Universitat de Barcelona

Facultat de Matemàtiques i Informàtica

# GRAU DE MATEMÀTIQUES

## Treball final de grau

# Poliedres flexibles

**Autor: Danilo Mašić Orive**

**Director:** Dr. Ricardo García López

**Realitzat a:** Departament de Matemàtiques i Informàtica

**Barcelona,** 14 de gener de 2025

# Abstract

Are all closed polyhedral surfaces rigid? The conjecture asserting their rigidity has been with us a long time. Even Euclid implicitly accepted it true as he defined solid figures. Interestingly, the resolution of this conjecture did not occur until 1977, when Robert Connelly provided a definitive answer. This, however, was not the result of a sudden revelation but rather a gradual evolution over the centuries. We will study the main discoveries that contributed to the solution of this conjecture.

# Resum

Són rígides les superfícies polièdriques tancades? La conjectura de que totes ho són ens ha acompanyat des de fa molt de temps. Inclús Euclides la va suposar certa implícitament en definir les figures sòlides. Curiosament, la resolució d'aquesta conjectura no es va produir fins el 1977, quan Robert Connelly va donar una resposta definitiva. No obstant, això no va ser el resultat d'una revelació instantània, sinó una evolució al llarg dels segles. En aquest treball, estudiarem els principals descobriments que van contribuir a la solució d'aquesta conjectura.


2020 Mathematics Subject Classification. 52C25, 52B70

# Índex

# 1 Introducció

Suposem que tenim un poliedre en el que les cares són polígons rígids, imaginem que són plaques metàl·liques, i les arestes són articulades, és a dir, que es comporten com frontisses. La pregunta és: aquest poliedre és rígid o flexible? Aparenta ser una pregunta molt senzilla, però en matemàtiques, a vegades, les preguntes més simples són les més difícils de respondre, i aquesta en particular no va ser totalment aclarida fins 1977. La suposició de que el poliedre descrit anteriorment és rígid l'anomenarem la *Conjectura de la rigidesa*, que definirem amb precisió en 4.1, i va ser suposada certa durant molt temps.

## 1.1 Història

La referència més antiga que podem relacionar amb el problema es troba en els *Elemens* d'Euclides, Llibre XI, definició 10:

> Figures sòlides iguals i semblants són aquelles compreses per plans semblants, iguals en multitud i magnitud.

Un altre exemple similar el trobem en un comentari de L. Euler el 1766: "Una figura espacial tancada no permet canvis, mentre no sigui trencada".

No va ser fins 1813 que A. L. Cauchy va demostrar (excepte alguns errors corregits posteriorment) que si un poliedre és convex, aleshores és rígid. Aleshores, la pregunta que queda és: existeixen poliedres còncaus flexibles?

L'any 1894 el matemàtic grec Cyparissos Stephanos va proposar el següent problema en la revista "L'Intermédiaire des Mathématiciens" [1]:

> Existe-t-il des polyèdres à faces invariables susceptibles d'une infinité de transformations avec altération seulement des angles solides et des dièdres?

L'any següent, Raoul Bricard va proposar un exemple d'una figura equivalent a un octaedre que resolia el problema, amb l'únic inconvenient de necessitar autointerseccions per poder ser realitzat en $\mathbb{R}^3$. Finalment, el 1897, Bricard va escriure un article [2] on descrivia en detall 3 famílies d'octaedres flexibles (tots autointersecants), expandint així l'exemple inicial.

Segons [5], R. Connelly també els va descobrir[2] de forma independent el 1975 i va ser B. Grünbamm qui el va informar sobre l'existència de l'article de Bricard.

Després del descobriment de Bricard, el següent gran avanç en la teoria de la rigidesa va ser la publicació del llibre *Poliedres convexos*, per A. D. Alexandrov, el

[2] En general, per suspensions d'una circumferència (essencialment, bipiràmides), que considerat en el cas particular d'octaedres, coincideixen amb els octaedres de Bricard.

1950, que es convertiria en una referència clau. En aquest, Alexandrov va recopilar el coneixement sobre poliedres convexos que hi havia fins al moment. A més, també hi va enunciar i demostrar el Teorema d'unicitat d'Alexandrov, una generalització del Teorema de Cauchy a mètriques arbitràries.

El 1975, Herman Gluck [7] va demostrar que quasi tots els poliedres en $\mathbb{R}^3$ homeomorfs a una esfera són rígids, en el sentit que aquests formen un conjunt dens dins del conjunt tots els poliedres simplement connexos.

Finalment, el 1977, Robert Connelly va donar un contraexemple [4] a la conjectura. El seu poliedre es basa en els octaedres de Bricard (de 1897) modificats de tal forma que no tinguin autointerseccions, per tant, donant un poliedre en $\mathbb{R}^3$.

## 1.2 Estructura de la memòria

R. Connelly va resumir el seu article "The Rigidity of Polyhedral Surfaces" [6] així:

> 1813 Cauchy: all convex polyhedral surfaces are rigid.
> 1974 Gluck: almost all triangulated surfaces are rigid.
> 1977 Connelly: not all triangulated surfaces are rigid.

Essencialment, aquests 3 descobriments són els principals passos que van portar a solucionar la Conjectura, i és el que desenvoluparem al llarg del treball.

En el capítol 2, donem les definicions bàsiques dels objectes geomètriques amb els que treballarem al llarg del treball. Tot i això, cada capítol posterior hi afegeix les seves pròpies definicions.

En el capítol 3, demostrem el Teorema de Cauchy [3] de 1813. També hi donem definicions i resultats de teoria de grafs necessaris per la demostració del teorema.

En el capítol 4, donem un seguit de definicions, raonaments i proposicions que porten a entendre i demostrar el resultat de Gluck [7] de 1974.

En el capítol 5, primer descrivim els octaedres de Bricard [2] de 1897 i aleshores construïm a partir d'aquests el poliedre de Connelly [4] de 1977.

# 2 Definicions

**Notació 2.1.** Donats $n, m \in \mathbb{Z}, n \leq m$, denotarem els intervals de nombres enters com $[n..m] := \{k \in \mathbb{Z} \mid n \leq k \leq m\} = [n, m] \cap \mathbb{Z}$ i $]n..m[ := \{k \in \mathbb{Z} \mid n < k < m\}$; de la mateixa manera definim $[n..m[$ i $]n..m]$. Pot semblar redundant tenir-ne quatre, però seran de comoditat en situacions com $[1..n-1] = [1..n[$.

**Notació 2.2.** Sigui $X$ un espai topològic. De $A \subseteq X$, denotarem l'interior per $A^\circ$, l'adherència per $\overline{A}$ i la frontera per $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$.

## 2.1 Figures geomètriques

Denotarem per $\mathbb{X}^n$ en aquesta secció l'espai euclidià $\mathbb{R}^n$ o l'esfera $\mathbb{S}^n$.

**Definició 2.1.** Donats $p, q \in \mathbb{X}^n$, denotem per $\overline{pq}$ el segment de $p$ a $q$, que és el camí més curt de $p$ a $q$, també anomenat *geodèsica* si considerem $\mathbb{X}^n$ com a varietat.

Per exemple, per $\mathbb{S}^2$ en particular, es tracta de l'arc més petit dels dos possibles que hi ha en el cercle màxim que passa per $p, q$; també s'anomena *línia ortodròmica*. Tan sols hi ha un cas especial en el que el camí no està definit: si $\mathbb{X}^n = \mathbb{S}^n$ i $p, q$ són antipodals, aleshores existeixen infinits camins que minimitzen la distància. A menys que $\overline{pq}$ es determini d'alguna forma extrínseca, suposarem que $p, q$ no són antipodals. Denotem per $||\overline{pq}||$ la seva longitud, que és la distància Riemanniana entre $p, q$ en $\mathbb{X}^n$.

En general, les següents definicions estan inspirades en els complexos simplicials, per això utilitzarem terminologia relacionada: les figures seran conjunts de *cares*, tancats per intersecció, en els quals tota cara és homeomorfa a la $n$-bola, per algun $n \in \{-1\} \cup \mathbb{N}$, i diem que és una $n$-cara. Sempre hi haurà una única $(-1)$-cara, que és el conjunt buit $\emptyset$. Les 0-cares les anomenem *vèrtexs*, les 1-cares *arestes* i les 2-cares simplement *cares*. Donada $K$ una d'aquestes figures, definim la *realització geomètrica* $|K| := \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$; per tot $n$, denotem $\mathcal{C}_n(K)$ el conjunt de les $n$-cares, $c_n(K) := \#\mathcal{C}_n(K)$ el número de $n$-cares i definim l'*$n$-esquelet* com $sk_n(K) := \bigcup_{j \leq n} \mathcal{C}_j(K)$. Si $n \geq 1$, tota parella de $n$-cares $c, d \in \mathcal{C}_n(K)$, diem que són *adjacents* si $c \cap d \in \mathcal{C}_{n-1}(K)$; i dues cares qualsevols són *incidents* si una conté l'altra. Donats $p_0, \ldots, p_m \in \mathbb{R}^k$ independents, utilitzarem la notació $\langle p_0, \ldots, p_m \rangle$ pel símplex generat per aquests punts.

**Definició 2.2.** Donada una successió finita de punts $(p_i \in \mathbb{X}^n \mid i \in [0..k])$, la *corba poligonal* $P$ definida per $(p_i)_i$ és el conjunt format pel conjunt buit $\emptyset$, els vèrtexs $\{\{p_i\}\}_i$ i les arestes $\{\overline{p_i p_{i+1}} \mid i \in [0..k[\}$ tal que per tota parella d'arestes diferents $a, b$, la intersecció $a \cap b$ és buida o un vèrtex. També usarem la notació $P = \overline{p_0 p_1 \ldots p_k}$. Si $k \geq 4$ i $p_0 = p_k$, direm que $P$ és *tancada*.

**Definició 2.3.** Aleshores, si tenim una corba poligonal tancada $P$ en $\mathbb{X}^2$, pel Teorema de la corba de Jordan, sabem que $\mathbb{X}^2 \setminus |P|$ té dues components connexes. En $\mathbb{R}^2$, anomenem *interior* de $P$ a la component acotada, i en $\mathbb{S}^2$, l'escollirem *ad hoc.*

Un cop determinat l'interior $I$, diem que $P \cup \{\overline{I}\}$, on $\overline{I}$ és la nova 2-cara, és un *polígon (simple)*, *pla* si $\mathbb{X}^2 = \mathbb{R}^2$ i *esfèric* si $\mathbb{X}^2 = \mathbb{S}^2$. A més, direm que $P$ és *convex* si i només si $|P| \subseteq \mathbb{X}^2$ és convex.

**Definició 2.4.** En $\mathbb{R}^n$, una *superfície diedral* és el conjunt format per una recta $r$, anomenada *eix*, i dos semiplans tancats $\pi, \rho$ tals que $\pi \cap \rho = r$.

**Definició 2.5.** Una *superfície polièdrica* $S$ en $\mathbb{R}^n$ és la unió finita de polígons plans $\{P_i\}$ on cada $P_i$ es troba en cert pla afí de $\mathbb{R}^n$, tal que per tota parella de 2-cares $a, b$ diferents, es compleix $a \cap b \in sk_1(S)$, és a dir, una aresta, un vèrtex o el conjunt buit, i tal que $|S|$ sigui una superfície topològica. Si totes les cares de $S$ són triangles, $S$ és una superfície *triangulada.*

Si $n = 3$, $|S|$ és compacta i connexa i $\mathbb{R}^3 \setminus |S|$ té dues components connexes, la que és acotada, $\overline{I}$, la anomenem *interior* de $S$. Aleshores diem que $S \cup \{\overline{I}\}$ (amb $\overline{I}$ sent la nova 3-cara) és un *poliedre.*

**Definició 2.6.** Un poliedre $P$ és *convex* si $|P| \subseteq \mathbb{R}^3$ és convex, i és *estrictament convex* si per tot vèrtex $v \in \mathcal{C}_0(P)$ existeix un pla $\pi \subset \mathbb{R}^3$ tal que $|P| \cap \pi = v$.

## 2.2 Angles

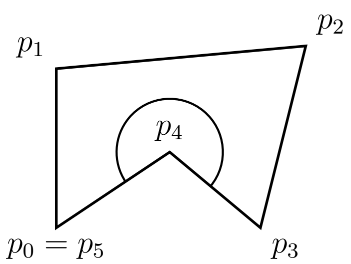


Figura 1: Un pentàgon pla on es destaca un angle interior.

**Definició 2.7.** Donats $p, q, r \in \mathbb{X}^2$, l'angle *pla* entre $\overline{pq}$ i $\overline{pr}$ és l'angle en valor absolut entre els vectors tangents de $\overline{pq}$ i $\overline{pr}$ en $p$, que a vegades anomenem "l'angle de $\overline{qpr}$". Realment n'hi ha dos, normalment n'escollirem un explícitament.

**Definició 2.8.** Si tenim $P, I$ de la definició 2.3 i $j \in [0..k[$, anomenem angle *interior* en $p_j$ a l'angle pla $\alpha$ de $\overline{p_{j-1}p_jp_{j+1}}$ mesurat des de $I$.

**Definició 2.9.** Donada una superfície diedral $S = \{r, \pi, \rho\}$ en $\mathbb{R}^3$, definim l'angle *diedral* de $S$ com l'angle pla entre les semirectes $\pi \cap s$ i $\rho \cap s$, on $s$ és un pla ortogonal a $r$. El valor de l'angle és independent de $s$. Sigui $A$ una de les dues components de $\mathbb{R}^3 \setminus |S|$, aleshores utilitzem $\pi \cap s \subset s$ com a interior per determinar l'angle.

Si tenim un poliedre $P$, per tota aresta $a \in \mathcal{C}_1(P)$, podem dir que $P$ és "localment" una superfície diedral en $a$, ja que si només considerem les dues cares $c, d$ que $c \cap d = a$, podem estendre $a$ a una recta i $c, d$ a semiplans per formar la superfície diedral $S_a$. Aleshores definim l'angle diedral de $a$ com l'angle de $S_a$ mesurat des de l'interior de $P$. Denotarem aquesta aplicació com $\theta_P : \mathcal{C}_1(P) \to \,]0, 2\pi]$.

# 3 Cauchy

En aquest capítol, l'objectiu és demostrar el Teorema de la rigidesa de Cauchy [3] de 1813, que a grans trets afirma que tot poliedre convex és rígid. La seva demostració no era del tot correcta i va ser corregida i revisada posteriorment per altres matemàtics. La demostració que donarem aquí es basa en [10]. A part de les definicions geomètriques donades, necessitarem alguns resultats de teoria de grafs.

## 3.1 Grafs

**Definició 3.1.** Un graf $G$ és una parella $(V, E)$ on $V$ és un conjunt finit i $E \subseteq \{\{v, w\} \mid v, w \in V, v \neq w\}$. Diem que $V$ són els *vèrtexs* de $G$, i $E$ les *arestes*.

Només utilitzarem grafs finits i simples: sense arestes múltiples, ni bucles (coneguts en anglès com *loops*) i on les arestes no tenen ni direcció ni pes.

**Definició 3.2.** Un graf és *connex* si per tota parella $v \neq w$ de vèrtexs, existeix una successió de vèrtexs $(v_0, \ldots v_k)$ tal que $v_0 = v, v_k = w$ i per tot $i$, es té $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$.

**Definició 3.3.** Siguin $G = (V, E)$ un graf i $S$ una superfície connexa, aleshores direm que $D \subseteq S$ és un *dibuix* (o *embedding*) de $G$ en $S$ si:

- Existeix una aplicació injectiva $P : V \longrightarrow D$.
- Per cada aresta $e = \{v, w\} \in E$, existeix una corba simple $\gamma_e : [0, 1] \longrightarrow D$ tal que $\gamma_e(0) = P(v)$ i $\gamma_e(1) = P(w)$.
- Donada una aresta $e \in E$, es compleix
  - que per tot vèrtex $v \in V \setminus e$, es té $P(v) \notin \mathrm{Im}\gamma_e$,
  - i que per cada aresta $e' \in E \setminus \{e\}$, es té $\gamma_e(\,]0, 1[\,) \cap \gamma_{e'}(\,]0, 1[\,) = \emptyset$.
- Es compleix la igualtat $D = P(V) \cup \bigcup_{e \in E} \mathrm{Im}\gamma_e$.

Intuïtivament, $P$ fa correspondre els vèrtexs a punts de $D$, i $\gamma$ dibuixa cada aresta com una corba entre les imatges dels seus dos vèrtexs, que, a més, no pot tocar ni altres corbes ni altres punts de $P(V)$.

Aleshores, definim $F$ com el conjunt de les components connexes de $S \setminus D$, que anomenem *cares* de $D$. Diem que $D$ és un dibuix *cel·lular* si i només si tota cara de $D$ és homeomorfa a un disc obert.

Sigui $f \in F$. Diem que un vèrtex $v$ "toca" $f$ si $P(v) \in \partial f$ i que "està dins" si $P(v) \in (\overline{f})^\circ$; de forma similar, una aresta $e$ "toca" $f$ si $\mathrm{Im}\gamma_e \subseteq \partial f$, i "està dins" de $f$ si $\mathrm{Im}\gamma_e \cap (\overline{f})^\circ \neq \emptyset$. Si $v$ o $e$ toca $f$, també direm que $f$ és incident a $v$ o $e$. Procedim a definir el *grau* de la cara $f$ com

$$\mathrm{gr}(f) := \#\{e \in E \mid e \text{ toca } f\} + \#\{e \in E \mid e \text{ està dins de } f\}$$

és a dir, comptem 1 per les arestes que toquen $f$ i 2 per aquelles que, a més, estan dins de $f$, tenint en compte la implicació: $e$ està dins de $f \Rightarrow e$ toca $f$. Aleshores podem partir $F$ segons els graus: per tot $k \in \mathbb{N}$, sigui $F_k := \{f \in F \mid \mathrm{gr}(f) = k\}$.

**Definició 3.4.** Un graf $G$ és *planar* si existeix un dibuix $D$ de $G$ en $\mathbb{R}^2$ (o equivalentment en $\mathbb{S}^2$), i anomenarem graf *pla* a la parella $(G, D)$.

El següent resultat, del que únicament donarem l'enunciat, sense demostració, és la coneguda fórmula d'Euler per a grafs planars.

**Teorema 3.1** (Euler)**.** *Sigui $G = (V, E)$ un graf connex planar i $D$ un dibuix de $G$. Aleshores, si denotem per $F$ les cares de $D$, es compleix:*

$$\#V - \#E + \#F = 2$$

**Lema 3.1.** *Per tot graf pla $((V, E), D)$ amb cares $F$, es tenen les igualtats:*

1. $\#F = \sum_k \#F_k$
2. $2 \cdot \#E = \sum_k k \cdot \#F_k$

*Demostració.* Per la primera igualtat, només cal saber que, per definició, $\{F_k\}_k$ és una partició de $F$. Per tant, la suma total és la suma de cardinals.

Per la segona, cal tenir present que si $e$ toca $f$ però no està dins, aleshores existeix una única segona cara $f' \neq f$ que $e$ també toca, ja que tot el dibuix viu en una superfície; i si $e$ està dins de $f$, $e$ toca únicament $f$. A més, l'expressió $k \cdot \#F_k$ es pot interpretar com el número d'incidències d'arestes per totes les cares de grau $k$. Per això, en sumar-les totes, haurem comptat 2 per aquelles arestes que toquen 2 cares i també 2 per aquelles que estan dins d'una cara, per tant donant $2 \cdot \#E$. $\square$

**Definició 3.5.** Si tenim un dibuix cel·lular $D$ d'un graf connex $G$, $f \in F$. Aleshores, si $n := gr(f)$, existeix una única (excepte permutació pel grup diedral $D_{2n}$) successió de vèrtexs $(v_i \in V \mid i \in [0..n[\,)$ tal que, si assignem $e_i := \{v_i, v_{i+1 \bmod n}\}$, tenim $\bigcup_i \mathrm{Im}(\gamma_{e_i}) = \partial f$. Per cada $i$, diem que $(e_{i-1}, v_i, e_i)$ és una *cantonada* de $f$.

Suposem que $G$ està acolorit per arestes per la funció $C : E \to Z$, on $Z$ és el conjunt de *colors* i diem que $G$ està *$\#Z$-acolorit*. Aleshores diem que en una cantonada $(e, v, e')$ hi ha un canvi de color si i només si $C(e) \neq C(e')$; i per un vèrtex $v \in V$, definim l'*índex* de $v$ per $C$ com el número de cantonades en $v$ en les que hi ha un canvi de color.

**Proposició 3.1.** *Donat un graf simple $G$ amb 2 o més vèrtexs, connex, pla i 2-acolorit per arestes. Aleshores, existeix un vèrtex amb índex com a màxim 2.*

*Demostració.* Sigui $c$ el número de cantonades de tot el dibuix amb canvi de color. Ho demostrarem per reducció a l'absurd: suposem la conclusió falsa, i. e. l'índex de cada vèrtex és major que 2. Com ha de ser parell (per completar el cicle), l'índex és com a mínim 4. Per tant, sumant-los tots, tenim $c \geq 4 \cdot \#V$. Per altra banda, tota cara de grau $2k$ o $2k+1$ (per algun $k \in \mathbb{Z}_+$) té com a màxim $2k$ cantonades amb canvi de color. Per tant,

$$\begin{aligned} 4\#V \leq c &\leq 2\#F_3 + 4\#F_4 + 4\#F_5 + 6\#F_6 \ldots \\ &\leq 2\#F_3 + 4\#F_4 + 6\#F_5 + 8\#F_6 + \ldots \\ &= \sum_{k' \geq 3} (2k' - 4)\#F_{k'} = 4\#E - 4\#F \end{aligned}$$

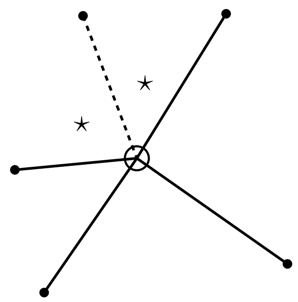

Figura 2: Exemple amb els canvis de color al voltant del vèrtex central indicats amb $\star$.

Per l'últim pas, hem utilitzat el Lema 3.1. D'això, obtenim $\#V \leq \#E - \#F \Rightarrow \#V - \#E + \#F \leq 0 < 2$, cosa que contradiu la igualtat d'Euler. $\square$

## 3.2 Teorema de Cauchy

**Definició 3.6.** Donat un poliedre $P$, definim el graf polièdric de $P$ com el graf on vèrtexs són els vèrtexs de $P$, i. e. $|\mathcal{C}_0(P)|$, i les arestes són $\{\{p,q\} \mid \overline{pq} \in \mathcal{C}_1(P)\}$. És a dir, mirem $sk_1(P)$ com un graf simple.

**Proposició 3.2.** *El graf polièdric de tot poliedre convex és planar.*

*Demostració.* Sigui $P$ un poliedre convex. Escollim un punt $v_0$ de l'interior de $|P|$. Com $|P| \subseteq \mathbb{R}^3$ és convex i $v_0$ és interior, per tot punt $p \in \partial|P|$, es té $\overline{v_0 p} \cap \partial|P| = \{p\}$, és a dir, que el segment no interseca altres punts de la frontera. Per això, si situem una esfera $S$ centrada en $v_0$ tal que $S \subseteq |P|^\circ$, la projecció de $|sk_1(P)|$ sobre $S$, i. e. $p \mapsto \overline{v_0 p} \cap S$, és contínua i injectiva i dóna un dibuix pla del graf polièdric de $P$. $\square$

**Definició 3.7.** Dos poliedres $P, P'$ són *combinatòriament equivalents* si i només si hi ha una bijecció $\phi : \mathcal{C}_2(P) \to \mathcal{C}_2(P')$ tal que per cada $c, d \in \mathcal{C}_2(P)$, si $c$ i $d$ són adjacents, $\phi(c)$ i $\phi(d)$ també ho són (en $P'$).

**Observació 3.1.** Veiem que $\phi$ indueix una aplicació $\phi_1 : \mathcal{C}_1(P) \to \mathcal{C}_1(P')$, entre les arestes de $P, P'$. Donada una aresta $a \in \mathcal{C}_1(P)$, existeixen exactament dues cares diferents $c, d \in \mathcal{C}_2(P)$ tals que $c \cap d = a$. Com per definició $\phi$ preserva l'adjacència de cares, tenim $\phi(c) \cap \phi(d) \in \mathcal{C}_1(P')$. Per això podem definir $\phi_1(a) := \phi(c) \cap \phi(d)$. És fàcil veure que $\phi_1$ és bijectiva ja que cada aresta (tant $P$ com $P'$) determina una única parella de cares i dues cares només s'interseuqen en una aresta. De forma similar, també indueix $\phi_0 : \mathcal{C}_0(P) \to \mathcal{C}_0(P')$, entre vèrtexs. Per abús de notació, extendrem $\phi$ a $P \to P'$, juntant-la amb $\phi_1, \phi_0$.

**Teorema 3.2** (Cauchy)**.** *Siguin $P$ i $P'$ poliedres en $\mathbb{R}^3$ convexos, $\phi : P \to P'$ una funció que estableixi una equivalència combinatòria entre $P$ i $P'$. Suposem que per tota cara $c$ de $P$, $c$ i $\phi(c)$ són congruents. Aleshores, per tota aresta $a$ de $P$, $a$ i $\phi(a)$ tenen el mateix angle diedral. Com a conseqüència, $P$ i $P'$ són congruents.*

L'enunciat del teorema també es pot expressar de forma equivalent com: tot poliedre **convex** està unívocament determinat per les seves cares, com a conjunt de polígons, i les seves relacions d'adjacència.

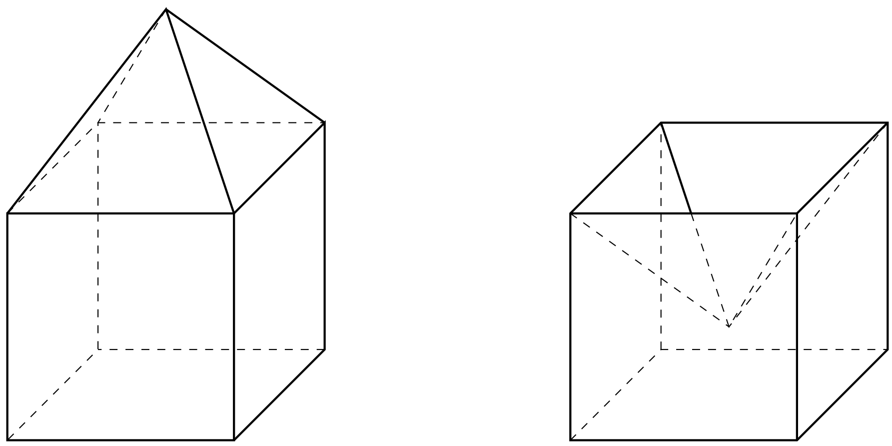

Figura 3: Dos poliedres combinatòriament equivalents i amb cares corresponents congruents, però es diferencien en que un és convex i l'altre no.

*Demostració.* Ho demostrarem per reducció a l'absurd: suposant que existeix una aresta $a_0 \in \mathcal{C}_1(P)$ tal que $\theta_P(a_0) \neq \theta_{P'}(\phi(a_0))$.

Comencem per acolorir les arestes de $P$ segons si el seu angle és major, igual o menor que el corresponent en $P'$. Ho podem expressar amb la següent funció:

$$C : \mathcal{C}_1(P) \longrightarrow \{-1, 0, +1\}, a \longmapsto \operatorname{sgn}(\theta_{P'}(\phi(a)) - \theta_P(a))$$

D'aquesta forma, tenim una 3-coloració per arestes del graf polièdric $G_P$ de $P$. Per la Proposició 3.2 també tenim un dibuix de $G_P$, per projecció a una esfera. Si eliminem totes aquelles arestes que tinguin color no nul, el graf resultant $G = (V_G, E_G)$ és un subgraf de $G_P$, per tant, un graf pla. Amb aquesta construcció en ment, la suposició que hem fet a l'inici aquí es tradueix en que $E_G \neq \emptyset$, que existeixi l'aresta $a_0 \in \mathcal{C}_1(P)$ tal que $C(a_0) \neq 0$.

Aquí és on podem utilitzar la Proposició 3.1 aplicada només a la component connexa de $a_0$ (perquè compleixi amb les hipòtesis), per deduir que existeix un vèrtex $p$ de $P$ tal que, en el dibuix per projecció, l'índex és 0 ó 2.

Partint de $p$, definim el vèrtex $p' := \phi(p)$ i dues esferes $S, S'$ amb centres $p, p'$ de radis prou petits per a que no continguin altres vèrtex a part de $p, p'$. Sigui l'aplicació $\pi$ que donat $A \subseteq \mathbb{R}^3$, l'intersequi amb $S$, i. e. $\pi(A) = A \cap S$; de la mateixa manera, sigui $\pi'$ la intersecció per $S'$.

Anomenem $Q, Q'$ al resultat d'aplicar $\pi, \pi'$ a $P, P'$, que resulten ser polígons esfèrics convexos (veure fig. 4). Observem que per tot $i \in [0..3]$, es té la correspondència de cares $\pi(\mathcal{C}_i(P)) = \mathcal{C}_{i-1}(Q)$ i també per $\pi', P', Q'$; és a dir, els vèrtexs i arestes de $Q, Q'$ provenen d'arestes i cares de $P, P'$ i que els interiors de $Q, Q'$ estan determinats pels interiors de $P, P'$.

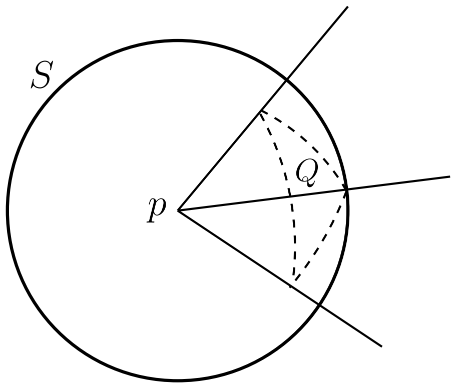


Figura 4

Comparem $Q$ i $Q'$. Com $P$ i $P'$ tenen cares congruents, tots els angles en $p$ de les cares al voltant de $p$ són els mateixos en $p'$. És a dir, per tota cara $c \in \mathcal{C}_2(P)$ tal que $p \in c$, l'angle interior del polígon $c$ en el vèrtex $p$ és igual al de $\phi(c)$ en $p'$, per tant, $||\pi(c)|| = ||\pi'(\phi(c))||$, on $|| \cdot ||$ és la llargada de segment esfèric (def. 2.1).

Per tant, l'única diferència possible entre $Q$ i $Q'$ queda en els angles. Ara, recordant que aquests provenen dels angles diedrals de $P, P'$, per cada aresta $a$ de $P$, assignem el color $C(a)$ al vèrtex $\pi(a)$ de $Q$.

Aquí és on trobem la contradicció. Per demostrar-ho, farem servir el Lema 3.2 (descrit a continuació). Degut a l'elecció de $p$, sabem que no tots els colors són 0 i que hi ha com a molt 2 canvis de signe en $Q$, ignorant els de color 0. Aleshores,

1. Si no hi ha canvis, pel Lema 3.2, hi ha d'haver alguna aresta en $Q'$ amb longitud diferent que en $Q$ (major si els signes són 0 ó $+1$, o menor altrament).

2. Si n'hi ha dos, podem dividir $Q$ en 2 meitats: la $+1$ i la $-1$ (Exemple fig. 5). Aplicant dos cops el lema, concloem que la línia de separació ha de ser a la vegada estrictament major i menor en $Q'$.

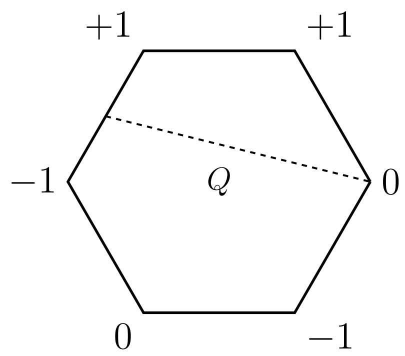


Figura 5: Exemple d'una línia divisòria que separi les meitats $+1$ i $-1$.

$\square$

**Lema 3.2** (dels braços de Cauchy)**.** *Fixem $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Siguin $Q, Q'$ polígons (en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{S}^2$) convexos, amb vèrtexs $(q_i)_i, (q'_i)_i$ i angles interiors $(\alpha_i)_i, (\alpha'_i)_i$ respectivament, amb $i \in [1..n]$, tals que per cada $i \in ]1..n[$ es compleix $\alpha_i \leq \alpha'_i$. Per cada $i, j, i \neq j$, sigui la distància entre vèrtexs $\ell_{i,j} := ||\overline{q_i q_j}||$ en $Q$, anàlogament $\ell'_{i,j} := ||\overline{q'_i q'_j}||$ en $Q'$. Suposem que per tot $i \in [1..n[$ es té $\ell_{i,i+1} = \ell'_{i,i+1}$. Aleshores, es compleix $\ell_{1,n} \leq \ell'_{1,n}$, amb igualtat si i només si per tot $i \in ]1..n[$ es té $\alpha_i = \alpha'_i$.*

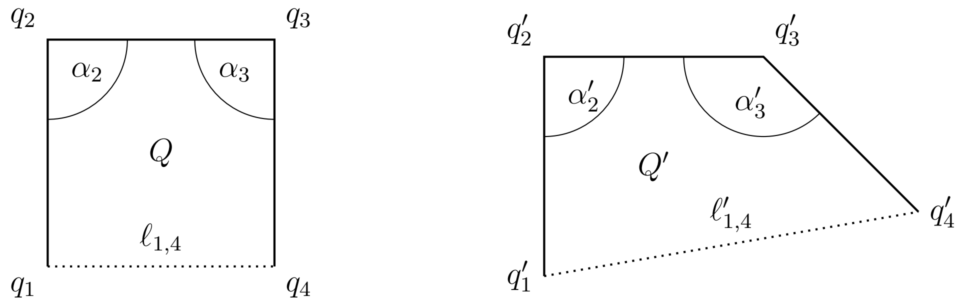


Figura 6: Exemple en $\mathbb{R}^2$ amb $n = 4$, $\alpha_2 = \alpha'_2$
i $\alpha_3 < \alpha'_3$; es pot veure que $\ell_{1,4} < \ell'_{1,4}$.

Intuïtivament, si ignorem els costats $\overline{q_1 q_n}$ i $\overline{q'_1 q'_n}$, podem veure $Q$ i $Q'$ com una mateixa corba poligonal amb l'única diferència que $Q'$ s'ha "obert" més que $Q$. D'això, la conclusió sembla trivial: el costat restant és més llarg en $Q'$ que en $Q$.

*Demostració.* Usarem inducció sobre $n$.

Pel cas $n = 3$, que anomenem *cas base*, tenim un triangle amb longituds $a, b, c$ i amb $\gamma$ l'angle oposat de $c$, i.e. $a = \ell_{1,2}, b = \ell_{2,3}, c = \ell_{1,3}, \gamma = \alpha_2$. Volem demostrar que si $\gamma$ creix, aleshores $c$ també. Per descriure $c$ en funció de $\gamma$, podem utilitzar el teorema del cosinus tant en el pla

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

com en l'esfera

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma.$$

Tant en un cas com l'altre, volem veure que $c(\gamma)$ és creixent. En el cas planar, només cal estudiar $c(\gamma)^2$, ja que la funció $x \mapsto x^2$ és monòtona creixent per tot $x > 0$. Si definim $d := c^2$ i derivem, obtenim $d'(\gamma) = 2ab \sin \gamma$, aleshores $\gamma \in ]0, \pi[ \Rightarrow \sin \gamma > 0 \Rightarrow d'(\gamma) > 0$. I pel cas esfèric, si aïllem $c(\gamma) = \arccos(M + N \cos \gamma)$, amb $M := \cos a \cos b, N := \sin a \sin b$ constants,

$$c'(\gamma) = \frac{N \sin \gamma}{\sqrt{1 - (M + N \cos \gamma)^2}}$$

veiem que $a, b \in ]0, \pi[ \Rightarrow \sin a, \sin b > 0 \Rightarrow N > 0$, per tant, $c'(\gamma) > 0$.

Sigui ara $n > 3$ i suposem cert el resultat per $n - 1$. Distingim dos casos segons les desigualtats d'angles entre $Q$ i $Q'$: si n'hi ha algun d'igual o si tots són diferents.

En el primer cas, quan existeix $i_0 \in ]1..n[$ tal que $\alpha_{i_0} = \alpha'_{i_0}$, si denotem $i_- := i_0 - 1, i_+ := i_0 + 1$, podem eliminar $q_{i_0}$ afegint la nova aresta $\overline{q_{i_-} q_{i_+}}$, anàlogament $q'_{i_0}$ de $Q'$, que tindrà la mateixa llargada en $Q$ com en $Q'$, i. e. $\ell_{i_-, i_+} = \ell'_{i_-, i_+}$. Això ho podem demostrar aplicant el cas base als triangles $(i_-, i_0, i_+)$, sabent que $\alpha_{i_0} = \alpha'_{i_0}$. A més si denotem per $\beta_{i_-}, \beta_{i_+}$ els angles de $\overline{q_{i_0} q_{i_-} q_{i_+}}, \overline{q_{i_0} q_{i_+} q_{i_-}}$, que són els altres dos angles del triangle donat per $\{q_{i_0}, q_{i_-}, q_{i_+}\}$; siguin $\beta'_{i_-}, \beta'_{i_+}$ anàlegs en $Q'$. Aleshores, el cas base també implica que $\beta_{i_-} = \beta'_{i_-}$ i $\beta_{i_+} = \beta'_{i_+}$. D'això, deduïm que després d'eliminar $q_{i_0}, q'_{i_0}$, els nous angles de $Q, Q'$ en els índexs $i_-, i_+$ també compleixen les desigualtats necessàries per les hipòtesis del teorema. Per $j \in \{i_-, i_+\}$ tindrem $\beta_j = \beta'_j$ i $\alpha_j \leq \alpha'_j$, per tant, $\alpha_j - \beta_j \leq \alpha'_j - \beta'_j$.

Per tant, si ignorem $q_{i_0}, q'_{i_0}$ de $Q, Q'$, els polígons resultants també compleixen les condicions i en tenir un vèrtex menys, podem aplicar la hipòtesi d'inducció.

Per exemple, a la Figura 6 podríem aplicar el procediment en $i_0 = 2$:

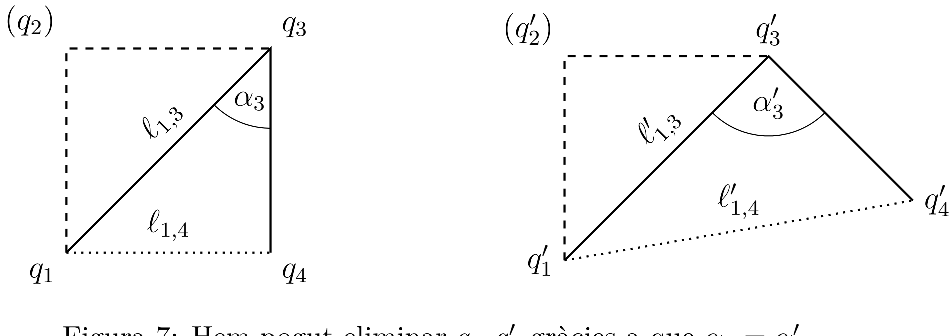


Figura 7: Hem pogut eliminar $q_2, q'_2$ gràcies a que $\alpha_2 = \alpha'_2$.

En el segon cas, quan per tot $i \in ]1..n[$ tenim $\alpha_i < \alpha'_i$, construirem un polígon intermedi $Q^*$ que ens servirà per poder comparar $Q$ amb $Q'$. Sigui $Q^*$ una còpia de $Q$ amb una diferència: augmentem $\alpha_{n-1}$ fins l'angle més gran possible que sigui menor o igual que $\alpha'_{n-1}$ i tal que $Q^*$ sigui convex. Com a conseqüència, només cal substituir $q_n$ per el vèrtex determinat per $\alpha^*_{n-1}$ i $\ell_{n-1,n}$. La resta de vèrtexs i angles queden iguals que en $Q$. Aquí separem en dos subcasos: si es pot arribar al màxim $\alpha^*_{n-1} = \alpha'_{n-1}$ o si $\alpha^*_{n-1} < \alpha'_{n-1}$ limitat per la convexitat de $Q^*$.

I. Si es dóna el cas que podem arribar al màxim $\alpha^*_{n-1} = \alpha'_{n-1}$, utilitzem el cas base als triangles $(1, n-1, n)$ de $Q$ i $Q^*$, per obtenir

$$\ell_{1,n} < \ell^*_{1,n} \tag{1}$$

D'altra banda, usem el cas previ a $Q^*$ i $Q'$ amb $i_0 = n-1$, ja que recordem que $\alpha^*_{n-1} = \alpha'_{n-1}$, i sabent que els altres angles són estrictament majors,

$$\ell^*_{1,n} < \ell'_{1,n} \tag{2}$$

Per tant, juntant (1) i (2),

$$\ell_{1,n} < \ell'_{1,n} \tag{3}$$

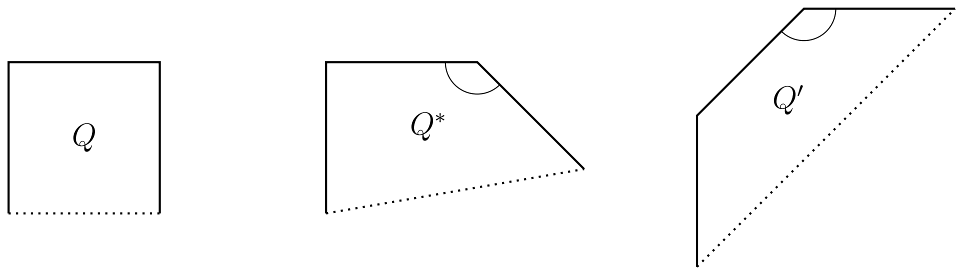


Figura 8: Exemple del cas I: S'ha pogut usar $\alpha'_{n-1}$ (l'angle destacat) en la seva totalitat per crear $Q^*$, ja que aquest ha resultat ser convex.

II. Si ocorre que $\alpha^*_{n-1} < \alpha'_{n-1}$ perquè hem "esgotat" la convexitat, tenim que $q^*_2, q^*_1, q^*_n$ estan alineats, per tant, compleixen que

$$\ell^*_{2,1} + \ell^*_{1,n} = \ell^*_{2,n} \tag{4}$$

i si eliminem $q^*_1, q'_1$ creant les noves arestes $\overline{q^*_2 q^*_n}, \overline{q'_2 q'_n}$, podem aplicar la hipòtesi d'inducció a $Q^*, Q'$ i obtenim

$$\ell^*_{2,n} < \ell'_{2,n} \tag{5}$$

Finalment,

$$\ell_{1,n} \overset{(3)}{<} \ell^*_{1,n} \overset{(4)}{=} \ell^*_{2,n} - \ell^*_{1,2} \overset{(5)}{\leq} \ell'_{2,n} - \ell'_{1,2} \overset{(*)}{\leq} \ell'_{1,n}$$

on $(*)$ és la desigualtat triangular, i la penúltima utilitza que $\ell_{1,2} = \ell'_{1,2} = \ell^*_{1,2}$.

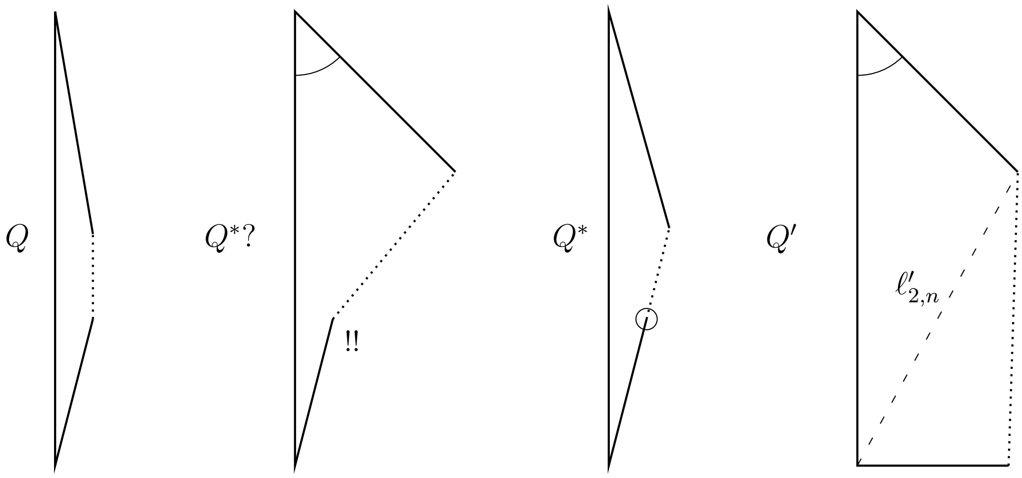


Figura 9: Exemple del cas II. Veiem que no podem arribar a usar $\alpha'_{n-1}$ (l'angle destacat) perquè donaria $Q^*$ no convex (indicat amb "!!"). Aleshores, en $Q^*$, veiem que l'angle màxim $\alpha^*_{n-1}$ fa que el vèrtex $q_1$ (encerclat) quedi alineat amb $q_2, q_n$.

□

# 4 Gluck

En aquest capítol demostrarem el Teorema de Gluck, que diu que quasi totes les superfícies polièdriques triangulades tancades i simplement connexes són rígides.

## 4.1 Definicions

En lloc de poliedres, els objectes amb què treballarem a partir d'ara són aplicacions d'una superfície polièdrica $K$ a un espai euclidià. Abans, però, definim les següents nocions topològiques, que també utilitzarem en la secció de Connelly.

**Definició 4.1.** Sigui $f : X \to Y$ una aplicació contínua entre dos espais topològics $X, Y$. Aleshores, $f$ és una incrustació si $f$ és un homeomorfisme entre $X$ i $f(X)$; $f$ és una *immersió* si és localment una incrustació, i. e. per tot $x \in X$, existeix un entorn obert $U \subseteq X$ tal que $f|_U$ és una incrustació.

**Definició 4.2.** Una aplicació $f : |K| \to \mathbb{R}^m$ és un *morfisme lineal (per cares*[3]*)* de $K$ en $\mathbb{R}^m$ si per tota cara $\sigma \in K$, la restricció $f|_\sigma$ és afí.

Si $f$ és una immersió, diem que $f$ és una *immersió lineal*. Si $f$ és injectiva, tenim que topològicament $f$ és una incrustació, i l'anomenem *incrustació lineal*.

Gluck es refereix a l'aplicació $f$ com *poliedre*, però aquí usarem *morfisme*, inspirat en Kuiper [8], per evitar confondre-ho amb la definició 2.5 de poliedre.

**Definició 4.3.** Siguin $f, g : |K| \to \mathbb{R}^m$ dos morfismes lineals. Aleshores, $f, g$ són

- *Congruents* ($f \approx g$) si existeix un desplaçament $h$ de $\mathbb{R}^m$ tal que $h \circ f = g$.
- *Isomètrics* ($f \sim g$) si per tot $\sigma \in K$, les imatges $f(\sigma), g(\sigma)$ són congruents.

Siguin $[[f]], [f]$ les classes d'equivalència de $f$ per $\approx, \sim$, respectivament.

**Observació 4.1.** És fàcil veure que $f \approx g \Rightarrow f \sim g$, i per tant $[[f]] \subseteq [f]$.

**Observació 4.2.** El que en l'apartat de Cauchy havíem definit com a equivalència combinatòria entre dos poliedres $P, Q$ (def. 3.7), aquí ho podríem expressar donant una superfície polièdrica $S$ subjacent i dues incrustacions lineals $f, g : |S| \to \mathbb{R}^3$ tals que $f(S) = P$, $g(S) = Q$ i $f \sim g$. Aleshores, la conclusió del Teorema de Cauchy és que $f$ i $g$ siguin congruents.

Al llarg d'aquesta secció (Gluck), fixem que $K$ sigui una superfície triangulada tancada simplement connexa, és a dir, $|K| \cong \mathbb{S}^2$. Siguin $(v_i \mid i \in [1..n])$ els vèrtexs de $K$, $E := \{(i, j) \in [1..n]^2 \mid i \neq j, \overline{v_i v_j} \in K\}$ el conjunt d'índexs corresponents a les arestes de $K$ i $E_< := \{(i, j) \in E \mid i < j\}$ els parells ordenats de $E$, per tal de donar una enumeració única de les arestes de $K$.

[3]En anglès, *simplexwise linear* si $K$ és un complex simplicial.

**Observació 4.3.** Com $K$ només conté triangles, un morfisme lineal $f : |K| \to \mathbb{R}^m$ queda determinat per les imatges dels vèrtexs, $(p_i := f(v_i))_i$. És a dir, podem identificar $f$ amb un vector de $(\mathbb{R}^m)^n \cong \mathbb{R}^{mn}$. En particular, estudiarem els morfismes a $\mathbb{R}^3$, per tant, corresponents a punts a l'espai $\mathbb{R}^{3n}$. Per abús de notació, ens permetrem escriure el morfisme com un vector $f = (p_i)_i \in (\mathbb{R}^3)^n$.

**Observació 4.4.** Calculem el nombre d'arestes de $K$. Per una banda, tenim que la característica d'Euler de $K$ és $n - c_1(K) + c_2(K) = 2$. Per l'altra, tota cara de $K$ té 3 arestes i tota aresta té 2 cares que s'intersequen en ella, per això $3c_2(K) = 2c_1(K)$. Aleshores, el nombre d'arestes és $c_1(K) = 3n - 6$.

**Observació 4.5.** Com $K$ només conté triangles, les definicions de congruència i isometria entre $f = (p_i)_i, g = (q_i)_i$ són equivalents a imposar les igualtats

$$||\overline{p_i p_j}|| = ||\overline{q_i q_j}|| \tag{6}$$

per tot $i, j \in [1..n]$ si $f \approx g$ o només per $(i, j) \in E$ si $f \sim g$.

Si reescrivim (6) com un polinomi quadràtic amb incògnites $(q_i)_i$, podem veure $[f]$ i $[[f]]$ com varietats algebraiques en $\mathbb{R}^{3n}$. Aquesta manera de veure aquests conjunts de morfismes és un dels passos clau per seguir el raonament de Gluck.

En general, no tenim cap informació més de $[f]$. En canvi, sabem que $[[f]]$ està formada per la composició de $f$ amb tots els desplaçaments de $\mathbb{R}^3$ (translacions, rotacions, reflexions, etc.), que formen el grup euclidià $E(3)$ i aquest és homeomorf[4] a dues còpies disjuntes de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$. Si $f$ no degenera a cap pla (que és el cas general), aleshores cada desplaçament de $E(3)$ actua de forma única sobre $f$ i per tant, $[[f]]$ és homeomorfa a una incrustació de $E(3)$ en $\mathbb{R}^{3n}$. Si $f$ degenera a un pla $\pi$ (és a dir, $\mathrm{Im} f \subset \pi$), tenim que la reflexió per $\pi$ actua igual que $Id_{\mathbb{R}^3}$ i que, si a més $f$ no degenera a cap recta, $[[f]]$ és homeomorfa a $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$. En tots dos casos, $[[f]]$ té dimensió 6. Utilitzarem aquest fet més endavant.

## 4.2 Rigidesa

A continuació, definim el concepte de rigidesa d'un morfisme lineal $f$ de $K$ en $\mathbb{R}^3$ de dues formes i demostrarem que són equivalents. Aquestes definicions també es podrien aplicar a qualsevol superfície polièdrica i qualsevol $\mathbb{R}^m$ (no només $m = 3$), però la condició de ser triangulada serà necessària per demostrar l'equivalència.

**Definició 4.4.** $f$ és *$\varepsilon$-rígid* si existeix un $\varepsilon > 0$ tal que tot morfisme isomètric a $f$ que estigui a distància[5] $< \varepsilon$ és congruent amb $f$. Des del punt de vista de $\mathbb{R}^{3n}$ com a

[4] $E(3) = T(3) \rtimes O(3)$ on $T(3)$ és el grup de les translacions (per això, $T(3) \cong \mathbb{R}^3$) i $O(3)$ el grup ortogonal $\{M \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid \det M = \pm 1\}$, que el podem descompondre en 2 còpies del grup ortogonal especial $SO(3) \cong \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$, (una el $SO(3)$ i l'altra $\{-M \mid M \in SO(3)\}$).

[5] Entre dos morfismes, usem la distància euclidiana en $\mathbb{R}^{3n}$.

espai mètric, això ho podem expresar com $[f] \cap B(f;\varepsilon) \subseteq [[f]]$, que per l'observació 4.1, és el mateix que $[f] \cap B(f;\varepsilon) = [[f]] \cap B(f;\varepsilon)$.

**Observació 4.6.** Suposem que $f$ és $\varepsilon$-rígid. Aleshores qualsevol $g \approx f$ també és $\varepsilon$-rígid. Per tant, la distància entre els conjunts $[[f]]$ i $[f] \setminus [[f]]$ és major o igual a $\varepsilon$.

**Definició 4.5.** Una *flexió* de $f$ és una corba contínua $\gamma$ en $[f]$ que comença en $f$. Diem que $\gamma$ és *rígida* si el seu recorregut està dins de $[[f]]$; altrament, $\gamma$ és *veritable.*

**Definició 4.6.** $f$ és rígid si tota flexió de $f$ és rígida.

**Proposició 4.1.** *Les definicions 4.4 i 4.6 són equivalents.*

*Demostració.* Demostrarem les dues implicacions:

($\Rightarrow$) Per la observació 4.6, si $f$ és $\varepsilon$-rígid, aleshores qualsevol corba que comenci en $f$, no pot escapar de $[[f]]$, per tant, $f$ és rígid (def.-4.6).

($\Leftarrow$) Suposem que no hi ha cap $\varepsilon$ tal que $f$ sigui $\varepsilon$-rígid. Aleshores, qualsevol entorn $U$ de $f$ compleix $U \cap ([f] \setminus [[f]]) \neq \emptyset$. Aquí utilitzarem el Lema 4.1 sabent que $[[f]] \subset [f]$ són varietats algebraiques, per deduir que existeix una corba contínua $\gamma : [0,1] \to [f]$ tal que $\gamma(0) = f$ i $\mathrm{Im}\gamma \cap [f] \setminus [[f]] \neq \emptyset$, negant la definició 4.6. $\square$

**Lema 4.1.** *Sigui $V$ una varietat algebraica real, $W \subseteq V$ una subvarietat i $p \in W$. Aleshores hi ha un entorn $U$ de $p$ tal que tots els punts de $U \cap (V \setminus W)$ poden ser connectats amb $p$ per corbes analítiques en $V$ que intersequin $W$ només en $p$.*

*Demostració.* La demostració es pot trobar en [9], Lemma 18.3. $\square$

En aquest context, la Conjectura de la rigidesa la podem expressar com:

**Conjectura 4.1.** *Tota incrustació lineal $f$ de $K$ en $\mathbb{R}^3$ és rígida.*

Demanem que $f$ sigui injectiu perquè el complex $f(K)$ sigui també una superfície polièdrica. Com $|K| \cong \mathbb{S}^2$, $f(K)$ és un poliedre i té un interior ben definit.

Gluck no només va considerar les incrustacions lineals (que resulten en poliedres) sinó **tots** els morfismes lineals $|K| \to \mathbb{R}^3$. Com demostrarem, quasi tots són rígids, i per tant quasi totes les incrustacions lineals també.

## 4.3 Rigidesa infinitesimal

Aquest tipus de rigidesa és el que un enginyer demanaria d'una estructura articulada per a ser "rígida", ja que hi ha figures que són rígides per les definicions anteriors, però físicament serien massa dèbils i inviables per ser utilitzades en una construcció. Per això, busquem una noció més estricta que la de rigidesa.

**Exemple 4.1.** Per il·lustrar-ho, imaginem que tenim una bipiràmide triangular, i un morfisme d'aquesta en $\mathbb{R}^3$ amb imatge com en la figura 10. Suposem que $\{b, c, d, e\}$ són coplanars, el triangle $\langle c, d, e\rangle$ és equilàter i tot el poliedre és simètric per l'eix $\overline{ab}$. Aquesta superfície és rígida (es pot demostrar amb el Teorema de Cauchy), però es pot veure que en la vida real el vèrtex $b$ no seria tant "rígid" com els altres i tendiria a permetre un petit moviment vertical. Aquest concepte l'anomenarem *flexió infinitesimal*.

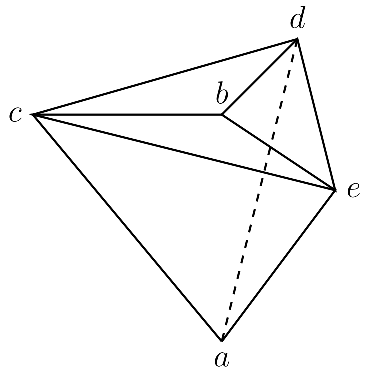


Figura 10

Primer donarem dues definicions que generalitzen aquesta idea, cadascuna amb la motivació geomètrica de la que prové. Després, demostrarem que són equivalents i les relacionarem amb altres conceptes.

### 4.3.1 $\delta$-Rigidesa

**Definició 4.7.** Un vector $(\delta_1, \ldots, \delta_n) \in \mathbb{R}^{3n}$ amb $\delta_i \in \mathbb{R}^3$ és una *$\delta$-pertorbació isomètrica* de $f = (p_i)_i$ si, per tot $(i, j) \in E$, es compleix

$$(p_i - p_j) \cdot (\delta_i - \delta_j) = 0 \tag{7}$$

Siguin $T, R \in \mathbb{R}^3$ i per cada $i \in [1..n]$ fixem $\delta_i := T + (p_i \times R)$, aleshores és fàcil veure que $(\delta_i)_i$ és una $\delta$-pertorbació isomètrica de $f$ i la anomenem *$\delta$-congruència*. Tota $\delta$-pertorbació que no sigui d'aquesta forma és una *$\delta$-flexió*. Si n'existeix alguna, diem que $f$ és *$\delta$-flexible*; en cas contrari, $f$ és *$\delta$-rígid*.

Veiem que podem reinterpretar (7) com un sistema lineal de $3n - 6$ equacions (veure obs. 4.4) amb $3n$ incògnites $(\delta_i)_i \in \mathbb{R}^{3n}$. Aleshores totes les $\delta$-pertorbacions de $f$ formen el nucli de l'aplicació lineal

$$L_f : \mathbb{R}^{3n} \longrightarrow \mathbb{R}^{3n-6}, (\delta_i \mid i \in [1..n]) \longmapsto ((p_i - p_j) \cdot (\delta_i - \delta_j) \mid (i, j) \in E_<).$$

Excepte en el cas en què $f$ degeneri a un segment, les $\delta$-congruències formen un subespai de dimensió 6 de $\mathrm{Ker}L_f$ (veure final de obs. 4.5). Així, $f$ és $\delta$-rígid si i només si $\dim(\mathrm{Ker}L_f) = 6$. Si $f$ és degenerat, és fàcil veure que $f$ ha de ser $\delta$-flexible.

La idea geomètrica que hi ha darrere el concepte de $\delta$-rigidesa és la següent: Suposem que tenim una flexió diferenciable $t \mapsto f_t$ de $f$. Aleshores, per tot $(i,j) \in E$ ha d'existir una constant $a \geq 0$ tal que per tot $t$,

$$||p_i(t) - p_j(t)||^2 = a$$

i si derivem respecte $t$,

$$(p_i(t) - p_j(t)) \cdot (p_i'(t) - p_j'(t)) = 0.$$

Per tant, els valors $(p_i'(t))_i$ formen una $\delta$-pertorbació de $f_t$ i indiquen cap a on es mou cada vèrtex $p_i(t)$ de $f_t$. En general, la derivada temporal en $t = 0$ de qualsevol flexió diferenciable de $f$ en dóna una $\delta$-pertorbació. En el cas que tal flexió comencés tangent a $[[f]]$, vol dir que $f_0$ segueix una flexió rígida a primer ordre, i per tant, la derivada serà de la forma $p_i'(0) = T + (p_i(0) \times R)$ on $T$ correspon a una translació i $R$ a una rotació, ja que com ha de ser una corba contínua, el desplaçament de $\mathbb{R}^3$ al què "s'assembla" ha de ser propi: una reflexió provocaria una discontinuïtat.

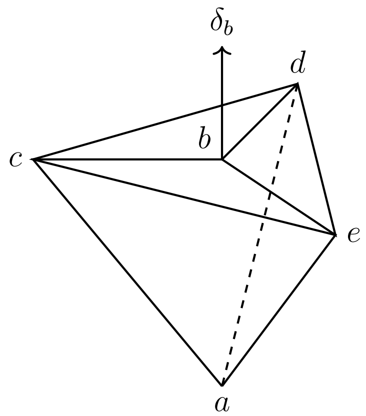


Figura 11: De l'exemple 4.1, $(0, \delta_b, 0, 0, 0)$ en seria una $\delta$-flexió.

### 4.3.2 $\omega$-Rigidesa

**Definició 4.8.** Un conjunt de valors $\{\omega_{ij} \in \mathbb{R} \mid (i,j) \in E\}$ és una $\omega$-flexió d'un morfimse $f = (p_i)_i$ si:

1. Per tot $i, j$, es té la simetria $\omega_{ij} = \omega_{ji}$.
2. Per tot $i \in [1..n]$, es té $\sum_{j \in E_i} \omega_{ij}(p_i - p_j) = \mathbf{0}$ on $E_i := \{j \in [1..n] \mid (i,j) \in E\}$.

Si existeix una $\omega$-flexió no nula de $f$, diem que $f$ és *$\omega$-flexible*, si no, *$\omega$-rígid*.

Per simetria tant de la definició anterior com de $E$, tenim $\#\{\omega_{ij}\}_{i,j} \leq 3n-6$. Aleshores, anàlogament a la $\delta$-rigidesa, podem veure la condició 2 de la definició com un sistema lineal de $3n$ equacions ($\mathbb{R}^3$ per cada $i$) amb $3n-6$ incògnites $(\omega_{ij})_{(i,j)\in E_<}$. Les solucions són les $\omega$-flexions de $f$ i formen el nucli de l'aplicació lineal

$$M_f : \mathbb{R}^{3n-6} \longrightarrow \mathbb{R}^{3n}, (\omega_{ij} \mid (i,j) \in E_<) \longmapsto (\sum_{j\in E_i} \omega_{ij}(p_i - p_j) \mid i \in [1..n])$$

Aleshores, $f$ és $\omega$-rígid si i només si $\dim(\mathrm{Ker} M_f) = 0$.

Recordem que una $\delta$-pertorbació correspon a vèrtexs i cada $\delta_i$ indica la direcció que pren cada vèrtex en una flexió de $f$. Per una $\omega$-flexió, cada $\omega_{ij}$ correspon a una aresta $\overline{p_ip_j}$ i $\omega_{ij}$ n'indica la velocitat angular amb la que varia l'angle diedral.

Sigui $t \mapsto f_t$ una flexió diferenciable de $f$. Per tot $t$, suposem $f_t$ injectiva (per tant, $f_t(K)$ és un poliedre) i denotem per $\theta_{ij}(t)$ l'angle diedral interior de $\overline{p_i(t)p_j(t)}$. Aleshores

$$\theta'_{ij}(t)\frac{p_i(t) - p_j(t)}{||p_i(t) - p_j(t)||}$$

és la velocitat angular d'una de les cares incidents a $\overline{p_i(t)p_j(t)}$ respecte l'altra. Si situem $p_i(t)$ en l'origen, cada moviment entre dues cares adjacents és una corba de rotacions, en el grup $SO(3)$, que comença per $Id$. Fixem una cara $c_0$ i per ordre cíclic d'adjacència les següents $(c_1, c_2, \dots)$. Aleshores el moviment de $c_2$ respecte $c_0$ és la composició de les rotacions de $c_2$ respecte $c_1$ i de $c_1$ respecte $c_0$, i la velocitat angular n'és la suma[6]. Així, de forma inductiva fins completar el cicle, mirem $c_0$ respecte a sí mateixa passant per totes les altres i tenim que la composició de totes les rotacions és la identitat i per tant la velocitat angular és $\mathbf{0}$. És a dir,

$$\sum_{j\in E_i} \theta'_{ij}(t)\frac{p_i(t) - p_j(t)}{||p_i(t) - p_j(t)||} = \mathbf{0}$$

Si definim $\omega_{ij} := \frac{\theta'_{ij}(0)}{||p_i(0)-p_j(0)||}$ i $p_i := p_i(0)$, obtenim una $\omega$-flexió de $f_0 = f$.

Si $f$ és rígid per la definició 4.6, qualsevol desplaçament de $\mathbb{R}^3$ preserva tots els angles diedrals de $f(|K|)$, per això les velocitats angulars han de ser totes 0, que és el que hem definit com $\omega$-rígid.

Seguint l'exemple 4.1, el moviment de la $\delta$-flexió de la figura 11 equivaldria a la $\omega$-flexió indicada en la figura 12, per certs $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+$ i 0 per les arestes sense valor. Ja que moure $b$ amunt faria obrir els angles de $\overline{cd}, \overline{de}, \overline{ce}$ i tancar els de $\overline{bc}, \overline{bd}, \overline{be}$.

[6]Gluck utilitza que l'espai tangent del grup de Lie $SO(3)$ és l'àlgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$ i la composició de rotacions en $SO(3)$ correspon a la suma d'elements en $\mathfrak{so}(3)$.

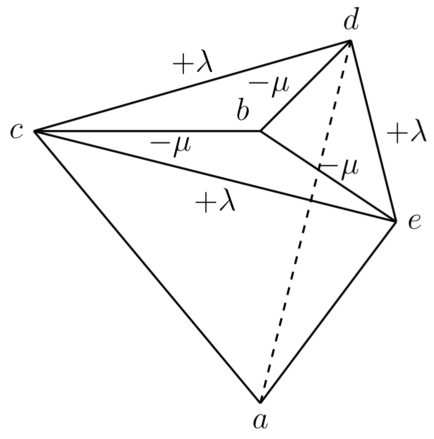


Figura 12

### 4.3.3 Equivalència

**Proposició 4.2.** *Per tot morfisme $f$, les aplicacions $L_f, M_f$ són adjuntes entre sí.*

*Demostració.* Siguin $\delta := (\delta_i)_i, \omega := (\omega_{ij})_{(i,j)\in E_<}$. Aleshores, l'adjunció de $L_f, M_f$ correspon a veure que es té la igualtat

$$L_f(\delta) \cdot \omega = \delta \cdot M_f(\omega)$$

Procedim a expandir-la:

$$\begin{aligned}
L_f(\delta) \cdot \omega &= \sum_{(i,j)\in E_<} (p_i - p_j) \cdot (\delta_i - \delta_j)\omega_{ij} \\
&= \sum_{(i,j)\in E_<} (p_i - p_j) \cdot \delta_i\omega_{ij} + \sum_{(i,j)\in E_<} (p_j - p_i) \cdot \delta_j\omega_{ij} \\
&\overset{*}{=} \sum_{(i,j)\in E} (p_i - p_j) \cdot \delta_i\omega_{ij} \\
&= \sum_i \delta_i \cdot (\sum_{j\in E_i} \omega_{ij}(p_i - p_j)) \\
&= \delta \cdot M_f(\omega)
\end{aligned}$$

Per $*$, en la segona suma, hem intercanviat $i, j$ i hem usat que, per simetria de $E$, hi ha bijecció entre $E_<$ i $E \setminus E_<$, donada per $(i, j) \mapsto (j, i)$.

□

**Proposició 4.3.** *La $\delta$-rigidesa i la $\omega$-rigidesa són equivalents.*

*Demostració.* Sigui $f$ un morfisme de $K$. Aleshores,

$$\begin{aligned} f \text{ és } \delta\text{-rígid} &\iff \dim(\mathrm{Ker} L_f) = 6 \\ &\iff L_f \text{ és exhaustiva} \\ &\overset{*}{\iff} M_f \text{ és injectiva} \\ &\iff \dim(\mathrm{Ker} M_f) = 0 \\ &\iff f \text{ és } \omega\text{-rígid} \end{aligned}$$

Per $*$, hem utilitzat la proposició 4.2. □

**Definició 4.9.** Ajuntem les $\delta$- i $\omega$- rigideses sota el terme *rigidesa infinitesimal*.

### 4.3.4 Propietats

**Teorema 4.1.** *Rigidesa infinitesimal implica rigidesa.*

*Demostració.* Utilitzarem principalment el Teorema de la funció implícita, aplicat a la funció que envia cada morfisme als quadrats de les longituds de les seves arestes

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}^{3n} &\longrightarrow \mathbb{R}^{3n-6} \\ (p_i)_i &\longmapsto (||p_i - p_j||^2 \mid (i,j) \in E_<) \end{aligned}$$

que és analítica i la seva diferencial en un morfisme $f = (p_i)_i$ és

$$\begin{aligned} d\Phi_f : \mathbb{R}^{3n} &\longrightarrow \mathbb{R}^{3n-6} \\ (\delta_i)_i &\longmapsto (2 \cdot (p_i - p_j) \cdot (\delta_i - \delta_j))_{i,j} \end{aligned}$$

Observem que $d\Phi_f = 2L_f$. Aleshores

$$\begin{aligned} f \text{ és infinitesimalment rígid} &\iff f \text{ és } \delta\text{-rígid} \\ &\iff \dim(\mathrm{Ker} L_f) = 6 \\ &\iff L_f \text{ és exhaustiva} \\ &\iff d\Phi_f \text{ és exhaustiva} \\ &\iff f \text{ és un punt regular de } \Phi \end{aligned}$$

Pel Teorema de la funció implícita, si $f$ és un punt regular de $\Phi$, el conjunt $\Phi^{-1}(\Phi(f))$ és localment una 6-varietat, i per definició (obs. 4.5), és $[f]$. A més, com hem vist també en el final de l'observació 4.5, $[[f]]$ és una 6-varietat (perquè com és $\delta$-rígid, sabem que no degenera a una recta). Per això, sabent que $[[f]] \subseteq [f]$ i que tenen la mateixa dimensió a prop de $f$, vol dir que hi ha un entorn en el que $[f]$ i $[[f]]$ coincideixen, que és la definició 4.4 de rígid. □

Abans d'enunciar el següent teorema, recordem que un poliedre $P$ en $\mathbb{R}^3$ és estrictament convex si per tot vèrtex $v \in \mathcal{C}_0(P)$ existeix un pla $\pi$ tal que $|P| \cap \pi = v$.

**Teorema 4.2.** *Tot poliedre estrictament convex és infinitesimalment rígid.*

Aquest teorema va ser demostrar primer per M. Dehn el 1916 i per H. Weyl l'any següent. Tot i això, la demostració que donarem aquí és la d'Alexandrov, qui va adaptar l'argument utilitzat en el Teorema de Cauchy.

*Demostració.* Demostrarem que tot morfisme lineal $f$ de $K$ en $\mathbb{R}^3$ amb imatge estrictament convexa és $\omega$-rígid. Ho farem per reducció al absurd:

Suposem que $f$ és $\omega$-flexible, i. e. existeix una $\omega$-flexió no trivial $\{\omega_{ij}\}_{i,j}$ de $f$. Sigui $G$ el graf polièdric de $f(K)$. Acolorim les arestes amb els signes de la $\omega$-flexió

$$C : \mathcal{C}_1(K) \longrightarrow \{-1, 0, +1\}, \overline{v_i v_j} \longmapsto \operatorname{sgn}(\omega_{ij})$$

Sigui $H \subseteq G$ el subgraf de les arestes amb color $\neq 0$. Com hem suposat que $f$ és $\omega$-flexible, sabem que $H \neq \emptyset$. Aleshores, podem aplicar la Proposició 3.1 de Grafs a qualsevol component connexa de $H$ i coloració $C|_H$, per deduir que existeix un vèrtex amb índex $\leq 2$. Però el Lema 4.2 al peu ens assegura que tots els vèrtexs de $f$ tenen índex $\geq 4$, ja que havíem suposat que existia algun $\omega_{ij} \neq 0$. Contradicció! $\square$

**Lema 4.2.** *Sigui $f$ estrictament convex i $p_{i_0}$ un vèrtex de $f$. Tenim que els veïns de $p_{i_0}$ són els vèrtexs $\{p_i \mid i \in E_{i_0}\}$. Siguin $\{\omega_i \in \mathbb{R} \mid i \in E_{i_0}\}$ tals que $\sum_i \omega_i(p_i - p_{i_0}) = \mathbf{0}$. Aleshores, o bé per a tot $i$, $\omega_i = 0$ o bé l'índex* [7] *de $p_{i_0}$ és $\geq 4$.*

*Demostració.* Sigui $\pi$ el pla tal que $f(|K|) \cap \pi = \{p_{i_0}\}$, que existeix per la convexitat estricta de $f$; $A \subset \mathbb{R}^3$ el semiespai obert de $\mathbb{R}^3 \setminus \pi$ que conté $f(|K|) \setminus \{p_{i_0}\}$; i $\pi_0 - p_{i_0}$ el pla vectorial de $\pi$, $A_0 := A - p_{i_0}$ el semiespai vectorial de $A$, que $\mathbf{0} \in \overline{A}$. Aleshores es té que els vectors $p_i - p_{i_0}$ pertanyen a $A_0$.

Demostrarem dues coses: (a) si l'índex és 0, aleshores tot $\omega_i$ ha de ser 0; (b) L'índex no pot ser 2.

(a) Si l'índex és 0, vol dir que els $\omega_i$ són tots $\geq 0$ o tots $\leq 0$. Suposem que hi ha algun $\omega_i \neq 0$. Com tots els vectors $p_i - p_{i_0}$ pertanyen a $A_0$, la suma $\sum_i \omega_i(p_i - p_{i_0})$ pertany a un dels costats de $\mathbb{R}^3 \setminus \pi_0$, que no conté el $\mathbf{0}$. Contradicció!

(b) Suposem que l'índex és 2. Aleshores els vèrtexs veïns es poden re-enumerar, mantenint l'ordre cíclic, de tal manera que quedin separats en els de signe $\geq 0$ i en els $\leq 0$ (semblant al pas final de la demostració de Cauchy, veure figura 5). Per convexitat estricta, existeix un altre pla $\pi'$ que passa per $p_{i_0}$ i que separa els vèrtexs amb signe $\geq 0$ dels de $\leq 0$, que com a mínim n'hi ha un de cada. Aleshores,

[7] En aquest cas, completaríem els $\{\omega_i\}$ a una $\omega$-flexió de $f$ i aleshores l'índex de $p_{i_0}$ es defineix com en la demostració del Teorema 4.2, amb la funció de coloració $C$.

pels signes dels $\omega_i$, tots els vectors $\omega_i(p_i - p_{i_0})$ amb $\omega_i \neq 0$ es troben en el mateix semiespai obert de $\mathbb{R}^3 \setminus (\pi' - p_{i_0})$ i la seva suma també, i per tant no pot ser $\mathbf{0}$. $\square$

Com a resum, acabem la secció amb el següent diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
\text{Convexitat estricta} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow, "\text{T. 4.2}"] & \text{Convexitat} \arrow[d, Rightarrow, "\text{T. 3.2 (Cauchy)}"] \\
\text{Rigidesa Infinitesimal} \arrow[r, Rightarrow, "\text{T. 4.1}"] & \text{Rigidesa}
\end{tikzcd}
$$

## 4.4 Teorema de Gluck

**Teorema 4.3** (Gluck). *Els morfismes infinitesimalment rígids de $K$ en $\mathbb{R}^3$ corresponen a un subconjunt obert i dens en $\mathbb{R}^{3n}$ i els rígids els inclouen.*

*Demostració.* Sigui $IF \subseteq \mathbb{R}^{3n}$ el conjunt dels morfismes infinitesimalment flexibles. Un mofisme $f = (p_i)_i \in \mathbb{R}^{3n}$ pertany a $IF$ si i només si $\dim \mathrm{Ker} L_f > 6$. Veiem que la matriu de $L_f$ està únicament formada per $0, x_i - x_j, y_i - y_j$ o $z_i - z_j$, per certs $(i, j)$, i on $p_i = (x_i, y_i, z_i)$. Aleshores, la condició $\dim \mathrm{Ker} L_f > 6$ és equivalent a imposar que tota submatriu $(3n - 6) \times (3n - 6)$ de $L$ tingui determinant $= 0$. Això ens donarà un sistema polinomial sobre les coordenades de $f$. Per tant, $IF$ és una varietat algebraica en $\mathbb{R}^{3n}$. La pregunta que queda és: és una subvarietat pròpia o és el total?

La resposta ens la dóna un teorema de Steinitz. D'entre les diferents maneres que hi ha d'enunciar-lo, la versió que utilitza Gluck en [7] pàg. 237 és:

**Teorema 4.4.** *Tota superfície triangulada simplement connexa admet una incrustació lineal en $\mathbb{R}^3$ tal que la seva imatge és un poliedre estrictament convex.*

Per tant, existeix un morfisme estrictament convex, que pel teorema 4.2 és infinitesimalment rígid. Aleshores $IF$ és una subvarietat pròpia i els poliedres infinitesimalment rígids, $\mathbb{R}^{3n} \setminus IF$, formen un conjunt dens i obert. Pel teorema 4.1, aquests estan inclosos dins del conjunt dels rígids. $\square$

# 5 Connelly

En aquest capítol construirem el primer contraexemple a la Conjectura de la rigidesa, que Robert Connelly va donar el 1977 en [4]. Ho farem en 2 grans passos: primer trobar una superfície que admeti morfismes flexibles a $\mathbb{R}^3$, i convertir-ne un d'aquests en una immersió, després en una incrustació, per tal de que la seva imatge sigui un poliedre en $\mathbb{R}^3$.

## 5.1 Els octaedres de Bricard

Les 3 famílies d'octaedres que Bricard va estudiar en [2], les va anomenar:

I. Eix de simetria

II. Tetraedres unicursals oposats i Pla de simetria

III. Tetraedres unicursals adjacents en proporció

En aquest treball només descriurem les dues primeres famílies ja que són les que van servir com a base per a la construcció del contraexemple de Connelly en [4]. Començarem per construir la part essencial que els octaedres tenen en comú.

### 5.1.1 Disc flexible

Sigui $D$ la superfície polièdrica que anomenarem "disc", formada pels vèrtexs $\{n, v_1, v_2, v_3, v_4\}$, les arestes $\{\overline{nv_i}\}_i \cup \{\overline{v_i v_{i+1 \bmod 4}}\}_i$ i les cares formades per tots els triangles possibles, que són $\{\langle n, v_i, v_{i+1 \bmod 4}\rangle\}_i$.

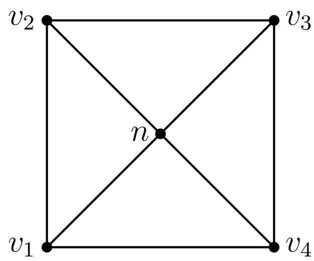


Figura 13: El disc $D$.

Sigui $f_0 : |D| \to \mathbb{R}^3$ un morfisme lineal injectiu per cares, és a dir, que les imatges dels 4 triangles de $D$ no siguin degenerades. A continuació, seguint la terminologia de Gluck, el que demostrarem és que la classe d'isometria de $f_0$ mòdul congruència $([f_0]/\approx)$ en general té 2 elements i localment en $f_0$ és una corba.

Definim les distàncies entre vèrtexs de la imatge de $f_0$: per $i, j \in [1..4]$, siguin $\ell_{N,i} := ||\overline{f_0(n)f_0(v_i)}||, \ell_{i,j} := ||\overline{f_0(v_i)f_0(v_j)}||$. Sigui $f$ un morfisme isomètric a $f_0$

definit per $N = f(n), p_i = f(v_i)$. Si a més imposem que $n, v_1, v_2, v_3$ tinguin la mateixa imatge per $f_0$ i $f$, l'únic vèrtex "lliure" és $v_4$ i la condició $f \sim f_0$ equival a:

$$\begin{aligned} ||\overline{p_4 N}|| &= \ell_{N,4} \\ ||\overline{p_4 p_1}|| &= \ell_{1,4} \\ ||\overline{p_4 p_3}|| &= \ell_{3,4} \end{aligned} \tag{8}$$

A part de $f \sim f_0$, afegim també la condició $||\overline{p_1 p_3}|| = \ell_{1,3}$. Aleshores tenim que en general només existeixen 2 possibles $p_4$ tals que $f \sim f_0$. Visualment, $p_4$ el podem situar en qualsevol de les dues bandes del pla donat per $\langle N, p_1, p_3 \rangle$, excepte en un cas degenerat detallat a continuació. Aleshores, la idea és utilitzar $||\overline{p_1 p_3}||$ com a paràmetre, ja que no és una aresta de $D$ i determina $f$ completament, per definir la flexió veritable de $f_0$ que mantingui $p_4$ en el mateix costat, per tant, contínua.

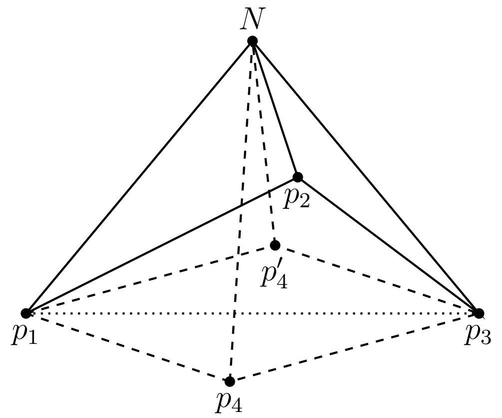


Figura 14: Exemple de les dues possibles imatges de $v_4$, que són $p_4, p_4'$.

Explicat de manera visual, per exemple, podem pensar $D$ com en una piràmide quadrada sense base i controlar $\overline{p_1 p_3}$ es tradueix en agafar dos vèrtexs oposats de la base amb cada mà i moure'ls. Així, $p_4$ queda determinat (excepte desplaçament de tota la piràmide) pel nostre moviment de $p_1, p_3$.

Ara calcularem explícitament els dos possibles valors de $p_4$. Sense pèrdua de generalitat, apliquem una desplaçament en $\mathbb{R}^3$ tal que $N = (0,0,0), p_1 = (p_{1x}, 0, 0), p_3 = (p_{3x}, p_{3y}, 0)$. Expandim les equacions (8) a:

$$p_{4x}^2 + p_{4y}^2 + p_{4z}^2 = \ell_{N,4}^2 \tag{9}$$

$$(p_{4x} - p_{1x})^2 + p_{4y}^2 + p_{4z}^2 = \ell_{1,4}^2 \tag{10}$$

$$(p_{4x} - p_{3x})^2 + (p_{4y} - p_{3y})^2 + p_{4z}^2 = \ell_{3,4}^2 \tag{11}$$

Restem (9) - (10), obtenim $2p_{4x}p_{1x} - p_{1x}^2 = \ell_{N,4}^2 - \ell_{1,4}^2$ i aïllem $p_{4x}$:

$$p_{4x} = \frac{\ell_{N,4}^2 - \ell_{1,4}^2 + p_{1x}^2}{2p_{1x}}$$

i $p_{1x} \neq 0$ perquè suposem que $p_1 \neq N$. Restem (10) - (11), obtenim $M + 2p_{4y}p_{3y} - p_{3y}^2 = \ell_{1,4}^2 - \ell_{3,4}^2$ amb $M := (p_{4x} - p_{1x})^2 - (p_{4x} - p_{3x})^2$ constant perquè només depèn de $p_{4x}$ i ja el tenim en forma explícita. Aleshores, aïllem $p_{4y}$:

$$p_{4y} = \frac{\ell_{1,4}^2 - \ell_{3,4}^2 - M + p_{3y}^2}{2p_{3y}}$$

i sabem que $p_{3y} \neq 0$, perquè, si no, $\langle N, p_1, p_3 \rangle$ seria degenerat. Per últim, ara que ja tenim explícitament $p_{4x}, p_{4y} \in \mathbb{R}$, de (9) aïllem $p_{4z}$:

$$p_{4z} = \pm\sqrt{\ell_{N,4}^2 - p_{4x}^2 - p_{4y}^2}$$

Aquí és on veiem que hi ha 2 possibles solucions per $p_4$, excepte quan $p_{4z} = 0$, que vol dir que $p_4 \in \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ o que $\ell_{N,4}^2 = p_{4x}^2 + p_{4y}^2$ i si desfem el desplaçament inicial, vol dir que $p_4$ és coplanar amb $\{N, p_1, p_3\}$. En general, si $p_{4z}$ no "creua" el zero, tenim una flexió veritable de $f_0$, inclús diferenciable, a partir del paràmetre $t = ||\overline{p_1 p_3}||$, o alternativament, podem fixar $N, p_1, p_2$ i definir $p_3, p_4$ en funció de $t$.

El següent pas és completar $D$ a un octaedre, amb un segon disc.

### 5.1.2 L'octaedre

Afegim al disc $D$ un nou vèrtex $s$ adjacent als $\{v_i\}_i$, de tal forma que formin un disc, i definim $f(s) = S$. Així el resultat és una superfície tancada que anomenem octaedre $\mathcal{O}$, i hi distingim les següents parts:

1. L'*equador* és el quadrilàter format per $\{p_i\}_i$.
2. Els *pols nord* i *sud* són $N$ i $S$ respectivament.
3. Els *hemisferis nord* i *sud* són els discos formats per cada pol amb l'equador.

En els següents dos apartats donarem unes restriccions que permeten determinar $S$ per a què pugui existir una flexió de $f$ a partir de la flexió de l'hemisferi nord $D$.

### 5.1.3 Simetria axial

Correspon al Tipus I de Bricard. Restringim l'equador a un paral·lelogram, i. e. costats oposats han de tenir longituds iguals:

$$
\begin{aligned}
||\overline{p_1p_4}|| &= ||\overline{p_2p_3}|| \\
||\overline{p_1p_2}|| &= ||\overline{p_3p_4}||
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Aleshores definim la recta $L$:

1. Si $\{p_i\}_i$ són linealment independents, aleshores $(p_1 + p_3)/2$ i $(p_2 + p_4)/2$ són punts diferents i podem definir la recta $L$ que determinen.
2. Si $\{p_i\}_i$ es troben en un pla $\pi$, tenim que $(p_1 + p_3)/2 = (p_2 + p_4)/2$ i definim $L$ com la recta que passa per aquest punt i és perpendicular a $\pi$.

**Lema 5.1.** *Els segments $\overline{p_1p_3}$ i $\overline{p_2p_4}$ són perpendiculars a $L$.*

*Demostració.* Per demostrar-ho, partim de (12), les elevem al quadrat i les expandim com a producte escalar,

$$|p_1 - p_4|^2 = |p_2 - p_3|^2 \Rightarrow p_1^2 - 2p_1p_4 + p_4^2 = p_2^2 - 2p_2p_3 + p_3^2 \tag{13}$$

$$|p_1 - p_2|^2 = |p_3 - p_4|^2 \Rightarrow p_1^2 - 2p_1p_2 + p_2^2 = p_3^2 - 2p_3p_4 + p_4^2 \tag{14}$$

Aquí, la multiplicació entre vectors (e. g. $p_1p_2$) denota el producte escalar estàndard en $\mathbb{R}^3$. Aleshores, si sumem (13) i (14),

$$2p_1^2 - 2p_1p_4 + p_4^2 - 2p_1p_2 + p_2^2 = p_2^2 - 2p_2p_3 + 2p_3^2 - 2p_3p_4 + p_4^2$$

i passem tots els termes al mateix costat de la igualtat, cancel·lant-ne alguns

$$2p_1^2 - 2p_1p_2 - 2p_1p_4 + 2p_2p_3 - 2p_3^2 + 2p_3p_4 = 0$$

i dividim per 2,

$$p_1^2 - p_1p_2 - p_1p_4 + p_2p_3 - p_3^2 + p_3p_4 = 0 \tag{15}$$

D'altra banda, calculem el producte escalar entre vectors de $L$ i $\overline{p_1p_3}$:

$$
\begin{aligned}
((p_1 + p_3)/2 - (p_2 + p_4)/2) \cdot (p_1 - p_3) &= \\
1/2 \cdot ((p_1 + p_3) - (p_2 + p_4)) \cdot (p_1 - p_3) &= \\
1/2 \cdot (p_1 + p_3 - p_2 - p_4) \cdot (p_1 - p_3) &= \\
1/2 \cdot (p_1^2 + p_1p_3 - p_1p_2 - p_1p_4 - p_3p_1 - p_3^2 + p_2p_3 + p_3p_4) &= \\
1/2 \cdot (p_1^2 - p_1p_2 - p_1p_4 + p_2p_3 - p_3^2 + p_3p_4)&
\end{aligned}
$$

i per (15) sabem que és igual a 0. Hem demostrat la perpendicularitat de $\overline{p_1p_3}$.

De forma molt semblant, si restem (13) i (14),

$$-2p_1p_4 + p_4^2 + 2p_1p_2 - p_2^2 = p_2^2 - 2p_2p_3 + 2p_3p_4 - p_4^2$$

movem termes a un costat i dividim per 2,

$$p_1p_2 - p_1p_4 - p_2^2 + p_2p_3 - p_3p_4 + p_4^2 = 0 \tag{16}$$

Com abans, calculem per separat el següent producte escalar:

$$\begin{aligned}((p_1+p_3)/2 - (p_2+p_4)/2)\cdot(p_2-p_4) = \\ 1/2\cdot(p_1+p_3-p_2-p_4)\cdot(p_2-p_4) = \\ 1/2\cdot(p_1p_2+p_2p_3-p_2^2-p_2p_4-p_1p_4-p_3p_4+p_2p_4+p_4^2) = \\ 1/2\cdot(p_1p_2-p_1p_4-p_2^2+p_2p_3-p_3p_4+p_4^2) =\end{aligned}$$

que per (16), és igual a 0. Per tant, $\overline{p_2p_4}$ és perpendicular a $L$. $\square$

Sigui $\tau : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la reflexió axial per $L$. Pel Lema 5.1, que acabem de demostrar, tenim que $\tau(p_1) = p_3$ i $\tau(p_2) = p_4$, és a dir que l'equador de $\mathcal{O}$ és invariant per $\tau$, i podem definir $\tilde{\tau}$ la permutació $1234 \mapsto 3412$ tal que $\tau(p_i) = p_{\tilde{\tau}(i)}$. Per això, si considerem l'equador només com a corba, $\tau$ n'és l'aplicació antipodal.

Ara si definim $S := \tau(N)$, hem completat $\mathcal{O}$ i veiem que $\tau$ és l'aplicació antipodal a tot l'octaedre. Si $D$ es flexiona com en 5.1.1, les distàncies $||\overline{Sp_i}||$ també seran constants, ja que si $j := \tilde{\tau}^{-1}(i)$, veiem que $||\overline{Sp_i}|| = ||\overline{\tau(N)\tau(p_j)}||$ i com $\tau$ és una isometria, $||\overline{\tau(N)\tau(p_j)}|| = ||\overline{Np_j}|| = \ell_{N,j}$, que ja sabem que és constant.

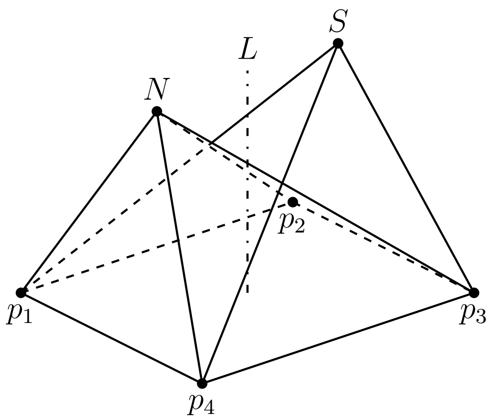


Figura 15: Exemple d'un octaedre de Bricard de tipus I.
En aquesta posició, l'equador es troba en un pla.

### 5.1.4 Simetria planar

Correspon al Tipus II de Bricard. Molt similarment als de tipus I, imposem igualtats entre parells d'arestes de l'equador, però amb la diferència que aquestes siguin adjacents en lloc d'oposades:

$$||\overline{p_1p_4}|| = ||\overline{p_1p_2}||$$
$$||\overline{p_3p_4}|| = ||\overline{p_3p_2}||$$

Sigui $\pi$ el pla tal que $p_1, p_3 \in \pi$ i sigui perpendicular a $\overline{p_2p_4}$. Si $\{p_i\}_i$ són linealment independents, el punt $(p_2 + p_4)/2$ no pertany a $\overline{p_1p_3}$ les restriccions asseguren que existeixi aquest pla, ja que $p_2$ i $p_4$ coincideixen en projectar-se sobre la recta $\overline{p_1p_3}$.

Sigui $\tau$ la simetria axial per $\pi$. Comprovem que l'equador és invariant per $\tau$: $p_1, p_3$ ja pertanyen a $\pi$, per tant $\tau(p_1) = p_1$ i $\tau(p_3) = p_3$, i com $\overline{p_2p_4}$ és perpendicular i $\pi$ conté $(p_2 + p_4)/2$, $\tau$ permuta els vèrtexs $p_2 \leftrightarrow p_4$. Per això podem definir la permutació $\tilde{\tau}$ del conjunt $[1..4]$ com $1234 \mapsto 1432$, la transposició $(2, 4)$, que mirant l'equador com a corba poligonal dels $\{v_i\}_i$ només, $\tau$ és la simetria per l'"eix" $\{v_1, v_3\}$.

De forma similar al cas anterior, definim $S := \tau(N)$ per completar l'octaedre. Com $\tau$ és una isometria que deixa invariant l'equador, per tot $i \in [1..4]$, sent $j := \tilde{\tau}^{-1}(i)$, les distàncies $||\overline{Sp_i}|| = ||\overline{\tau(N)\tau(p_j)}|| = ||\overline{Np_j}|| = \ell_{N,j}$ són constants.

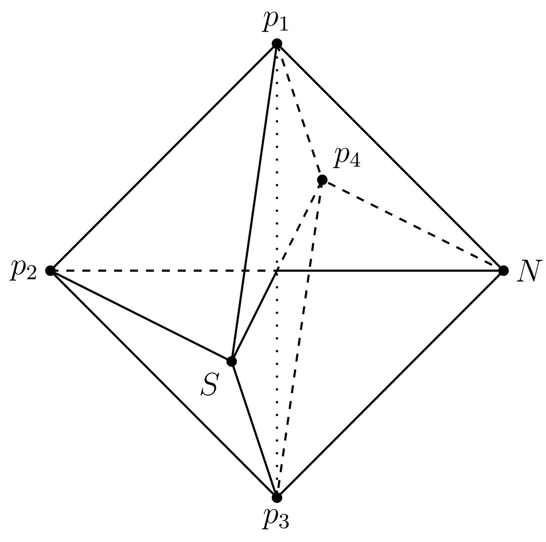


Figura 16: Exemple d'un octaedre de tipus II.
La línia puntejada $\overline{p_1p_3}$ indica intersecció de cares.

## 5.2 El contraexemple

El principal problema que tenen els octaedres de Bricard són les autointerseccions. És fàcil veure que no hi ha cap manera de situar $N, S, \{p_i\}_i$ perquè $f$ sigui injectiva. Per exemple, del tipus II, sigui quina sigui la posició dels vèrtexs, les arestes $\overline{p_2N}$ i $\overline{p_4S}$ s'intersequen en $\pi$. Per això, Connelly es va basar en un d'aquests octaedres i hi va afegir cares i altres figures de tal forma que el poliedre seguís sent flexible i homeomorf una esfera però no tingués autointerseccions. A partir d'aquí, ja no ens referirem als morfismes directament, sinó només per la seva imatge. Per exemple, si hi ha un morfisme injectiu, diem que existeix una superfície incrustada en $\mathbb{R}^3$, etc.

Partim del següent octaedre $\mathcal{O}_1$ (fig. 17) que es troba en el pla $\mathbb{R}^2$, que podem pensar inclòs en $\mathbb{R}^3$ com $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$. Siguin $p_3 \in \,]-\infty, 0[\, \times \{0\}$ en l'eix horitzontal, $p_1$ en el tercer quadrant i $p_2$ la reflexió (en el pla) de $p_1$ per l'eix horitzontal; siguin $q_1, q_2, q_3$ les reflexions de $p_1, p_2, p_3$ per l'origen. Aleshores, $\mathcal{O}_1$ és l'octaedre format pels pols $p_3$ i $q_3$ i l'equador $\overline{p_1p_2q_2q_1p_1}$.

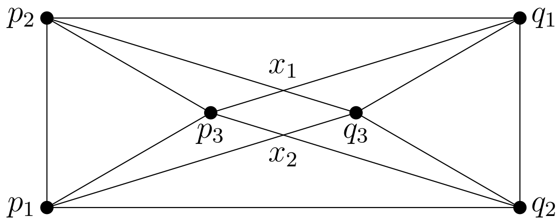


Figura 17: L'octaedre $\mathcal{O}_1$.

En termes de la classificació de Bricard, aquest seria de tipus I, perquè encara que estigui en un pla, l'equador és un rectangle i els pols són simètrics per la recta $L = \{(0,0)\} \times \mathbb{R}$, que coincideix amb la recta construïda en el Lema 5.1 de l'apartat 5.1.3. Per tant l'octaedre $\mathcal{O}_1$ és flexible.

**Proposició 5.1.** *Existeix una superfície polièdrica flexible $\mathcal{S}$ immergida en $\mathbb{R}^3$ que només té un número finit de punts singulars. A més, aquests ocorren en els interiors (relatius) de certes arestes de $\mathcal{S}$.*

*Demostració.* Partim de $\mathcal{O}_1$ en el pla $\pi \subseteq \mathbb{R}^3$.

Primer ens centrem en l'hemisferi nord. Escollim un dels dos costats de $\pi$, i. e. una de les dues components de $\mathbb{R}^3 \setminus \pi$, i l'anomenem $A$. Sigui $\sigma$ un dels seus triangles, definim un punt $r(\sigma) \in A$ tal que la seva projecció ortogonal sobre $\pi$ caigui dins de l'interior de $\sigma$. Aleshores substituïm $\sigma$ per el con des de $r(\sigma)$ a $sk_1(\sigma)$, i. e. un tetraedre sense base. Repetim aquest procés pels quatre triangles de l'hemisferi.

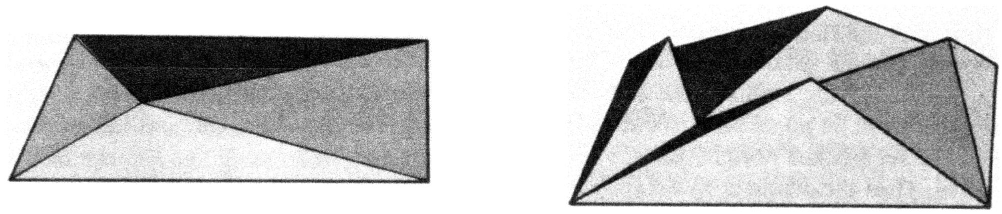

Figura 18: Procés aplicat a l'hemisferi nord de $\mathcal{O}_1$ (extret de [6]).

Ara escollim l'altra component $B$, que no sigui $A$, i repetim el mateix procediment per l'hemisferi sud, de manera que els $r(\sigma)$ estiguin en $B$.

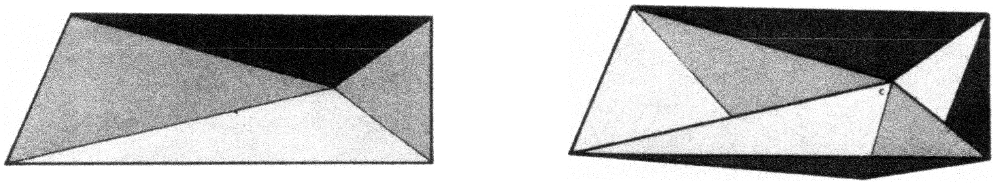

Figura 19: El mateix, aplicat a l'hemisferi sud de $\mathcal{O}_1$ (extret de [6]).

En ajuntar els hemisferis modificats, obtenim la superfície $\mathcal{S}$.

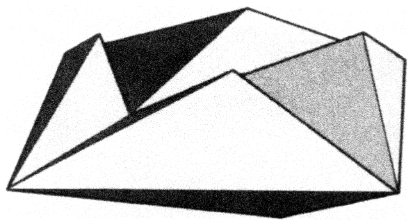

Figura 20: La superfície $\mathcal{S}$ (extret de [6]).

És fàcil veure que $S$ és la imatge d'una immersió lineal i que els únics punts singulars són $\{x_1\} := \overline{p_3q_1} \cap \overline{p_2q_3}$ i $\{x_2\} := \overline{p_3q_2} \cap \overline{q_3p_1}$ (fig. 17). $\square$

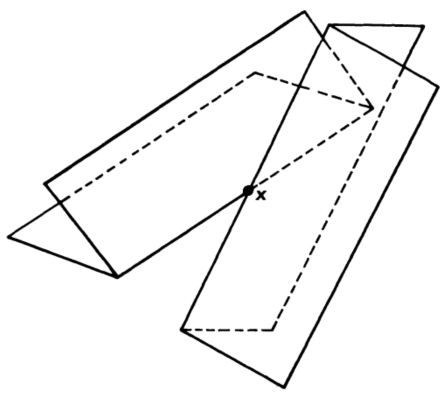


Figura 21: Comportament local de $x_1$ o $x_2$ (extret de [4]).

Per solucionar aquests punts, Connelly es va inventar una figura que anomenarem el "plec" (en anglès, *crinckle*), que dóna marge a una de les arestes i al mateix temps manté la flexibilitat de la superfície diedral de l'altra.

**Proposició 5.2.** *Sigui $D$ una superfície diedral amb eix $E$, $x \in E$, $U$ un entorn de $x$ en $\mathbb{R}^3$, i $F$ un tancat tal que $F \setminus \{x\}$ és dins d'una de les components de $\mathbb{R}^3 \setminus D$. Aleshores, existeix una superfície polièdrica*[8] *flexible $K$ incrustada en $\mathbb{R}^3$ tal que $K \setminus U$ i $D \setminus U$ són iguals i segueixen la mateixa flexió, i $K \cap F = \emptyset$.*

Suposem que l'angle de $D$ no és 180°.

*Demostració.* Construirem el plec $K$.

Sigui $\pi$ el pla bisector de $D$, i $H$ el semiplà de $\pi$ al que $D$ s'hi projecta ortogonalment, obtenint $\partial H = E$. És a dir, si $\Omega$ és la component de $\mathbb{R}^3 \setminus D$ que conté el menor angle dels dos possibles de $D$, podem definir $H := \Omega \cap \pi$. Siguin $p_1, p_3 \in E \setminus \{x\}$ en cada costat de $x$ prou a prop. Sigui $O \in H$ sobre el bisector perpendicular de $\overline{p_1 p_3}$ en el pla $\pi$, a prop d'$E$. Siguin $N, S$ els dos únics punts de $D$ que es projecten ortogonalment sobre $O$; $N, S$ es troba cadascun en un semiplà diferent de $D$. Si $O$ està prou a prop d'$E$, aleshores $N, S$ estan dins d'$U$.

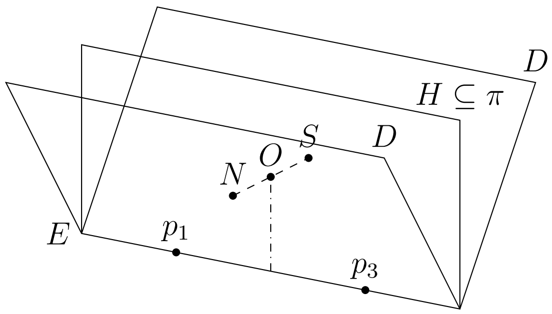


Figura 22

Considerem el cercle $C \subset \pi$ de centre $O$ i que passa per $p_1, p_3$. Escollim $p_2 \in C \setminus H$ i prou a prop de $p_1$. Sigui (l'únic) $p_4 \in C \cap H$ tal que $||\overline{p_1 p_2}|| = ||\overline{p_3 p_4}||$. Com hem vist abans en 5.1.4, $N, S, \{p_i\}_i$ determinen un octaedre de Bricard de tipus II. No l'utilitzarem al complet, sinó que només escollirem un subconjunt incrustable en $\mathbb{R}^3$ i que segueixi mantenint el grau de flexibilitat que té. Definim:

$$Z := (E \setminus \overline{p_1 p_3}) \cup \overline{p_1 p_2 p_4 p_3}$$

[8] No és exactament com en la definició 2.5, ja que té 2 cares no acotades.

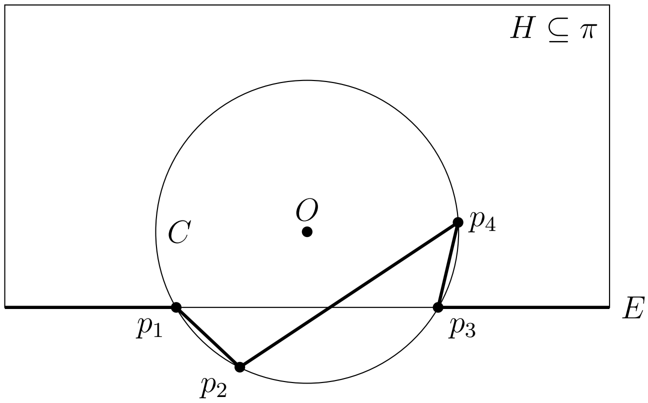


Figura 23: Vista únicament del pla $\pi$ amb $Z$ destacat.

Sigui $K := D\backslash(\{N,S\}*\overline{p_1p_3})\cup(\{N,S\}*Z)$, on l'operació $*$ és la junta de dos conjunts (en anglès, *joint*) $A*B = \bigcup_{a\in A, b\in B}\overline{ab}$. És a dir, per cada pol $P \in \{N,S\}$, treiem de $D$ el triangle $\langle P, p_1, p_3\rangle$ i afegim els triangles $\langle P, p_1, p_2\rangle$, $\langle P, p_2, p_4\rangle$, $\langle P, p_4, p_3\rangle$.

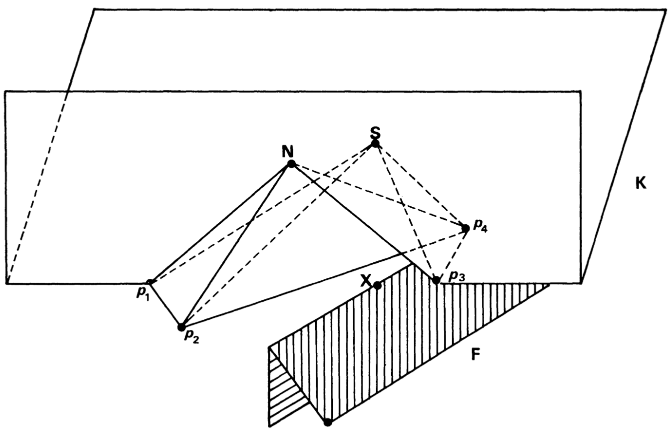


Figura 24: El plec o *crinkle* i el punt singular $x$ (extret de [4]).

Clarament $K$ flexiona perquè $D$ també ho fa i $p_1$, $p_3$ estan a una distància fixa.

Com que $Z$ és una corba poligonal incrustada en $\pi$ i $N,S$ estan estrictament a cada banda de $\mathbb{R}^3\setminus\pi$, el conjunt $\{N,S\}*Z$ és una superfície polièdrica incrustada. Per tant, $K$ també ho és.

Si $F\setminus\{x\}$ està a l'altra banda de $D$ respecte $H$, aleshores traslladem $K$ fins que $x$ estigui a prop de $p_3$. Si $p_2$ està a prou prop de $p_1$, $K$ podrà evitar $F$.

Si $F\setminus\{x\}$ està en la mateixa banda que $H$, movem $K$ fins que $p_1$ estigui prop de $x$ perquè $K$ eviti $F$. Clarament, aquestes alteracions es poden fer prou a prop de $x$ per a que $K$ sigui i es mogui de forma idèntica a $D$ fora de $U$.

□

**Teorema 5.1.** *Existeix un poliedre flexible en* $\mathbb{R}^3$.

*Demostració.* Sigui $\mathcal{S}$ la superfície construïda en la proposició 5.1. Sabem que cada punt singular $x$ de $\mathcal{S}$ localment es comporta com a la Figura 21. Aleshores, com hi ha un número finit d'aquests, podem construir entorns disjunts $\{U_i \mid x_i \in U_i\}_i$ i aplicar la Proposició 5.2 per construir un plec en cadascun. Fora de $\bigcup_i U_i$, la superfície resultant $\mathcal{S}'$ seguirà sent idèntica i flexionant de la mateixa manera que $\mathcal{S}$ i com els plecs solucionen els punts singulars, $\mathcal{S}'$ està incrustada en $\mathbb{R}^3$. $\square$

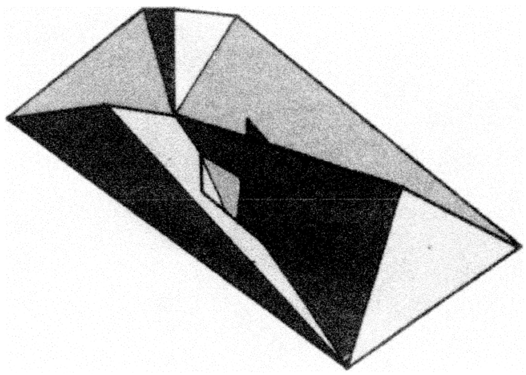

Figura 25: Resultat final de la construcció (extret de [6]).

# Referències


[1] C. Stephanos (Atenes). “L’Intermédiaire des Mathématiciens”. A: vol. 1. 1. Problema nº 376. Gauthier–Villars et fils, 1894.

[2] R. Bricard. “Mémoire sur la théorie de l’octaèdre articulé”. A: *Journal de mathématiques pures et appliquées.* 5a sèr. 3 (1897), pàg. 113 - 148.

[3] A. L. Cauchy. “Sur les polygones et polyèdres, seconde mémoire”. A: *Journal de l’École Impériale Polytechnique* 9 (1813), pàg. 87 - 99.

[4] R. Connelly. “A counterexample to the rigidity conjecture for polyhedra”. A: *Publications mathématiques de l’I.H.É.S.* 47 (1977), pàg. 333 - 338.

[5] R. Connelly. “An Immersed Polyhedral Surface which Flexes”. A: *Indiana University Mathematics Journal* 25.10 (1976), pàg. 965 - 972.

[6] R. Connelly. “The Rigidity of Polyhedral Surfaces”. A: *Mathematics Magazine* 52.5 (1979). Ed. de Ltd. Taylor & Francis, pàg. 275 - 283.

[7] H. Gluck. “Almost all simply connected closed surfaces are rigid”. A: *Geometric Topology.* Springer Berlin Heidelberg, 1975, pàg. 225 - 239.

[8] N. H. Kuiper. “Sphères polyédriques flexibles dans $E^3$”. A: *Séminaire N. Bourbaki* 514 (1979), pàg. 147 - 168.

[9] Andrew H. Wallace. “Algebraic Approximation of Curves”. A: *Canadian Journal of Mathematics* 10 (1958), pàg. 242 - 278.

[10] M. Aigner; G. M. Ziegler. “Proofs from THE BOOK”. A: Springer, 1998. Cap. 13–14.