció definirem primerament què significa que una funció sigui invertible i a continuació, per a la nostra funció, determinarem algunes propietats que es donen quan considerem aquesta característica. Acabarem veient que, fins i tot, podem arribar a donar-li sentit a la preimatge de tota la recta prefocal a la vegada, malgrat que això formalment sigui un abús del llenguatge.

Definició 2.9. *Siguin X, Y dos conjunts i sigui $f : X \rightarrow Y$ una funció. Direm que f és invertible si existeix una altra funció $g : Y \rightarrow X$ tal que $g \circ f = id_X$ i $f \circ g = id_Y$. En el nostre cas, la funció T és invertible si existeix una altra funció T^{-1} tal que $T^{-1} \circ T = id$ i $T \circ T^{-1} = id$.*

Si T és invertible, per a tot punt (x', y') d'un entorn proper a la recta δ_Q existeix una única antimatge, $T^{-1}(x', y')$, que es troba també en un entorn del punt focal Q ; tal i com ho podem veure representat de manera simplificada en la Figura 2.6. A més a més, si T^{-1} és contínua al llarg de tota la recta δ_Q , podem escriure $T^{-1}(\delta_Q) = Q$. Si es dona aquesta situació, direm que la recta prefocal δ_Q està “focalitzada” en el punt focal Q per l'aplicació T^{-1} .

Notem que amb el mot “focalitzar” realment estem fent un abús del llenguatge, ja que, matemàticament, no podem calcular la preimatge d'una recta i afirmar que aquesta és un punt, degut que a la Proposició 2.7 hem determinat que l'aplicació invertible es caracteritza per la relació 1-a-1. És a dir, a cada punt li hauria de correspondre un únic punt i no una recta sencera.

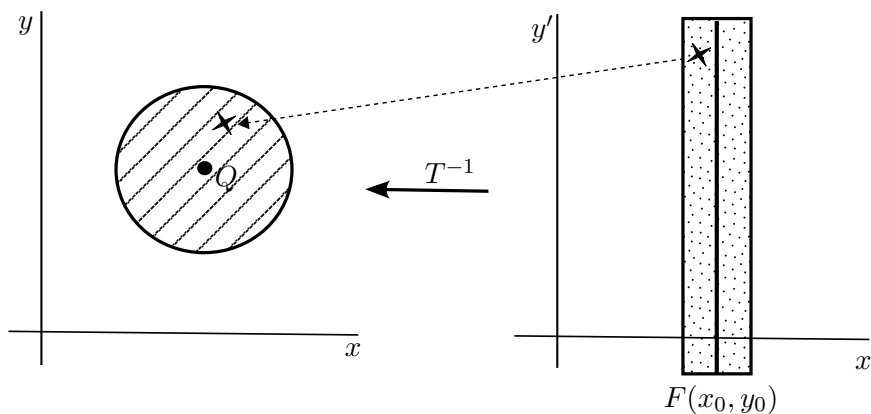


Figura 2.6: Si la funció T és invertible, les imatges per l'aplicació T^{-1} de tots els punts que siguin prou propers a la recta δ_Q van a parar en un entorn del punt focal Q .

Cal recordar, però, que la funció T no està definida en el punt focal Q , ja que, T^{-1} no pot ser considerada estrictament la inversa de T en aquest punt degut a que pren el valor de la indeterminació $0/0$ en la segona component. Per a calcular-ne la imatge, hem hagut de passar al límit.

Finalment podem observar que, si l'aplicació T és invertible, aplicant la Proposició 2.7, les preimatges per T de diferents arcs ω_i que tallen la corba prefocal δ_Q en un mateix punt, són arcs γ_i tallant la recta δ_S en el punt i Q que comparteixen el mateix pendent m . Veure Figura 2.7.

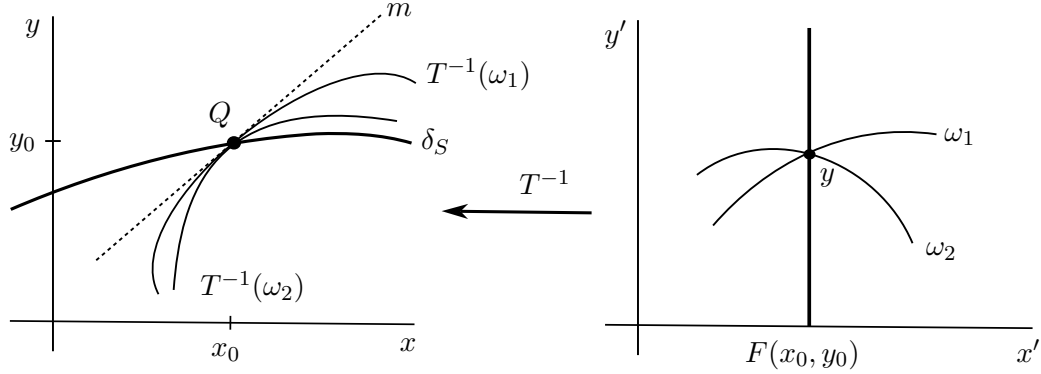


Figura 2.7: Les preimatges de diferents corbes ω_i que tallen la recta δ_S en un mateix punt són arcs que tenen el mateix pendent m en el punt focal Q en l'espai d'arribada.

Lema 2.10. Segons la definició de corba prefocal, si $(x', y') \in \delta_Q$ aleshores

$$\det(DT^{-1})(x', y') = 0.$$

Demostració. Si suposem que la funció T^{-1} està definida en tots els punts de δ_Q , aleshores per definició tenim que δ_Q està focalitzada en Q per T^{-1} . Amb la qual cosa T^{-1} no és localment invertible, per no estar ben definida, en els punts de la corba prefocal, donant-se una relació diferent de 1-a-1, que podríem dir, ∞ -a-1. Aleshores, en aquests punts no podem aplicar el Teorema de la Funció Inversa. Això implica doncs $\det(DT^{-1})(x', y') = 0 \forall (x', y') \in \delta_Q$. $\square$

2.3 Funcions no invertibles

En l'anterior Secció hem considerat el cas en que tot punt té una única preimatge, anem ara a considerar la possibilitat de que existeixin dues o més preimatges, on veurem que la situació que se'ns planteja és força diferent a la que acabem d'analitzar. Per entrar en context, primerament definirem què significa en la nostra situació que una funció no sigui invertible, tot seguit observarem que apareixen nous elements en el nostre mapa que resulten imprescindibles d'estudiar i també en trobarem algunes propietats peculiars.

Definició 2.11. Anomenem funció no invertible a aquella per la qual existeixen $k \geq 1$ inverses en diferents regions del pla. En particular, diversos punts focals tenen per imatge una mateixa corba prefocal δ_Q en $\mathbb{R}^2$, cada un d'ells amb la seva corresponent relació 1-a-1 entre la imatge de la component racional i el pendent m_k .

Per exemple, en el cas $k = 2$, es podria donar la següent situació. Suposem que s'han obtingut com a solució del sistema lineal (2.5) dos punts focals Q_1 i Q_2 , però, a més a més, en el sentit de (2.3), el límit de la imatge de tots dos punts per T coincideix en la mateixa recta prefocal tal i com podem veure en la Figura 2.8.

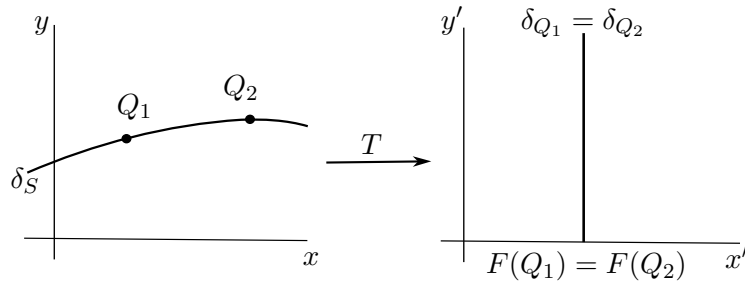


Figura 2.8: Exemple d'una funció del pla no invertible degut a que dos punts focals, Q_1 i Q_2 comparteixen la mateixa recta prefocal, δ_{Q_i} , $i = 1, 2$. Per a cada punt de la recta prefocal podem trobar dues aplicacions inverses que cada una va a parar a un dels dos focals.

Quan la funció T és no invertible, l'espai $\mathbb{R}^2$ es troba dividit en diferents regions obertes que anomenarem Z_k , els punts de les quals tenen exactament k diferents preimatges de rang 1 derivades de k diferents aplicacions inverses. Dit d'una altra manera, si $(x', y') \in Z_k$ aleshores $T(x_j, y_j) = (x', y') \forall j = 1, \dots, k$. Podem veure també cada una d'aquestes aplicacions inverses localment com un homeomorfisme, és a dir, quan mirem les preimatges dels punts $(x, y) \in Z_k$ totes tenen exactament k solucions i totes elles compleixen la relació 1-a-1.

Una figura especial que apareix en les funcions del pla amb denominador que no són invertibles és el conjunt crític LC . Veguem-ne a continuació la definició i destaquem-ne algunes propietats.

Definició 2.12. *El conjunt crític LC és la corba formada pel conjunt de punts que tenen, com a mínim, dues preimatges de rang 1 que es fusionen o col·lapsen.*

Observació 2.13. Els segments del conjunt LC són fronteres que separen les diferents regions Z_k .

El recíproc d'aquesta observació, però, no és sempre cert, perquè es podria donar la situació en que es passi d'una zona Z_k a una altra zona $Z_{k'}$ per $k, k' \in \mathbb{N}$, $k \neq k'$, degut a que una de les preimatges d'un punt està sortint de la zona de definició (anant cap a $\pm\infty$).

Definició 2.14. *El conjunt de les preimatges del conjunt crític LC s'anomena LC_{-1} i el podem calcular a través de la funció T com $T(LC_{-1}) = LC$.*

Lema 2.15. *Si T és diferenciable, $LC_{-1} \subseteq J_0 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \det(DT) = 0\}$.*

Demostració. Aplicant el Teorema de la Funicó Inversa, podem veure que la funció T no és localment invertible en els punts del conjunt LC_{-1} , ja que per a qualsevol punt que pertanyi a l'entorn d'un punt de la corba LC_{-1} , T envia dos o més punts diferents d'aquest a la mateixa imatge. $\square$

Com que en aquest document hem puntualitzat que únicament considerariem els punts focals simples, podem afirmar que $Q_i \notin LC_{-1} \forall i$.

Proposició 2.16. *Si una funció del pla no invertible amb denominador té punts focals que no pertanyen a LC_{-1} , aleshores per a cada corba prefocal δ_Q^i es compleix $LC \cap \delta_Q^i = \emptyset$.*

Demostració. Procedim per reducció a l'absurd i suposem que la intersecció no és buida, per tant, $LC \cap \delta_Q^i \neq \emptyset$. Aleshores existeix un punt P tal que $P \in LC \cap \delta_Q^i$ per algun i . Per definició de LC , P té almenys dues preimatges que col·lapsen en un punt focal $Q = T_j^{-1}(\delta_Q^i)$, però, a la vegada es dona que $Q \in LC_{-1}$ la qual cosa resulta una contradicció amb la hipòtesi que hem assumit. $\square$

Proposició 2.17. *Sigui T una funció no invertible i de la forma (2.2). Si els punts focals Q_i no pertanyen a LC_{-1} i totes les inverses de T són contínues al llarg de la corba δ_{Q_i} , aleshores $\delta_{Q_i} \in Z_k$ per les quals k inverses T_j^{-1} amb $j = 1, \dots, k$ estan correctament definides.*

Demostració. Sabem que per a cada δ_{Q_i} existeix, al menys, una inversa que focalitza en un punt focal Q_i , per algun i . Però, per la definició de funció no invertible poden existir ℓ inverses més, com a màxim k , que poden focalitzar en altres punts Q_j , $j = 1, \dots, \ell$ amb $j \neq i$ i que tots comparteixin la mateixa corba prefocal, això és $\delta_{Q_i} = \delta_{Q_j}$. Tenim doncs $Q_{i,j} = T_n^{-1}(\delta_{Q_{i,j}})$, $n = 1, \dots, \ell$ amb $\ell \leq k$. Per a cada punt $Q_{i,j}$ podem aplicar el mateix argument i obtenir T_n^{-1} aplicacions inverses, cada una d'elles proporcionant una relació 1-a-1 entre el pendent de la corba m_i i la imatge de la segona component com la de (2.7). $\square$

Aquesta proposició ens diu que, per a cada corba prefocal δ_{Q_i} , poden existir, com a màxim, k funcions inverses, T_n^{-1} , que focalitzen localment en punts focals diferents. A més a més, per a cada una d'elles també es dona la relació de correspondència 1-a-1 entre el pendent dels arcs que passen per Q_i i la imatge de la segona component. Veure Figura 2.9 per al cas $\ell = 2$.

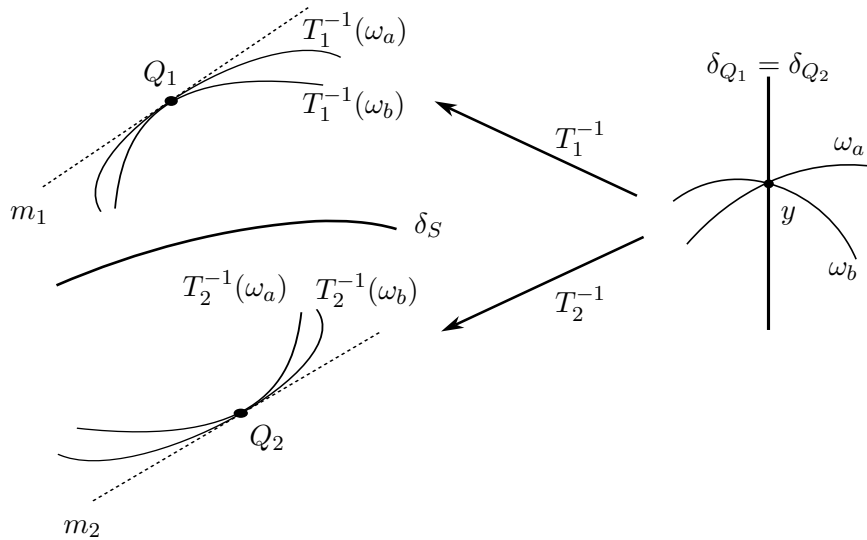


Figura 2.9: Exemple d'una funció del pla no invertible amb dos punts focals que cada una de les dues funcions inverses, T_1^{-1} i T_2^{-1} , envia cada punt de la recta prefocal que comparteixen a les dues diferents preimatges.

Capítol 3

Exemples

En aquest Capítol desenvoluparem dos exemples complets on s'aplicaran els contingut estudiats en el Capítol anterior per tal de clarificar-los i veure'n diferents aplicacions. Començarem amb un exemple més aviat genèric d'una funció no invertible amb una sola recta prefocal. Tot seguit desenvoluparem el mètode de la secant per a trobar les arrels d'un polinomi, transformant la recurrència bàsica a una funció del tipus de les que s'estan estudiant en aquest document.

3.1 Una funció no invertible amb una línia prefocal

El primer exemple que desenvoluparem és el que es planteja per Bischi, Gardini i Mira en el document ja citat [1]. Consisteix en una funció prèviament seleccionada amb quatre paràmetres reals a determinar. La primera component de la imatge no té cap complexitat, ja que és un valor real, però en la segona hi apareix un denominador. Veguem-ho.

Plantejament del mètode

Sigui T una funció del pla de la forma:

$$T : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y - \lambda x + \frac{\alpha x^2 + \gamma x}{y - \beta} \end{pmatrix} \text{ on } \lambda, \alpha, \gamma, \beta \in \mathbb{R}.$$

Operant sobre l'expressió de la segona component de T obtenim l'equivalent definició de la funció:

$$T : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \frac{\alpha x^2 + (\gamma - \lambda(y - \beta))x + y(y - \beta)}{y - \beta} \end{pmatrix} \text{ on } \lambda, \alpha, \gamma, \beta \in \mathbb{R}.$$

Hom pot veure que, tal i com ara ha quedat plantejada, resulta una funció del pla de la forma (2.2) que hem estudiat. Fixant-nos en aquesta segona expressió, és evident que $\delta_s = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \beta\}$, per tant, en aquest exemple en concret δ_S és una recta horitzontal a $\mathbb{R}^2$ que només depèn del paràmetre β .

Invertibilitat de la funció i regions del pla

Podem començar buscant quina és la preimatge d'un punt, per tal de veure si aquesta existeix sempre o hi ha valors per als quals no existeix. A més a més, en cas de que hi puguem trobar una preimatge, també podrem determinar si aquesta és única o n'hi podem trobar d'altres de diferents. Per fer-ho, caldrà d'aïllar x i y de l'expressió inicialment donada. Observem que la variable " x " apareix de forma quadràtica, la qual cosa indica que per aquest valor podríem arribar a trobar-hi dues preimatges. Fent els càlculs pertinents, obtenim la solució:

$$x = \frac{\lambda(x' - \beta) - \gamma \pm \sqrt{(\gamma - \lambda(x' - \beta))^2 - 4\alpha(x' - \beta)(x' - y')}}{2\alpha}, \quad y = x'.$$

En conseqüència, tal i com acabem de comentar, per a cada punt inicial podem trobar com a màxim dues preimatges, ja que la el valor numèric de la primera component pot variar en dos punts diferents depenent de les coordenades del punt inicial. Diferenciem doncs els tres casos estudiats en la Secció 2.

Si $y \neq \beta$, definim el radicand de l'expressió anterior,

$$\Delta(x', y') := (\gamma - \lambda(x' - \beta))^2 - 4\alpha(x' - \beta)(x' - y').$$

D'una banda, si $\Delta(x', y') > 0$, l'arrel té dues solucions calculables en $\mathbb{R}$ i podem assegurar que tot punt té dues preimatges reals. Definim $Z_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \Delta(x, y) > 0\}$. Aleshores, per a tot punt $(x, y) \in Z_2$ obtenim les dues funcions inverses de T :

$$T_1^{-1} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\alpha}(\lambda(x' - \beta) - \gamma + \sqrt{\Delta(x', y')}) \\ x' \end{pmatrix}$$

$$T_2^{-1} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\alpha}(\lambda(x' - \beta) - \gamma - \sqrt{\Delta(x', y')}) \\ x' \end{pmatrix}$$

D'altra banda, si $\Delta(x', y') < 0$, l'arrel quadrada no té solucions en els reals, amb la qual cosa, els punts que compleixin aquesta condició no tenen cap preimatge. Definim $Z_0 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \Delta(x, y) < 0\}$.

Vist això, podem afirmar que aquesta funció divideix el pla $\mathbb{R}^2$ en dues regions o àrees: Z_0 i Z_2 .

Conjunt crític

Les dues regions Z_0 i Z_2 que acabem de trobar tindran com a frontera de separació la corba crítica LC , que matemàticament correspon exactament als punts que compleixen la condició $\Delta(x', y') = 0$. Calculem-la a continuació.

$$(\lambda(x' - \beta) - \gamma)^2 - 4\alpha(x' - \beta)(x' - y') = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow y' = \frac{\gamma^2 + (\beta - x')(4\alpha x' + 2\gamma\lambda - \lambda^2(x' - \beta))}{4\alpha(\beta - x')}$$

$$LC := \left\{ (x', y') \in \mathbb{R}^2 : y' = \frac{\gamma^2 + (\beta - x')(4\alpha x' + 2\gamma\lambda - \lambda^2(x' - \beta))}{4\alpha(\beta - x')} \right\} \quad (3.1)$$

Si busquem la inversa d'expressió, podem obtenir la corba LC_{-1} . Fem-ho:

$$x' = \frac{2\alpha x + \gamma + \beta\lambda}{\lambda}$$

$$LC_{-1} := \left\{ (x', y') \in \mathbb{R}^2 : x' = \frac{2\alpha x + \gamma + \beta\lambda}{\lambda} \right\}. \quad (3.2)$$

Com a observació, en aquest exemple també s'hauria pogut obtenir aquesta corba imposant la condició $\det(DT(x, y)) = 0$, on DT representa la matriu jacobiana de la funció T . En aquest cas en concret és un determinant que podem calcular de forma senzilla. Recordant que $y = x'$, tenim

$$\det(DT(x, y)) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda + \frac{1}{y-\beta}(2x\alpha + \gamma) & 1 - \frac{\alpha x^2 + \gamma x}{(y-\beta)^2} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda - \frac{1}{y-\beta}(2x\alpha + \gamma) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x' = \frac{2\alpha x + \gamma + \beta\lambda}{\lambda}$$

Punts focals i corbes prefocals

Calculem ara els punts focals de la funció, que com ja sabem, seran aquells que compleixin el sistema d'equacions:

$$\begin{cases} \alpha x^2 + (\gamma - \lambda(y - \beta))x + y(y - \beta) = 0 \\ y - \beta = 0 \end{cases}$$

Resolent-lo, obtenim que les solucions del sistema han de complir les igualtats $y = \beta$ i $\alpha x^2 + \gamma x = 0$. Així doncs, obtenim que dos punt diferents resulten solucions del sistema:

$$Q_1 = (0, \beta) \quad \text{i} \quad Q_2 = \left(-\frac{\gamma}{\alpha}, \beta \right).$$

Ara ja podem afirmar que en aquest exemple que estem considerant hi ha exactament dos punts focals. A més a més, aplicant el límit en la imatge per T d'aquests punts, obtenim que la recta vertical $x = \beta$ és l'única corba prefocal del sistema. Ens trobem doncs davant una funció amb dos punts focals i una sola recta prefocal.

Per a cada punt focal també podem calcular-ne la respectiva correspondència entre el pendent m_i i la imatge per T , $i = 1, 2$. Aplicant la fórmula de la Proposició 2.7 obtenim els pendents

$$m_1(y) = \frac{\gamma}{y - \beta} \quad m_2(y) = \frac{\alpha\gamma}{\alpha(\beta - y) - \lambda\gamma}$$

Punts fixos

Per acabar de treure suc de l'exemple, també podem trobar els punts fixos de la funció, és a dir, les solucions de l'equació:

$$\begin{cases} x = y \\ y = y - \lambda x + \frac{\alpha x^2 + \gamma x}{y - \beta} \end{cases}$$

Fàcilment, obtenim dues solucions: $PF_1 = (0, 0)$ i $PF_2 = \left(\frac{\lambda\beta + \gamma}{\lambda - \alpha}, \frac{\lambda\beta + \gamma}{\lambda - \alpha} \right)$.

3.2 El mètode de la secant

L'objectiu d'aquest segon exemple és mostrar que un mètode numèric tant útil com resulta el mètode de la secant també el podem transformar en una funció del pla $\mathbb{R}^2$ amb una de les components de la imatge amb denominador. A més a més, trobem que en uns determinats valors, aquest denominador s'anulla i apareix un comportament curiós dels punts que pertanyen a les rectes horitzontals i verticals de les arrels. Aquesta Secció es basa en l'article [2] de Garijo i Jarque; i d'una forma més general en l'entrada [5].

Plantejament del mètode

Des d'un punt de vista geomètric, el mètode de la secant es basa en aproximar una funció, més concretament, un polinomi $y = p(x)$ per una recta secant a la gràfica de p i fent servir l'arrel de la recta com una aproximació a la solució del problema $p(x) = 0$.

Definim el polinomi $p(x)$ com

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n,$$

amb $a_i \in \mathbb{R} \forall i$. Per simplificar els càlculs i sense perdre generalitat, podem considerar que el polinomi $p(x)$ és mònic, és a dir, $a_n = 1$:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n.$$

Si inicialment no era així, podem transformar-lo dividint-lo tot per la constant a_n . A més a més, podem suposar que el nostre polinomi té exactament $k \in \mathbb{N}$ arrels reals α_i amb $i = 1, \dots, k$ i $k \leq n$. Com que estem considerant en tot moment arrels simples, les ordenarem $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k$. Les $n - k \geq 0$ arrels restants, seran, si existeixen, del pla complex i no les tindrem en compte per al nostre anàlisi.

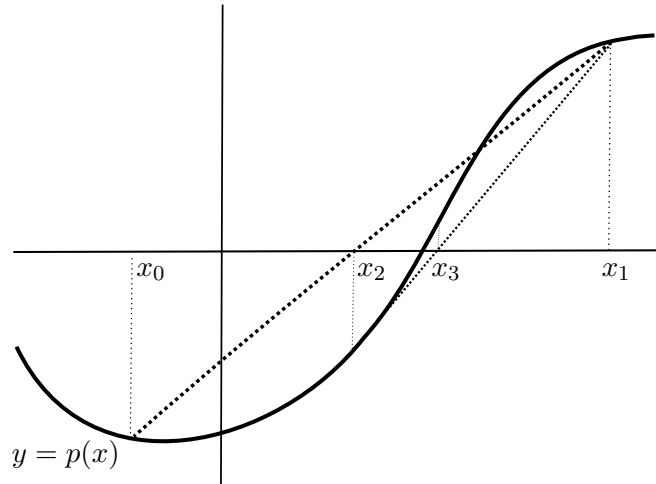


Figura 3.1: Representació dels dos primers iterats del mètode de la secant tradicional.

El mètode consisteix en trobar les arrels del polinomi partint de dos valors inicials de la recta x . Aleshores, conegudes les posicions inicials x_0 i x_1 , es calculen els elements posteriors a través de la successió següent:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{p(x_{n-1}) - p(x_{n-2})} p(x_{n-1}) \quad (3.3)$$

Adaptant la recurrència d'ordre 2 al format de les funcions que estem estudiant en aquest document, podem transformar l'expressió, fent un canvi de variable, a un sistema dinàmic discret a $\mathbb{R}^2$ generat per l'aplicació S , tal i com veiem en (3.4). Per a resoldre'l, caldrà també determinar una condició inicial com a punt de partida.

$$S : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y - \frac{y-x}{p(y)-p(x)}p(y) \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Observem primerament que podem treballar el quocient de la segona component per simplificar-ne l'expressió i, d'aquesta manera, els càlculs posteriors resultaran menys feixucs.

Abans de buscar en la nostra funció els punts focals, les corbes prefocals i altres elements que hem estudiat en el document, notarem unes petites observacions que la seva aplicació més endavant ens resultarà força útil.

Es pot veure que, donats dos valors $x, y \in \mathbb{R}$, el polinomi $x^j - y^j$ és divisible per $x - y$ de la manera que veurem a continuació. Per a qualsevol nombre $j \in \mathbb{N}$, es compleix:

$$x^j - y^j = (x - y)(x^{j-1} + x^{j-2}y + x^{j-3}y^2 + \dots + x^2y^{j-2} + xy^{j-1} + y^j) \quad (3.5)$$

Anomenarem *polinomis auxiliars* als polinomis simètrics de la forma

$$q_j(x, y) := x^j + x^{j-1}y + x^{j-2}y^2 + \dots + x^2y^{j-2} + xy^{j-1} + y^j \quad (3.6)$$

$$q(x, y) := \sum_{j=1}^k a_j q_j(x, y) \quad (3.7)$$

Podem comprovar també que, si avaluem el polinomi auxiliar en valors de la diagonal del pla $x = y$, obtenim el valor de la derivada del polinomi inicial en qualsevol de les dues components.

$$q(x, x) = \sum_{j=1}^k a_j q_j(x, x) = \sum_{j=1}^k a_j j x^{j-1} = p'(x)$$

que té per derivada

$$\frac{\partial q}{\partial x}(x, x) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k a_j j(j-1)x^{j-2} = \frac{1}{2} p''(x).$$

Ara ja podem començar a desenvolupar l'expressió prèviament donada de la segona component del sistema S . Per $x, y \in \mathbb{R}^2$, considerem dos polinomis escrits la mateixa manera que hem definit a l'inici d'aquesta Secció,

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n \\ p(y) &= a_0 + a_1y + a_2y^2 + \dots + a_{n-1}y^{n-1} + y^n \end{aligned}$$

aleshores, fent servir la fórmula de la Definició 3.6, la diferència d'aquests dos polinomis queda reduïda al producte de dos factors polinòmics:

$$\begin{aligned} p(x) - p(y) &= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n) - \\ &\quad (a_0 + a_1y + a_2y^2 + \dots + a_{n-1}y^{n-1} + a_ny^n) = \\ &\quad a_1(x - y) + a_2(x^2 - y^2) + \dots + a_n(x^n - y^n) = (x - y)q(x, y) \end{aligned} \quad (3.8)$$

En altres paraules, el factor $(x - y)$ divideix el polinomi $p(x) - p(y)$ i el quocient resultant és un polinomi simètric.

Aplicant l'anterior igualtat i substituint en la segona component de S , obtenim una nova expressió simplificada del nostre sistema (3.4)

$$S : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \frac{yq(x,y)-p(y)}{q(x,y)} \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

En aquest moment ja tenim el sistema dinàmic preparat per estudiar-lo i analitzar-lo com hem observat en el Capítol 2.

Conjunt de no definició

Clarament, per (3.4) veiem que $\delta_S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : p(x) = p(y)\}$, però, de la mateixa manera, per (3.9) també tenim que $\delta_S^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : q(x, y) = 0\}$. A partir d'aquestes dues consideracions i tenint en compte la igualtat (3.8), obtenim que tot punt (x, y) que pertanyi a δ_S , obligatòriament ha de complir la condició $x \neq y$. Consegüentment, en aquest exemple podem determinar que el nostre conjunt de no definició és la unió de dos subconjunts,

$$\delta_S := \delta_S^1 \cup \delta_S^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : p(x) = p(y) \text{ amb } x \neq y\} \cup \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 : p'(x) = 0\}$$

i també podem determinar l'espai

$$E_S = \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{k=0}^{\infty} S^{-k}(\delta_S).$$

Aleshores, per a tot element que pertanyi a E_S , la funció del mètode de la secant en aquest espai, $S : E_S \rightarrow E_S$, està ben definida; com a conseqüència de que en aquest espai hem eliminat tots aquells elements que en alguna de les seves preimatges van a parar al conjunt de no definició.

Un cop tenim E_S ben definit, ja podem buscar els punts focals i els punts fixos de la nostra funció, considerant la possibilitat que el denominador de la segona component pugui anul·lar-se, i per tant, que els punts sí pertanyin al conjunt δ_S . Per l'expressió (3.8) veiem que si $p(x) = p(y)$ aleshores poden passar dues coses; o bé $q(x, y) = 0$ o bé $x = y$. A continuació justifiarem que, sota aquestes condicions, en el primer cas ens trobarem amb els punts focals i en el segon cas ens trobarem amb els punts fixos.

Punts focals i corbes prefocals

Sabem que un punt $Q = (x_0, y_0)$ és un punt focal si la segona component de la funció pren la forma $0/0$. A més a més, per la definició del sistema S tenim que els punts focals Q han de complir la condició $x \neq y$, ja que en cas contrari ocurriria que $p(Q) = p'(Q) = 0$ i Q esdevindria arrel doble. Això ens portaria a una contradicció amb la suposició inicial de que totes les arrels que estem tenint en compte en el nostre polinomi són simples. Calculem les arrels simples del sistema següent per a trobar els punts focals del mètode de la secant plantejat:

$$\begin{cases} yq(x, y) - p(y) = 0 \\ q(x, y) = 0 \\ x \neq y \end{cases}$$

Fàcilment trobem que la solució d'aquest sistema és exactament $p(y_0) = 0$ i per tant, y_0 ha de ser arrel del polinomi. Addicionalment, per (3.8) si $p(y_0) = 0$ i $q(x_0, y_0) = 0$, obligatòriament $p(x_0) = 0$ i per tant, x_0 també ha de ser arrel una del polinomi, però diferent de l'anterior degut a la condició $x \neq y$. En conclusió, els punts focals de la funció S són de la forma $Q_{i,j} = (\alpha_i, \alpha_j)$, $i, j = 1, \dots, n$, $i \neq j$ i n'hi ha exactament $n(n-1)$.

Podem també calcular la corba prefocal, $\delta_{Q_{i,j}}$, de cada un dels punts focals trobats. Notarem que en total n'apareixeran exactament n , una per a cada valor de j . Avaluem doncs, en el límit, la imatge pel mètode de la secant de cada un dels punts $Q_{i,j} = (x_0, y_0)$:

$$S\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \frac{y_0 q(x_0, y_0) - p(y_0)}{q(x_0, y_0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_j \\ \pm\infty \end{pmatrix}$$

Obtenim que les corbes prefocals són les rectes verticals que passen pels punts $x = \alpha_j$,

$$\delta_{Q_{i,j}} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \alpha_j\} \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.10)$$

Observem així mateix que, fixat un valor de j , tots els punts focals $Q_{i,j}$ “comparteixen” la mateixa corba prefocal per $i = 1, \dots, n$.

Un altre element que també podem trobar per $i, j = 1, \dots, n$, és la correspondència entre el pendent d'un arc que passa per un punt focal $Q_{i,j}$, que anomenarem $m_{i,j}$, i la imatge de la segona component dels punts d'aquest arc per la funció S , tal i com ens determina la Proposició 2.7. Necessitem prèviament determinar les derivades parcials respecte els dos elements de les funcions que formen el quocient de la segona component en la imatge,

$$N(x, y) = yq(x, y) - p(y) \quad D(x, y) = q(x, y).$$

Les derivades parcials calculades són

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{\partial N}{\partial x}(x, y) = y \frac{\partial q}{\partial x}(x, y), & N_y &= \frac{\partial N}{\partial y}(x, y) = q(x, y) + y \frac{\partial q}{\partial y}(x, y) - p'(y), \\ D_x &= \frac{\partial D}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial q}{\partial x}(x, y), & D_y &= \frac{\partial D}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial q}{\partial y}(x, y). \end{aligned}$$

Per simplificar l'escriptura, per a cada punt $Q = Q_{i,j}$, escriurem $m_{i,j} = m$ i $y'_{i,j} = y'$. Aplicant la fórmula de la Proposició 2.7 obtenim la relació:

$$y'(m) = \frac{y \frac{\partial q}{\partial x}(x, y) + m(q(x, y) + y \frac{\partial q}{\partial y}(x, y) - p'(y))}{\frac{\partial q}{\partial x}(x, y) + m \frac{\partial q}{\partial y}(x, y)}.$$

I amb la inversa,

$$m(y') = \frac{\frac{\partial q}{\partial x}(x, y)y - y\frac{\partial q}{\partial x}(x, y)}{q(x, y) + y\frac{\partial q}{\partial y}(x, y) - p'(y) - \frac{\partial q}{\partial y}(x, y)y} = 0.$$

Punts fixos

Si considerem ara que $q(x, y) \neq 0$, podem buscar els punts fixos del sistema dinàmic, és a dir, volem trobar els valors que ens donguin una solució al sistema:

$$\begin{cases} x = y \\ y = \frac{yq(x, y) - p(y)}{q(x, y)} \end{cases} \quad (3.11)$$

Obtenim el resultat $x = y$ i $p(y) = 0$, per tant, les dues components tindran el mateix valor i han de ser una arrel del polinomi p . Així doncs, veiem que tots els punts fixos són de la forma $PF_i = (\alpha_i, \alpha_i)$, $i = 1, \dots, n$, amb $p'(\alpha_i) \neq 0$, ja que recordem que considerem únicament arrels simples.

Finalment, podem estudiar també en aquest cas l'estabilitat dels punts fixos i comprovar que tots ells tenen un comportament atractor. Per a fer-ho, calcularem primerament la matriu jacobiana del sistema S i a continuació l'avaluarem en cada un dels diferents punts fixos per a poder-ne calcular els valors propis.

$$DS(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{p(y)q_x(x, y)}{[q(x, y)]^2} & 1 - \frac{p'(y)q(x, y) + p(y)q_y(x, y)}{[q(x, y)]^2} \end{pmatrix}$$

$$DS(\alpha_i, \alpha_i) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Podem observar a simple vista que la matriu jacobiana avaluada en els punts fixos s'anulla en tots els seus elements excepte en un. Amb un simple càlcul veiem que té com a valors propis dos 0's, per tant, els punts fixos són tots atractors.

Resulta força curiós en aquest exemple estudiar el comportament dels punts que pertanyen a les rectes horitzontals $y = \alpha_j$ i les rectes verticals $x = \alpha_i$. Calculem-ne la imatge de cada un dels dos casos.

Sigui $P_j = (x, y) \in \{y = \alpha_j\}$, aleshores,

$$S \begin{pmatrix} x \\ \alpha_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_j \\ \frac{\alpha_j q(x, \alpha_j) - p(\alpha_j)}{q(x, \alpha_j)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_j \\ \alpha_j \end{pmatrix}.$$

Per tant, amb un sol iterat de la funció S , tots els punts de les rectes horitzontals, exceptuant els punts focals que ja hem vist que van a parar a les rectes prefocals, van a parar al punt fix (α_j, α_j) .

Sigui ara $P_i(x, y) \in \{x = \alpha_i\}$, calcularem un primer iterat per S d'aquest punt i veurem quina és la seva imatge. Fent servir la igualtat (3.8) i tenint en compte que $p(\alpha_i) = 0$, podem veure fàcilment que

$$q(\alpha_i, y) = \frac{p(y)}{y - \alpha_i}.$$

$$S\left(\begin{pmatrix} \alpha_i \\ y \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} y \\ \frac{yq(\alpha_i, y) - p(y)}{q(\alpha_i, y)} \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} y \\ \alpha_i \end{pmatrix}\right)$$

Obtenim doncs que, excloent els punts focals, qualsevol punt que pertanyi a la recta $x = \alpha_i$ és enviat per l'aplicació del mètode de la secant a un altre punt de la recta $y = \alpha_i$. Aleshores, seguin el raonament anterior, tenim que tots els punts (sense comptar amb els focals) de les rectes verticals que tenen per primera coordenada les arrels del polinomi p van a parar amb dos iterats als punts fixos $PF_i(\alpha_i, \alpha_i)$.

En la Figura 3.2 es pot veure gràficament la representació per al cas $i = 3, j = 3$:

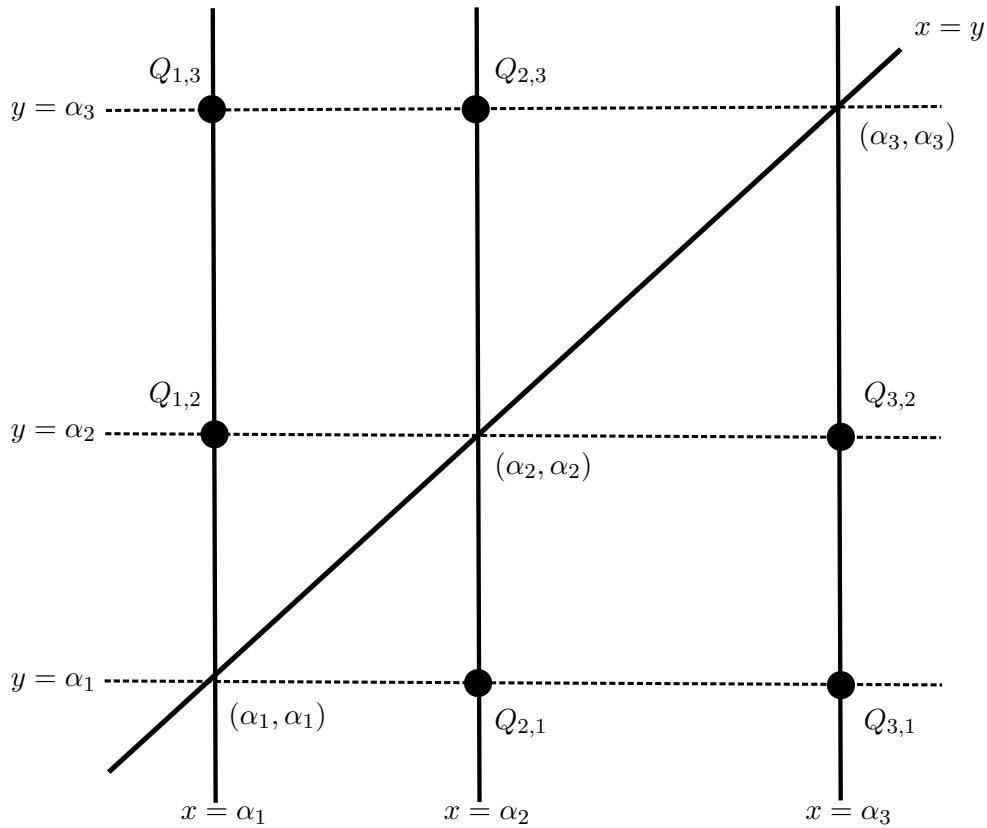


Figura 3.2: Esbós del pla on el polinomi $p(x)$ té tres arrels reals simples $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$. Els punts focals $Q_{2,1}$ i $Q_{3,1}$ comparteixen la corba prefocal $x = \alpha_1$. Els punts focals $Q_{1,2}$ i $Q_{3,2}$ comparteixen la corba prefocal $x = \alpha_2$. Els punts focals $Q_{1,3}$ i $Q_{2,3}$ comparteixen la corba prefocal $x = \alpha_3$. Els tres punts fixos pertanyen a la recta $x = y$.

Capítol 4

Aplicacions a models econòmics

L'objectiu d'aquest últim Capítol consisteix en plantejar i mostrar al lector una utilitat en la realitat de tot el contingut que s'ha tractat en el document fins al moment. En les següents pàgines determinarem seguint l'article [3] d'Askar, una aplicació pràctica en l'economia de les funcions en el pla amb components racionals: el model clàssic de Cournot (avançat).

En primer lloc i per entrar en context, es proporcionarà una explicació detallada sobre el funcionament del model econòmic de Cournot, més concretament, quan aquest és un duopoli. La base teòrica d'aquest Capítol ha estat obtinguda de diverses fonts: el contingut l'assignatura d'Organització Industrial, [8], així com també de l'explicació en línia de Sonia D. en [7], Simone S. en [6] i l'entrada de col·laboradors de la Wikipedia [4]. Es farà, igualment, un incís sobre la importància del punt d'equilibri de Nash corresponent per tal de determinar l'òptim en el mercat. Finalment aprofunditzarem en un exemple pràctic on buscarem el conjunt de no definició, els punts focals, les corbes prefocals i el conjunt crític, entre d'altres.

4.1 El model de Cournot

El model econòmic de Cournot consisteix en un oligopoli on les empreses que hi participen busquen l'estratègia òptima basant-se en que els productes són homogenis, la demanda del mercat és coneguda i les quantitats i preus ofertats es decideixen en base a l'actuació de la competència. L'objectiu principal de les companyies és maximitzar els beneficis privats, tot i què, també poden decidir millorar el benestar social. Per tant, ens trobem davant un model de competència en quantitats. Aquesta competència és imperfecta, degut que, els productors no tenen total llibertat per decidir el preu que determinen i la quantitat que produeixen.

Aquesta teoria es va formalitzar l'any 1838 per l'economista i matemàtic francès Antoine Augustin Cournot en la seva obra "*Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*" (en català, "Investigacions sobre els principis matemàtics de la teoria de les riqueses"). La principal premissa d'aquest model és la hipòtesi de que l'ingrés marginal ha de ser igual al cost marginal. La competència de Cournot es troba entremig de la competència perfecta, on el preu s'igualava al cost marginal, i el monopoli, on una sola empresa domina la totalitat del mercat. Quan assolim l'equilibri, el preu del producte és superior al cost marginal però inferior al preu en monopoli.

Actualment ens podem trobar amb molts mercats que tenen forma d'oligopoli, és a dir, quan l'oferta en un determinat producte o servei es troba reduïda a un nombre concret de venedors. El grau de concentració en aquests mercats resulta força elevat i l'existència de poques empreses implica que aquestes disposin d'una interdependència estratègica, la qual cosa significa que les decisions preses per un membre del mercat afecten, directa o indirectament, als altres membres. Per tant, reiterant com ja hem dit, ens trobem en una situació de competència imperfecta.

A continuació introduïrem els conceptes principals característics de la competència en Cournot.

Definició 4.1. *Un duopoli és una situació en la que es troba un mercat quan el desenvolupament d'una activitat o l'oferta d'un bé o servei es distribueix únicament entre dues empreses. Dit d'una altra manera, en el mercat només hi ha dos venedors.*

Observem doncs que els duopolis són el cas més senzill d'oligopolis. Sovint, per estudiar oligopolis es simplifiquen primerament amb models duopolistes per tal d'observar-ne les principals característiques i posteriorment s'amplien a una dimensió superior.

Definició 4.2. *Un bé o servei homogeni és aquell que no disposa d'atributs que el distingeixi d'altres de la seva mateixa categoria.*

En el model que estem estudiant, els consumidors no són capaços de reconèixer de quin productor prové concretament el producte que estan adquirint en el mercat, ja que tots són perfectament idèntics.

Definició 4.3. *Un joc simultani o estàtic és aquell en que les decisions dels competidors es prenen a la vegada.*

Sota la premissa de Cournot, els competidors del mercat prenen les decisions alhora. A més a més, al tenir la informació completa sobre el comportament de la resta de participants, poden anticipar com reaccionaran; però, desconeixen la decisió que estan prenent en aquell mateix moment els seus competidors.

Definició 4.4. *La funció de reacció és la relació entre el nivell de producció que maximitza els beneficis i la quantitat que produeix l'empresa competidora.*

Notem que la funció de reacció tindrà sempre un pendent negatiu, ja que, com més produeixi la competència d'una empresa, menys quantitat podrà produir ella mateixa. Considerant que, si s'arriba a produir en excès, els preus tendiran a la baixa i consegüentment, els beneficis també ho faran. Per tant, obtindrem l'equilibri quan la quantitat que produeixi una empresa sigui òptima donada la quantitat que produeix l'altra i a la inversa. Es dona també que aquest equilibri resulta un equilibri de Nash.

Definició 4.5. *Un equilibri de Nash és aquell en que cap dels competidors té incentius individuals a moure's de l'estratègia escollida.*

El model de Cournot estableix que els preus es situen en un equilibri entre l'oferta i la demanda. Això implica que els preus mai es fixaran en un nivell que sigui massa baix per a no resultar rentable per als productors ni tampoc en un nivell que sigui superior al que els consumidors estan disposats a pagar. Per tant, els preus que es s'establiran en el mercat oligopolístic estaran en un nivell que resulti beneficiós per als productors i

acceptable per als consumidors. Aquest nivell esdevé un equilibri de Nash i és exactament el punt on es creuen les funcions de reacció de totes les empreses. Veurem que aquest punt és on cada un dels competidors està maximitzant els seus beneficis tenint en compte la producció de la resta.

En resum, les característiques bàsiques a considerar en el model econòmic de competència de Cournot clàssic (en duopoli) són:

- Dues empreses competidores (existència de poder de mercat).
- Informació perfecta sobre la demanda del mercat i els costos de producció.
- Productes homogenis amb els mateixos costos.
- Competència en quantitats ofertades sense restriccions de producció.
- Decisions simultànies.
- Estratègia racional basada en el comportament del competidor.
- Objectiu: maximització del benefici.

En conclusió, el model de Cournot tendeix a l'equilibri, que resulta exactament el punt on les empreses competidores assoleixen els millors resultats econòmics i els consumidors accepten el preu proposat. Aquest model il·lustra com les decisions estratègiques en els oligopolis poden afectar als resultats del mercat.

Cal comentar, però, que el model també presenta algunes limitacions, com ara la consideració de que tots els béns i serveis són homogènis (també els costos), les decisions es prenen en tot moment de forma simultània, tots els membres tenen tota la informació del mercat, etc. Tampoc es tenen en compte factors distintius com la publicitat, la ubicació geogràfica dels productors, la qualitat dels productes, etc. Sense tot això, la predicció de Cournot pot esdevenir menys precisa del que hom podria esperar.

Tot i així, continua essent una base per entendre el funcionament de la dinàmica de la competència així com de la Teoria de Jocs i la Organització Industrial. Resulta una eina forç poderosa per als economistes per a analitzar els mercats; oferint la possibilitat de predir com els preus dels béns i serveis que s'ofereixen es veuran afectats pels comportaments dels participants. Essencialment, tot això resulta útil per determinar la repercussió de l'oferta i la demanda, la competència i els canvis en els nivells de producció.

4.1.1 El model matemàtic

Un cop vista la teoria bàsica del model, procedim a estudiar-lo des d'un punt de vista més numèric i calculístic. Comencem considerant un mercat amb una funció de demanda inversa donada $P(q_1, q_2)$, tal que només hi operen dues empreses o agents, que anomenem A_1 i A_2 . Definim, per a cada un d'ells, el preu de mercat, la quantitat produïda i el cost de producció de la següent manera:

p_1 = preu de l'agent 1,
 q_1 = quantitat ofertada per l'agent 1,
 c_1 = cost unitari de producció de l'agent 1,
 p_2 = preu de l'agent 2,
 q_2 = quantitat ofertada per l'agent 2,
 c_2 = cost unitari de producció de l'agent 2.

En l'equilibri, la quantitat total ofertada serà la suma de les quantitats de cada un dels agents, $q_1 + q_2$, i a més a més, totes dues empreses vendran el seu producte al mateix preu, per tant la funció de preus per al duopoli serà $p_1 = p_2 = P(q_1 + q_2)$. Anomenarem aquesta funció la funció de demanda inversa que determinarà el màxim preu que els consumidors estaran disposats a pagar en el mercat. Veiem que la relació entre preu i quantitat és negativa, ja que, a mesura que augmenti la quantitat ofertada, el preu que els consumidors estaran disposats a pagar serà inferior, i viceversa.

L'ingrés total en el model de Cournot per a cada una de les empreses el podem determinar per l'expressió $IT_i = P(q_1 + q_2) * q_i$. També es pot determinar per a cada empresa el cost total, que serà $C(q_i) = c_i q_i$. Disposant de tots aquests elements ja podem determinar la funció dels beneficis empresarials privats de cada uns de les empreses, que anomenarem Π_i , $i = 1, 2$.

$$\begin{aligned}\Pi_1(q_1, q_2) &= q_1 * (P(q_1 + q_2) - c_1) \\ \Pi_2(q_1, q_2) &= q_2 * (P(q_1 + q_2) - c_2)\end{aligned}$$

La funció de reacció de cada agent dependrà de la suposició de què farà el seu contrincent. Veguem-ho per a un dels agents, tenint en compte que per a l'altre el raonament és completament anàleg. Suposem que l'empresa A_1 pensa que l'empresa A_2 produirà una determinada quantitat q_2 . Aleshores la primera haurà de decidir si vol o no vol produir. En el cas que no ho faci, el preu dependrà només de la quantitat ofertada per la segona, $P(q_2)$. Però, si decideix produir una certa quantitat q_1 , aleshores el preu en el mercat dependrà de la suma de totes dues quantitats, $P(q_1 + q_2)$.

Per tant, fixada una quantitat q_2 , la funció de reacció $q_1^*(q_2)$ mostra totes les possibles combinacions de quantitats que podria produir l'agent A_1 segons les seves consideracions d'actuació de la competència i a quin preu ho faria. Paral·lelament, fixada una quantitat q_1 , la funció de reacció $q_2^*(q_1)$ mostrarà totes les possibles combinacions de quantitats que podria produir l'agent A_2 i a quin preu ho faria. Gràficament ho podem veure en la Figura 4.1.

Un cop valorades les possibles opcions, cal trobar quina és la producció òptima per a cada una de les dues empreses; és a dir, seguint la base del model, això serà en el punt en que el cost marginal resultarà igual que l'ingrés marginal. Per simplificar, assumirem que no hi ha costos fixos i així tenim que el cost marginal es manté constant. Veure Figura 4.2. El cost marginal el calculem com la derivada de la funció del cost total, $C'(q_i) = c_i$, $i = 1, 2$.

La millor resposta de cada agent consistirà en trobar per quin valor de q_i $i = 1, 2$, es maximitza la funció de beneficis Π_i donat q_j , $j \neq i$, ja que,

$$I_{mq} = C_{mq} \Leftrightarrow I_{mq} - C_{mq} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \Pi(q_1, q_2)}{\partial q_i} = 0.$$

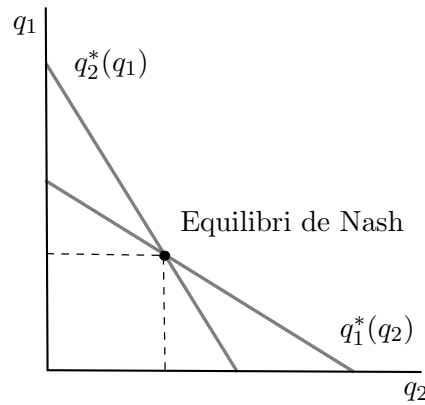


Figura 4.1: Funcions de reacció amb costos simètrics per a totes dues empreses. La funció de reacció de cada empresa decreix a mesura que augmenta la quantitat ofertada per l'altra empresa. En la intersecció hi trobem l'equilibri de Nash.

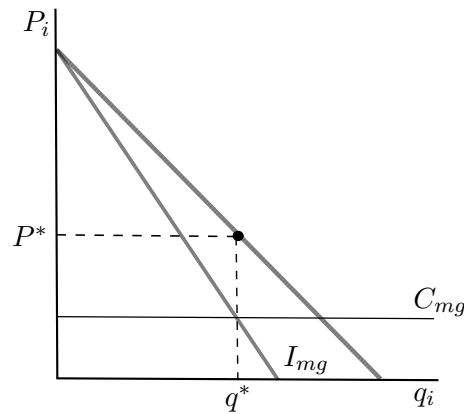


Figura 4.2: Representació de la corba de demanda per a una de les empreses, on apareixen la corba d'ingrés marginal i la corba constant de cost marginal. El punt on es creuen aquestes dues rectes determina el preu i la quantitat òptima en el mercat.

Això ens mostra com canvia el benefici de l'empresa i quan aquesta decideix produir una unitat addicional de producte. El càlcul consisteix en trobar el màxim de Π_i , és a dir, igualant a 0 la derivada parcial sobre q_i

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial q_1} = P(q_1 + q_2) - c_1 + q_1 * \left(\frac{\partial P(q_1 + q_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial c_1}{\partial q_1} \right) = 0$$

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial q_2} = P(q_1 + q_2) - c_2 + q_2 * \left(\frac{\partial P(q_1 + q_2)}{\partial q_2} - \frac{\partial c_2}{\partial q_2} \right) = 0$$

Els valors de q_1^* i q_2^* que solucionin cada una d'aquestes dues equacions esdevindran les millors respostes, així com l'equilibri de Nash. Com ja hem comentat, en un equilibri de Nash cada jugador maximitza el seu benefici esperat, considerant les accions de la resta de jugadors i no té incentius a moure's de l'estratègia escollida. Una vegada trobades les quantitats en l'equilibri, cal substituir-les en la funció de demanda inversa per a trobar el preu de mercat $P^*(q_1^*, q_2^*)$.

Per acabar aquesta Secció, si suposem que el preu o la funció de demanda inversa del mercat es comporta de forma lineal, aleshores el podem representar com una recta amb una determinada pendent negativa; sigui la funció del preu $P = a - bQ$. En la Figura 4.3 podem veure el comportament de dues empreses en un oligopoli de Cournot sota la hipòtesi de que els costos són simètrics a totes dues i el mercat està repartit de forma equitativa, és a dir, $q_1 = q_2$.

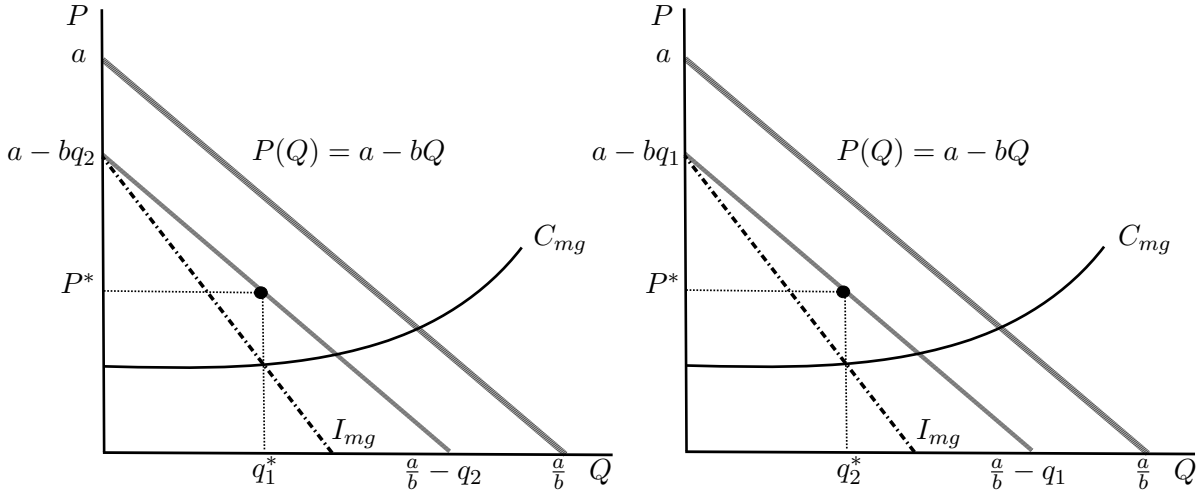


Figura 4.3: Representació del duopoli de Cournot per a dues empreses que presenten costos simètrics.

Tot i així, aquesta suposició és més aviat teòrica que realista, ja que normalment els costos de producció canvien per a cada empresa (i més encara si tenim en compte l'existència de les economies d'escala). En la Figura 4.4 veiem el mateix cas que l'anterior però, tenint en compte que els costos són diferents a cada una de les dues empreses i, per tant, el repartiment de quantitats en el mercat no és igualitari.

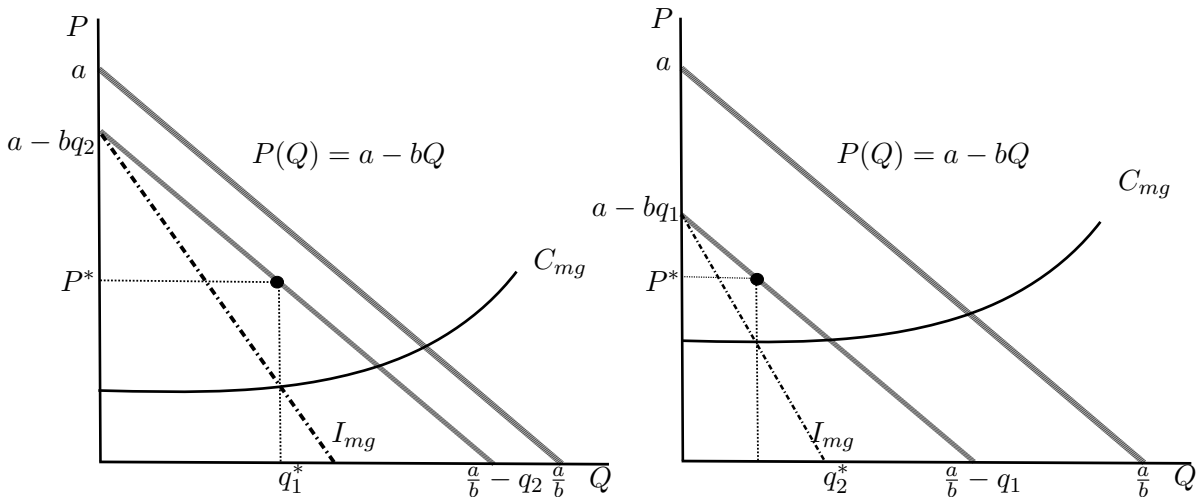


Figura 4.4: Representació del duopoli de Cournot per a dues empreses que presenten costos asimètrics.

4.1.2 Exercici acadèmic amb càlculs

Per acabar la part més teòrica del model de Cournot, desenvoluparem un exemple acadèmic pas a pas per a obtenir les quantitats i el preu d'equilibri en un mercat duopolístic on ja se'ns dona la funció de demanda inversa. En la realitat, les situacions resulten molt més complexes i amb moltes més variables que hi influeixen, però veure un exercici pràctic pot ser un bon punt d'inici per entendre'n millor el funcionament.

Suposem que un mercat determinat està estructurat en forma de duopoli, on les dues empreses que hi participen les anomenarem E_1 i E_2 . Sabem que la funció del preu o de demanda inversa està donada per l'expressió $P(q_1, q_2) = 100 - 1/2 * (q_1 + q_2)$. Ens han informat també que les empreses tenen uns costos totals respectius de $CT_1 = 5 * q_1$ i $CT_2 = 1/2 * q_2^2$. Busquem el preu i la quantitat d'equilibri en aquest mercat des del punt de vista de Cournot.

Trobem primerament les funcions d'ingrés de cada una de les empreses.

$$IT_1 = P * q_1 = \left(100 - \frac{1}{2}(q_1 + q_2)\right)q_1 = 100q_1 - \frac{1}{2}q_1^2 - \frac{1}{2}q_1q_2$$

$$IT_2 = P * q_2 = \left(100 - \frac{1}{2}(q_1 + q_2)\right)q_2 = 100q_2 - \frac{1}{2}q_2^2 - \frac{1}{2}q_1q_2$$

Els ingressos marginals els trobarem derivant parcialment aquestes corbes per la quantitat,

$$I_{mg1} = \frac{\partial IT_1}{\partial q_1} = 100 - q_1 - \frac{1}{2}q_2,$$

$$I_{mg2} = \frac{\partial IT_2}{\partial q_2} = 100 - q_2 - \frac{1}{2}q_1.$$

Calculem també els costos marginals de les funcions donades,

$$C_{mg1} = \frac{\partial CT_1}{\partial q_1} = 5$$

$$C_{mg2} = \frac{\partial CT_2}{\partial q_2} = q_2.$$

Per tal de trobar la solució de Cournot, hem d'aplicar per a cada empresa la regla bàsica de $I_{mg} = C_{mg}$.

$$100 - q_1 - \frac{1}{2}q_2 = 5 \Rightarrow \text{Funció de reacció d}'E_1: q_1 = 95 - \frac{1}{2}q_2$$

$$100 - q_2 - \frac{1}{2}q_1 = q_2 \Rightarrow \text{Funció de reacció d}'E_2: q_2 = 50 - \frac{1}{4}q_1.$$

Cal resoldre doncs el sistema lineal següent de dues equacions i dues incògnites:

$$\begin{cases} q_1 = 95 - \frac{1}{2}q_2 \\ q_2 = 50 - \frac{1}{4}q_1 \end{cases}$$

Trobem com a única solució del sistema les quantitats d'equilibri en el mercat, $q_1^* = 80$ i $q_2^* = 30$. En la Figura 4.5 podem veure la representació de les dues rectes de demanda i el corresponent punt de tall on s'assoleix l'equilibri de Nash.

Per finalitzar, si substituïm aquests valors en la funció de demanda inversa trobarem el preu en el mercat:

$$P^*(80, 30) = 100 - \frac{1}{2}(80 + 30) = 45u.m.$$

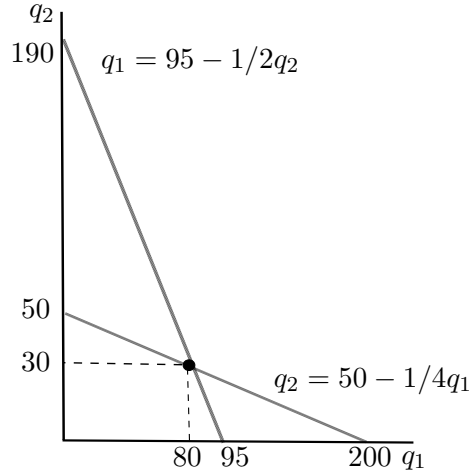


Figura 4.5: Representació gràfica de l'exemple. Es poden veure les dues funcions de reacció de les empreses, que just en el punt de tall assoleixen l'equilibri en el mercat.

4.2 Dinàmica del duopoli de Cournot en dues empreses

Tal i com estudia Askar, S.S. en [3], en aquesta última Secció considerarem un duopoli que tindrà com a funcions objectius maximitzar una mitjana ponderada entre els guanys de dues empreses en un duopoli i el benestar social dels consumidors. Més endavant veurem que podem transformar l'expressió d'aquest mercat a un sistema dinàmic discret en el pla amb components racionals. Suposant que les quantitats ofertades al mercat per part de les dues empreses són positives, trobarem que el punt fix del sistema coincideix exactament amb l'equilibri de Nash del joc en el mercat.

Plantejament del model

Siguin A_1 i A_2 dues empreses privades en un mercat duopolístic que produeixen q_1 i q_2 unitats d'un producte determinat, respectivament. Per tant, la quantitat total ofertada al mercat serà $Q = q_1 + q_2$. A més a més, suposem que cada una d'aquestes empreses ofereix el seu producte a un preu p_1 i p_2 , $p_i > 0$, $i = 1, 2$. També considerem que cada empresa té un cost unitari de producció igual i constant a c unitats monetàries.

Plantegem la següent funció quadràtica (i simètrica) d'utilitat

$$U = Q - Q^2 = q_1 + q_2 - (q_1 + q_2)^2. \quad (4.1)$$

Aquesta funció representa la satisfacció dels consumidors en el mercat tenint en compte la quantitat que ofereixen les empreses, per tant, ens trobem primerament davant un problema dels consumidors. Cal, però, afegir una restricció pressupostària, ja que, la renda de la que disposen els consumidors no és infinita sinó que té certes limitacions. Per aquest motiu, assumirem que $p_1 q_1 + p_2 q_2 = 1$.

L'objectiu del consumidor serà sempre maximitzar la seva utilitat, tenint en compte en tot moment la condició realista de que les limitacions existeixen. Es planteja doncs el següent problema d'optimització:

$$\text{Max } U = q_1 + q_2 - (q_1 + q_2)^2 \quad (4.2)$$

$$p_1 q_1 + p_2 q_2 = 1 \quad (4.3)$$

Aïllant p_2 en l'expressió de la restricció pressupostària podem transformar la funció d'utilitat a maximitzar que depèn de dues variables, a una expressió amb una sola variable. Fem-ho.

$$p_2 = \frac{1 - p_1 q_1}{p_2} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} U &= q_1 + \frac{1 - p_1 q_1}{p_2} - \left(q_1 + \frac{1 - p_1 q_1}{p_2} \right)^2 = \left(q_1 + \frac{1 - p_1 q_1}{p_2} \right) \left(1 - q_1 - \frac{1 - p_1 q_1}{p_2} \right) = \\ &= \frac{1}{p_2^2} (q_1(p_2 - p_1) + 1)(q_1(p_1 - p_2) + p_2 - 1) \end{aligned}$$

Volem trobar el màxim d'aquesta expressió, per tant, hem de derivar respecte la variable q_1 i igualar aquesta derivada a 0. (Suposarem també que els preus són positius, ja que cap productor pagarà per a vendre el seu producte ni voldrà regalar-lo.)

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial q_1} = 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{p_2^2} [(p_2 - p_1)(q_1(p_1 - p_2) + p_2 - 1) + (q_1(p_2 - p_1) + 1)(p_2 - p_1)] = 0 \\ &\Leftrightarrow (p_2 - p_1)[q_1(p_1 - p_2) + p_2 - 1 - q_1(p_2 - p_1) - 1] = 0 \end{aligned}$$

Per a que aquesta expressió sigui 0 una de les dues components ho ha de ser. Obtenim la solució $p_1 = p_2$, per tant, en aquesta funció d'utilitat quadràtica i simètrica, els preus marcats per les dues empreses són idèntics. D'aquí obtenim l'expressió del preu, o també anomenada funció de demanda inversa, que resulta exactament la inversa de la quantitat que hi ha ofertada en el mercat,

$$P = \frac{1}{Q} = \frac{1}{q_1 + q_2}.$$

Considerant que els ingressos de cada agent s'obtenen del producte del preu unitari per la quantitat total venuda i les despeses s'obtenen del producte del preu unitari pel cost unitari, la funció de beneficis per a cada una de les empreses esdevé:

$$\Pi_1(q_1, q_2) = q_1 * \left(\frac{1}{Q} - c \right) \quad (4.4)$$

$$\Pi_2(q_1, q_2) = q_2 * \left(\frac{1}{Q} - c \right) \quad (4.5)$$

El cost marginal, que és constant i coincident per a les dues empreses és igual a c .

Sabem que totes dues companyies volen maximitzar els seus beneficis i alhora també tenen l'opció de maximitzar el benestar social, que definirem com

$$SW = \Pi_1 + \Pi_2 + CS, \quad (4.6)$$

on CS representen els guanys nets dels consumidors i Π_1 i Π_2 són les funcions del benefici privat per a cada empresa que acabem de trobar.

Tal i com veiem en (4.7), el benefici del consumidor el podem calcular com l'àrea de la funció de demanda inversa des de 0 fins a la quantitat de mercat (matemàticament això es fa calculant la integral), menys l'import que s'ha de pagar per la quantitat obtinguda per tal de satisfer la necessitat.

$$CS = \int_0^Q P(Q)dQ - PQ = \int_0^Q \frac{1}{Q}dQ - PQ = \ln Q - 1. \quad (4.7)$$

On hem fet servir la restricció pressupostària $p_1q_1 + p_2q_2 = 1$. També ho podem veure gràficament en la Figura 4.6, sota la hipòtesi que la funció de demanda inversa és lineal.

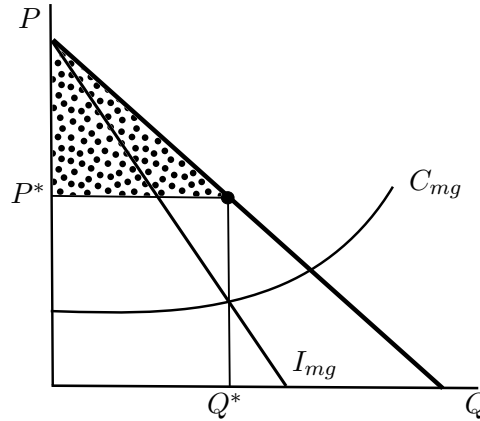


Figura 4.6: L'àrea marcada amb punts representa el benestar social dels consumidors o també anomenat benefici dels consumidors, que és la satisfacció que reben pel producte que poden adquirir al mercat una vegada s'han deduït el cost que suposa aquesta l'obtenció d'aquest determinat producte.

Per tant, substituint en (4.6),

$$SW = q_1 * \left(\frac{1}{Q} - c_1 \right) + q_2 * \left(\frac{1}{Q} - c_2 \right) + \ln Q - 1 = \ln Q - cQ. \quad (4.8)$$

De manera individual, cada una de les empreses podrà maximitzar el seu benefici així com també contribuir a millorar el benestar social en percentatges complementaris. Podem expressar-ho matemàticament amb la funció F_i :

$$F_i = (1 - \omega)SW + \omega\Pi_i, \quad i = 1, 2; \quad \omega \in [0, 1].$$

És a dir, si $\omega = 1$, la companyia únicament es centralitzarà en maximitzar el seu propi benefici privat i no tindrà en compte als consumidors. Contràriament, si $\omega = 0$, la companyia només es focalitzarà en maximitzar el guany dels consumidors sense donar-li cap importància al seu propi benefici. Per la resta de valors d' $\omega \in (0, 1)$ podrem representar la combinació de la maximització ponderada del benefici privat i el benefici social.

Substituint (4.4) i (4.8) a la funció que tot just hem determinat obtenim,

$$\begin{aligned} F_1 &= (1 - \omega)(\ln Q - cQ) + \omega \left(\frac{1}{Q} - c \right) q_1 = \\ &= (1 - \omega)(\ln(q_1 + q_2) - c(q_1 + q_2)) + \omega \left(\frac{1}{q_1 + q_2} - c \right) q_1, \\ F_2 &= (1 - \omega)(\ln Q - cQ) + \omega \left(\frac{1}{Q} - c \right) q_2 = \\ &= (1 - \omega)(\ln(q_1 + q_2) - c(q_1 + q_2)) + \omega \left(\frac{1}{q_1 + q_2} - c \right) q_2. \end{aligned}$$

Amb objectius marginals

$$\frac{\partial F_1}{\partial q_1} = (1 - \omega) \left(\frac{1}{q_1 + q_2} - c \right) + \omega \left(\frac{-q_1}{(q_1 + q_2)^2} \right) + \omega \left(\frac{1}{q_1 + q_2} - c \right) = \frac{1}{Q} - c - \frac{\omega q_1}{Q^2} \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial q_2} = (1 - \omega) \left(\frac{1}{q_1 + q_2} - c \right) + \omega \left(\frac{-q_2}{(q_1 + q_2)^2} \right) + \omega \left(\frac{1}{q_1 + q_2} - c \right) = \frac{1}{Q} - c - \frac{\omega q_2}{Q^2} \quad (4.10)$$

Com que ens trobem dins el model de Cournot, sabem que les empreses decideixen la seva estratègia en el mercat basada en estimacions de la quantitat del seu producte a oferir tenint en compte els objectius marginals (4.9) i (4.10). Si aquests són positius, aleshores les companyies voldran augmentar la seva producció. De la mateixa manera, si són negatius, la voldran reduir. És a dir, com ja sabem, es vol trobar l'equilibri $I_{mg} = C_{mg}$. Matemàticament podem expressar el comportament de les empreses com

$$q_i(t+1) = q_i(t) + k_i(q_i) \frac{\partial F_i}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \quad (4.11)$$

on estem considerant $k_i(q_i) = v_i q_i$, $i = 1, 2$ amb $v_i > 0$ essent el paràmetre d'ajustament de la velocitat. Aquest paràmetre ens indica de quina manera necessiten augmentar o disminuir la producció.

Un cop tenim tots aquests elements, ja podem transformar aquesta expressió en una funció del pla que representa el joc entre les dues empreses que seguint la nomenclatura del document anomenarem T . El comportament de cada empresa el situarem en una component de la funció.

$$T : \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} q_1(t+1) \\ q_2(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1(t) + v_1 q_1(t) \left[\frac{1}{Q} - c - \frac{\omega q_1}{Q^2} \right] \\ q_2(t) + v_2 q_2(t) \left[\frac{1}{Q} - c - \frac{\omega q_2}{Q^2} \right] \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

on $t = 0, 1, 2, \dots$ és el temps o les “jugades” de cada empresa. Observem que es tracta d'una funció del pla on apareixen elements racionals en les dues components de la imatge a la vegada.

Conjunt de no definició

El primer element que podem determinar a simple vista és el conjunt de no definició δ_S . Per tant, la funció és no invertible, al menys, en els punts en que s'anul·la el denominador, això és la diagonal segona $q_1 = -q_2$. Definim doncs

$$\delta_S := \{(q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2 : q_1 + q_2 = 0\}.$$

Punts fixos

Si busquem els punts fixos de la funció $T(q_1, q_2) = (q_1, q_2)$, considerant $q_1 > 0$ i $q_2 > 0$, obtindrem l'únic equilibri de Nash que proporciona aquest sistema; fem-ho.

$$\begin{cases} q_1 = q_1 + v_1 q_1 \left[\frac{1}{q_1 + q_2} - c - \frac{\omega q_1}{(q_1 + q_2)^2} \right] \\ q_2 = q_2 + v_2 q_2 \left[\frac{1}{q_1 + q_2} - c - \frac{\omega q_2}{(q_1 + q_2)^2} \right] \end{cases}$$

Dividint la primera equació per q_1 i la segona per q_2 , obtenim el sistema lineal equivalent

$$\begin{cases} 1 = 1 + v_1 \left[\frac{1}{q_1 + q_2} - c - \frac{\omega q_1}{(q_1 + q_2)^2} \right] \\ 1 = 1 + v_2 \left[\frac{1}{q_1 + q_2} - c - \frac{\omega q_2}{(q_1 + q_2)^2} \right] \end{cases}$$

Com hem considerat $v_i > 0$, $i = 1, 2$, obligatòriament s'ha de complir

$$\left[\frac{1}{q_1 + q_2} - c - \frac{\omega q_1}{(q_1 + q_2)^2} \right] = 0 \quad \text{i} \quad \left[\frac{1}{q_1 + q_2} - c - \frac{\omega q_2}{(q_1 + q_2)^2} \right] = 0 \quad (4.13)$$

Per tant, com podem veure, en el punt fix les quantitats ofertades per les dues empreses són iguals:

$$\frac{w q_1}{(q_1 + q_2)^2} = \frac{w q_2}{(q_1 + q_2)^2} \Leftrightarrow q_1 = q_2 \Leftrightarrow Q = 2q_1 = 2q_2.$$

Finalment, substituint en (4.13),

$$\left[\frac{1}{Q} - c - \frac{\omega Q}{Q^2} \right] = 0 \Leftrightarrow 1 - cQ - \frac{\omega}{2} = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow q_i = \frac{2 - w}{4c}, i = 1, 2.$$

Així doncs, la única solució al sistema resulta el punt fix

$$PF = \left(\frac{2 - w}{4c}, \frac{2 - w}{4c} \right).$$

Per a poder calcular l'estabilitat d'aquest punt necessitem prèviament la matriu jacobiana del sistema plantejat. Amb els càlculs de les derivades pertinents,

$$DT(q_1, q_2) = \begin{pmatrix} 1 - v_1 \frac{c(q_1 + q_2)^3 + 2\omega q_1 q_2 - q_2(q_1 + q_2)}{(q_1 + q_2)^3} & -\frac{q_1(q_2 + q_1(1 - 2\omega))}{(q_1 + q_2)^3} \\ -\frac{q_2(q_1 + q_2(1 - 2\omega))}{(q_1 + q_2)^3} & 1 - v_2 \frac{c(q_1 + q_2)^3 + 2\omega q_1 q_2 - q_1(q_1 + q_2)}{(q_1 + q_2)^3} \end{pmatrix}.$$

Que avaluada en el punt fix PF queda com

$$DT\left(\frac{2 - w}{4c}, \frac{2 - w}{4c}\right) = \begin{pmatrix} 1 - v_1 \frac{c}{2 - \omega} & -v_1 \frac{c(1 - \omega)}{2 - \omega} \\ -v_2 \frac{c(1 - \omega)}{2 - \omega} & 1 - v_2 \frac{c}{2 - \omega} \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

El determinant i els valors propis d'aquesta matriu prenen la forma:

$$\det DT\left(\frac{2 - w}{4c}, \frac{2 - w}{4c}\right) = 1 + \frac{\omega c^2 v_1 v_2 - c(v_1 + v_2)}{2 - \omega}$$

$$\lambda_{\pm} = \frac{c \left[2(2 - \omega) - c(v_1 + v_2) \pm \sqrt{(v_1 + v_2)^2 - 4\omega v_1 v_2} \right]}{2(2 - \omega)}.$$

Tots dos valors propis de la matriu jacobiana són reals, ja que com $\omega \in [0, 1]$ i $v_i > 0$, $i = 1, 2$, es compleix

$$(v_1 + v_2)^2 - 4\omega v_1 v_2 = v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 - 4\omega v_1 v_2 = v_1^2 + v_2^2 + (2 - 4\omega)v_1 v_2 \geq (v_1 - v_2)^2 \geq 0$$

Per saber l'estabilitat necessitem determinar si la part real aquests valors propis és positiva o no ho és. Com que hem determinat que els valors són reals, no tenen part imaginària i per tant hem de calcular el signe d'ells mateixos. A través d'un seguit de càlculs es pot veure que, el punt fix és localment estable si

$$2(2 - \omega) + \omega c^2 v_1 v_2 > 2c(v_1 + v_2).$$

De la mateixa manera, el punt fix és inestable si i només si

$$c(v_1 + v_2) < 2(2 - \omega) + \omega c^2 v_1 v_2 < 2c(v_1 + v_2).$$

Invertibilitat de la funció i regions del pla

Endinsem-nos ara al contingut de més pes que hem treballat en aquest document com resulta el fet de buscar els punts focals i les corbes prefocals. Primerament però, hom pot trobar interessant calcular les preimatges de l'origen $O = (0, 0)$, equivalentment, trobar els valors de q_1 i q_2 que resolen el sistema $T(q_1, q_2) = (0, 0)$.

$$\begin{cases} 0 = q_1 + v_1 q_1 \left[\frac{1}{q_1 + q_2} - c - \frac{\omega q_1}{(q_1 + q_2)^2} \right] \\ 0 = q_2 + v_1 q_2 \left[\frac{1}{q_1 + q_2} - c - \frac{\omega q_2}{(q_1 + q_2)^2} \right] \end{cases}$$

Veiem que q_1 i q_2 no poden anul·lar-se alhora. Desenvolupant els càlculs veiem que el sistema plantejat presenta tres solucions:

$$\begin{aligned} (q_1, q_2)_1 &= \left(0, -\frac{(1 - \omega)v_2}{1 - cv_2} \right), \\ (q_1, q_2)_2 &= \left(-\frac{(1 - \omega)v_1}{1 - cv_1}, 0 \right), \\ (q_1, q_2)_3 &= \left(\frac{(2 - \omega)(v_1 + (1 - \omega)v_2 + c\omega v_1 v_2)}{\omega(v_1 + v_2 - 2cv_1 v_2)^2}, \frac{(2 - \omega)(v_2 + (1 - \omega)v_1 + c\omega v_1 v_2)}{\omega(v_1 + v_2 - 2cv_1 v_2)^2} \right). \end{aligned}$$

Hem trobat doncs que l'origen està situat per aquesta funció dins una regió Z_3 , és a dir, té tres preimatges reals de rang 1.

També podem calcular les preimatges dels punts situats en els eixos horitzontal, $T(q_1, q_2) = (x, 0)$, i vertical $T(q_1, q_2) = (0, y)$.

En el segon cas, resolem

$$\begin{cases} 0 = q_1 + v_1 q_1 \left[\frac{1}{q_1 + q_2} - c - \frac{\omega q_1}{(q_1 + q_2)^2} \right] \\ y = q_2 + v_1 q_2 \left[\frac{1}{q_1 + q_2} - c - \frac{\omega q_2}{(q_1 + q_2)^2} \right] \end{cases}$$

De la primera equació obtenim que o bé $q_1 = 0$ que ens porta a la solució

$$q_2 = \frac{y - v_2(1 - \omega)}{1 - cv_2}$$

i aleshores cada punt de l'eix vertical té una única preimatge, o bé

$$1 + v_1 \left[\frac{1}{q_1 + q_2} - c - \frac{\omega q_1}{(q_1 + q_2)^2} \right] = 0.$$

Aïllant q_2 en aquesta expressió obtenim tres solucions,

$$q_{21} = \frac{y}{1 - cv_2}, \quad q_{22} = \frac{\psi_1 + \sqrt{\psi_2}}{2}, \quad \text{i} \quad q_{23} = \frac{-(\psi_1 + \sqrt{\psi_2})}{2},$$

on ψ_i , $i = 1, 2$, són dues funcions que depenen dels paràmetres c, y, ω, v_1 i v_2 . Aleshores, si $\psi_2 \geq 0$ cada punt de l'eix vertical té tres preimatges reals; en cas contrari, si $\psi_2 < 0$ només existirà una preimatge real.

En el primer cas, resollem

$$\begin{cases} x = q_1 + v_1 q_1 \left[\frac{1}{q_1 + q_2} - c - \frac{\omega q_1}{(q_1 + q_2)^2} \right] \\ 0 = q_2 + v_1 q_2 \left[\frac{1}{q_1 + q_2} - c - \frac{\omega q_2}{(q_1 + q_2)^2} \right] \end{cases}$$

i seguint el raonament anàleg que hem desenvolupat obtenim els mateixos resultats de forma simètrica. Per tant, per a cada punt que pertanyi als eixos de coordenades, depenent dels paràmetres c, y, ω, v_1 i v_2 podrem trobar-ne una o tres preimatges. Els eixos del pla es troben dividits en dues regions Z_1 i Z_3 . No calcularem les preimatges de la resta de punts del pla diferents als eixos i l'origen, ja que els càlculs esdevenen excessivament llargs i pesats.

Conjunt crític

En aquest exemple resulta interessant buscar el conjunt crític LC que serà la frontera d'aquells punts que passen de tenir una preimatge a tenir tres preimatges o la situació inversa. Veurem que per calcular aquesta corba ens esdevindrà més senzill calcular primerament el conjunt LC_{-1} , que tal i com vam veure en el Lema 2.15 compleix la inclusió següent:

$$LC_{-1} \subseteq J_0 := \{(q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2 : \det DT(q_1, q_2) = 0\}.$$

Calculant el determinant de la matriu jacobiana i igualant-lo a 0 obtenim

$$q_1^3 + q_2^3 + 3q_1 q_2 \left(q_1 + q_2 - \frac{(1 - 2\omega)(v_1 + v_2 - 2cv_1 v_2)}{(1 - cv_1)(1 - cv_2)} \right) + \frac{q_1^2 v_2}{1 - cv_2} + \frac{q_2^2 v_1}{1 - cv_1} = 0, \quad (4.15)$$

que representa la corba LC_{-1} . Finalment, aplicant la Definició del conjunt crític LC , 2.12, obtindríem la corba buscada.

Punts focals

Un altre element que resulta interessant de calcular són els punts focals. Tornem a escriure el sistema (4.12) passant-ho tot a un mateix denominador comú:

$$T : \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} q_1(t+1) \\ q_2(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{Q^2 q_1(t) + v_1 q_1(t)(Q - Q^2 c - \omega q_1)}{Q^2} \\ \frac{Q^2 q_2(t) + v_2 q_2(t)(Q - Q^2 c - \omega q_2)}{Q^2} \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

Aleshores, considerant que $q_1, q_2 \geq 0$ i són nuls tots dos només quan el denominador és 0, podem determinar les funcions diferenciables següents

$$N_1(q_1, q_2) = Q - \omega q_1 - cQ^2, \quad N_2(q_1, q_2) = Q - \omega q_2 - cQ^2, \quad D(q_1, q_2) = Q^2,$$

i d'aquesta manera podem reescriure el sistema (4.12) de la forma

$$T : \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} q_1(t+1) \\ q_2(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1(t) + v_1 q_1(t) \left(\frac{N_1(q_1, q_2)}{D(q_1, q_2)} \right) \\ q_2(t) + v_1 q_2(t) \left(\frac{N_2(q_1, q_2)}{D(q_1, q_2)} \right) \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

D'aquesta manera, els punts focals seran solució dels sistemes lineals

$$\begin{cases} 0 = Q - \omega q_1 - cQ^2 \\ 0 = Q^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = Q - \omega q_2 - cQ^2 \\ 0 = Q^2 \end{cases}$$

De la segona equació de tots dos, com ja hem vist en el conjunt de no definició, obtenim $Q = q_1 + q_2 = 0$, per tant, $q_1 = -q_2$. Però, com que estem considerant que ambdues quantitats ofertades al mercat han de ser no negatives, l'única solució d'aquesta igualtat és l'origen de coordenades $(q_1, q_2) = (0, 0) = O$.

Calculem ara les corbes prefocals de l'origen O . Passant al límit obtenim que té exactament dues corbes prefocals: els eixos de coordenades;

$$\delta_Q = \{(q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2 : q_1 = 0\} \cup \{(q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2 : q_2 = 0\}.$$

Nosaltres hem treballat en aquest document només els punts focals simples, i veurem tot seguit que aquest no ho és. Comprovem-ho numèticament tot verificant si es compleix o no la condició del Lema 2.6. Prèviament hem de determinar les derivades parcials de les funcions N_1 , N_2 i D respecte les variables q_1 i q_2 i avaluar-les en el punt focal. Fem-ho.

$$\begin{aligned} N_{1_{q_1}} &= \frac{\partial N_1}{\partial q_1}(q_1, q_2) = 1 - \omega - 2c(q_1 + q_2)q_1 \Rightarrow \frac{\partial N_1}{\partial q_1}(0, 0) = 1 - \omega, \\ N_{2_{q_2}} &= \frac{\partial N_2}{\partial q_2}(q_1, q_2) = 1 - \omega - 2c(q_1 + q_2)q_2 \Rightarrow \frac{\partial N_2}{\partial q_2}(0, 0) = 1 - \omega, \\ N_{2_{q_1}} &= \frac{\partial N_2}{\partial q_1}(q_1, q_2) = 1 - 2c(q_1 + q_2)q_1 \Rightarrow \frac{\partial N_2}{\partial q_1}(0, 0) = 1, \\ N_{1_{q_2}} &= \frac{\partial N_1}{\partial q_2}(q_1, q_2) = 1 - 2c(q_1 + q_2)q_2 \Rightarrow \frac{\partial N_1}{\partial q_2}(0, 0) = 1, \\ D_{q_1} &= \frac{\partial D}{\partial q_1}(q_1, q_2) = 2(q_1 + q_2)q_1 \Rightarrow \frac{\partial D}{\partial q_1}(0, 0) = 0, \\ D_{q_2} &= \frac{\partial D}{\partial q_2}(q_1, q_2) = 2(q_1 + q_2)q_2 \Rightarrow \frac{\partial D}{\partial q_2}(0, 0) = 0. \end{aligned}$$

$$N_{1_{q_2}} D_{q_1} - N_{1_{q_1}} D_{q_2} = 1 * 0 - (1 - \omega) * 0 = 0$$

$$N_{2_{q_2}} D_{q_1} - N_{2_{q_1}} D_{q_2} = 1 * 0 - (1 - \omega) * 0 = 0$$

Per a que el punt sigui simple totes dues igualtats haurien de ser diferents de 0; per tant, no ho és i l'estudi d'aquest sortiria fora de l'abast d'aquest document. Hi ha una correspondència entre els arcs que passen per O i els punts de la corba prefocal diferent de 1-a-1. Com hem vist en el càlcul de les preimatges de l'origen, aquesta correspondència és 3-a-1.

En l'exemple analitzat, resulta atractiu calcular les imatges per la funció T dels eixos de coordenades.

$$T\begin{pmatrix} 0 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{q_2^2 0 + v_1 0 (q_2 - q_2^2 c - \omega 0)}{q_2^2} \\ \frac{q_2^3 + v_2 q_2 (q_2 - q_2^2 c - \omega q_2)}{q_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ q_2 + v_2(1 - q_2 c - w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_2(1 - w) + (1 - cv_2)q_2 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} q_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{q_1^3 + v_1 q_1 (q_1 - q_1^2 c - \omega q_1)}{q_1^2} \\ \frac{q_1^2 0 + v_2 0 (q_1 - q_1^2 c - \omega q_1)}{q_1^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 + v_1(1 - q_1 c - w) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1(1 - w) + (1 - cv_1)q_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Veiem doncs que els eixos són invariants per T , pel fet que qualsevol punt de d'un eix és enviat per T al mateix eix però en una posició diferent.

Conclusió del model

En el model que hem plantejat, hem trobat que l'equilibri de Nash es troba situat en un punt interior on la quantitat que cada empresa envia al mercat ha de ser la mateixa. A més a més, l'existència del denominador en l'expressió del sistema ens ha permès buscar l'únic punt focal existent sota les condicions donades i estudiar-ne certes propietats, així com també dels eixos de coordenades.

Des d'un punt de vista econòmic, hem vist que escollir correctament una estratègia basada en maximitzar únicament els beneficis empresarials privats o una estratègia basada en maximitzar en una mitjana ponderada beneficis privats i beneficis públics pot assegurar a les empreses la seva continuïtat en el mercat.

Capítol 5

Conclusions

Aquest treball contribueix a la comprensió dels sistemes dinàmics racionals i les seves aplicacions en dos àmbits força diferenciats: l'anàlisi matemàtica i l'economia. Nosaltres hem estudiat les propietats característiques de les funcions del pla amb components racionals. Més concretament, ens hem centrat amb aquelles en que només una de les dues components era racional i quan aquesta s'anul·lava en el denominador (i alhora en el numerador). D'aquest esdeveniment han sorgit nous conceptes com ara el *conjunt de no definició*, els *punts focals* i les seves corresponents *corbes prefocals*, el *conjunt crític LC*, etc.

Hem mostrat també que, a través d'aquests elements i d'altres ja coneguts com els *punts fixos* i la seva estabilitat, podem estudiar la dinàmica de diferents models coneguts reinterpretats com sistemes dinàmics del pla. Per exemple, hem analitzat profundament el mètode numèric de la secant per a trobar les arrels d'un polinomi des d'aquesta nova perspectiva. A més a més, per aquelles funcions no invertibles, hem determinat el conjunt de punts que separa l'espai $\mathbb{R}^2$ en regions segons el nombre de preimatges que cada punt té.

El document ha finalitzat introduint el model clàssic del Duopoli de Cournot però més avançat, on dues empreses actuen en un mercat de competència imperfecta buscant la maximització de les seves funcions objectius compostes en part pel seu benefici privat i en part pel benestar social dels consumidors. Aquesta aplicació pot resultar una base per a poder modelar mercats reals.

Aquesta memòria de final de grau obre la porta a futures investigacions, especialment en analitzar sistemes dinàmics de dimensions superiors o en aplicacions a models econòmics més profunds, com poden ser aquells plantejats amb funcions d'utilitat més complexes o mercats amb comportaments irregulars o no lineals.

Bibliografia

- [1] Bischi, G-I.; Gardini, L.; Mira, C.: Plane maps with denominator. I. Some generic properties, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol 9, No. 1, 119-132 1999.
- [2] Garijo. A.; Jarque, X.: Global dynamics of the real secant method, *London Mathematical Society*, 32 (2019), 4557-4566, 2019.
- [3] Askar, S.S.: On the dynamics of Cournot duopoly game with private firms: Investigations and analysis, *Elsevier. Applied Mathematics and Computation*, 432 (2022) 127354, 2022.
- [4] Wikipedia: Col·laboradors de Wikipedia. Competencia de Cournot. *Wikipedia, la enciclopedia libre*, 2023.
- [5] Wikipedia: Col·laboradors de Wikipedia. Método de la secante. *Wikipedia, la enciclopedia libre*, 2023.
- [6] Schotte, S.: Competencia de Cournot. *Inomics*, 2022.
- [7] Sonia D.: Comprender el Teorema de Cournot: Un Análisis para Optimizar el Rendimiento Económico, *El club de los Teoremas*, 2023.
- [8] Apunts de l'assignatura d'Organització Industrial del grau d'Administració i Direcció d'Empreses de la Universitat de Barcelona.