



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRADO DE MATEMÁTICAS

Trabajo de final de grado

MODELOS DE GESTIÓN DE CARTERAS DE INVERSIÓN

Autor: Eloy Jaray Español

Director: Dr. Josep Vives Santa Eulalia
Realizado en: Departamento de Matemática Económica,
Financiera y Actuarial

Barcelona, 15 de enero de 2025

Abstract

This Final Degree Project focuses on the theoretical study of mathematical models used in portfolio theory with the aim of understanding the mathematical and financial foundations that underpin them.

In particular, several key models are introduced and analyzed: the Markowitz Model, focused on the construction of efficient portfolios; the Capital Asset Pricing Model, which describes the relationships between risk and expected return; the Arbitrage Pricing Model, based on multiple risk factors; and the Black-Litterman model, which integrates Bayesian methodologies to achieve optimal asset allocations.

Resumen

Este Trabajo de Fin de Grado aborda el estudio teórico de modelos matemáticos utilizados en la teoría de carteras con el fin de entender las bases matemáticas y financieras que los rigen.

En concreto, se introducen y analizan varios modelos clave: el Modelo de Markowitz, enfocado a la construcción de carteras eficientes; el modelo CAPM, que examina la relación entre riesgo y retorno esperado; el modelo APT, basado en factores múltiples de riesgo; y el Modelo de Black-Litterman, que integra metodologías bayesianas para lograr una asignación óptima de activos.

Agradecimientos

En primer lugar, me gustaría agradecer a mi tutor, el Dr. Josep Vives Santa Eulalia, su tiempo, dedicación y consejos para que este trabajo se haya podido realizar.

A mis padres y mi tía, que siempre están a mi lado y me han animado y ayudado a superar los momentos más difíciles de estos años de carrera.

No quería olvidarme de todas las personas que he conocido durante estos años fuera de la universidad, especialmente de los amigos de la residencia y del voleibol, porque junto a ellos he vivido los mejores momentos de los últimos cuatro años y medio.

Finalmente, quería hacer una mención especial a los amigos que me llevo de la universidad, aquellos a los que conocí las primeras semanas y que me han acompañado en esta maravillosa etapa; gracias por haber estado allí en cada momento, sin vosotros no habría sido lo mismo.

Índice

1. Introducción	1
2. Conceptos previos	3
3. Modelo de Markowitz	6
3.1. Hipótesis y suposiciones	6
3.2. Carteras de n activos	7
3.3. Frontera Eficiente	9
4. Modelo CAPM	15
4.1. Línea del Mercado de Capitales	15
4.2. Retorno esperado de un activo	19
4.3. Línea del Mercado de Valores	21
5. Modelo APT	23
5.1. Arbitraje e hipótesis	23
5.2. Formalización matemática	24
6. Modelo Black-Litterman	27
6.1. Estadística Bayesiana	27
6.2. Parámetros	28
6.3. Retornos implícitos	28
6.4. Opiniones del inversor	30
6.5. Fórmula de Black-Litterman	31
7. Conclusiones	34

1. Introducción

El proyecto

La *teoría moderna de carteras* (MPT) o análisis de media-varianza es una teoría de inversión que estudia cómo maximizar el retorno y minimizar el riesgo mediante una adecuada elección de los componentes de una cartera de activos. Fue originada por Harry Markowitz a mediados del siglo XX. A lo largo de los años, las técnicas encargadas de optimizar las carteras y los elementos que componen dichas técnicas han ido evolucionando, cosa que ha permitido que este ámbito de las matemáticas financieras haya experimentado una mejora sustancial. La importancia de la gestión de carteras y la valoración de activos en el mundo financiero han permitido el surgimiento de distintos modelos que, aplicados a los distintos mercados financieros, permiten a los inversores saber cuáles son aquellas carteras óptimas y eficientes del mercado.

Como hemos mencionado, fue Harry M. Markowitz quién sentó las bases mediante un modelo basado en la diversificación de los activos del mercado. Este modelo utiliza las correlaciones entre dichos activos para maximizar los retornos esperados dado un nivel de riesgo mínimo, encontrando así carteras eficientes en términos de media y varianza. Mediante la diversificación, lo que se pretende hacer es distribuir el riesgo entre los distintos activos para así poder obtener una cartera con un mayor rendimiento global.

Durante los años sesenta, William Sharpe amplió el trabajo de Markowitz introduciendo el *Capital Asset Pricing Model* (CAPM), cuyo objetivo principal es proporcionar una herramienta para estimar el rendimiento esperado de cada activo financiero. Esto lo obtuvo mediante la introducción de un activo libre de riesgo en el mercado, cosa que permite calcular la prima de riesgo tanto de los distintos activos como del mercado. Para cuantificar el rendimiento esperado de cada activo, se tiene en cuenta su nivel de riesgo sistemático en relación con el mercado en general, introducido mediante un único coeficiente. Diez años más tarde, Stephen Ross utilizó el modelo CAPM como base de su modelo: *Arbitrage Pricing Theory* (APT). Se describe como un modelo multifactorial que ofrece una mayor flexibilidad a la hora de describir los diferentes riesgos que pueden afectar a un activo, gracias a la incorporación de distintos factores macroeconómicos o específicos de cada mercado, a diferencia del CAPM que supone un único factor de riesgo.

En los años noventa, Fischer Black y Robert Litterman presentaron su modelo de optimización de carteras que surgió como una solución a los desafíos prácticos a los que se enfrentaban los inversores al implementar los distintos modelos desarrollados anteriormente en situaciones del mundo real. Este modelo combina los datos objetivos que ofrece cada mercado con las opiniones que puede tener cada inversor sobre los rendimientos futuros de diferentes activos. La estadística bayesiana juega un papel clave a la hora de combinar los datos implícitos del mercado con las opiniones subjetivas, teniendo en cuenta también cuáles son las opiniones sobre las que el inversor está más seguro.

El objetivo principal de este trabajo es estudiar, explicar y comparar estos cuatro modelos desde un punto de vista teórico, en el que se destacan sus fortalezas y limitaciones. Más allá de su relevancia histórica, se busca analizar cómo cada modelo aborda los retos clave de la gestión de carteras, y qué factores determinan su idoneidad en distintos escenarios.

Estructura de la Memoria

La memoria está estructurada en seis apartados bien diferenciados.

Primero se definen unos conceptos previos, tanto financieros como matemáticos, necesarios para entender mejor lo que se explica a lo largo de todo el documento. Se han utilizado los recursos [1], [2] y [3].

A continuación se encuentra el primer modelo, el modelo de Markowitz, que culmina con el cálculo de la frontera eficiente. Se han utilizado las referencias [6] y [8].

Tras establecer la frontera eficiente en el modelo de Markowitz, pasamos al modelo CAPM, que permite introducir las líneas del mercado de Capitales y de Valores, juntamente con el cálculo de la Cartera de Mercado, haciendo uso de las referencias [12] y [13]. Como ampliación del CAPM, en el siguiente apartado, se encuentra el modelo APT, descrito en [15].

Finalmente, encontramos el modelo de Black-Litterman para el cual se ha utilizado principalmente la referencia [17], complementada con [18], [19] y [20].

El último apartado recoge las conclusiones generales.

Las referencias bibliográficas siguen el orden de aparición en el trabajo.

En todo momento se ha intentado mantener un tono formal y coherente, intentando simplificar su formulación para poder explicar cada modelo de una forma clara y precisa.

2. Conceptos previos

Antes de empezar con el marco teórico del trabajo, es necesario destacar y señalar distintos conceptos y definiciones, tanto financieros como matemáticos, que harán de su conocimiento una mayor y más clara comprensión.

Definición 2.1. *Un **activo financiero** es un instrumento que representa una forma de propiedad o un derecho contractual sobre un valor económico. Estos activos son comprados, vendidos o negociados en los mercados financieros y tienen el potencial de generar ingresos o ganancias para sus propietarios.*

Los activos financieros están caracterizados por la liquidez, el riesgo y la rentabilidad:

- **Liquidez:** es la cualidad de un activo para ser convertido en dinero efectivo de forma inmediata sin pérdida significativa de su valor.
- **Riesgo:** es la incertidumbre sobre la evolución del precio de un activo, e indica la posibilidad de que ofrezca un rendimiento distinto al esperado.
- **Rentabilidad:** es la capacidad de un activo para generar ganancias o rendimientos para el inversor.

Definición 2.2. *Un **activo libre de riesgo** es aquel que tiene una rentabilidad conocida de antemano y presenta una volatilidad nula, manteniendo su valor inalterable en el tiempo. Su rentabilidad, igualmente, se considera como el valor mínimo que puede obtenerse en el mercado.*

Definición 2.3. *Los **valores financieros** son instrumentos financieros que representan los activos. Están vinculados a derechos de dividendos, pagos de intereses o reembolso de capital. Representan derechos parciales del propietario sobre cierta sociedad (acciones) o algún título de crédito u obligación con características y derechos estandarizados.*

Definición 2.4. *Una **inversión** es el proceso de comprar activos con el objetivo de que aumenten de valor con el tiempo y proporcionen rendimientos en forma de pagos de ingresos o de ganancias de capital. En el caso de las **inversiones financieras**, estas se refieren a las operaciones que se hacen en valores como acciones, bonos, letras de cambio, depósitos bancarios y otros instrumentos financieros.*

Definición 2.5. *Una **cartera de inversiones** es el conjunto de activos financieros que posee un individuo o entidad. Pueden ser acciones, bonos, divisas, etc., que el inversor va comprando, vendiendo o conservando a lo largo del tiempo que mantiene su inversión.*

Definición 2.6. *La **gestión de carteras de inversión** es un proceso de combinación de activos en una cartera diseñada según las preferencias y necesidades del inversor, seguimiento de la evolución de dicha cartera, y evaluación de sus resultados.*

Los criterios bajo los cuales se rige la gestión de carteras tratan de crear un sistema que sea compatible con los objetivos del inversor, ya que se ha de tener presente que todo inversor está dispuesto a conseguir la maximización de su patrimonio, pero no todos están dispuestos a asumir el mismo nivel de riesgo. Así pues, existen diferentes tipos de inversores según su aversión al riesgo: **inversores agresivos**, aquellos que están dispuestos a asumir riesgos y buscar rendimientos potencialmente elevados, **inversores moderados**, buscan

un equilibrio entre riesgo y beneficio, e **inversores conservadores**, que dan prioridad a la preservación del capital y son reacios al riesgo sustancial.

Una vez hemos definido los principales conceptos financieros que vamos a necesitar durante todo el trabajo, ahora, vamos a explicar la base matemática necesaria para poder llevar a cabo una comprensión óptima.

Consideremos el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$, donde Ω es el espacio muestral, cuyos elementos llamaremos *escenarios*, $\mathcal{F}$ es una σ -álgebra de subconjuntos de Ω , y $\mathcal{P}$ es una función de probabilidad. Cuando Ω es finito, $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, sea $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ tal que para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, $\omega_i \in \mathcal{F}$, definimos la función de probabilidad como: $\mathcal{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ tal que $\mathcal{P}(\{\omega_i\}) = p_i$, donde $\omega_i \in \Omega$. Se cumple que $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

Para nuestro modelo, asumiremos que tenemos únicamente dos momentos: el momento inicial $t=0$, y el momento final $t=1$. Cada activo a_i tiene un valor inicial $\mathcal{V}_{i,0}$ (conocido) y un valor final $\mathcal{V}_{i,1}$ donde $\mathcal{V}_{i,1} : \Omega \rightarrow [0, +\infty)$ es una variable aleatoria.

Observación 2.7. Tenemos que estar seguros de que no haya valores negativos para la variable aleatoria $\mathcal{V}_{i,1}$ ya que, desde el punto de vista económico, no tiene sentido tener precios negativos. Esto significa que la imagen de $\mathcal{V}_{i,1}$ tiene que ser $[0, +\infty)$, por lo que se cumple $\mathcal{P}(\mathcal{V}_{i,1} \geq 0) = 1$.

Definición 2.8. Una cartera de valores consiste en un conjunto de activos $a_1, \dots, a_n$ en una cierta proporción. Formalmente, definimos una **cartera de valores** como una n -tupla ordenada de números reales $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$, donde θ_i es el número de unidades del activo a_i .

Observación 2.9. Observamos que si θ_i es negativo, entonces la cartera tiene una posición en corto en el activo a_i .

Definición 2.10. El **retorno** del activo a_i es una variable aleatoria $R_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definida como:

$$R_i = \frac{\mathcal{V}_{i,1} - \mathcal{V}_{i,0}}{\mathcal{V}_{i,0}}.$$

Definición 2.11. Por la linealidad de la esperanza, el **retorno esperado** del activo a_i está definido como:

$$\mathbb{E}(R_i) = \frac{\mathbb{E}(\mathcal{V}_{i,1}) - \mathcal{V}_{i,0}}{\mathcal{V}_{i,0}}.$$

Notación 2.12. Notaremos a partir de ahora, $\mu_i = \mathbb{E}(R_i)$.

El concepto de riesgo financiero se puede explicar de varias maneras. El más básico y comúnmente utilizado es el que se refiere al riesgo como la incertidumbre del valor final puesto que es desconocido. Esta incertidumbre se entiende como la dispersión sobre un punto de referencia. El candidato natural para el punto de referencia viene dado por la esperanza matemática. Esta dispersión se mide con la varianza, que tiene en cuenta dos aspectos del riesgo: la distancia entre los posibles valores y el valor esperado, y la probabilidad de alcanzar los distintos valores posibles.

Definición 2.13. Como medida de riesgo, nos referimos a la **varianza del retorno**, que viene dada por:

$$\text{Var}(R_i) = \mathbb{E}((R_i - \mu_i)^2) = \mathbb{E}(R_i^2) - \mu_i^2 = \mathbb{E}(R_i^2) - (\mathbb{E}(R_i))^2.$$

Definición 2.14. *Tenemos en cuenta también la **desviación estándar** $\sqrt{\text{Var}(R_i)}$, que denotaremos por σ_i .*

Cuando consideramos el riesgo de una inversión, debemos tener en cuenta tanto la esperanza como la desviación estándar del retorno. Dada la elección entre dos valores financieros, un inversor racional, si puede, escogerá el que tenga un mayor retorno esperado y una menor desviación estándar, lo que significa un menor riesgo.

Definición 2.15. *Diremos que un valor con retorno esperado μ_1 y desviación estándar σ_1 **domina** a otro con retorno esperado μ_2 y desviación estándar σ_2 si: $\mu_1 \geq \mu_2$ y $\sigma_1 \leq \sigma_2$.*

En la teoría de carteras, usaremos el plano (σ_w, μ_w) , más en concreto, la parte superior derecha puesto que la desviación estándar (σ_w) es no negativa. Cada valor financiero estará representado por un punto en el plano.

Definición 2.16. *Dado un conjunto $\mathcal{A}$ de valores financieros en el plano (σ_w, μ_w) , consideramos el **subconjunto eficiente** como el subconjunto que contiene todos los elementos maximales con respecto a la relación de dominancia.*

3. Modelo de Markowitz

Harry M. Markowitz estableció la *Teoría Moderna de Carteras* el año 1952 en su tesis doctoral titulada *Portfolio Selection* (ver [4]). Posteriormente, amplió sus resultados en el libro *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments* publicado en 1959 (ver [5]). Casi cuarenta años después de la primera publicación sobre el tema, Markowitz recibió el Premio Nobel de Economía en reconocimiento a su trabajo pionero en la teoría de la economía financiera.

El aporte clave del modelo de Markowitz fue su descripción del impacto de la diversificación en una cartera, analizando cómo el número de activos y su relación de covarianza afecta al riesgo y rendimiento de la misma. Este enfoque considera que el riesgo de una cartera no depende solo de los riesgos individuales de cada activo, sino también de la relación de covarianza entre ellos.

Su modelo muestra cómo distribuir un capital inicial entre una colección de activos con riesgo para crear una cartera eficiente. En concreto, la pretensión inicial es obtener una cartera con el mínimo riesgo para una rentabilidad esperada dada o una cartera con la máxima rentabilidad para un riesgo dado. Por lo tanto, en este modelo existen dos elementos esenciales: rentabilidad esperada y riesgo. El modelo de Markowitz está planteado puramente desde la óptica del inversor individual y no entra en cuáles son las consecuencias de su utilización para el conjunto del mercado.

3.1. Hipótesis y suposiciones

En esta sección, vamos a resumir las principales hipótesis y suposiciones sobre el comportamiento de los inversores y el mercado financiero bajo los que H. M. Markowitz construyó su *Teoría de selección de carteras*.

- Inversores: todos los inversores son racionales, es decir, buscan maximizar los retornos mientras, a la vez, intentan minimizar los riesgos. Únicamente están dispuestos a asumir mayores riesgos si estos están compensados por mayores retornos esperados.
- Acceso a la información: la información sobre todos los activos es precisa y está disponible al alcance de todos los inversores de manera gratuita.
- Eficiencia: el precio de los valores de los activos financieros se ajustan rápidamente a la nueva información, de modo que su precio actual refleja toda la información conocida que puede afectar al activo, incluyendo datos del pasado y expectativas sobre su comportamiento futuro. Así pues, los mercados son perfectamente eficientes.
- Liquidez: cualquier número de unidades de un activo pueden ser compradas y vendidas rápidamente.
- Costes de transacción e impuestos: son negligibles comparados con el valor de las transacciones, por lo que los podemos ignorar. Lo mismo pasa con los impuestos.

Una vez que hemos hecho todas las suposiciones que contempla el modelo, vamos a empezar a construirlo.

3.2. Carteras de n activos

Sea una cartera de inversión formada por n activos $(a_1, \dots, a_n)$. Es habitual medir la cantidad de un activo en una cartera por su valor porcentual.

Definición 3.1. El **peso** w_i del activo a_i es el porcentaje de su valor contenido en la cartera de valores en el momento $t=0$, que es:

$$w_i = \frac{\theta_i \mathcal{V}_{i,0}}{\sum_{j=1}^n \theta_j \mathcal{V}_{j,0}}.$$

Observación 3.2. Notamos que la suma de los pesos siempre será 1: $w_1 + \dots + w_n = 1$.

Definición 3.3. El **retorno de la cartera** está definido como la suma ponderada de los retornos de cada activo:

$$R_w = \sum_{i=1}^n w_i R_i.$$

Definición 3.4. Dado que los retornos individuales, generalmente, no son independientes, la **varianza de la cartera**, o lo que es lo mismo, el **riesgo**, viene dado por:

$$\sigma_w^2 = \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n w_i R_i\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \text{Cov}(R_i, R_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j,$$

donde $\text{Cov}(R_i, R_j) = \sigma_{ij}$ es la covarianza de R_i y R_j , y $\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}$ es el coeficiente de correlación.

Observación 3.5. El coeficiente de correlación oscila entre -1 y $+1$. Un valor menor que 0 indica que existe una correlación negativa, es decir, que las dos variables están asociadas en sentido inverso. Cuando es exactamente -1 , significa que tienen una correlación negativa perfecta. Lo mismo aplica para un valor mayor que 0. Un valor mayor que 0 indica que existe una correlación positiva. En este caso, las variables estarían asociadas en sentido directo. Un valor exacto de $+1$ indicaría una relación lineal positiva perfecta. Una correlación de 0, o próxima a 0, indica que no hay relación lineal entre las dos variables.

Definición 3.6. La **desviación estándar de la cartera**, también llamada **volatilidad**, es:

$$\sigma_w = \sqrt{\sigma_w^2}$$

Observación 3.7. Un activo tiene riesgo si $\sigma_i > 0$ y es **libre de riesgo** si $\sigma_i = 0$.

Definición 3.8. El **retorno esperado de una cartera** (μ_w) es el valor esperado del retorno de la cartera:

$$\mu_w = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n w_i R_i\right) = \sum_{i=1}^n w_i \mathbb{E}(R_i) = \sum_{i=1}^n w_i \mu_i.$$

Los *pesos* de los activos de la cartera los podemos escribir mediante el vector:

$$\omega = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}.$$

Denotamos por e al vector n -dimensional:

$$e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Así pues, como $w_1 + \dots + w_n = 1$, tenemos que:

$$\omega^t e = 1.$$

Denotamos también el vector de los *retornos esperados*:

$$r = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix},$$

y la *matriz de covarianza*:

$$V = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{pmatrix},$$

donde

$$\sigma_{ij} = \text{Cov}(R_i, R_j) = \sigma_{ji}.$$

Notamos que $\sigma_{ii} = \sigma_i^2$ es la *varianza* de R_i . Observamos también que la matriz V es simétrica y semidefinida positiva. Suponemos que los activos no son redundantes, es decir, no hay ninguna combinación lineal exacta entre ellos, que no están perfectamente correlacionados y que hay suficientes datos históricos para estimar la matriz; así pues, V es definida positiva y por lo tanto invertible.

Teorema 3.9. *Sea R_w el retorno de una cartera, entonces el retorno esperado $\mu_w = \mathbb{E}(R_w)$ y la varianza $\sigma_w^2 = \text{Var}(R_w)$ de una cartera, dados los pesos ω , son:*

$$\mu_w = \omega^t r, \tag{3.1}$$

$$\sigma_w^2 = \omega^t V \omega. \tag{3.2}$$

Demostración. La fórmula de μ_w , por la linealidad de la esperanza matemática, tenemos que es:

$$\mu_w = \mathbb{E}(R_w) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n w_i R_i\right) = \sum_{i=1}^n w_i \mathbb{E}(R_i) = \sum_{i=1}^n w_i \mu_i = \omega^t r.$$

Para σ_w^2 usamos la bilinealidad de la covarianza, y que $\text{Cov}(R_i, R_j) = \sigma_{ij}$:

$$\sigma_w^2 = \text{Var}(R_w) = \text{Cov}(R_w, R_w) = \text{Cov}\left(\sum_{i=1}^n w_i R_i, \sum_{j=1}^n w_j R_j\right) = \sum_{i,j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij} = \omega^t V \omega.$$

□

3.3. Frontera Eficiente

Tal y como hemos mencionado antes, los inversores son aversos al riesgo, puesto que únicamente están dispuestos a asumirlos si están compensados con mayores ganancias potenciales, es decir, mayores retornos esperados. Es razonable suponer que los inversores están interesados únicamente en carteras eficientes.

Definición 3.10. Una *cartera eficiente* es aquella que tiene simultáneamente los activos con el menor riesgo posible para un retorno esperado dado y el mayor retorno esperado para un cierto nivel de riesgo. Es decir, es aquella cartera que contiene el subconjunto eficiente de valores financieros en el plano (σ_w, μ_w) .

Definición 3.11. Al conjunto de todas las carteras eficientes se le conoce como *frontera eficiente*.

La *frontera eficiente* contiene infinitas carteras eficientes y cada una representa diferentes equilibrios entre el riesgo y el retorno esperado.

Vamos a calcular la frontera eficiente de una cartera de n activos, sin restricciones sobre la venta en corto de activos.

Observación 3.12. Cuando no se permite tener una posición en corto en activos, la frontera eficiente es analíticamente más compleja y normalmente se presenta usando gráficas analíticas.

Supongamos que para cualquier cartera de n activos, todos tienen riesgo ($\sigma_i > 0$), los retornos esperados, los riesgos y los coeficientes de correlación son conocidos y fijos, no hay retornos esperados idénticos ($\mu_1 \neq \dots \neq \mu_n$), riesgos idénticos ($\sigma_1 \neq \dots \neq \sigma_n$) ni correlación perfecta ($\rho_{ij} \neq \pm 1 \ \forall i \neq j$) y suponemos también que se permiten ventas en corto infinitas ($-\infty < w_i < \infty \ \forall i$). En el momento $t=0$ disponemos de una cantidad de dinero $\mathcal{V}_{w,0}$ para comprar n activos con riesgo. Nuestro objetivo es formar una *cartera eficiente* mediante estos activos, es decir, una cartera con el mínimo riesgo para un determinado retorno esperado y cuyo retorno esperado es máximo dado un nivel de riesgo. En otras palabras, debemos determinar el porcentaje de nuestro capital inicial disponible ($\mathcal{V}_{w,0}$) que asignamos a cada activo para obtener una cartera eficiente, es decir, tenemos que calcular el vector de los pesos de los activos de la cartera.

Introducimos los siguientes valores que nos ayudarán a simplificar los cálculos:

$$\begin{aligned} A &= e^t V^{-1} e > 0, \\ B &= r^t V^{-1} e, \\ C &= r^t V^{-1} r > 0, \\ AC - B^2 &> 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Introducimos también dos propiedades útiles que aplicaremos más adelante. Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y un vector $x \in \mathbb{R}^n$ el gradiente y la Hessiana de $x^t A x$ son:

$$\frac{\partial(x^t A x)}{\partial x} = (A + A^t)x \quad ; \quad \frac{\partial^2(x^t A x)}{\partial x \partial x^t} = (A + A^t). \tag{3.4}$$

Primero necesitamos encontrar la cartera con el menor riesgo para un determinado retorno esperado. Entonces consideramos todos los posibles retornos esperados de la cartera

para obtener el correspondiente conjunto de carteras de riesgo mínimo, o lo que se conoce también como *carteras de mínima varianza*. El conjunto de todos esos pares de retornos esperados y riesgo de carteras forma la rama superior de una hipérbola horizontal. Debemos debatir que la parte de la rama desde el vértice hacia la parte superior forma la deseada *frontera eficiente*.

Vamos a detallar lo que hemos descrito; buscamos un vector de pesos de la cartera ω que resuelva el problema siguiente:

$$\text{Problema I: Minimizar } \sigma_w^2 = \omega^t V \omega \quad (3.5)$$

$$\text{Sujeto a } \omega^t e = 1 \quad \text{y} \quad \omega^t r = \mu_w. \quad (3.6)$$

Observación 3.13. Notamos que para $n \geq 3$, no hay un único vector de pesos que resuelva el problema, dado que tenemos 2 restricciones con n incógnitas. En realidad, hay infinitas soluciones ω que satisfacen las restricciones (3.6) y, por lo tanto, existen infinitos riesgos asociados a μ_w .

Queremos a demostrar que existe un único vector de pesos de la cartera $\omega = \omega^*$ que genere el menor riesgo de la cartera dado μ_w . Es analíticamente más sencillo resolver el siguiente problema de optimización:

$$\text{Problema II: Minimizar } f_c(\omega) = \frac{\omega^t V \omega}{c}, \quad \text{donde } c > 0, \quad (3.7)$$

$$\text{Sujeto a } \omega^t e = 1 \quad \text{y} \quad \omega^t r = \mu_w. \quad (3.8)$$

Observación 3.14. Ambos problemas tienen el mismo conjunto de soluciones. Es decir, los pesos ω que resuelven el Problema I, también resuelven el Problema II. Dado que minimizar la función definida por (3.7) es equivalente a minimizar la función (3.5) dado que c es una constante positiva y no afecta el orden de optimización.

Observación 3.15. Es suficiente considerar el Problema II con $c = 2$, lo cual nos ayudará a realizar los cálculos ya que $f_c(\omega)$ es una función cuadrática.

Así pues, la equivalencia de ambos problemas es un simple ejemplo de obtener la solución deseada primero identificando la equivalencia matemática de los dos problemas de optimización y entonces resolviendo el problema más sencillo de los dos, que en este caso es el Problema II, dado que el uso de $c=2$ hace que las derivadas parciales sean más simples y los sistemas lineales derivados sean más fáciles de manejar.

Dado que las restricciones son igualdades, la herramienta para solucionar este problema es el método de los *multiplicadores de Lagrange*. A continuación enunciaremos el Teorema de los multiplicadores de Lagrange, cuya demostración se puede encontrar en [7].

Teorema 3.16. (Multiplicadores de Lagrange) Sean $f, g_i : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq m < n$, $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto, tales que $f, g_1, \dots, g_m \in C^1(A)$. Sea:

$$D = \{x \in A : g_i(x) = 0, \quad 1 \leq i \leq m\}.$$

Si $a \in D$ y $f(x) \geq f(a)$ para todo $x \in D \cap B(a, r)$, entonces existen $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, no todos nulos, tales que:

$$\lambda_0 \nabla f(a) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(a) = 0,$$

es decir,

$$\lambda_0 \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a) = 0, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Si además los vectores $\nabla g_i(a)$, $1 \leq i \leq m$, son linealmente independientes, podemos elegir $\lambda_0 = 1$.

Observación 3.17. Para problemas de optimización con restricciones de desigualdades, se usa el Teorema de Karush-Kuhn-Tucker.

En este caso, la función de Lagrange es:

$$\mathcal{L}(\omega, \lambda) = f_2(\omega) + \lambda_1(1 - \omega^t e) + \lambda_2(\mu_w - \omega^t r) = f_2(\omega) + \lambda^t h(\omega),$$

donde los multiplicadores y las restricciones son dadas por:

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad h(\omega) = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \omega^t e \\ \mu_w - \omega^t r \end{pmatrix}.$$

Por (3.4) y dado que la matriz V es simétrica, tenemos que:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega}(\omega, \lambda) = V\omega - \lambda_1 e - \lambda_2 r \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(\omega, \lambda) = h(\omega) \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \omega \partial \omega^t}(\omega, \lambda) = V \quad (3.11)$$

El teorema de los Multiplicadores de Lagrange dice que ω^* es una solución del Problema II si y solo si existe un par (ω^*, λ^*) único, que satisface las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega}(\omega^*, \lambda^*) = 0 \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(\omega^*, \lambda^*) = 0 \quad (3.13)$$

$$x^t \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \omega \partial \omega^t}(\omega, \lambda) \right) x \geq 0 \quad (3.14)$$

para cada $x \neq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ tal que:

$$\begin{cases} 0 = \left(\frac{\partial h_1}{\partial \omega}(\omega^*) \right)^t x = -e^t x = -(x_1 + \cdots + x_n) \\ 0 = \left(\frac{\partial h_2}{\partial \omega}(\omega^*) \right)^t x = -\mu^t x = -(\mu_1 x_1 + \cdots + \mu_n x_n). \end{cases}$$

En otras palabras, el conjunto de soluciones del Problema II se corresponde al conjunto de soluciones de (3.12)-(3.14). Tenemos que demostrar que este sistema de ecuaciones tiene una solución única (ω^*, λ^*) . Usando el Teorema de los Multiplicadores de Lagrange,

obtenemos una solución única ω^* del Problema II, que dada la equivalencia entre problemas, también es solución única del Problema I. Para obtener las soluciones (ω^*, λ^*) , primero podemos observar que (3.14) es trivial dado que por (3.11) la matriz Hessiana: $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \omega \partial \omega^t}(\omega, \lambda) = V$, y V es definida positiva. A continuación, buscamos los pares (ω^*, λ^*) que satisfacen (3.12). Sea:

$$\lambda^* = \begin{pmatrix} \lambda_1^* \\ \lambda_2^* \end{pmatrix}.$$

La ecuación (3.9) muestra que (3.12) es equivalente a:

$$V\omega^* = \lambda_1^* e + \lambda_2^* r.$$

Multiplicando por V^{-1} a ambos lados de la ecuación (por la izquierda) obtenemos:

$$\omega^* = \lambda_1^* V^{-1} e + \lambda_2^* V^{-1} r. \quad (3.15)$$

Usando las propiedades de la transposición de un producto $((AB)^t = B^t A^t)$ y dado que la matriz V es simétrica, cosa que implica que su inversa también lo es, podemos escribir la ecuación anterior como:

$$(\omega^*)^t = \lambda_1^* e^t V^{-1} + \lambda_2^* r^t V^{-1}. \quad (3.16)$$

Dado que (ω^*, λ^*) resuelve (3.12), necesitamos que también resuelva (3.13). Pero tenemos que esta ecuación es equivalente a las dos restricciones (3.8) que son lineales respecto al vector de los pesos, por lo que por (3.16) son lineales respecto a los multiplicadores:

$$\begin{aligned} 1 &= (\omega^*)^t e = \lambda_1^* (e^t V^{-1} e) + \lambda_2^* (r^t V^{-1} e), \\ \mu_w &= (\omega^*)^t r = \lambda_1^* (e^t V^{-1} r) + \lambda_2^* (r^t V^{-1} e). \end{aligned}$$

Usando los valores A, B, C , previamente definidos, las ecuaciones anteriores se pueden escribir como:

$$1 = (\omega^*)^t e = \lambda_1^* A + \lambda_2^* B, \quad (3.17)$$

$$\mu_w = (\omega^*)^t r = \lambda_1^* B + \lambda_2^* C. \quad (3.18)$$

Observación 3.18. Notamos que $B = r^t V^{-1} e = e^t V^{-1} r$, dado que B es un escalar.

Podemos escribir las ecuaciones anteriores en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^* \\ \lambda_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mu_w \end{pmatrix}$$

Sea $K = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$, tenemos que $\det(K) = AC - B^2 > 0$, por lo que tenemos que K es invertible. Así pues, obtenemos una solución única para los multiplicadores de Lagrange:

$$\lambda^* = \begin{pmatrix} \lambda_1^* \\ \lambda_2^* \end{pmatrix} = K^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ \mu_w \end{pmatrix} = \frac{1}{AC - B^2} \begin{pmatrix} C & -B \\ -B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mu_w \end{pmatrix}, \quad (3.19)$$

donde:

$$\lambda_1^* = \frac{C - \mu_w B}{AC - B^2}, \quad \lambda_2^* = \frac{A\mu_w - B}{AC - B^2}.$$

Dado que cada λ^* está asociado a un único vector de pesos de la cartera, ω^* , lo calculamos mediante (3.15):

$$\omega^* = \left(\frac{C - \mu_w B}{AC - B^2} \right) V^{-1} e + \left(\frac{A\mu_w - B}{AC - B^2} \right) V^{-1} r. \quad (3.20)$$

Definición 3.19. Llamamos a ω^* el *vector de los pesos de la cartera de mínima varianza* con retorno esperado μ_w .

En resumen, hemos encontrado un par único (ω^*, λ^*) que satisface las ecuaciones (3.12) y (3.13), y que automáticamente satisface también la ecuación (3.14) dado que la matriz V es definida positiva. Entonces, por el Teorema de los Multiplicadores de Lagrange tenemos que el vector ω^* es una solución única del Problema II, o equivalentemente del Problema I.

Habiendo calculado el vector ω^* podemos determinar la frontera eficiente:

La varianza de la cartera, asociada con el retorno esperado μ_w es:

$$\begin{aligned}\sigma_w^2(\omega^*) &= (\omega^*)^t V \omega^* = (\omega^*)^t V (\lambda_1^* V^{-1} e + \lambda_2^* V^{-1} r) \\ &= \lambda_1^* ((\omega^*)^t e) + \lambda_2^* ((\omega^*)^t r) \\ &= \lambda_1^* + \lambda_2^* \mu_w,\end{aligned}$$

dado que $(\omega^*)^t e = 1$ y $(\omega^*)^t r = \mu_w$.

Sustituyendo los valores de los multiplicadores de Lagrange dados por la ecuación (3.19), obtenemos que:

$$\sigma_w^2 = \frac{A\mu_w^2 - 2B\mu_w + C}{AC - B^2} \quad (3.21)$$

Para identificar el gráfico definido por (3.21), completamos el cuadrado del numerador para obtener:

$$\sigma_w^2 = \frac{A}{AC - B^2} \left(\mu_w - \frac{B}{A} \right)^2 + \frac{1}{A} \quad (3.22)$$

Así pues, tenemos que esta ecuación es equivalente a la rama derecha de la siguiente hipérbola del plano (σ_w, μ_w) :

$$\frac{\sigma_w^2}{\frac{1}{A}} - \frac{\left(\mu_w - \frac{B}{A} \right)^2}{\frac{AC - B^2}{A^2}} = 1 \quad (3.23)$$

Definición 3.20. La *cartera de mínima varianza* es aquella que se encuentra en el punto crítico de la hipérbola (3.23).

Teorema 3.21. La varianza, σ_{min}^2 , el retorno esperado, μ_{min} y el vector de los pesos, ω_{min} , de la cartera de mínima varianza son:

$$\sigma_{min}^2 = \frac{1}{A}, \quad \mu_{min} = \frac{B}{A}, \quad \omega_{min} = \frac{V^{-1}e}{A} \quad (3.24)$$

Demostración. Dado que la ecuación de la hipérbola (3.23) es equivalente a la fórmula de la varianza (3.22), usamos esta última para calcular σ_{min}^2 , μ_{min} . Por (3.22) tenemos que:

$$\sigma_w^2 = \frac{A}{AC - B^2} \left(\mu_w - \frac{B}{A} \right)^2 + \frac{1}{A},$$

así pues, buscamos un valor mínimo de σ_w^2 dado un valor μ_w :

$$\frac{\partial \sigma_w^2}{\partial \mu_w} = 0 \Leftrightarrow \frac{2A\mu_w - 2B}{AC - B^2} = 0 \Leftrightarrow \mu_w = \frac{B}{A}.$$

Vemos si es un mínimo:

$$\frac{\partial^2 \sigma_w^2}{\partial \mu_w^2} = \frac{2A}{AC - B^2} > 0,$$

dado que $A > 0$ y $AC - B^2 > 0$, podemos afirmar que es un mínimo. Así pues, tenemos que:

$$\mu_{min} = \frac{B}{A} \quad \text{y} \quad \sigma_{min}^2 = \frac{1}{A}.$$

Para encontrar el vector de los pesos, ω_{min} , sustituimos μ_{min} en la ecuación (3.20):

$$\omega_{min} = \left(\frac{C - \frac{B}{A}B}{AC - B^2} \right) V^{-1}e + \left(\frac{\frac{AB}{A} - B}{AC - B^2} \right) V^{-1}r \Leftrightarrow \omega_{min} = \frac{V^{-1}e}{A}.$$

□

Dado que los inversores no están interesados en una cartera con retorno esperado negativo, suponemos que $\mu_{min} > 0$ cosa que implica que $B > 0$.

La porción de la rama de la hipérbola desde el punto crítico hacia la parte superior forma la frontera eficiente:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_n &= \left\{ (\sigma_w, \mu_w) : \sigma_w = \sqrt{\frac{A\mu_w^2 - 2B\mu_w + C}{AC - B^2}}, \mu_w \geq \frac{B}{A} \right\} \\ &= \left\{ (\sigma_w, \mu_w) : \frac{\sigma_w^2}{\frac{1}{A}} - \frac{(\mu_w - \frac{B}{A})^2}{\frac{AC - B^2}{A^2}} = 1, \sigma_w > 0, \mu_w \geq \frac{B}{A} \right\}. \end{aligned}$$

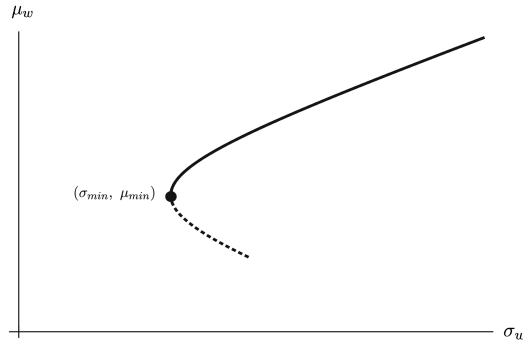


Figura 1: Frontera eficiente y cartera de mínima varianza.

El conjunto de los pesos de los vectores que forman la frontera eficiente $\mathcal{M}_n$ es:

$$\mathcal{W}_n = \left\{ \omega : \omega = \left(\frac{C - \mu_w B}{AC - B^2} \right) V^{-1}e + \left(\frac{A\mu_w - B}{AC - B^2} \right) V^{-1}r, \mu_w \geq \frac{B}{A} \right\}.$$

4. Modelo CAPM

En el capítulo anterior, hemos estudiado cómo determinar una cartera para un inversor individual racional en la que se consigue el mínimo riesgo posible para una determinada rentabilidad deseada, o la rentabilidad máxima para un riesgo previamente definido. En este, vamos a desarrollar el modelo de Valoración de Activos Financieros, CAPM, siglas que hacen referencia al nombre que recibe en inglés: *Capital Asset Pricing Model*. La principal diferencia entre la teoría de carteras desarrollada por Harry Markowitz y la teoría del mercado de capitales, la cual establece el marco conceptual para el desarrollo del CAPM, es la integración de un activo libre de riesgo en el modelo.

La inclusión de un activo libre de riesgo en la teoría de carteras de Markowitz fue introducida por William Sharpe en su artículo titulado *Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk*, publicado en 1964 (ver [9]), contribución con la que obtuvo el premio Nobel de economía, junto a Harry Markowitz, en 1990. También debemos reconocer a John Lintner y Jan Mossin, quienes, con sus publicaciones en 1965 y 1966 respectivamente (ver [10] y [11]), ampliaron y fortalecieron este modelo.

La idea básica del modelo CAPM es que un inversor puede mejorar su retorno esperado invirtiendo parcialmente en una cartera de activos con riesgo y parcialmente en un activo sin riesgo. y su objetivo es el de cuantificar el riesgo sistemático de un activo y vincularlo con su retorno esperado.

Teniendo en cuenta todas las hipótesis sobre los inversores y el mercado que hemos hecho anteriormente, también debemos suponer que:

- Los inversores pueden prestar y pedir prestado cantidades ilimitadas al mismo tipo de interés, que corresponde a la tasa libre de riesgo. Además, los prestamistas no corren ningún riesgo de no ser reembolsados.
- El rendimiento esperado de un activo depende únicamente del riesgo sistemático, que no puede ser diversificado y afecta a todo el mercado.
- El mercado se encuentra en equilibrio, es decir, la demanda es igual a la oferta.
- Todos los inversores poseen la misma cartera de mercado eficiente, que incluye todos los activos con riesgo disponibles en proporciones ponderadas por su valor de mercado.

Así pues, cualquier inversor racional puede tener una cartera óptima invirtiendo sólo en una combinación de un activo libre de riesgo y un fondo compuesto por un conjunto de activos financieros con riesgo. De hecho, si todos los inversores parten de las mismas expectativas y son racionales, invertirán en el mismo fondo. Puesto que la única diferencia entre ellos es su aversión al riesgo, lo que les diferenciará será un mayor o menor porcentaje del activo libre de riesgo en su cartera, dependiendo de si son más o menos aversos al riesgo.

4.1. Línea del Mercado de Capitales

Supongamos que tenemos una cartera formada por un activo libre de riesgo a_f con peso w_f y retorno esperado μ_f , y un conjunto de n activos con riesgo $(a_1, \dots, a_n)$, para los cuales utilizaremos la misma notación que en el capítulo anterior.

Notación 4.1. Notaremos al peso, retorno esperado y riesgo del conjunto de los activos con riesgo como: ω_r , μ_r , σ_r^2 .

El retorno esperado de la cartera es:

$$\mu_w = \omega_f \mu_f + \sum_{i=1}^n \omega_i \mu_i = \omega_f \mu_f + \mu_r. \quad (4.1)$$

Dado que la varianza del activo sin riesgo es 0, su retorno R_f es una constante. Así pues, su covarianza con cualquier otro retorno es 0 y tenemos que:

$$\sigma_w^2 = \text{Var}\left(\omega_f R_f + \sum_{i=1}^n \omega_i R_i\right) = \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n \omega_i R_i\right) = \sigma_r^2. \quad (4.2)$$

Consideramos también la cartera formada eliminando el activo sin riesgo y ponderando los pesos para hacer que la suma de estos pesos sea igual a 1, es decir, si un activo tiene peso ω_i entonces dentro de esta cartera tendrá peso $\frac{\omega_i}{\omega_r}$. A esta cartera la llamaremos *cartera de riesgo derivada*. Denotaremos el retorno esperado de la cartera de riesgo derivada como $\mu_d = \sum_{i=1}^n \frac{\omega_i}{\omega_r} \mu_i$ y el riesgo como σ_d^2 . Entonces tenemos que el retorno esperado y el riesgo de la cartera son:

$$\mu_w = \omega_f \mu_f + \sum_{i=1}^n \omega_i \mu_i = \omega_f \mu_f + \omega_r \sum_{i=1}^n \frac{\omega_i}{\omega_r} \mu_i = \omega_f \mu_f + \omega_r \mu_d. \quad (4.3)$$

$$\sigma_w^2 = \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n \omega_i R_i\right) = \omega_r^2 \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n \frac{\omega_i}{\omega_r} R_i\right) = \omega_r^2 \sigma_d^2. \quad (4.4)$$

Por lo tanto:

$$\sigma_w = \omega_r \sigma_d. \quad (4.5)$$

Dado que $\omega_f + \omega_r = 1$, entonces:

$$\mu_w = \mu_f + \omega_r (\mu_d - \mu_f). \quad (4.6)$$

Como $\omega_r \in \mathbb{R}$, la solución del sistema de ecuaciones definido por (4.5) y (4.6) resulta en una línea recta en el plano (σ_w, μ_w) . Esta recta recibe el nombre de *Línea de Asignación de Capital*. Aislado ω_r en la primera ecuación y sustituyéndolo en la segunda, obtenemos:

$$\mu_w = \frac{\mu_d - \mu_f}{\sigma_d} \sigma_w + \mu_f \quad (4.7)$$

Observación 4.2. Si $\omega_r = 0$, entonces $(\sigma_w, \mu_w) = (0, \mu_f)$, y si $\omega_r = 1$, entonces $(\sigma_w, \mu_w) = (\sigma_d, \mu_d)$.

Podemos observar que de todas las posibles rectas que unen el punto $(0, \mu_f)$ con cualquier punto (σ_d, μ_d) , la que produce los puntos con un mayor retorno esperado para un cierto nivel de riesgo es aquella que es tangente a la frontera eficiente.

Definición 4.3. La cartera que se encuentra en el punto de tangencia se denomina **Cartera de Mercado**, que denotaremos por (σ_M, μ_M) .

Definición 4.4. Esta línea tangente a la frontera eficiente, con origen en la cartera formada únicamente por el activo libre de riesgo, recibe el nombre de **Línea del Mercado de Capitales (CML)**, y viene dada por la ecuación:

$$\mu_w = \frac{\mu_M - \mu_f}{\sigma_M} \sigma_w + \mu_f \quad (4.8)$$

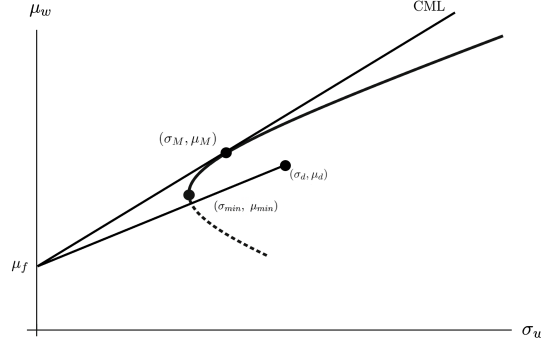


Figura 2: Línea del Mercado de Capitales y Cartera de Mercado.

Observación 4.5. Observamos que si el retorno esperado del activo libre de riesgo es mayor que el retorno esperado de la cartera de mercado, es decir, si $\mu_f > \mu_M$, la pendiente de la CML se vuelve negativa, lo cual es ilógico porque implicaría que los inversores están dispuestos a asumir mayor riesgo a cambio de menor rendimiento. En este caso, los inversores evitarían por completo la cartera de mercado y preferirían mantener únicamente el activo libre de riesgo, haciendo que la CML y la Cartera de Mercado dejen de existir en la práctica.

Suponemos que existe una Línea del Mercado de Capitales, ajustando los pesos ω_f y ω_r podemos obtener cualquier cartera de la recta. Para obtener un punto situado a la derecha de la Cartera de Mercado, necesitamos vender en corto el activo libre de riesgo e invertir ese dinero en la Cartera de Mercado.

Por lo tanto, si un inversor quiere maximizar el retorno esperado para un nivel de riesgo determinado, debe invertir en una cartera que consista en el activo libre de riesgo y la Cartera de mercado. Las proporciones relativas de cada una están determinadas por el nivel de aversión al riesgo de cada inversor.

Vamos a calcular ahora los pesos, retorno esperado y riesgo de la Cartera de Mercado, cosa que nos permitirá calcular y trazar la Línea del Mercado de Capitales. Recordamos que r es el vector de los retornos esperados de los activos con riesgo, e el vector de unos n -dimensional, V es la matriz de sus covarianzas y los valores A, B, C son los definidos en (3.3).

Teorema 4.6. Para cualquier retorno esperado del activo sin riesgo μ_f , la Cartera de Mercado viene dada por los pesos:

$$\omega_M = \frac{V^{-1}(r - \mu_f e)}{B - A\mu_f}.$$

Demostración. Para cualquier punto (σ_w, μ_w) de la frontera eficiente de Markowitz, la

pendiente de la recta desde el punto $(0, \mu_f)$ al punto (σ_w, μ_w) viene dada por:

$$S = \frac{\mu_w - \mu_f}{\sigma_w} = \frac{\omega^t r - \mu_f}{\sqrt{\omega^t V \omega}}. \quad (4.9)$$

Intuitivamente, está claro que el punto de tangencia es aquel en el que la pendiente es máxima entre todos los puntos (σ_w, μ_w) de la frontera de Markowitz. Por lo tanto, queremos maximizar S , dada la restricción $\sum_{i=1}^n w_i = 1$. Como hemos hecho anteriormente, usaremos el teorema de los multiplicadores de Lagrange, por lo que tenemos el Lagrangiano siguiente:

$$\mathcal{L}(\omega, \lambda) = S + \lambda(1 - \omega^t e).$$

Así pues, en el punto máximo, la derivada del Lagrangiano debe ser igual a cero, es decir:

$$\mathcal{L}'(\omega, \lambda) = \nabla \left(\frac{\omega^t r - \mu_f}{\sqrt{\omega^t V \omega}} \right) - \lambda \nabla(\omega^t e - 1) = 0.$$

Calculando los gradientes usando que: $\nabla(\omega^t r) = r$, $\nabla(\omega^t e) = e$ y $\nabla(\omega^t V \omega) = 2V\omega$, obtenemos:

$$\mathcal{L}'(\omega, \lambda) = \frac{r\sqrt{\omega^t V \omega} - (\omega^t r - \mu_f) \frac{2V\omega}{2\sqrt{\omega^t V \omega}}}{\omega^t V \omega} - \lambda e = 0.$$

Esta ecuación es equivalente a:

$$r\sigma_w - (\mu_w - \mu_f) \frac{V\omega}{\sigma_w} - \lambda \sigma_w^2 e = 0.$$

Por lo que tenemos:

$$\frac{\mu_w - \mu_f}{\sigma_w^2} V\omega = r - \lambda \sigma_w e. \quad (4.10)$$

Multiplicando por ω^t por la izquierda a ambos lados de la ecuación y usando que $\omega^t e = 1$, obtenemos:

$$\frac{\mu_w - \mu_f}{\sigma_w^2} \omega^t V \omega = \omega^t r - \lambda \sigma_w.$$

Ahora, aplicando las igualdades $\omega^t \mu_M = \mu_w$ y $\omega^t V \omega = \sigma_w^2$, podemos aislar el multiplicador:

$$\mu_w - \mu_f = \mu_w - \lambda \sigma_w \Leftrightarrow \lambda = \frac{\mu_f}{\sigma_w}.$$

Sustituyendo este valor a la ecuación (4.10):

$$\frac{\mu_w - \mu_f}{\sigma_w^2} V\omega = r - \mu_f e.$$

Consideramos el valor $\gamma = \frac{\mu_w - \mu_f}{\sigma_w^2}$. Este es una constante, por lo que si multiplicamos a ambos lados de la ecuación por la matriz V^{-1} , obtenemos:

$$\gamma \omega = V^{-1}(r - \mu_f e). \quad (4.11)$$

Finalmente, multiplicando por el vector e^t a ambos lados por la izquierda y teniendo en cuenta que $e^t \omega = \omega^t e = 1$, resulta que:

$$\gamma = e^t V^{-1}(r - \mu_f e). \quad (4.12)$$

Por lo que si sustituimos el valor γ en la ecuación (4.11) y aislamos el vector de los pesos obtenemos:

$$\omega_M = \frac{V^{-1}(r - \mu_f e)}{e^t V^{-1}(r - \mu_f e)} = \frac{V^{-1}(r - \mu_f e)}{B - A\mu_f}.$$

tal y como queríamos demostrar. $\square$

Observación 4.7. La pendiente S de la Línea del Mercado de Capitales recibe el nombre de **Ratio de Sharpe**.

Corolario 4.8. El retorno esperado, μ_M , y el riesgo, σ_M^2 , de la Cartera del Mercado son:

$$\mu_M = \frac{C - B\mu_f}{B - A\mu_f}, \quad \sigma_M^2 = \frac{A\mu_f^2 - 2B\mu_f + C}{(B - A\mu_f)^2}. \quad (4.13)$$

Demostración. Sustituyendo los pesos que acabamos de calcular a las ecuaciones (3.1) y (3.2), obtenemos el retorno esperado y el riesgo de la Cartera de Mercado respectivamente:

$$\begin{aligned} \mu_M = \omega_M^t r &= \left(\frac{V^{-1}(r - \mu_f e)}{e^t V^{-1}(r - \mu_f e)} \right)^t r = \frac{1}{\gamma} \left(V^{-1}(r - \mu_f e) \right)^t r \\ &= \frac{1}{\gamma} \left((V^{-1}r)^t r - (V^{-1}\mu_f e)^t r \right) = \frac{1}{\gamma} \left(r^t V^{-1}r - \mu_f (e^t V^{-1}r) \right) \\ &= \frac{1}{\gamma} \left(C - \mu_f B \right) r = \frac{C - B\mu_f}{B - A\mu_f}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_M^2 = \omega_M^t V \omega_M &= \left(\frac{V^{-1}(r - \mu_f e)}{B - A\mu_f} \right)^t V \left(\frac{V^{-1}(r - \mu_f e)}{B - A\mu_f} \right) \\ &= \frac{1}{(B - A\mu_f)^2} (r^t V^{-1} - \mu_f e^t V^{-1})(r - \mu_f e) \\ &= \frac{1}{(B - A\mu_f)^2} (r^t V^{-1}r - \mu_f r^t V^{-1}e - \mu_f e^t V^{-1}r + \mu_f^2 e^t V^{-1}e) \\ &= \frac{A\mu_f^2 - 2B\mu_f + C}{(B - A\mu_f)^2}. \end{aligned}$$

$\square$

4.2. Retorno esperado de un activo

Definición 4.9. Consideramos un activo con retorno R_i , se define la **beta** del activo como:

$$\beta_i = \frac{\text{Cov}(R_i, R_M)}{\sigma_M^2} = \rho_{iM} \frac{\sigma_i}{\sigma_M},$$

donde R_M es el retorno de la Cartera de Mercado. Este coeficiente mide cómo el rendimiento de un activo se relaciona con el rendimiento del mercado en su conjunto.

Definición 4.10. Se define la **Prima de riesgo de un activo** como:

$$\mu_i - \mu_f,$$

e indica cuánto está por encima o por debajo el retorno esperado del activo respecto al retorno esperado del activo libre de riesgo.

Definición 4.11. Del mismo modo, se define la **Prima de riesgo de la Cartera de Mercado** como:

$$\mu_M - \mu_f,$$

indica cuál es la diferencia entre el rendimiento esperado del mercado y la tasa libre de riesgo.

El siguiente teorema relaciona la prima de riesgo de un activo con la prima de riesgo del mercado mediante el coeficiente beta.

Teorema 4.12. (Capital Asset Pricing Theorem) Supongamos que la matriz de covarianzas de todos los activos V es definida positiva y que los vectores r y e son linealmente independientes. Sea $\mu_i = e_i^t r$ el retorno esperado del i -ésimo activo, donde $e_i^t = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ tiene un 1 en la coordenada i -ésima. Entonces:

$$\mu_i - \mu_f = \beta_i (\mu_M - \mu_f). \quad (4.14)$$

Demostración. La idea es demostrar que:

$$\beta_i = \frac{\text{Cov}(R_i, R_M)}{\sigma_M^2} = \frac{e_i^t V \omega_M}{\omega_M^t V \omega_M} = \frac{\mu_i - \mu_f}{\mu_M - \mu_f}.$$

Sea ω_l^M el peso del activo l -ésimo de la cartera de mercado. Entonces:

$$\text{Cov}(R_i, R_M) = \text{Cov}(R_i, \omega_M^t R_M) = \text{Cov}(R_i, \sum_{l=1}^n \omega_l^M R_l) = \sum_{l=1}^n \omega_l^M \text{Cov}(R_i, R_l) = e_i^t V \omega_M.$$

Además, dado que:

$$e_i^t V \omega_M = (0 \dots 1 \dots 0) \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1^M \\ \vdots \\ \omega_n^M \end{pmatrix} = \sum_{l=1}^n \omega_l^M \sigma_{il},$$

por lo tanto:

$$\beta_i = \frac{e_i^t V \omega_M}{\omega_M^t V \omega_M}.$$

Dado que el vector de los pesos de la cartera de mercado es:

$$\omega_M = \frac{V^{-1}(r - \mu_f e)}{B - A\mu_f},$$

O equivalentemente:

$$V \omega_M = \frac{r - \mu_f e}{B - A\mu_f}.$$

Dado que $e_i^t e = \mu_i$, $e_i^t e = 1$, $\omega_M^t r = \mu_M$ y $\omega_M^t e = 1$, obtenemos:

$$\beta_i = \frac{e_i^t V \omega_M}{\omega_M^t V \omega_M} = \left(\frac{e_i^t r - \mu_f e_i^t e}{B - A\mu_f} \right) \left(\frac{B - A\mu_f}{\omega_M^t r - \mu_f \omega_M^t e} \right) = \frac{\mu_i - \mu_f}{\mu_M - \mu_f}.$$

□

Dado que la beta es la pendiente de la recta de regresión, mide la sensibilidad del retorno del activo sobre las fluctuaciones del mercado. Así pues, según el valor de beta:

- $\beta < 0$: indica que el activo se mueve en dirección opuesta al mercado, es decir, el activo está perdiendo valor mientras que el mercado, en global, está ganando y viceversa.
- $\beta = 0$: indica que el activo fluctúa de forma no correlacionada con el mercado.
- $\beta \in (0, 1)$: indica que el activo fluctúa menos que el mercado, por lo que tiene un menor riesgo sistemático.
- $\beta = 1$: indica que el activo fluctúa igual que el mercado, en la misma dirección y en la misma magnitud.
- $\beta > 1$: indica que el precio del activo fluctúa más que el mercado, el activo es más sensible a los movimientos del mercado.

4.3. Línea del Mercado de Valores

El teorema anterior lo podemos ver como expresar el retorno esperado de un activo como una función lineal de la beta del activo:

$$\mu_i(\beta_i) = (\mu_M - \mu_f)\beta_i + \mu_f.$$

Esta recta recibe el nombre de **Línea del Mercado de Valores**, que recibe las siglas SML por su nombre en inglés (Security Market Line). La SML es una representación gráfica del CAPM en el plano (β_i, μ_i) .

Interpretación de la Línea del Mercado de Valores:

- Activos en la SML: si un activo se encuentra sobre la SML, está correctamente valorado ya que su rendimiento esperado está en línea con su nivel de riesgo sistemático.
- Activos por encima de la SML: están infravalorados porque ofrecen un rendimiento esperado mayor al que corresponde a su nivel de riesgo. Esto representa una oportunidad de inversión.
- Activos por debajo de la SML: están sobrevalorados, ya que ofrecen un rendimiento esperado menor al que corresponde a su nivel de riesgo.

Dado que hemos explicado la Línea del Mercado de Capitales (CML) y la Línea del Mercado de Valores (SML), podemos distinguir 4 principales diferencias entre ambas:

- Uso: la CML tiene como objetivo determinar el rendimiento de carteras eficientes compuestas por activos libres de riesgo y la Cartera de Mercado. Por otro lado, la SML busca evaluar si un activo está sobrevalorado, infravalorado o correctamente valorado en función de su riesgo sistemático (β).
- Aplicación: la CML se aplica exclusivamente a carteras diversificadas eficientes que se encuentran en la frontera eficiente. La SML se aplica tanto a activos individuales como a carteras, ya sean diversificadas o no.

- Pendiente: la pendiente de la CML viene dada por el ratio de Sharpe, mientras que la de la SML viene dada por la Prima de riesgo del mercado.
- Riesgo: la CML considera el riesgo total, medido por la desviación estándar (σ), que incluye tanto el riesgo sistemático como el no sistemático. La SML considera únicamente el riesgo sistemático, medido por beta (β) que no puede ser eliminado mediante diversificación.

Estas diferencias subrayan los distintos enfoques de ambas herramientas dentro del modelo CAPM. La CML es más adecuada para evaluar carteras diversificadas y su relación con el riesgo total, mientras que la SML se enfoca en la valoración de activos individuales según su riesgo sistemático.

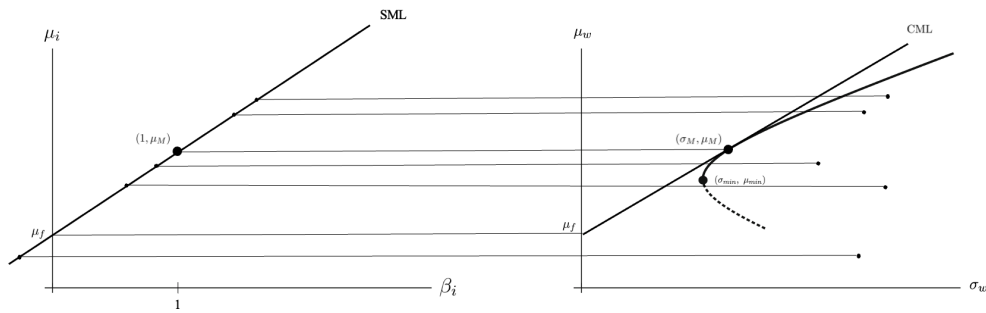


Figura 3: SML en comparación con la CML.

5. Modelo APT

El Modelo de Valoración por Arbitraje, APT, siglas que hacen referencia al nombre que recibe en inglés: *Arbitrage Pricing Theory*, fue introducido por el economista Stephen Ross en el artículo *The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing*, publicado en 1976 (ver [14]).

El APT surge de la observación de que los precios de los activos no solo responden al riesgo general del mercado, sino también a otras fuerzas económicas específicas, por lo que es considerado una alternativa al Capital Asset Pricing Model. Esto es porque, a diferencia del CAPM que se basa en una relación directa entre el riesgo sistemático (medido por la beta del mercado) y el rendimiento esperado, el APT propone que los rendimientos de los activos están influenciados por múltiples factores económicos o de mercado en lugar de uno solo. Estos factores pueden incluir variables como cambios en las tasas de interés, inflación, crecimiento económico, o cualquier otra variable relevante para los precios de los activos. De este modo, proporciona un marco más flexible para analizar los rendimientos, incorporando diferentes fuentes de riesgo que afectan los activos en mayor o menor medida.

Así pues, el Modelo de Valoración por Arbitraje es un modelo multifactorial de valoración de activos financieros que se basa en la idea de que se puede predecir el retorno de un activo mediante una relación lineal entre su retorno esperado y un número de variables macroeconómicas que influyen en el riesgo sistemático del activo, por lo que lo convierte en un modelo más flexible y complejo que el CAPM.

5.1. Arbitraje e hipótesis

Es clave definir el concepto de arbitraje, ya que éste constituye la base conceptual y lógica que sustenta el funcionamiento del modelo:

Definición 5.1. *El arbitraje es la práctica de comprar y vender simultáneamente activos en diferentes mercados, tomando ventaja de las discrepancias en los precios del activo en los distintos mercados para así obtener un beneficio libre de riesgo sobre la transacción.*

Lo veremos mejor con un ejemplo de una oportunidad de arbitraje:

Ejemplo 5.2. Supongamos que un activo está a la venta en dos mercados financieros diferentes, a precios diferentes. Así pues, supongamos que en el mercado A se vende a 20€, mientras que en el B a 15€. Entonces podríamos comprar el activo en el mercado B y simultáneamente venderlo en el A. Por lo que obtendríamos un beneficio de 5€ sin ningún tipo de riesgo.

De aquí nace la **Ley del precio único**, que afirma que si dos activos son equivalentes en todos los aspectos económicos relevantes, entonces deben tener el mismo precio de mercado.

La idea de que los precios del mercado fluctuarán de la manera en que las oportunidades de arbitraje queden excluidas es el concepto más importante de la teoría del mercado de capitales.

Una vez definido el arbitraje, podemos describir las principales suposiciones en que se basa el modelo:

- Parte de la premisa de que el arbitraje puede existir inicialmente si los activos no están correctamente valorados en función de los factores de riesgo, esto lo diferencia del CAPM donde el arbitraje está implícitamente prohibido. En el caso de existir una oportunidad de arbitraje, los inversores competirían para aprovecharse de los precios y al hacerlo los corregirían, haciendo desaparecer dichas oportunidades.
- Los rendimientos de los activos dependen de múltiples factores macroeconómicos o específicos del mercado, como cambios en las tasas de interés, inflación, crecimiento económico, entre otros. Estos factores afectan a todos los activos en cierta medida, aunque en diferentes grados.
- Existe una relación lineal entre el rendimiento esperado de un activo y los factores de riesgo sistemáticos, ajustados por las sensibilidades (betas) de los activos a esos factores.
- Los factores de riesgo son empíricos, es decir, deben identificarse y analizarse para cada contexto particular.
- Los inversores pueden obtener una cartera de activos donde el riesgo no sistemático, es decir, el riesgo específico que afecta a un número muy pequeño de activos, es eliminado mediante la diversificación.
- No existen costes de transacciones ni impuestos en el mercado.

5.2. Formalización matemática

Presentados los principios básicos en los que se fundamenta el modelo, vamos a analizarlo matemáticamente.

Demostraremos los retornos esperados que surgen del modelo APT con un modelo de dos factores. Supongamos que el siguiente modelo de dos factores describe los retornos:

$$R_i = a_i + b_{i1}I_1 + b_{i2}I_2 + \varepsilon_i \quad (5.1)$$

donde:

- a_i es el retorno esperado del activo i si todos los factores tienen valor cero.
- I_j es el factor macroeconómico j que influye en el retorno del activo i .
- b_{ij} es la sensibilidad del activo i sobre el factor de riesgo j .
- ε_i es el error aleatorio del activo i que, por hipótesis, es completamente diversificable por lo que tiene media igual a cero.

Los únicos términos de la ecuación que afectan el riesgo sistemático del activo son b_{i1} y b_{i2} . Dado que el inversor está interesado en el retorno esperado y el riesgo de la activo, entonces debe estar interesado en tres características de cualquier activo i : μ_i , b_{i1} y b_{i2} . Por lo tanto, todas los activos deben estar en un plano en el espacio definido por el retorno esperado, y los valores b_{i1} y b_{i2} . Si una inversión estuviera por encima o por debajo del plano, entonces existiría una oportunidad de arbitraje libre de riesgo. El arbitraje continuaría hasta que todas las inversiones convergieran en el plano. La ecuación general del plano es:

$$\mu_i = \lambda_o + \lambda_1 b_{i1} + \lambda_2 b_{i2} \quad (5.2)$$

Este es el modelo de equilibrio producido por el APT cuando los retornos son generados por un modelo de dos factores. Observamos que λ_1 es el aumento en el retorno esperado para un aumento de una unidad en el factor b_{i1} .

Se puede obtener más información sobre el significado de los valores λ_i usando la ecuación (5.2) para revisar un conjunto particular de activos. Si en un activo tenemos que tanto b_{i1} como b_{i2} son cero, entonces el retorno esperado del activo es λ_0 . Dado que este activo tiene sensibilidad cero sobre todos los factores de riesgo; esto significa que es un activo que no tiene riesgo, por lo que tenemos que su retorno esperado es μ_f . Sustituyendo μ_f por λ_0 y examinando un activo con $b_{i2} = 0$ y $b_{i1} = 1$, obtenemos que:

$$\lambda_1 = \mu_1 - \mu_f,$$

donde μ_1 es el activo que tiene $b_{i2} = 0$ y $b_{i1} = 1$. En general, tenemos que:

$$\lambda_j = \mu_j - \mu_f,$$

cosa que significa que λ_j es la prima de riesgo del activo j únicamente sujeto al riesgo del índice j . Por lo que λ_j es el retorno esperado excesivo de un activo únicamente sujeto al riesgo del factor j y teniendo una unidad de medida de este riesgo.

El análisis que hemos hecho, lo podemos generalizar para K factores:

$$R_i = a_i + b_{i1}I_1 + b_{i2}I_2 + \cdots + b_{ik}I_k + \varepsilon_i$$

Mediante argumentos análogos, podemos ver que todos los activos tienen retornos esperados descritos por un hiperplano K -dimensional:

$$\mu_i = \lambda_0 + \lambda_1 b_{i1} + \lambda_2 b_{i2} + \cdots + \lambda_k b_{ik} + \varepsilon_i, \quad (5.3)$$

con $\lambda_0 = \mu_f$ y $\lambda_j = \mu_j - \mu_f$.

Para hacer una demostración más rigurosa del modelo, volvemos a considerar un proceso de generación de retorno de dos factores. Esta demostración es suficientemente rigurosa para que después podamos generalizarla a cualquier número arbitrario de factores.

Tomamos el valor esperado de la ecuación (5.1) y restándolo de la misma ecuación tenemos:

$$R_i = \mu_i + b_{i1}(I_1 - \mu_{I_1}) + b_{i2}(I_2 - \mu_{I_2}) + \varepsilon_i, \quad (5.4)$$

donde μ_{I_k} marca la expectativa de cómo cambiará el factor k en el futuro.

Ahora, una condición suficiente para demostrar el modelo APT es que existan en el mercado suficientes activos para que se pueda formar una cartera con las siguientes características:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n w_i &= 0, \\ \sum_{i=1}^n w_i b_{i1} &= 0, \\ \sum_{i=1}^n w_i b_{i2} &= 0, \\ \sum_{i=1}^n w_i \varepsilon_i &\approx 0. \end{aligned}$$

La primera ecuación se refiere a que esta cartera tiene cero inversión. La segunda y la tercera implican que la cartera no tiene riesgo. La última condición es el requerimiento de que el riesgo residual debe ser aproximadamente cero, ya que se supone que la cartera está bien diversificada, aunque estemos hablando únicamente de dos activos. Así pues, tenemos que esta cartera tiene cero inversión y cero riesgo, por lo que debe producir un retorno esperado igual a cero. En otras palabras, las cuatro ecuaciones implican que:

$$\sum_{i=1}^n \omega_i \mu_i = 0.$$

Aunque podemos observar que hay otra interpretación matemática de estas ecuaciones, ya que la ecuación $\sum_{i=1}^n \omega_i b_{i1} = 0$ indica que el vector de los pesos de la cartera es ortogonal al vector de la sensibilidad de los activos al factor de riesgo 1. Similarmente, la primera ecuación significa que el vector de los pesos es ortogonal al vector n-dimensional de todos unos. Acabamos de ver en el párrafo anterior que si el vector de los pesos de la cartera es ortogonal al vector de unos y a los vectores de la sensibilidad de los activos a los factores de riesgo 1 y 2, esto implica que el vector de los pesos es ortogonal al vector de los retornos esperados. Por lo que tenemos que podemos expresar el vector de los retornos esperados como una combinación lineal de los vectores B_{i1} y B_{i2} , donde:

$$B_{i1} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}, \quad B_{i2} = \begin{pmatrix} b_{12} \\ \vdots \\ b_{n2} \end{pmatrix}.$$

Así pues, podemos escribir el retorno esperado de cualquier activo como:

$$\mu_i = \lambda_0 + \lambda_1 b_{i1} + \lambda_2 b_{i2}$$

Podemos calcular los valores de λ_i para cualquier $i = 1, \dots, n$ tal y como hemos hecho con anterioridad, en este caso formamos tres carteras con las siguientes características:

1. $b_{i1} = 0$ y $b_{i2} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$,
2. $b_{i1} = 1$ y $b_{i2} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$,
3. $b_{i1} = 0$ y $b_{i2} = 1 \quad \forall i = 1, \dots, n$,

obtenemos que:

$$\mu_i = \mu_f + b_{i1}(\mu_1 - \mu_f) + b_{i2}(\mu_2 - \mu_f).$$

Y para el caso general:

$$\mu_i = \mu_f + b_{i1}(\mu_1 - \mu_f) + b_{i2}(\mu_2 - \mu_f) + \dots + b_{ik}(\mu_k - \mu_f).$$

Así pues, definiendo $\lambda_0 = \mu_f$ y $\lambda_j = \mu_j - \mu_f$ para cada $j = 1, \dots, k$, podemos escribir la ecuación general del modelo APT:

$$\mu_i = \lambda_0 + \lambda_1 b_{i1} + \lambda_2 b_{i2} + \dots + \lambda_k b_{ik}. \quad (5.5)$$

6. Modelo Black-Litterman

Este modelo fue inicialmente propuesto por Fischer Black y Robert Litterman mientras trabajaban en Goldman Sachs en el artículo *Global Portfolio Optimization* en 1990, aunque este fue un trabajo interno de la empresa y no fue hasta el año 1992 que fue formalizado y publicado en la revista académica *Financial Analysts Journal* (ver [16]).

El modelo de Black-Litterman es una metodología para la optimización de carteras que combina el modelo de Markowitz con las expectativas subjetivas de un inversor y tiene como objetivo mejorar la estimación de los rendimientos esperados de los activos en una cartera.

Permite incorporar las opiniones subjetivas de los inversores sobre el rendimiento esperado de ciertos activos mediante el uso de la estadística bayesiana, ajustándolas con la información disponible del mercado. El modelo integra estas opiniones subjetivas con las creencias implícitas del mercado para generar una distribución de retornos esperados ajustada. Proporciona así una solución al problema de la sensibilidad de las carteras óptimas a pequeños cambios en los retornos esperados estimados directamente, utilizando en su lugar retornos implícitos derivados del equilibrio del mercado.

6.1. Estadística Bayesiana

La estadística bayesiana juega un papel clave en el modelo de Black-Litterman, ya que permite fusionar las expectativas previas de los inversores, a lo que llamaremos opiniones, con la información del mercado. Este enfoque se basa en el teorema de Bayes, que se utiliza para actualizar las distribuciones de probabilidad sobre los rendimientos de los activos a medida que se incorpora nueva información.

A continuación introduciremos el Teorema de Bayes que se aplica en el modelo:

Teorema 6.1. Sean A, B dos sucesos tales que la probabilidad de cada uno de ellos es distinta de cero, tenemos que:

$$\mathcal{P}(A|B) = \frac{\mathcal{P}(B|A)\mathcal{P}(A)}{\mathcal{P}(B)}, \quad (6.1)$$

donde:

- $\mathcal{P}(A|B)$: indica la probabilidad condicional del suceso A dado el suceso B (a posteriori).
- $\mathcal{P}(B|A)$: indica la probabilidad condicional del suceso B dado el suceso A .
- $\mathcal{P}(A)$: indica la probabilidad del suceso A (a priori).
- $\mathcal{P}(B)$: indica la probabilidad del suceso B .

Sean X, Y variables aleatorias, el Teorema de Bayes aplicado a las funciones de densidad de probabilidad establece que:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{Y|X}(y|x)f_X(x)}{f_Y(y)},$$

dado que $f_Y(y)$ no depende de x , podemos escribir esta relación en términos de proporcionalidad, es decir, sin la necesidad de esta constante de normalización:

$$f_{X|Y}(x|y) \propto f_{Y|X}(y|x)f_X(x).$$

En el contexto de nuestro modelo, se aplica la distribución de probabilidad para combinar el proceso de estimación de los retornos con las opiniones de los inversores.

6.2. Parámetros

Supongamos que tenemos una cartera de inversión formada por n activos, presentamos y definimos los parámetros que usaremos a lo largo de la descripción del modelo:

- V : es la matriz de covarianzas de los activos (de dimensión $n \times n$).
- Π : es el vector de los retornos implícitos del mercado (de dimensión $n \times 1$).
- ω_M : es el vector de los pesos de la cartera de mercado.
- δ : es una constante positiva que mide la aversión al riesgo del inversor.
- r : es el vector de los retornos de los activos (de dimensión $n \times 1$). Estos retornos siguen una distribución normal con media μ , que indica los retornos esperados, y varianza V :

$$r \sim N(\mu, V).$$

6.3. Retornos implícitos

El modelo de Black-Litterman parte de que el mercado está en equilibrio, por lo que todos los inversores poseen la misma cartera de mercado eficiente. Esta cartera es la Cartera de Mercado del modelo CAPM (σ_M, μ_M).

Este modelo utiliza los retornos implícitos o de equilibrio como el punto de partida. Más adelante veremos cómo el inversionista puede ajustar este vector de retorno implícito con base en sus propias opiniones o creencias sobre los activos, lo que da lugar a una asignación de activos más personalizada.

Los retornos de equilibrio se obtienen utilizando un método de *optimización inversa*; esto hace referencia al proceso de deducir los retornos implícitos a partir de la información observable del mercado. Para poder calcularlos, debemos introducir primero la función de utilidad.

Definición 6.2. La **función de utilidad** se utiliza para representar las preferencias de un individuo o una organización sobre diferentes opciones o resultados. Se asocia con la satisfacción o beneficio que obtiene una persona al consumir bienes, servicios o tomar decisiones bajo incertidumbre.

Así pues, en la teoría de carteras, la función de utilidad refleja la diferencia entre el retorno esperado y el riesgo asumido. El riesgo se penaliza proporcionalmente mediante un coeficiente de aversión al riesgo. Por lo que tenemos la función de utilidad cuadrática siguiente:

$$U = \text{Retorno esperado} - \frac{\delta}{2} \text{Riesgo} = \mathbb{E}(R_w) - \frac{\delta}{2} \text{Var}(R_w),$$

donde R_w hace referencia al retorno de la cartera.

Sustituyendo las expresiones del retorno esperado y la varianza en función de los pesos, dadas por las ecuaciones (3.1) y (3.2) tenemos:

$$U = \omega_M^t \Pi - \frac{\delta}{2} \omega_M^t V \omega_M. \quad (6.2)$$

Dado que la función U es convexa, podemos afirmar que tiene un único máximo global. Por lo tanto, buscamos el máximo derivando la función de utilidad (6.2) e igualándola a cero:

$$\frac{\partial U}{\partial \omega_M} = \Pi - \delta V \omega_M = 0.$$

Observación 6.3. Hemos utilizado las propiedades (3.4) y el hecho de que la matriz V es simétrica.

Resolviendo la igualdad para Π , obtenemos el vector de los retornos implícitos:

$$\Pi = \delta V \omega_M. \quad (6.3)$$

Para poder obtener el valor de Π , necesitamos calcular el coeficiente de aversión al riesgo del mercado, δ . Una manera de encontrar este valor es multiplicando ambos lados de la ecuación (6.3) por ω_M^t :

$$\omega_M^t \Pi = \delta \omega_M^t V \omega_M,$$

reemplazando los vectores por escalares, obtenemos:

$$\mu_M = \delta \sigma_M^2, \quad (6.4)$$

descomponiendo μ_M en la suma del retorno libre de riesgo y la prima de riesgo del mercado, y aislando la prima de riesgo, tenemos que:

$$(\mu_M - \mu_f) = \delta \sigma_M^2 - \mu_f.$$

Dado que el retorno libre de riesgo se asume como un parámetro constante que no depende de la varianza del mercado, podemos ignorar el término $-\mu_f$ en este contexto, dado que no cambia con el riesgo asumido del mercado. Así pues, podemos redefinir la ecuación (6.4) como:

$$(\mu_M - \mu_f) = \delta \sigma_M^2.$$

Con este cambio, obtenemos una variación en la interpretación financiera, dado que deseamos trabajar con la prima de riesgo en vez de con el retorno del mercado. De aquí podemos obtener el coeficiente de aversión al riesgo:

$$\delta = \frac{(\mu_M - \mu_f)}{\sigma_M^2}. \quad (6.5)$$

Así pues, sustituyendo el valor del coeficiente de aversión al riesgo de mercado y la varianza que viene dada por la ecuación (3.2), a la ecuación (6.3), obtenemos el vector de los retornos implícitos del mercado:

$$\Pi = \frac{(\mu_M - \mu_f) V \omega_M}{\omega_M^t V \omega_M}. \quad (6.6)$$

Una vez calculados los retornos implícitos del mercado, podemos definir los retornos esperados iniciales (μ) como una variable aleatoria normalmente distribuida con media Π y varianza τV :

$$\mu \sim N(\Pi, \tau V), \quad (6.7)$$

donde τ es un escalar que mide la incertidumbre sobre los retornos implícitos del mercado. Con esto, tenemos que μ refleja las creencias iniciales del mercado sobre los retornos esperados, sujetas a cierta incertidumbre, reflejada por el parámetro τ , y sin ninguna intervención externa.

6.4. Opiniones del inversor

Los inversores pueden tener puntos de vista específicos sobre el rendimiento esperado de algunos activos en una cartera, que pueden diferir del rendimiento de equilibrio implícito. Este modelo permite que estas opiniones puedan ser expresadas tanto en términos absolutos como relativos.

Definición 6.4. Una *opinión es absoluta* cuando el inversor tiene una creencia específica sobre el rendimiento esperado de un activo en particular, de manera independiente de los otros activos.

Definición 6.5. Una *opinión es relativa* cuando el inversor tiene una creencia acerca de la relación entre los rendimientos esperados de dos o más activos, pero no necesariamente sobre el rendimiento absoluto de cada uno de ellos. En lugar de dar un valor específico para un activo, la opinión relativa compara los rendimientos esperados de diferentes activos entre sí.

En esta sección, describiremos el proceso de especificar las opiniones de los inversores sobre los rendimientos esperados de los activos.

Representaremos las k opiniones de los inversores sobre los n activos del siguiente modo:

- P : matriz $k \times n$ donde cada fila corresponde a una opinión específica que el inversor tiene sobre ciertos activos y cada columna representa un activo. Para una opinión relativa, los valores de la fila tendrán suma cero, para una opinión absoluta, los valores sumaran uno. No es necesario que sea invertible.
- q : vector $k \times 1$ de los retornos esperados de cada opinión.
- Ω : matriz $k \times k$ de las covarianzas de las opiniones. Es diagonal ya que las opiniones deben ser independientes y no deben estar correlacionadas. Su inversa refleja la seguridad en opinión de los inversores. El elemento i -ésimo de la diagonal se representa como ω_i .

Su estructura la entenderemos mejor mediante un ejemplo:

Ejemplo 6.6. Supongamos que un inversor tiene una cartera compuesta por 3 activos (A, B, C), sobre los cuales tiene las siguientes opiniones:

- El retorno del activo A será del 8% (opinión absoluta).
- El retorno del activo B será un 2% mayor que el de C (opinión relativa).

Nos quedarán::

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 0,08 \\ 0,02 \end{pmatrix}, \quad \Omega = \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 \\ 0 & \omega_2 \end{pmatrix}.$$

Como hemos mencionado, la matriz Ω de las varianzas de las opiniones está inversamente relacionada con la seguridad en las opiniones de los inversores, aunque el modelo no da una forma intuitiva de cuantificar esta relación. Es el inversor quien debe calcular las varianzas de las opiniones.

Podemos asumir que la matriz Ω es proporcional a la varianza de los retornos de los activos, entonces podemos expresar la matriz como:

$$\Omega = \text{diag}(P(\tau V)P^t). \quad (6.8)$$

6.5. Fórmula de Black-Litterman

Una vez definidos todos los elementos del modelo y especificadas sus formas, vemos las dos principales suposiciones del modelo para luego poder enunciar y demostrar la fórmula de Black-Litterman.

Suposición 1:

Sea $P\mu$ un vector de dimensión $k \times 1$, tenemos que:

$$P\mu \sim N(q, \Omega). \quad (6.9)$$

Observación 6.7. Los parámetros q y Ω reciben el nombre de *hiperparámetros bayesianos*, parametrizan la pdf a priori y son conocidos por los inversores.

Suposición 2:

$$\Pi|\mu \sim N(\mu, \tau V), \quad (6.10)$$

Esta suposición implica que los retornos implícitos condicionados a los retornos esperados son, de media, iguales a los retornos esperados.

El teorema de Bayes aplicado a funciones de densidad, establece que:

$$f_{\mu|\Pi}(\mu|\Pi) = \frac{f_{\Pi|\mu}(\Pi|\mu)f_{\mu}(\mu)}{f_{\Pi}(\Pi)} \propto f_{\Pi|\mu}(\Pi|\mu)f_{\mu}(\mu). \quad (6.11)$$

Dadas estas dos suposiciones, podemos enunciar y demostrar la fórmula del modelo de Black-Litterman:

Teorema 6.8. Sea Π el vector de los retornos implícitos del mercado, tenemos que la función de densidad de probabilidad de los retornos esperados (μ), condicionados a los retornos implícitos del mercado, viene dada por:

$$f_{\mu|\Pi}(\mu|\Pi) \sim N(\mu_{BL}, \sigma_{BL}^2), \quad (6.12)$$

donde:

$$\begin{aligned} \mu_{BL} &= [(\tau V)^{-1} + P^t \Omega^{-1} P]^{-1} [(\tau V)^{-1} \Pi + P^t \Omega^{-1} q], \\ \sigma_{BL}^2 &= [(\tau V)^{-1} + P^t \Omega^{-1} P]^{-1}. \end{aligned}$$

Demostración. Sea k una constante, por la suposición 1 tenemos que $P\mu \sim N(q, \Omega)$, por lo tanto tiene función de densidad:

$$f_{P\mu}(P\mu) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^k \det(\Omega)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(P\mu - q)^t \Omega^{-1} (P\mu - q) \right\}.$$

Del mismo modo, por la suposición 2 tenemos que $\Pi|\mu \sim N(\mu, \tau V)$, por lo que tiene función de densidad:

$$f_{\Pi|\mu}(\Pi|\mu) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\tau V)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(\Pi - \mu)^t (\tau V)^{-1} (\Pi - \mu) \right\}.$$

Observamos que los valores k y n son las dimensiones de los vectores $P\mu$ y Π respectivamente.

Dado que tenemos, por la suposición 1, que $P\mu \sim N(q, \Omega)$, necesitamos encontrar la semejanza de μ , para así poder aplicar la fórmula (6.11). Supongamos que la matriz P es invertible, entonces, mediante una transformación lineal, tendríamos que $f_\mu(\mu) = f_{P\mu}(P\mu) \det(P)^{-1}$, por lo que como $\det(P)^{-1}$ es un valor constante obtendríamos que $f_\mu(\mu) \propto f_{P\mu}(P\mu)$, y así podríamos aplicar la suposición 1 sin problema.

Realizando esta modificación se varia la matriz Ω y debe completarse hasta ser de dimensión $n \times n$. Dado que se desconocen los valores que completan la matriz, y queremos que estos coeficientes sean cero al invertir la matriz para que no nos afecten a nuestros resultados, obtenemos que los valores de la diagonal de la matriz serán igual a infinito. Por lo que, por todo esto, la suposición 1 es completamente válida.

Utilizando la fórmula del teorema de Bayes (6.11) y las suposiciones 1 y 2 tenemos que:

$$\begin{aligned} f_{\Pi|\mu}(\Pi|\mu) f_{P\mu}(P\mu) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\tau V)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(\Pi - \mu)^t (\tau V)^{-1} (\Pi - \mu) \right\} \\ &\quad \times \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^k \det(\Omega)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(P\mu - q)^t \Omega^{-1} (P\mu - q) \right\}. \end{aligned}$$

Sustituyendo las constantes por K , obtenemos:

$$f_{\Pi|\mu}(\Pi|\mu) f_{P\mu}(P\mu) = K \exp \left\{ -\frac{1}{2}(\Pi - \mu)^t (\tau V)^{-1} (\Pi - \mu) - \frac{1}{2}(P\mu - q)^t \Omega^{-1} (P\mu - q) \right\}.$$

El término cuadrático del exponente simplificado es:

$$\mu(\tau V)^{-1} \mu - 2\Pi(\tau V)^{-1} \mu + \Pi^t (\tau V)^{-1} \Pi + \mu^t P^t \Omega^{-1} P \mu - 2q^t \Omega^{-1} P \mu + q^t \Omega^{-1} q,$$

Que es equivalente a:

$$\mu^t (P^t \Omega^{-1} P + (\tau V)^{-1}) \mu - 2(q^t \Omega^{-1} P + \Pi^t (\tau V)^{-1}) \mu + \Pi^t (\tau V)^{-1} \Pi + q^t \Omega^{-1} q.$$

Definimos ahora los valores:

$$\begin{aligned} C &= (\tau V)^{-1} \Pi, \\ H &= (\tau V)^{-1} + P^t \Omega^{-1} P, \\ A &= \Pi^t (\tau V)^{-1} \Pi + q^t \Omega^{-1} q. \end{aligned}$$

Observamos que H es simétrico, por lo que usando que $H = H^t$ y que $HH^{-1} = Id$, podemos reescribir el término del exponente:

$$\begin{aligned}\mu^t H \mu - 2C^t \mu + A &= \mu^t (H^t H^{-1} H) \mu - 2(C^t H^{-1} H) \mu + A \\ &= (H \mu - C)^t H^{-1} (H \mu - C) + A - C^t H C \\ &= (\mu - H^{-1} C)^t H (\mu - H^{-1} C) + A - C^t H C.\end{aligned}$$

En términos de μ , el término $A - C^t H C$ desaparece con la constante de integración. Por lo tanto tenemos que:

$$f_{\mu|\Pi}(\mu|\Pi) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mu - H^{-1}C)^t H (\mu - H^{-1}C)\right\}.$$

Esta es una función de densidad asociada a una distribución normal multivariada. Por lo que, sustituyendo los valores de H y C , podemos concluir que $\mu|\Pi$ tiene media:

$$\mu_{BL} = [(\tau V)^{-1} + P^t \Omega^{-1} P]^{-1} [(\tau V)^{-1} \Pi + P^t \Omega^{-1} q],$$

y varianza:

$$\sigma_{BL}^2 = [(\tau V)^{-1} + P^t \Omega^{-1} P]^{-1}.$$

□

En la siguiente figura podemos observar la metodología que sigue el modelo:

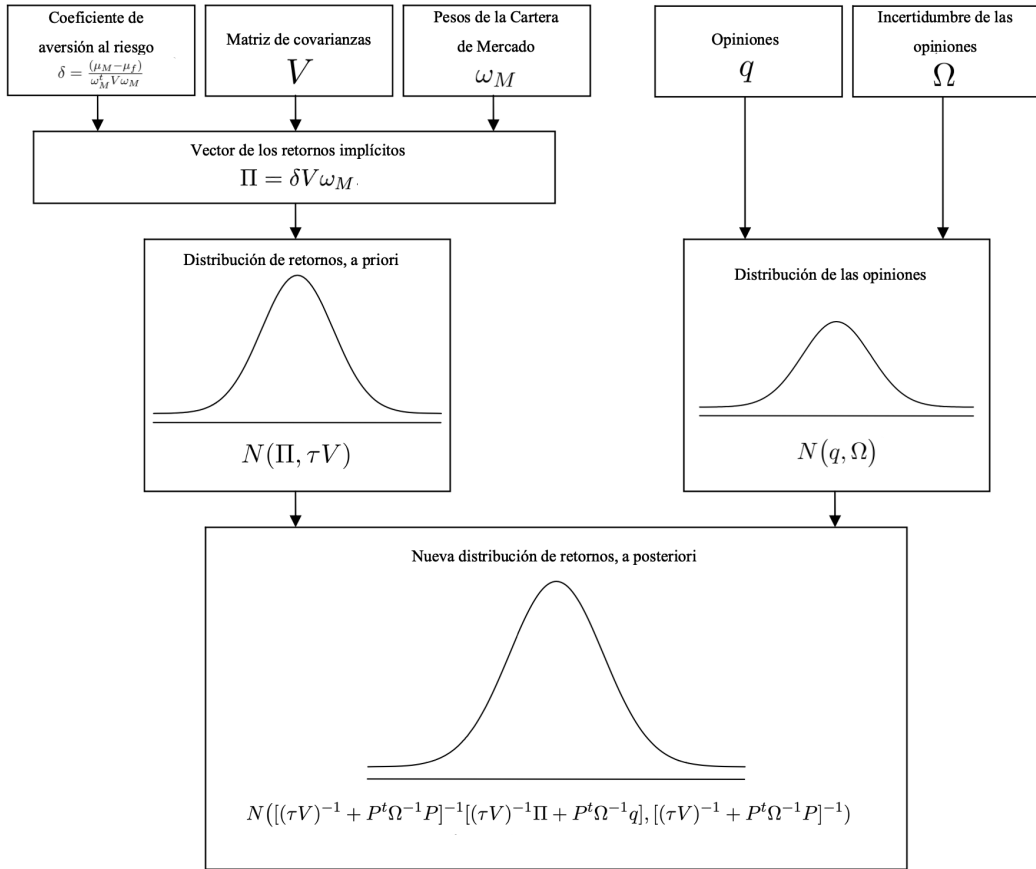


Figura 4: Metodología del modelo Black-Litterman.

7. Conclusiones

Tras la realización de este trabajo, podemos afirmar que se han alcanzado los objetivos establecidos al inicio del mismo. Principalmente, hemos podido observar la evolución que ha tenido la teoría de carteras a lo largo de los años. También hemos podido ver cuáles son las motivaciones de la formulación de cada modelo dadas las limitaciones de sus predecesores, con lo que cada uno contribuyó en el progreso de la teoría moderna de carteras.

El modelo de Markowitz marcó un hito al introducir un enfoque matemático riguroso sobre la optimización de carteras. Sin embargo, las limitaciones prácticas del modelo, como la alta sensibilidad a las estimaciones de los parámetros y su dependencia de datos históricos, impulsaron la necesidad de mejora.

De este contexto surge el modelo CAPM. La principal mejora la observamos en la vinculación de los rendimientos esperados de los activos con el riesgo sistemático del mercado, mediante un activo libre de riesgo. Aunque este modelo mejora la comprensión del riesgo, su dependencia de un único factor resulta insuficiente para capturar todas las fuentes de riesgo en contextos más complejos.

El modelo APT es un modelo multifactorial que generaliza el modelo CAPM mediante la introducción de distintos factores macroeconómicos. Estos permiten capturar las fuentes principales de riesgo sistemático que afectan a los rendimientos de los activos financieros. El principal problema de este modelo es que no define cuáles son los factores que deben ser utilizados, cosa que implica que los inversores tienen que identificar y justificar los más relevantes para cada contexto.

Finalmente, el modelo de Black-Litterman demuestra ser el más completo de los cuatro. Esto se debe a que no tiene únicamente en cuenta la información implícita del mercado, sino que permite combinarla con las opiniones que puede tener cada inversor haciendo uso de la estadística bayesiana. Aunque contiene una mayor complejidad matemática, nos permite obtener unos resultados más precisos y personalizados para cada inversionista.

En conclusión, este trabajo ha seguido un hilo temporal para explicar la evolución de la teoría moderna de carteras, donde cada uno de los modelos tratados ha contribuido de una manera significativa al entendimiento y desarrollo de la gestión de inversiones. Este recorrido evidencia el carácter dinámico de la teoría financiera y su capacidad de adaptarse a un entorno en constante cambio.

Referencias

- [1] PICTET Asset Management: *¿Qué sabes de los activos financieros? Te explicamos sus características y los tipos que existen.*, 2024.
- [2] Sogorb Mira, Francisco: Expansión.com, <https://www.expansion.com/diccionario-economico/gestion-de-carteras.html>.
- [3] Capiński, Maciej J.; Ekkehard, Kopp: *Portfolio Theory and Risk Management*, Mastering Mathematical Finance, University of Cambridge, pp. 2-8, 2014.
- [4] Markowitz, Harry: *Portfolio Selection*. The Journal of Finance, vol. 7, no. 1, pp. 77-91, 1952.
- [5] Markowitz, Harry: *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*. John Wiley & Sons, 1959.
- [6] Roman, Steven: *Introduction to the mathematics of finance*, Springer, New York, pp. 41-53, 2004.
- [7] Facenda Aguirre, José A.: *El método de los multiplicadores de Lagrange*, <https://personal.us.es/facenda/AMII/2000-01/lagrange.pdf>, 2000.
- [8] Peters, Arlie O.; Dong, Xiaoying: *An Introduction to Mathematical Finance with Applications*, Springer, New York, pp. 118-127, 2016.
- [9] Sharpe, William F.: *Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk*. The Journal of Finance, vol. 19, no. 3, pp. 425-442, 1964.
- [10] Lintner, John: *The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets*. The Review of Economics and Statistics, vol. 47, no. 1, pp. 13-37, 1965.
- [11] Mossin, Jan: *Equilibrium in a Capital Asset Market*. Econometrica, vol. 34, no. 4, pp. 768-783, 1966.
- [12] Peters, Arlie O.; Dong, Xiaoying: *An Introduction to Mathematical Finance with Applications*, Springer, New York, pp. 151-160, 2016.
- [13] Roman, Steven: *Introduction to the mathematics of finance*, Springer, New York, pp. 62-68, 2004.
- [14] Ross, Stephen A.: *The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing*. Journal of Economic Theory, vol. 13, no. 3, pp. 341-360, 1976.
- [15] Elton, Edwin J.; Martin J. Gruber; Stephen J. Brown; William N. Goetzmann: *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*. 9^a ed., John Wiley & Sons, pp. 364-391, 2014.
- [16] Black, Fischer; Robert Litterman: *Global Portfolio Optimization*. Financial Analysts Journal, vol. 48, no. 5, pp. 28-43, 1992.
- [17] Satchell, Stephen; Scowcroft, Alan: *A demystification of the Black-Litterman model: Managing quantitative and traditional portfolio*. Journal of Asset Management, vol. 1, no. 2, pp. 138-150, 2000.

- [18] Shivam, Raj: *A Mathematical Explanation of Naive Bayes in 5 Minutes*. Towards Data Science,
<https://towardsdatascience.com/a-mathematical-explanation-of-naive-bayes-in-5-minutes-44adebcdb5f8>, 2020.
- [19] Idzorek, Thomas M.: *A step-by-step guide to the Black-Litterman model*, 2002.
- [20] Walters, Jay: *The Black-Litterman model in detail*, 2014.

