

UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

TEORIA MODERNA DE
CARTERES, CAPM I APT

Autor: Marc Juanes Duran

Director: Dr. Josep Vives
Realitzat a: Departament de
Matemàtica Econòmica,
Financera i Actuarial
Barcelona, 15 de gener de 2025

Índex

1	Introducció	3
2	Risc i Retorn d'un actiu	4
2.1	Marc teòric	4
2.2	Retorn esperat d'un actiu	4
2.3	Variància del retorn d'un actiu	5
2.4	Pla desviació típica-esperança	5
3	Carteres de dos actius	7
3.1	Retorn d'una cartera de dos actius	7
3.2	Variància d'una cartera de dos actius	9
3.3	Conjunt assolible	10
3.4	Cartera de mínima variància	12
3.5	Cartera de mercat	13
4	Carteres de múltiples actius	18
4.1	Retorn i variància d'una cartera de múltiples actius	18
4.2	Cartera de mínima variància	20
4.3	Línia de mínima variància i teorema dels dos fons	22
4.4	Cartera de mercat	26
5	Model CAPM	29
5.1	Deducció de la fórmula CAPM	30
5.2	Línia característica i estimació de β	32
6	Model de factors	35
6.1	Model d'un sol factor	35
6.2	Model de múltiples factors	37

6.3	Arbitrage Pricing Theory	40
6.4	Generalització de l'APT per un factor	42
6.5	Generalització de l'APT per a múltiples factors	47
7	Conclusions	48

Capítol 1

Introducció

La teoria moderna de carteres [1] es va desenvolupar a partir dels treballs de l'economista *Harry Markowitz (1927-2023)* presentats en un assaig l'any 1952, i pels quals va guanyar el Premi Nobel d'Economia l'any 1990. L'objectiu principal darrere d'aquesta teoria tracta de com un inversor pot repartir la seva riquesa en diferents actius per tal d'obtenir el màxim retorn esperat amb la mínima variància possible. Per tant, el resultat no serà una inversió concreta, sinó una sèrie de combinacions retorn-variància d'on s'haurà de triar una en funció de l'aversion al risc que tingui l'inversor. Tot això es desenvoluparà més a fons durant el treball.

Posteriorment, a partir d'aquesta teoria, es va desenvolupar el model de valoració d'actius financers CAPM (Capital Asset Pricing Model) [1]. Aquest va ser introduït per treballs independents de *Jack Treynor*, *William F. Sharpe*, *John Lintner* i *Jan Mossin* entre els anys 1961 i 1965. Una de les parts fonamentals d'aquest model és el coeficient β , que mesura la sensibilitat dels rendiments d'un actiu en funció dels rendiments del mercat.

El fet que en el model CAPM es pugui expressar el rendiment d'un actiu en funció del rendiment del mercat es pot generalitzar i expressar-lo en funció de diferents factors. Això es coneix com a model de factors i és una base per al APT (Arbitrage Pricing Theory) [2] [3], que va introduir *Stephen Ross* l'any 1976. L'APT permet deduir una fórmula similar al CAPM però partint de la base del model de factors.

L'objectiu d'aquest treball és analitzar amb detall la teoria moderna de carteres, i els models CAPM i APT.

Durant el curs del treball només es donen per suposat coneixements bàsics d'àlgebra lineal, càlcul i teoria de la probabilitat. Tot i així, serà molt important la utilització dels multiplicadors de Lagrange per a trobar mínims de funcions de múltiples variables amb restriccions. El seu funcionament s'explicarà per sobre per no allargar el treball, però es podran trobar les explicacions i demostracions completes a la bibliografia [1].

Capítol 2

Risc i Retorn d'un actiu

2.1 Marc teòric

Estudiarem l'evolució d'un actiu financer durant un període de temps. Per simplificar-ho, ens centrarem en dos instants, l'inicial o 0, i el final o 1. El valor de l'actiu al moment inicial el coneixem, i el denotarem $S(0)$. En canvi, el valor de l'actiu al moment final és desconegut. Per això, l'identificarem amb una variable aleatòria anomenada $S(1)$. Com els actius mai tenen valor negatiu, definim

$$S(1) : \Omega \rightarrow [0, +\infty),$$

on Ω és l'espai mostral d'un espai de probabilitat. La notació que farem servir funciona tant per variables aleatòries discretes com per variables aleatòries contínues.

A partir d'aquesta variable aleatòria, podem calcular el valor esperat de l'actiu al moment 1. Escriurem aquest valor com $\mathbb{E}(S(1))$. De la mateixa manera, podem calcular la variància d'aquesta variable aleatòria que escriurem com $Var(S(1))$.

2.2 Retorn esperat d'un actiu

Quan estudiem el retorn d'un actiu normalment ens centrem en el percentatge d'increment respecte a la inversió inicial. Per això, definirem una nova variable aleatòria anomenada retorn.

Formalment, sigui $S(1)$ la variable aleatòria que representa el valor final d'un actiu, definim el retorn com la variable aleatòria $K: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, definida com

$$K = \frac{S(1) - S(0)}{S(0)}.$$

A partir de la variable aleatòria retorn podem definir el retorn esperat d'un actiu.

Definició 2.2.1. Anomenem **retorn esperat** d'un actiu, que escriurem com a μ , a l'esperança del retorn de l'actiu. És a dir, a $\mu = \mathbb{E}(K)$.

Utilitzant la linealitat de l'esperança podem veure fàcilment que l'esperança de $S(1)$ i el valor $S(0)$ determinen el valor del retorn esperat:

$$\mu = \mathbb{E}(K) = \frac{\mathbb{E}(S(1)) - S(0)}{S(0)}.$$

Un tipus de retorn que ens serà útil més endavant és l'anomenat retorn sense risc. Aquest retorn prové dels bons, que són un tipus d'actiu en els quals el valor en el moment final és conegut. En aquest cas no fa falta utilitzar una variable aleatòria ja que tots els valors són coneguts. Direm $B(0)$ al valor inicial del bo, i $B(1)$ al valor final. Per tant, no hi ha risc teòric, tot i que en la pràctica no és exactament així.

Definició 2.2.2. Definim el **retorn sense risc**, que escriurem R , com al retorn dels bons. És a dir,

$$R = \frac{B(1) - B(0)}{B(0)}.$$

2.3 Variància del retorn d'un actiu

El retorn esperat ens permet saber el valor esperat que tindrà l'actiu en el moment final. No obstant, aquest valor no ens permet saber el risc que estem suportant. És per això que, per a poder mesurar aquest risc, utilitzarem la variància del retorn de l'actiu. Així, ens podem fer una idea de com de junts o separats estan els possibles valors finals de l'actiu.

Definició 2.3.1. Definim la **variància del retorn** d'un actiu, que escriurem σ^2 , com la variància de la variable aleatòria retorn. És a dir, $\sigma^2 = \text{Var}(K)$. Anomenem **desviació típica del retorn**, que escriurem σ , a l'arrel de la variància del retorn.

Per definició de variància podem deduir fàcilment les igualtats següents:

$$\text{Var}(K) = \mathbb{E}(K - \mu)^2 = \mathbb{E}(K^2) - \mu^2.$$

De la mateixa manera que abans hem vist que podíem expressar $\mu = \mathbb{E}(K)$ en funció de $S(0)$ i de $\mathbb{E}(S(1))$, també podem expressar $\sigma^2 = \text{Var}(K)$ en funció de $S(0)$ i de $\text{Var}(S(1))$:

$$\text{Var}(K) = \text{Var}\left(\frac{S(1) - S(0)}{S(0)}\right) = \frac{1}{S(0)^2} \text{Var}(S(1) - S(0)) = \frac{1}{S(0)^2} \text{Var}(S(1)).$$

2.4 Pla desviació típica-esperança

Hem vist que el retorn esperat i la variància d'un actiu ens permeten tenir una idea del valor final i del risc, respectivament. Una hipòtesi raonable és que els inversors busquen augmentar al màxim el retorn esperat, ja que volen guanyar diners, alhora que reduir el risc al mínim, ja que els humans acostumem a ser aversos al risc. Això motiva la següent definició.

Definició 2.4.1. *Diem que un actiu amb retorn esperat μ_1 i desviació típica σ_1 **domina** a un altre actiu amb retorn esperat μ_2 i desviació típica σ_2 si $\mu_1 \geq \mu_2$ i $\sigma_1 \leq \sigma_2$.*

Definició 2.4.2. *Si tenim un conjunt d'actius, cadascun amb el seu retorn esperat i desviació típica, anomenem **subconjunt eficient** al subconjunt format per tots els elements maximals respecte a la relació de dominància de la definició anterior.*

Una manera de visualitzar tot això que ens serà útil més endavant és el pla desviació típica-esperança, o (σ, μ) -plane en anglès. Consisteix a situar la desviació típica del retorn a l'eix x del pla, i l'esperança del retorn a l'eix y. Així, podem situar tots els actius en aquest pla. I sabrem que un actiu domina a un altre si el primer està situat més amunt i més a l'esquerra, és a dir, si té més esperança i menys desviació típica.

Capítol 3

Carteres de dos actius

En el capítol anterior hem estudiat l'esperança i la variància del retorn d'un actiu. L'objectiu d'aquest capítol és veure què passa amb l'esperança i la variància del retorn quan es tenen dos actius alhora. Al conjunt d'actius que té un mateix inversor se l'anomena cartera.

3.1 Retorn d'una cartera de dos actius

Suposem que tenim x_1 unitats de l'actiu S_1 i x_2 unitats de l'actiu S_2 . El valor inicial d'aquesta cartera serà

$$V_{(x_1, x_2)}(0) = x_1 S_1(0) + x_2 S_2(0) .$$

De la mateixa manera, la variable aleatòria que representa el valor final de la cartera serà

$$V_{(x_1, x_2)}(1) = x_1 S_1(1) + x_2 S_2(1) .$$

En comptes d'utilitzar el nombre d'unitats de cada actiu i el seu preu inicial, utilitzarem el percentatge respecte al valor inicial que representa cada actiu, és a dir, el seu pes. Per tant, els pesos w_1 i w_2 dels dos actius es poden calcular com

$$w_1 = \frac{x_1 S_1(0)}{V_{(x_1, x_2)}(0)} , \quad w_2 = \frac{x_2 S_2(0)}{V_{(x_1, x_2)}(0)} .$$

Es pot observar clarament que, si el valor inicial dels dos actius i el valor total de la cartera són coneguts, donar el nombre d'unitats d'un actiu és equivalent a donar-ne el pes. A més, si al pes del primer actiu li diem w , el pes del segon actiu serà $1-w$. És a dir, els dos pesos sumen 1. Denotarem per K_{ω} el retorn de la cartera amb pesos $\omega = (w, 1-w)$ i que definim com

$$K_{\omega} = \frac{V_{(x_1, x_2)}(1) - V_{(x_1, x_2)}(0)}{V_{(x_1, x_2)}(0)} .$$

Tot i així, falta considerar un cas especial que es dona quan $V_{(x_1, x_2)}(0) = 0$, és a dir, en carteres sense inversió inicial.

Definició 3.1.1. Anomenem *cartera d'arbitratge* a una cartera tal que $V_{(x_1, x_2)}(0) = 0$.

En el cas de carteres d'arbitratge no podem utilitzar les variables pesos i retorn de la cartera ja que no podem dividir entre zero. Per això, definirem els pesos absoluts de cada actiu com

$$W_1 = x_1 S_1(0), \quad W_2 = x_2 S_2(0),$$

i el vector de pesos absoluts $\mathbf{W} = (W_1, W_2)$. En carteres d'arbitratge, $W_1 + W_2 = 0$. Per una cartera d'arbitratge amb pesos absoluts $\mathbf{W}$, definim la variable benefici, que denotem per $B_{\mathbf{W}}$, com

$$B_{\mathbf{W}} = V_{(x_1, x_2)}(1) - V_{(x_1, x_2)}(0).$$

Anomenem benefici esperat a $\mathbb{E}(B_{\mathbf{W}})$.

Analitzem primer el cas $V_{(x_1, x_2)}(0) \neq 0$. Enunciem una proposició que ens ajudarà a calcular el retorn de la cartera en funció dels retorns i pesos dels actius. Bàsicament, veurem que es tracta de fer una mitjana ponderada.

Proposició 3.1.2. El retorn K_{ω} d'una cartera formada per dos actius amb pesos w_1 i w_2 , i retorns K_1 i K_2 es pot calcular com

$$K_{\omega} = w_1 K_1 + w_2 K_2.$$

Demostració. Ho demostrarem utilitzant el fet que $w_1 + w_2 = 1$.

$$\begin{aligned} V_{(x_1, x_2)}(1) &= x_1 S_1(1) + x_2 S_2(1) \\ &= \frac{w_1 V_{(x_1, x_2)}(0)}{S_1(0)} S_1(0)(1 + K_1) + \frac{w_2 V_{(x_1, x_2)}(0)}{S_2(0)} S_2(0)(1 + K_2) \\ &= V_{(x_1, x_2)}(0)(w_1(1 + K_1) + w_2(1 + K_2)) \\ &= V_{(x_1, x_2)}(0)(1 + w_1 K_1 + w_2 K_2). \end{aligned}$$

□

A partir de la proposició 3.1.2, la següent és quasi immediata.

Proposició 3.1.3. El retorn esperat μ_{ω} d'una cartera formada per dos actius amb pesos w_1 i w_2 , i retorns esperats μ_1 i μ_2 es pot calcular com

$$\mu_{\omega} = w_1 \mu_1 + w_2 \mu_2.$$

Demostració. Utilitzant la linearitat de l'esperança, tenim que

$$\mu_{\omega} = \mathbb{E}(K_{\omega}) = \mathbb{E}(w_1 K_1 + w_2 K_2) = w_1 \mathbb{E}(K_1) + w_2 \mathbb{E}(K_2) = w_1 \mu_1 + w_2 \mu_2.$$

□

Passem ara al cas $V_{(x_1, x_2)}(0) = 0$. També podem expressar el benefici de la cartera en funció dels pesos absoluts i els retorns dels actius.

Proposició 3.1.4. *El benefici $B_{\mathbf{W}}$ d'una cartera formada per dos actius amb pesos absoluts W_1 i W_2 , i retorns K_1 i K_2 es pot calcular com*

$$B_{\mathbf{W}} = W_1 K_1 + W_2 K_2 .$$

Demostració.

$$\begin{aligned} B_{\mathbf{W}} &= V_{(x_1, x_2)}(1) - V_{(x_1, x_2)}(0) = x_1 S_1(1) + x_2 S_2(1) - x_1 S_1(0) - x_2 S_2(0) \\ &= x_1 S_1(0) \frac{S_1(1) - S_1(0)}{S_1(0)} + x_2 S_2(0) \frac{S_2(1) - S_2(0)}{S_2(0)} = W_1 K_1 + W_2 K_2 . \end{aligned}$$

□

Les carteres d'arbitratge ens seran útils cap al final del treball, però de moment suposarem que $V_{(x_1, x_2)}(0) \neq 0$.

Abans de passar a la següent secció amb l'estudi de la variància mencionarem dos temes importants. El primer és que, tot i que el nombre d'actius és un nombre enter, cosa que a la pràctica limita les combinacions de pesos de cada actiu, nosaltres suposarem que qualsevol combinació és possible per no afegir més complicacions. El segon és que suposarem que hi poden haver pesos negatius. Això és equivalent a vendre en curt un actiu. La venda en curt d'un actiu consisteix a agafar prestat un actiu, vendre'l, recomprar-lo al final del període i llavors tornar-lo. És veritat que aquest prèstec sol tenir un interès, però suposarem que no existeix.

3.2 Variància d'una cartera de dos actius

Recordem la definició de covariància que ens serà útil per a calcular la variància d'una cartera de dos actius. Siguin X i Y dues variables aleatòries, la seva covariància es defineix com

$$Cov(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))] = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) .$$

Observem que la covariància és simètrica ja que $Cov(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))] = \mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}(Y))(X - \mathbb{E}(X))] = Cov(Y, X)$. Escriurem aquesta covariància com a σ_{xy} . Clarament, $Cov(X, X) = Var(X) = \sigma_x^2$. També recordem la definició del coeficient de correlació de Pearson:

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} .$$

Per la desigualtat de Cauchy-Schwarz, que ens diu que $Cov(X, Y)^2 \leq \sigma_x^2 \sigma_y^2$, deduïm que $-1 \leq \rho_{xy} \leq 1$. Amb aquesta informació, anem a deduir com calcular la variància del retorn d'una cartera de dos actius. En el context del retorn d'una inversió, escriurem

$$\sigma_{ij} = Cov(K_i, K_j) .$$

Proposició 3.2.1. *La variància del retorn σ_{ω^2} d'una cartera formada per dos actius amb*

pesos w_1 i w_2 , i variàncies σ_1^2 i σ_2^2 es pot calcular com

$$\sigma_{\omega}^2 = w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2w_1 w_2 \sigma_{12}.$$

Demostració. Utilitzant les proposicions 3.1.2 i 3.1.3,

$$\begin{aligned} \sigma_{\omega}^2 &= \text{Var}(K_{\omega}) = \mathbb{E}(K_{\omega}^2) - \mu_{\omega}^2 = \mathbb{E}((w_1 K_1 + w_2 K_2)^2) - (w_1 \mu_1 + w_2 \mu_2)^2 \\ &= \mathbb{E}(w_1^2 K_1^2 + w_2^2 K_2^2 + 2w_1 w_2 K_1 K_2) - w_1^2 \mu_1^2 - w_2^2 \mu_2^2 - 2w_1 w_2 \mu_1 \mu_2 \\ &= w_1^2 [\mathbb{E}(K_1^2) - \mu_1^2] + w_2^2 [\mathbb{E}(K_2^2) - \mu_2^2] + 2w_1 w_2 [\mathbb{E}(K_1 K_2) - \mu_1 \mu_2] \\ &= w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2w_1 w_2 \sigma_{12}. \end{aligned}$$

□

Tot i que ara només estem tractant carteres de dos actius, més endavant tractarem carteres amb més de dos actius. Això farà que les igualtats siguin molt llargues. És per això que introduïrem la notació matricial. Definim els següents vectors i matriu:

$$\omega = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}, \quad \mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}.$$

A la matriu C l'anomenem matriu de covariances, que és una matriu simètrica. Es pot comprovar fàcilment que $\mu_{\omega} = \omega^T \mu$ i $\sigma_{\omega}^2 = \omega^T C \omega$.

3.3 Conjunt assolible

Tornem ara al context del pla desviació típica-esperança. El conjunt de carteres formades per dos actius es pot situar en aquest pla utilitzant les proposicions 3.1.3 i 3.2.1. Es coneix aquest subconjunt del pla amb el nom de conjunt assolible. Suposem que el pes del primer actiu és $w = w_1$. Llavors el pes del segon actiu serà $w_2 = 1 - w_1 = 1 - w$. Per tant, aquest conjunt de carteres forma una corba parametritzada per w complint les equacions

$$\begin{aligned} \mu_{\omega} &= w\mu_1 + (1 - w)\mu_2, \\ \sigma_{\omega}^2 &= w^2 \sigma_1^2 + (1 - w)^2 \sigma_2^2 + 2w(1 - w)\rho_{12}\sigma_1\sigma_2. \end{aligned}$$

En el context de carteres de dos actius amb risc, és a dir, amb variàncies estrictament positives, podem utilitzar el següent resultat:

Teorema 3.3.1. *Si $\mu_1 \neq \mu_2$ i $\rho_{12} \in (-1, 1)$, llavors el conjunt assolible és una hipèrbola amb el centre situat a l'eix y .*

La demostració d'aquest resultat no la donarem per no allargar el treball, però es pot trobar a la bibliografia [1]. Visualment, aquesta corba es veuria com en la Figura 3.1.

El punt de la corba que té la mínima desviació típica, és a dir, el que se situa més a l'esquerra, es coneix amb el nom de cartera de mínima variància. La denotarem MVP

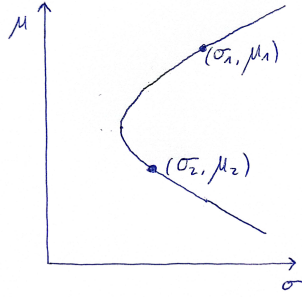


Figura 3.1: Conjunt assolible

(Minimum Variance Portfolio en anglès). A la pròxima secció trobarem fórmules per calcular els pesos d'aquesta cartera.

Anem ara a discutir com serà la forma del conjunt assolible en els casos en què no es pot aplicar el teorema 3.3.1. Aquests casos seran $\rho_{12} = -1$, $\rho_{12} = 1$ i $\mu_1 = \mu_2$. Veiem-los:

Quan $\rho_{12} = -1$, substituint a l'equació de la variància obtenim

$$\sigma_{\omega}^2 = w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 - 2w(1-w)\sigma_1\sigma_2 = (w\sigma_1 - (1-w)\sigma_2)^2.$$

Per tant, $\sigma_{\omega} = |w\sigma_1 - (1-w)\sigma_2|$. El valor absolut del pendent del conjunt assolible, $|m|$, quan $\sigma_{\omega} \neq 0$, serà

$$|m| = \left| \frac{d\mu}{d\sigma} \right| = \left| \frac{\mu_2 - \mu_1}{\sigma_2 + \sigma_1} \right|.$$

Aquest valor és una constant. Per tant, el conjunt assolible és una línia recta excepte en el punt on $\sigma_{\omega} = 0$. En aquest punt la desviació típica canvia de signe i no és derivable. Això fa que el pendent, tot i que manté el valor absolut, canvia de signe al passar pel punt on $\sigma_{\omega} = 0$. El pes w que fa que passi això és únic i es dedueix fàcilment que

$$w = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}, \quad 1 - w = \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}.$$

També s'observa que no requereix venda en curt, ja que els dos pesos són positius.

Quan $\rho_{12} = 1$, substituint a l'equació de la variància obtenim

$$\sigma_{\omega}^2 = w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w(1-w)\sigma_1\sigma_2 = (w\sigma_1 + (1-w)\sigma_2)^2.$$

Per tant, $\sigma_{\omega} = |w\sigma_1 + (1-w)\sigma_2|$. Farem ara dos casos diferents. Primer suposarem que $\sigma_1 \neq \sigma_2$. El valor absolut del pendent del conjunt assolible, $|m|$, quan $\sigma_{\omega} \neq 0$, serà

$$|m| = \left| \frac{d\mu}{d\sigma} \right| = \left| \frac{\mu_2 - \mu_1}{\sigma_2 - \sigma_1} \right|.$$

Aquest valor és una constant. Per tant, el conjunt assolible és una línia recta excepte en el punt on $\sigma_{\omega} = 0$. En aquest punt la desviació típica canvia de signe i no és derivable. Això fa que el pendent, tot i que manté el valor absolut, canvia de signe al passar pel

punt on $\sigma_\omega = 0$. El pes w que fa que passi això és únic i es dedueix fàcilment que

$$w = \frac{-\sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2}, \quad 1 - w = \frac{\sigma_1}{\sigma_1 - \sigma_2}.$$

També s'observa que requereix venda en curt, ja que els dos pesos sempre tenen signe diferent. L'altre cas es dona quan $\sigma_1 = \sigma_2$. Podem suposar que $\mu_1 \neq \mu_2$ ja que són actius diferents. Llavors el conjunt assolible serà la recta $\sigma = \sigma_1 = \sigma_2$, ja que $\sigma_\omega = |w\sigma_1 + (1 - w)\sigma_2| = |w\sigma_1 + (1 - w)\sigma_1| = \sigma_1$. Serà una recta completa ja que, com $\mu_1 \neq \mu_2$, llavors μ_ω pot prendre qualsevol valor.

Finalment, anem a veure el cas $\mu_1 = \mu_2$. Podem suposar que $\sigma_1 \neq \sigma_2$ ja que són actius diferents. Llavors el conjunt assolible complirà que $\mu = \mu_1 = \mu_2$, ja que $\mu_\omega = w\mu_1 + (1 - w)\mu_2 = w\mu_1 + (1 - w)\mu_1 = \mu_1$. No serà una recta completa ja que, com a mínim, σ_ω ha de ser sempre positiva. Per tant, serà una semirecta complint $\mu = \mu_1$ i tal que $\sigma > \sigma_{min}$, on σ_{min} és el mínim valor que pot prendre σ_ω . Justament la pròxima secció es centrarà en trobar el valor del paràmetre w que minimitza σ_ω .

3.4 Cartera de mínima variància

La minimització de la desviació típica σ_ω és equivalent a minimitzar la variància σ_ω^2 . Per facilitar els càlculs, ens centrarem a trobar la cartera que minimitza la variància. Serà interessant notar que aquests pesos no depenen dels retorns esperats de l'actiu, és a dir, no depenen ni de μ_1 ni de μ_2 .

Teorema 3.4.1. *Suposem que tenim dos actius diferents amb variances σ_1^2 i σ_2^2 respectivament, i coeficient de correlació entre els seus retorns ρ_{12} . Llavors la cartera de mínima variància es defineix pels pesos $\omega_{min} = (w, 1 - w)$ amb*

$$w = \frac{a}{a + b}, \quad 1 - w = \frac{b}{a + b},$$

on

$$a = \sigma_2^2 - \rho_{12}\sigma_1\sigma_2,$$

$$b = \sigma_1^2 - \rho_{12}\sigma_1\sigma_2,$$

excepte quan es dona $\rho_{12} = 1$ i $\sigma_1 = \sigma_2$ allora.

Demostració. Anem a demostrar-ho per casos. Quan $\rho_{12} = -1$, de l'estudi fet a la secció anterior obtenim

$$w = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} = \frac{\sigma_2(\sigma_1 + \sigma_2)}{(\sigma_1 + \sigma_2)^2} = \frac{a}{a + b}.$$

Quan $\rho_{12} = 1$, de l'estudi fet a la secció anterior, i suposant que $\sigma_1 \neq \sigma_2$, obtenim

$$w = \frac{-\sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{-\sigma_2(\sigma_1 - \sigma_2)}{(\sigma_1 - \sigma_2)^2} = \frac{a}{a + b}.$$

Finalment, quan $\rho_{12} \in (-1, 1)$, trobarem el mínim de σ_{ω} derivant la variància

$$\sigma_{\omega}^2 = w^2 \sigma_1^2 + (1-w)^2 \sigma_2^2 + 2w(1-w)\rho_{12}\sigma_1\sigma_2.$$

Derivem en funció de w i igualem a zero:

$$2w\sigma_1^2 - 2(1-w)\sigma_2^2 + 2(1-w)\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 - 2w\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 = 0.$$

Aïllant w en l'equació obtenim el resultat desitjat. Faltarà només comprovar que es tracta d'un mínim. Per això utilitzarem la segona derivada i veurem que és estrictament positiva:

$$\begin{aligned} 2\sigma_1^2 + 2\sigma_2^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 &= 2\sigma_1^2 + 2\sigma_2^2 - 4\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 > 2\sigma_1^2 + 2\sigma_2^2 - 4\sigma_1\sigma_2 \\ &= 2(\sigma_1 - \sigma_2)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

□

A continuació donarem aquest resultat en forma matricial.

Corol·lari 3.4.2. *Els pesos de la cartera de mínima variància $\omega_{min} = (w, 1-w)$ es poden expressar matricialment com*

$$\omega_{min} = \frac{C^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}^T C^{-1} \mathbf{1}},$$

on C és la matriu de covariances i $\mathbf{1}$ representa el vector $(1, 1)$.

Demostració. Per demostrar-ho desenvoluparem aquesta expressió i veurem que és equivalent al resultat anterior.

$$C^{-1} = \frac{1}{\det C} \begin{bmatrix} \sigma_2^2 & -\sigma_{12} \\ -\sigma_{12} & \sigma_1^2 \end{bmatrix}.$$

$$C^{-1}\mathbf{1} = \frac{1}{\det C} \begin{bmatrix} \sigma_2^2 - \sigma_{12} \\ \sigma_1^2 - \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det C} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{1}^T C^{-1} \mathbf{1} = \mathbf{1}^T \frac{1}{\det C} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \frac{1}{\det C} (a + b).$$

Hem utilitzat el fet que $\sigma_{12} = \rho_{12}\sigma_1\sigma_2$. Dividint les dues últimes equacions obtenim que l'expressió matricial és equivalent a la fórmula donada a la proposició anterior. □

3.5 Cartera de mercat

Fins ara ens hem centrat en carteres formades per dos actius. Ara volem considerar com el paper dels bons afectaria la nostra cartera de dos actius.

Com s'ha explicat al capítol anterior, els bons es poden veure de manera simplificada com un actiu sense risc amb retorn R . Suposem que la nostra cartera de dos actius està

formada per un actiu i per un bo. L'actiu té un retorn esperat μ_1 i una variància del retorn σ_1^2 . El bo té un retorn esperat $\mu_2 = R$ i una variància igual a $\sigma_2^2 = 0$. Llavors el conjunt assolible estarà definit per la següent corba parametritzada:

$$\mu_\omega = w\mu_1 + (1-w)\mu_2 = w\mu_1 + (1-w)R,$$

$$\sigma_\omega^2 = w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w(1-w)\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 = w^2\sigma_1^2.$$

D'on es dedueix que

$$\sigma_\omega = |w|\sigma_1.$$

Pels mateixos arguments que hem utilitzat a la secció 3.3 per deduir la forma del conjunt assolible, podem veure que es tracta de la recta de la Figura 3.2.

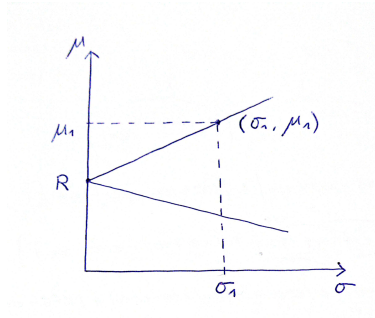


Figura 3.2: Recta de l'actiu sense risc

Suposem ara que tenim una cartera formada per dos actius amb risc, i que el conjunt assolible es troba en el cas on té forma d'hipèrbola. Suposem també que el retorn de la cartera de mínima variància, μ_{min} , és més elevat que el retorn sense risc, R . Això és una suposició raonable ja que, si no, no tindria sentit buscar la cartera de mínima variància, ja que podríem invertir directament en l'actiu sense risc, que la dominaria.

En aquest context, podem buscar el conjunt assolible que es donaria si poguessim invertir tant en els dos actius amb risc com en l'actiu sense risc. Llavors, per tots els arguments que s'han donat, el conjunt assolible serien tots els punts de la hipèrbola i, a més, les rectes que uneixen aquests punts amb el punt que representa l'actiu sense risc.

Anomenarem cartera de mercat al punt de la hipèrbola que fa que el pendent de la recta que l'uneix amb el punt de l'actiu sense risc sigui màxim. Com que hem suposat $R < \mu_{min}$, llavors la cartera de mercat existeix i és única. Denotarem aquesta cartera com a MP (Market Portfolio en anglès). El fet que el pendent d'aquesta recta sigui el màxim implica que és tangent a la hipèrbola.

Podem observar tot el que s'ha anat mencionant a la Figura 3.3.

La recta de màxim pendent s'anomena recta del mercat de capitals. La denotarem per CML (Capital Market Line en anglès). Siguin μ_{ω_m} i σ_{ω_m} el retorn esperat i la desviació típica de la cartera de mercat, llavors la recta del mercat de capitals es pot expressar com

$$\mu = R + \frac{\mu_{\omega_m} - R}{\sigma_{\omega_m}} \sigma,$$

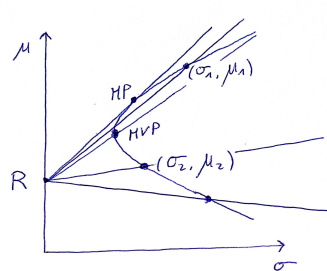


Figura 3.3: Carteres amb l'actiu sense risc

per $\sigma \geq 0$. És immediat comprovar que l'actiu sense risc i la cartera de mercat pertanyen a aquesta recta. És important comentar que la recta del mercat de capitals només contempla les carteres formades per l'actiu sense risc i la cartera de mercat quan el pes de la cartera de mercat és positiu. Les carteres d'aquest tipus quan el pes de la cartera de mercat és negatiu continuarien la recta però amb el pendent canviat de signe. Això es dedueix de l'anàlisi que hem donat del conjunt assolible i de la Figura 3.2. A més, per les propietats de la hipèrbola, sabem que aquesta recta quedarà a l'esquerra de qualsevol cartera que poguem construir. És a dir, per a qualsevol retorn esperat, la cartera amb mínima variància es construeix a partir de l'actiu sense risc i la cartera de mercat. Ho observem a la figura 3.4, on anomenem r a aquesta recta.

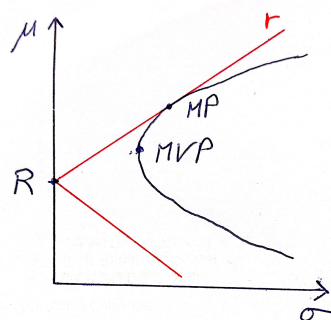


Figura 3.4: Recta del mercat de capitals

La importància de la recta del mercat de capitals és que qualsevol cartera possible està dominada per una cartera que pertany a la recta del mercat de capitals. I aquesta recta està formada per una combinació entre la cartera de mercat i l'actiu sense risc. Per tant, tot inversor hauria d'invertir en els dos actius amb risc en la proporció de la cartera de mercat, i llavors variar el pes invertit en l'actiu sense risc en funció de l'apetit al risc que tingui. Si augmentem la proporció invertida en l'actiu sense risc ens mourem a l'esquerra de la recta, i si augmentem la proporció de la cartera de mercat ens mourem a la dreta de la recta.

Anem ara a donar una fórmula per a calcular els pesos de la cartera de mercat.

Teorema 3.5.1. *Suposem que tenim dos actius diferents amb variances σ_1^2 i σ_2^2 , retorns esperats μ_1 i μ_2 , i covariància σ_{12} . Llavors la cartera de mercat es defineix pels pesos*

$w_m = (w, 1 - w)$ amb

$$w = \frac{c}{c+d}, \quad 1 - w = \frac{d}{c+d},$$

on

$$c = \sigma_2^2(\mu_1 - R) - \sigma_{12}(\mu_2 - R),$$

$$d = \sigma_1^2(\mu_2 - R) - \sigma_{12}(\mu_1 - R).$$

Demostració. Com hem dit, la cartera de mercat correspon al punt de la hipèrbola que maximitza el pendent de la recta que l'uneix amb el punt $(0, R)$. Sigui $(\sigma(w), \mu(w))$ un punt qualsevol de la hipèrbola, llavors volem trobar la w que maximitza la funció

$$s(w) = \frac{\mu(w) - R}{\sigma(w) - 0} = \frac{\mu(w) - R}{\sigma(w)}.$$

Trobarem aquest màxim igualant la derivada a zero:

$$s'(w) = \frac{\mu'(w)\sigma(w) - (\mu(w) - R)\sigma'(w)}{\sigma^2(w)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu'(w)\sigma(w) - (\mu(w) - R)\sigma'(w) = 0.$$

Anem a calcular les derivades $\mu'(w)$ i $\sigma'(w)$ per substituir-les a l'equació anterior:

$$\mu'(w) = \mu_1 - \mu_2,$$

$$\sigma'(w) = \frac{1}{2\sigma(w)}(2w\sigma_1^2 - 2(1-w)\sigma_2^2 + 2(1-2w)\sigma_{12}) = \frac{1}{\sigma(w)}(w\sigma_1^2 - (1-w)\sigma_2^2 + (1-2w)\sigma_{12}).$$

Substituint això a l'equació inicial, i multiplicant-la tota per $\sigma(w)$ per eliminar el denominador, obtenim

$$(\mu_1 - \mu_2)(w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w(1-w)\sigma_{12})$$

$$-(w\mu_1 + (1-w)\mu_2 - R)(w\sigma_1^2 - (1-w)\sigma_2^2 + (1-2w)\sigma_{12}) = 0.$$

Podem observar que els termes que contenen w^2 es cancel·len. Per tant, ens queda la següent equació lineal:

$$(\mu_1 - \mu_2)(\sigma_2^2 - 2w\sigma_2^2 + 2w\sigma_{12})$$

$$-((w\mu_1 - w\mu_2)(-\sigma_2^2 + \sigma_{12}) + (\mu_2 - R)(w\sigma_1^2 - (1-w)\sigma_2^2 + (1-2w)\sigma_{12})) = 0.$$

Desenvolupant aquesta equació i aïllant w obtenim els pesos de la proposició

$$w = \frac{\sigma_2^2(\mu_1 - R) - \sigma_{12}(\mu_2 - R)}{\sigma_2^2(\mu_1 - R) + \sigma_1^2(\mu_2 - R) - \sigma_{12}(\mu_1 + \mu_2 - 2R)} = \frac{c}{c+d},$$

$$1 - w = \frac{\sigma_1^2(\mu_2 - R) - \sigma_{12}(\mu_1 - R)}{\sigma_2^2(\mu_1 - R) + \sigma_1^2(\mu_2 - R) - \sigma_{12}(\mu_1 + \mu_2 - 2R)} = \frac{d}{c+d}.$$

No cal analitzar la segona derivada ja que per les propietats de la hipèrbola sabem que només hi haurà un extrem local i que aquest serà un màxim. $\square$

A continuació donarem aquest resultat en forma matricial.

Corol·lari 3.5.2. Els pesos de la cartera de mercat $\omega_m = (w, 1 - w)$ es poden expressar

matricialment com:

$$\omega_m = \frac{C^{-1}(\boldsymbol{\mu} - R\mathbf{1})}{\mathbf{1}^T C^{-1}(\boldsymbol{\mu} - R\mathbf{1})},$$

on C és la matriu de covariàncies, $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2)$ i $\mathbf{1} = (1, 1)$.

Demostració. Per demostrar-ho desenvoluparem aquesta expressió i veurem que és equivalent al resultat anterior.

$$C^{-1} = \frac{1}{\det C} \begin{bmatrix} \sigma_2^2 & -\sigma_{12} \\ -\sigma_{12} & \sigma_1^2 \end{bmatrix}.$$

$$C^{-1}(\boldsymbol{\mu} - R\mathbf{1}) = \frac{1}{\det C} \begin{bmatrix} \sigma_2^2(\mu_1 - R) - \sigma_{12}(\mu_2 - R) \\ \sigma_1^2(\mu_2 - R) - \sigma_{12}(\mu_1 - R) \end{bmatrix} = \frac{1}{\det C} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{1}^T C^{-1}(\boldsymbol{\mu} - R\mathbf{1}) = \mathbf{1}^T \frac{1}{\det C} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \frac{1}{\det C} (c + d).$$

Dividint les dues últimes equacions obtenim que l'expressió matricial és equivalent a la fórmula donada a la proposició anterior. $\square$

Amb aquest resultat acabem aquest capítol. En el següent capítol, en comptes d'estudiar només carteres de dos actius, estudiarem carteres de múltiples actius. Veurem que les fórmules matricials que hem obtingut en aquest capítol per obtenir les carteres de mínima variància i de mercat es poden generalitzar per al cas de múltiples actius.

Capítol 4

Carteres de múltiples actius

Hem vist en el capítol anterior quina forma pren el conjunt assolible en el pla desviació típica-esperança quan tenim una cartera formada per dos actius. També hem analitzat què passa quan afegim un actiu sense risc, i com això dóna lloc a la cartera de mercat i a la recta del mercat de capitals. I en aquest context hem donat fórmules per calcular les carteres de mínima variància i de mercat.

L'objectiu d'aquest capítol serà veure com aquests càlculs es poden generalitzar per al cas de múltiples actius. En el cas de dos actius, els pesos es donaven en funció d'una variable. És a dir, els pesos es podien donar de la forma $(w_1, w_2) = (w, 1 - w)$, només en funció de w . Això provenia de la restricció $w_1 + w_2 = 1$. La diferència principal serà que ara els pesos no estaran determinats per una sola variable. Així doncs, tindrem pesos $(w_1, \dots, w_n)$ amb la restricció $w_1 + \dots + w_n = 1$. De manera similar, en el cas de carteres d'arbitratge, tindrem $W_1 + \dots + W_n = 0$.

Per a poder trobar les carteres de mínima variància i de mercat en carteres de múltiples actius necessitarem trobar màxims i mínims funcions de diverses variables. Per trobar-los utilitzarem els multiplicadors de Lagrange.

4.1 Retorn i variància d'una cartera de múltiples actius

Pels mateixos arguments que vam utilitzar en el capítol anterior, una cartera de n actius es pot expressar a través dels seus pesos $\boldsymbol{\omega} = (w_1, \dots, w_n)$ amb la restricció $w_1 + \dots + w_n = 1$. Aquesta restricció la podem escriure com $\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{1} = 1$ on $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$ és un vector de dimensió n . En el cas de carteres d'arbitratge, si $\mathbf{W} = (W_1, \dots, W_n)$, la restricció serà $W_1 + \dots + W_n = 0$, que podem escriure com $\mathbf{W}^T \mathbf{1} = 0$.

Els actius de la cartera tindran retorns $K_1, \dots, K_n$, que seran variables aleatòries. I els retorns esperats d'aquests actius seran $\mu_1, \dots, \mu_n$, on $\mu_j = \mathbb{E}(K_j)$ per $j = 1, \dots, n$. Utilitzarem el vector $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ per als retorns esperats.

La matriu de covariances serà una matriu $n \times n$ simètrica de la forma

$$C = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1n} & \sigma_{2n} & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix}.$$

Les igualtats següents es poden demostrar de manera anàloga a les proposicions 3.1.2 i 3.1.4:

$$K_{\omega} = \sum_{j=1}^n w_j K_j,$$

$$B_{\omega} = \sum_{j=1}^n w_j K_j.$$

Com en el cas de dos actius, de moment suposarem que no tenim carteres d'arbitratge. És a dir, suposarem que $V_{(x_1, x_2)}(0) \neq 0$.

Ara ja podem trobar fórmules per expressar el retorn esperat i la variància del retorn d'una cartera de n actius.

Proposició 4.1.1. *El retorn esperat $\mu_{\omega} = \mathbb{E}(K_{\omega})$ i la variància del retorn $\sigma_{\omega}^2 = \text{Var}(K_{\omega})$ d'una cartera de n actius amb pesos $\omega = (w_1, \dots, w_n)$ es poden expressar com*

$$\mu_{\omega} = \omega^T \mu, \quad \sigma_{\omega}^2 = \omega^T C \omega.$$

Demostració. Utilitzant la linealitat de l'esperança, tenim que

$$\mu_{\omega} = \mathbb{E}(K_{\omega}) = \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^n w_j K_j\right) = \sum_{j=1}^n w_j \mathbb{E}(K_j) = \sum_{j=1}^n w_j \mu_j = \omega^T \mu.$$

Utilitzant la bilinearitat de la covariància, tenim que

$$\begin{aligned} \sigma_{\omega}^2 &= \text{Var}(K_{\omega}) = \text{Cov}(K_{\omega}, K_{\omega}) = \text{Cov}\left(\sum_{j=1}^n w_j K_j, \sum_{k=1}^n w_k K_k\right) \\ &= \sum_{j=1, k=1}^n w_j w_k \text{Cov}(K_j, K_k) = \sum_{j=1, k=1}^n w_j w_k \sigma_{jk} = \omega^T C \omega. \end{aligned}$$

□

Es pot observar que la fórmula que acabem de donar per calcular la variància és un cas particular del resultat següent, que ens serà útil més endavant:

Proposició 4.1.2. *Siguin dues carteres de múltiples actius definides pels pesos*

$$w_A = (w_{A1}, \dots, w_{An}),$$

$$w_B = (w_{B1}, \dots, w_{Bn}).$$

Llavors la covariància dels seus retorns es pot expressar de la forma

$$Cov(K_{w_A}, K_{w_B}) = \omega_A^T C \omega_B .$$

Demostració. De manera anàloga a la demostració anterior:

$$\begin{aligned} Cov(K_{w_A}, K_{w_B}) &= Cov \left(\sum_{j=1}^n w_{Aj} K_j, \sum_{k=1}^n w_{Bk} K_k \right) = \sum_{j=1, k=1}^n w_{Aj} w_{Bk} Cov(K_j, K_k) \\ &= \sum_{j=1, k=1}^n w_{Aj} w_{Bk} \sigma_{jk} = \omega_A^T C \omega_B . \end{aligned}$$

□

4.2 Cartera de mínima variància

Amb els resultats anteriors ja podem buscar quina serà la cartera de mínima variància. Com s'ha explicat, per trobar aquest mínim haurem d'utilitzar els multiplicadors de Lagrange. També utilitzarem el mètode dels multiplicadors de Lagrange per trobar la cartera de mercat en les seccions posteriors.

Per no fer les demostracions massa confuses, enunciaré un lema que ens donarà els gradients del retorn esperat i de la variància del retorn. Això ens estalviarà feina quan apliquem els multiplicadors de Lagrange al llarg d'aquest capítol. També calcularem la Hessiana de la variància, que utilitzarem per veure que el candidat a mínim sigui efectivament un mínim i no un màxim o punt de sella.

Lema 4.2.1. *Els gradients del retorn esperat $\mu_\omega = \omega^T \mu$ i la variància del retorn $\sigma_\omega^2 = \omega^T C \omega$ compleixen:*

$$\nabla(\omega^T \mu) = \mu ,$$

$$\nabla(\omega^T C \omega) = 2C\omega .$$

A més, la Hessiana de la variància $\sigma_\omega^2 = \omega^T C \omega$ és igual a $2C$.

Demostració. Comencem demostrant la primera igualtat. Com que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial w_i}(\omega^T \mu) &= \frac{\partial}{\partial w_i}(w_1 \mu_1 + \dots + w_n \mu_n) = \mu_i \\ \Rightarrow \nabla(\omega^T \mu) &= \left(\frac{\partial}{\partial w_1}(\omega^T \mu), \dots, \frac{\partial}{\partial w_n}(\omega^T \mu) \right) = (\mu_1, \dots, \mu_n) = \mu . \end{aligned}$$

Ara passem a demostrar la segona igualtat.

$$\frac{\partial}{\partial w_i}(\omega^T C \omega) = \frac{\partial}{\partial w_i} \left(\sum_{j=1, k=1}^n w_j w_k \sigma_{jk} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial w_i} \left(w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{k \neq i} w_i w_k \sigma_{ik} + \sum_{j \neq i} w_j w_i \sigma_{ji} + \sum_{j \neq i, k \neq i} w_j w_k \sigma_{jk} \right) \\
&= 2w_i \sigma_i^2 + \sum_{k \neq i} w_k \sigma_{ik} + \sum_{j \neq i} w_j \sigma_{ji} + 0 = 2 \sum_{k=1}^n w_k \sigma_{ik} \\
&\Rightarrow \nabla(\omega^T C \omega) = \left(\frac{\partial}{\partial w_1}(\omega^T C \omega), \dots, \frac{\partial}{\partial w_n}(\omega^T C \omega) \right) \\
&= \left(2 \sum_{k=1}^n w_k \sigma_{1k}, \dots, 2 \sum_{k=1}^n w_k \sigma_{nk} \right) = 2 \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1n} & \sigma_{2n} & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = 2C\omega.
\end{aligned}$$

Finalment calcularem la Hessiana, diguem-li H , de la variància del retorn.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial w_i} \frac{\partial}{\partial w_j}(\omega^T C \omega) &= \frac{\partial}{\partial w_i} \left(2 \sum_{k=1}^n w_k \sigma_{jk} \right) = 2\sigma_{ij} \\
\Rightarrow H &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial w_1} \frac{\partial}{\partial w_1}(\omega^T C \omega) & \frac{\partial}{\partial w_1} \frac{\partial}{\partial w_2}(\omega^T C \omega) & \cdots & \frac{\partial}{\partial w_1} \frac{\partial}{\partial w_n}(\omega^T C \omega) \\ \frac{\partial}{\partial w_2} \frac{\partial}{\partial w_1}(\omega^T C \omega) & \frac{\partial}{\partial w_2} \frac{\partial}{\partial w_2}(\omega^T C \omega) & \cdots & \frac{\partial}{\partial w_2} \frac{\partial}{\partial w_n}(\omega^T C \omega) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial w_n} \frac{\partial}{\partial w_1}(\omega^T C \omega) & \frac{\partial}{\partial w_n} \frac{\partial}{\partial w_2}(\omega^T C \omega) & \cdots & \frac{\partial}{\partial w_n} \frac{\partial}{\partial w_n}(\omega^T C \omega) \end{bmatrix} \\
&= 2 \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1n} & \sigma_{2n} & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix} = 2C.
\end{aligned}$$

□

Després d'això ja podem trobar els pesos de la cartera de mínima variància. Podrem observar que la fórmula s'escriu matricialment igual que en el cas de dos actius.

Teorema 4.2.2. *Els pesos de la cartera de mínima variància $\omega_{min} = (w_1, \dots, w_n)$ es poden expressar matricialment com*

$$\omega_{min} = \frac{C^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}^T C^{-1} \mathbf{1}},$$

on C és la matriu de covariances i $\mathbf{1}$ representa el vector $(1, \dots, 1)$.

Demostració. Volem trobar el mínim de la variància $\sigma_\omega^2 = \omega^T C \omega$ sota la restricció $\omega^T \mathbf{1} = 1$. La equació dels multiplicadors de Lagrange és la següent:

$$\nabla(\omega^T C \omega) - \lambda \nabla(\omega^T \mathbf{1} - 1) = 0.$$

Per el Lema 4.2.1, sabem que és equivalent a

$$2C\omega - \lambda \mathbf{1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{\lambda}{2} C^{-1} \mathbf{1}. \quad (4.2.1)$$

Multiplicant pel vector $\mathbf{1}^T$ per l'esquerra i aplicant el fet que $\omega^T \mathbf{1} = 1$ obtenim

$$1 = \mathbf{1}^T \omega = \mathbf{1}^T \frac{\lambda}{2} C^{-1} \mathbf{1} = \frac{\lambda}{2} \mathbf{1}^T C^{-1} \mathbf{1} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{2}{\mathbf{1}^T C^{-1} \mathbf{1}}.$$

Substituint λ a l'equació (4.2.1) obtenim la fórmula desitjada

$$\omega = \frac{\lambda}{2} C^{-1} \mathbf{1} = \frac{C^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}^T C^{-1} \mathbf{1}}.$$

Faltarà només comprovar que es tracta d'un mínim. Pel Lema 4.2.1, sabem que la Hessiana de la variància és $2C$. La matriu C expressa la variància de les carteres, que sempre són positives. Per tant, la matriu C és semidefinida positiva. Això implica que la matriu $2C$ també ho és. Per tant, la Hessiana és semidefinida positiva i el vector ω que hem obtingut minimitza la variància. $\square$

4.3 Línia de mínima variància i teorema dels dos fons

Al capítol anterior, quan representàvem el conjunt assolible d'una cartera de dos actius al pla desviació típica-esperança, vam veure que per cada esperança hi havia una única cartera. És a dir, no hi havia dos punts diferents del conjunt assolible amb la mateixa esperança. Això serà diferent en el cas de múltiples actius.

En el cas de dos actius la restricció $w_1 + w_2 = 1$ permetia expressar l'esperança com a funció lineal d'una sola w amb $(w_1, w_2) = (w, 1 - w)$. Això donava una única w , i per tant un únic valor de la variància. Però ara la restricció $w_1 + \dots + w_n = 1$ deixarà l'esperança com a funció lineal de $n - 1$ variables. Per tant, tindrem diverses combinacions de pesos amb la mateixa esperança però que poden donar lloc a variàncies diferents.

Com que ens interessa invertir en les carteres que no estiguin dominades, per cada valor de l'esperança buscarem el pes que minimitza la variància. És a dir, volem trobar el mínim de la variància $\sigma_\omega^2 = \omega^T C \omega$ sota les restriccions $\omega^T \mathbf{1} = 1$ i $\omega^T \mu = m$. Enunciem el següent teorema que ens donarà una solució a aquest problema de minimització.

Teorema 4.3.1. *Sigui M una matriu 2×2 de la forma*

$$M = \begin{bmatrix} \mu^T C^{-1} \mu & \mu^T C^{-1} \mathbf{1} \\ \mu^T C^{-1} \mathbf{1} & \mathbf{1}^T C^{-1} \mathbf{1} \end{bmatrix}.$$

Si C i M són invertibles, llavors la solució del problema de minimització que acabem de plantejar està determinada pels pesos

$$\omega = \frac{1}{\det(M)} C^{-1} (\det(M_1) \mu + \det(M_2) \mathbf{1}),$$

on

$$M_1 = \begin{bmatrix} m & \boldsymbol{\mu}^T C^{-1} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1}^T C^{-1} \mathbf{1} \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}^T C^{-1} \boldsymbol{\mu} & m \\ \boldsymbol{\mu}^T C^{-1} \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}.$$

Demostració. Utilitzarem els multiplicadors de Lagrange. Volem trobar el mínim de la variància $\sigma_{\boldsymbol{\omega}}^2 = \boldsymbol{\omega}^T C \boldsymbol{\omega}$ sota les restriccions $\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{1} = 1$ i $\boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\mu} = m$. L'equació dels multiplicadors de Lagrange és la següent:

$$\nabla(\boldsymbol{\omega}^T C \boldsymbol{\omega}) - \lambda_1 \nabla(\boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\mu} - m) - \lambda_2 \nabla(\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{1} - 1) = 0.$$

Utilitzant el Lema 4.2.1, sabem que aquesta igualtat és equivalent a

$$2C\boldsymbol{\omega} - \lambda_1 \boldsymbol{\mu} - \lambda_2 \mathbf{1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \lambda_1 C^{-1} \boldsymbol{\mu} + \frac{1}{2} \lambda_2 C^{-1} \mathbf{1}. \quad (4.3.1)$$

Substituint aquesta expressió de $\boldsymbol{\omega}$ a les restriccions obtenim les equacions

$$\boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \lambda_1 \boldsymbol{\mu}^T C^{-1} \boldsymbol{\mu} + \frac{1}{2} \lambda_2 \boldsymbol{\mu}^T C^{-1} \mathbf{1} = m,$$

$$\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{1} = \mathbf{1}^T \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \lambda_1 \mathbf{1}^T C^{-1} \boldsymbol{\mu} + \frac{1}{2} \lambda_2 \mathbf{1}^T C^{-1} \mathbf{1} = 1.$$

Com que la matriu M és invertible, sabem que aquest sistema té solució. La resolució d'aquest sistema de dues incògnites no es donarà pas a pas per no allargar la demostració, però es pot comprovar que la solució és

$$\lambda_1 = 2 \frac{m(\mathbf{1}^T C^{-1} \mathbf{1}) - \boldsymbol{\mu}^T C^{-1} \mathbf{1}}{(\boldsymbol{\mu}^T C^{-1} \boldsymbol{\mu})(\mathbf{1}^T C^{-1} \mathbf{1}) - 2(\boldsymbol{\mu}^T C^{-1} \mathbf{1})} = 2 \frac{\det(M_1)}{\det(M)},$$

$$\lambda_2 = 2 \frac{\boldsymbol{\mu}^T C^{-1} \boldsymbol{\mu} - m(\boldsymbol{\mu}^T C^{-1} \mathbf{1})}{(\boldsymbol{\mu}^T C^{-1} \boldsymbol{\mu})(\mathbf{1}^T C^{-1} \mathbf{1}) - 2(\boldsymbol{\mu}^T C^{-1} \mathbf{1})} = 2 \frac{\det(M_2)}{\det(M)}.$$

Substituint aquestes expressions de λ_1 i λ_2 a (4.3.1) obtenim la fórmula desitjada

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \lambda_1 C^{-1} \boldsymbol{\mu} + \frac{1}{2} \lambda_2 C^{-1} \mathbf{1} = \frac{1}{\det(M)} C^{-1} (\det(M_1) \boldsymbol{\mu} + \det(M_2) \mathbf{1}).$$

Faltarà només comprovar que es tracta d'un mínim. Pel Lema 4.2.1, sabem que la Hessiana de la variància és $2C$. La matriu C expressa la variància de les carteres, que sempre són positives. Per tant, la matriu C és semidefinida positiva. Això implica que la matriu $2C$ també ho és. Per tant, la Hessiana és semidefinida positiva i el vector $\boldsymbol{\omega}$ que hem obtingut minimitza la variància. $\square$

Com que ara, per cada valor de m , hem vist que existeix una única cartera que sigui solució al problema que hem donat, sabem que el conjunt de les carteres que minimitzen la variància per cada valor m formen una línia en el pla desviació típica-esperança. Aquesta línia l'anomenarem **línia de mínima variància**. La denotarem MVL (minimum variance line en anglès).

Tot això ho podem visualitzar a la Figura 4.1, on la cartera de mínima variància (MVP) és solució al problema de minimització

mínim valor de $\omega^T C \omega$ restringit a $\omega^T \mathbf{1} = 1$,

i la cartera A és solució al problema de minimització

minim valor de $\omega^T C \omega$ restringit a $\omega^T \mathbf{1} = 1$ i a $\omega^T \mu = m$,

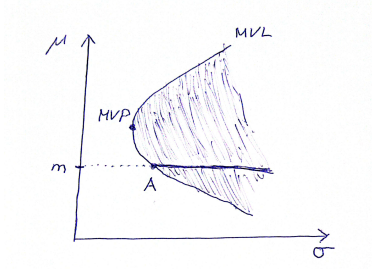


Figura 4.1: Línia de Mínima Variància

El teorema que acabem de demostrar ens serà molt útil posteriorment, però la fórmula que hem donat és molt llarga i complicada. Donarem un resultat que la farà més senzilla d'aplicar.

Corol·lari 4.3.2. *Existeixen dos vectors $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$, que depenen només de C i μ , tals que els pesos de la cartera a la línia de mínima variància que té esperança m es poden expressar com*

$$\omega = m\mathbf{a} + \mathbf{b}.$$

Demostració. Per el teorema 4.3.1, tenim que

$$\det(M_1) = m\mathbf{1}^T C^{-1} \mathbf{1} - \mu^T C^{-1} \mathbf{1},$$

$$\det(M_2) = \mu^T C^{-1} \mu - m\mu^T C^{-1} \mathbf{1}.$$

Definim $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ com

$$\mathbf{a} = \frac{1}{\det(M)} C^{-1} \left((\mathbf{1}^T C^{-1} \mathbf{1}) \mu - (\mu^T C^{-1} \mathbf{1}) \mathbf{1} \right),$$

$$\mathbf{b} = \frac{1}{\det(M)} C^{-1} \left((\mu^T C^{-1} \mu) \mathbf{1} - (\mu^T C^{-1} \mathbf{1}) \mu \right).$$

Observem que aquests valors de $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ fan que es compleixi la igualtat

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{\det(M)} C^{-1} \left(\det(M_1) \mu + \det(M_2) \mathbf{1} \right) \\ &= \frac{1}{\det(M)} C^{-1} \left((m\mathbf{1}^T C^{-1} \mathbf{1} - \mu^T C^{-1} \mathbf{1}) \mu + (\mu^T C^{-1} \mu - m\mu^T C^{-1} \mathbf{1}) \mathbf{1} \right) \\ &= \frac{1}{\det(M)} C^{-1} \left(m((\mathbf{1}^T C^{-1} \mathbf{1}) \mu - (\mu^T C^{-1} \mathbf{1}) \mathbf{1}) + ((\mu^T C^{-1} \mu) \mathbf{1} - (\mu^T C^{-1} \mathbf{1}) \mu) \right) \\ &= m\mathbf{a} + \mathbf{b}. \end{aligned}$$

□

La importància del corol·lari que acabem de demostrar és que ens mostra que els pesos de la línia de mínima variància s'expressen com a combinació lineal dels vectors $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$. Com a curiositat, podem observar que el vector $\mathbf{b}$ defineix els pesos de la cartera de la línia de mínima variància amb retorn esperat 0.

Aquestes observacions es poden ampliar amb el següent resultat, que es coneix amb el nom de teorema dels dos fons.

Corol·lari 4.3.3. *Siguin ω_1 i ω_2 els vectors de pesos de dues carteres diferents a la línia de mínima variància. Llavors els pesos ω de qualsevol cartera a la línia de mínima variància es poden expressar com una mitjana ponderada dels pesos ω_1 i ω_2 . És a dir, existeix α tal que $\omega = \alpha\omega_1 + (1 - \alpha)\omega_2$.*

Demostració. El fet que les carteres siguin diferents i que hi hagi una sola cartera a la línia de mínima variància per cada esperança, implica que els retorns esperats de les carteres ω_1 i ω_2 són diferents. Per tant, sabem que existeix α tal que

$$\mu_\omega = \alpha\mu_{\omega_1} + (1 - \alpha)\mu_{\omega_2} .$$

Aïllant obtenim que

$$\alpha = \frac{\mu_\omega - \mu_{\omega_2}}{\mu_{\omega_1} - \mu_{\omega_2}} .$$

Com que les dues carteres ω_1 i ω_2 pertanyen a la línia de mínima variància, sabem que compleixen

$$\omega_1 = \mu_{\omega_1}\mathbf{a} + \mathbf{b} ,$$

$$\omega_2 = \mu_{\omega_2}\mathbf{a} + \mathbf{b} .$$

D'aquí obtenim que

$$\alpha\omega_1 + (1 - \alpha)\omega_2 = (\alpha\mu_{\omega_1} + (1 - \alpha)\mu_{\omega_2})\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mu_\omega\mathbf{a} + \mathbf{b} .$$

És a dir, la ponderació $(\alpha, 1 - \alpha)$ dels pesos ω_1 i ω_2 dona lloc a una cartera que pertany a la línia de mínima variància i té esperança μ_ω . Però sabem que la cartera ω també pertany a la línia de mínima variància i té esperança μ_ω . Com que, per cada valor de l'esperança, només hi ha una cartera a la línia de mínima variància, deduïm que

$$\omega = \alpha\omega_1 + (1 - \alpha)\omega_2 .$$

□

Aquest resultat es coneix amb el nom de teorema dels dos fons perquè ens diu que qualsevol cartera a la línia de mínima variància es pot construir a partir de dues carteres que hi pertanyin. Només ens farà falta trobar dues carteres que hi pertanyin per construir-la. Sabem que la cartera de mínima variància hi pertany. La utilitzarem com a primera cartera. Per a la segona cartera podríem utilitzar la cartera amb pesos $\mathbf{b}$, que hem mencionat abans que hi pertany i té retorn esperat 0. No obstant, acabarem utilitzant la cartera de mercat com a segona cartera, ja que el seu càlcul és més senzill. En donarem la fórmula a la següent secció.

Tot i així, abans de passar a analitzar la cartera de mercat deduirem la forma de la línia de mínima variància (MVL). Per això recordarem el resultat del Teorema 3.3.1, que ens deia que el conjunt assolible de dos actius amb esperances diferents i coeficient de correlació de Pearson entre -1 i 1 definia una hipèrbola al pla desviació típica-esperança. Fixem-nos que podem tractar les dues carteres que construeixen la MVL com si fossin actius normals. Això es deu a que les úniques dades que utilitzem en la demostració són l'esperança i la variància del retorn, sense importar si prové d'un actiu simple o d'una cartera. Per tant, si el coeficient de correlació de Pearson dels retorns de les dues carteres que defineixen la MVL està entre -1 i 1, sabem que la línia de mínima variància és una hipèrbola en virtut del Teorema 3.3.1.

4.4 Cartera de mercat

Fins ara, hem pogut observar que els resultats del cas de dos actius són molt similars al cas de múltiples actius. La MVL és una hipèrbola en els dos casos. La diferència és que en el cas de dos actius aquesta es construeix a partir de dos actius, i en el cas de múltiples actius aquesta es construeix a partir de dues carteres. També s'ha de dir que en el cas de múltiples actius, a diferència del de dos, podem construir carteres que es situen a la dreta de la MVL. Tot i que això no ens afectarà.

El nostre objectiu ara serà trobar la cartera de mercat. Pel que s'ha anat mencionant, podríem utilitzar la cartera de mínima variància i la cartera de pesos $\mathbf{b}$ com si fossin dos actius, calcular les seves esperances, variàncies i covariància dels seus retorns, i llavors aplicar la fórmula de dos actius per trobar la cartera de mercat. Tot i així, per fer-ho tot més fàcil, donarem una fórmula que ens permetrà calcular directament la cartera de mercat a partir dels n actius.

Teorema 4.4.1. *Suposem que el retorn sense risc R és més petit que el retorn esperat de la cartera de mínima variància μ_{min} . Suposem que tenim n actius. Llavors els pesos de la cartera de mercat $\boldsymbol{\omega}_m = (w_1, \dots, w_n)$ es poden expressar matricialment com*

$$\boldsymbol{\omega}_m = \frac{C^{-1}(\boldsymbol{\mu} - R\mathbf{1})}{\mathbf{1}^T C^{-1}(\boldsymbol{\mu} - R\mathbf{1})},$$

on C és la matriu $n \times n$ de covariàncies, $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ i $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$.

Demostració. Pel que s'ha mencionat, la línia de mínima variància (MVL) és una hipèrbola. Com que R és més petit que μ_{min} , llavors, igual que en el cas de dos actius, existeix un únic punt de la hipèrbola que maximitza el pendent de la línia que l'uneix amb el punt $(0, R)$ del pla desviació típica-esperança. Escrivim aquest pendent en funció dels pesos $\boldsymbol{\omega}$, i busquem el seu màxim

$$\frac{\mu_{\boldsymbol{\omega}} - R}{\sigma_{\boldsymbol{\omega}}} = \frac{\boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\mu} - R}{\sqrt{\boldsymbol{\omega}^T C \boldsymbol{\omega}}}$$

Com que $\boldsymbol{\omega}$ és un vector, aquest pendent és una funció de diverses variables. Per trobar un màxim, utilitzarem els multiplicadors de Lagrange, amb la restricció $\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{1} = 1$. L'equació

dels multiplicadors de Lagrange és la següent:

$$\nabla \left(\frac{\omega^T \mu - R}{\sqrt{\omega^T C \omega}} \right) - \lambda \nabla (\omega^T \mathbf{1} - 1) = 0 .$$

Utilitzant el Lema 4.2.1 per calcular els gradients, obtenim

$$\frac{\mu \sqrt{\omega^T C \omega} - (\omega^T \mu - R) \frac{1}{2\sqrt{\omega^T C \omega}} 2C\omega}{\omega^T C \omega} - \lambda \mathbf{1} = 0 .$$

Podem fer més senzilla l'equació substituint $\omega^T C \omega$ per σ_ω^2 , i $\omega^T \mu$ per μ_ω .

$$\begin{aligned} & \frac{\mu \sigma_\omega - (\mu_\omega - R) \frac{1}{\sigma_\omega} C \omega}{\sigma_\omega^2} - \lambda \mathbf{1} = 0 \\ \Rightarrow & \mu \sigma_\omega - (\mu_\omega - R) \frac{1}{\sigma_\omega} C \omega - \lambda \sigma_\omega^2 \mathbf{1} = 0 \\ \Rightarrow & \frac{\mu_\omega - R}{\sigma_\omega^2} C \omega = \mu - \lambda \sigma_\omega \mathbf{1} . \end{aligned} \tag{4.4.1}$$

Ara aïllem λ utilitzant la restricció $\omega^T \mathbf{1} = 1$. Per fer-ho, multiplicarem per ω^T a l'esquerra dels dos costats de l'equació. Ens queda

$$\frac{\mu_\omega - R}{\sigma_\omega^2} \omega^T C \omega = \omega^T \mu - \lambda \sigma_\omega \omega^T \mathbf{1} \quad \Rightarrow \quad \mu_\omega - R = \mu_\omega - \lambda \sigma_\omega \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{R}{\sigma_\omega} .$$

Tornant a (4.4.1) i substituint λ per $\frac{R}{\sigma_\omega}$ ens queda

$$\frac{\mu_\omega - R}{\sigma_\omega^2} C \omega = \mu - \lambda \sigma_\omega \mathbf{1} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mu_\omega - R}{\sigma_\omega^2} C \omega = \mu - R \mathbf{1} .$$

Aïllant ω obtenim

$$\omega = \frac{C^{-1}(\mu - R \mathbf{1})}{\frac{\mu_\omega - R}{\sigma_\omega^2}} . \tag{4.4.2}$$

Semblaria que això no és un resultat definitiu, però ho serà degut al fet que el denominador és una constant. Veiem-ho multiplicant pel vector $\mathbf{1}^T$ a l'esquerra dels dos costats de l'equació

$$1 = \mathbf{1}^T \omega = \frac{\mathbf{1}^T C^{-1}(\mu - R \mathbf{1})}{\frac{\mu_\omega - R}{\sigma_\omega^2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mu_\omega - R}{\sigma_\omega^2} = \mathbf{1}^T C^{-1}(\mu - R \mathbf{1}) .$$

Substituint a (4.4.2) obtenim la igualtat desitjada

$$\omega_m = \frac{C^{-1}(\mu - R \mathbf{1})}{\mathbf{1}^T C^{-1}(\mu - R \mathbf{1})}$$

No cal analitzar la Hessiana ja que per les propietats de la hipèrbola sabem que només hi haurà un extrem local i que aquest serà un màxim. $\square$

Observem que les fórmules matricials de tant la cartera de mínima variància com la

cartera de mercat són iguals que en el cas de dos actius.

Per les similituds que hem comentat, la recta del mercat de capitals (CML) es defineix igual que en el cas de dos actius.

Finalment, acabem el capítol donant la parametrització de la línia de mínima variància en funció de les carteres de mínima variància i de mercat. De la mateixa manera que en el cas de dos actius, tenim que

$$\begin{aligned}\mu_{\omega} &= \alpha\mu_{\omega_{min}} + (1 - \alpha)\mu_{\omega_m} , \\ \sigma_{\omega}^2 &= \alpha^2\sigma_{\omega_{min}}^2 + (1 - \alpha)^2\sigma_{\omega_m}^2 + 2\alpha(1 - \alpha)\text{Cov}(K_{\omega_{min}}, K_{\omega_m}) .\end{aligned}$$

Aquesta expressió es pot acabar de simplificar utilitzant el següent resultat.

Proposició 4.4.2. *Per a qualsevol cartera ω es compleix que la covariància d'aquesta cartera amb la cartera de mínima variància és igual a la variància de la cartera de mínima variància. És a dir,*

$$\text{Cov}(K_{\omega_{min}}, K_{\omega}) = \sigma_{\omega_{min}}^2 .$$

Demostració. Utilitzarem la fórmula matricial de la cartera de mínima variància.

$$\text{Cov}(K_{\omega_{min}}, K_{\omega}) = \omega^T C \omega_{min} = \omega^T C \frac{C^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}^T C^{-1} \mathbf{1}} = \frac{\omega^T \mathbf{1}}{\mathbf{1}^T C^{-1} \mathbf{1}} = \frac{1}{\mathbf{1}^T C^{-1} \mathbf{1}} .$$

En particular, aquest resultat es compleix per a la cartera de mínima variància. Per tant,

$$\sigma_{\omega_{min}}^2 = \text{Cov}(K_{\omega_{min}}, K_{\omega_{min}}) = \frac{1}{\mathbf{1}^T C^{-1} \mathbf{1}} .$$

Utilitzant aquests dos resultats deduïm que

$$\text{Cov}(K_{\omega_{min}}, K_{\omega}) = \sigma_{\omega_{min}}^2 .$$

□

Podem aplicar aquest resultat a la parametrització que hem donat de la línia de mínima variància. És a dir, utilitzem la igualtat següent

$$\text{Cov}(K_{\omega_{min}}, K_{\omega_m}) = \sigma_{\omega_{min}}^2 .$$

La parametrització final de la línia de mínima variància és

$$\begin{aligned}\mu_{\omega} &= \alpha\mu_{\omega_{min}} + (1 - \alpha)\mu_{\omega_m} , \\ \sigma_{\omega}^2 &= \alpha^2\sigma_{\omega_{min}}^2 + (1 - \alpha)^2\sigma_{\omega_m}^2 + 2\alpha(1 - \alpha)\sigma_{\omega_{min}}^2 .\end{aligned}$$

Capítol 5

Model CAPM

Fins ara hem vist que, quan tenim una determinada cartera, podem obtenir una cartera que la domini invertint en la cartera de mercat i l'actiu sense risc en proporcions determinades. Aquest resultat es pot ampliar encara més.

Suposem que existeix un actiu sense risc amb retorn esperat R . Suposem que R és menor que $\mu_{\omega_{min}}$, la qual cosa implica que la cartera de mercat existeix. Llavors, per a cada cartera, podem construir una cartera amb el mateix retorn i menor variància a partir de la cartera de mercat i l'actiu sense risc. Això ho vam veure a la figura 3.4.

Suposem que tenim una cartera A amb retorn esperat m , i que volem reduir la desviació típica al mínim mantenint el mateix retorn esperat. La part de la desviació típica que es pot minimitzar s'anomena risc específic. És a dir, correspon a la desviació típica que es pot reduir invertint en la cartera de mercat i l'actiu sense risc en proporcions que mantinguin el retorn esperat m . L'altra part s'anomena risc sistemàtic, i correspon a la part de la desviació típica que segueix present tot i haver-la minimitzat. Ho observem a la figura 5.1, on E representa el risc específic i S el risc sistemàtic de la cartera A.

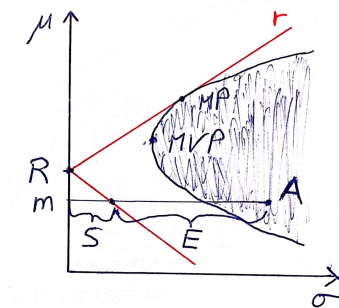


Figura 5.1: Risc Específic i Sistemàtic

5.1 Deducció de la fórmula CAPM

Centrem-nos primer en les carteres a la recta r . És a dir, a les carteres formades només per la cartera de mercat, amb pesos ω_m , i l'actiu sense risc. Pel que hem comentat, tota la seva desviació típica serà risc sistemàtic. Suposem que els pesos a la cartera de mercat i a l'actiu sense risc son x i $1 - x$ respectivament. La recta r parametritzada tindrà la forma

$$\begin{aligned}\mu_x &= x\mu_{\omega_m} + (1 - x)R, \\ \sigma_x^2 &= x^2\sigma_{\omega_m}^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma_x = |x|\sigma_{\omega_m}.\end{aligned}$$

Per tant, el seu risc sistemàtic serà $|x|\sigma_{\omega_m}$, i no tindrà risc específic. Observem que el risc sistemàtic d'aquestes carteres s'expressa com el risc sistemàtic de la cartera de mercat multiplicat per el coeficient $|x|$. Una manera alternativa de calcular aquest coeficient és a partir del que anomenarem coeficient beta, que definim com

$$\beta_x = \frac{Cov(K_x, K_{\omega_m})}{\sigma_{\omega_m}^2}.$$

Anem a veure que, a les carteres situades a la recta r , β i x son equivalents. Utilitzem la bilinealitat de la covariància.

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{Cov(K_x, K_{\omega_m})}{\sigma_{\omega_m}^2} = \frac{Cov(xK_{\omega_m} + (1 - x)R, K_{\omega_m})}{\sigma_{\omega_m}^2} \\ &= \frac{Cov(xK_{\omega_m}, K_{\omega_m})}{\sigma_{\omega_m}^2} = x \frac{Cov(K_{\omega_m}, K_{\omega_m})}{\sigma_{\omega_m}^2} = x \frac{\sigma_{\omega_m}^2}{\sigma_{\omega_m}^2} = x.\end{aligned}$$

Té sentit utilitzar la covariància de la nostra cartera amb la cartera de mercat, ja que justament el risc que anomenem sistemàtic és el que prové de variacions en la cartera de mercat i que, per tant, no es pot minimitzar. La igualtat $\beta = x$ ens permet reescriure la parametrització inicial de la recta r

$$\begin{aligned}\mu_x &= \beta_x\mu_{\omega_m} + (1 - \beta_x)R, \\ \sigma_x^2 &= \beta_x^2\sigma_{\omega_m}^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{\beta_x} = |\beta_x|\sigma_{\omega_m}.\end{aligned}$$

Observem que la primera igualtat es pot desenvolupar i obtenir

$$\mu_x = R + \beta_x(\mu_{\omega_m} - R).$$

Aquesta expressió es coneix amb el nom de fórmula CAPM. Tot i que ara només l'hem demostrat per les carteres a la recta r , veurem que és certa en general. Podem aïllar β_x i expressar-la en funció de les altres variables. Així, obtenim

$$\beta_x = \frac{\mu_x - R}{\mu_{\omega_m} - R}.$$

Per tant, per cada valor μ_x tenim un risc sistemàtic determinat pel coeficient β_x i les

condicions del mercat.

Passem ara a estudiar les carteres que no formen part de la recta r . La gràcia del coeficient beta és que ens segueix donant el coeficient de risc sistemàtic tot i que una cartera no es trobi a la recta r . Com que totes les carteres amb el mateix retorn esperat tenen el mateix risc sistemàtic, si veiem que totes les carteres amb el mateix retorn esperat tenen el mateix coeficient beta ho haurem demostrat. Ho veiem a la següent proposició.

Proposició 5.1.1. *Suposem que tenim una cartera A formada per proporcions s en l'actiu sense risc i $1 - s$ en els n actius del mercat. Suposem que els pesos invertits en els actius de mercat són $\omega = (w_1, \dots, w_n)$ amb $w_1 + \dots + w_n = 1$. El retorn de la nostra cartera serà $K_A = sR + (1 - s)K_\omega$. I el retorn esperat serà $\mu_A = sR + (1 - s)\mu_\omega$. Sigui x la cartera de la recta r tal que $\mu_x = \mu_A$, llavors es complirà que*

$$\beta_A = \beta_x.$$

És a dir, el coeficient

$$\beta_A = \frac{\text{Cov}(K_A, K_{\omega_m})}{\sigma_{\omega_m}^2}$$

ens donarà el coeficient de risc sistemàtic de la cartera A

Demostració. Per demostrar aquest resultat, utilitzarem la fórmula matricial que vam trobar per calcular els pesos de la cartera de mercat. Recordem que era

$$\omega_m = \frac{C^{-1}(\mu - R\mathbf{1})}{\mathbf{1}^T C^{-1}(\mu - R\mathbf{1})}.$$

També utilitzarem la Proposició 4.1.2 per calcular les covariances. Amb aquests resultats, i utilitzant les igualtats $\omega^T \mu = \mu_\omega$, $\omega_m^T \mu = \mu_{\omega_m}$ i $\omega^T \mathbf{1} = \omega_m^T \mathbf{1} = 1$, podem deduir que

$$\frac{\text{Cov}(K_\omega, K_{\omega_m})}{\sigma_{\omega_m}^2} = \frac{\text{Cov}(K_\omega, K_{\omega_m})}{\text{Cov}(K_{\omega_m}, K_{\omega_m})} = \frac{\omega^T C \omega_m}{\omega_m^T C \omega_m} = \frac{\omega^T (\mu - R\mathbf{1})}{\omega_m^T (\mu - R\mathbf{1})} = \frac{\mu_\omega - R}{\mu_{\omega_m} - R}.$$

Amb aquesta igualtat, ja podem veure que

$$\begin{aligned} \beta_A &= \frac{\text{Cov}(K_A, K_{\omega_m})}{\sigma_{\omega_m}^2} = \frac{\text{Cov}(sR + (1 - s)K_\omega, K_{\omega_m})}{\sigma_{\omega_m}^2} \\ &= (1 - s) \frac{\text{Cov}(K_\omega, K_{\omega_m})}{\sigma_{\omega_m}^2} = (1 - s) \frac{\mu_\omega - R}{\mu_{\omega_m} - R} = \frac{(1 - s)\mu_\omega - (1 - s)R}{\mu_{\omega_m} - R} \\ &= \frac{\mu_A - sR - (1 - s)R}{\mu_{\omega_m} - R} = \frac{\mu_A - R}{\mu_{\omega_m} - R} = \frac{\mu_x - R}{\mu_{\omega_m} - R} = \beta_x, \end{aligned}$$

on hem utilitzat la bilinealitat de la covariància i el fet que $(1 - s)\mu_\omega = \mu_A - sR$ i $\mu_x = \mu_A$.

□

Fixem-nos que durant la demostració també hem deduit que la fórmula del CAPM es

compleix per qualsevol actiu. Hem obtingut la igualtat

$$\beta_A = \frac{\mu_A - R}{\mu_{\omega_m} - R}.$$

Això és equivalent a la fórmula del CAPM

$$\mu_A = R + \beta_A(\mu_{\omega_m} - R).$$

El fet que totes les carteres amb el mateix retorn esperat tinguin el mateix coeficient β de risc sistemàtic permet construir la línia del mercat de valors. Aquesta línia, que anomenem SML (Security Market Line en anglès), es representa en el pla (β, μ) i la seva funció és la fórmula del CAPM. Per tant, és una recta que, per cada valor de β dona el retorn esperat μ de les carteres que tenen coeficient de risc sistemàtic igual a β .

5.2 Línia característica i estimació de β

La fórmula del CAPM es centra en els retorns esperats. En aquesta secció veurem que podem obtenir una expressió similar per als retorns. Considerem els retorns de la cartera A. Podem expressar-los com

$$K_A = R + \beta_A(K_{\omega_m} - R) + e_A,$$

on e_A és una variable aleatòria que dona els errors i es defineix com

$$e_A = K_A - (R + \beta_A(K_{\omega_m} - R)).$$

De la fórmula del CAPM deduem que

$$\mathbb{E}(e_A) = \mu_A - (R + \beta_A(\mu_{\omega_m} - R)) = 0.$$

El coeficient β_A té una propietat important. No només fa que $\mathbb{E}(e_A) = 0$, sinó que també fa que la variància d'aquests errors sigui mínima. És a dir, β_A minimitza $\text{Var}(e_A)$. Ho veurem a la següent proposició.

Proposició 5.2.1. *Suposem que tenim la cartera A mencionada anteriorment. Sigui e_A l'error definit com*

$$e_A = K_A - (R + \beta(K_{\omega_m} - R)),$$

per qualsevol valor β . Llavors la variància de l'error $\text{Var}(e_A)$ és mínima quan $\beta = \beta_A$, és a dir, quan

$$\beta = \frac{\text{Cov}(K_A, K_{\omega_m})}{\sigma_{\omega_m}^2}.$$

Demostració.

$$\text{Var}(e_A) = \text{Var}(K_A - (R + \beta(K_{\omega_m} - R))) = \text{Var}(K_A - \beta K_{\omega_m})$$

$$= \text{Var}(K_A) - 2\beta \text{Cov}(K_A, K_{\omega_m}) + \beta^2 \text{Var}(K_{\omega_m}) .$$

Això és una paràbola en funció de β . Igualant la derivada a zero tenim

$$\begin{aligned} -2\text{Cov}(K_A, K_{\omega_m}) + 2\beta \text{Var}(K_{\omega_m}) &= 0 \\ \Rightarrow \beta &= \frac{\text{Cov}(K_A, K_{\omega_m})}{\text{Var}(K_{\omega_m})} = \frac{\text{Cov}(K_A, K_{\omega_m})}{\sigma_{\omega_m}^2} = \beta_A . \end{aligned}$$

Com que el coeficient del terme β^2 és positiu, tenim un mínim. $\square$

Tot això ens dona una manera d'aproximar el coeficient β_A de la nostra cartera A. Si utilitzéssim la definició de covariància necessitariem aproximar la matriu de covariances. En canvi, aquest resultat ens diu que β_A redueix la variància de l'error e_A . Per tant podem utilitzar dades pasades per a trobar el valor que redueix la variància dels errors, i així tindrem una aproximació de β_A .

Aquest mètode és equivalent a trobar la recta que millor aproxima els retorns $K_A - R$ en funció de $K_{\omega_m} - R$ a través del mètode de mínims quadrats, és a dir, minimitzant $\mathbb{E}(e_A^2)$. Això es deu a que en el mètode de mínims quadrats també obtenim que $\beta = \beta_A$ i que $\mathbb{E}(e_A) = 0$. Aquesta afirmació la demostrarem al següent capítol. De moment, veiem com aplicar-ho amb un exemple.

Suposem que els retorns de la cartera de mercat dels últims d anys han estat $K_{\omega_m}^1, \dots, K_{\omega_m}^d$, i els retorns de la nostra cartera A dels últims d anys han estat $K_A^1, \dots, K_A^d$. Suposem que utilitzem el mètode dels mínims quadrats per a calcular la recta que millor aproxima $K_A - R$ en funció de $K_{\omega_m} - R$, i obtenim la recta

$$K_A - R = \alpha + \beta(K_{\omega_m} - R) + e ,$$

on els coeficients α i β són la solució al problema de minimització dels mínims quadrats, i e representa els errors que en aquest mètode sempre compleixen $\mathbb{E}(e) = 0$. Pel que hem comentat, el valor β serà igual a β_A . Prenent esperances i utilitzant la fórmula del CAPM obtindrem $\alpha = 0$. El problema és que, com que tenim només d anys d'informació, no podem saber el valor exacte d'aquest β . Tot i així, utilitzant els d anys disponibles per a calcular un estimador consistent de les dues covariances que defineixen β podem aproximar el valor de β . Per tant, obtenim una aproximació del valor de β_A a partir del coeficient β de la recta trobada a través del mètode dels mínims quadrats per a d anys.

Fins ara hem definit les parts sistemàtica i específica del risc com a parts de la desviació típica. Suposem que tenim una cartera A com la anterior. Sigui S_A la part sistemàtica, E_A la part específica, i σ_A la desviació típica total de la cartera. Clarament $S_A + E_A = \sigma_A$. Llavors, utilitzant el coeficient β_A tenim que

$$S_A = |\beta_A| \sigma_{\omega_m} ,$$

$$E_A = \sigma_A - |\beta_A| \sigma_{\omega_m} .$$

A mesura que els nostres actius es troben en la proporció de la cartera de mercat, i utilitzant l'actiu sense risc, podem reduir el risc específic a zero i que només quedi risc

sistemàtic.

Podem donar una versió similar però utilitzant la variància en comptes de la desviació típica.

$$Var(K_A) = \sigma_A^2 = (S_A + E_A)^2 = S_A^2 + 2S_A E_A + E_A^2 .$$

La component $S_A^2 = \beta_A^2 \sigma_{\omega_m}^2$ s'anomena part sistemàtica del risc com a part de la variància. El fet que, com a molt, es pugui reduir la desviació típica fins a S_A és equivalent a que, com a molt, es pugui reduir la variància fins a S_A^2 . Per tant, té sentit anomenar-la part sistemàtica de la variància. La part específica de la variància serà tot el risc extra, és a dir, la component $2S_A E_A + E_A^2$. També la podríem expressar com a $\sigma_A^2 - S_A^2$.

Seguint en el context de la variància, donarem una proposició que ens ajuda a veure les parts sistemàtica i específica.

Proposició 5.2.2. *La variància del retorn d'una cartera A es pot expressar com*

$$\sigma_A^2 = \beta_A^2 \sigma_{\omega_m}^2 + Var(e_A) ,$$

on $e_A = K_A - (R + \beta_A(K_{\omega_m} - R))$.

Demostració. Primer trobarem la covariància entre K_{ω_m} i e_A .

$$\begin{aligned} Cov(K_{\omega_m}, e_A) &= Cov(K_{\omega_m}, K_A - R - \beta_A(K_{\omega_m} - R)) \\ &= Cov(K_{\omega_m}, K_A) - \beta_A Cov(K_{\omega_m}, K_{\omega_m}) = 0 . \end{aligned}$$

Amb aquesta igualtat ja podem deduir que

$$\begin{aligned} \sigma_A^2 &= Var(K_A) = Cov(K_A, K_A) = Cov(R + \beta_A(K_{\omega_m} - R) + e_A, R + \beta_A(K_{\omega_m} - R) + e_A) \\ &= Cov(\beta_A K_{\omega_m} + e_A, \beta_A K_{\omega_m} + e_A) = \beta_A^2 Var(K_{\omega_m}) + 2\beta_A Cov(K_{\omega_m}, e_A) + Var(e_A) \\ &= \beta_A^2 Var(K_{\omega_m}) + Var(e_A) = \beta_A^2 \sigma_{\omega_m}^2 + Var(e_A) . \end{aligned}$$

□

D'aquesta proposició i recordant que

$$\sigma_A^2 = (S_A + E_A)^2 = S_A^2 + 2S_A E_A + E_A^2 = \beta_A^2 \sigma_{\omega_m}^2 + 2S_A E_A + E_A^2 ,$$

podem deduir que

$$Var(e_A) = 2S_A E_A + E_A^2 .$$

Capítol 6

Model de factors

Al model CAPM hem vist com a partir del retorn de la cartera de mercat i del coeficient beta podíem donar una aproximació del retorn de la nostra cartera. És a dir, a partir d'una variable i un coeficient podíem aproximar el retorn de la nostra cartera utilitzant una regressió lineal. [4]

Els models de factors es basen en una idea similar. Utilitzen diversos factors sistemàtics, cada un amb el seu respectiu coeficient, per donar una aproximació del retorn de la nostra cartera. Per exemple, al model CAPM, el retorn de la cartera de mercat és el factor sistemàtic.

6.1 Model d'un sol factor

Suposem que tenim n actius amb retorns $K_1, \dots, K_n$, i un factor sistemàtic F . A partir d'aquest factor volem aproximar els retorns dels actius com a

$$K_i = a_i + b_i F + e_i ,$$

on e_i representa l'error.

Suposem que utilitzem el mètode dels mínims quadrats per a trobar a_i i b_i . És a dir, busquem els valors de a_i i b_i que minimitzen $\mathbb{E}(e_i^2)$. Resolent aquest problema de minimització en dues variables obtenim els valors

$$b_i = \frac{Cov(F, K_i)}{Cov(F, F)} ,$$

$$a_i = \mathbb{E}(K_i) - b_i \mathbb{E}(F) .$$

No en donem la demostració ara, però més endavant demostrarem el cas de més d'un factor, on aquest resultat en serà un cas particular. Com a conseqüència d'això també podem deduir les següents igualtats $\mathbb{E}(e_i) = 0$ i $Cov(F, e_i) = 0$, que també demostrarem en general més endavant. També és important mencionar que hem aplicat aquests resultats als n actius, però el mateix raonament es pot utilitzar per a les carteres.

A partir de tot això, tenim el següent resultat.

Proposició 6.1.1. *Suposem que tenim els retorns de n actius com a models d'un sol factor. Llavors podem deduir les igualtats*

$$\mu_i = a_i + b_i \mathbb{E}(F) ,$$

$$\text{Cov}(K_i, K_j) = b_i b_j \text{Var}(F) + \text{Cov}(e_i, e_j) ,$$

$$\text{Var}(K_i) = b_i^2 \text{Var}(F) + \text{Var}(e_i) .$$

Demostració. Utilitzant que $\mathbb{E}(e_i) = 0$ deduïm la primera igualtat.

$$\mu_i = \mathbb{E}(K_i) = \mathbb{E}(a_i + b_i F + e_i) = a_i + b_i \mathbb{E}(F) .$$

Utilitzant que $\text{Cov}(F, e_i) = 0$ deduïm la segona igualtat.

$$\begin{aligned} \text{Cov}(K_i, K_j) &= \text{Cov}(a_i + b_i F + e_i, a_j + b_j F + e_j) = \text{Cov}(b_i F + e_i, b_j F + e_j) \\ &= b_i b_j \text{Var}(F) + \text{Cov}(F, e_i) + \text{Cov}(F, e_j) + \text{Cov}(e_i, e_j) = b_i b_j \text{Var}(F) + \text{Cov}(e_i, e_j) . \end{aligned}$$

La tercera igualtat és un cas particular de la segona □

En aquest context, suposem ara que tenim una cartera A formada per aquests n actius i amb pesos $(w_1, \dots, w_n)$. Podem observar que

$$\begin{aligned} K_A &= w_1 K_1 + \dots + w_n K_n = w_1(a_1 + b_1 F + e_1) + \dots + w_n(a_n + b_n F + e_n) \\ &= \sum_{i=1}^n (w_i a_i) + \sum_{i=1}^n (w_i b_i) F + \sum_{i=1}^n (w_i e_i) . \end{aligned}$$

Com que $\mathbb{E}(e_i) = 0$, es dedueix que $\mathbb{E}(\sum_{i=1}^n (w_i e_i)) = 0$. Aquesta expressió és interessant ja que justament és l'expressió per mínims quadrats de K_A . Anem a demostrar-ho.

Proposició 6.1.2. *Siguin a_A , b_A els coeficients trobats pel mètode de mínims quadrats per aproximar K_A a partir d'un factor F utilitzant l'expressió*

$$K_A = a_A + b_A F + e_A ,$$

on e_A és el terme d'error resultant. Llavors es compleix que

$$a_A = \sum_{i=1}^n (w_i a_i) , \quad b_A = \sum_{i=1}^n (w_i b_i) , \quad e_A = \sum_{i=1}^n (w_i e_i) .$$

Demostració.

$$b_A = \frac{\text{Cov}(K_A, F)}{\text{Cov}(F, F)} = \frac{\text{Cov}(w_1 K_1 + \dots + w_n K_n, F)}{\text{Cov}(F, F)} = \sum_{i=1}^n \left(w_i \frac{\text{Cov}(K_i, F)}{\text{Cov}(F, F)} \right) = \sum_{i=1}^n (w_i b_i) .$$

$$a_A = \mathbb{E}(K_A) - b_A \mathbb{E}(F) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n (w_i K_i)\right) - \sum_{i=1}^n (w_i b_i) \mathbb{E}(F) = \sum_{i=1}^n (w_i (\mathbb{E}(K_i) - b_i \mathbb{E}(F))) = \sum_{i=1}^n (w_i a_i) .$$

$$e_A = K_A - a_A - b_A F = \sum_{i=1}^n (w_i K_i) - \sum_{i=1}^n (w_i a_i) - \sum_{i=1}^n (w_i b_i) F = \sum_{i=1}^n (w_i (K_i - a_i - b_i F)) = \sum_{i=1}^n (w_i e_i).$$

□

Amb aquests resultats podem donar una versió similar a la proposició 6.1.1.

Proposició 6.1.3. *Suposem que tenim els retorns de dos carteres A i B, posem K_A i K_B , com a models d'un sol factor. Llavors podem deduir les igualtats*

$$\mu_A = a_A + b_A \mathbb{E}(F).$$

$$\text{Cov}(K_A, K_A) = b_A b_B \text{Var}(F) + \text{Cov}(e_A, e_B).$$

$$\text{Var}(K_A) = b_A^2 \text{Var}(F) + \text{Var}(e_A).$$

La demostració és anàloga a la proposició 6.1.1, però utilitzant carteres en comptes d'actius.

La part més interessant de tot això es dona quan utilitzem el retorn de la cartera de mercat com a factor sistemàtic, és a dir, quan fem el cas $F = K_{\omega_m}$. Observem que llavors ens trobem en el mateix cas que amb el CAPM. És per això que els coeficients β_A i b_A coincideixen. I justament de la proposició anterior podem deduir

$$\sigma_A^2 = \text{Var}(K_A) = b_A^2 \text{Var}(F) + \text{Var}(e_A) = \beta_A^2 \text{Var}(K_{\omega_m}) + \text{Var}(e_A) = \beta_A^2 \sigma_{\omega_m}^2 + \text{Var}(e_A),$$

que és el mateix resultat de la proposició 5.2.2.

Abans de passar als models de múltiples factors comentarem una alternativa al mètode de mínims quadrats, és a dir, a la minimització de $\mathbb{E}(e_A^2)$. Hem vist que a partir d'aquí obtenim els valors b_i i a_i . Una manera d'arribar a aquests mateixos valors és minimitzant la variància $\text{Var}(e_A)$ i suposant que $\mathbb{E}(e_A) = 0$. La minimització de la variància, amb una demostració pràcticament idèntica a la de la proposició 5.2.1, ens dona el mateix valor b_i . La diferència és que no tenim cap tipus de restricció sobre el valor a_i . És per això que hem de suposar $\mathbb{E}(e_A) = 0$, i així deduem que

$$a_i = \mathbb{E}(a_i) = \mathbb{E}(K_i - b_i F - e_i) = \mathbb{E}(K_i) - b_i \mathbb{E}(F) - \mathbb{E}(e_i) = \mathbb{E}(K_i) - b_i \mathbb{E}(F),$$

i per tant la component a_i també coincideix.

6.2 Model de múltiples factors

De manera similar que en el cas d'un sol factor, suposem n actius amb retorns $K_1, \dots, K_n$, i m factors sistemàtics $F_1, \dots, F_m$. A partir d'aquests factors volem aproximar els retorns dels actius

$$K_i = a_i + b_{i1} F_1 + \dots + b_{im} F_m + e_i,$$

on e_i representa l'error. Denotem per $\mathbf{b}_i$ al vector $(b_{i1}, \dots, b_{im})$ i $\mathbf{F}$ al vector $(F_1, \dots, F_m)$. Llavors podem escriure

$$K_i = a_i + \mathbf{b}_i^T \mathbf{F} + e_i .$$

Suposem que tornem a utilitzar el mètode de mínims quadrats per trobar a_i i $\mathbf{b}_i = (b_{i1}, \dots, b_{im})$. És a dir, busquem els valors d'aquests paràmetres que minimitzen $\mathbb{E}(e_i^2)$. Tenim la següent proposició.

Proposició 6.2.1. *Els valors de a_i i $\mathbf{b}_i = (b_{i1}, \dots, b_{im})$ que minimitzen $\mathbb{E}(e_i^2)$ són*

$$\mathbf{b}_i = C^{-1} \mathbf{x}_i ,$$

$$a_i = \mathbb{E}(K_i) - b_{i1}\mathbb{E}(F_1) - \dots - b_{im}\mathbb{E}(F_m) ,$$

on C i $\mathbf{x}_i$ es defineixen com

$$C = \begin{bmatrix} \text{Cov}(F_1, F_1) & \cdots & \text{Cov}(F_1, F_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}(F_m, F_1) & \cdots & \text{Cov}(F_m, F_m) \end{bmatrix} , \quad \mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} \text{Cov}(F_1, K_i) \\ \vdots \\ \text{Cov}(F_m, K_i) \end{bmatrix} ,$$

i suposem que C és invertible.

Demostració. Suposem que volem expressar el retorn de l'actiu i de la forma

$$K_i = a_i + b_{i1}F_1 + \dots + b_{im}F_m + e_i .$$

Volem minimitzar els errors quadrats, és a dir, la funció

$$\begin{aligned} \varphi(a_i, b_{i1}, \dots, b_{im}) &= \mathbb{E}((K_i - a_i - b_{i1}F_1 - \dots - b_{im}F_m)^2) \\ &= \mathbb{E}(K_i^2) + a_i^2 + b_{i1}^2\mathbb{E}(F_1^2) + \dots + b_{im}^2\mathbb{E}(F_m^2) - 2a_i\mathbb{E}(K_i) - 2b_{i1}\mathbb{E}(F_1K_i) - \dots - 2b_{im}\mathbb{E}(F_mK_i) \\ &\quad + 2a_ib_{i1}\mathbb{E}(F_1) + \dots + 2a_ib_{im}\mathbb{E}(F_m) + \sum_{\substack{j=1, k=1 \\ j \neq k}}^m (2b_{ij}b_{ik}\mathbb{E}(F_jF_k)) . \end{aligned}$$

Derivem respecte a_i , $b_{i1}, \dots, b_{im}$, i igulem a zero per a trobar un mínim. Comencem derivant respecte a_i .

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(a_i, b_{i1}, \dots, b_{im})}{\partial a_i} &= 2a_i - 2\mathbb{E}(K_i) + 2b_{i1}\mathbb{E}(F_1) + \dots + 2b_{im}\mathbb{E}(F_m) = 0 \\ \Rightarrow \quad a_i &= \mathbb{E}(K_i) - b_{i1}\mathbb{E}(F_1) - \dots - b_{im}\mathbb{E}(F_m) . \end{aligned} \quad (6.2.1)$$

Notem que hem obtingut el valor de a_i de la proposició. Derivem ara respecte b_{ik} per a $k = 1, \dots, m$.

$$\frac{\partial \varphi(a_i, b_{i1}, \dots, b_{im})}{\partial b_{ik}} = 2b_{ik}\mathbb{E}(F_k^2) - 2\mathbb{E}(F_kK_i) + 2a_i\mathbb{E}(F_k) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m (2b_{ij}\mathbb{E}(F_jF_k)) = 0 .$$

Substituint a_i per l'expressió (6.2.1) i aïllant tenim que

$$-Cov(F_k K_i) + \sum_{j=1}^m (b_{ij} Cov(F_j F_k)) = 0.$$

Fent-ho per cada k obtenim el sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases} Cov(F_1, K_i) = \sum_{j=1}^m (b_{ij} Cov(F_j, F_1)) \\ \dots \\ Cov(F_m, K_i) = \sum_{j=1}^m (b_{ij} Cov(F_j, F_m)) \end{cases}$$

Aquest sistema es pot escriure matricialment, i aïllant obtenim el resultat desitjat.

$$C \mathbf{b}_i = \mathbf{x}_i \quad \Rightarrow \quad \mathbf{b}_i = C^{-1} \mathbf{x}_i.$$

□

Podem observar que quan $m = 1$ tenim el cas d'un sol factor ja que

$$C = Cov(F, F) \quad \Rightarrow \quad C^{-1} = \frac{1}{Cov(F, F)},$$

$$\mathbf{x}_i = Cov(F, K_i).$$

Llavors tenim les igualtats que havíem donat

$$\mathbf{b}_i = C^{-1} \mathbf{x}_i = \frac{1}{Cov(F, F)} Cov(F, K_i) = \frac{Cov(F, K_i)}{Cov(F, F)},$$

$$a_i = \mathbb{E}(K_i) - b_i \mathbb{E}(F).$$

També ens trobem en un cas especial quan les covariances entre els factors són zero, és a dir, quan $Cov(F_i, F_j) = 0$ per $i \neq j$. En aquest cas la matriu C és diagonal i tenim que

$$\mathbf{b}_i = C^{-1} \mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} Cov(F_1, F_1)^{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & Cov(F_m, F_m)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Cov(F_1, K_i) \\ \vdots \\ Cov(F_m, K_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Cov(F_1, K_i)}{Cov(F_1, F_1)} \\ \vdots \\ \frac{Cov(F_m, K_i)}{Cov(F_m, F_m)} \end{bmatrix}.$$

Observem que el fet que les covariances entre factors siguin zero fa que el cas de m factors sigui equivalent a iterar m vegades el cas d'un factor.

Seguim ara en el cas general amb múltiples factors. A partir de la proposició 6.2.1 podem enunciar el següent corol·lari:

Corol·lari 6.2.2. *Prenent els valors a_i i $\mathbf{b}_i$ que hem deduit al minimitzar $\mathbb{E}(e_i^2)$. Llavors es compleix que $\mathbb{E}(e_i) = 0$ i $Cov(F_j, e_i) = 0$.*

Demostració. La primera igualtat s'obté directament del valor de a_i .

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e_i) &= \mathbb{E}(K_i - a_i - b_{i1}F_1 - \dots - b_{im}F_m) \\
&= \mathbb{E}(K_i - (\mathbb{E}(K_i) - b_{i1}\mathbb{E}(F_1) - \dots - b_{im}\mathbb{E}(F_m)) - b_{i1}F_1 - \dots - b_{im}F_m) \\
&= \mathbb{E}(K_i) - (\mathbb{E}(K_i) - b_{i1}\mathbb{E}(F_1) - \dots - b_{im}\mathbb{E}(F_m)) - b_{i1}\mathbb{E}(F_1) - \dots - b_{im}\mathbb{E}(F_m) = 0.
\end{aligned}$$

Anem a demostrar la segona igualtat. Utilitzarem que durant la proposició anterior hem obtingut el sistema

$$\begin{cases} Cov(F_1, K_i) = \sum_{j=1}^m (b_{ij}Cov(F_j, F_1)) \\ \vdots \\ Cov(F_m, K_i) = \sum_{j=1}^m (b_{ij}Cov(F_j, F_m)) \end{cases}$$

Per tant

$$\begin{aligned}
Cov(F_j, e_i) &= Cov(F_j, K_i - a_i - b_{i1}F_1 - \dots - b_{im}F_m) \\
&= Cov(F_j, K_i) - b_{i1}Cov(F_j, F_1) - \dots - b_{im}Cov(F_j, F_m) = 0.
\end{aligned}$$

□

6.3 Arbitrage Pricing Theory

L'Arbitrage Pricing Theory, que denotarem com APT, és un model de factors que suposa que els errors dels actius no estan relacionats entre ells. És a dir, suposa que $Cov(e_i, e_j) = 0$ per a $i \neq j$. La idea és que, si hi hagués covariància entre els errors, això indicaria l'existència d'un factor ocult. Llavors es podria afegir aquest nou factor al model i, repetint aquest procediment, les covariàncies tendrien a 0.

Així, suposem que tenim els n actius representats de la forma

$$K_i = a_i + b_i F + e_i.$$

Sigui A una cartera formada pels pesos $(w_1, \dots, w_n) = (\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$. A la proposició 6.1.2 vist el terme d'error de la cartera A és

$$e_A = \sum_{i=1}^n (w_i e_i).$$

Utilitzant això i el fet que $Cov(e_i, e_j) = 0$ per a $i \neq j$ tenim que

$$Var(e_A) = Cov\left(\sum_{i=1}^n (w_i e_i), \sum_{i=1}^n (w_i e_i)\right) = \sum_{i=1}^n Var(w_i e_i) = \sum_{i=1}^n (w_i^2 Var(e_i)) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n Var(e_i).$$

Si suposem que $Var(e_i) \leq S$ per a un cert valor S , llavors, a mesura que anem afegint

actius, el nombre n augmentarà i $Var(e_A)$ tendirà a zero ja que

$$Var(e_A) \leq \frac{1}{n^2} nS = \frac{S}{n}.$$

Això fa que analitzar els casos on no hi ha terme d'error tingui cert sentit, ja que podem crear carteres tan diversificades que el terme d'error tendeixi a la seva esperança, és a dir, a zero. En aquest context és on apareix el model APT.

Veiem un cas simplificat [5]. Suposem que A i B són dues carteres sense terme d'error. Expressem els seus retorns de la forma $K_A = a_A + b_A F$ i $K_B = a_B + b_B F$, on suposarem que $b_A \neq b_B$. Suposem que invertim en proporcions w i $1-w$ en aquestes carteres. Llavors el retorn serà

$$wK_A + (1-w)K_B = wa_A + (1-w)a_B + (wb_A + (1-w)b_B)F.$$

Si fem que $wb_A + (1-w)b_B$ sigui igual a zero, llavors el retorn de la cartera no tindrà risc ja que no dependrà del factor F . Es dedueix fàcilment que el valor és $w = \frac{b_B}{b_A - b_B}$. Llavors el retorn sense risc serà

$$\frac{b_B}{b_B - b_A} a_A + \left(1 - \frac{b_B}{b_B - b_A}\right) a_B = \frac{a_A b_B}{b_B - b_A} - \frac{a_B b_A}{b_B - b_A}.$$

Diguem-li ρ a aquest retorn. Llavors tenim que

$$\rho = \frac{a_A b_B}{b_B - b_A} - \frac{a_B b_A}{b_B - b_A} \Rightarrow \rho(b_B - b_A) = a_A b_B - a_B b_A \Rightarrow \frac{a_A - \rho}{b_A} = \frac{a_B - \rho}{b_B}.$$

Per a que no hi hagi oportunitats d'arbitratge, el valor ρ ha de ser sempre el mateix. Per tant, aquesta relació es compleix per totes les carteres diversificades i, si aquesta cartera té coeficients a i b , llavors existeix una constant γ tal que

$$\frac{a - \rho}{b} = \gamma \Rightarrow a = \rho + b\gamma.$$

Si denotem per K el retorn d'una cartera diversificada, llavors

$$K = a + bF = \rho + b\gamma + bF = \rho + b(F + \gamma). \quad (6.3.1)$$

Recordem que el model CAPM és un model d'un factor que es dona quan $F = K_{\omega_m}$, i quan existeix un actiu sense risc amb retorn R . Pel que hem dit, en aquest cas haurà de ser $\rho = R$. Substituint a (6.3.1) i prenent esperances,

$$\mathbb{E}(K) = \mu = R + b(\mathbb{E}(K_{\omega_m}) + \gamma) = R + b(\mu_{\omega_m} + \gamma). \quad (6.3.2)$$

A més, per la definició de b i β podem deduir que, quan $F = K_{\omega_m}$,

$$b = \frac{Cov(K, F)}{Cov(F, F)} = \frac{Cov(K, K_{\omega_m})}{Cov(K_{\omega_m}, K_{\omega_m})} = \beta.$$

La part més interessant és que, si la cartera de mercat és una cartera diversificada, haurà

de complir (6.3.2). És a dir, que s'haurà de complir quan $K = K_{\omega_m}$. Això, i el fet que en aquest cas clarament $\beta = 1$, ens permet aïllar la γ :

$$\mu_{\omega_m} = R + \beta(\mu_{\omega_m} + \gamma) = R + \mu_{\omega_m} + \gamma \Rightarrow \gamma = -R.$$

Substituint tot això a (6.3.2) obtenim

$$\mu = R + \beta(\mu_{\omega_m} - R),$$

que és justament la fórmula del CAPM. L'única diferència és que ara només l'hem demostrat per a carteres diversificades, mentre que el CAPM la dona per qualsevol cartera. Al pròxim apartat veurem que, suposant que no hi ha arbitratge, podem deduir una fórmula semblant per a qualsevol cartera.

6.4 Generalització de l'APT per un factor

Suposem que tenim els n actius representats de la forma

$$K_i = a_i + b_i F + e_i.$$

Podem suposar que $\mathbb{E}(F) = 0$, ja que si no ho fos podríem expressar K_i com

$$K_i = a_i + b_i(F - \mathbb{E}(F) + \mathbb{E}(F)) + e_i = a_i + b_i\mathbb{E}(F) + b_i(F - \mathbb{E}(F)) + e_i,$$

amb una nova a'_i definida com $a'_i = a_i + b_i\mathbb{E}(F)$ i un nou factor F' definit com $F' = F - \mathbb{E}(F)$.

Ara, com $\mathbb{E}(F) = 0$ i $\mathbb{E}(e_i) = 0$, prenent esperances deduïm que

$$\mu_i = \mathbb{E}(K_i) = a_i + b_i\mathbb{E}(F) + \mathbb{E}(e_i) = a_i.$$

Així, podem escriure la igualtat inicial com

$$K_i = \mu_i + b_i F + e_i. \tag{6.4.1}$$

Com fins ara, seguim suposant que $Var(e_i) \leq S$, que $Cov(F, e_i) = 0$, que $\mathbb{E}(e_i) = 0$ i que $Cov(e_i, e_j) = 0$ per a $i \neq j$.

Considerem ara una cartera d'arbitratge, és a dir, tal que $\mathbf{W}^T \mathbf{1} = W_1 + \dots + W_n = 0$. El benefici d'aquesta cartera serà $B_{\mathbf{W}} = W_1 K_1 + \dots + W_n K_n$. Substituint els K_i per l'expressió de (6.4.1), obtenim

$$B_{\mathbf{W}} = W_1 K_1 + \dots + W_n K_n = \sum_{i=1}^n W_i \mu_i + F \sum_{i=1}^n W_i b_i + \sum_{i=1}^n W_i e_i.$$

Per a reduir el risc d'aquesta cartera d'arbitratge, suposarem que el benefici no depèn del factor F . És a dir, suposarem que $W_1 b_1 + \dots + W_n b_n = 0$.

En aquest context, buscarem uns pesos absoluts que compleixin les dues equacions

anteriors, i també valors ρ i γ tals que

$$\mu_i = \rho + \gamma b_i + W_i.$$

La idea darrere d'això és que si més endavant veiem que els W_i tendeixen a zero, llavors tindrem que l'expressió (6.3.1) que vam obtenir per carteres diversificades es pot aplicar aproximadament a qualsevol cartera. En resum, volem valors $(W_1, \dots, W_n, \rho, \gamma)$ que siguin solució del sistema

$$\begin{cases} \mu_1 = \rho + \gamma b_1 + W_1 \\ \vdots \\ \mu_n = \rho + \gamma b_n + W_n \\ W_1 + \dots + W_n = 0 \\ W_1 b_1 + \dots + W_n b_n = 0 \end{cases}$$

Matricialment, aquest sistema de $n + 2$ incògnites s'escriu com

$$\begin{bmatrix} 1 & b_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & b_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & b_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho \\ \gamma \\ W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Anomenem M_n a la matriu d'aquest sistema de $n + 2$ incògnites. Si tots els b_i són iguals, les dues últimes files seran linealment dependents entre elles, i seran la mateixa equació ja que s'igualen a zero les dues. Per tant, podem eliminar la última fila. Sumant les n primeres files veiem que la fila $n + 1$ no es pot expressar en funció de les n primeres. A més, com les n primeres files són clarament independents entre elles (contenen la matriu identitat), el sistema serà compatible indeterminat.

Si no tots els b_i són iguals, podem utilitzar la següent proposició per a demostrar que el sistema és compatible determinat.

Proposició 6.4.1. *Per a $n \geq 2$, el determinant de la matriu M_n és*

$$|M_n| = \sum_{i < j}^n (b_i - b_j)^2.$$

Demostració. Ho demostrarem per inducció. Quan $n=2$ tenim el determinant següent:

$$|M_2| = \begin{vmatrix} 1 & b_1 & 1 & 0 \\ 1 & b_2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 1(b_2^2 - b_1 b_2) - 1(b_1 b_2 - b_1^2) = (b_2 - b_1)^2 = (b_1 - b_2)^2.$$

Per tant, la fórmula es compleix per al cas $n = 2$. Suposem ara cert per al cas n , anem a demostrar-ho per a $n + 1$. L'objectiu és expressar el determinant de M_{n+1} en funció del de M_n . Observem que

$$|M_{n+1}| = \begin{vmatrix} 1 & b_1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & b_2 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & b_n & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 1 & b_{n+1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & b_1 & \cdots & \cdots & \cdots & b_{n+1} \end{vmatrix} = 1|M_n| - 1|A| + b_{n+1}|B|,$$

on hem desenvolupat per menors utilitzant l'última columna, i per a determinades matrius A i B. Veurem que podem calcular els determinant d'aquestes dues matrius fàcilment, i només faltaria substituir.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & b_1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & b_2 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & b_n & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & b_{n+1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 & \cdots & \cdots & \cdots & b_{n+1} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^n b_i(b_{n+1} - b_i).$$

Aquesta fórmula es dedueix fent menors utilitzant la última fila, i llavors fent menors iterativament a la diagonal dels uns.

Pasem ara a la matriu B. El seu determinant és

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & b_1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & b_2 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & b_n & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & b_{n+1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^n (b_{n+1} - b_i).$$

Aquesta fórmula es dedueix de manera similar a la matriu A, aplicant menors a la última fila, i llavors iterativament a la diagonal dels uns. Ara només ens faltaria substituir.

$$\begin{aligned} |M_{n+1}| &= 1|M_n| - 1|A| + b_{n+1}|B| = \sum_{i < j}^n (b_i - b_j)^2 - \sum_{i=1}^n b_i(b_{n+1} - b_i) + b_{n+1} \sum_{i=1}^n (b_{n+1} - b_i) \\ &= \sum_{i < j}^n (b_i - b_j)^2 + \sum_{i=1}^n (b_i - b_{n+1})^2 = \sum_{i < j}^{n+1} (b_i - b_j)^2. \end{aligned}$$

□

Hem vist que aquest sistema sempre té solució, i que serà única si i només si no tots els

b_i són iguals. Suposem ara que tenim una solució $(\rho, \gamma, W_1, \dots, W_n)$ del sistema plantejat. Llavors

$$K_i = \mu_i + b_i F + e_i = \rho + \gamma b_i + W_i + b_i F + e_i = \rho + (\gamma + F)b_i + W_i + e_i.$$

Observem que si $W_i = 0$ per tot i , prenent esperances, tenim el resultat $\mu_i = \rho + b_i \mathbb{E}(F)$, que analitzarem més endavant. De moment suposem que això no passa. Considerem les carteres d'arbitratge amb pesos absoluts $c\mathbf{W} = (cW_1, \dots, cW_n)$ per a qualsevol c . Llavors, utilitzant que $W_1 + \dots + W_n = 0$ i que $W_1 b_1 + \dots + W_n b_n = 0$, podem calcular-ne el benefici com

$$\begin{aligned} B_{c\mathbf{W}} &= cW_1 K_1 + \dots + cW_n K_n = c\rho \sum_{i=1}^n W_i + c(\gamma + F) \sum_{i=1}^n (W_i b_i) + c \sum_{i=1}^n W_i^2 + c \sum_{i=1}^n (W_i e_i) \\ &= c \sum_{i=1}^n W_i^2 + c \sum_{i=1}^n (W_i e_i). \end{aligned}$$

A partir d'aquesta expressió, podem calcular el benefici esperat i la variància del benefici d'aquestes carteres, en funció de c .

$$\mathbb{E}(B_{c\mathbf{W}}) = c \sum_{i=1}^n W_i^2 + c \sum_{i=1}^n (W_i \mathbb{E}(e_i)) = c \sum_{i=1}^n W_i^2,$$

ja que $\mathbb{E}(e_i) = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Var}(B_{c\mathbf{W}}) &= c^2 \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n W_i^2 + \sum_{i=1}^n (W_i e_i)\right) = c^2 \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n (W_i e_i)\right) = c^2 \sum_{i=1}^n (W_i^2 \text{Var}(e_i)) \\ &\leq c^2 \sum_{i=1}^n (W_i^2 S) = c^2 S \sum_{i=1}^n W_i^2, \end{aligned}$$

ja que $\text{Cov}(e_i, e_j) = 0$ i $\text{Var}(e_i) \leq S$.

Considerem ara el cocient entre el benefici esperat, $\mathbb{E}(B_{c\mathbf{W}})$, i la desviació típica del benefici $\sqrt{\text{Var}(B_{c\mathbf{W}})}$.

$$\frac{\mathbb{E}(B_{c\mathbf{W}})}{\sqrt{\text{Var}(B_{c\mathbf{W}})}} = \frac{c \sum_{i=1}^n W_i^2}{c \sqrt{S \sum_{i=1}^n W_i^2}} = \frac{1}{\sqrt{S}} \sqrt{\sum_{i=1}^n W_i^2}. \quad (6.4.2)$$

Observem que aquest cocient és independent de c , i que tendeix a $+\infty$ quan $\sum_{i=1}^n W_i^2 \rightarrow +\infty$.

En aquest context, suposem que volem obtenir un benefici esperat X . La lliure elecció del paràmetre c ens permet obtenir qualsevol valor X .

$$\mathbb{E}(B_{c\mathbf{W}}) = c \sum_{i=1}^n W_i^2 = X \quad \Rightarrow \quad c = \frac{X}{\sum_{i=1}^n W_i^2}.$$

Si $\sum_{i=1}^n W_i^2 \rightarrow +\infty$ quan $n \rightarrow +\infty$, podem triar qualsevol benefici X , i el cocient (6.4.1) ens indica que la desviació típica del benefici tendirà a zero. Per tant, si això fos cert, podríem obtenir qualsevol benefici sense risc i sense inversió inicial. Això suposa una oportunitat d'arbitratge. Perquè això no passi, ha d'existir un valor M tal que $\sum_{i=1}^n W_i^2 \leq M$. Per tant, la mitjana dels W_i^2 compleix que

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n W_i^2 \leq \frac{M}{n} \rightarrow 0 \quad \text{quan } n \rightarrow +\infty,$$

on la suposició $n \rightarrow +\infty$ es basa en el fet que el nombre d'actius en el mercat és molt elevat. En resum, hem vist que la mitjana dels W_i^2 tendeix a zero, que vol dir que per la majoria d'actius es compleix $W_i \approx 0$.

Hem obtingut que, de manera general,

$$K_i \approx \rho + (\gamma + F)b_i + e_i.$$

Prenent esperances i utilitzant que $\mathbb{E}(F) = \mathbb{E}(e_i) = 0$:

$$\mu_i \approx \rho + \gamma b_i.$$

Definició 6.4.2. Es coneix amb el nom de **prima de risc** del factor F al valor del paràmetre γ .

A més, si tenim una cartera amb pesos $\omega = (w_1, \dots, w_n)$ en aquests actius, el seu retorn esperat serà

$$\mu_\omega \approx w_1\mu_1 + \dots + w_n\mu_n = \rho + \gamma(w_1b_1 + \dots + w_nb_n) = \rho + \gamma b_\omega,$$

on al pas final hem utilitzat la proposició 6.1.2.

Clarament, si existeix algun actiu sense risc, el seu retorn esperat serà ρ , és a dir, tindrem que $\rho = R$. I tot i que no existeixi, ρ serà el retorn esperat de totes les carteres que no depenguin del factor F , és a dir, les que compleixen $w_1b_1 + \dots + w_nb_n = 0$.

Per acabar, analitzem què passarà en el cas del model CAPM, és a dir, quan $F = K_{\omega_m} - \mathbb{E}(K_{\omega_m}) = K_{\omega_m} - \mu_{\omega_m}$ i $\rho = R$. A més, sigui K el retorn d'una cartera, per la definició de b i β podem deduir que

$$b = \frac{\text{Cov}(K, F)}{\text{Cov}(F, F)} = \frac{\text{Cov}(K, K_{\omega_m})}{\text{Cov}(K_{\omega_m}, K_{\omega_m})} = \beta.$$

Podem rescriure la igualtat inicial com

$$\mu_\omega \approx R + \gamma\beta.$$

Com que s'haurà de complir per tota cartera, també s'haurà de complir per la cartera

de mercat, ω_m . En aquest cas, $\beta = 1$ i podem aïllar γ :

$$\mu_{\omega_m} \approx R + \gamma \quad \Rightarrow \quad \gamma \approx \mu_{\omega_m} - R.$$

Així doncs, els retorns dels actius es poden expressar com

$$\mu_i \approx R + \beta_i(\mu_{\omega_m} - R),$$

que ens dóna la fórmula del CAPM també per a actius i carteres sense diversificar.

6.5 Generalització de l'APT per a múltiples factors

La generalització de l'APT per a múltiples factors es fa de manera similar. La diferència és que, per a cada factor F_m , tindrem un paràmetre γ_m diferent. El sistema a resoldre serà

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_1 = \rho + \gamma_1 b_{11} + \dots + \gamma_m b_{1m} + W_1 \\ \vdots \\ \mu_n = \rho + \gamma_1 b_{n1} + \dots + \gamma_m b_{nm} + W_n \\ W_1 b_{11} + \dots + W_n b_{n1} = 0 \\ \vdots \\ W_1 b_{1m} + \dots + W_n b_{nm} = 0 \\ W_1 + \dots + W_n = 0 \end{array} \right.$$

Aquest és un sistema de $n+m+1$ equacions i $n+m+1$ incògnites $(W_1, \dots, W_n, \gamma_1, \dots, \gamma_m, \rho)$. En el cas d'un factor vam suposar $n \geq 2$. Ara haurem de suposar que $n \geq m + 1$. Fent $m = 1$ tenim el cas d'un factor. Es pot demostrar que el sistema és compatible determinat quan els vectors $(1, \dots, 1)$, $(b_{11}, \dots, b_{n1})$, ..., $(b_{1m}, \dots, b_{nm})$ són linealment independents. Notem que, quan $m = 1$, tenim el cas d'un factor on imposàvem que no tots els b_i fossin iguals, és a dir, que els vectors $(1, \dots, 1)$ i $(b_1, \dots, b_n)$ fossin linealment independents. Quan són linealment dependents, i de manera anàloga al cas d'un factor, el sistema és compatible indeterminat.

Tenint en compte tot això, i utilitzant un argument similar al cas d'un factor, podem expressar els retorns dels actius com

$$\mu_i \approx \rho + \gamma_1 b_{i1} + \dots + \gamma_m b_{im}.$$

Capítol 7

Conclusions

Aquest treball ha abordat amb profunditat els fonaments de la teoria moderna de carteres i el model CAPM, aplicant eines matemàtiques per analitzar i optimitzar les decisions d'inversió. Els resultats obtinguts permeten extreure les conclusions següents:

En primer lloc, l'estudi del risc i el retorn d'actius individuals i carteres ha confirmat que la diversificació redueix de manera efectiva el risc sense comprometre el retorn esperat. Mitjançant el càlcul de la variància i la covariància entre actius, s'han determinat carteres eficients que maximitzen el retorn ajustat al risc, destacant especialment la importància de la cartera de mínima variància i la cartera de mercat.

En segon lloc, s'ha demostrat que el model CAPM proporciona una metodologia robusta per valorar actius financers. L'aplicació del coeficient β ha permès quantificar el risc sistemàtic i predir el retorn esperat en funció del mercat.

A més, l'anàlisi de models de factors i la teoria de l'arbitratge (APT) han ampliat la comprensió dels mecanismes que afecten els rendiments d'actius. La incorporació de múltiples fonts de risc ajuda a millorar la precisió en l'avaluació d'actius i proporciona una alternativa complementària al CAPM.

Bibliografia

- [1] Maciej J. Capiński and Ekkehard Kopp. *Portfolio Theory and Risk Management*. Mastering Mathematical Finance. Cambridge University Press, 2014. p. 1-75.
- [2] Gur Huberman. A simple approach to arbitrage pricing theory. <https://business.columbia.edu/sites/default/files-efs/pubfiles/2428/ArbitrageGH.pdf>, 1980. p. 1-9.
- [3] Stephen A. Ross. The arbitrage theory of capital asset pricing. *Journal of Economic Theory*, 13:341–360, 1976. Disponible a <https://www.top1000funds.com/wp-content/uploads/2014/05/The-Arbitrage-Theory-of-Capital-Asset-Pricing.pdf>.
- [4] David Nualart and Marta Sanz. Curs de probabilitats. https://diposit.ub.edu/dspace/bitstream/2445/171261/1/curs_de_probabilitats.pdf, 2020. p. 56-57.
- [5] Pol Bonastre Sanz. Teoria moderna de carteres. https://diposit.ub.edu/dspace/bitstream/2445/186272/1/tfg_bonastre_sanz_pol.pdf, 2022. p. 30-31.