UNIVERSITAT DE BARCELONA
Facultat de Matemàtiques i Informàtica

DOBLE GRADO DE ADE Y MATEMÁTICAS

Trabajo de fin de grado

Teoría de Carteras: Gestión Activa y Pasiva

Autor: Dylan Maya Breukers

Director:	Dr. David Márquez Carreras
Realizado en:	Departamento de Matemáticas e Informática
Director:	Dr. Josep Vives Santa Eulalia
Realizado en:	Departamento de Matemática Económica, Financiera y Actuarial
Barcelona,	15 de enero de 2025

Abstract

The objective of this work is to understand and present in detail the theory of portfolio management, based on the theoretical foundations established in the field of finance. In particular, the analysis focuses on the theory developed by Harry Markowitz, which introduces the concept of diversification and portfolio optimization through the maximization of expected return and the minimization of risk. Additionally, the Capital Asset Pricing Model (CAPM) will be studied, which proposes a relationship between an asset's risk and its expected return, serving as a key tool for asset valuation.

Throughout this work, the differences and similarities between active and passive portfolio management approaches will be explored, highlighting the advantages and disadvantages of each in financial practice. Finally, these theoretical models will be applied in a practical case, allowing for the visualization and comparison of their effectiveness in the real-world management of investment portfolios, providing conclusions about their utility and application in different market contexts.

Resumen

El objetivo de este trabajo es comprender y exponer de manera detallada la teoría de gestión de carteras, partiendo de los fundamentos teóricos establecidos en el ámbito de las finanzas. En particular, se aborda el análisis de la teoría desarrollada por Harry Markowitz, que introduce el concepto de diversificación y optimización de carteras mediante la maximización del retorno esperado y la minimización del riesgo. Adicionalmente, se estudiará el modelo de Capital Asset Pricing Model (CAPM), el cual propone una relación entre el riesgo de un activo y su rendimiento esperado, sirviendo como una herramienta clave para la valoración de activos.

A lo largo del trabajo, se explorarán las diferencias y similitudes entre los enfoques de gestión de carteras activas y pasivas, destacando las ventajas y desventajas de cada uno en la práctica financiera. Finalmente, se aplicarán estos modelos teóricos en un caso práctico, que permitirá visualizar y comparar su efectividad en la gestión real de carteras de inversión, proporcionando conclusiones sobre su utilidad y aplicación en diferentes contextos de mercado.

2020 Mathematics Subject Classification. 11G05, 11G10, 14G10

Agradecimientos

En primer lugar, me gustaría expresar mi más sincero agradecimiento a mi familia, no solo por el apoyo y esfuerzo que supone que un hijo decida estudiar en otra comunidad autónoma, sino también por su constante respaldo en todos los aspectos de mi vida: académico, profesional y personal. Nadie mejor que ellos conoce las circunstancias que hemos tenido que afrontar en algunos momentos, y no existen palabras suficientes para expresar mi gratitud y compensar todo lo que han hecho por mí.

Por otro lado, quiero agradecer profundamente a Arnau, Guillem e Iván, mis compañeros de carrera pero, sobre todo, amigos. Han sido una parte fundamental de mi vida universitaria. Nada de esto habría sido posible sin ellos, y la mayor parte de los recuerdos que guardo de esta etapa tienen a ellos como protagonistas.

También me gustaría extender mi agradecimiento especial a Joan Pastor, Daniel Jordà, Pau Mundet, Álvaro Albores, Guillermo Leopold y Álvaro Luque, entre otros. Aunque no pertenecen a la misma promoción, hemos convivido y compartido innumerables experiencias que siempre recordaré con cariño.

Por último, quiero expresar mi agradecimiento a Josep Vives y David Márquez. Sin su ayuda y guía, este trabajo no habría sido posible. Además, valoro enormemente su cercanía y disposición para abordar los diferentes aspectos del desarrollo de este proyecto.

A menudo se habla de lo mucho que debemos aprender en la universidad, destacando principalmente el aspecto académico. Sin embargo, con frecuencia olvidamos que, cuando uno crece y comienza a madurar, lo más valioso que se aprende no es solo en el ámbito académico, sino como persona. Las amistades en esta etapa no están determinadas por compartir espacio, como ocurre en el colegio, ni por la búsqueda de un propósito profesional, como en el mundo laboral. En este sentido, el hecho de vivir solo, por un cambio de ciudad u otro motivo, es solo uno de los muchos factores que contribuyen al crecimiento personal y a comprender mejor cómo funciona el mundo. Este aprendizaje, combinado con las experiencias compartidas, constituye uno de los legados más valiosos que la universidad puede ofrecer.

Por todo esto y mucho más, muchas gracias.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Hoy en día la Gestión de Carteras aún siendo compleja está presente en todos los ámbitos de nuestra vida, es inconcebible la sociedad como está estructurada hoy en día sin la influencia de los grandes fondos de inversión como Bridgewater o también bancos de inversión como Goldman Sachs, ellos en cierta manera (por no decir completamente) determinan el comportamiento del mercado a causa de sus decisiones que repercuten en la vida de miles de millones de personas.

Por ejemplo, cuando un fondo como Blackrock o Vanguard deciden dar recomendaciones de compra o venta sobre cierto paquete de acciones sobre un sector en determinado repercuten en otros mercados hundiéndolos o aupándolos. De esta manera vemos la relación de la sociedad con la bolsa y al revés.

Por ejemplo, en épocas con mayor cantidad de conflictos sociales se ha visto que una empresa como Palantir (conocida por la inversión institucional americana en proyectos relacionados con el servicio militar) puede llegar a multiplicar por 4 su valor tras los conflictos de Israel y Palestina, lo que en Wall Street se conoce como 4-Bagger. Esta nomenclatura la dispuso Peter Lynch, director del fondo Fidelity Magellan Fund desde 1977 hasta 1989 y que consiguió un increíble retorno medio del 30 %. Por ejemplo, también a causa del COVID-19 inversiones en Pfizer y AstraZeneca vieron considerables incrementos en el precio de sus acciones.

He elegido este tema debido a que, desde que tengo uso de razón, me ha interesado profundamente todo lo relacionado con la actualidad. Inicialmente, desarrollé un interés por la economía en su conjunto, especialmente en el ámbito macroeconómico. Sin embargo, a medida que fui creciendo, mi curiosidad por el funcionamiento de los mercados se fue enfocando de manera más específica hacia el mercado bursátil, lo que, con el tiempo, se ha consolidado como mi principal aŕea de interés: las finanzas cuantitativas.

Este Trabajo Final de Grado se centra sobre todo en cómo estas instituciones de inversión realizan el Análisis y Gestión de Carteras a nivel matemático basándonos en el modelo de Markowitz o Teoría de la Cartera Eficiente, que es un enfoque para la optimización de inversiones que busca maximizar el retorno esperado de una cartera para un nivel dado de riesgo o minimizar el riesgo para un retorno esperado, y del CAPM, modelo financiero que establece una relación lineal entre el riesgo sistemático de un activo, medido por su beta, y su retorno esperado. También desarrollaremos unas carteras de Gestión Activa y otras de Gestión Pasiva en base a estos dos modelos con un ejemplo práctico que veremos finalmente. Para ello en primer lugar introduciremos algunos conceptos y fenómenos para posteriormente desarrollar el marco teórico mencionado previamente.

Cierto es que existen otros modelos como por ejemplo el de Black Litterman, técnica de optimización de carteras que combina el modelo de media-varianza de Markowitz con las expectativas del inversor, ajustando la asignación de activos mediante una integración de la información del mercado y las opiniones subjetivas. Esto proporciona un equilibrio entre las creencias del inversor y las condiciones del mercado, ofreciendo una distribución maś estable de las ponderaciones de activos.

Sin mayores preámbulos comenzamos con unos conceptos y fundamentos indispensables para ponernos en contexto.

- **Activo**: recurso, del que se espera obtener, en el futuro, beneficios económicos.
- **Pasivo**: deuda o compromiso que ha adquirido una empresa.
- **Fondo de inversión**: instrumento financiero que agrupa el capital de varios inversores para invertir en una cartera diversificada.
- **ETF**: similar a los fondos de inversión, pero se negocia en bolsas de valores como acciones.
- **Fondo monetario**: fondo de inversión que invierte en instrumentos de deuda a corto plazo y alta calidad.
- **Bolsa**: un mercado organizado donde se compran y venden acciones, bonos y otros valores.

Estos son algunos conceptos que serán de relevancia más adelante sobre todo en el caso práctico. Ahora bien también debemos definir algunos conceptos que son fundamentales de la teoría de Markowitz, se ahondará más en profundidad en estos primeros temas estas definiciones.

- **Rentabilidad**: es el beneficio comparado con los recursos propios invertidos para obtener esos beneficios.
- **Riesgo**: imprevisibilidad de los sucesos futuros que pueden afectar a la inversión y comportamiento económico.
- **Líquidez**: capacidad de generar efectivo de manera inmediata.
- **Plazos**: periodo de tiempo en el que se espera obtener una rentabilidad.

Para la comprensión de este trabajo se requieren de más conceptos que se pueden desarrollar a medida que vayamos avanzando en el mismo.

Capítulo 2

Teoría de Markowitz

2.1. Hipótesis del modelo

Como es bien sabido, los inversores buscan constantemente un equilibrio entre el riesgo y el rendimiento. Dependiendo de la disposición de cada inversor a asumir riesgo, se emplean diferentes técnicas y modelos para gestionar sus carteras. En lo que respecta a la teoría de Harry Markowitz con su libro *Portfolio Selection* en 1952 y galardonado con el Premio Nobel de Economía en 1990, se abordarán conceptos clave como la diversificación y la frontera eficiente, además de otros relacionados, como el riesgo. Por otro lado, el modelo de valoración de activos financieros (CAPM) se tratará más adelante, dado que su desarrollo requiere una comprensión previa de la teoría de Markowitz. A lo largo de este capítulo desarrollaremos principalmente conceptos del libro *Risk Theory and Portfolio Management*, de la bibliografía.

La teoría de Markowitz (o teoría de la media-varianza) busca encontrar una cartera óptima a través de la maximización del beneficio (de ahora en adelante Retorno Esperado) y minimizando el riesgo mediante la diversificación y el estudio de la Frontera Eficiente.

En el caso de la Teoría de la Media-Varianza hay 4 supuestos clave:

- Los inversionistas son racionales, de modo que siempre persiguen aumentar el beneficio minimizando los riesgos.

- El riesgo se mide como la varianza o desviación estándar.

- Las expectativas de los inversionistas sobre los retornos esperados se distribuyen de manera normal.

- Cualquier inversionista tiene acceso a la misma información de modo que se le da a todos un horizonte único.

Estos supuestos evidentemente tienen también unas limitaciones como por ejemplo:

- Riesgos que no se vean reflejados en la varianza.

- Considera que los retornos futuros son predecibles y esto no siempre es una perspectiva realista en mercados volátiles.

- No tiene en cuenta el riesgo asociado a la liquidez y apalanque.

A lo largo de este trabajo desarrollaremos técnicas de Álgebra, Cálculo y Estadística. Para ello empezaremos con algunas definiciones.

Definición 2.1.1. *Un espacio de probabilidad es una terna* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*, donde:*

1. Ω *es un conjunto no vacío llamado espacio muestral.*
2. $\mathcal{F}$ *es una sigma-álgebra sobre* Ω*, cuyos elementos se denominan sucesos.*
3. P *es una función de probabilidad que asigna a cada suceso* $A \in \mathcal{F}$ *un número* $P(A)$ *tal que se satisfacen las siguientes propiedades:*
   a) $P(A) \geq 0$ *para todo* $A \in \mathcal{F}$ *(no negatividad),*
   b) $P(\Omega) = 1$ *(normalización),*
   c) *Si* $A_1, A_2, \ldots$ *son sucesos mutuamente disjuntos en* $\mathcal{F}$*, entonces* $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ *(sigma-aditividad).*

2.2. Definición de Variable Aleatoria

Definición 2.2.1. *Una variable aleatoria es una aplicación* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *que cumple la siguiente propiedad:*

$$\forall B \in \mathcal{B},\ X^{-1}(B) \in \mathcal{F}.$$

Una variable aleatoria proporciona, por tanto, una asignación numérica a los elementos del espacio muestral. La condición, denominada de mesurabilidad, significa que podremos calcular cantidades como:

$$P(X^{-1}(B)) = P\{\omega : X(\omega) \in B\},$$

para cualquier $B \in \mathcal{B}$*. Donde* B *es la* σ*-álgebra generada por los conjuntos abiertos de* $\mathbb{R}$*, es decir, la más pequeña de las* σ*-álgebras de partes de* $\mathbb{R}$ *que contienen todos los conjuntos abiertos de* $\mathbb{R}$ *respecto a la topología euclidiana, se denomina la* σ*-álgebra de Borel.*

En nuestro caso abarcaremos:

- **Variable aleatoria discreta:** si su ley está concentrada en un conjunto numerable. Por ejemplo la Ley de Bernoulli, Binomial, Geométrica, etc.
- **Variable aleatoria continua:** cumplen que:

  $$P\{X = x\} = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

  Se dice que una variable aleatoria X es *absolutamente continua* (o que tiene una *ley absolutamente continua*) con densidad f si su función de distribución F se puede expresar como:

  $$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\, dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

  Por ejemplo, la Ley Exponencial, Normal, Uniforme, etc.

Las variables aleatorias tienen una serie de propiedades importantes que permiten analizar su comportamiento y realizar cálculos relacionados con probabilidades y estadísticas.

Observación 2.2.2. En nuestro trabajo estamos en el caso discreto y de variables positivas.

1. **Esperanza matemática (o valor esperado):** La esperanza matemática de una variable aleatoria X, denotada como $\mathbb{E}[X]$, es el valor promedio ponderado que se espera obtener al realizar muchas repeticiones del experimento aleatorio. Para una variable aleatoria discreta X con función de masa de probabilidad $p(x) = P(X = x)$, la esperanza (suponiendo finita) o momento de orden uno se define si:
$$\mathbb{E}[|X|] = \sum_x |x|\, p(x) < +\infty, \quad \text{como} \quad \mathbb{E}[X] = \sum_x x\, P(X = x).$$

2. **Varianza:** La varianza de una variable aleatoria X, denotada $\mathrm{Var}(X)$, mide la dispersión de los valores de X con respecto a su esperanza finita, necesitamos momento de orden dos también finito. Se define como:
$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2.$$
Para una variable aleatoria discreta:
$$\mathrm{Var}(X) = \sum_x (x - \mathbb{E}[X])^2\, p(x).$$

3. **Desviación estándar:** La desviación estándar es la raíz cuadrada de la varianza. Se denota como σ_X o $\mathrm{Desv}(X)$:
$$\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}.$$

2.3. Retorno Esperado y Varianza

Desde ahora hasta el final consideraremos dos instantes de tiempo: en primer lugar el presente, el momento 0, y el futuro, que es el momento 1. Supongamos que hacemos una inversión en un activo al precio actual, S(0), y desconocemos el precio futuro S(1), representado por una variable aleatoria.

Definimos la variable aleatoria $S(1)$ como una función $S(1) : \Omega \to [0, \infty)$, donde el conjunto $[0, \infty)$ es el conjunto de los posibles valores de $S(1)$.

Por lo tanto, la función $S(1)(\omega)$, donde $\omega \in \Omega$, asigna a cada escenario ω un valor $S(1)(\omega) \in [0, \infty)$.

Como estamos en el caso discreto, la medida de probabilidad $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ está completamente determinada por las probabilidades $P(\{\omega_i\}) = p_i$, donde $p_i \in (0, 1]$ y la suma de todas las probabilidades es igual a 1, es decir:
$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Por lo tanto, para cualquier conjunto de eventos $A \in \mathcal{F}$, la probabilidad de A está dada por la suma de las probabilidades de los ω_i que pertenecen a A:
$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i.$$

La *Teoría de Markowitz* se fundamenta en el análisis de los rendimientos pasados de los activos. En este contexto, aparece, aunque de forma implícita, el concepto de *esperanza condicionada*.

La esperanza condicionada resulta útil para otorgar una versión dinámica al modelo. Por ejemplo, si un activo tiene un rendimiento promedio del 5 %, pero ocurre un cambio significativo en las condiciones del mercado, dicho concepto permite ajustar las expectativas de rendimiento para reflejar la nueva información disponible.

Definición 2.3.1. *Sean X e Y variables aleatorias definidas sobre el mismo espacio de probabilidad. La esperanza condicionada de X dado Y, denotada como $\mathbb{E}[X \mid Y]$, es una variable aleatoria que toma el valor $\mathbb{E}[X \mid Y = y]$ cuando $Y = y$.*

El valor $\mathbb{E}[X \mid Y = y]$ se define como:

$$\mathbb{E}[X \mid Y = y] = \sum_x x\, P(X = x \mid Y = y), \quad \textit{si } (X, Y) \textit{ son discretas y } P(Y = y) \neq 0.$$

suponiendo que las sumas correspondientes son absolutamente convergentes.

Después de haber definido los requisitos matemáticos, podemos entrar en materia en cuanto a la teoría de Markowitz.

Definición 2.3.2. *El **retorno** sobre una inversión S es una variable aleatoria $K : \Omega \to \mathbb{R}$, definida como:*

$$K = \frac{S(1) - S(0)}{S(0)}$$

Observación 2.3.3. $S(0) > 0, S(1) > 0$ en todo caso.

Observación 2.3.4. El valor o **rendimiento esperado** es:

$$\mathbb{E}[K] = \frac{\mathbb{E}[S(1)] - S(0)}{S(0)}$$

De ahora en adelante, la esperanza se denotará como $\mu = E(K)$.

En base a estas expresiones, podemos dar diferentes relaciones que se dan y como se puede apreciar podemos obtener los precios a raíz de los retornos y viceversa:

$$S(1) = S(0)(1 + K), \quad \mathbb{E}[S(1)] = S(0)(1 + \mu)$$

Observación 2.3.5. El hecho de que $S(1) \geq 0$ implica que $K \geq -1$.

El caso de los dividendos

Si consideramos la posibilidad de que en el momento 1 se nos pague un dividendo, debemos tenerlo en cuenta a la hora de calcular el rendimiento esperado. En este caso, además de $S(1)$, se debe incluir el ingreso adicional correspondiente al dividendo. La fórmula para la tasa de retorno está dada por:

$$K = \frac{S(1) + \mathrm{Div}(1) - S(0)}{S(0)}.$$

Observación 2.3.6. En el caso de la definición 2.3.2, omitimos el dividendo ya que $\mathrm{Div}(1) = 0$.

Definición 2.3.7. *Un **bono** es un instrumento de deuda emitido por una entidad para recaudar fondos. Al comprar un bono, el inversor presta dinero al emisor, quien a cambio se compromete a devolver el monto principal (nominal) al vencimiento y a pagar intereses periódicos, conocidos como cupón, según los términos especificados en el contrato.*

Observación 2.3.8. Estamos considerando un bono de cupón cero, es decir, que no paga intereses durante la vida del bono.

Consideremos el pago de un bono en el momento 1, B(1) = 1, comprado en el momento 0 y con valor $B(0) < 1$. Entonces, el retorno es:

$$R = \frac{1 - B(0)}{B(0)}$$

El precio del bono puede expresarse como:

$$B(0) = \frac{1}{1 + R}$$

Observación 2.3.9. Este activo es conocido como el **activo libre de riesgo.** En Europa el ejemplo más común es el Bono Alemán, por su estabilidad financiera y baja probabilidad de impago.

Ahora, comienza el segundo concepto más importante de toda la Teoría de la Media-Varianza: el asumir la Varianza como medida del riesgo. Ya habíamos definido en el capítulo previo el riesgo, que es la incertidumbre sobre el valor futuro. En nuestro contexto con Markowitz, el riesgo tiene dos consideraciones:

1. La distancia entre los valores posibles y las expectativas.
2. La posibilidad de alcanzar los valores posibles.

Definición 2.3.10. *Denominamos **riesgo** a la **varianza** o **desviación estándar** del retorno (siempre que el retorno tenga momento de orden 2).*

$$Var(K) = \mathbb{E}[(K - \mu)^2] = \mathbb{E}[K^2] - \mu^2.$$

Observación 2.3.11. $\sigma = \sqrt{Var(K)}$

Lema 2.3.12. *La varianza del retorno se puede expresar en función de la varianza de S(1).*

Demostración. De forma trivial obtenemos:

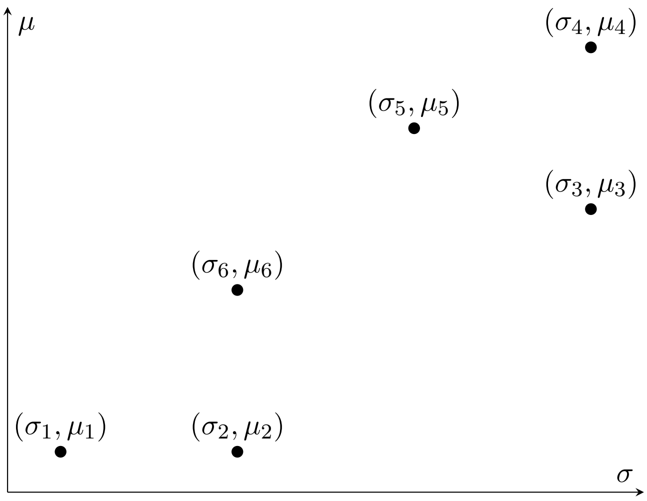
$$\mathrm{Var}(K) = \frac{\mathrm{Var}(S(1))}{S(0)^2}$$

□

Para poder obtener conclusiones, debemos considerar tanto el rendimiento esperado como la desviación típica. Recordemos que Markowitz considera un inversor racional y esto implica que dados dos activos, este preferirá el que maximice el beneficio (rendimiento esperado) y minimice la desviación típica (riesgo). De este modo obtenemos la siguiente definición.

Definición 2.3.13. *Decimos que un título con rendimiento esperado μ_1 y desviación típica σ_1* ***domina*** *a otro título con rendimiento esperado μ_2 y desviación típica σ_2 cuando:*

$$\mu_1 \geq \mu_2 \quad y \quad \sigma_1 \leq \sigma_2$$



Decimos que domina porque Markowitz asume que el inversor siente aversión al riesgo. En el siguiente gráfico, representando el plano (σ, μ) podemos apreciar que un inversor bajo nuestros supuestos preferirá la inversión 1 sobre la 2, de la misma forma que la 6 sobre la 2, o la 4 sobre la 3.

Observación 2.3.14. Este gráfico se denomina Subconjunto Eficiente

Cabe recordar que estamos considerando que el retorno esperado y su varianza es todo lo que influye en la toma de decisiones.

2.4. Carteras de dos activos

Este capítulo aborda la teoría de carteras bajo el supuesto de solo dos activos, nos sirve para simplificar y explicar en términos más sencillos la Teoría de la Media-Varianza antes de pasar al final del capítulo que aborda n activos.

Hasta ahora, nos habíamos centrado en analizar la media y la varianza del retorno de un único activo. A partir de este punto, estudiaremos el comportamiento de una **cartera**. La **media** y la **varianza** del retorno de una cartera se expresan en función de las medias y las varianzas de los activos que la componen, así como de las **covarianzas** entre dichos activos.

Esta perspectiva nos permite considerar todas las posibles estimaciones de los rendimientos de los activos y, por ende, determinar la **ponderación de mínima varianza**. Es decir, buscamos **carteras eficientes**, recordando que una cartera eficiente es aquella que no es dominada por ninguna otra, en el sentido de ofrecer el mayor rendimiento esperado para un nivel de riesgo dado, o el menor riesgo para un rendimiento esperado dado.

En esta sección, consideraremos las variables $S_1(t)$ y $S_2(t)$, que representan el valor del título 1 o 2, donde $S_i(t)$ puede tomar los valores 0 o 1. Es decir, $S_i(t) = 0$ corresponde al momento presente y $S_i(t) = 1$ corresponde al momento futuro. Recordemos que ambas siempre son positivas.

Podemos observar que surge implícitamente un nuevo concepto clave: la **diversificación**. Esta diversificación permite reducir el riesgo total de la cartera, distribuyendo la exposición al riesgo entre distintos activos.

Definición 2.4.1. *Sea x_1 la cantidad de acciones que adquirimos del título S_1 y x_2 la cantidad de S_2, definimos el* ***valor inicial del portafolio*** *o cartera como;*

$$V_{x_1,x_2}(0) = x_1 S_1(0) + x_2 S_2(0).$$

Cuando diseñamos nuestra cartera, el valor inicial de la misma representa el punto de partida. La distribución de la cantidad de acciones a comprar en cada activo se determina mediante las ponderaciones asignadas a cada uno, y estas ponderaciones suelen calcularse como el promedio ponderado de las proporciones iniciales. Como hemos mencionado:

$$w_1 = \frac{x_1 S_1(0)}{V_{x_1,x_2}(0)}, \quad w_2 = \frac{x_2 S_2(0)}{V_{x_1,x_2}(0)}.$$

Con la riqueza actual $V_{x_1,x_2}(0)$ y los pesos w_1, w_2 tales que $w_1 + w_2 = 1$, la asignación de recursos es:

$$x_1 = \frac{w_1 V_{x_1,x_2}(0)}{S_1(0)}, \quad x_2 = \frac{w_2 V_{x_1,x_2}(0)}{S_2(0)}.$$

De este modo al final del periodo 1, obtenemos el valor de la cartera:

$$V_{x_1,x_2}(1) = x_1 S_1(1) + x_2 S_2(1).$$

Estas aclaraciones son fundamentales, ya que el estudio del valor de una cartera se realizará en función de sus pesos y no de la cantidad de acciones en cada activo.**El retorno de una inversión con dos activos depende del método de asignación de recursos.**

El vector de pesos se denota como:

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}.$$

y el rendimiento como K_w.

Proposición 2.4.2. *La* ***tasa de retorno*** *K_w sobre una cartera de dos activos viene dada por la media ponderada*

$$K_w = w_1 K_1 + w_2 K_2.$$

Demostración.

$$\begin{aligned} V_{x_1,x_2}(1) &= x_1 S_1(1) + x_2 S_2(1) \\ &= \frac{w_1 V_{x_1,x_2}(0)}{S_1(0)} S_1(0)(1 + K_1) + \frac{w_2 V_{x_1,x_2}(0)}{S_2(0)} S_2(0)(1 + K_2) \\ &= V_{x_1,x_2}(0)\big(w_1(1 + K_1) + w_2(1 + K_2)\big) \\ &= V_{x_1,x_2}(0)\big(1 + w_1 K_1 + w_2 K_2\big). \end{aligned}$$

Tomando que $x_1 + x_2 = 1$:

$$K_w = \frac{V_{x_1,x_2}(1) - V_{x_1,x_2}(0)}{V_{x_1,x_2}(0)} = w_1 K_1 + w_2 K_2.$$

$\square$

Nuestra posición sobre cada una de las acciones, es decir, el número de acciones puede ser cualquier número real positivo.

Observación 2.4.3. Cuando nuestro número de acciones es positivo decimos que tenemos una **posición larga** mientras que si es negativa se denomina **operar en corto**.

Definición 2.4.4. ***Operar en corto*** *consiste en tomar prestadas unas acciones en el momento 0 para venderlas y comprarlas en el momento 1 para devolverlas al prestamista.*

Cuando se permite operar en corto, los pesos w_i pueden tomar cualquier valor real, siempre que satisfagan la condición de que la suma total sea igual a 1, es decir, $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ (en este caso, n=2). En la práctica, operar en corto está sujeto a ciertas restricciones, como costos adicionales (depósitos o comisiones). Sin embargo, para simplificar los cálculos en nuestro caso, asumimos que estas operaciones están libres de cargos.

Conjunto Alcanzable

Para determinar el riesgo de una cartera, además del riesgo de sus componentes y los pesos asociados a cada uno, es necesario tener en cuenta la relación estadística que existe entre ellos.

Definición 2.4.5. *Definimos la **covarianza**, teniendo momentos de orden dos finitos y por tanto, esperanzas finitas, como:*

$$Cov(X,Y) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])\right] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

Una vez definida la covarianza, podemos aplicarla a las variables S_1 y S_2, es decir, $\sigma_{ij} = \mathrm{Cov}(K_i, K_j)$ para $i, j = 1, 2$ en este apartado. De igual forma, a partir de la fórmula de la covarianza, podemos deducir que $\sigma_{12} = \sigma_{21}$.

Si los retornos están incorrelacionados, tenemos que $\sigma_{12} = 0$.

Definición 2.4.6. *El coeficiente de correlación $\rho_{X,Y}$ entre dos variables aleatorias X e Y se define como:*

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y},$$

donde el coeficiente mide la fuerza y la dirección de la relación lineal entre las dos variables, y su valor oscila entre -1 y 1, cumpliendo:

- $\rho_{X,Y} = 1$ *indica una correlación positiva perfecta,*
- $\rho_{X,Y} = -1$ *indica una correlación negativa perfecta,*
- $\rho_{X,Y} = 0$ *indica que no hay correlación lineal.*

Teorema 2.4.7. *El rendimiento esperado y la varianza del retorno de una cartera vienen dados por:*

$$\mu_w = \mathbb{E}(K_w) = w_1\mu_1 + w_2\mu_2,$$
$$\sigma_w^2 = Var(K_w) = w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\sigma_{12}.$$

Demostración. Este es el cálculo de las fórmulas para el rendimiento esperado y la varianza del retorno de una cartera. Fácilmente podemos observar que:

$$\mu_w = \mathbb{E}[K_w] = \mathbb{E}[w_1K_1 + w_2K_2] = w_1\mathbb{E}[K_1] + w_2\mathbb{E}[K_2] = w_1\mu_1 + w_2\mu_2$$

En el caso de la varianza, aplicando las propiedades de la misma y la covarianza, obtenemos:

$$\sigma_w^2 = \mathrm{Var}(K_w) = \mathrm{Var}(w_1K_1 + w_2K_2) = w_1^2\mathrm{Var}(K_1) + w_2^2\mathrm{Var}(K_2) + 2w_1w_2\mathrm{Cov}(K_1, K_2)$$
$$\sigma_w^2 = w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\sigma_{12}.$$

□

Observación 2.4.8. Por el Coeficiente de Correlación podemos modificar el último sumando: $\sigma_w^2 = w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2$

Observación 2.4.9. Usando la siguiente notación matricial $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$, $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2)$ y $\mathbf{C}$ matriz de covarianzas.

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix},$$

la ecuación del retorno esperado y la varianza pueden expresarse como:

$$\boldsymbol{\mu}_w = \mathbf{w}^T\boldsymbol{\mu},$$
$$\sigma_w^2 = \mathbf{w}^T\mathbf{C}\mathbf{w}.$$

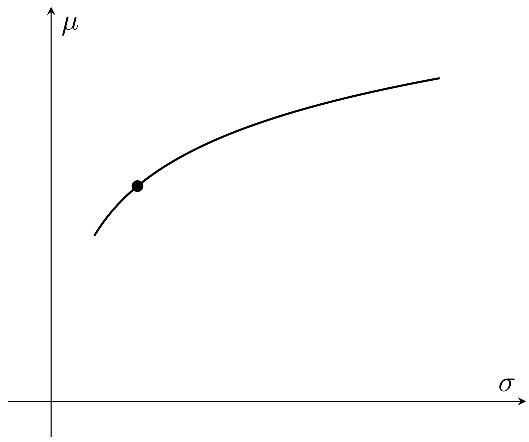
El conjunto de carteras que es posible aplicar se puede representar en el plano (σ, μ). Asumiendo que $\mu_1 \neq \mu_2$, tomamos el primer peso w_1 como parámetro, es decir, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ 1 - w_1 \end{pmatrix}$. De este modo, el vector de pesos es:

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ 1 - w_1 \end{pmatrix},$$

Nuestro retorno esperado y riesgo son los siguientes:

$$\mu_w = \mathbf{w}^T\boldsymbol{\mu} = w\mu_1 + (1 - w)\mu_2,$$
$$\sigma_w^2 = \mathbf{w}^T\mathbf{C}\mathbf{w} = w^2\sigma_1^2 + (1 - w)^2\sigma_2^2 + 2w(1 - w)\sigma_{12}.$$

Como podemos observar el conjunto alcanzable se puede parametrizar por w. En caso de que la venta en corto no fuese posible, w $\in [0, 1]$.



Este es un ejemplo de conjunto alcanzable pero restringido a la frontera eficiente ya que la curva que queda por debajo siempre es dominada por la curva superior.

Teorema 2.4.10. *Sea* $\mu_1 \neq \mu_2$ *y el coeficiente de correlación* $\rho_{12} \in (-1, 1)$. *Entonces, el conjunto alcanzable de las carteras se encuentra sobre una hipérbola cuyo eje principal está centrado en el eje vertical.*

Demostración. Sea el problema definido por las siguientes ecuaciones:

$$y = w\mu_1 + (1-w)\mu_2,$$
$$x^2 = w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w(1-w)\sigma_{12}.$$

Nuestro objetivo es llegar a una ecuación de la forma de una hipérbola:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.$$

Resolviendo para w:

$$w = \frac{y - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2}.$$

Sustituyendo esta expresión en x^2, se obtiene:

$$x^2 = \frac{1}{A}\left[(y-\mu_2)^2\sigma_1^2 + (\mu_1 - y)^2\sigma_2^2 + 2(y-\mu_2)(\mu_1 - y)\sigma_{12}\right],$$

donde

$$A = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 > 0.$$

De esta forma, se llega a:

$$x^2 = \frac{1}{A}\left(By^2 - 2Cy + D\right),$$

donde los coeficientes son:

$$B = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12},$$
$$C = \sigma_1^2\mu_2 + \sigma_2^2\mu_1 - \sigma_{12}(\mu_1 + \mu_2),$$
$$D = \sigma_1^2\mu_2^2 + \sigma_2^2\mu_1^2 - 2\sigma_{12}\mu_1\mu_2.$$

$B > 0$ si $\rho_{12} < 1$, ya que:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12} > \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2 \geq 0.$$

Reescribimos $By^2 - 2Cy + D$ como:

$$By^2 - 2Cy + D = B(y-k)^2 + c,$$

donde:

$$k = \frac{C}{B}, \quad c = \frac{1}{B}(BD - C^2).$$

Sustituyendo esta expresión en x^2, obtenemos:

$$x^2 = \frac{1}{A}\left[B(y-k)^2 + c\right].$$

Esto nos lleva a:

$$\frac{x^2}{\frac{c}{A}} - \frac{(y-k)^2}{\frac{c}{B}} = 1.$$

Por lo tanto, hemos obtenido la ecuación de una hipérbola con $h = 0$, lo que indica que está centrada en el eje vertical. Finalmente, probamos que $c \neq 0$. Operando, tenemos:

$$BD - C^2 = A\sigma_1^2\sigma_2^2(1 - \rho_{12}^2).$$

Dado que $\rho_{12} \in (-1, 1)$, $1 - \rho_{12}^2 > 0$, $B > 0$ y $A > 0$, se concluye que:

$$c = \frac{1}{B}(BD - C^2) = \frac{A}{B}\sigma_1^2\sigma_2^2(1 - \rho_{12}^2) > 0.$$

Por lo tanto, la ecuación describe efectivamente una hipérbola con su eje centrado en el eje vertical. □

Curva de mínima varianza

Nuestro objetivo, trabajando con carteras formadas por dos activos, es determinar la cartera que minimiza la varianza (o, de forma equivalente, la desviación típica del retorno).

Considerando, como hasta ahora, que no existen limitaciones o restricciones para operar en corto, se obtiene el siguiente resultado:

Teorema 2.4.11. *Considerando que operar en corto está permitido, la cartera de mínima varianza tiene pesos $w_{min} = (w_1, w_2)$, dados por:*

$$w_1 = \frac{a}{a+b}, \quad w_2 = \frac{b}{a+b},$$

donde:

$$a = \sigma_2^2 - \rho_{12}\sigma_1\sigma_2, \quad b = \sigma_1^2 - \rho_{12}\sigma_1\sigma_2.$$

excepto si ρ_{12}=1 y σ_1=σ_2 .

Demostración. Cuando $\rho_{12} = -1$, nuestra varianza se expresa como:

$$\sigma_w^2 = (w_1\sigma_1 - w_2\sigma_2)^2.$$

Tomando la parametrización estándar $w_1 = w$ y $w_2 = 1 - w$, podemos reescribirla como:

$$\sigma_w^2 = ((w\sigma_1 - (1-w)\sigma_2))^2.$$

Dado que σ_w no puede ser negativo, para $\sigma_w = 0$ (su posible valor más pequeño), obtenemos que:

$$w = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}, \quad \text{y} \quad 1 - w = \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}.$$

Observemos que si operar en corto no está permitido, se puede minimizar el riesgo hasta 0. Siguiendo con la prueba;

$$w_1 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} = \frac{\sigma_2(\sigma_1 + \sigma_2)}{(\sigma_1 + \sigma_2)^2} = \frac{a}{a+b},$$

Cuando $\rho_{12} = 1$, nuestra varianza es:

$$\sigma_w^2 = (w_1\sigma_1 + w_2\sigma_2)^2.$$

Tomando la parametrización estándar $w_1 = w$ y $w_2 = 1 - w$, podemos reescribirla como:

$$\sigma_w^2 = (w\sigma_1 + (1-w)\sigma_2)^2.$$

Con un razonamiento similar al anterior:

$$w = \frac{-\sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2}, \quad \text{y} \quad 1 - w = \frac{\sigma_1}{\sigma_1 - \sigma_2}.$$

A diferencia del caso anterior, aquí debemos exigir que $\sigma_1 \neq \sigma_2$. Como $\sigma_1, \sigma_2 \geq 0$, tenemos que w o $1 - w$ es negativo, y por tanto no podemos minimizar a 0 sin que operar en corto esté permitido. Continuando con la demostración;

$$w_1 = \frac{-\sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{-\sigma_2(\sigma_1 - \sigma_2)}{(\sigma_1 - \sigma_2)^2} = \frac{a}{a+b},$$

Cuando $\rho_{12} \in (-1, 1)$,

$$\sigma_w^2 = w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w(1-w)\rho_{12}\sigma_1\sigma_2.$$

Igualando la primera derivada a 0 y calculando la segunda derivada en función de w:

$$\frac{d^2\sigma_w^2}{dw^2} = 2\sigma_1^2 + 2\sigma_2^2 - 4\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 > 2\sigma_1^2 + 2\sigma_2^2 - 4\sigma_1\sigma_2 = 2(\sigma_1 - \sigma_2)^2 \geq 0.$$

Y por tanto hemos probado que es un mínimo global □

A lo largo de este capítulo hemos estudiado la matriz de covarianzas, buscando los pesos para la cartera de mínima varianza. La matriz de covarianzas es invertible porque estamos asumiendo que S_1 y S_2 tienen riesgo. Por la Regla de Cramer:

$$C^{-1} = \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_{12}^2}\begin{pmatrix} \sigma_2^2 & -\sigma_{12} \\ -\sigma_{12} & \sigma_1^2 \end{pmatrix},$$

$$C^{-1} \cdot \mathbf{1} = \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_{12}^2}\begin{pmatrix} \sigma_2^2 - \sigma_{12} \\ \sigma_1^2 - \sigma_{12} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{1}^T \cdot C^{-1} \cdot \mathbf{1} = \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_{12}^2}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}\right) = \frac{1}{\det(C)}(a+b).$$

con $\sigma_{12} = \rho_{12}\sigma_1\sigma_2$.

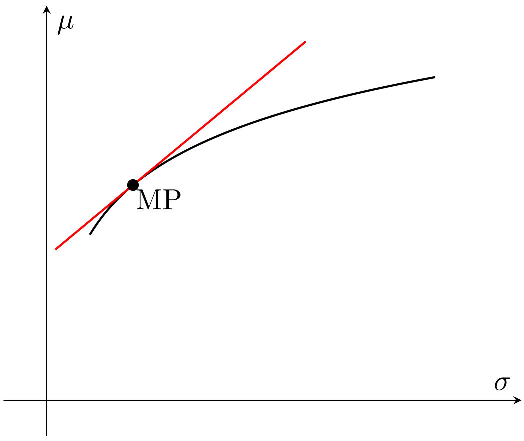
Observación 2.4.12. El vector $\mathbf{w}_{\min} = (w_1, w_2)$ de pesos de la cartera de mínima varianza tiene la forma, donde 1 es el vector con componentes 1:

$$\mathbf{w}_{\min} = \frac{C^{-1}\overrightarrow{1}}{\overrightarrow{1}^T C^{-1}\overrightarrow{1}}.$$

Añadiendo un Activo Libre de Riesgo

Recordemos que el **activo libre de riesgo** es aquel que tiene una tasa de retorno R y para el cual no existe incertidumbre al respecto. Este activo, junto con cualquier otro, se representa mediante una semirrecta que comienza en el punto $(0, R)$ y pasa por los puntos correspondientes en el plano (σ, μ).

El nuevo conjunto alcanzable se obtiene trazando una semirrecta que une un punto de este conjunto con el activo libre de riesgo.



Para encontrar la **frontera eficiente** debemos tomar la pendiente más alta de la línea, debemos considerar tambien que $R < \mu$, ya que bajo nuestro prisma de un inversor racional, en caso contrario el inversor siempre preferirá el activo libre de riesgo.

Bajo el supuesto mencionado previamente, existe una única cartera en la **frontera eficiente**, conocida como la **cartera de mercado**. La recta que conecta el activo libre de riesgo con la cartera de mercado, y que es tangente a la frontera eficiente, se denomina **recta del mercado de capitales** (**CML**, por sus siglas en inglés: *Capital Market Line*).

Definición 2.4.13. *La* ***recta del mercado de capitales (CML)*** *viene dada por la ecuación:*

$$\mu = R + \frac{\mu_m - R}{\sigma_m}\sigma.$$

donde:

- μ *es el rendimiento esperado de una cartera,*
- R *es la tasa de retorno del activo libre de riesgo,*
- μ_m *es el rendimiento esperado del mercado,*
- σ *es el riesgo (desviación estándar) de la cartera, y*
- σ_m *es el riesgo del mercado (desviación estándar del rendimiento del mercado).*

Teorema 2.4.14. *Los pesos de la* ***cartera de mercado*** *están dados por el vector:*

$$\mathbf{w} = (w, 1 - w),$$

donde:

$$w = \frac{c}{c+d}, \quad 1-w = \frac{d}{c+d},$$

y los coeficientes c y d se definen como:

$$c = \sigma_2^2(\mu_1 - R) - \sigma_{12}(\mu_2 - R),$$
$$d = \sigma_1^2(\mu_2 - R) - \sigma_{12}(\mu_1 - R).$$

Demostración. Para una cartera de pesos $(w, 1-w)$, su retorno esperado se denota como $\mu(w)$ y su riesgo o desviación estándar como $\sigma(w)$. La optimización se basa en maximizar la función de Sharpe:

$$s(w) = \frac{\mu(w) - R}{\sigma(w)},$$

donde R es la tasa libre de riesgo. Para encontrar el valor de w que maximiza $s(w)$, debemos resolver la ecuación $s'(w) = 0$. La derivada de $s(w)$ es:

$$s'(w) = \frac{\mu'(w)\sigma(w) - (\mu(w) - R)\sigma'(w)}{\sigma^2(w)}.$$

Sabemos que la derivada de $\sigma(w)$ con respecto a w es:

$$\sigma'(w) = \left(\sqrt{\sigma^2(w)}\right)' = \frac{1}{2\sigma(w)}\left(\sigma^2(w)\right)' = \frac{1}{2}\sigma(w)\left(\sigma^2(w)\right)'.$$

Igualando $s'(w) = 0$, obtenemos la ecuación:

$$2\mu'(w)\sigma^2(w) - (\mu(w) - R)\left(\sigma^2(w)\right)' = 0.$$

Ahora, desarrollando los términos, tenemos:

$$\begin{aligned}&(\mu_1 - \mu_2)\left(w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w(1-w)\sigma_{12}\right)\\ &- (w\mu_1 + (1-w)\mu_2 - R)\left(w\sigma_1^2 - (1-w)\sigma_2^2 + (1-w)\sigma_{12}\right) = 0.\end{aligned}$$

Operando, tenemos que:

$$w = \frac{c}{c+d}, \quad 1-w = \frac{d}{c+d}.$$

□

Observación 2.4.15. Los pesos de la cartera en formato matricial pueden expresarse como:

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{C}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - R\overrightarrow{1})}{\overrightarrow{1}^\top\mathbf{C}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - R\overrightarrow{1})},$$

donde $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2)^\top$ es el vector de rendimientos esperados de los activos.

Suponiendo que el mercado está compuesto por dos activos y que los inversores toman sus decisiones basándose en los rendimientos esperados de estos activos y en la relación existente entre ellos (usando los mismos valores para la esperanza, la varianza y otras métricas relevantes), todos los inversores llegarán a la misma **cartera de mercado**.

Si bien los inversores pueden seleccionar carteras diferentes de la **recta del mercado de capitales** (CML), todos invertirán en los dos activos en las mismas proporciones dentro de la cartera de mercado.

De esto, podemos concluir que el peso de un activo en la cartera de mercado representa su peso en el valor total del mercado, bajo el supuesto de que el mercado está en equilibrio.

Curvas de Indiferencia

La filosofía de relaciones de dominancia aplicada hasta ahora no es útil cuando un activo tiene un rendimiento esperado $\mu_1 \geq \mu_2$ y $\sigma_1 \geq \sigma_2$ (y viceversa).

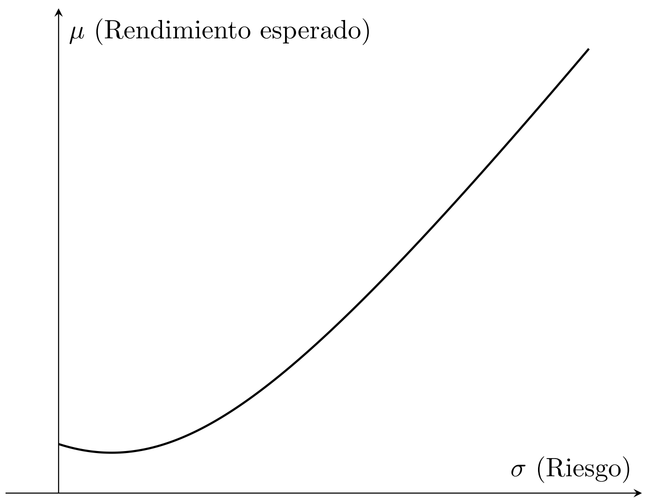
En este caso, encontrar una solución resulta complicado, ya que depende del inversor en particular, es decir, de su nivel de **aversión al riesgo**. Sin embargo, es evidente que todo inversor asumirá un mayor nivel de riesgo únicamente si se le compensa con un mayor beneficio esperado.

Esto puede representarse gráficamente utilizando **curvas de indiferencia**, que muestran las combinaciones de riesgo (σ) y rendimiento esperado (μ) entre las cuales un inversor es indiferente.

Definición 2.4.16. *Definimos la* ***curva de indiferencia*** *mediante una función de utilidad:*

$$u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},$$

donde $u(\mu, \sigma)$ asigna a cada combinación de rendimiento esperado $\mu \in \mathbb{R}$ y riesgo $\sigma \in \mathbb{R}$ un valor que representa el nivel de satisfacción del inversor.



Donde, evidentemente, podemos deducir que el inversor aceptará un mayor riesgo a cambio de un mayor rendimiento esperado.

2.5. Multiplicadores de Lagrange

Hasta ahora hemos trabajado con carteras de dos activos, es decir, solo implicaban una variable respecto a las ponderaciones w. A partir de ahora, asumiremos que el mercado está compuesto por n activos, donde buscaremos el mínimo de funciones de múltiples variables, con la restricción de que

$$w_1 + w_2 + \cdots + w_n = 1.$$

El problema de minimización proporciona un sistema de ecuaciones cuya solución nos da un candidato para el valor mínimo.

Nuestro verdadero objetivo en esta sección es resolver el siguiente problema de optimización:

$$\min f(\mathbf{v}) \quad \text{con la restricción} \quad \mathbf{g}(\mathbf{v}) = \mathbf{0},$$

donde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Asumiendo que tiene derivadas parciales, denominamos **matriz Jacobiana** a la matriz que contiene las derivadas parciales de una función vectorial. Dada una función $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, su matriz Jacobiana, denotada por $J_{\mathbf{g}}$.

Decimos que una función $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es **continuamente diferenciable** si todas las componentes de su matriz Jacobiana son funciones continuas.

Observación 2.5.1. Para una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, su matriz Jacobiana es un vector fila que contiene las derivadas parciales de f con respecto a cada una de las variables. Se define como:

$$J_f(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial v_1} & \frac{\partial f}{\partial v_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial v_n} \end{bmatrix}.$$

Observación 2.5.2. Denotamos por vector gradiente $\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}$.

Las condiciones necesarias para que $\mathbf{v}^*$ sea un mínimo, bajo los supuestos previamente mencionados, se resumen en el siguiente resultado:

Teorema 2.5.3. *Si $\mathbf{v}^*$ es solución del problema de minimización previamente mencionado, y la matriz Jacobiana de $\mathbf{g}$ tiene rango k, entonces existen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ tales que:*

$$\nabla f(\mathbf{v}^*) - (\lambda_1 \nabla g_1(\mathbf{v}^*) + \lambda_2 \nabla g_2(\mathbf{v}^*) + \cdots + \lambda_m \nabla g_m(\mathbf{v}^*)) = 0.$$

Demostración. Tomando que $g'(v^*)$ es de rango k, existe un vector k-dimensional tal que

$$\frac{\partial g}{\partial y}(v^*) \text{ es invertible.}$$

Podemos reordenar las coordenadas de manera que $v = (x, y)$, con $x \in \mathbb{R}^{n-k}$ y $y \in \mathbb{R}^k$. Por el teorema de la función implícita, existe una función h tal que $g(x, h(x)) = 0$.

Dado que $v^* = (x^*, y^*)$ es solución del problema que estamos estudiando, x^* es un mínimo de $f(x, h(x))$.

Aplicando que

$$h'(x) = -\left(\frac{\partial g}{\partial y}(x, h(x))\right)^{-1} \frac{\partial g}{\partial x}(x, h(x)),$$

obtenemos que

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x}(v^*) + \frac{\partial f}{\partial y}(v^*) h'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(v^*) - \frac{\partial f}{\partial y}(v^*) \left(\frac{\partial g}{\partial y}(v^*)\right)^{-1} \frac{\partial g}{\partial x}(v^*).$$

Definimos una matriz $1 \times k$ como:

$$A = \left(\frac{\partial f}{\partial y}(v^*) \frac{\partial g}{\partial y}(v^*)^{-1} \right).$$

De la aplicación anterior, tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(v^*) = A \frac{\partial f}{\partial x}(v^*),$$

y por la definición de A,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(v^*) = A \frac{\partial g}{\partial y}(v^*).$$

Combinando estas dos condiciones, obtenemos el resultado.

□

Los $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ son los multiplicadores de Lagrange, y la función $L(\mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda})$ se define como el **Lagrangiano** del problema. Es dada por:

$$L(\mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}) = \nabla f(\mathbf{v}^*) - (\lambda_1 \nabla g_1(\mathbf{v}^*) + \lambda_2 \nabla g_2(\mathbf{v}^*) + \cdots + \lambda_m \nabla g_m(\mathbf{v}^*)).$$

donde $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)^\top$ es el vector de multiplicadores de Lagrange y $g_1, \ldots, g_m$ son las funciones de restricción.

Observación 2.5.4. Este teorema no da conclusiones definitivas sobre el mínimo de f, más bien proporciona candidatos.

Para poder confirmar que se trata de un mínimo, necesitamos información adicional sobre las propiedades de la función objetivo y las restricciones.

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función de n variables. La **matriz Hessiana** de f en un punto $\mathbf{v}$ es la matriz cuadrada de orden $n \times n$ que contiene las segundas derivadas parciales de f con respecto a sus variables. Se define como:

$$H(f, \mathbf{v}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial v_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial v_1 \partial v_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial v_1 \partial v_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial v_2 \partial v_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial v_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial v_2 \partial v_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial v_n \partial v_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial v_n \partial v_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial v_n^2} \end{bmatrix}.$$

Observación 2.5.5. Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es **dos veces continuamente diferenciable** si todas las componentes de la matriz Hessiana son funciones continuas.

Teorema 2.5.6. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función dos veces continuamente diferenciable, tal que para cualquier $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, la matriz Hessiana $H(f, \mathbf{v})$ es semidefinida positiva. Además, sea $g(\mathbf{v}) = A\mathbf{v} - \mathbf{c}$, donde A es una matriz $k \times n$ y $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^k$. Si existen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{v}^* \in \mathbb{R}^n$ tales que $L(\mathbf{v}^*, \boldsymbol{\lambda}) = 0$, entonces $\mathbf{v}^*$ es solución del problema de minimización.*

Demostración. Escojamos un v cualquiera que satisface que $g(v) = 0$. Queremos probar que $f(v) \geq f(v^*)$. Dado que $g(v) = Av - c$, usando $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$, podemos escribir

$$\lambda_1 \nabla g_1(v^*) + \cdots + \lambda_k \nabla g_k(v^*) = A^T \lambda.$$

Sea $w = v - v^*$. Dado que $g(v) = 0$ y $g(v^*) = 0$, usando la linealidad de A tenemos que

$$0 = g(v) = g(v^* + w) = A(v^* + w) - c = Av^* + Aw - c = g(v^*) + Aw = Aw.$$

Por la fórmula de Taylor, tenemos que

$$f(v^* + w) = f(v^*) + \nabla f(v^*)w + \frac{1}{2}w^T H(f,\epsilon)w,$$

para algún punto ϵ sobre el segmento entre v^* y $v^* + w$. Ahora, tenemos que

$$f(v) = f(v^* + w) = f(v^*) + \nabla f(v^*)w + \frac{1}{2}w^T H(f,\epsilon)w = f(v^*) + A^T\lambda w + \frac{1}{2}w^T H(f,\epsilon)w.$$

Finalmente, esto se expresa como

$$f(v) = f(v^*) + (\lambda^T A)w + \frac{1}{2}w^T H(f,\epsilon)w = f(v^*) + \lambda^T Aw + \frac{1}{2}w^T H(f,\epsilon)w.$$

Como $Aw = 0$, esto se reduce a

$$f(v) = f(v^*) + \frac{1}{2}w^T H(f,\epsilon)w \geq f(v^*),$$

y por lo tanto hemos probado que v^* es un mínimo global (no estricto).

□

2.6. Carteras de múltiples activos

Ahora que hemos desarrollado todos los conceptos necesarios, como la cartera de mínima varianza, la cartera de mercado, los multiplicadores de Lagrange y el ejemplo de dos activos, estamos en condiciones de finalizar con el análisis de carteras compuestas por n activos.

Este apartado será similar al caso de dos activos, pero extrapolado a una cartera compuesta por n activos. Retomaremos los conceptos previamente abordados, generalizándolos.

En una cartera de n títulos diferentes, podemos denotar su vector de pesos como $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)^\top$, donde los pesos satisfacen la condición:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1.$$

El **conjunto alcanzable** está formado por todos los vectores de pesos $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ que satisfacen la restricción $\mathrm{w}^\top \overrightarrow{1} = 1$

Si no es posible operar en corto (es decir, pedir títulos prestados para devolverlos posteriormente), se añade la restricción $w_j \geq 0$. Bajo estos supuestos, el **conjunto alcanzable** se define como:

$$A = \left\{ \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{w}^\top \overrightarrow{1} = 1,\ w_j \geq 0 \text{ para todo } j = 1, \ldots, n \right\}.$$

Por otro lado, en cualquier otro caso supondremos que operar en corto sí es posible, eliminando la restricción $w_j \geq 0$.

Retomando lo explicado previamente, recordemos que la fórmula para calcular los pesos es:

$$w_j = \frac{x_j S_j(0)}{V(0)}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

donde x_j es el número de títulos que se poseen del activo j, $S_j(0)$ es el precio inicial del activo j, y $V(0)$ es el total del dinero invertido.

El rendimiento esperado de un activo j se define como:

$$\mu_j = \mathbb{E}(K_j), \quad j = 1, \ldots, n,$$

donde K_j representa el rendimiento aleatorio del activo j. El vector de rendimientos esperados se denota como:

$$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)^\top.$$

Además, el rendimiento de una cartera ponderada puede expresarse como:

$$K_w = \sum_{j=1}^{n} w_j K_j,$$

donde w_j es el peso del activo j en la cartera, y K_j es el rendimiento aleatorio del activo j.

Extendiéndolo también a la matriz de covarianzas, definimos $\sigma_{jk} = \mathrm{cov}(K_j, K_k)$, donde K_j y K_k son los rendimientos aleatorios de los activos j y k, respectivamente. La matriz de covarianzas es:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \ldots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \ldots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \ldots & \sigma_{nn} \end{pmatrix},$$

donde $\sigma_{jk} = \mathrm{Cov}(K_j, K_k)$ para $j, k = 1, \ldots, n$.

Teorema 2.6.1. *El rendimiento esperado de la cartera μ_w es $\mu_w = \mathbb{E}(K_w)$, y el riesgo de la cartera, representado por su varianza σ_w^2, es $\sigma_w^2 = Var(K_w)$ y el vector de pesos $\mathbf{w}$:*

$$\mu_w = \mathbf{w}^\top \boldsymbol{\mu},$$
$$\sigma_w^2 = \mathbf{w}^\top \mathbf{C} \mathbf{w},$$

donde $\boldsymbol{\mu}$ es el vector de rendimientos esperados de los activos, $\mathbf{C}$ es la matriz de covarianzas, y $\mathbf{w}$ es el vector de pesos de la cartera.

Demostración. El rendimiento esperado de la cartera μ_w se define como:

$$\mu_w = \mathbb{E}(K_w) = \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j K_j\right).$$

Usando la propiedad de la esperanza, podemos escribir:

$$\mu_w = \sum_{j=1}^{n} w_j \mathbb{E}(K_j) = \sum_{j=1}^{n} w_j \mu_j,$$

donde $\mu_j = \mathbb{E}(K_j)$ es el rendimiento esperado del activo j. Finalmente, esto se puede expresar en forma vectorial como:

$$\mu_w = \mathbf{w}^\top \boldsymbol{\mu},$$

donde $\mathbf{w}$ es el vector de pesos y $\boldsymbol{\mu}$ es el vector de rendimientos esperados.

Por la bilateralidad de la covarianza, la varianza de la cartera $\sigma_w^2 = \mathrm{Var}(K_w)$ se puede expresar como la covarianza de K_w consigo misma:

$$\sigma_w^2 = \mathrm{Var}(K_w) = \mathrm{Cov}(K_w, K_w) = \mathrm{Cov}\left(\sum_{j=1}^n w_j K_j, \sum_{k=1}^n w_k K_k\right).$$

Aplicando la propiedad de linealidad de la covarianza, podemos expandir esta expresión como:

$$\sigma_w^2 = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n w_j w_k \, \sigma_{jk},$$

donde $\sigma_{jk} = \mathrm{Cov}(K_j, K_k)$ es la covarianza entre los activos j y k. En notación matricial, esto se puede escribir como:

$$\sigma_w^2 = \mathbf{w}^\top \mathbf{C} \mathbf{w},$$

donde $\mathbf{C}$ es la matriz de covarianzas y $\mathbf{w}$ es el vector de pesos de la cartera. □

Proposición 2.6.2. *Para dos carteras cualesquiera* $\mathbf{W_a} = (w_{a,1}, \ldots, w_{a,n})$ *y* $\mathbf{W_b} = (w_{b,1}, \ldots, w_{b,n})$*, la covarianza entre los retornos de ambas carteras se expresa como:*

$$Cov(K_{\mathbf{W_a}}, K_{\mathbf{W_b}}) = \mathbf{W_a}^\top \mathbf{C} \mathbf{W_b},$$

donde $\mathbf{C}$ *es la matriz de covarianzas entre los activos, y* $\mathbf{W_a}$ *y* $\mathbf{W_b}$ *son los vectores de pesos de las carteras a y b, respectivamente.*

Demostración. La covarianza entre los retornos de las carteras $\mathbf{W_a} = (w_{a1}, \ldots, w_{an})$ y $\mathbf{W_b} = (w_{b1}, \ldots, w_{bn})$ se puede expresar de la siguiente manera:

$$\mathrm{Cov}(K_{\mathbf{W_a}}, K_{\mathbf{W_b}}) = \mathrm{Cov}\left(\sum_{j=1}^n w_{a,j} K_j, \sum_{k=1}^n w_{b,k} K_k\right).$$

Aplicando la propiedad de linealidad de la covarianza, obtenemos:

$$\mathrm{Cov}(K_{\mathbf{W_a}}, K_{\mathbf{W_b}}) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n w_{a,j} w_{b,k} \, \sigma_{jk},$$

donde $\sigma_{jk} = \mathrm{Cov}(K_j, K_k)$ es la covarianza entre los activos j y k. Finalmente, esto se puede escribir en forma compacta como:

$$\mathrm{Cov}(K_{\mathbf{W_a}}, K_{\mathbf{W_b}}) = \mathbf{W_a}^\top \mathbf{C} \mathbf{W_b},$$

□

Cartera de Mínima Varianza

Lema 2.6.3. *Tenemos las siguientes fórmulas relacionadas con los pesos:*

$$\nabla(\mathbf{w}^\top \boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{\mu}.$$

$$\nabla(\mathbf{w}^\top \vec{1}) = \mathbf{1}.$$

$$\nabla(\mathbf{w}^\top \mathbf{C}\mathbf{w}) = 2\mathbf{C}\mathbf{w}.$$

La matriz Hessiana de $\mathbf{w}^\top \mathbf{C}\mathbf{w}$ *es igual a* $2\mathbf{C}$.

Demostración. Dado que la derivada de $w^T\mu$ respecto de w_i es:

$$\frac{\partial}{\partial w_i}\left(w^T\mu\right) = \frac{\partial}{\partial w_i}\left(w_1\mu_1 + \cdots + w_n\mu_n\right) = \mu_i,$$

vemos que el gradiente de $w^T\mu$ es:

$$\nabla(w^T\mu) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial w_1}(w^T\mu) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial w_n}(w^T\mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} = \mu.$$

Por lo tanto, hemos obtenido la primera fórmula. La segunda fórmula se demuestra con un razonamiento similar pero usando 1 en lugar de μ.

En el último caso, veamos que la derivada de w_i de w^TCw es:

$$\frac{\partial}{\partial w_i}\left(w^TCw\right) = \frac{\partial}{\partial w_i}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=i}^{n} w_j w_k \sigma_{jk}.$$

La derivada de cada término es cero excepto cuando $j = i$ o $k = i$. Esto significa que

$$\frac{\partial}{\partial w_i}\left(w^TCw\right) = \frac{\partial}{\partial w_i}(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} w_j w_k \sigma_{jk}) = \frac{\partial}{\partial w_i}\left(w_i w_i \sigma_{ii} + \sum_{j=i}^{n}\sum_{k\neq i} w_j w_k \sigma_{jk} + \sum_{j\neq i}^{n}(w_j(\sum_{k=1}^{n} w_k\sigma_{jk}))\right).$$

Esto se puede simplificar como:

$$= 2w_i\sigma_{ii} + \sum_{k\neq i}^{n} w_k\sigma_{ik} + \sum_{j\neq i} w_j\sigma_{ji} = 2\sum_{k=1}^{n} w_k\sigma_{ik} = 2(Cw)_i,$$

dado que $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$.

Combinando las derivadas parciales de todas las coordenadas, obtenemos el resultado.

Usando este último resultado, tenemos que:

$$\frac{\partial}{\partial w_l}\frac{\partial}{\partial w_i}\left(w^TCw\right) = \frac{\partial}{\partial l}\left(2\sum_{k=1}^{n} w_k\sigma_{ik}\right) = 2\sigma_{il} = 2\sigma_{li}.$$

Por tanto, la segunda derivada de w^TCw con respecto a w_l y w_i es:

$$\frac{\partial^2}{\partial w_l \partial w_i}\left(w^TCw\right) = (2\sigma_{li})_{l,i\leq n} = 2C.$$

□

Teorema 2.6.4. *La cartera con menor varianza tiene los siguientes pesos* $\mathbf{w}_{min}$*:*

$$\mathbf{w}_{min} = \frac{\mathbf{C}^{-1}\overrightarrow{1}}{\overrightarrow{1}^{\top}\mathbf{C}^{-1}\overrightarrow{1}},$$

Demostración. Vamos a encontrar el mínimo de $w^T C w$ sujeto a la restricción $w^T 1 = 1$. Usando el método de los multiplicadores de Lagrange, tomamos el Lagrangiano $\mathcal{L}(w, \lambda)$ como sigue:

$$\mathcal{L}(w, \lambda) = \nabla(w^T C w) - \nabla\left(\lambda(1^T w - 1)\right).$$

Usando el lema que acabamos de demostrar, tenemos que:

$$\mathcal{L}(w, \lambda) = 2Cw - \lambda\overrightarrow{1} = 0.$$

Por lo tanto, $w = \frac{\lambda}{2}C^{-1}\overrightarrow{1}$. Sustituyendo en nuestra restricción $w^T\overrightarrow{1} = 1$, obtenemos:

$$1 = w^T\overrightarrow{1} = \left(\frac{\lambda}{2}C^{-1}\overrightarrow{1}\right)^T\overrightarrow{1} = \frac{\lambda}{2}\overrightarrow{1}^T C^{-1}\overrightarrow{1}.$$

Resolviendo para λ, tenemos:

$$\lambda = \frac{2}{\overrightarrow{1}^T C^{-1}\overrightarrow{1}}.$$

Sustituyendo este valor de λ en $w = \frac{\lambda}{2}C^{-1}\overrightarrow{1}$, obtenemos:

$$w = \frac{1}{\overrightarrow{1}^T C^{-1}\overrightarrow{1}}C^{-1}\overrightarrow{1}.$$

Hemos probado que la ecuación a demostrar es el único extremo local posible. Por el lema 2.6.3, sabemos que $2C$ es la matriz Hessiana de $w^T C w$, y por el teorema de la matriz Hessiana (Teorema 2.5.6), $w_{\min}$ es un mínimo global.

□

Observación 2.6.5. Para toda cartera $\mathbf{w}$, tenemos que la covarianza entre el rendimiento de la cartera $K_{\mathbf{w}}$ y el rendimiento de la cartera con menor varianza $K_{\mathbf{w}_{\min}}$ está dada por:

$$\mathrm{Cov}(K_{\mathbf{w}}, K_{\mathbf{w}_{\min}}) = \sigma^2_{\mathbf{w}_{\min}},$$

Para encontrar la **frontera eficiente**, debemos identificar y eliminar las carteras dominadas. Para ello, fijamos un nivel de rendimiento esperado t, de modo que $\mu_w = t$. La familia de carteras parametrizadas por este nivel fijo de rendimiento t se denomina la **Recta de Mínima Varianza**.

Siguiendo lo visto en el apartado anterior, estas carteras se obtienen resolviendo el siguiente problema de optimización:

$$\text{Minimizar } \mathbf{w}^{\top}\mathbf{C}\mathbf{w},$$

sujeto a las restricciones:

$$\mathbf{w}^{\top}\boldsymbol{\mu} = t, \quad \mathbf{w}^{\top}\mathbf{1} = \overrightarrow{1},$$

Teorema 2.6.6. *Sea* $\mathbf{M}$ *una matriz* 2×2 *de la forma:*

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\mu} & \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{C}^{-1} \overrightarrow{1} \\ \overrightarrow{1}^\top \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\mu} & \overrightarrow{1}^\top \mathbf{C}^{-1} \overrightarrow{1} \end{pmatrix}.$$

Si $\mathbf{C}$ *y* $\mathbf{M}$ *son matrices invertibles, entonces la solución al problema previo viene dada por las matrices:*

$$\mathbf{w} = \frac{1}{\det(\mathbf{M})} \mathbf{C}^{-1} \left(\det(\mathbf{M}_1)\boldsymbol{\mu} + \det(\mathbf{M}_2)\overrightarrow{1} \right),$$

donde:

$$\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} m & \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{C}^{-1} \overrightarrow{1} \\ 1 & \overrightarrow{1}^\top \mathbf{C}^{-1} \overrightarrow{1} \end{pmatrix}, \mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\mu} & m \\ \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{C}^{-1} \overrightarrow{1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Demostración. Con el multiplicador de Lagrange $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2)$, el lagrangiano está dado por:

$$L(\mathbf{w}) = \nabla(\mathbf{w}^\top \mathbf{C} \mathbf{w}) - \lambda_1 \nabla(\mathbf{w}^\top \boldsymbol{\mu} - m) + \lambda_2 \nabla(\mathbf{w}^\top \overrightarrow{1} - 1) = 0.$$

Sustituyendo las derivadas:

$$L(\mathbf{w}) = 2\mathbf{C}\mathbf{w} - \lambda_1 \boldsymbol{\mu} - \lambda_2 \overrightarrow{1} = 0.$$

Resolviendo para $\mathbf{w}$, obtenemos:

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2}\lambda_1 \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\mu} + \frac{1}{2}\lambda_2 \mathbf{C}^{-1} \overrightarrow{1}.$$

Utilizando las restricciones $\mathbf{w}^\top \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{w} = m$ y $\mathbf{w}^\top \overrightarrow{1} = \overrightarrow{1}^\top \mathbf{w} = 1$, al sustituir $\mathbf{w}$ en estas ecuaciones, obtenemos el siguiente sistema:

$$\frac{1}{2}\lambda_1 \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\mu} + \frac{1}{2}\lambda_2 \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{C}^{-1} \overrightarrow{1} = m,$$

$$\frac{1}{2}\lambda_1 \mathbf{1}^\top \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\mu} + \frac{1}{2}\lambda_2 \mathbf{1}^\top \mathbf{C}^{-1} \overrightarrow{1} = 1.$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, obtenemos:

$$\frac{1}{2}\lambda_1 = \frac{\det(M_1)}{\det(M)}, \quad \frac{1}{2}\lambda_2 = \frac{\det(M_2)}{\det(M)}.$$

Por lo tanto, ya tenemos un candidato para el problema. Además, por el teorema 2.5.6, podemos concluir que este candidato corresponde a un mínimo global. □

Tenemos un resultado que simplifica lo descrito anteriormente:

Lema 2.6.7. *Existen dos vectores* $\mathbf{a}$ *y* $\mathbf{b}$*, que dependen de* $\mathbf{C}$ *y* $\boldsymbol{\mu}$*, tales que para cualquier* $m \in \mathbb{R}$*, la solución al problema descrito es:*

$$\mathbf{w} = m\mathbf{a} + \mathbf{b}.$$

Demostración.

$$\det(M_1) = \mu^\top \mathbf{C}^{-1} \overrightarrow{1} - (\mu^\top \mathbf{C}^{-1} \mu),$$

$$\det(M_2) = \mu^\top \mathbf{C}^{-1} \mu - m\mu^\top \mathbf{C}^{-1} \overrightarrow{1}.$$

A partir del teorema previo, definimos los vectores **a** y **b** como:

$$\mathbf{a} = \frac{1}{\det(M)}\left((\overrightarrow{1}^\top \mathbf{C}^{-1}\overrightarrow{1})\boldsymbol{\mu} - (\mu^\top \mathbf{C}^{-1}\overrightarrow{1})\,\overrightarrow{1}\right),$$

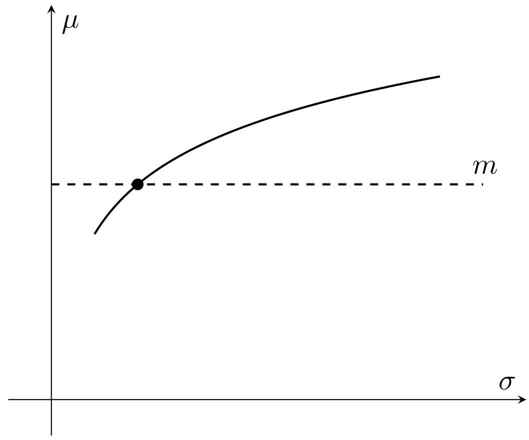
$$\mathbf{b} = \frac{1}{\det(M)}\left((\mu^\top \mathbf{C}^{-1}\mu)\,\overrightarrow{1} - (\mu^\top \mathbf{C}^{-1}\overrightarrow{1})\boldsymbol{\mu}\right).$$

□

La frontera eficiente es el conjunto de todas las carteras no dominadas. Esto se expresa como:

$$\mathbf{w} = \mathbf{a}m + \mathbf{b}, \quad \text{con } m \geq \mu_{\text{wmin}},$$

donde μ_{wmin} es el rendimiento asociado a la cartera de mínima varianza.



La cartera de mínima varianza es la intersección entre la curva y la recta. A raíz de esto podemos ver que es fácil obtener esta cartera a través de dos portafolio donde se aprecia en el siguiente resultado.

Lema 2.6.8. *Sean w_1 y w_2 dos carteras con rendimientos esperados $\mu_1 \neq \mu_2$. Entonces, cualquier cartera w sobre la curva de mínima varianza se puede obtener como una combinación lineal de estas dos carteras, es decir, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que:*

$$w = \alpha w_1 + (1-\alpha) w_2$$

Demostración. Primero encontramos α:

$$\mu_w = \alpha \mu_{w_1} + (1-\alpha)\mu_{w_2}$$

Como suponemos que $\mu_1 \neq \mu_2$, podemos despejar α:

$$\alpha = \frac{\mu_w - \mu_{w_2}}{\mu_{w_1} - \mu_{w_2}}$$

Dado que las dos carteras están sobre la curva de mínima varianza, sabemos que:

$$w_1 = \mu_{w_1} a + b w_2 = \mu_{w_2} a + b$$

A partir de aquí, sustituimos en la ecuación de w:

$$\alpha w_1 + (1-\alpha) w_2 = (\alpha \mu_{w_1} + (1-\alpha)\mu_{w_2})\, a + b = \mu_w a + b$$

Y como w está sobre la misma curva, tenemos que:

$$w = \mu_w a + b.$$

□

Cartera de Mercado

Recordemos que el portafolio de mercado es aquella cartera óptima sobre la frontera eficiente, teniendo en cuenta el activo libre de riesgo. Al principio del capítulo lo vimos para dos tipos de títulos, ahora lo evaluaremos en n.

Teorema 2.6.9. *Sean w_1 y w_2 dos carteras sobre la Línea de Mínima Varianza (MVL) con $\mu_{w_1} \neq \mu_{w_2}$, entonces la MVL es una hipérbola centrada en el eje vertical.*

Demostración. Sean K_{w_1} y K_{w_2} los retornos de las carteras w_1 y w_2. Sabemos, por el último corolario, que toda cartera sobre la MVL se puede expresar como:

$$w = \alpha w_1 + (1-\alpha) w_2.$$

Por lo tanto, el retorno de la cartera resultante se define como:

$$K_w = \alpha K_{w_1} + (1-\alpha) K_{w_2}.$$

Del apartado correspondiente a carteras con dos títulos, sabemos que:

$$\mu_w = \alpha \mu_{w_1} + (1-\alpha)\mu_{w_2},$$

y que la varianza del retorno está dada por:

$$\sigma_w^2 = \alpha^2 \sigma_{w_1}^2 + (1-\alpha)^2 \sigma_{w_2}^2 + 2\alpha(1-\alpha)\mathrm{Cov}(K_{w_1}, K_{w_2}).$$

Dado que $\mu_{w_1} \neq \mu_{w_2}$, por el Teorema 2.4.10, se concluye el resultado. $\square$

Teorema 2.6.10. *Si el activo libre de riesgo R es más pequeño que el retorno esperado del MVP, entonces la cartera de mercado existe y está dada por:*

$$\mathbf{m} = \frac{C^{-1}(\boldsymbol{\mu} - R\overrightarrow{1})}{\overrightarrow{1}^\top C^{-1}(\boldsymbol{\mu} - R\overrightarrow{1})}$$

Demostración. Sabemos que la función de mínima varianza es una hipérbola. Dado que su centro está en el eje vertical, existe un único punto tangente de la semirrecta que sale de $(0, R)$ que maximiza la pendiente. El punto tangente en cuestión es de la forma:

$$\frac{\mu_w - R}{\sigma_w} = \frac{w^T\mu - R}{\sqrt{w^T C w}}.$$

En la pendiente máxima, el Lagrangiano es:

$$\mathcal{L}(w,\lambda) = \nabla\left(\frac{w^T\mu - R}{\sqrt{w^T C w}}\right) - \lambda\nabla(w^T\overrightarrow{1} - 1).$$

Este debe ser igual a cero. Usando el lema 2.6.3, tenemos que:

$$\mathcal{L}(w,\lambda) = \frac{\mu\sqrt{w^T C w} - (w^T\mu - R)\frac{1}{2\sqrt{w^T C w}}2Cw}{w^T C w} - \lambda\overrightarrow{1} = 0.$$

Reformulando, obtenemos:

$$\mu\sigma_w - (\mu w - R)\frac{Cw}{\sigma_w} - \lambda\sigma_w^2\overrightarrow{1} = 0.$$

Por lo tanto, tenemos:

$$\frac{\mu w - R}{\sigma_w^2} Cw = \mu - \lambda \sigma_w \overrightarrow{1}.$$

Multiplicando por w^T y usando que $w^T 1 = 1$, obtenemos:

$$\frac{\mu w - R}{\sigma_w^2} w^T Cw = \mu w^T - \lambda \sigma_w w^T \overrightarrow{1}.$$

lo que da como resultado:

$$\mu w - R = \lambda \sigma_w.$$

De aquí, se concluye que $\lambda = \frac{R}{\sigma_w}$. Ahora, tenemos la ecuación:

$$\gamma = Cw = \mu - R\overrightarrow{1},$$

donde $\gamma = \frac{\mu w - R}{\sigma_w^2}$. Finalmente, multiplicando por 1^T, obtenemos:

$$\gamma = \overrightarrow{1}^T C^{-1}(\mu - R\overrightarrow{1}),$$

y sustituyendo esta expresión para γ en la ecuación anterior, llegamos al resultado.

$\square$

La línea que une el activo libre de riesgo, representado por $(0, R)$, y la cartera de mercado con coordenadas (σ_m, μ_m), viene dada por:

$$\mu = R + \frac{\mu_m - R}{\sigma_m} \sigma.$$

Esta línea se denomina la *Recta del Mercado de Capitales*. En el caso de una cartera sobre la CML con riesgo σ, al producto sumado a R se le denomina *prima de riesgo*.

Capítulo 3

Capital Asset Pricing Model

3.1. El modelo CAPM

El modelo de valoración de activos financieros, denominado en inglés *Capital Asset Pricing Model* (CAPM), es un modelo utilizado para calcular la rentabilidad que un inversor debe exigir al realizar una inversión en un activo financiero, en función del riesgo que está asumiendo. Fue introducido por **Jack L. Treynor**, **William Sharpe**, **John Lintner** y **Jan Mossin** de forma independiente, basándose en trabajos anteriores de **Harry Markowitz** sobre la diversificación.

William Sharpe, profesor de la Universidad de Stanford, recibió el *Premio en Ciencias Económicas en memoria de Alfred Nobel* (compartido con **Harry Markowitz** y **Merton Miller**, profesor de la *University of Chicago Booth School of Business*).

La cartera de mínima varianza existe cuando el retorno esperado de esta es superior al rendimiento esperado del activo libre de riesgo.

El modelo del CAPM proporciona una relación lineal entre el rendimiento esperado μ_m de la cartera de mercado y cualquier activo con riesgo. Estos se relacionan a través de la β, que proporciona una medida del riesgo no diversificable de un activo, el cual desarrollaremos más adelante.

Este modelo ayuda a mostrar el rendimiento de una cartera. Utilizaremos las varianzas para cuantificar el riesgo, pero estas son menos relevantes que las covarianzas a la hora de cuantificar el riesgo de una cartera.

A lo largo de este capítulo desarrollaremos principalmente conceptos del libro *Risk Theory and Portfolio Management*, más en concreto el capítulo 5. Por otro lado, en cuanto a la teoría de la utilidad y la teoría de precios por arbitraje, utilizamos también *Mathematical Portfolio Theory and Analysis*, de la bibliografía.

Existen dos tipos de riesgo asociados a la inversión:

- **Riesgo diversificable o específico:** Es aquel que se puede reducir a cero al ampliar y diversificar la cartera de activos.
- **Riesgo no diversificable, sistemático o de mercado:** Es el riesgo inherente al mercado que no puede evitarse, ya que los valores de los activos están vinculados a los movimientos generales del mercado.

Nuestro objetivo en este capítulo es cuantificar el riesgo sistemático de un activo asociado a su rendimiento.

Definición 3.1.1. *Denominamos* factor beta *del activo i como:*

$$\beta_i = \frac{Cov(K_i, K_m)}{\sigma_m^2},$$

donde K_i es el retorno del activo i, K_m es el retorno de la cartera de mercado, y σ_m^2 es la varianza del retorno de la cartera de mercado.

Teorema 3.1.2. *Supongamos que el rendimiento del activo libre de riesgo R es menor que el retorno esperado del MVP (cartera de mínima varianza). Entonces, para cada $i \leq n$, el retorno esperado μ_i del activo i en la cartera está dado por:*

$$\mu_i = R + \beta_i(\mu_m - R),$$

donde β_i es el factor beta del activo i, μ_m es el retorno esperado de la cartera de mercado, y R es el rendimiento del activo libre de riesgo.

Demostración. La Recta del Mercado de Capital (CML) es tangente a la curva de mínima varianza en la cartera de mercado, representada por los parámetros (σ_m, μ_m). Consideremos las carteras que combinan la cartera de mercado y el i-ésimo título. Estas carteras forman una hipérbola que es tangente a la CML. Ahora nos preguntamos: ¿puede esta hipérbola cortar a la CML? La respuesta es no, ya que esto contradiría el hecho de que la CML tiene la pendiente máxima. Procedemos a calcular la pendiente de la recta tangente a la hipérbola y usamos que coincide con la pendiente de la CML. Sea x la proporción que invertimos en el i-ésimo título, y $1 - x$ la proporción que invertimos en la cartera de mercado. El rendimiento esperado μ_x y el riesgo σ_x de esta combinación están dados por:

$$\mu_x = x\mu_i + (1-x)\mu_m,$$

$$\sigma_x = \sqrt{x^2\sigma_i^2 + (1-x)^2\sigma_m^2 + 2x(1-x)\operatorname{Cov}(k_i, k_m)}.$$

Ahora calculamos las derivadas necesarias:

$$\frac{\partial \mu_x}{\partial x}\Big|_{x=0} = \mu_i - \mu_m,$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\Big|_{x=0} = \frac{\operatorname{Cov}(K_i, K_m) - \sigma_m^2}{\sigma_m}.$$

Igualamos la pendiente de estas derivadas a la pendiente de la CML, que es:

$$\frac{\mu_m - R}{\sigma_m}.$$

Por lo tanto, igualamos:

$$\frac{\mu_i - \mu_m}{\frac{\operatorname{Cov}(K_i, K_m) - \sigma_m^2}{\sigma_m}} = \frac{\mu_m - R}{\sigma_m}.$$

Resolviendo para μ_i, obtenemos:

$$\mu_i = R + \frac{\operatorname{Cov}(K_i, K_m)}{\sigma_m^2}(\mu_m - R).$$

Denotamos $\beta_i = \frac{\mathrm{Cov}(K_i, K_m)}{\sigma_m^2}$ como la beta del i-ésimo título. Así, la expresión final para μ_i es:

$$\mu_i = R + \beta_i(\mu_m - R).$$

$\square$

Al igual que en la teoría de la media-varianza, existe una prima de riesgo, que en este caso está dado por $\beta_i(\mu_m - R)$. Este valor representa el rendimiento adicional que se espera obtener por asumir el riesgo respecto al mercado. Por lo tanto, la beta β cuantifica el riesgo no diversificable de un activo.

La beta del mercado y de una cartera se definen como sigue:

$$\beta_w = \frac{\mathrm{Cov}(K_w, K_m)}{\sigma_m^2},$$

donde β_w es el beta de una cartera w, K_w es el rendimiento de la cartera w, K_m es el rendimiento del mercado, y σ_m^2 es la varianza del mercado. Por convención, la beta del mercado es:

Observación 3.1.3. La β del mercado viene dada por $\beta_m = 1$.

Recta del Mercado de Valores

El teorema anterior se puede extender al caso del rendimiento de la cartera, y no solo de un título.

Teorema 3.1.4. *Supongamos que el rendimiento del activo libre de riesgo R es menor que el retorno esperado del MVP (cartera de mínima varianza). Entonces,*

$$\mu_i = R + \beta_i(\mu_m - R),$$

Demostración. Del teorema 2.6.9 sabemos que:

$$m = \frac{1}{\gamma} C^{-1}(\mu - R\overrightarrow{1}),$$

si

$$\gamma = \overrightarrow{1}^T C^{-1}(\mu - R\overrightarrow{1}).$$

Por la proposición de la covarianza de dos carteras (2.6.2), sabemos que:

$$\beta_w = \frac{\mathrm{Cov}(K_w, K_m)}{\sigma_m^2}.$$

Sustituyendo, tenemos:

$$\beta_w = \frac{w^T C m}{m^T C m}.$$

Dado que $m = \frac{1}{\gamma} C^{-1}(\mu - R1)$, sustituimos en el numerador y denominador:

$$\beta_w = \frac{\frac{1}{\gamma} w^T(\mu - R\overrightarrow{1})}{\frac{1}{\gamma} m^T(\mu - R\overrightarrow{1})}.$$

Simplificando el factor $\frac{1}{\gamma}$:

$$\beta_w = \frac{w^T(\mu - R\overrightarrow{1})}{m^T(\mu - R\overrightarrow{1})}.$$

Usando las propiedades de las carteras, sabemos que $w^T\mu = \mu_w$, $m^T\mu = \mu_m$, y $w^T\overrightarrow{1} = 1$. Entonces, podemos reescribir β_w como:

$$\beta_w = \frac{\mu_w - R}{\mu_m - R}.$$

□

Interpretación del CAPM y Análisis del Mercado

Todas las carteras se encuentran en la recta:

$$\mu = R + \beta(\mu_m - R).$$

Podemos apreciar que existen inversiones que, desde el punto de vista del inversor, son buenas a pesar de no ser las más óptimas según el modelo. Un ejemplo típico es la inversión en oro, que sirve como valor refugio en casos de crisis financiera. Esto se debe a que el oro tiene betas negativas, es decir, su precio se mueve en sentido contrario al mercado: cuando el mercado cae, el precio del oro sube, y viceversa.

Podemos considerar que μ_i representa el rendimiento exigido por el mercado. Desde este punto de vista, si interpretamos la fórmula como la percepción del mercado, pero nosotros, como inversores, disponemos de información adicional o privilegiada y consideramos que la rentabilidad esperada es mayor que la exigida, la acción estará infravalorada y será una buena inversión.

Este comportamiento generalizado de los inversores incrementará la demanda, lo que hará que el precio suba. A medida que el precio sube, la rentabilidad esperada disminuirá, ya que el riesgo se reduce.

Este razonamiento sienta las bases del análisis del CAPM. Además, se introducen métricas clave para evaluar el rendimiento de las carteras, como:

- Índice de Jensen: diferencia entre el rendimiento realizado y el rendimiento objetivo.
- Índice de Sharpe = $\text{MPR}_w = \frac{\mu_w - R}{\sigma_w}$.

Observación 3.1.5. MPR hace referencia a **Market Price Risk**

Recta Característica

Ahora abordaremos los rendimientos en sí, más allá de las expectativas. El rendimiento observado de una cartera se modela como:

$$K_w = R + \beta_w(\mu_w - R) + e_w,$$

donde e_w es el error asociado, que refleja las desviaciones respecto al modelo teórico.

A partir de la fórmula del teorema 3.1.4, podemos deducir que:

$$\mathbb{E}(e_w) = \mu_w - (R + \beta_w(\mu_w - R)) = 0.$$

Esto implica que el error esperado en el modelo CAPM es nulo, lo que refuerza la consistencia del modelo en términos de expectativas.

Proposición 3.1.6. *Sea* $\mathbf{w}$ *una cartera, con* $e_w = K_w - R - \beta(K_m - R)$ *para alguna* β. *La varianza de* e_w *es mínima cuando:*

$$\beta = \frac{\mathrm{Cov}(K_w, K_m)}{\mathrm{Var}(K_m)}.$$

Demostración. La varianza de e_w se expresa como:

$$\mathrm{Var}(e_w) = \mathrm{Var}(K_w - R - \beta(K_m - R)) = \mathrm{Var}(K_w - \beta K_m).$$

Desarrollando la expresión de la varianza:

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(e_w) &= \mathrm{Var}(K_w) + \mathrm{Var}(-\beta K_m) + 2\,\mathrm{Cov}(K_w, -\beta K_m),\\ &= \mathrm{Var}(K_w) + \beta^2\mathrm{Var}(K_m) - 2\beta\,\mathrm{Cov}(K_w, K_m).\end{aligned}$$

Como esta es una función cuadrática en β, el valor mínimo se encuentra resolviendo:

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta}\mathrm{Var}(e_w) = 2\beta\mathrm{Var}(K_m) - 2\,\mathrm{Cov}(K_w, K_m).$$

De donde obtenemos:

$$\beta = \frac{\mathrm{Cov}(K_w, K_m)}{\mathrm{Var}(K_m)}.$$

□

La fórmula que hemos introducido y la minimización de la varianza del error nos permiten calcular la beta a partir de la serie histórica. Los rendimientos pasados y de lo valores contra los de la cartera de mercado nos da la mejor medida, conocida como **Recta Característica** del valor. Para un activo con rendimiento K, observemos:

El modelo lineal para el rendimiento del activo i es:

$$K_i - R = \alpha_i + \beta_i(K_m - R) + e_i,$$

donde e_i es el error con $\mathbb{E}(e_i) = 0$, y α_i es el rendimiento anormal del activo. A priori, por el marco teórico, el valor de α_i debería ser cero.

Si $K_{1,i}, \ldots, K_{d,i}$ y $K_{1,m}, \ldots, K_{d,m}$ son rendimientos históricos, entonces podemos encontrar los parámetros de la recta característica mediante el método de los mínimos cuadrados. Definimos las variables:

$$x_j = K_{j,m} - R, \quad y_j = K_{j,i} - R, \quad j = 1, \ldots, d.$$

La función de error es:

$$f(\alpha, \beta) = \sum_{j=1}^{d} (y_j - \alpha - \beta x_j)^2\,.$$

Minimizamos f derivando respecto a α y β:

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \beta} = 0.$$

Resolviendo este sistema, obtenemos:

$$\beta = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2},$$

$$\alpha = \overline{y} - \beta\,\overline{x},$$

donde las barras ($\overline{x}$, $\overline{y}$, etc.) representan las medias muestrales correspondientes.

Proposición 3.1.7. *La varianza del retorno de la cartera se puede expresar como:*

$$\sigma_w^2 = \beta_w^2 \sigma_m^2 + Var(e_w),$$

Demostración.

$$\mathrm{Cov}(K_m, e_w) = \mathrm{Cov}(K_m, K_w - R - \beta_w(K_m - R)) = \mathrm{Cov}(K_m, K_w) - \beta_w \mathrm{Cov}(K_m, K_m) = 0.$$

La varianza del retorno de la cartera K_w se puede expresar como:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(K_w) &= \mathrm{Var}(R + \beta_w(K_m - R) + e_w) \\
&= \mathrm{Var}(\beta_w K_m + e_w) \\
&= \beta_w^2 \mathrm{Var}(K_m) + \mathrm{Var}(e_w) + 2\beta_w \mathrm{Cov}(K_m, e_w) \\
&= \beta_w^2 \mathrm{Var}(K_m) + \mathrm{Var}(e_w).
\end{aligned}$$

□

3.2. Funciones de utilidad

La *teoría de la utilidad* es fundamental en el *CAPM* porque establece las bases para entender el comportamiento de los inversores al tomar decisiones de inversión bajo condiciones de incertidumbre y riesgo. La teoría de la utilidad proporciona un marco para modelar las preferencias de los inversores en cuanto al riesgo, lo cual es esencial para explicar cómo se determinan los rendimientos esperados de los activos.

Definición 3.2.1. *Una función de utilidad se define como una función o mapeo, que asigna un conjunto de opciones de consumo (o alternativas) o niveles de riqueza a números reales, llamados utilidades.*

En primer lugar, describamos algunos axiomas básicos de la teoría de la utilidad:

- Sean V_1 y V_2 dos alternativas de inversión. Si preferimos V_1 a V_2, entonces $U(V_1) > U(V_2)$. De igual manera, si sentimos indiferencia entre ambas alternativas, se cumple que $U(V_1) = U(V_2)$.
- La teoría de la utilidad es transitiva, es decir, si $V_1 > V_2$ y $V_2 > V_3$, entonces $V_1 > V_3$.
- Si $U(V_1) > U(V_2) > U(V_3)$, entonces existe una estrategia de inversión tal que:

  $$p_1 U(V_1) + p_3 U(V_3) = U(V_2),$$

  donde p_1 y p_3 son las probabilidades respectivas de que ocurran V_1 e V_3.

- Si en una alternativa de inversión V_3 no afecta a V_1 ni a V_2, se cumple que:

$$U(V_1) > U(V_2) \implies U(V_1) + U(V_3) > U(V_2) + U(V_3).$$

- Los inversores están motivados por el objetivo de maximizar la utilidad esperada, la cual está dada por:

$$E(U) = \sum_{i=1}^{K} p_i U(V_i),$$

donde p_i es la probabilidad de la i-ésima alternativa de inversión.

Definición 3.2.2. *Decimos que $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función de utilidad si cumple las siguientes propiedades:*

- *Es estrictamente creciente, es decir, si $x_1 > x_2$, entonces $u(x_1) > u(x_2)$.*
- *Es dos veces diferenciable.*
- *Es cóncava, lo que implica que $u''(x) \leq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Proposición 3.2.3. *Si $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función de utilidad, entonces U definida por*

$$U(X) = \mathbb{E}(u(X)),$$

es una función de utilidad.

Observación 3.2.4. Decimos que esta utilidad U es una utilidad de **Von Neumann-Morgensten**

Es evidente que cualquier inversor querrá maximizar su función de utilidad. En este caso, queremos estudiar la influencia de la teoría de la utilidad sobre el modelo CAPM, de modo que lo abordaremos desde esta perspectiva.

Supongamos que tenemos N inversores que desean maximizar su propia función de utilidad. Escogemos esta función por ejemplo:

$$u_i(x) = a_i x - \frac{1}{2} b_i x^2,$$

con $a_i, b_i > 0$, donde cada inversor i tiene una función diferente para $i = 1, \ldots, N$. Denotamos por x_i la cartera óptima del inversor i.

Los valores presentes y futuros del mercado se describen como:

$$M(0) = \sum_{i=1}^{N} V_{x_i}(0), M(1) = \sum_{i=1}^{N} V_{x_i}(1),$$

donde $V_{x_i}(0)$ y $V_{x_i}(1)$ representan los valores actuales y futuros de la cartera x_i, respectivamente.

La riqueza generada por el mercado se define como:

$$K_m = \frac{M(1) - M(0)}{M(0)}.$$

Teorema 3.2.5. *Asumiendo que $M(0) \neq 0$ y $Var(K_m) \neq 0$, el rendimiento esperado de cada activo viene dado por:*

$$E(K_j) = R + \beta_j(E(K_m) - R), \quad j = 1, \ldots, N,$$

donde

$$\beta_j = \frac{Cov(K_j, K_m)}{Var(K_m)}.$$

Demostración. Consideremos $j = 1$ como el activo libre de riesgo, de manera que $K_1 = R$. Entonces, el valor de la riqueza para una cartera x viene dado por:

$$V_x(1) = V(1 + K_w) = V\left(1 + \sum_{j=1}^{n} w_j K_j\right).$$

Sustituyendo $w_1 = 1 - \sum_{j=2}^{n} w_j$, obtenemos:

$$V_x(1) = V\left(1 + \left(1 - \sum_{j=2}^{n} w_j\right) R + \sum_{j=2}^{n} w_j K_j\right).$$

Si x_l^* es la cartera óptima para el inversor l y la inversión inicial está dada por $V = V_{x_l^*}(0)$, entonces, para $j = 2, \ldots, n$, las condiciones de primer orden para un máximo son:

$$0 = \frac{\partial}{\partial w_j}\mathbb{E}\left[u_l'(V_{x_l^*}(1))\right] = V\mathbb{E}\left[u_l'(V_{x_l^*}(1))(K_j - R)\right].$$

Usando la propiedad de la covarianza, $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$, en un espacio muestral Ω finito y para variables aleatorias X, Y, tenemos:

$$\mathrm{Cov}\left(u_l'(V_{x_l^*}(1)), K_j - R\right) = \mathbb{E}\left[u_l'(V_{x_l^*}(1))(K_j - R)\right] - \mathbb{E}\left[u_l'(V_{x_l^*}(1))\right]\mathbb{E}[K_j - R].$$

Comparando con la derivada previa, tenemos:

$$\mathbb{E}\left[u_l'(V_{x_l^*}(1))\right]\mathbb{E}\left[K_j - R\right] = -\,\mathrm{Cov}\left(u_l'(V_{x_l^*}(1)), K_j - R\right).$$

Dado que $u_l'(x) = a_l - b_l x$, podemos reescribir la ecuación de la siguiente manera:

$$\left(a_l - b_l\mathbb{E}\left[V_{x_l^*}(1)\right]\right)(\mathbb{E}[K_j] - R) = -\,\mathrm{Cov}\left(a_l - b_l V_{x_l^*}(1), K_j - R\right).$$

Simplificando el término de la covarianza, obtenemos:

$$\left(a_l - b_l\mathbb{E}\left[V_{x_l^*}(1)\right]\right)(\mathbb{E}[K_j] - R) = b_l\,\mathrm{Cov}\left(V_{x_l^*}(1), K_j\right).$$

Por tanto:

$$\left(\frac{a_l}{b_l} - \mathbb{E}\left[V_{x_l^*}(1)\right]\right)(\mathbb{E}[K_j] - R) = \mathrm{Cov}\left(V_{x_l^*}(1), K_j\right).$$

Tomando:

$$c = \sum_{l=1}^{L}\left(\frac{a_l}{b_l} - \mathbb{E}\left[V_{x_l^*}(1)\right]\right),$$

obtenemos:

$$c\left(\mathbb{E}[K_j] - R\right) = \sum_{l=1}^{L} \operatorname{Cov}\left(V_{x_l^*}(1), K_j\right).$$

Por la definición de $M(1)$, sabemos que:

$$\sum_{l=1}^{L} \operatorname{Cov}\left(V_{x_l^*}(1), K_j\right) = \operatorname{Cov}(M(1), K_j) = M(0)\operatorname{Cov}(K_m, K_j).$$

Así, llegamos al resultado final:

$$c\left(\mathbb{E}[K_j] - R\right) = M(0)\operatorname{Cov}(K_m, K_j).$$

Sea la cartera de mercado con pesos $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_n)$. Entonces:

$$c\left(\mathbb{E}[K_m] - R\right) = c\left(\mathbb{E}[m_1K_1 + \cdots + m_nK_n] - R\right).$$

Expandiendo la expectativa:

$$c\left(\mathbb{E}[K_m] - R\right) = \sum_{j=1}^{n} cm_j\left(\mathbb{E}[K_j] - R\right).$$

Por la definición de $M(0)$ y las propiedades de la covarianza, tenemos:

$$\sum_{j=1}^{n} cm_j\left(\mathbb{E}[K_j] - R\right) = \sum_{j=1}^{n} m_jM(0)\operatorname{Cov}(K_m, K_j).$$

$$\sum_{j=1}^{n} m_jM(0)\operatorname{Cov}(K_m, K_j) = M(0)\operatorname{Cov}(K_m, K_m).$$

Dado que $\operatorname{Cov}(K_m, K_m) = \operatorname{Var}(K_m)$, obtenemos:

$$c\left(\mathbb{E}[K_m] - R\right) = M(0)\operatorname{Var}(K_m).$$

Teniendo en cuenta que $M(0) \neq 0$ y $\operatorname{Var}(K_m) \neq 0$, podemos combinar para obtener:

$$\frac{\mathbb{E}[K_j] - R}{\mathbb{E}[K_m] - R} = \frac{\operatorname{Cov}(K_m, K_j)}{\operatorname{Var}(K_m)} = \beta_j.$$

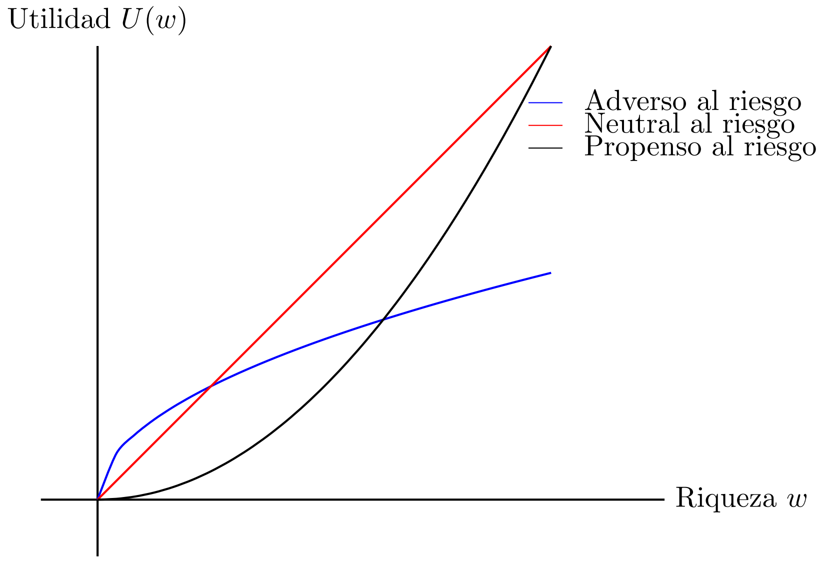
□

Para concluir, no debemos olvidar el factor más relevante que diferencia a cada inversor: la aversión al riesgo. Podemos clasificar a los inversores en tres tipos diferentes:

1. **Inversor adverso al riesgo:** Es aquel cuya función de utilidad es estrictamente creciente ($U'(w) > 0$) y estrictamente cóncava ($U''(w) < 0$).

2. **Inversor propenso al riesgo:** Es aquel cuya función de utilidad es estrictamente creciente ($U'(w) > 0$) y estrictamente convexa ($U''(w) > 0$).

3. **Inversor neutral al riesgo:** Es aquel cuya función de utilidad es estrictamente creciente ($U'(w) > 0$) y es lineal ($U''(w) = 0$).



3.3. Alternativa al CAPM

La Teoría de Precios por Arbitraje (APT) es una alternativa más flexible y realista que el Modelo de Valoración de Activos de Capital (CAPM). La principal diferencia radica en que la APT no requiere la suposición de que los inversores toman decisiones basadas únicamente en el marco de media-varianza, como lo hace el CAPM. En cambio, la APT asume que los inversores buscan maximizar el rendimiento de su cartera, sin necesidad de minimizar exclusivamente el riesgo.

En el contexto de la APT, el rendimiento de un activo i se modela utilizando un modelo de índice simple:

$$r_i = \alpha_i + \beta_i I_1.$$

donde:

- r_i es el rendimiento del activo i,
- α_i es una constante (el rendimiento del activo cuando el índice I_1 es cero),
- β_i es la sensibilidad del rendimiento del activo al factor de riesgo I_1,
- I_1 es un índice o factor de riesgo sistemático que afecta a todos los activos.

De este modo, el rendimiento de cada activo depende de cómo se ve afectado por el índice I_1, que es un factor común que influye sobre todos los activos.

Construcción de un portafolio de dos activos

Ahora, se consideran dos activos, i y j, cuyos rendimientos también dependen del índice I_1. Los rendimientos de los dos activos se expresan de manera similar:

$$r_j = \alpha_j + \beta_j I_1,$$

A continuación, construimos un portafolio P con los activos i y j, con los pesos w_i y $w_j = 1 - w_i$. El rendimiento del portafolio es:

$$r_p = w_i r_i + (1 - w_i) r_j,$$

Sustituyendo los rendimientos de los activos i y j:

$$r_p = [w_i \alpha_i + (1 - w_i)\alpha_j] + [w_i \beta_i + (1 - w_i)\beta_j] \, I_1.$$

Eliminación del factor de riesgo I_1

El objetivo es construir un portafolio en el que el riesgo sistemático, representado por I_1, se elimine. Esto se logra haciendo que el coeficiente de I_1 sea cero, es decir, igualando el término que multiplica I_1 a cero:

$$w_i \beta_i + (1 - w_i)\beta_j = 0,$$

Resolviendo para w_i, obtenemos:

$$w_i = \frac{\beta_j}{\beta_j - \beta_i},$$

Este es el peso en el portafolio para el activo i tal que el riesgo sistemático es neutralizado. El rendimiento esperado del portafolio r_p es:

$$r_p = w_i \alpha_i + (1 - w_i)\alpha_j,$$

Sustituyendo el valor de w_i, obtenemos:

$$r_p = \frac{\alpha_i \beta_j - \alpha_j \beta_i}{\beta_j - \beta_i},$$

Este es el rendimiento esperado del portafolio sin riesgo. Según el principio de no arbitraje (en un mercado eficiente, no deberían existir oportunidades para obtener beneficios sin riesgo), este rendimiento debe ser igual al rendimiento libre de riesgo R, es decir:

$$\frac{\alpha_i \beta_j - \alpha_j \beta_i}{\beta_j - \beta_i} = R,$$

A partir de la ecuación anterior, podemos deducir una relación entre los parámetros α_i y α_j. Multiplicando ambos lados por $\beta_j - \beta_i$, obtenemos:

$$(\beta_j - \beta_i)R = \alpha_i \beta_j - \alpha_j \beta_i,$$

Lo que implica:

$$\frac{\alpha_j - R}{\beta_j} = \frac{\alpha_i - R}{\beta_i} = k,$$

donde k es una constante. Esto implica que los rendimientos ajustados por el riesgo de los dos activos tienen una relación lineal.De la ecuación anterior, podemos deducir que:

$$\alpha_i = R + \beta_i k \quad \text{y} \quad \alpha_j = R + \beta_j k.$$

Relación de los rendimientos esperados

Finalmente, el rendimiento esperado del activo i es:

$$E(r_i) = R + \beta_i(k + E(I_1)),$$

Suponiendo que $E(I_1) = \lambda_1$ es el valor esperado del índice I_1, podemos escribir:

$$E(r_i) = R + \beta_i \lambda_1.$$

Esto muestra que el rendimiento esperado de un activo depende de su exposición a los factores de riesgo sistemáticos, representados por β_i, y el rendimiento del factor I_1, representado por λ_1.

Relación con el CAPM

El CAPM es un caso particular de la APT cuando consideramos un solo factor sistemático. En ese caso, la APT se reduce a la fórmula del CAPM:

$$E(r_i) = R + \beta_i(E(r_m) - \lambda_0).$$

donde $E(r_m)$ es el rendimiento esperado del mercado y $\mu_w = R$ es el rendimiento libre de riesgo. Esto muestra que la APT generaliza al CAPM, que es un modelo de un solo factor.

Capítulo 4

Casos Prácticos

A partir de ahora, estudiaremos casos prácticos para el modelo de Markowitz y el modelo CAPM. En primer lugar, fijaremos un horizonte temporal entre enero de 2019 y diciembre de 2023, tomando los precios de cierre mensual de cada una de las empresas.

Habrá dos enfoques:

- **Gestión activa:** En este enfoque se buscará superar el rendimiento promedio del mercado.
- **Gestión pasiva:** En este caso se intentará replicar un índice del mercado.

El índice de referencia que utilizaremos es el **Standard & Poor's 500** (S&P 500), el índice bursátil más importante de los Estados Unidos y, por tanto, el que mejor refleja la situación actual del mercado global. El rendimiento promedio anualizado de este índice a 25 años es del 10,40 %.

4.1. Carteras Activas

La gestión activa de carteras busca superar el rendimiento del mercado, implementando una estrategia más agresiva de lo habitual. Los analistas evalúan el mercado, estudian tendencias y analizan los crecimientos potenciales de los activos. Es evidente que este enfoque conlleva un mayor nivel de riesgo.

Para implementar esta estrategia, seleccionaremos 12 empresas pertenecientes al S&P 500, agrupadas en 5 sectores diferentes con dos empresas en cada uno. Esto responde al principio de diversificación propuesto por Markowitz, que establece que la diversificación permite reducir el riesgo de la cartera, minimizando la correlación entre activos.

Las empresas seleccionadas son:

- **Tecnología e Informática:** Accenture(ACN) y Adobe(ADBE).
- **Aerolíneas:** American Airlines(AAL) y Alaska Air Group(ALK).
- **Semiconductores:** Intel(INTC) y Nvidia(NVDA).
- **Restauración:** McDonald's(MCD) y Domino's(DPZ).

- **Procesamiento de datos:** PayPal(PYPL) y MasterCard(MA).
- **Bancos:** Goldman Sachs(GS) y JPMorgan(JPM).

Teoría de Markowitz

Una vez hemos recopilado los datos a cierre mensual, lo primero que debemos hacer es calcular los rendimientos mensuales.

Fecha	S&P500	ACNE	ADBE	AAL	ALK	INTC	NVDA	MCD	DPZ	PYPL	MA	GS	JPM
dic-23	4.769,83	350,91	596,60	13,74	39,07	50,25	49,52	296,51	376,80	61,41	426,51	385,77	170,10
nov-23	4.567,80	333,14	611,01	12,43	37,81	44,70	46,77	281,84	369,80	57,61	413,83	341,54	156,08
oct-23	4.193,80	297,09	532,06	11,15	31,63	36,50	40,78	262,17	343,00	51,80	376,35	303,61	139,06
sep-23	4.288,05	307,11	509,90	12,81	37,08	35,55	43,50	263,44	376,40	58,46	395,91	323,57	145,02
ago-23	4.507,66	323,77	559,34	14,73	41,97	35,14	49,35	281,15	395,00	62,51	412,64	327,71	146,33
jul-23	4.588,96	316,35	546,17	16,75	48,63	35,77	46,73	293,20	347,40	75,82	394,28	355,87	157,96
jun-23	4.450,38	308,58	488,99	17,94	53,18	33,44	42,30	298,41	276,00	66,73	393,30	322,54	145,44
may-23	4.179,83	305,92	417,79	14,78	44,93	31,44	37,83	285,11	279,20	61,99	365,02	323,90	135,71
abr-23	4.169,48	280,29	377,56	13,64	43,46	31,06	27,75	295,75	294,20	76,00	380,03	343,44	138,24
mar-23	4.109,31	285,81	385,37	14,75	41,96	32,67	27,78	279,61	286,60	75,94	363,41	327,11	130,31
feb-23	3.970,15	265,55	323,95	15,98	47,83	24,93	23,22	263,91	286,40	73,60	355,29	351,65	143,35
ene-23	4.076,60	279,05	370,34	16,14	51,34	28,26	19,54	267,40	314,00	81,49	370,60	365,81	139,96

Figura 4.1: muestra de las bases de datos, de 2023, donde tenemos el cierre mensual de cada una de las empresas estudiadas (con su correspondiente índice).

Calculamos los rendimientos mensuales a través de

$$K_m = \frac{K_t - K_{t-1}}{K_{t-1}}.$$

Fecha	S&P500	ACNE	ADBE	AAL	ALK	INTC	NVDA	MCD	DPZ	PYPL	MA	GS	JPM
dic-23	4,42%	5,33%	-2,36%	10,54%	3,33%	12,42%	5,88%	5,21%	1,89%	6,60%	3,06%	12,95%	8,98%
nov-23	8,92%	12,13%	14,84%	11,48%	19,54%	22,47%	14,69%	7,50%	7,81%	11,22%	9,96%	12,49%	12,24%
oct-23	-2,20%	-3,26%	4,35%	-12,96%	-14,70%	2,67%	-6,25%	-0,48%	-8,87%	-11,39%	-4,94%	-6,17%	-4,11%
sep-23	-4,87%	-5,15%	-8,84%	-13,03%	-11,65%	1,17%	-11,85%	-6,30%	-4,71%	-6,48%	-4,05%	-1,26%	-0,90%
ago-23	-1,77%	2,35%	2,41%	-12,06%	-13,70%	-1,76%	5,61%	-4,11%	13,70%	-17,55%	4,66%	-7,91%	-7,36%
jul-23	3,11%	2,52%	11,69%	-6,63%	-8,56%	6,97%	10,47%	-1,75%	25,87%	13,62%	0,25%	10,33%	8,61%
jun-23	6,47%	0,87%	17,04%	21,38%	18,36%	6,36%	11,82%	4,66%	-1,15%	7,65%	7,75%	-0,42%	7,17%
may-23	0,25%	9,14%	10,66%	8,36%	3,38%	1,22%	36,32%	-3,60%	-5,10%	-18,43%	-3,95%	-5,69%	-1,83%
abr-23	1,46%	-1,93%	-2,03%	-7,53%	3,57%	-4,93%	-0,11%	5,77%	2,65%	0,08%	4,57%	4,99%	6,09%
mar-23	3,51%	7,63%	18,96%	-7,70%	-12,27%	31,05%	19,64%	5,95%	0,07%	3,18%	2,29%	-6,98%	-9,10%
feb-23	-2,61%	-4,84%	-12,53%	-0,99%	-6,84%	-11,78%	18,83%	-1,31%	-8,79%	-9,68%	-4,13%	-3,87%	2,42%
ene-23	6,18%	4,58%	10,05%	26,89%	19,56%	6,92%	33,74%	1,47%	7,02%	14,42%	6,58%	6,53%	4,37%

Figura 4.2: Rendimientos mensuales en 2023

Una vez que ya tenemos los rendimientos mensuales, debemos calcular las varianzas, desviaciones típicas y la matriz de covarianzas.

Hemos calculado el rendimiento medio mensual, ya que será nuestro rendimiento esperado, utilizando la fórmula en Excel:

```
=SUMA(C2:C60)/48
```

Por otro lado, hemos calculado la varianza con la fórmula:

```
=VAR.P(C2:C60)
```

y la desviación típica con:

`=DESVEST.P(C2:C60).`

Rendimiento Medio Mensual	1,3598%	2,0734%	2,4204%	-0,8240%	-0,0230%	0,7040%	6,8317%	1,2455%	1,3573%	0,1320%	1,8496%	1,9010%	1,4392%
Varianza	0,0027799	0,0055148	0,0091903	0,0181203	0,0155270	0,0093030	0,0202836	0,0030783	0,0105059	0,0140716	0,0061108	0,0082262	0,0064718
DesTip	0,05272461	0,07426164	0,09586613	0,1346116	0,12460747	0,09645224	0,14242044	0,05548227	0,10249849	0,1186237	0,07817133	0,09069815	0,08044736
Rdto Anualizado	17,595%	27,924%	33,241%	-9,452%	-0,276%	8,783%	121,005%	16,014%	17,561%	1,595%	24,598%	25,355%	18,705%

Figura 4.3: Rendimiento mensual, Varianza, Desviación Tipica y Rendimiento Anualizado

Para calcular la matriz de covarianzas, hemos utilizado la función `COVARIANZA.P` en Excel. Por ejemplo, usamos la fórmula:

`=COVARIANCE.P('Rendimientos mensuales'!F2:F60, 'Rendimientos mensuales'!H2:H60)`

Esta fórmula calcula la covarianza entre los rendimientos mensuales del activo en la columna `F` y el de la columna `H`, que en nuestro caso corresponden a **Intel** y **McDonald's**. El resultado se almacena en una celda, representando la relación estadística entre estos dos activos. Como resultado:

	ACNE	ADBE	AAL	ALK	INTC	NVDA	MCD	DPZ	PYPL	MA	GS	JPM
ACNE	0,00551479	0,00465209	0,00408937	0,00444246	0,0034044	0,00575894	0,00263163	0,00351495	0,00489456	0,00372159	0,00430225	0,00309796
ADBE	0,00465209	0,00919031	0,00438659	0,00377092	0,00482865	0,00942165	0,00245704	0,0030924	0,00576869	0,00391867	0,00455835	0,00327629
AAL	0,00408937	0,00438659	0,01812028	0,01385056	0,00612283	0,00606274	0,00292611	0,00263845	0,0046957	0,00505388	0,00764873	0,00730529
ALK	0,00444246	0,00377092	0,01385056	0,01552702	0,00463162	0,00437671	0,00339645	0,00267455	0,00658149	0,00652298	0,00796333	0,00752143
INTC	0,0034044	0,00482865	0,00612283	0,00463162	0,00930303	0,00582247	0,00198015	0,00363209	0,00379906	0,00326343	0,00420695	0,00324221
NVDA	0,00575894	0,00942165	0,00606274	0,00437671	0,00582247	0,02028358	0,0015878	0,00518851	0,0055704	0,00316743	0,00488901	0,00368485
MCD	0,00263163	0,00245704	0,00292611	0,00339645	0,00198015	0,0015878	0,00307828	0,00196218	0,00260108	0,00305307	0,00269866	0,00209328
DPZ	0,00351495	0,0030924	0,00263845	0,00267455	0,00363209	0,00518851	0,00196218	0,01050594	0,00374578	0,00341747	0,00357931	0,00278914
PYPL	0,00489456	0,00576869	0,0046957	0,00658149	0,00379906	0,0055704	0,00260108	0,00374578	0,01407158	0,00494785	0,00648097	0,00435786
MA	0,00372159	0,00391867	0,00505388	0,00652298	0,00326343	0,00316743	0,00305307	0,00341747	0,00494785	0,00611076	0,00436422	0,0034752
GS	0,00430225	0,00455835	0,00764873	0,00796333	0,00420695	0,00488901	0,00269866	0,00357931	0,00648097	0,00436422	0,00822616	0,00628866
JPM	0,00309796	0,00327629	0,00730529	0,00752143	0,00324221	0,00368485	0,00209328	0,00278914	0,00435786	0,0034752	0,00628866	0,00647178

Figura 4.4: Matriz de Covarianzas

Ahora podemos proponer el problema de optimización que estudiamos en el capítulo 2, en este caso la cartera de mínima varianza:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar:} \quad & \mathrm{Var}(R_p) = \mathbf{w}^\top \mathbf{C}\mathbf{w} \\ \text{Sujeto a:} \quad & \sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \\ & E(R_p) \geq 10\,\% \quad \text{(objetivo de rendimiento)} \end{aligned}$$

Observación 4.1.1. Como podemos apreciar, en ningún momento estamos poniendo restricción a operar en corto.

En primer lugar, debemos obtener el vector de rendimientos esperados, que en nuestro caso como nos basamos en una serie histórica, será el rendimiento mensual medio de cada uno de los activos que previamente hemos visto.

El procedimiento se llevó a cabo mediante **Solver**, una herramienta de Microsoft Excel. En una hoja de cálculo se definieron tres elementos clave: la matriz de covarianzas, el vector de rendimientos esperados y el vector de pesos.

Como condición inicial para el vector de pesos, considerando que hay 12 activos que deben sumar 1, se asignó a cada activo un peso inicial de $\frac{1}{12}$, es decir, aproximadamente 8,33 % para cada uno. Sin embargo, en el caso de **JPMorgan**, se ajustó su peso inicial a 0,087 (o 8,7 %) para que el total redondeara correctamente a 1.

El procedimiento en *Solver* es claro. Para minimizar la varianza, debemos calcular $\mathbf{w}^\top \mathbf{C} \mathbf{w}$, como se vio en el capítulo 2. En Excel, esto se realiza mediante la fórmula:

```
=MMULT(MMULT(TRANSPONER(F19:F30), C4:N15), F19:F30)
```

Por otro lado, nuestro rendimiento mensual esperado se calcula a través del sumatorio de $\sum_{i=1}^{12} w_i \mu_i$, que en Excel corresponde a la función:

```
=SUMAPRODUCTO(F19:F30, C19:C30).
```

Como todos los cálculos se han realizado de forma mensual, es necesario anualizarlos. Sea i_{12} el rendimiento mensual, se calcula el rendimiento anualizado i_1 de la siguiente forma:

$$i_1 = (1 + i_{12})^{12} - 1$$

Donde i_{12} es el rendimiento mensual y i_1 es el rendimiento anualizado.También ponemos el Índice Sharpe, ya que más adelante nos será útil. También anualizamos la varianza y desviación típica.

Para el índice de Sharpe, hemos usado de activo libre de riesgo el bono americano a 10 años, ya que operando con el S&P 500 tiene más sentido.

Cartera Activa de Mínima Varianza			
Compañía	Pesos		
ACNE	6,354%		
ADBE	0,000%	Rdto Anual	10,00%
AAL	5,765%	Varianza	0,06423951
ALK	17,034%	Desv.Tip	25%
INTC	17,029%		
NVDA	0,000%		
MCD	8,894%	Indice Sharpe	0,23
DPZ	8,551%		
PYPL	16,356%	Rdto Bonos	4,20%
MA	7,041%		
GS	6,883%		
JPM	6,091%		
Suma	100%		

Figura 4.5: Cartera Activa de Mínima Varianza

Ahora que ya hemos calculado la cartera de Mínima Varianza, calculamos la de máxima rentabilidad, el procedimiento en Excel es el mismo, lo que en *Solver* se plantean las siguientes condiciones.

$$\begin{aligned} \text{Maximizar:} \quad & E(R_p) = \sum_{i=1}^{12} w_i \mu_i \\ \text{Sujeto a:} \quad & \mathbf{w}^\top \mathbf{1} = 1 \end{aligned}$$

Cartera Activa de Máxima Rentabilidad			
Compañía	Pesos		
ACNE	0%		
ADBE	0%	Rdto Anual	121,005%
AAL	0%	Varianza	0,24340297
ALK	0%	Desv.Tip	49,34%
INTC	0%		
NVDA	100%		
MCD	0%	Indice Sharpe	2,37
DPZ	0%		
PYPL	0%	Rdto Bonos	4,20%
MA	0%		
GS	0%		
JPM	0%		
Suma	100%		

Figura 4.6: Cartera Activa de Máxima Rentabilidad

De esta cartera, podemos deducir que, al ser la de máxima rentabilidad, el 100 % de la inversión está concentrado en Nvidia, ya que es la empresa que históricamente ha mostrado el mayor crecimiento dentro del intervalo. En cambio, en la cartera de mínima varianza, los valores se distribuyen entre activos más estables, buscando reducir el riesgo global de la cartera.

CAPM

Para el caso del CAPM, necesitamos los datos de cierre mensual, de la misma manera que en el caso de Markowitz, por lo que utilizamos la misma base de datos. Es necesario contar con los rendimientos mensuales, ya que, una vez obtenidos, podremos calcular el rendimiento anual. Esta información también la tenemos disponible gracias al ejercicio previo.

El rendimiento medio anualizado del activo libre de riesgo que seleccionaremos es el de los Bonos del Tesoro de Estados Unidos a 10 años, con una tasa del 4,20 %.

Ahora, el objetivo es determinar la beta, la cual en nuestro caso se calcula mediante la fórmula:

$$\beta_i = \frac{\mathrm{Cov}(R_i, R_m)}{\mathrm{Var}(R_m)}.$$

Donde R_i representa el rendimiento del activo i y R_m es el rendimiento del mercado. Utilizando la función de Excel:

```
=COVARIANCE.P('Rendimientos mensuales'!C2:C60; 'Rendimientos mensuales'!D2:D60)
```

se obtiene de manera inmediata el valor de la covarianza entre el rendimiento del activo y el rendimiento del mercado, lo que permite calcular la beta correspondiente.

	ACNE	ADBE	AAL	ALK	INTC	NVDA	MCD	DPZ	PYPL	MA	GS	JPM
Covarianzas	0,00334897	0,00371211	0,0043411	0,00451595	0,00284301	0,0046678	0,00202728	0,00280958	0,00409052	0,00300495	0,00396251	0,00311879
Cov Anual	0,04018769	0,0445453	0,05209318	0,05419137	0,03411615	0,05601361	0,02432741	0,03371499	0,04908619	0,03605935	0,04755014	0,03742545

Figura 4.7: Covarianzas entre Activo y Mercado

Ahora que hemos calculado la beta de cada activo, es importante interpretar su significado:

- $\beta > 1$: La acción tiene mayor volatilidad que el mercado. Esto implica que el activo es más sensible a los cambios en el mercado.
- $\beta = 1$: La acción tiene la misma volatilidad que el mercado. Su rendimiento tiende a moverse de manera proporcional al mercado.
- $0 < \beta < 1$: La acción tiene menor volatilidad que el mercado, es decir, sus movimientos son menos pronunciados en comparación con los del mercado.
- $\beta < 0$: La acción se mueve en sentido contrario al mercado, lo que indica que podría actuar como un activo de cobertura.

Aprovechamos esta oportunidad para calcular el rendimiento anual esperado de cada acción utilizando la fórmula del modelo CAPM:

$$E(R_i) = R_f + \beta_i(R_m - R_f).$$

donde:

- R_f: Es el rendimiento del activo libre de riesgo.
- β_i: Es la beta del activo i, que mide su sensibilidad al mercado.
- R_m: Es el rendimiento esperado del mercado.
- $(R_m - R_f)$: Representa la prima de riesgo del mercado.

	ACNE	ADBE	AAL	ALK	INTC	NVDA	MCD	DPZ	PYPL	MA	GS	JPM
Betas	1,20471737	1,33534662	1,56161137	1,62450925	1,02270889	1,67913502	0,72926936	1,01068348	1,47146984	1,08096098	1,42542342	1,12191279
E(Ri)	0,32780265	0,48587991	-0,10560408	0,03752237	0,1318195	2,07383451	0,15878265	0,2194847	0,06547105	0,30789692	0,40342013	0,25185784

Figura 4.8: Betas y Rendimientos Esperados

Ahora que tenemos toda la información ya podemos establecer el modelado, en busca de los pesos, basándonos en la Teoría de la Media-Varianza.

Estamos en una cartera activa de modo que nuestro principal objetivo es maximizar. Se nos plantea el siguiente problema de optimización. En este caso hemos impuesto un límite a la varianza, ya que de lo contrario otra vez todo nuestro stock iría a Nvidia.

$$\begin{aligned} \text{Maximizar:} \quad & E(R_p) = \sum_{i=1}^{12} w_i \mu_i \\ \text{Sujeto a:} \quad & \mathbf{w}^\top \mathbf{1} = 1 \\ & \text{Var}(R_p) = \mathbf{w}^\top \mathbf{C} \mathbf{w} \leq 0{,}04 \end{aligned}$$

Cartera Activa de CAPM				
Compañía	Pesos			
ACNE	6,101%			
ADBE	4,899%		Rdto Anual	13,088%
AAL	16,146%		Varianza	0,01111979
ALK	13,369%		Desv.Tip	10,55%
INTC	10,849%			
NVDA	0,836%			
MCD	8,972%		Indice Sharpe	0,84
DPZ	8,584%			
PYPL	12,832%		Rdto Bonos	4,20%
MA	6,877%			
GS	6,699%			
JPM	3,836%			
Suma	100%			

Figura 4.9: Cartera Activa CAPM que maximiza la rentabilidad limita el riesgo

A continuación, analizaremos el caso de una cartera activa que tiene como objetivo minimizar la varianza y, al mismo tiempo, alcanzar una rentabilidad superior al índice. El problema de optimización se plantea de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar:} \quad & \text{Var}(R_p) = \mathbf{w}^\top \mathbf{C} \mathbf{w} \\ \text{Sujeto a:} \quad & \sum_{i=1}^{12} w_i = 1 \\ & E(R_p) \geq 11\,\% \end{aligned}$$

Cartera Activa de CAPM			
Compañía	Pesos		
ACNE	0,00%		
ADBE	0,00%	Rdto Anual	19,764%
AAL	0,00%	Varianza	0,03340104
ALK	0,00%	Desv.Tip	18,28%
INTC	6,18%		
NVDA	2,41%		
MCD	72,85%	Indice Sharpe	0,85
DPZ	6,30%		
PYPL	0,00%	Rdto Bonos	4,20%
MA	0,00%		
GS	0,00%		
JPM	12,26%		
Suma	100%		

Figura 4.10: Cartera Activa de CAPM que minimiza el riesgo con un rendimiento exigido

Como podemos observar, en este caso, el enfoque de minimizar el riesgo mientras se busca una rentabilidad superior a la exigida resulta en un nivel de riesgo mayor en comparación con la cartera previa. Sin embargo, también proporciona una rentabilidad superior. Esto demuestra que al incluir restricciones explícitas sobre el riesgo, como en el caso anterior, se puede limitar su exposición a niveles más controlados, aunque a costa de una menor rentabilidad.

4.2. Carteras Pasivas

Ahora exploraremos la gestión pasiva de carteras. En este enfoque, el procedimiento y estudio en Excel es el mismo que utilizamos anteriormente, manteniendo las mismas empresas previamente mencionadas. Sin embargo, lo que varía principalmente es el objetivo de la estrategia. Mientras que en la gestión activa buscamos maximizar la rentabilidad de la cartera, en la gestión pasiva el objetivo es minimizar el riesgo, replicando un índice de referencia.

El principio básico de la gestión pasiva es construir una cartera que siga el rendimiento de un índice de mercado, sin intentar superar su rendimiento mediante la selección activa de activos. En este caso, el índice de referencia que utilizaremos es el S&P 500, con un rendimiento histórico anualizado de aproximadamente 10,40 %. La idea es que, al replicar este índice, se consigue una exposición diversificada y eficiente al mercado, minimizando los riesgos inherentes a la selección activa y evitando los costos asociados con la toma de decisiones de inversión constantes.

Teoría de Markowitz

Al igual que en el caso de las carteras activas, comenzamos con la cartera de mínima varianza. Asegurando una cartera eficiente en términos de volatilidad.

El primer problema de optimización es, por tanto:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar:} \quad & \mathrm{Var}(R_p) = \mathbf{w}^\top \mathbf{C}\mathbf{w} \\ \text{Sujeto a:} \quad & \sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \\ & E(R_p) = 10\,\% \quad \text{(objetivo de rendimiento)} \end{aligned}$$

Cartera Pasiva de Mínima Varianza			
Compañía	Pesos		
ACNE	0,000%		
ADBE	0,000%	Rdto Anual	9,999%
AAL	13,438%	Varianza	0,04106793
ALK	0,000%	Desv.Tip	2,76%
INTC	10,277%		
NVDA	0,000%		
MCD	62,156%	Indice Sharpe	2,10
DPZ	3,505%		
PYPL	10,624%	Rdto Bonos	4,20%
MA	0,000%		
GS	0,000%		
JPM	0,000%		
Suma	100%		

Figura 4.11: Cartera Pasiva de Mínima Varianza

Igual que en el caso anterior, planteamos el problema de optimización para la cartera de máxima rentabilidad. En este caso, sujeto a las restricciones que definen la asignación de los activos en función de su rendimiento y riesgo.

$$\begin{aligned} \text{Maximizar:} \quad & E(R_p) = \sum_{i=1}^{12} w_i \mu_i \\ \text{Sujeto a:} \quad & \mathbf{w}^\top \mathbf{1} = 1 \\ & E(R_p) = 10\,\% \quad \text{(objetivo de rendimiento)} \end{aligned}$$

Cartera Pasiva de Máxima Rentabilidad			
Compañía	Pesos		
ACNE	6,101%		
ADBE	4,899%	Rdto Anual	10,000%
AAL	16,146%	Varianza	0,06742103
ALK	13,369%	Desv.Tip	25,97%
INTC	10,849%		
NVDA	0,836%		
MCD	8,972%	Indice Sharpe	0,22
DPZ	8,584%		
PYPL	12,832%	Rdto Bonos	4,20%
MA	6,877%		
GS	6,699%		
JPM	3,836%		
Suma	100%		

Figura 4.12: Cartera Pasiva de Máxima Rentabilidad

Como podemos observar, esta última cartera asume un riesgo excesivo, ya que se consigue una rentabilidad prácticamente idéntica a la anterior, pero asumiendo 12 veces más riesgo. Mientras que en esta última cartera se seleccionan todo tipo de activos, en la anterior se eligen principalmente valores menos volátiles y con un crecimiento más estable, como McDonald's o Intel.

Si hubiésemos creado múltiples carteras, tanto activas como pasivas, podríamos haber llegado a recrear la frontera eficiente. Aplicando el principio de que el punto donde se maximiza el índice de Sharpe, y donde es tangente a la frontera eficiente, corresponde a la cartera más óptima (lo cual requiere la aplicación del modelo CAPM a nuestro análisis).

Dado que el objetivo de este trabajo es recrear la gestión activa y pasiva, podemos basarnos simplemente en la dominación de carteras, como se presentó al principio del trabajo. Lo que es evidente es que estas carteras se encuentran en la frontera eficiente, ya que forman parte de ella.

Comparando las cuatro carteras, resulta evidente que, dependiendo de nuestra aversión al riesgo, existen dos opciones claras. Si tenemos una elevada aversión al riesgo, optaremos por la cartera pasiva de mínima varianza. En cambio, si no sentimos aversión al riesgo, la opción será la cartera activa de máxima rentabilidad.

CAPM

Ahora, utilizando el enfoque del modelo CAPM, desarrollaremos un procedimiento similar al aplicado en el análisis de carteras activas. La principal diferencia radica en que, en este caso, nuestro objetivo será replicar el índice en lugar de superarlo.

Este cambio de enfoque se traduce en modificaciones en las condiciones de optimización, adaptándose al propósito de replicar la composición y comportamiento del índice, manteniendo así una gestión pasiva que refleje fielmente las características del mercado.

$$\begin{aligned} \text{Minimizar:} \quad & \mathrm{Var}(R_p) = \mathbf{w}^\top \mathbf{C} \mathbf{w} \\ \text{Sujeto a:} \quad & \mathbf{w}^\top \mathbf{1} = 1 \\ & E(R_p) = 10\,\% \end{aligned}$$

Cartera Pasiva de CAPM			
Compañía	Pesos		
ACNE	0,00%		
ADBE	0,00%	Rdto Anual	10,000%
AAL	21,86%	Varianza	0,04773606
ALK	0,00%	Desv.Tip	21,85%
INTC	1,85%		
NVDA	0,00%		
MCD	58,38%	Indice Sharpe	0,27
DPZ	0,00%		
PYPL	9,22%	Rdto Bonos	4,20%
MA	0,00%		
GS	0,00%		
JPM	8,70%		
Suma	100%		

Figura 4.13: Cartera Pasiva de CAPM que minimiza la varianza replicando el índice

Ahora buscamos el efecto contrario, maximizar la rentabilidad, replicando el índice. Esta visión es interesante para ver hasta donde podemos subir el riesgo por la misma rentabilidad. El problema de optimización es:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar:} \quad & E(R_p) = \sum_{i=1}^{12} w_i \mu_i \\ \text{Sujeto a:} \quad & \mathbf{w}^\top \mathbf{1} = 1 \\ & E(R_p) = 10\,\% \end{aligned}$$

Cartera Pasiva de CAPM			
Compañía	Pesos		
ACNE	5,65%		
ADBE	0,12%	Rdto Anual	10,000%
AAL	20,80%	Varianza	0,07228655
ALK	15,79%	Desv.Tip	26,89%
INTC	12,50%		
NVDA	0,01%		
MCD	11,55%	Indice Sharpe	0,22
DPZ	9,43%		
PYPL	14,82%	Rdto Bonos	4,20%
MA	6,34%		
GS	3,00%		
JPM	0,00%		
Suma	100%		

Figura 4.14: Cartera Pasiva de CAPM

Podemos apreciar que en el caso de esta cartera hemos aumentado el riesgo sin aumentar la rentabilidad, distribuyendo los pesos entre acciones más volátiles.

Ahora que ya hemos visto las 4 carteras de CAPM, podemos deducir,por ejemplo a partir del índice de Sharpe, cuál es la más óptima.

- IS $>$ 1: rendimiento bien ajustado al riesgo. La cartera está bien diversificada.
- $0 <$ IS ≤ 1: Refleja un rendimiento razonable en relación con el riesgo asumido.
- IS $<$ 0: Significa que la cartera presenta un rendimiento inferior al del activo libre de riesgo. Esto puede señalar una mala gestión del riesgo.

A partir de los índices calculados, podemos observar que las dos carteras activas basadas en el enfoque del *CAPM* son las más óptimas, ya que ninguna de ellas presenta valores negativos. Esto implica que ninguna de estas carteras opera en un entorno de riesgo excesivamente incorrecto. Sin embargo, cabe destacar que un Índice de Sharpe de 0,2 es un valor relativamente bajo, lo que sugiere un rendimiento ajustado al riesgo poco eficiente.

Por otro lado, bajo la perspectiva de Markowitz, la cartera pasiva de mínima varianza alcanza una rentabilidad prácticamente idéntica a la del índice estudiado, pero con un riesgo significativamente reducido de tan solo 2,76 %. En contraste, la cartera activa de máxima rentabilidad presenta un Índice de Sharpe notablemente alto, superior a 2, pero a costa de asumir un riesgo considerablemente elevado del 50 %.

En las conclusiones obtendremos una valoración más detallada sobre lo visto a lo largo del trabajo.

Capítulo 5

Conclusiones

En primer lugar, debemos tener en cuenta que este trabajo se enmarca en el ámbito de las finanzas cuantitativas. A partir de los rendimientos históricos y las relaciones entre activos, hemos elaborado un estudio sobre cómo se debería componer una cartera, tomando como base una serie histórica de cinco años.

Es importante destacar que la inversión es una práctica mucho más compleja de lo que puede parecer, especialmente en la actualidad, cuando se ha popularizado enormemente. Los profesionales del sector realizan múltiples tipos de análisis antes de invertir en un activo y, por extensión, en un mercado. Entre estos se incluyen el análisis técnico, el análisis fundamental, y otros métodos como el descuento de flujos de caja, el descuento de dividendos o el modelo de Black-Litterman.

En este caso, he tratado de reflejar la realidad del mercado seleccionando acciones de diferentes tipos. Peter Lynch, en su libro *Un paso por delante de Wall Street*, ejemplifica bien las diferentes categorías de valores:

- **Valores de Alto Crecimiento:** Empresas cuyo crecimiento anual es de alrededor del 20 %. En este trabajo, Nvidia representa este grupo, una compañía que actualmente cotiza a 136 $ y que en nuestro estudio alcanza un crecimiento máximo del 50 %.
- **Valores Estables:** Crecimiento anual entre el 10 % y el 15 %. En nuestro caso, ejemplos de esta categoría son McDonald's o PayPal, aunque otras empresas como Coca-Cola o Nestlé también son representativas.
- **Valores de Crecimiento Reducido:** Empresas con un crecimiento anual de entre el 3 % y el 7 %, alineándose con el crecimiento promedio del PIB de los países.
- **Valores Recuperables:** Aquellas empresas que han visto una significativa reducción en su valor, ya sea por factores internos o externos, pero que tienen perspectivas de recuperar el valor perdido en el futuro.
- **Valores Cíclicos:** Empresas cuyo desempeño depende en gran medida de la oferta y demanda de ciertos bienes o que son altamente sensibles a las crisis económicas. Por ejemplo, las empresas dependientes de semiconductores son un caso relevante.
- **Valores de Activo Oculto:** Compañías que poseen activos que el mercado no considera o no conoce, como terrenos con materias primas no identificadas (por ejemplo, petróleo).

Existen otras alternativas atractivas como los ETF. Nuestro ejemplo principal ha sido el S&P500, pero otros índices, como el Nasdaq o el MSCI World, son igualmente reconocidos y utilizados ampliamente por los inversores.

Otra opción destacada es invertir en renta fija, es decir, en emisiones de deuda que generalmente presentan un riesgo reducido. Por otro lado, si deseamos eliminar todo tipo de riesgo y únicamente proteger nuestro dinero contra la pérdida de valor causada por la inflación, podemos optar por una cuenta remunerada. Actualmente, estas cuentas ofrecen rendimientos alrededor del 3,25 %, permitiendo disponer del capital en cualquier momento, a diferencia de los depósitos bancarios, y además sin estar sujetos al impacto fiscal de los rendimientos obtenidos.

Lo anterior pone de manifiesto que dejar el dinero en una cuenta bancaria sin rendimiento no es una estrategia adecuada para la revalorización del patrimonio, especialmente considerando las alternativas disponibles en el mercado.

Por otro lado, en cuanto a los dos métodos seleccionados, es importante resaltar sus principales características, ventajas y limitaciones:

Teoría de Markowitz: Este enfoque se basa en un riguroso marco matemático que utiliza varianzas y covarianzas para determinar la diversificación que minimiza el riesgo. Esta estrategia permite maximizar la rentabilidad bajo una restricción de riesgo o, alternativamente, minimizar el riesgo directamente. Además, presenta una notable flexibilidad en cuanto a las restricciones, como las ponderaciones de los activos en la cartera. Es un método fiable siempre y cuando los datos históricos sean consistentes y representativos, y proporciona una buena cobertura del riesgo.

Sin embargo, también tiene sus limitaciones. La teoría de Markowitz asume que las rentabilidades siguen una distribución normal, lo cual puede no ser aplicable en escenarios de alta incertidumbre o mercados extremos. Además, no considera factores macroeconómicos relevantes como tipos de interés o inflación. Desde un punto de vista personal, considero que esta omisión es una de sus principales deficiencias, ya que dichas variables pueden ser determinantes en la toma de decisiones.

Modelo CAPM: Por su parte, el CAPM es un método más simple y accesible, que establece una relación directa entre el mercado y el activo en cuestión a través de la Beta. Este modelo utiliza supuestos de equilibrio del mercado que le otorgan rigor matemático. Sin embargo, estas condiciones ideales pueden no reflejar la realidad del mercado de manera perfecta.

Una de sus principales limitaciones radica en asumir que todos los inversores poseen la misma información, lo cual es claramente incorrecto. Por ejemplo, un analista interno de una gran compañía, como Allianz, tiene acceso a más información sobre la empresa que una persona externa. Además, el modelo no tiene en cuenta cambios en las preferencias del mercado, lo que lo convierte en un enfoque estático.

En mi opinión, el CAPM es útil para realizar análisis rápidos y menos detallados, mientras que la Teoría de Markowitz resulta más adecuada para estudios profundos y detallados, siempre que se disponga del tiempo y los recursos necesarios. Por lo que respecta a las gestiones activa o pasiva, a la hora de invertir es fundamental el tiempo que uno esté dispuesto a dedicar. Intentar obtener un rendimiento similar a un índice de referencia es relativamente sencillo. Existen estrategias de inversión en las que, invirtiendo en *ETFs* y diversificando, se puede obtener una rentabilidad a medio/largo plazo con relativa tranquilidad.

Sin duda alguna, si nuestro objetivo es que el capital no pierda valor mientras se generan ingresos pasivos, la mejor estrategia consiste en diversificar a través de fondos de inversión, fondos monetarios, entre otros instrumentos financieros. Por otro lado, si nuestro objetivo es superar los índices de mercado, debemos asumir un mayor riesgo. En este caso, se recomienda combinar títulos individuales con algún fondo de inversión para garantizar una cierta estabilidad.

Bibliografía

[1] Harry Markowitz, *Portfolio Selection*, Journal of Finance, Volumen(7), 77-81, 1952.

[2] Maciej Jerzy Capinski, Ekkehard Kopp, *Portfolio Theory and Risk Management*, Cambridge, 2014.

[3] Marta Sanz Solé, *Probabilitats*, Edicions Universitat de Barcelona, 1997.

[4] Olga Julia, David Márquez Carreras, *Un primer curs d' estadística*, Universitat, 2015.

[5] Peter Lynch, *Un paso por delante de Wall Street*, Deusto, 2015.

[6] Siddhartha Pratim Chakrabarty, Ankur Kanaujiya, *Mathematical Portfolio Theory and Analysis*, Birkhauser, 2023.

[7] https://es.investing.com/equities/nombredelacompañia-historical-data

Anexo

Fecha	S&P500	ACNE	ADBE	AAL	ALK	INTC	NVDA	MCD	DPZ	PYPL	MA	GS	JPM
dic-23	4.769,83	350,91	596,60	13,74	39,07	50,25	49,52	296,51	376,80	61,41	426,51	385,77	170,10
nov-23	4.567,80	333,14	611,01	12,43	37,81	44,70	46,77	281,84	369,80	57,61	413,83	341,54	156,08
oct-23	4.193,80	297,09	532,06	11,15	31,63	36,50	40,78	262,17	343,00	51,80	376,35	303,61	139,06
sep-23	4.288,05	307,11	509,90	12,81	37,08	35,55	43,50	263,44	376,40	58,46	395,91	323,57	145,02
ago-23	4.507,66	323,77	559,34	14,73	41,97	35,14	49,35	281,15	395,00	62,51	412,64	327,71	146,33
jul-23	4.588,96	316,35	546,17	16,75	48,63	35,77	46,73	293,20	347,40	75,82	394,28	355,87	157,96
jun-23	4.450,38	308,58	488,99	17,94	53,18	33,44	42,30	298,41	276,00	66,73	393,30	322,54	145,44
may-23	4.179,83	305,92	417,79	14,78	44,93	31,44	37,83	285,11	279,20	61,99	365,02	323,90	135,71
abr-23	4.169,48	280,29	377,56	13,64	43,46	31,06	27,75	295,75	294,20	76,00	380,03	343,44	138,24
mar-23	4.109,31	285,81	385,37	14,75	41,96	32,67	27,78	279,61	286,60	75,94	363,41	327,11	130,31
feb-23	3.970,15	265,55	323,95	15,98	47,83	24,93	23,22	263,91	286,40	73,60	355,29	351,65	143,35
ene-23	4.076,60	279,05	370,34	16,14	51,34	28,26	19,54	267,40	314,00	81,49	370,60	365,81	139,96
dic-22	3.839,50	266,84	336,53	12,72	42,94	26,43	14,61	263,53	293,40	71,22	347,73	343,38	134,10
nov-22	4.080,11	300,93	344,93	14,43	47,44	30,07	16,92	272,79	286,20	78,41	356,40	386,15	138,18
oct-22	3.871,98	283,90	318,50	14,18	44,46	28,43	13,50	272,66	226,20	83,58	328,18	344,51	125,88
sep-22	3.585,62	257,30	275,20	12,04	39,15	25,77	12,14	230,74	222,60	86,07	284,34	293,05	104,50
ago-22	3.955,00	288,46	373,44	12,99	43,56	31,92	15,09	252,28	236,00	93,44	324,37	332,67	113,73
jul-22	4.130,29	306,26	410,12	13,71	44,33	36,31	18,16	263,37	285,60	86,53	353,79	333,39	115,36
jun-22	3.785,38	277,65	366,06	12,68	40,05	37,41	15,16	246,88	279,20	69,84	315,48	297,02	112,61
may-22	4.132,15	298,46	416,48	17,87	48,26	44,42	18,67	252,21	336,40	85,21	357,87	326,85	132,23
abr-22	4.131,93	300,36	395,95	18,77	54,39	43,59	18,55	249,16	347,60	87,93	363,38	305,49	119,36
mar-22	4.530,41	337,23	455,62	18,25	58,01	49,56	27,29	247,28	378,60	115,65	357,38	330,10	136,32
feb-22	4.373,94	316,02	467,68	17,25	56,14	47,70	24,39	244,77	365,00	111,93	360,82	341,29	141,80
ene-22	4.515,55	353,58	534,30	16,47	54,74	48,82	24,49	259,45	386,60	171,94	386,38	354,68	148,60
dic-21	4.766,18	414,55	567,06	17,96	52,10	51,50	29,41	268,07	458,80	188,58	359,32	382,55	158,35
nov-21	4.567,00	357,40	669,85	17,69	48,57	49,20	32,68	244,60	359,00	184,89	314,92	380,99	158,83
oct-21	4.605,38	358,79	650,36	19,20	52,80	49,00	25,57	245,55	387,00	232,59	335,52	413,35	169,89
sep-21	4.307,54	319,92	575,72	20,52	58,60	53,28	20,72	241,11	396,20	260,21	347,68	378,03	163,69
ago-21	4.522,68	336,56	663,70	19,94	57,34	54,06	22,39	237,46	411,40	288,66	346,23	413,51	159,95
jul-21	4.395,26	317,68	621,63	20,38	58,03	53,72	19,50	242,71	418,80	275,53	385,94	374,88	151,78
jun-21	4.297,50	294,79	585,64	21,21	60,31	56,14	20,00	230,99	388,60	291,48	365,09	379,53	155,54
may-21	4.204,11	282,16	504,58	24,24	69,20	57,12	16,24	233,89	365,20	260,02	360,58	372,02	164,24
abr-21	4.181,17	289,97	508,34	21,72	69,14	57,53	15,01	236,08	382,60	262,29	382,06	348,45	153,81
mar-21	3.972,89	276,25	475,37	23,90	69,21	64,00	13,35	224,14	347,00	242,84	356,05	327,00	152,23
feb-21	3.811,15	250,90	459,67	20,94	65,02	60,78	13,71	206,14	306,20	259,85	353,85	319,48	147,17
ene-21	3.714,24	241,92	458,77	17,17	48,83	55,51	12,99	207,84	329,20	234,31	316,29	271,17	128,67
dic-20	3.756,07	261,21	500,12	15,77	52,00	49,82	13,06	214,58	316,00	234,20	356,94	263,71	127,07
nov-20	3.621,63	249,09	478,47	14,13	50,97	48,35	13,40	217,44	319,80	214,12	336,51	230,58	117,88
oct-20	3.269,96	216,91	447,10	11,28	37,89	44,28	12,53	213,00	331,40	186,13	288,64	189,04	98,04
sep-20	3.363,00	225,99	490,43	12,29	36,63	51,78	13,53	219,49	365,00	197,03	338,17	200,97	96,27
ago-20	3.500,31	239,93	513,39	13,05	38,95	50,95	13,37	213,52	335,40	204,14	358,19	204,87	100,19
jul-20	3.271,12	224,78	444,32	11,12	34,44	47,73	10,61	194,28	318,60	196,07	308,53	197,96	96,64
jun-20	3.100,29	214,72	435,31	13,07	36,26	59,83	9,50	184,47	310,20	174,23	295,70	197,62	94,06
may-20	3.044,31	201,62	386,60	10,50	34,19	62,93	8,88	186,32	359,60	155,01	300,89	196,49	97,31
abr-20	2.912,43	185,19	353,64	12,01	32,52	59,98	7,31	187,56	344,20	123,00	274,97	183,42	95,76
mar-20	2.584,59	163,26	318,24	12,19	28,47	54,12	6,59	165,35	284,00	95,74	241,56	154,59	90,03
feb-20	2.954,22	180,59	345,12	19,05	50,46	55,52	6,75	194,17	296,00	107,99	290,25	200,77	116,11
ene-20	3.225,52	205,21	351,14	26,84	64,59	63,93	5,91	213,97	308,90	113,89	315,94	237,75	132,36
dic-19	3.230,78	210,57	329,81	28,68	67,75	59,85	5,88	197,61	320,20	108,17	298,59	229,93	139,40
nov-19	3.140,98	201,16	309,53	28,74	69,01	58,05	5,42	194,48	309,80	108,01	292,23	221,35	131,76
oct-19	3.037,56	185,42	277,93	30,06	69,43	56,53	5,03	196,70	285,90	104,10	276,81	213,38	124,92
sep-19	2.976,74	192,35	276,25	26,97	64,91	51,53	4,35	214,71	254,90	103,59	271,57	207,23	117,69
ago-19	2.926,46	198,17	284,51	26,31	59,72	47,41	4,19	217,97	239,80	109,05	281,37	203,91	109,86
jul-19	2.980,38	192,58	298,86	30,51	63,36	50,55	4,22	210,72	247,40	110,40	272,27	220,13	116,00
jun-19	2.941,76	184,77	294,65	32,61	63,91	47,87	4,11	207,66	278,00	114,46	264,53	204,60	111,80
may-19	2.752,06	178,07	270,90	27,23	58,20	44,04	3,39	198,27	235,10	109,75	251,49	182,49	105,96
abr-19	2.945,83	182,67	289,25	34,18	61,90	51,04	4,53	197,57	267,50	112,77	254,24	205,92	116,05

Figura 5.1: Bases de datos

Fecha	S&P500	ACNE	ADBE	AAL	ALK	INTC	NVDA	MCD	DPZ	PYPL	MA	GS	JPM
dic-23	4,42%	5,33%	-2,36%	10,54%	3,33%	12,42%	5,88%	5,21%	1,89%	6,60%	3,06%	12,95%	8,98%
nov-23	8,92%	12,13%	14,84%	11,48%	19,54%	22,47%	14,69%	7,50%	7,81%	11,22%	9,96%	12,49%	12,24%
oct-23	-2,20%	-3,26%	4,35%	-12,96%	-14,70%	2,67%	-6,25%	-0,48%	-8,87%	-11,39%	-4,94%	-6,17%	-4,11%
sep-23	-4,87%	-5,15%	-8,84%	-13,03%	-11,65%	1,17%	-11,85%	-6,30%	-4,71%	-6,48%	-4,05%	-1,26%	-0,90%
ago-23	-1,77%	2,35%	2,41%	-12,06%	-13,70%	-1,76%	5,61%	-4,11%	13,70%	-17,55%	4,66%	-7,91%	-7,36%
jul-23	3,11%	2,52%	11,69%	-6,63%	-8,56%	6,97%	10,47%	-1,75%	25,87%	13,62%	0,25%	10,33%	8,61%
jun-23	6,47%	0,87%	17,04%	21,38%	18,36%	6,36%	11,82%	4,66%	-1,15%	7,65%	7,75%	-0,42%	7,17%
may-23	0,25%	9,14%	10,66%	8,36%	3,38%	1,22%	36,32%	-3,60%	-5,10%	-18,43%	-3,95%	-5,69%	-1,83%
abr-23	1,46%	-1,93%	-2,03%	-7,53%	3,57%	-4,93%	-0,11%	5,77%	2,65%	0,08%	4,57%	4,99%	6,09%
mar-23	3,51%	7,63%	18,96%	-7,70%	-12,27%	31,05%	19,64%	5,95%	0,07%	3,18%	2,29%	-6,98%	-9,10%
feb-23	-2,61%	-4,84%	-12,53%	-0,99%	-6,84%	-11,78%	18,83%	-1,31%	-8,79%	-9,68%	-4,13%	-3,87%	2,42%
ene-23	6,18%	4,58%	10,05%	26,89%	19,56%	6,92%	33,74%	1,47%	7,02%	14,42%	6,58%	6,53%	4,37%
dic-22	-5,90%	-11,33%	-2,44%	-11,85%	-9,49%	-12,11%	-13,65%	-3,39%	2,52%	-9,17%	-2,43%	-11,08%	-2,95%
nov-22	5,38%	6,00%	8,30%	1,76%	6,70%	5,77%	25,33%	0,05%	26,53%	-6,19%	8,60%	12,09%	9,77%
oct-22	7,99%	10,34%	15,73%	17,77%	13,56%	10,32%	11,20%	18,17%	1,62%	-2,89%	15,42%	17,56%	20,46%
sep-22	-9,34%	-10,80%	-26,31%	-7,31%	-10,12%	-19,27%	-19,55%	-8,54%	-5,68%	-7,89%	-12,34%	-11,91%	-8,12%
ago-22	-4,24%	-5,81%	-8,94%	-5,25%	-1,74%	-12,09%	-16,91%	-4,21%	-17,37%	7,99%	-8,32%	-0,22%	-1,41%
jul-22	9,11%	10,30%	12,04%	8,12%	10,69%	-2,94%	19,79%	6,68%	2,29%	23,90%	12,14%	12,24%	2,44%
jun-22	-8,39%	-6,97%	-12,11%	-29,04%	-17,01%	-15,78%	-18,80%	-2,11%	-17,00%	-18,04%	-11,85%	-9,13%	-14,84%
may-22	0,01%	-0,63%	5,18%	-4,79%	-11,27%	1,90%	0,65%	1,22%	-3,22%	-3,09%	-1,52%	6,99%	10,78%
abr-22	-8,80%	-10,93%	-13,10%	2,85%	-6,24%	-12,05%	-32,03%	0,76%	-8,19%	-23,97%	1,68%	-7,46%	-12,44%
mar-22	3,58%	6,71%	-2,58%	5,80%	3,33%	3,90%	11,89%	1,03%	3,73%	3,32%	-0,95%	-3,28%	-3,86%
feb-22	-3,14%	-10,62%	-12,47%	4,74%	2,56%	-2,29%	-0,41%	-5,66%	-5,59%	-34,90%	-6,62%	-3,78%	-4,58%
ene-22	-5,26%	-14,71%	-5,78%	-8,30%	5,07%	-5,20%	-16,73%	-3,22%	-15,74%	-8,82%	7,53%	-7,29%	-6,16%
dic-21	4,36%	15,99%	-15,35%	1,53%	7,27%	4,67%	-10,01%	9,60%	27,80%	2,00%	14,10%	0,41%	-0,30%
nov-21	-0,83%	-0,39%	3,00%	-7,86%	-8,01%	0,41%	27,81%	-0,39%	-7,24%	-20,51%	-6,14%	-7,83%	-6,51%
oct-21	6,91%	12,15%	12,96%	-6,43%	-9,90%	-8,03%	23,41%	1,84%	-2,32%	-10,61%	-3,50%	9,34%	3,79%
sep-21	-4,76%	-4,94%	-13,26%	2,91%	2,20%	-1,44%	-7,46%	1,54%	-3,69%	-9,86%	0,42%	-8,58%	2,34%
ago-21	2,90%	5,94%	6,77%	-2,16%	-1,19%	0,63%	14,82%	-2,16%	-1,77%	4,77%	-10,29%	10,30%	5,38%
jul-21	2,27%	7,76%	6,15%	-3,91%	-3,78%	-4,31%	-2,50%	5,07%	7,77%	-5,47%	5,71%	-1,23%	-2,42%
jun-21	2,22%	4,48%	16,06%	-12,50%	-12,85%	-1,72%	23,15%	-1,24%	6,41%	12,10%	1,25%	2,02%	-5,30%
may-21	0,55%	-2,69%	-0,74%	11,60%	0,09%	-0,71%	8,19%	-0,93%	-4,55%	-0,87%	-5,62%	6,76%	6,78%
abr-21	5,24%	4,97%	6,94%	-9,12%	-0,10%	-10,11%	12,43%	5,33%	10,26%	8,01%	7,31%	6,56%	1,04%
mar-21	4,24%	10,10%	3,42%	14,14%	6,44%	5,30%	-2,63%	8,73%	13,32%	-6,55%	0,62%	2,35%	3,44%
feb-21	2,61%	3,71%	0,20%	21,96%	33,16%	9,49%	5,54%	-0,82%	-6,99%	10,90%	11,88%	17,82%	14,38%
ene-21	-1,11%	-7,38%	-8,27%	8,88%	-6,10%	11,42%	-0,54%	-3,14%	4,18%	0,05%	-11,39%	2,83%	1,26%
dic-20	3,71%	4,87%	4,52%	11,61%	2,02%	3,04%	-2,54%	-1,32%	-1,19%	9,38%	6,07%	14,37%	7,80%
nov-20	10,75%	14,84%	7,02%	25,27%	34,52%	9,19%	6,94%	2,08%	-3,50%	15,04%	16,58%	21,97%	20,24%
oct-20	-2,77%	-4,02%	-8,84%	-8,22%	3,44%	-14,48%	-7,39%	-2,96%	-9,21%	-5,53%	-14,65%	-5,94%	1,84%
sep-20	-3,92%	-5,81%	-4,47%	-5,82%	-5,96%	1,63%	1,20%	2,80%	8,83%	-3,48%	-5,59%	-1,90%	-3,91%

ene-21	-1,11%	-7,38%	-8,27%	8,88%	-6,10%	11,42%	-0,54%	-3,14%	4,18%	0,05%	-11,39%	2,83%	1,26%
dic-20	3,71%	4,87%	4,52%	11,61%	2,02%	3,04%	-2,54%	-1,32%	-1,19%	9,38%	6,07%	14,37%	7,80%
nov-20	10,75%	14,84%	7,02%	25,27%	34,52%	9,19%	6,94%	2,08%	-3,50%	15,04%	16,58%	21,97%	20,24%
oct-20	-2,77%	-4,02%	-8,84%	-8,22%	3,44%	-14,48%	-7,39%	-2,96%	-9,21%	-5,53%	-14,65%	-5,94%	1,84%
sep-20	-3,92%	-5,81%	-4,47%	-5,82%	-5,96%	1,63%	1,20%	2,80%	8,83%	-3,48%	-5,59%	-1,90%	-3,91%
ago-20	7,01%	6,74%	15,55%	17,36%	13,10%	6,75%	26,01%	9,90%	5,27%	4,12%	16,10%	3,49%	3,67%
jul-20	5,51%	4,69%	2,07%	-14,92%	-5,02%	-20,22%	11,68%	5,32%	2,71%	12,54%	4,34%	0,17%	2,74%
jun-20	1,84%	6,50%	12,60%	24,48%	6,05%	-4,93%	6,98%	-0,99%	-13,74%	12,40%	-1,72%	0,58%	-3,34%
may-20	4,53%	8,87%	9,32%	-12,57%	5,14%	4,92%	21,48%	-0,66%	4,47%	26,02%	9,43%	7,13%	1,62%
abr-20	12,68%	13,43%	11,12%	-1,48%	14,23%	10,83%	10,93%	13,43%	21,20%	28,47%	13,83%	18,65%	6,36%
mar-20	-12,51%	-9,60%	-7,79%	-36,01%	-43,58%	-2,52%	-2,37%	-14,84%	-4,05%	-11,34%	-16,78%	-23,00%	-22,46%
feb-20	-8,41%	-12,00%	-1,71%	-29,02%	-21,88%	-13,16%	14,21%	-9,25%	-4,18%	-5,18%	-8,13%	-15,55%	-12,28%
ene-20	-0,16%	-2,55%	6,47%	-6,42%	-4,66%	6,82%	0,51%	8,28%	-3,53%	5,29%	5,81%	3,40%	-5,05%
dic-19	2,86%	4,68%	6,55%	-0,21%	-1,83%	3,10%	8,49%	1,61%	3,36%	0,15%	2,18%	3,88%	5,80%
nov-19	3,40%	8,49%	11,37%	-4,39%	-0,60%	2,69%	7,75%	-1,13%	8,36%	3,76%	5,57%	3,74%	5,48%
oct-19	2,04%	-3,60%	0,61%	11,46%	6,96%	9,70%	15,63%	-8,39%	12,16%	0,49%	1,93%	2,97%	6,14%
sep-19	1,72%	-2,94%	-2,90%	2,51%	8,69%	8,69%	3,82%	-1,50%	6,30%	-5,01%	-3,48%	1,63%	7,13%
ago-19	-1,81%	2,90%	-4,80%	-13,77%	-5,74%	-6,21%	-0,71%	3,44%	-3,07%	-1,22%	3,34%	-7,37%	-5,29%
jul-19	1,31%	4,23%	1,43%	-6,44%	-0,86%	5,60%	2,68%	1,47%	-11,01%	-3,55%	2,93%	7,59%	3,76%
jun-19	6,89%	3,76%	8,77%	19,76%	9,81%	8,70%	21,24%	4,74%	18,25%	4,29%	5,19%	12,12%	5,51%
may-19	-6,58%	-2,52%	-6,34%	-20,33%	-5,98%	-13,71%	-25,17%	0,35%	-12,11%	-2,68%	-1,08%	-11,38%	-8,69%
abr-19	3,93%	3,78%	8,54%	7,62%	10,30%	-4,95%	0,89%	4,04%	10,54%	8,60%	7,98%	7,26%	14,64%
mar-19	1,79%	9,07%	1,52%	-10,86%	-9,04%	1,40%	16,32%	3,30%	3,60%	5,88%	4,75%	-2,39%	-3,00%
feb-19	2,97%	5,10%	5,92%	-0,39%	-3,52%	12,39%	7,52%	2,83%	-11,78%	10,49%	6,46%	-0,66%	0,83%
Rendimiento Medio Mensual	1,3598%	2,0734%	2,4204%	-0,8240%	-0,0230%	0,7040%	6,8317%	1,2455%	1,3573%	0,1320%	1,8496%	1,9010%	1,4392%
Varianza	0,0027799	0,0055148	0,0091903	0,0181203	0,0155270	0,0093030	0,0202836	0,0030783	0,0105059	0,0140716	0,0061108	0,0082262	0,0064718
DesTip	0,0527246	0,0742616	0,0958661	0,1346116	0,1246075	0,0964522	0,1424204	0,0554823	0,1024985	0,1186237	0,0781713	0,0906982	0,0804474
Rdto Anualizado	17,595%	27,924%	33,241%	-9,452%	-0,276%	8,783%	121,005%	16,014%	17,561%	1,595%	24,598%	25,355%	18,705%

Figura 5.2: Rendimientos

	ACNE	ADBE	AAL	ALK	INTC	NVDA	MCD	DPZ	PYPL	MA	GS	JPM
ACNE	0,00551479	0,00465209	0,00408937	0,00444246	0,0034044	0,00575894	0,00263163	0,00351495	0,00489456	0,00372159	0,00430225	0,00309796
ADBE	0,00465209	0,00919031	0,00438659	0,00377092	0,00482865	0,00942165	0,00245704	0,0030924	0,00576869	0,00391867	0,00455835	0,00327629
AAL	0,00408937	0,00438659	0,01812028	0,01385056	0,00612283	0,00606274	0,00292611	0,00263845	0,0046957	0,00505388	0,00764873	0,00730529
ALK	0,00444246	0,00377092	0,01385056	0,01552702	0,00463162	0,00437671	0,00339645	0,00267455	0,00658149	0,00652298	0,00796333	0,00752143
INTC	0,0034044	0,00482865	0,00612283	0,00463162	0,00930303	0,00582247	0,00198015	0,00363209	0,00379906	0,00326343	0,00420695	0,00324221
NVDA	0,00575894	0,00942165	0,00606274	0,00437671	0,00582247	0,02028358	0,0015878	0,00518851	0,0055704	0,00316743	0,00488901	0,00368485
MCD	0,00263163	0,00245704	0,00292611	0,00339645	0,00198015	0,0015878	0,00307828	0,00196218	0,00260108	0,00305307	0,00269866	0,00209328
DPZ	0,00351495	0,0030924	0,00263845	0,00267455	0,00363209	0,00518851	0,00196218	0,01050594	0,00374578	0,00341747	0,00357931	0,00278914
PYPL	0,00489456	0,00576869	0,0046957	0,00658149	0,00379906	0,0055704	0,00260108	0,00374578	0,01407158	0,00494785	0,00648097	0,00435786
MA	0,00372159	0,00391867	0,00505388	0,00652298	0,00326343	0,00316743	0,00305307	0,00341747	0,00494785	0,00611076	0,00436422	0,0034752
GS	0,00430225	0,00455835	0,00764873	0,00796333	0,00420695	0,00488901	0,00269866	0,00357931	0,00648097	0,00436422	0,00822616	0,00628866
JPM	0,00309796	0,00327629	0,00730529	0,00752143	0,00324221	0,00368485	0,00209328	0,00278914	0,00435786	0,0034752	0,00628866	0,00647178

Figura 5.3: Matriz de Covarianzas

	ACNE	ADBE	AAL	ALK	INTC	NVDA	MCD	DPZ	PYPL	MA	GS	JPM
Covarianzas	0,00334897	0,00371211	0,0043411	0,00451595	0,00284301	0,0046678	0,00202728	0,00280958	0,00409052	0,00300495	0,00396251	0,00311879
Cov Anual	0,04018769	0,0445453	0,05209318	0,05419137	0,03411615	0,05601361	0,02432741	0,03371499	0,04908619	0,03605935	0,04755014	0,03742545
	ACNE	ADBE	AAL	ALK	INTC	NVDA	MCD	DPZ	PYPL	MA	GS	JPM
Betas	1,20471737	1,33534662	1,56161137	1,62450925	1,02270889	1,67913502	0,72926936	1,01068348	1,47146984	1,08096098	1,42542342	1,12191279
E(Ri)	0,32780265	0,48587991	-0,10560408	0,03752237	0,1318195	2,07383451	0,15878265	0,2194847	0,06547105	0,30789692	0,40342013	0,25185784

Figura 5.4: Betas y Rentabilidad Esperada