



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

EL PROBLEMA DEL SUBESPAI INVARIANT

Autor: Marta Nicolás I Cabrera

Director: Dr. Jordi Pau Plana

Realitzat a: Departament de
Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 15 de gener de 2025

Abstract

Given a Banach space E , can we assert that every bounded linear operator $T : E \rightarrow E$ has a non-trivial closed invariant subspace? This question, known as the “Invariant Subspace Problem”, currently lacks a fully satisfactory answer and is considered by many mathematicians to be one of the great challenges in functional analysis.

In this Final Degree Project, we will explore the history of the problem and delve into some of the intrinsic difficulties it entails. To do this, we will start with a detailed and rigorous formulation of the problem and analyze several particular cases. Among these, we will highlight the Lomonosov’s Theorem, which demonstrates that if there exists a compact operator that commutes with a bounded linear operator in a Banach space, then the operator T necessarily has a non-trivial closed subspace that is invariant under T . Furthermore, through a counterexample that we will discuss in detail, we will show that, in the case of Banach spaces, the solution to the invariant subspace problem is generally negative.

Resum

Donat un espai E de Banach, podem afirmar que tot operador lineal acotat $T : E \rightarrow E$ té un subespai invariant tancat no trivial? Aquesta qüestió, coneguda com el “Problema del subespai invariant”, manca d’una resposta plenament satisfactòria en l’actualitat i és considerada per molts matemàtics com un dels grans desafiaments de l’anàlisi funcional.

En aquest Treball de Fi de Grau, explorarem la història del problema i aprofundirem en algunes de les dificultats intrínseques que comporta. Per fer-ho, partirem d’una formulació detallada i rigorosa del problema i analitzarem diversos casos particulars. Entre aquests, destacarem el Teorema de Lomonosov, que demostra que si existeix un operador compacte que commuta amb un operador lineal acotat en un espai de Banach, aleshores l’operador T necessàriament té un subespai tancat i no trivial que és invariant sota T . A més, mitjançant un contraexemple que discutirem amb detall, mostrarem que, en el cas dels espais de Banach, la solució al problema del subespai invariant és, en general, negativa.

Agraïments

En primer lloc, vull expressar el meu agraïment al meu tutor, el doctor Jordi Pau Plana, per la seva guia, disponibilitat i els seus valuosos consells que m'han aportat tranquil·litat durant els mesos de realització d'aquest treball. M'ha proporcionat les eines bibliogràfiques i tècniques necessàries per a tenir una base tangible sobre la qual construir aquesta memòria.

També vull donar les gràcies a la meva família per la seva paciència, confiança i suport incondicional en aquesta etapa que ara culmina amb aquest treball.

Finalment, agraeixo a les meves amigues per estar al meu costat i per la seva comprensió en els moments més difícils.

És gràcies a tots ells que avui escric aquest projecte de final de grau.

Índex

1	Operadors en espais normats	5
1.1	Operadors acotats	5
1.2	Operadors compactes	6
1.3	Teoria espectral	7
2	El problema del subespai invariant	13
2.1	Casos particulars	13
2.2	Teorema de Lomonosov	16
3	El Contraexemple de Read en ℓ^1	19
3.1	Estratègia general	20
3.2	Construcció de la successió $(f_k)_{k>0}$	22
3.3	Desenvolupament general del contraexemple	23
3.4	Prova de les proposicions i lemes	30
3.5	Generalitzacions d'aquest exemple	39

Introducció

En la teoria d'operadors, un dels problemes més importants és el dels subespais invariants. Aquest problema planteja el següent:

És cert que tot operador lineal acotat $T : E \rightarrow E$ en un espai de Banach E té un subespai tancat invariant no trivial?

Aquesta qüestió ha estat plantejada tant per a espais de Banach com per a espais de Hilbert.

El problema està obert per espais de Banach reflexius i per espais de Hilbert des de fa més de mig segle, i s'han fet moltes contribucions significatives utilitzant una àmplia varietat de tècniques. Diverses variants han estat resoltes restringint la classe d'operadors acotats considerats o especificant una classe particular d'espais de Banach. Això fa que aquest problema sigui molt interessant i desafiant; tanmateix, encara no hi ha confirmació d'una demostració que solucioni el problema per a espais de Hilbert. En la recerca d'informació sobre la història del problema, ha estat de gran utilitat el treball recollit en l'article [26].

Aquest problema es va plantejar per primera vegada a mitjans del segle XX, i es desconeix qui va formular-lo inicialment. Potser va sorgir arran de l'article fonamental de Arne Beurling [5], un matemàtic suec conegut per les seves contribucions a l'anàlisi harmònica, publicat a Acta Mathematica l'any 1949 sobre subespais invariants de desplaçaments (shifts) simples en espais de Hardy, o del treball no publicat de John von Neumann, un dels més influents matemàtics del segle XX, sobre operadors compactes. Des de llavors, molts matemàtics han intentat aproximar-se, amb més o menys èxit, a una solució completa.



Figura 1: John von Neumann

El 1954, redescobrint treballs no publicats de von Neumann, Nachman Aronszajn, conegut per la seva teoria dels espais amb nucli reproductor, va demostrar que un operador compacte en un espai de Hilbert sempre té un subespai invariant no trivial. Uns anys més tard, juntament amb Kennan T. Smith [1], van generalitzar aquest resultat als operadors compactes en espais de Banach.

La qüestió es va mantenir aturada fins al 1966, quan Allen Bernstein i Abraham Robinson [4], un pioner de l'anàlisi no estàndard, van estendre el resultat als operadors polinomialment compactes utilitzant tècniques de l'anàlisi no estàndard desenvolupades per Robinson. Es va demostrar que qualsevol operador T en un espai de Hilbert H per al qual hi ha un polinomi no nul $p(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ tal que $p(T) = a_n T^n + \dots + a_1 T + a_0$ és compacte té un subespai invariant. Aquest tipus d'operador T s'anomena polinomialment compacte.

La primera demostració utilitzava mètodes de l'anàlisi no estàndard, però Paul Halmos [14], un destacat matemàtic conegut pels seus treballs en anàlisi funcional i teoria d'operadors, va reestructurar l'argument per formular-lo en l'anàlisi estàndard clàssica. Curiosament, va publicar la seva feina resultant com un article breu més tard el mateix any, aparèixent en el mateix número del *Pacific Journal of Mathematics* que la demostració original.

Més tard, el 1967, William Arveson i Jacob Feldman [2] van transformar el resultat en una forma encara més general, refinant essencialment la tècnica de Halmos: si T és un operador quasinilpotent tal que l'àlgebra tancada uniformement generada per T conté un operador compacte no nul, llavors T té un subespai invariant no trivial.

Després d'un temps, un gran avenç va arribar el 1973, quan el llavors jove matemàtic rus Victor Lomonosov [15] va demostrar un resultat més general: Si un operador acotat no escalar T en un espai de Banach commuta amb un operador compacte no nul, llavors T té un subespai invariant no trivial. Més tard, Hugh Hilden [17] va fer una prova més breu i accessible. Aquesta línia de treball, que comença amb von Neumann i culmina amb Lomonosov i Hilden, segueix la filosofia que els operadors compactes generalitzen els operadors de rang finit.



Figura 2: Victor Lomonosov

Malgrat els avenços significatius, el problema del subespai invariant sembla que continua obert per als operadors lineals acotats en espais de Hilbert. En canvi, per als espais de

Banach, Per Henrik Enflo, un matemàtic i músic suec, va resoldre la qüestió amb els seus treballs publicats el 1987, oferint una resposta negativa en certs casos [10]. Enflo [9] va anunciar l'existència d'un espai de Banach i d'un operador lineal acotat sobre aquest que no tenia cap subespai invariant no trivial durant la reunió anual de l'American Mathematical Society a Toronto el 1976. No obstant això, no es va publicar res durant diversos anys, i no va ser fins al 1981 que finalment va presentar un article per a la seva publicació a *Acta Mathematica*. Malauradament, l'article va romandre sense avaluar pels revisors durant més de cinc anys, tot i que el manuscrit va circular per tot el món entre matemàtics. Finalment, l'article va ser acceptat el 1985 i va aparèixer el 1987 amb només petits canvis. Això va succeir, segons es diu, perquè l'article era força difícil i no estava ben redactat. De fet, en revisar la publicació de 100 pàgines de l'*Acta Mathematica*, el crític A. M. Davie escriu [7]:

[El treball de Per H. Enflo] ... és un assoliment notable; no obstant això, la segona part del seu article és tan impenetrable que està destinada a ser admirada més que llegida.



Figura 3: Per Henrik Enflo



Figura 4: Per H. Enflo en l'actualitat

Mentrestant, Charles John Read [20], un matemàtic britànic, va seguir les idees d'Enflo i va presentar un contraexemple que va ser publicat ràpidament el 1984 al *Bulletin of the London Mathematical Society*. Una versió més curta d'aquesta demostració va ser publicada de nou per Read el 1986.



Figura 5: Charles John Read

Molts matemàtics van criticar que Read es basés en les idees d'Enflo per intentar tenir precedència, considerant-ho poc ètic, sobretot perquè el seu treball es basava essencialment en les idees d'Enflo. Per exemple, el matemàtic francès Bernard Beauzamy [3] també va perfeccionar les tècniques d'Enflo i va proposar un contraexemple. El febrer de 1984, va presentar els resultats al Seminari d'Anàlisi Funcional de la Universitat de París (VI-VII), però va decidir no publicar el seu treball, mantenint així el respecte a la contribució original d'Enflo. Aquest llarg recorregut de descobriments i controvèrsies reflecteix la complexitat i la fascinació que envolta el problema del subespai invariant, un repte que sembla encara vigent avui dia en espais de Banach reflexius i en espais de Hilbert en l'anàlisi funcional.

Finalment, cal comentar que recentment el mateix Per H. Enflo ha anunciat la resolució positiva del problema del subespai invariant per espais de Hilbert separables [11]. Aquest resultat s'està revisant per diversos experts, i encara no se sap si la prova és correcta.

El projecte

L'objectiu principal d'aquest treball és explicar la història del problema esmentat i recopilar i exposar alguns dels casos particulars coneguts i resultats relacionats. És a dir, ens centrarem especialment en la qüestió de si un operador en un cert espai, normalment un espai de Banach, té un subespai invariant no trivial. Aquest és un tema sobre el qual s'han desenvolupat una gran quantitat de teoremes diferents, alguns dels quals ofereixen respostes sota condicions específiques sobre l'espai de Banach o Hilbert, mentre que altres aborden el problema imposant hipòtesis sobre l'operador. Al llarg del treball, explorarem alguns d'aquests resultats.

Estructura de la Memòria

L'estructura del treball és la següent: en el primer capítol definirem els conceptes fonamentals sobre operadors en espais normats i en espais compactes, els tipus bàsics d'espais que ens interessaran, amb un èmfasi particular en els espais de Banach i Hilbert i resultats d'anàlisi funcional i teoria d'operadors que seran fonamentals en el desenvolupament del treball.

Al llarg del segon capítol proporcionarem una descripció detallada del problema del subespai invariant, presentarem diverses formulacions del problema junt amb la demostració d'alguns casos particulars. Finalitzarem el capítol enunciant i demostrant la versió més completa del Teorema de Lomonosov.

Per acabar, en l'últim capítol oferirem una exposició del contraexemple de Read per a espais de Banach, mostrant que existeixen operadors sense subespais tancats invariants no trivials.

Capítol 1

Operadors en espais normats

En aquest capítol es presentaran els conceptes bàsics i els resultats fonamentals de l'anàlisi funcional necessaris per a desenvolupar el treball. En general, i llevat que sigui rellevant per alguna altra raó, es deixaran de banda aquelles demostracions que ja es troben incloses en el temari dels cursos d'Anàlisi Matemàtica i l'assignatura optativa d'Anàlisi Real i Funcional de la Universitat de Barcelona. Alguns dels textos en què ens basem per obtenir els resultats d'aquest capítol són [24] i [16].

1.1 Operadors acotats

Un espai normat $(E, \|\cdot\|)$ és un espai vectorial E juntament amb una aplicació $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ complint:

- (i) $\|x\| = 0$ si i només si $x = 0$.
- (ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ per a tot $x \in E$ i per a tot escalar λ ($\lambda \in \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$).
- (iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ per a tot $x, y \in E$.

Si E és un espai normat, llavors $d(x, y) = \|x - y\|$ defineix una distància en E , amb el que (E, d) és un espai mètric.

Si considerem un espai mètric E , podem parlar de successions. Una successió $\{x_n\}$ a E és de Cauchy si per a tot $\varepsilon > 0$, existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ de manera que $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ per tot $n, m \geq n_0$.

Un espai mètric es diu complet si tota successió de Cauchy a E convergeix a E . Així, si un espai normat E és complet en la mètrica d definida a partir de la norma per $d(x, y) = \|x - y\|$, diem que E és un espai de Banach.

En el context d'espais normats $(E, \|\cdot\|_E)$ i $(F, \|\cdot\|_F)$, una aplicació lineal $T : E \rightarrow F$ es considera un operador lineal i acotat si hi ha una constant $C < \infty$ de manera que $\|Tx\|_F \leq C\|x\|_E$ per a tot $x \in E$. És important destacar que un operador lineal en espais normats és continu si i només si és acotat.

Si E, F són espais normats, denotem per $L(E, F)$ el conjunt d'operadors lineals continus (o acotats) entre E i F . Si $T \in L(E, F)$, definim la norma d'operadors de T com

$$\|T\| = \inf\{C : \|Tx\|_F \leq C\|x\|_E \quad \forall x \in E\}$$

Es compleix,

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\|_F : \|x\|_E \leq 1\} = \sup\{\|Tx\|_F : \|x\|_E = 1, x \neq 0\} = \sup\left\{\frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E}\right\}$$

És conegut que donats E, F espais normats, si F és de Banach, llavors $L(E, F)$ és un espai de Banach. Quan considerem $F = E$, posem $L(E) = L(E, E)$ i parlem simplement d'operadors acotats en E .

Proposició 1.1.1. *Segui E un espai normat i $S, T \in L(E)$. Llavors $S \circ T \in L(E)$ amb $\|S \circ T\| \leq \|S\|\|T\|$.*

Teorema 1.1.2. *Segui E un espai de Banach, i $T \in L(E)$ amb $\|T\| < 1$. Llavors $I - T$ és invertible en $L(E)$. A més, en aquest cas es té*

$$(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$$

on I és la matriu identitat.

Finalment, si E és un espai de Banach, l'espai $E^* = L(E, \mathbb{C})$ s'anomena l'espai dual de E . Els elements de E^* s'anomenen formes lineals contínues o bé funcionals lineals en E .

1.2 Operadors compactes

En l'estudi dels espais de Banach, considerem dos espais E i F i $T : E \rightarrow F$ una aplicació lineal. Diem que T és un operador compacte si donada la successió $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq E$ amb $\|(x_n)\|_E \leq C$ (acotada en E), es té que la successió $\{Tx_n\}_{n=1}^{\infty}$ té una parcial convergent en F .

És important notar que si T és compacte llavors T és acotat. A més, si S i T són operadors compactes, llavors $S + T$ és compacte.

Ara, quan parlem de l'imatge o rang d'un operador $T \in L(E, F)$, ens referim al conjunt de tots els vectors que podem obtenir aplicant T a cada vector de E . Així, la imatge es defineix com $Im(T) = \{Tx : x \in E\}$.

Si aquesta imatge $Im(T)$ resulta ser un subespai de F de dimensió finita, direm que l'operador T és un operador de rang finit.

Proposició 1.2.1. *Tot operador $T \in L(E, F)$ de rang finit és compacte.*

Continuant amb les propietats dels operadors, si tenim un espai de Banach E , i un operador compacte $S \in L(E)$ i un operador qualsevol $T \in L(E)$ llavors $S \circ T$ i $T \circ S$ són compactes.

Denotem per $K(E, F)$ al conjunt d'operadors $T : E \rightarrow F$ compactes.

Teorema 1.2.2. *Siguin $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ una successió d'operadors compactes en $L(E, F)$ tal que $\|T_n - T\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ on $T \in L(E, F)$. Llavors T és compacte. És a dir, $K(E, F)$ és tancat en $L(E, F)$.*

Com a conseqüència, si T és un límit d'operadors de rang finit, llavors T és compacte.

1.3 Teoria espectral

En el context dels operadors, un escalar $\lambda \in \mathbb{C}$ es considera un valor propi (o autovalor) d'un operador $T \in L(E)$ si existeix un vector $x \neq 0$ en E tal que $Tx = \lambda x$. Al vector x se li anomena vector propi (o autovector) associat al autovalor λ . És clar que $\lambda \in \mathbb{C}$ és un autovalor de T si i només si $\text{Ker}(T - \lambda I) \neq \{0\}$, és a dir, si i només si $T - \lambda I$ no és injectiva. Llavors tenim

$$\text{vap}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ no és injectiva}\}$$

on $\text{vap}(T)$ representa els valors propis de T .

Observem que si $\dim(E) < \infty$ es té

$$\alpha \in \text{vap}(T) \iff T - \lambda I \text{ no és bijectiu}$$

En el cas general, no té perquè passar.

Donat un operador lineal T en un espai normat E , l'espectre de T és el conjunt de valors escalars $\lambda \in \mathbb{C}$ per als quals l'operador $T - \lambda I$ no és bijectiu. Es representa amb el símbol $\sigma(T)$. És a dir,

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ no és bijectiu}\}$$

Clarament, tenim

$$\text{vap}(T) \subset \sigma(T)$$

Els elements $\alpha \in \sigma(T)$ s'anomenen valors espectrals.

Notem que, com a conseqüència del Teorema de l'aplicació oberta d'Anàlisi Funcional, tenim que $\alpha \notin \sigma(T)$ si i només si $T - \lambda I$ és invertible en $L(E)$.

Teorema 1.3.1. *Sigui E un espai de Banach. L'espectre de cada element $T \in L(E)$ és un conjunt compacte i no buit, i està contingut en el disc $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq \|T\|\}$.*

Proposició 1.3.2. *Sigui E un espai de Banach,*

$$(i) \quad T \in L(E) \Rightarrow \sigma(T) \neq \emptyset.$$

$$(ii) \quad T \in L(E) \text{ compacte i } \dim(E) = +\infty \Rightarrow 0 \in \sigma(T).$$

Un operador T en un espai de Hilbert H es diu que és autoadjunt si compleix la següent condició:

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle \quad \text{per a tot } x, y \in H$$

on $\langle \cdot, \cdot \rangle$ representa el producte interior en l'espai de Hilbert. Aquesta propietat implica que T és igual al seu propi operador adjunt T^* , és a dir, $T = T^*$. Aquest tipus d'operadors tenen propietats especials, com ara tenir un espectre contingut en els nombres reals.

Teorema 1.3.3. *Sigui H un espai de Hilbert. Si $T \in L(H)$ és compacte i autoadjunt, llavors almenys un de $-\|T\|$ i $\|T\|$ és un autovalor de T .*

Per tal de provar la fórmula del radi espectral, necessària per a la demostració del Teorema de Lomonosov, ens cal parlar de funcions holomorfes amb valors en un espai de Banach.

Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ i E un espai de Banach. Una funció definida en Ω amb valors en E , $f : \Omega \rightarrow E$ es diu que és holomorfa si per a tot $z_0 \in \Omega$, existeix el límit

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

en l'espai de Banach E . És conegut que aquesta definició és equivalent al fet que la funció $w \circ f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ sigui holomorfa per a tot funcional lineal $w \in E^*$ (veure [16], p. 112).

Lema 1.3.4. *Sigui E un espai de Banach, i $T \in L(E)$. Llavors la funció*

$$f(\lambda) = (I - \frac{1}{\lambda}T)^{-1}$$

és holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \sigma(T)$.

Demostració. Definim $F : \mathbb{C} \setminus \sigma(T) \rightarrow L(E)$ per

$$F(\lambda) = (\lambda I - T)^{-1}$$

Veiem que F és holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \sigma(T)$, és a dir, que F és diferenciable respecte a λ en cada punt d'aquest domini i que la seva derivada varia de forma contínua respecte a λ .

Primer, considerem els valors de λ per als quals $(\lambda I - T)$ és invertible. Si $\lambda \notin \sigma(T)$, aleshores $(\lambda I - T)$ és invertible en $L(E)$. Així, per a $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(T)$, l'expressió $F(\lambda) = (\lambda I - T)^{-1}$ està ben definida i correspon a un operador lineal continu en $L(E)$.

Per veure que F és holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \sigma(T)$, prenem un $h \in \mathbb{C}$ amb $|h|$ prou petit, de manera que $\lambda I + h$ es mantingui dins del conjunt obert $\mathbb{C} \setminus \sigma(T)$, tenim que

$$\begin{aligned} F(\lambda + h) - F(\lambda) &= ((\lambda I + h) - T)^{-1} - (\lambda I - T)^{-1} = \\ &= ((\lambda I + h) - T)^{-1} [(\lambda I - T) - ((\lambda I + h) - T)] (\lambda I - T)^{-1} \end{aligned}$$

Això ens dona que

$$\frac{F(\lambda + h) - F(\lambda)}{h} = -((\lambda I + h) - T)^{-1} (\lambda I - T)^{-1}$$

La continuïtat de la inversa mostra que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(\lambda + h) - F(\lambda)}{h} = -[(\lambda I - T)^{-1}]^2$$

verificant així que F és holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \sigma(T)$. Com $f(\lambda) = \lambda F(\lambda)$, llavors obtenim que f és holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \sigma(T)$

□

Sigui E un espai de Banach i $\{a_n\} \subset E$ una successió d'elements de E . Una sèrie de potències d'elements de E és una expressió de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad z \in \mathbb{C}$$

Igual com en sèries de potències de nombres complexos, una sèrie de potències en un espai de Banach també té un radi de convergència R de manera que la sèrie de potències és convergent per $|z| < R$, i divergent si $|z| > R$. El radi de convergència ve donat per

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|a_n\|_E}$$

Donat un espai de Banach E i un operador $T \in L(E)$. En aquest cas, definim el radi espectral de T com

$$r(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$$

Teorema 1.3.5. (Fórmula del radi espectral) Si E és un espai de Banach complex i $T \in L(E)$, llavors

$$r(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$$

Demostració. La idea d'aquesta demostració és demostrar les dues desigualtats

$$r(T) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$$

i

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leq r(T)$$

Comencem centrant-nos en la primera desigualtat. Considerem un nombre complex λ i un enter positiu n . Assumim que $\lambda^n \notin \sigma(T^n)$, per tant $(\lambda^n I - T^n)^{-1}$ existeix. Observem que

$$\lambda^n I - T^n = (\lambda I - T)(\lambda^{n-1} I + \lambda^{n-2} T + \dots + \lambda T^{n-2} + T^{n-1})$$

i que els factors de la dreta commuten. L'operador

$$(\lambda^n I - T^n)^{-1}(\lambda^{n-1} I + \lambda^{n-2} T + \dots + \lambda T^{n-2} + T^{n-1})$$

és l'invers de $\lambda I - T$. Per tant, $\lambda \notin \sigma(T)$. Això mostra que $\lambda \in \sigma(T)$ implica $\lambda^n \in \sigma(T^n)$ per a cada enter positiu n . El Teorema 1.3.1 implica ara que

$$|\lambda^n| \leq \|T^n\|$$

i, per tant, que

$$|\lambda| \leq \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$$

per a cada enter positiu n . Ara la definició de radi espectral ens dona que

$$r(T) \leq \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$$

per a cada enter positiu n , i per tant, es té que

$$r(T) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$$

Això prova la primera de les dues desigualtats. Ara ens movem a la següent desigualtat. Volem provar que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leq r(T)$$

Recordem que, pel Teorema 1.1.2, si $\|T\| < 1$, es pot escriure

$$(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$$

Per tant, si $\|T\| < |\lambda|$, tenim

$$(I - \frac{1}{\lambda}T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n \lambda^{-n}$$

Ara, prenem $z = \frac{1}{\lambda}$. Així, podem expressar la inversa com

$$(I - zT)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n z^n \quad \text{si } 0 \leq |z| < \frac{1}{\|T\|}$$

Sabem que una sèrie de potències de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ amb $a_n \in E$, convergeix per $|z| < \frac{1}{\|T\|}$ en un espai de Banach. Per tant, podem dir que la sèrie convergeix quan $\frac{1}{\|T\|} \leq R$, on R és el radi de convergència donat per

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|a_n\|_E}$$

on $a_n = T^n$. D'aquesta manera, obtenim

$$\|T\| \geq \frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|T^n\|_E}$$

El nostre objectiu és substituir $\|T\|$ per $r(T)$. Recordem que $r(T) \leq \|T\|$. Si poguéssim demostrar que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} T^n z^n$ és convergent per $|z| < \frac{1}{r(T)}$, hauríem aconseguit el que volíem.

Definim una funció holomorfa amb valors en l'espai de Banach, $f : \mathbb{C} \setminus \sigma(T) \rightarrow L(E)$, com

$$f(\lambda) = (I - \frac{1}{\lambda}T)^{-1}$$

Pel Lema 1.3.4 sabem que f és holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \sigma(T)$. Per tant també és holomorfa en $|\lambda| > r(T)$, ja que $\{|\lambda| > r(T)\} \subset \mathbb{C} \setminus \sigma(T)$.

Considerem ara la funció

$$g(z) = \begin{cases} f(\frac{1}{z}) & \text{si } 0 < |z| < \frac{1}{r(T)} \\ I & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

Observem per les propietats de f que g és holomorfa en $\Delta \setminus \{0\}$ on $\Delta = \{|z| < \frac{1}{r(T)}\}$ i és contínua en $z = 0$, amb el que g és holomorfa en tot el disc Δ (igual que en funcions escalars també val per funcions holomorfes amb valors en espais de Banach). Llavors g es pot expressar com una sèrie de potències en $L(E)$, amb

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

on $a_n \in L(E)$, i la sèrie convergeix per $|z| < \frac{1}{r(T)}$. Sabem que, per $|z| < \frac{1}{\|T\|}$, tenim

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} T^n z^n$$

amb el que, per la unicitat dels coeficients tenim $a_n = T^n$. Tenim doncs que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} T^n z^n$ és convergent per $|z| < \frac{1}{r(T)}$, podem concloure que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leq r(T)$$

que és el que volíem demostrar.

□

Capítol 2

El problema del subespai invariant

En aquest capítol s'exposarà detalladament el problema del subespai invariant. Presentarem alguns teoremes importants que estableixen l'existència d'un subespai invariant sota certes condicions, com ara per a operadors amb valors propis o operadors compactes i autoadjunts. A més, exposarem una versió del Teorema de Lomonosov i la demostrarem rigorosament utilitzant la proposta feta per Hilden. Per al desenvolupament d'aquest capítol, hem consultat principalment les referències [24] i [23].

Sigui E un espai de Banach i $T : E \rightarrow E$ un operador lineal acotat. Llavors volem veure si existeix un subespai tancat V en $(E, \|\cdot\|)$ tal que $\{0\} \neq V \neq E$ i $T(V) \subset V$. És a dir, si existeix un subespai tancat V en E no trivial i invariant per a T .

A partir d'ara ja suposarem que l'espai de Banach E té dimensió més gran estricta que 1, ja que si no només té subespais trivials.

2.1 Casos particulars

A continuació, analitzarem diversos casos, tenint en compte les condicions que poden aplicar-se a l'espai vectorial. Distinguirem entre espai de dimensió finita o infinita, de Banach o de Hilbert, així com entre espais separables o no separables.

Després, ens centrarem en les característiques dels operadors. Avaluarem operadors acotats i compactes, així com la seva relació amb els valors propis. Finalment, mirarem que succeeix per als operadors autoadjunts.

Recordem abans alguns teoremes útils per tal d'exposar alguns dels casos particulars.

Proposició 2.1.1. *Sigui E un espai de Banach, $T \in L(E)$ i $\lambda \in \mathbb{C}$. Llavors $N(\lambda) = \text{Ker}(T - \lambda I)$ i $R(\lambda) = \text{Im}(T - \lambda I)$ són subespais invariants per T .*

Demostració. Tenim $y \in R(\lambda)$ si i només si hi ha $x \in E$ amb $y = Tx - \lambda x$. Llavors $Ty = T(Tx - \lambda x) = (T - \lambda I)(Tx) \in \text{Im}(T - \lambda I) = R(\lambda)$.

I si $x \in N(\lambda)$, llavors $Tx = \lambda x$, i $(T - \lambda I)(Tx) = T(\lambda x) - \lambda^2 x = \lambda(Tx - \lambda x) = 0$, per tant $Tx \in N(\lambda)$.

□

Proposició 2.1.2. *Si $T \in L(E)$ és un operador lineal sobre un espai de Banach E , i T té algun valor propi, llavors T té algun subespai invariant no trivial.*

Demostració. Sigui $T \in L(E)$ un operador lineal sobre un espai de Banach E . Suposem que T té un valor propi $\lambda \in \mathbb{C}$. Per definició, això significa que existeix un vector $v \neq 0$ tal que $Tv = \lambda v$. Aquest vector v pertany al nucli de l'operador $T - \lambda I$, és a dir, $v \in \text{Ker}(T - \lambda I)$. Així, el nucli $\text{Ker}(T - \lambda I)$, denotat també com $N(\lambda)$, no és trivial, ja que conté almenys el vector propi $v \neq 0$, i si T no és un múltiple de la identitat, $\text{Ker}(T - \lambda_j I)$ està contingut correctament en E i és diferent de E . Per la Proposició 2.1.1, sabem que $N(\lambda) = \text{Ker}(T - \lambda I)$ és un subespai invariant no trivial per T , conseqüentment, T té algun subespai invariant no trivial. Si T és un múltiple de la identitat, llavors cada subespai és invariant, i de nou el teorema està provat.

□

Teorema 2.1.3. *Sigui E un espai de Banach complex de dimensió finita. Llavors, cada $T \in L(E)$ té un subespai invariant no trivial.*

Demostració. Suposem que $\dim(E) = n < \infty$. Escollim qualsevol vector no nul $x \in E$. Llavors, el conjunt $\{x, Tx, \dots, T^n x\}$ és linealment dependent perquè conté $n+1$ elements. Per tant, existeixen escalars $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$, no tots zero, tal que

$$0 = \alpha_0 x + \alpha_1 Tx + \dots + \alpha_n T^n x$$

El polinomi complex $\alpha_0 + \alpha_1 z + \dots + \alpha_n z^n$ pot ser factoritzat com

$$\alpha(z - \lambda_1) \cdots (z - \lambda_m)$$

per a alguns escalars $\alpha, \lambda_1, \dots, \lambda_m$. Llavors,

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_0 x + \alpha_1 Tx + \dots + \alpha_n T^n x = (\alpha_0 + \alpha_1 T + \dots + \alpha_n T^n)x \\ &= \alpha(T - \lambda_1 I) \cdots (T - \lambda_m I)x \end{aligned}$$

on I és la matriu identitat de dimensions $n \times n$. Es dedueix que $T - \lambda_j I$ té un nucli no nul per a almenys un valor j , cosa que implica l'existència d'un valor propi λ_j . Per la Proposició 2.1.2 es dedueix que $T \in L(E)$ té un subespai invariant no trivial.

□

Recordem el que diu el Teorema Fonamental de l'Àlgebra, aquest estableix que qualsevol polinomi de grau n amb coeficients complexos té exactament n arrels (tenint en compte les multiplicitats) en el cos dels nombres complexos $\mathbb{C}$.

Per tant, en el cas de dimensió finita, el Teorema Fonamental de l'Àlgebra ens permet assegurar que el polinomi característic és un polinomi de grau n . Això significa que té n arrels, i per tant $\sigma(T) \equiv \sigma_P(T) \neq \emptyset$. És a dir, podem afirmar que cada T en X té un autovalor, així que el problema està resolt per a espais vectorials complexos de dimensió finita, n'hi ha prou a considerar l'autoespai associat a un autovector.

Un resultat similar es pot establir per als operadors autoadjunts i compactes en un espai de Hilbert, el qual presentem a continuació.

Teorema 2.1.4. *Tot operador T , autoadjunt i compacte en un espai de Hilbert H de dimensió infinita té un subespai invariant no trivial.*

Demostració. Pel Teorema 1.3.3, tal operador T té un autovalor λ i per la Proposició 2.1.2 la demostració és directa. □

Sigui X qualsevol espai vectorial complex i T un operador acotat en X . Un autovalor λ de T proporciona clarament un subespai invariant de T , concretament el nucli de $T - \lambda I$. Així, si T té un autovalor, el problema està resolt. No obstant això, no tots els operadors T , ni tan sols els operadors acotats en un espai vectorial complex, garanteixen l'existència d'un autovalor.

Exemple 2.1.5. (Operadors sense valors propis)

Donem un exemple d'un operador que no és compacte i no té valors propis. Considerem l'espai de Banach $E = \ell^2$ donat per

$$\ell^2 = \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}$$

i el shift a la dreta, definit per $T : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ on

$$T(x) = T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots), \quad \text{per a cada } x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$$

definit per $Te_n = e_{n+1}$.

També es pot donar el cas de tenir un operador compacte, però que tot i així no tingui valors propis. Com és el cas de l'operador de Volterra $V : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ definit per $Vf(x) = \int_0^x f(t) dt$. Veiem que no en té, és fàcil veure que si $Vf(x) = \alpha f(x)$ amb $\alpha \neq 0 \Leftrightarrow \int_0^x f(t) dt = \alpha f(x) \Rightarrow f(x)$ és diferenciable. Llavors $\alpha f'(x) = f(x)$ i $f(0) = 0 \Rightarrow f(x) = ce^{\frac{1}{\alpha}x} \Rightarrow c = 0 \Rightarrow f(x) \equiv 0$.

Donat un $x \neq 0 \in E$, definim el subespai cíclic generat per x , denotat per $W(x, T)$, com el subespai tancat més petit de E que conté l'òrbita de $S(x, T)$, on $S(x, T) = \{x, Tx, T^2x, \dots\}$, és a dir, diem que y pertany a $W(x, T)$ si hi ha escalars λ_k de manera que $y = \sum_{k \geq 1} \lambda_k T^k x$.

Per a un vector $x \neq 0 \in E$, diem que x és un vector cíclic per T , o que x és T -cíclic, si $W(x, T) = E$, és a dir, si el subespai generat per l'òrbita de x per T és dens en E .

Proposició 2.1.6. *Si E és un espai de Banach. L'operador T només té subespais invariants trivials si, i només si, cada vector no nul de E és un vector cíclic per T .*

Demostració. Si M és un subespai invariant no trivial per T , aleshores per a cada vector no nul $x \in M$ tenim $W(x, T) \subseteq M$, i per tant x no és un vector cíclic per T . D'altra banda, si $x \in E$ és un vector no nul no cíclic per T , aleshores $W(x, T) \neq E$. A més, com que $x \neq 0$ i $x \in W(x, T)$, tenim $W(x, T) \neq \{0\}$. Així, es segueix que $W(x, T)$ és un subespai invariant no trivial per T .

□

Recordem que anomenem espai separable aquell que inclou un subconjunt dens numerable.

Teorema 2.1.7. *Si E és un espai de Banach no separable, aleshores tot operador $T \in L(E)$ admet un subespai invariant no trivial.*

Demostració. Sigui T un operador lineal acotat en un espai de Banach no separable E , i escollim $x \in E \setminus \{0\}$. Com que $W(x, T)$ és separable (ja que ve generat per un conjunt numerable) i E no ho és, tenim que $W(x, T) \neq E$. Per tant, x no és T -cíclic. El resultat segueix per la Proposició 2.1.6.

□

De vegades és útil definir els subespais cíclics en termes de combinacions polinòmiques de T . Atès que $\{p(T)x : p \text{ polinomi}\}$ coincideix amb el subespai generat per $\{T^n x : n \geq 0\}$, tenim que $W(x, T)$ coincideix amb la clausura de l'esmentat subespai.

2.2 Teorema de Lomonosov

A continuació, enunciem una versió sencilla del Teorema de Lomonosov i donarem la demostració de Hilden d'aquest.

Teorema 2.2.1. *Suposem que E és un espai de Banach (complex) de dimensió infinita i que $T \in L(E)$ compleix $TK = KT$ per a algun operador compacte no nul $K \in L(E)$. Llavors, T té un subespai invariant no trivial.*

Demostració. Suposem que T no té subespais invariants no trivials. Si l'operador K té un autovalor λ , llavors el nucli de l'operador $\lambda I - K$ és un subespai invariant per a T . Com que K és compacte i E és de dimensió infinita, aquest nucli és un subespai no trivial de E . Per tant, podem suposar que K no té cap autovalor. Per l'alternativa de Fredholm es coneix que per un operador compacte l'únic valor espectral que no té perquè ser valor propi és el 0, per tant $\sigma(K) = \{0\}$. Per la fórmula del radi espectral

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\alpha K^n\|^{\frac{1}{n}} = 0 \quad (2.2.1)$$

per a cada nombre complex α . Podem suposar que $\|K\| = 1$ (si no és així, utilitzeu $\frac{K}{\|K\|}$ en lloc de K). Escollim un $x_0 \in E$ tal que $\|Kx_0\| > 1$. Observeu que $\|x_0\|$ ha de ser més gran que 1. Considereu la bola tancada

$$B = \{x \in E \mid \|x - x_0\| \leq 1\}$$

i observem que $0 \notin B$. Per a qualsevol $x \neq 0$ en E , la clausura del conjunt

$$C = \{p(T)x \mid p \text{ és un polinomi complex}\}$$

és un subespai invariant tancat i no nul per a T . Veiem amb més detall que és invariant. Sigui la clausura de C en E , denotada per $\overline{C}$, està formada per tots els vectors que poden ser aproximats per elements de C en la norma de E . Per tant, per a qualsevol $v \in \overline{C}$, existeix una successió $\{v_n\} \subset C$ tal que $v_n \rightarrow v$, i aplicant T a cada v_n obtenim $Tv_n \in C$. Donat que T és continu, $Tv_n \rightarrow Tv$, el que implica que $Tv \in \overline{C}$, per tant, $\overline{C}$ és invariant sota T .

Com estem suposant que T no té subespais invariants no trivials i és no nul, per la hipòtesi, cada subespai invariant tancat i no nul per a T és tot E , tenim $\overline{C} = E$. Per a un $x \neq 0$ fix en E i qualsevol conjunt obert U en E . Com que $\overline{C} = E$, es té que $U \cap C \neq \emptyset$. Així, ha d'existir un polinomi p tal que $p(T)x \in U$. Definim

$$U_p = \{x \in E \mid \|p(T)x - x_0\| < 1\}$$

Cada U_p és obert en E , i cada element no nul de E està en almenys un dels U_p . Observem que $K(B)$, la imatge de B per l'operador K té una clausura compacte. Per tant, com que la unió dels U_p formen un recobriment obert finit de $K(B)$, existeixen polinomis $p_1, \dots, p_N$ tal que

$$K(B) \subseteq \bigcup_{k=1}^N U_{p_k}$$

En particular, si $x \in K(B)$, llavors hi ha un polinomi p_k per $1 \leq k \leq N$ tal que $p_k(T)x \in B$. Fins a aquest punt de la demostració, Hilden segueix a Lomonosov. En aquest moment, els seus mètodes divergeixen. Lomonosov fa ús del Teorema de punt fix de Schauder. Ara donem la resta de la demostració de Hilden.

Atès que $Kx_0 \in K(B)$ tenim que $p_{k_1}(T)Kx_0 \in B$ per a algun k_1 . Això implica que $Kp_{k_1}(T)Kx_0 \in K(B)$ i, per tant, podem triar un k_2 tal que $p_{k_2}(T)Kp_{k_1}(T)Kx_0 \in B$. Continuant aquest procés; després de m passos, obtenim

$$p_{k_m}(T)K \dots p_{k_2}(T)Kp_{k_1}(T)Kx_0 \in B$$

per alguns $k_1, k_2, \dots, k_m$. Definim

$$\alpha = \max\{\|p_k(T)\| \mid k = 1, \dots, N\}$$

Degut a (2.2.1), tenim que donat un $\varepsilon > 0$, hi ha un m tal que $\|(\alpha K)^m x_0\| < \varepsilon$. Aleshores, com que $TK = KT$, tenim

$$\begin{aligned} \|p_{k_m}(T)K \dots p_{k_2}(T)Kp_{k_1}(T)Kx_0\| &= \|p_{k_m}(T) \dots p_{k_2}(T)p_{k_1}(T)K^m x_0\| \\ &= \|\alpha^{-1}p_{k_m}(T) \dots \alpha^{-1}p_{k_2}(T)\alpha^{-1}p_{k_1}(T)(\alpha K)^m x_0\| \end{aligned}$$

Per la construcció de α , $\|\alpha^{-1}p_{k_m}(T)\| \leq 1$ per a tots els k . Per tant,

$$\|p_{k_m}(T)K \dots p_{k_2}(T)Kp_{k_1}(T)Kx_0\| \leq \|(\alpha K)^m x_0\| < \varepsilon$$

Això mostra que donat un $\varepsilon > 0$, hi ha un element en la bola tancada B de norma menor que ε . Això contradueix que $0 \notin B$.

□

Comentar que V. Lomonosov va obtenir un resultat més general: Tot operador que commuta amb un altre no escalar que, al seu torn, commuta amb un operador compacte no nul admet un subespai tancat i invariant no trivial.

No obstant això, set anys després del seu resultat, l'any 1980, Hadwin, Nordgren, Radjavi i Rosenthal [13] van donar un exemple d'un operador que no commuta amb cap operador compacte no nul, més concretament, van demostrar que existeixen operadors lineals i acotats sobre espais de Hilbert que no compleixen les hipòtesis del Teorema de Lomonosov. Per tant, és important destacar que el teorema de Lomonosov no s'aplica a tots els operadors lineals en espais de Banach de dimensió infinita. De fet, tot i que garanteix l'existència d'un subespai invariant no trivial per als operadors que commuten amb un operador compacte no nul, no és vàlid per als operadors que no compleixen aquesta condició.

Capítol 3

El Contraexemple de Read en ℓ^1

En aquest capítol es tractarà de manera exhaustiva el contraexemple de Read per al problema del subespai invariant. Exposarem els conceptes clau i desenvoluparem la construcció de Read, que mostra l'existència d'un operador en un espai de Banach que no admet cap subespai invariant no trivial. Analitzarem les tècniques utilitzades per Read per construir aquest operador, especialment la metodologia per evitar l'existència de subespais invariants. Per a l'elaboració d'aquest capítol, s'han consultat diversos treballs, com per exemple [18], [8], [6] i [25].

Recordem, com es va esmentar a la introducció, que Per H. Enflo va abordar la qüestió amb els seus treballs publicats el 1987, tot i que hi treballava des de 1981. Enflo va oferir una resposta negativa en certs casos [10] per a espais de Banach. Una de les seves observacions clau va ser que un operador lineal T amb un vector cíclic x actua com un shift en el conjunt $\{x, Tx, T^2x, \dots\}$.

Mentrestant, Charles John Read [20] va publicar, el 1984, un article de longitud i complexitat similars als d'Enflo. Tanmateix, malgrat que diverses facetes de la construcció de Read es basaven realment en les idees d'Enflo, aquest no va citar la seva obra.

A partir d'aquí, la majoria dels avenços en aquest àmbit han estat desenvolupats per Read. El primer gran assoliment va arribar el 1985, quan va proporcionar un contraexemple en l'espai clàssic de Banach ℓ^1 [21]. Posteriorment, en [19], Read va construir un altre operador lineal en ℓ^1 , que actualment es considera el contraexemple més senzill conegut.

Prèviament, enunciaré alguna definició i proposició necessària per al desenvolupament de la demostració.

Introduïm la següent definició, que ens permet caracteritzar els espais normats en termes de la seva completitud. Si F és un espai normat, llavors un completat de F és un espai de Banach E de manera que hi ha una isometria $\phi : F \rightarrow E$ amb $\phi(F)$ dens en E . Normalment simplement pensem que tenim un espai de Banach E de manera que F es troba dins de E i F és dens en E .

S'anomena el completat de F ja que dos completats diferents són isomètrics. A més, sempre existeix. Per construir E a partir de F es fa un procediment anàleg al de la construcció dels reals a partir dels racionals.

D'acord amb la Proposició 2.1.6 del capítol anterior, tenim que un operador T només té subespais invariants trivials si, i només si, cada vector no nul de E és un vector cíclic per T .

Proposició 3.0.1. *Si T un operador sobre E amb un vector cíclic x_0 . L'operador T només té subespais invariants trivials si, i només si, per a cada vector unitari x i $\varepsilon > 0$, existeix un polinomi q tal que*

$$\|q(T)x - x_0\|_E < \varepsilon$$

Demostració. Suposem que T només té subespais invariants trivials. Això implica que, per la Proposició 2.1.6, tot vector no nul $x \in E$ és un vector cíclic per T , és a dir, el conjunt $\{p(T)x : p \text{ polinomi}\}$ és dens en E . En particular, això val per qualsevol vector unitari x . Així, donat x i un $\varepsilon > 0$, la densitat del conjunt permet assegurar que existeix un polinomi q tal que $q(T)x$ s'aproxima a x_0 amb precisió arbitrària. Per tant, podem triar un polinomi q per al qual $\|q(T)x - x_0\|_E < \varepsilon$.

En sentit contrari, suposem que per qualsevol vector unitari x i $\varepsilon > 0$, existeix un polinomi q tal que $\|q(T)x - x_0\|_E < \varepsilon$. Això implica que x_0 pertany a l'adherència del conjunt $\{p(T)x : p \text{ polinomi}\}$, que és equivalent a afirmar que x és un vector cíclic. Si aquesta propietat es compleix per tot $x \neq 0$, llavors tots els vectors no nuls de E són cíclics. Per la Proposició 2.1.6, això equival a dir que T només té subespais invariants trivials.

□

A continuació, esbossarem la idea de la demostració d'aquest exemple senzill en ℓ^1 [19].

3.1 Estratègia general per l'obtenció del contraexemple sobre ℓ^1

A partir de la Proposició esmentada, s'ha de construir un espai de Banach E , un operador T acotat en E , i trobar un vector cíclic $x_0 \in E$ de manera que, per a tot $x \in E$ amb $x \neq 0$, i per a tot $\varepsilon > 0$, existeixi un polinomi q de manera que

$$\|q(T)x - x_0\|_E < \varepsilon \tag{3.1}$$

L'espai de Banach E serà el completat de l'espai de polinomis $\mathbb{C}[z]$ respecte a una certa norma, i resulta que es podrà identificar amb ℓ^1 .

Com que en el completat, tot x es podrà aproximar per polinomis, el primer pas serà provar (3.1) quan x és un polinomi p no nul, amb el que, per a tot $\varepsilon > 0$, volem veure que hi ha un polinomi q amb

$$\|q(T)p - x_0\|_E < \varepsilon$$

L'operador T serà l'operador de multiplicar per z , i s'haurà de provar que és un operador lineal acotat en E .

Al ser T l'operador de multiplicar per z , llavors $q(T)p$ no és res més que el producte dels dos polinomis qp . A més, és clar que el polinomi 1 (constant igual a 1) és cíclic per T , amb el que podem agafar $x_0 = 1$.

Per tant, donat un polinomi no nul p , per a tot $\varepsilon > 0$, el primer pas és provar que hi ha un polinomi q de manera que

$$\|qp - 1\|_E < \varepsilon$$

Un cop provat això, recordar que l'objectiu és provar que, per a tot element $x \in E$ amb $x \neq 0$, i no només per als polinomis, i tot $\varepsilon > 0$, provar que hi ha un polinomi q de manera que

$$\|qx - 1\|_E < \varepsilon$$

És a dir, ens cal trobar polinomis q_n de manera que

$$\|q_n x - 1\|_E \rightarrow 0$$

Donat $x \in E \setminus \{0\}$, podem trobar polinomis no nuls p_n que tendeixen a x en E , és a dir, amb $\|p_n - x\|_E \rightarrow 0$.

Per aquests polinomis p_n , pel pas 1, podem trobar polinomis q_n amb $\|q_n p_n - 1\|_E \rightarrow 0$.

Ara recordem que els polinomis q_n els podem pensar com operadors en E , de manera que $\|q_n y\|_E \leq \|q_n\|_{op} \|y\|_E$ per a tot $y \in E$, on $\|q_n\|_{op}$ és la norma de q_n en l'espai $L(E)$ dels operadors en E . Llavors

$$\|q_n x - 1\|_E \leq \|q_n x - q_n p_n\|_E + \|q_n p_n - 1\|_E \leq \|q_n\|_{op} \|x - p_n\|_E + \|q_n p_n - 1\|_E$$

i això tendeix a 0 quan $n \rightarrow \infty$ en el cas que tinguem $\sup_n \|q_n\|_{op} < \infty$, i llavors ja estariem.

Per tant, com a segon pas (entre altres), ens cal veure que, donat $x \in E \setminus \{0\}$, podem trobar polinomis p_n amb $\|p_n - x\|_E \rightarrow 0$, de manera que els polinomis q_n associats a p_n pel pas 1, es poden escollir de manera que $\sup_n \|q_n\|_{op} < \infty$. Alternativament, en cas que no quedi clar que es poden aconseguir els polinomis q_n amb la norma dels operadors uniformement acotada, ens caldria veure directament que podem aconseguir els polinomis q_n amb $\|q_n x - q_n p_n\|_E$ tendint a zero.

Bàsicament, amb possibles modificacions, seguirem aquesta estratègia.

3.2 Construcció de la successió $(f_k)_{k>0}$

Indiquem de manera detallada com construir la successió $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de l'espai de polinomis $\mathbb{C}[z]$ esmentada anteriorment.

Considerem successions de nombres naturals $\{a_n\}_{n \geq 0}$ i $\{b_n\}_{n \geq 0}$ amb creixement suficientment ràpid amb $a_0 = b_0 = 1$ i

$$1 < a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots < a_n < b_n < \dots$$

Tot seguit, sigui $\{v_n\}_{n \geq -1}$ la successió de nombres naturals definida per $v_{-1} = v_0 = 0$, $v_1 = a_1 + b_1$, i

$$v_n = (n-1)(a_n + b_n) \quad \text{si } n > 1$$

Passem a definir la base $\{f_k\}_{k \geq 0}$. Definim $f_0 \equiv 1$, i per a tot $k \geq 1$, procedim com segueix de la següent manera

- Si $1 \leq k < a_1$, definim

$$f_k(z) = 2^{(\frac{1}{2}a_1 - k)} z^k \quad (3.2.1)$$

- Si $k = a_1$, posem

$$f_k(z) = z^k - 1 \quad (3.2.2)$$

Ara, fixem un índex $n \geq 2$, i anem variant un altre índex auxiliar $r \in \{1, \dots, n-1\}$. Per a cada parell (n, r) , definim

- Si $k \in J_{n,r} := ((r-1)a_n + v_{n-r}, ra_n)$,

$$f_k(z) = 2^{\frac{(r-\frac{1}{2})a_n - k}{b_{n-1}}} z^k \quad (3.2.3)$$

- Si $k \in I_{n,r} := [ra_n, ra_n + v_{n-r-1}]$,

$$f_k(z) = a_{n-r}(z^k - z^{k-a_n}) \quad (3.2.4)$$

Observem que

$$X_n = \bigcup_{r=1}^{n-1} (I_{n,r} \cup J_{n,r}) = (v_{n-1}, (n-1)a_n]$$

Tot seguit passem a definir f_k per $k \in ((n-1)a_n, v_n]$.

- Si $k \in L_{n,r} := ((n-1)a_n + (r-1)b_n, r(a_n + b_n))$,

$$f_k(z) = 2^{\frac{(r-\frac{1}{2})b_n - k}{na_n}} z^k \quad (3.2.5)$$

- Si $k \in K_{n,r} := [r(a_n + b_n), (n-1)a_n + rb_n]$,

$$f_k(z) = z^k - b_n z^{k-b_n} \quad (3.2.6)$$

Ara tenim

$$Y_n = \bigcup_{r=1}^{n-1} (K_{n,r} \cup L_{n,r}) = ((n-1)a_n, v_n]$$

amb el que $X_n \cup Y_n = (v_{n-1}, v_n]$. Com que $v_n \rightarrow \infty$, tenim que les relacions (3.2.3), (3.2.4), (3.2.5) i (3.2.6) defineixen f_k per a tot $k > v_1$. Com que abans hem definit f_k per a $0 \leq k \leq a_1$, només ens queda definir f_k per a $a_1 < k \leq v_1$, que definim tot seguit. Si $k = v_1$, definim f_k amb la identitat (3.2.6) amb $n = 1$ i $k = v_1 = a_1 + b_1$, és a dir,

$$f_k(z) = z^k - b_1 z^{k-b_1}, \quad k = v_1 = a_1 + b_1$$

i també, per $a_1 < k < v_1$, definim f_k mitjançant la identitat (3.2.5) amb $n = r = 1$, és a dir,

$$f_k(z) = 2^{\frac{b_1 - k}{a_1}} z^k, \quad a_1 < k < v_1$$

Les condicions de creixement de les successions $\{a_n\}_{n \geq 0}$ i $\{b_n\}_{n \geq 0}$ asseguruen que les funcions f_k estan ben definides.

Observem que podem suposar que

$$v_{n-1} < a_n \tag{3.2.7}$$

i

$$(n-2)a_n < b_n \tag{3.2.8}$$

per $n \geq 2$ i $r \in \{1, \dots, n-1\}$, per assegurar que els intervals descrits a $J_{n,r}$ i $L_{n,r}$ són no buits.

Així doncs, ja tenim definida la base $\{f_k\}_{k \geq 0}$. Clarament, si $\mathcal{P}_n$ denota l'espai dels polinomis de grau menor o igual que n , tenim que l'espai generat per $\{f_0, f_1, \dots, f_n\}$ coincideix amb $\mathcal{P}_n$.

3.3 Desenvolupament general del contraexemple

A continuació, tracem una estratègia per construir un operador sense subespais invariants no trivials.

Sigui E un espai de Banach. Una base de Schauder de E és una successió $\{e_k\} \subset E$ de manera que, per a tot $x \in E$ hi ha una única successió d'escalars $\{\lambda_k\}$ amb

$$x = \sum_k \lambda_k e_k$$

Per exemple, en l'espai de successions ℓ^1 , la “base canònica” $\{e_k\}_{k \geq 0}$ és una base de Schauder, on e_k denota la successió amb tots els elements iguals a zero, excepte el terme k -èssim, que val 1.

Una norma en l'espai de polinomis ve donada per

$$|p| = \sum_{k=0}^n |a_k|$$

si tenim un polinomi $p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$.

També farem servir una altra norma en l'espai de polinomis. Un cop construïda la successió de polinomis $\{f_k\}_{k \geq 0}$ amb les propietats esmentades anteriorment, aquesta successió forma una base de l'espai de polinomis. De manera que, si p és un polinomi de grau n , existeixen uns únics escalars $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$ amb

$$p = \sum_{k=0}^n \beta_k f_k$$

en aquest cas, farem servir la norma

$$\|p\| = \sum_{k=0}^n |\beta_k|$$

Llavors, si E denota el completat dels polinomis amb aquesta norma, tenim que $\{f_k\}_{k \geq 0}$ és una base de Schauder de E , i la norma d'un element $x = \sum_{k \geq 0} \beta_k f_k$ ve donada per

$$\|x\|_E = \sum_{k \geq 0} |\beta_k|$$

i és clar que l'espai E s'identifica amb l'espai de successions ℓ^1 (és a dir, E és linealment isomètric amb ℓ^1). A més, si p és un polinomi $p = \sum_{k=0}^n \beta_k f_k$, seguim tenint $\|p\|_E = \sum_{k=0}^n |\beta_k|$.

Podem pensar que els monomis z^k es corresponen a f_k . En E podem definir l'operador de multiplicació per z , definit per $Tf(z) = zf(z)$. Observem que envia els monomis z^k a z^{k+1} , amb el que l'anàleg en la base $\{f_k\}$ seria l'operador definit per $Tf_k = f_{k+1}$, que es pot estendre per linealitat a tot E . Hi ha treballs que, per explicar el contraexemple de Read o modificacions, fan servir aquest darrer operador i d'altres que fan servir l'operador de multiplicació per z .

Nosaltres farem servir l'operador de multiplicació per z , és a dir, $T : E \rightarrow E$ definit per $Tf(z) = zf(z)$, i passarem a veure que defineix un operador acotat en E sense subespais invariants no trivials.

Segui E el completat de $\mathbb{C}[z]$ respecte a la norma $\|\cdot\|$. L'espai E és de Banach i linealment isomètric amb ℓ^1 . El nostre objectiu ara és demostrar que l'operador T és continu respecte de la norma $\|\cdot\|$ i, per tant, es pot estendre a tot E .

Per veure que defineix un operador acotat en E , n'hi ha prou en provar que T és uniformement acotat en la base $\{f_k\}$, és a dir, que $\sup_k \|Tf_k\|_E < \infty$. Recordem que la successió de polinomis $\{f_k\}$ es construeix a partir de dues successions de nombres naturals $\{a_n\}_{n \geq 0}$ i $\{b_n\}_{n \geq 0}$ amb un creixement suficientment ràpid. Els detalls d'aquesta construcció es poden consultar a l'apartat anterior.

L'afirmació queda recolzada per la següent proposició, la demostració del qual es desenvoluparà en l'apartat següent.

Proposició 3.3.1. *Siguin $\{a_n\}_{n \geq 0}$ i $\{b_n\}_{n \geq 0}$ successions amb creixement prou ràpid. Llavors*

$$\|Tf_k\|_E \leq 2, \quad \text{per a tot } k \geq 0 \quad (3.3.1)$$

A més, es tenen les següents desigualtats:

$$\|T f_{ra_n-1}\|_E \leq \frac{1}{a_n}, \quad (3.3.2)$$

$$\|T f_{ra_n+v_{n-r-1}}\|_E \leq \frac{1}{a_{n-r}}, \quad (3.3.3)$$

$$\|T f_{r(a_n+b_n)-1}\|_E \leq \frac{1}{b_n}. \quad (3.3.4)$$

L'acotació de l'operador de multiplicar per z en E , és conseqüència directa de (3.3.1). Les altres desigualtats s'utilitzaran més endavant per tal de veure que, per a tot $f \in E$ no nul, hi ha una successió de polinomis q_n de manera que

$$\|q_n f - 1\|_E \rightarrow 0$$

En la proposició anterior, r és un enter positiu, i v_n la successió de nombres, que apareixen en la definició de la successió de polinomis $\{f_k\}$.

Recordem aquí que E denota el completat dels polinomis amb la norma associada a la base $\{f_k\}$. La norma d'un element $x = \sum_{k \geq 0} \beta_k f_k \in E$ ve donada per

$$\|x\|_E = \sum_{k \geq 0} |\beta_k|$$

i l'espai E s'identifica amb l'espai de successions ℓ^1 .

Ara, per $m \in \mathbb{N}$ amb $m > 2$, sigui $Q_m : E \rightarrow \mathcal{P}_{(m-1)a_m}$ l'operador lineal definit en la base $\{f_k\}_{k \geq 0}$ per

$$Q_m f_k = \begin{cases} f_k & \text{si } 1 \leq k \leq (m-1)a_m \\ -a_m z^{k-(n-m)a_n} & \text{si } k \in I_{n,n-m} \text{ per algun } n > m, \\ 0 & \text{en els altres casos.} \end{cases}$$

Es segueix que Q_m és un operador acotat, és a dir, hi ha $C_m > 0$ de manera que $\|Q_m f\|_E \leq C_m \|f\|_E$. A més, si p és un polinomi, tenim que $|Q_m p| \leq D_m \|p\|_E$ per una certa constant D_m (no fem els detalls de tot això). Recordem que, si q és un polinomi $q(z) = \sum_{k=0}^n \lambda_k z^k$, aleshores $|q| = \sum_{k=0}^n |\lambda_k|$.

Per aconseguir el nostre objectiu, tot seguit enunciem una sèrie de lemes, que després ens seran útils per donar el resultat final. En aquest apartat es deixaran de banda les demostracions dels lemes, que són de caràcter tècnic, per tal de facilitar la continuïtat de la lectura. Part de les demostracions es poden trobar en el següent apartat.

Lema 3.3.2. *Sigui $m > 2$ i $b_m + a_m \leq s \leq b_m + (m-1)a_m$. Per a tot $g \in E$, tenim*

$$\|T^s g - T^s Q_m g\|_E \leq 4\|g\|_E$$

Denotem per P_n la projecció lineal de l'espai de polinomis a l'espai $\mathcal{P}_n$ dels polinomis de grau menor o igual que n . Donat un polinomi q , l'element $P_n q$ no és res més que el truncat de q fins a grau n .

Lema 3.3.3. *Segui $g \in E$ amb $g \neq 0$, i sigui $k \in \mathbb{N}$ amb $k > 2$. Hi ha $m \in \mathbb{N}$ amb $m > k$ de manera que*

$$|P_{(m-k)a_m}(Q_m g)| \geq \frac{1}{a_m}$$

Demostració. No ho provem aquí. Consultar [25, Lemma 5] per exemple. □

Lema 3.3.4. *Donats $n \geq 0$, $\varepsilon, \delta, M > 0$, existeix un $K > 0$ tal que per a tot $q(z) \in \mathcal{P}_n$ i per a tot $0 \leq m \leq n$ amb $|q(z)| \leq M$ i $|P_m(q(z))| \geq \delta$, si $m \leq n' \leq n$, existeix $h(z) \in \mathcal{P}_{n'}$ tal que*

$$|P_{n'}(hq) - z^m| < \varepsilon$$

i $|h| \leq K$.

Un cop aportats tots els conceptes, definicions i lemes necessaris per a la demostració, procedim a provar que $T : E \rightarrow E$ no té subespais invariants no trivials.

Teorema 3.3.5. *L'operador lineal T definit en l'espai E per $Tf(z) = zf(z)$ per $f \in E$, no té subespais invariants tancats no trivials.*

Demostració. Segui $g \in E$ amb $\|g\|_E = 1$ i $\varepsilon > 0$. N'hi ha prou en provar que hi ha un polinomi φ de manera que

$$\|\varphi(T)g - 1\|_E < \varepsilon$$

Pel Lema 3.3.3 existeixen $m > 2$ i $1 \leq r \leq (m-2)$ tals que $|P_{ra_m}(Q_m(g))| \geq \frac{1}{a_m}$. D'altra banda, per a $1 \leq j \leq (m-1)a_m$, $|f_j|$ i $\|z^j\|_E$ es poden acotar per una constant C_m més gran que a_m , la qual només depèn de $a_1, b_1, \dots, a_{m-1}, b_{m-1}, a_m$. En particular, C_m no depèn de b_m .

Aleshores, per a tot $k \in \mathbb{N}$, $|Q_m(f_k)| \leq C_m$. Denotem per $Q_m(g) = q_m$, llavors $q_m \in \mathcal{P}_{(m-1)a_m}$ i si s'escriu $g = \sum_{i=0}^{\infty} \mu_i f_i$

$$|q_m| = \left| Q_m \left(\sum_{i=0}^{\infty} \mu_i f_i \right) \right| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |\mu_i| |Q_m(f_i)| \leq \left(\sum_{i=0}^{\infty} |\mu_i| \right) C_m$$

Per continuïtat, linealitat i la desigualtat triangular, aleshores

$$|q_m| \leq C_m \|g\|_E = C_m \tag{3.3.5}$$

Per a la demostració, es pot escollir $\{b_m\}$ prou gran de manera que compleixi certes condicions de creixement.

En primer lloc, observeu que pel Lema 3.3.4 existeixen $K_m > 0$, que depèn de a_m, C_m , i existeix $h \in \mathcal{P}_{(m-2)a_m}$ amb $|h| \leq K_m$ tal que, com que $|P_{ra_m}(q_m)| \geq \frac{1}{a_m}$, llavors

$$|P_{(m-2)a_m}(hq_m) - z^{ra_m}| < \frac{1}{a_m C_m}$$

Atès que multiplicar un polinomi per una potència de z no altera el valor de la seva norma $|\cdot|$, i utilitzant també que, donats r, s naturals i un polinomi p , es té $z^s P_n(p) = P_{n+s}(z^s p)$, tenim

$$|P_{(m-2)a_m}(hq_m) - z^{ra_m}| = |z^{a_m}(P_{(m-2)a_m}(hq_m) - z^{ra_m})| = |P_{(m-1)a_m}(z^{a_m}hq_m) - z^{(r+1)a_m}|$$

En particular,

$$\left| P_{(m-1)a_m}(z^{a_m}hq_m) - z^{(r+1)a_m} \right| < \frac{1}{a_m C_m} \quad (3.3.6)$$

Si $\varphi = \frac{1}{b_m} z^{a_m+b_m} h$, llavors es compleix que

$$\deg(\varphi) = \deg(h) + (a_m + b_m) \leq (m-2)a_m + (a_m + b_m) = (m-1)a_m + b_m$$

Si s'escriu

$$\varphi(T) = \sum_{s=a_m+b_m}^{(m-1)a_m+b_m} \alpha_s z^s,$$

i escrivint $z^s q_m = T^s Q_m(g)$ per a cada $a_m + b_m \leq s \leq (m-1)a_m + b_m$, es dedueix pel Lema 3.3.2 que

$$\begin{aligned} \|\varphi(T)g - \varphi(T)q_m\|_E &= \left\| \sum_{s=a_m+b_m}^{(m-1)a_m+b_m} \alpha_s (T^s g - T^s q_m) \right\|_E \\ &\leq \sum_{s=a_m+b_m}^{(m-1)a_m+b_m} |\alpha_s| \|T^s g - T^s q_m\|_E = |\varphi| \|T^s g - T^s q_m\|_E \leq 4|\varphi| \end{aligned}$$

on $|\varphi| = \left| \frac{1}{b_m} z^{a_m+b_m} h \right| = \frac{1}{b_m} |h| \leq \frac{1}{b_m} K_m$ Aleshores, com a primera condició, es pren b_m prou gran tal que

$$\|\varphi(T)g - \varphi(T)q_m\|_E \leq \frac{1}{a_m} \quad (3.3.7)$$

D'altra banda,

$$\deg(\varphi q_m) = \deg(\varphi) + \deg(q_m) \leq 2(m-1)a_m + b_m$$

Aleshores, com a segona condició, es pren b_m suficientment gran perquè $\deg(\varphi q_m) < 2(a_m + b_m)$. Llavors, $\varphi q_m - P_{(m-1)a_m+b_m}(\varphi q_m)$ és una combinació lineal d'elements de la base corresponents únicament al cas (3.2.5). Per tant,

$$\varphi q_m - P_{(m-1)a_m+b_m}(\varphi q_m) = \sum_{s=(m-1)a_m+b_m}^{2(m-1)a_m+b_m} \beta_s z^s$$

Finalment,

$$\begin{aligned} \|\varphi q_m - P_{(m-1)a_m+b_m}(\varphi q_m)\|_E &\leq \sum_{s=(m-1)a_m+b_m}^{2(m-1)a_m+b_m} \|\beta_s z^s\|_E \\ &\leq \sum_{s=(m-1)a_m+b_m}^{2(m-1)a_m+b_m} |\beta_s| \left(\frac{1}{2^{\lceil \frac{3}{2}b_m-s \rceil / m a_m}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{s=(m-1)a_m+b_m}^{2(m-1)a_m+b_m} |\beta_s| \left(\frac{1}{2^{\lfloor \frac{3}{2}b_m - (2(m-1)a_m+b_m) \rfloor / ma_m}} \right) \\
&\leq |\varphi q_m| \left(\frac{1}{2^{\lfloor -2(m-1)a_m + \frac{1}{2}b_m \rfloor / ma_m}} \right) \\
&\leq |\varphi| |q_m| \left(\frac{1}{2^{\lfloor -2(m-1)a_m + \frac{1}{2}b_m \rfloor / ma_m}} \right) \\
&= \frac{1}{b_m} |h| |q_m| \left(\frac{1}{2^{\lfloor -2(m-1)a_m + \frac{1}{2}b_m \rfloor / ma_m}} \right) \\
&\leq \frac{1}{b_m} K_m C_m \left(\frac{1}{2^{\lfloor -2(m-1)a_m + \frac{1}{2}b_m \rfloor / ma_m}} \right)
\end{aligned}$$

Aleshores, com que K_m i C_m no depenen de b_m , es pot prendre com a tercera restricció b_m suficientment gran perquè

$$\|\varphi q_m - P_{(m-1)a_m+b_m}(\varphi q_m)\|_E \leq \frac{1}{a_m} \quad (3.3.8)$$

A més, pel cas (3.2.6), per $a_m + b_m \leq k \leq (m-1)a_m + b_m$

$$\|z^k - b_m z^{k-b_m}\|_E = \|f_k\|_E = 1$$

i, per tant,

$$\left\| \frac{1}{b_m} z^k - z^{k-b_m} \right\|_E = \frac{1}{b_m}$$

Fent un canvi de variables, si $a_m \leq s \leq (m-1)a_m$,

$$\left\| \frac{1}{b_m} z^{b_m+s} - z^s \right\|_E = \frac{1}{b_m} \quad (3.3.9)$$

Aleshores, si s'escriu

$$P_{(m-1)a_m}(z^{a_m} h q_m) = \sum_{s=a_m}^{(m-1)a_m} \lambda_s z^s \quad (3.3.10)$$

i utilitzant (3.3.9) i (3.3.10), es té que

$$\begin{aligned}
&\|P_{(m-1)a_m+b_m}(\varphi q_m) - P_{(m-1)a_m}(z^{a_m} h q_m)\|_E \\
&= \left\| \frac{1}{b_m} P_{(m-1)a_m+b_m}(z^{a_m+b_m} h q_m) - P_{(m-1)a_m}(z^{a_m} h q_m) \right\|_E \\
&= \left\| \frac{1}{b_m} z^{b_m} P_{(m-1)a_m}(z^{a_m} h q_m) - P_{(m-1)a_m}(z^{a_m} h q_m) \right\|_E \\
&\leq \sum_{s=a_m}^{(m-1)a_m} |\lambda_s| \left\| \frac{1}{b_m} z^{b_m+s} - z^s \right\|_E = \sum_{s=a_m}^{(m-1)a_m} |\lambda_s| \frac{1}{b_m} \\
&\leq |z^{a_m} h q_m| \frac{1}{b_m} = |h q_m| \frac{1}{b_m} \\
&\leq |h| |q_m| \frac{1}{b_m} \leq \frac{K_m C_m}{b_m}
\end{aligned}$$

Finalment, es pren com a quarta condició que b_m sigui prou gran perquè

$$\|P_{(m-1)a_m+b_m}(\varphi q_m) - P_{(m-1)a_m}(z^{a_m} h q_m)\|_E \leq \frac{1}{a_m} \quad (3.3.11)$$

Ara, com que $r \leq m-2$, tenim que $P_{(m-1)a_m}(z^{a_m} h q_m) - z^{(r+1)a_m} \in P_{(m-1)a_m}$, i, per tant, podem expressar-ho com una combinació lineal de $1, z, \dots, z^{(m-1)a_m}$, és a dir, $\sum_{j=0}^{(m-1)a_m} \gamma_j z^j$. Així, usant $\|z^j\|_E \leq C_m$, ens queda

$$\begin{aligned} \|P_{(m-1)a_m}(z^{a_m} h q_m) - z^{(r+1)a_m}\|_E &= \left\| \sum_{j=0}^{(m-1)a_m} \gamma_j z^j \right\|_E \\ &\leq \sum_{j=0}^{(m-1)a_m} |\gamma_j| \|z^j\|_E \leq |P_{(m-1)a_m}(z^{a_m} h q_m) - z^{(r+1)a_m}| \cdot C_m \end{aligned}$$

Per tant, es té que

$$\|P_{(m-1)a_m}(z^{a_m} h q_m) - z^{(r+1)a_m}\|_E \leq |P_{(m-1)a_m}(z^{a_m} h q_m) - z^{(r+1)a_m}| C_m$$

Aleshores, per (3.3.6),

$$\|P_{(m-1)a_m}(z^{a_m} h q_m) - z^{(r+1)a_m}\|_E < \frac{1}{a_m} \quad (3.3.12)$$

Finalment, com que $m \geq 2$ i $r \leq m-2$, aleshores $r+1 \leq m-1$, i per (3.4.1) es té que

$$\|z^{(r+1)a_m} - 1\|_E \leq \frac{2}{a_{m-r-1}} \quad (3.3.13)$$

Llavors, per (3.3.7), (3.3.8), (3.3.11), (3.3.12) i (3.3.13),

$$\begin{aligned} \|\varphi(T)g - 1\|_E &\leq \|\varphi(T)g - \varphi q_m\|_E + \|\varphi q_m - P_{(m-1)a_m+b_m}(\varphi q_m)\|_E + \\ &\quad \|P_{(m-1)a_m+b_m}(\varphi q_m) - P_{(m-1)a_m}(z^{a_m} h q_m)\|_E + \\ &\quad \|P_{(m-1)a_m}(z^{a_m} h q_m) - z^{(r+1)a_m}\|_E + \|z^{(r+1)a_m} - 1\|_E \\ &< \frac{1}{a_m} + \frac{1}{a_m} + \frac{1}{a_m} + \frac{1}{a_m} + \frac{2}{a_{m-r-1}} \end{aligned}$$

De manera que, donat $\varepsilon > 0$, si escullo $\{a_m\}, \{b_m\}$ que creixin prou ràpid,

$$\|\varphi(T)g - 1\|_E < \frac{3}{a_{m-r-1}} < \varepsilon$$

□

3.4 Prova de les proposicions i lemes

En aquesta secció provarem alguns casos dels lemes i proposicions esmentades, que es separen depenent de la definició de f_k , és a dir, depenent del valor de k . Els casos que no es tracten aquí són igualment molt tècnics i seguirien un raonament similar, però incloure tots els detalls tècnics faria que el treball esdevingués excessivament llarg i complex.

Per tal de provar que l'operador T de multiplicació per z és acotat en E , primer ens cal el següent.

Lema 3.4.1. *Sigui $n \in \mathbb{N}$ i $r \in \{1, \dots, n-1\}$. Llavors*

$$(i) \quad \|z^k - z^{k-ra_n}\|_E \leq 2a_{n-r}^{-1} \text{ per } k \in I_{n,r}.$$

$$(ii) \quad \|z^k - b_n^r z^{k-rb_n}\|_E \leq 2b_n^{r-1} \text{ per } k \in K_{n,r}.$$

Demostració. Procedim a provar (i), per $n \geq 2$, suposem que $1 \leq r \leq n-1$ i $k \in I_{n,r} := [ra_n, ra_n + v_{n-r-1}]$. Llavors, per cada $0 \leq i \leq r-1$, els valors $k - ia_n$ verifiquen

$$(r-i)a_n \leq k - ia_n \leq (r-i)a_n + v_{n-(r-i)-1}$$

Això s'obté restant ia_n a la desigualtat $ra_n \leq k \leq ra_n + v_{n-r-1}$ i utilitzant que $\{v_n\}_{n \geq 0}$ és creixent. I per com es defineix $\{f_k\}$ en el cas (3.2.4) aplicat amb $k' = k - ia_n$ i $r' = r - i$, tenim

$$\begin{aligned} z^k - z^{k-a_n} &= \frac{1}{a_{n-r}} f_k(z), \\ z^{k-a_n} - z^{k-2a_n} &= \frac{1}{a_{n-r+1}} f_{k-a_n}(z), \\ &\vdots \\ z^{k-(r-1)a_n} - z^{k-ra_n} &= \frac{1}{a_{n-1}} f_{k-(r-1)a_n}(z) \end{aligned}$$

Per tant, sumant les r igualtats obtenim

$$\begin{aligned} z^k - z^{k-ra_n} &= z^k - z^{k-a_n} + z^{k-a_n} - z^{k-2a_n} + \dots + z^{k-(r-1)a_n} - z^{k-ra_n} = \\ &= \frac{1}{a_{n-r}} f_k(z) + \frac{1}{a_{n-r+1}} f_{k-a_n}(z) + \dots + \frac{1}{a_{n-1}} f_{k-(r-1)a_n}(z) \end{aligned}$$

D'aquesta manera, amb la norma descrita prèviament, es compleix

$$\|z^k - z^{k-ra_n}\|_E \leq \frac{1}{a_{n-r}} + \frac{1}{a_{n-r+1}} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}} \leq 2a_{n-r}^{-1} \quad (3.4.1)$$

Justifiquem aquesta última desigualtat. Suposant que $\{a_n\}$ creix suficientment ràpid, podem suposar que $a_{n+1} \geq 2a_n$ amb el que utilitzant $\frac{1}{a_{n-r+1}} < \frac{1}{2a_{n-r}}$ obtenim

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a_{n-r}} + \frac{1}{a_{n-r+1}} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}} \\ & \leq \frac{1}{a_{n-r}} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{r-1}} \right) \leq \frac{2}{a_{n-r}} \end{aligned}$$

De manera anàloga procedim a demostrar (ii), per com es defineix $\{f_k\}$ en el cas (3.2.6), és a dir, $n \geq 2$ i $1 \leq r \leq n-1$ amb $k \in K_{n,r} := [r(a_n + b_n), (n-1)a_n + rb_n]$. Llavors, per cada $0 \leq i \leq r-1$, els valors $k - ib_n$ verifiquen

$$(r-i)(a_n + b_n) \leq k - ib_n \leq (n-1)a_n + (r-i)b_n$$

Això s'obté restant ib_n a la desigualtat $r(a_n + b_n) \leq k \leq (n-1)a_n + rb_n$ i utilitzant que $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{N}$. I per com es defineix $\{f_k\}$ en el cas (3.2.6) aplicat amb $k' = k - ib_n$ i $r' = r - i$, tenim

$$\begin{aligned} f_k(z) &= z^k - b_n z^{k-b_n}, \\ b_n f_{k-b_n}(z) &= b_n z^{k-b_n} - b_n^2 z^{k-2b_n}, \\ &\vdots \\ b_n^{r-1} f_{k-(r-1)b_n}(z) &= b_n^{r-1} z^{k-(r-1)b_n} - b_n^r z^{k-rb_n} \end{aligned}$$

Sumant les r igualtats i prenent la norma, es compleix

$$\begin{aligned} \|z^k - b_n^r z^{k-rb_n}\|_E &\leq \|z^k - b_n z^{k-b_n}\|_E + \|b_n z^{k-b_n} - b_n^2 z^{k-2b_n}\|_E + \cdots + \\ \|b_n^{r-1} z^{k-(r-1)b_n} - b_n^r z^{k-rb_n}\|_E &\leq \|f_k\|_E + b_n \|f_{k-b_n}\|_E + \cdots + b_n^{r-1} \|f_{k-(r-1)b_n}\|_E \\ &= 1 + b_n + \cdots + b_n^{r-1} \leq 2b_n^{r-1} \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

Ara, provar la desigualtat de (3.4.2) equival a demostrar que

$$1 + \frac{1}{b_n} + \cdots + \frac{1}{b_n^{r-1}} \leq 2$$

però el terme de l'esquerra es pot acotar per la sèrie geomètrica infinita $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{2^k} = 2$ ja que

$$b_n \geq b_2 > a_2 > a_1 + b_1 > 2$$

□

Prova de la Proposició 3.3.1. La prova es separa en casos, segons si f_k ha sigut construït mitjançant (3.2.3), (3.2.4), (3.2.5) i (3.2.6). Farem la prova de l'acotació (3.3.1) per $k \in J_{n,r}$, $k \in I_{n,r}$ i $k \in L_{n,r}$, això donarà algunes de les altres acotacions. El cas $k \in K_{n,r}$ torna a ser bastant tècnic i es pot consultar a [8] per exemple.

Comencem pel cas $k \in J_{n,r} := ((r-1)a_n + v_{n-r}, ra_n)$. En aquest cas, tenim

$$f_k(z) = 2^{\frac{(r-\frac{1}{2})a_n - k}{b_n - 1}} z^k$$

Llavors,

$$Tf_k(z) = 2^{\frac{(r-\frac{1}{2})a_n-k}{b_n-1}} z^{k+1}$$

- Si $k < ra_n - 1$, llavors $k+1 \in J_{n,r}$, amb el que

$$f_{k+1}(z) = 2^{\frac{(r-\frac{1}{2})a_n-(k+1)}{b_n-1}} z^{k+1}$$

i, per tant,

$$Tf_k(z) = 2^{\frac{1}{b_n-1}} f_{k+1}(z)$$

Aleshores,

$$\|Tf_k\|_E = 2^{\frac{1}{b_n-1}} < 2$$

- Si $k = ra_n - 1$, llavors

$$Tf_k(z) = 2^{\frac{1-(\frac{1}{2})a_n}{b_n-1}} z^{ra_n}$$

A més, utilitzant (3.4.1) amb $k' = ra_n$, es té que $k' \in [ra_n, ra_n + v_{n-r+1}]$ que és l'interval on la fórmula (i) del Lema 3.4.1 és vàlida. Tenim que

$$\|z^{ra_n}\|_E \leq \|z^{ra_n} - 1\|_E + 1 \leq \frac{2}{a_{n-r}} + 1 \quad (3.4.3)$$

D'aquesta manera,

$$\|Tf_k\|_E = \|Tf_{ra_n-1}\|_E \leq 2^{\frac{1-(\frac{1}{2})a_n}{b_n-1}} \left(1 + \frac{2}{a_{n-r}}\right) \leq \frac{1}{a_n}$$

Ja que si a_n és prou gran, es pot deduir que, per a tot $y, z > 0$, segons l'anàlisi asimptòtica, es compleix

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{\frac{1-(\frac{1}{2})x}{y}} \left(1 + \frac{2}{z}\right)}{\frac{1}{x}} = 0$$

Així, per al cas en què $f_k(z)$ es defineix per (3.2.3), tenim sempre que $\|Tf_k\|_E \leq 2$. A més, hem obtingut l'estimació (3.3.2).

Procedim al següent cas, considerant ara que $k \in I_{n,r} := [ra_n, ra_n + v_{n-r-1}]$. Llavors f_k ve definit per $f_k(z) = a_{n-r}(z^k - z^{k-a_n})$. És té

$$Tf_k(z) = a_{n-r}(z^{k+1} - z^{k+1-a_n})$$

- Si $k < ra_n + v_{n-r-1}$, llavors $k+1 \in I_{n,r}$, amb el que

$$f_{k+1}(z) = a_{n-r}(z^{k+1} - z^{(k+1)-a_n})$$

i, per tant,

$$Tf_k(z) = f_{k+1}(z)$$

D'aquesta manera,

$$\|Tf_k\|_E = 1$$

- Si $k = ra_n + v_{n-r-1}$, llavors $f_{k+1}(z)$ estarà en l'interval de definició que segueix a (3.2.4). Es poden donar dos casos:

- Si $r < n - 1$, llavors $k + 1 \in J_{n,r'}$ amb $r' = r + 1$, amb el que f_{k+1} ve definit per

$$f_{k+1}(z) = 2^{\frac{(\frac{1}{2})a_n - v_{n-r-1} - 1}{b_{n-1}}} z^{k+1}$$

Així,

$$\|z^{k+1}\|_E = 2^{\frac{1+v_{n-r-1} - (\frac{1}{2})a_n}{b_{n-1}}}$$

- Si $r = n - 1$, llavors $k + 1 \in L_{n,1}$ amb el que f_{k+1} ve definit per

$$f_{k+1}(z) = 2^{\frac{(\frac{1}{2})b_n - (n-1)a_n - 1}{na_n}} z^{k+1}$$

i, per tant,

$$\|z^{k+1}\|_E = 2^{\frac{1+(n-1)a_n - (\frac{1}{2})b_n}{na_n}}$$

Per acotar la norma Tf_k , necessitem fer certes acotacions prèvies. Analitzem ara quant val $\|z^{v_{n-r-1}+1}\|_E$. Sigui $n' = n - r$, $r' = 1$ i $k' = v_{n-r-1} + 1$. Es compleix per (3.2.7), si suposem que la successió $\{a_n\}_{n \geq 0}$ creix prou ràpid, que

$$v_{n-r-1} < v_{n-r-1} + 1 < a_{n-r}$$

i, aleshores,

$$(r' - 1)a_{n'} + v_{n'-r'} < k' < r'a_{n'}$$

És a dir, $k' \in J_{n-r,1}$, amb el que $f_{k'}(z)$ ve definit per

$$f_{v_{n-r-1}+1}(z) = 2^{\frac{(\frac{1}{2})a_{n-r} - v_{n-r-1} - 1}{b_{n-r-1}}} z^{v_{n-r-1}+1}$$

D'aquí deduïm que

$$\|z^{v_{n-r-1}+1}\|_E = 2^{\frac{1+v_{n-r-1} - (\frac{1}{2})a_{n-r}}{b_{n-r-1}}} \quad (3.4.4)$$

Finalment, estudiem el valor de $\|z^{k+1-a_n}\|_E = \|z^{(r-1)a_n + v_{n-r-1}+1}\|_E$. Si $r = 1$, observem que tenim exactament l'equació (3.4.4). Si $1 < r \leq n - 1$, podem definir $r' = r - 1$ i $k' = (r - 1)a_n + v_{n-r-1} + 1$. Es compleix que

$$(r - 1)a_n \leq (r - 1)a_n + v_{n-r-1} + 1 \leq (r - 1)a_n + v_{n-r},$$

és a dir,

$$r'a_n \leq k' \leq r'a_n + v_{n-r'-1}$$

Així doncs, tenim que $k' \in I_{n,r'}$, amb el que podem aplicar la fórmula (i) del Lema 3.4.1 per acotar $\|z^{(r-1)a_n + v_{n-r-1}+1} - z^{v_{n-r-1}+1}\|_E$, obtenim

$$\begin{aligned} \|z^{k+1-a_n}\|_E &= \|z^{(r-1)a_n + v_{n-r-1}+1}\|_E \leq \|z^{(r-1)a_n + v_{n-r-1}+1} - z^{v_{n-r-1}+1}\|_E + \|z^{v_{n-r-1}+1}\|_E \\ &\leq \frac{2}{a_{n-r+1}} + 2^{\frac{1+v_{n-r-1} - (\frac{1}{2})a_{n-r}}{b_{n-r-1}}} \end{aligned}$$

Amb tot això, ja podem acotar la norma de Tf_k .

$$\begin{aligned} \|Tf_k\|_E &= \|Tf_{ra_n+v_{n-r-1}}\|_E = a_{n-r} \|z^{k+1} - z^{k+1-a_n}\|_E \leq a_{n-r} (\|z^{k+1}\|_E + \|z^{k+1-a_n}\|_E) \\ &\leq a_{n-r} \left(\|z^{k+1}\|_E + \frac{2}{a_{n-r+1}} + 2^{\frac{1+v_{n-r-1}-(\frac{1}{2})a_{n-r}}{b_{n-r-1}}} \right) \end{aligned}$$

Ara bé, sabem que el valor de $\|z^{k+1}\|_E$ depèn del valor de r . Separem casos:

– Si $r < n - 1$, aleshores

$$\|Tf_{ra_n+v_{n-r-1}}\|_E \leq a_{n-r} \left(2^{\frac{1+v_{n-r-1}-(\frac{1}{2})a_n}{b_{n-1}}} + \frac{2}{a_{n-r+1}} + 2^{\frac{1+v_{n-r-1}-(\frac{1}{2})a_{n-r}}{b_{n-r-1}}} \right)$$

A més, si $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ creixen prou ràpidament, tenim

$$\|Tf_{ra_n+v_{n-r-1}}\|_E \leq \frac{1}{a_{n-r}}$$

ja que, si $0 < s < t$, aleshores

$$w^2 \left(2^{\frac{1+t-(\frac{1}{2})z}{y}} + \frac{2}{x} + 2^{\frac{1+t-(\frac{1}{2})w}{s}} \right) \leq 1$$

prenent valors de $w < x < y < z$ prou grans.

– Si $r = n - 1$, aleshores

$$\|Tf_{ra_n+v_{n-r-1}}\|_E \leq a_1 \left(2^{\frac{1+(n-1)a_n-(\frac{1}{2})b_n}{na_n}} + \frac{2}{a_2} + 2^{(1-(\frac{1}{2})a_1)} \right)$$

Com abans, si $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ creixen prou ràpidament, podem assegurar que

$$\|Tf_{ra_n+v_{n-r-1}}\|_E \leq \frac{1}{a_1} = \frac{1}{a_{n-r}}$$

Així, per al cas en què f_k es defineix segons (3.2.4), tenim sempre que $\|Tf_k\|_E \leq 2$. A més, hem obtingut l'estimació (3.3.3).

Per concloure, analitzem l'últim cas esmentat, en què $k \in L_{n,r}$. Recordem que l'interval $L_{n,r}$ ve definit per

$$((n-1)ra_n + (r-1)b_n, r(a_n + b_n))$$

En aquest cas, tenim

$$f_k(z) = 2^{\frac{(r-\frac{1}{2})b_n-k}{na_n}} z^k$$

Llavors,

$$Tf_k(z) = 2^{\frac{(r-\frac{1}{2})b_n-k}{na_n}} z^{k+1}$$

- Si $k < r(a_n + b_n) - 1$, llavors $k+1 \in L_{n,r}$, amb el que

$$f_{k+1}(z) = 2^{\frac{(r-\frac{1}{2})b_n-(k+1)}{na_n}} z^{k+1}$$

això implica que,

$$Tf_k(z) = 2^{\frac{1}{na_n}} f_{k+1}(z),$$

i, per tant,

$$\|Tf_k\|_E < 2$$

- Si $k = r(a_n + b_n) - 1$, llavors

$$Tf_k(z) = 2^{\frac{1-ra_n-\frac{1}{2}b_n}{nan}} z^{r(a_n+b_n)}$$

A més, utilitzant la fórmula (ii) del Lema 3.4.1 amb $k' = r(a_n + b_n)$, que és possible ja que es compleix que $k' \in [r(a_n + b_n), (n-1)a_n + rb_n]$, que és l'interval on la fórmula (3.4.2) és vàlida, i aplicant la desigualtat (3.4.3) obtinguda prèviament per $\|z^{ra_n}\|_E$, obtenim que

$$\begin{aligned} \|z^{r(a_n+b_n)}\|_E &\leq \|z^{r(a_n+b_n)} - b_n^r z^{ra_n}\|_E + b_n^r \|z^{ra_n}\|_E, \\ &\leq 2b_n^{r-1} + b_n^r \left(\frac{2}{a_{n-r}} + 1 \right) \end{aligned}$$

D'aquesta manera,

$$\|Tf_k\|_E = \|Tf_{r(a_n+b_n)-1}\|_E \leq 2^{\frac{1-ra_n-\frac{1}{2}b_n}{nan}} \left(2b_n^{r-1} + b_n^r \left(\frac{2}{a_{n-r}} + 1 \right) \right) \leq \frac{1}{b_n}$$

com

$$\begin{aligned} \|Tf_k\|_E &= \|Tf_{r(a_n+b_n)-1}\|_E \\ &\leq 2^{\frac{1-ra_n-\frac{1}{2}b_n}{nan}} \left(2b_n^{r-1} + b_n^r \left(\frac{2}{a_{n-r}} + 1 \right) \right) \\ &\leq 4b_n^r 2^{\frac{1-ra_n-\frac{1}{2}b_n}{nan}} \leq \frac{1}{b_n} \end{aligned}$$

ja que el b_n creix molt més ràpid que el a_n .

Així, per al cas en què f_k es defineix per (3.2.5), sempre tenim que $\|Tf_k\|_E \leq 2$. A més, hem obtingut l'estimació (3.3.4).

□

Prova del Lema 3.3.2. És suficient provar que, per a tot $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tenim

$$\|T^s f_k - T^s Q_m f_k\|_E \leq 4$$

Si $0 \leq k \leq (m-1)a_m$ ja ho tenim, ja que ara $Q_m f_k = f_k$ i, per tant $T^s f_k - T^s Q_m f_k = 0$ en aquest cas.

Suposem doncs que $k > (m-1)a_m$. Si hi ha $n, r \in \mathbb{N}$ amb $r < n$ de manera que $k \in J_{n,r} \cup K_{n,r} \cup L_{n,r}$, llavors $Q_m f_k = 0$, amb el que $T^s f_k - T^s Q_m f_k = T^s f_k$, i només cal provar que $\|T^s f_k\|_E \leq 4$ en aquests casos. Fem només el cas $k \in J_{n,r}$. Els casos en què $k \in K_{n,r}$ o $k \in L_{n,r}$ són també molt tècnics, i es poden trobar en el treball [8], per exemple.

- Comencem analitzant el cas $k \in J_{n,r}$. En aquesta situació,

$$T^s f_k(z) = 2^{\frac{(r-\frac{1}{2})a_n-k}{b_{n-1}}} z^{k+s}, \quad (3.4.5)$$

i volem provar que $\|T^s f_k\|_E \leq 4$. Com que $k < ra_n \leq (n-1)a_n$, i estem suposant que $k > (m-1)a_m$, es segueix que $n > m$.

- Si $k < ra_n - s$, llavors $k+s \in J_{n,r}$, amb el que

$$f_{k+s}(z) = 2^{\frac{(r-\frac{1}{2})a_n-k-s}{b_{n-1}}} z^{k+s},$$

i, per tant,

$$T^s f_k(z) = 2^{\frac{s}{b_{n-1}}} f_{k+s}(z),$$

d'on obtenim que

$$\|T^s f_k\|_E = 2^{\frac{s}{b_{n-1}}}$$

Com que $n > m$, tenim que $b_{n-1} \geq b_m$, amb el que (suposant que b_n creix prou ràpid), tenim

$$s \leq b_m + (m-1)a_m \leq 2b_m$$

que implica que

$$\|T^s f_k\|_E = 2^{\frac{s}{b_{n-1}}} \leq 2^{\frac{s}{b_m}} \leq 4$$

- Si $k \geq ra_n - s$, llavors $ra_n - 1 \in J_{n,r}$, amb el que

$$\begin{aligned} T^{k+s-ra_n}(Tf_{ra_n-1})(z) &= T^{k+s-ra_n} \left(2^{\frac{(r-\frac{1}{2})a_n-ra_n+1}{b_{n-1}}} z^{ra_n} \right) \\ &= 2^{\frac{-\frac{a_n}{2}+1}{b_{n-1}}} T^{k+s-ra_n} (z^{ra_n}) \\ &= 2^{\frac{-\frac{a_n}{2}+1}{b_{n-1}}} z^{k+s} \end{aligned}$$

Fent servir aquesta identitat juntament amb (3.4.5) obtenim

$$T^s f_k(z) = 2^{\frac{ra_n-k-1}{b_{n-1}}} T^{k+s-ra_n}(Tf_{ra_n-1})(z)$$

Finalment, com que $\|T\|_{op} \leq 2$, utilitzant (3.3.2) deduïm que

$$\begin{aligned} \|T^s f_k\|_E &\leq 2^{\frac{ra_n-k-1}{b_{n-1}}} \|T^{k+s-ra_n}\|_{op} \|Tf_{ra_n-1}\|_E \\ &\leq 2^{\frac{ra_n-k-1}{b_{n-1}}} 2^{k+s-ra_n} \|Tf_{ra_n-1}\|_E \\ &\leq 2^{\frac{ra_n-k-1}{b_{n-1}}} 2^{k+s-ra_n} a_n^{-1} \end{aligned}$$

Com abans, tenim que $2^{\frac{ra_n-k-1}{b_n-1}} \leq 4$, i com que $k < ra_n$, també $2^{k+s-ra_n} \leq 2^s$ amb el que, al ser $s \leq 2b_m$,

$$\|T^s f_k\|_E \leq 4 \cdot 2^s a_n^{-1} \leq 4 \cdot 2^{2b_m} a_n^{-1} \leq 4$$

si es pren a_n creixent suficientment ràpid.

- En el cas restant, $k \in I_{n,r}$ per alguns $n, r \in \mathbb{N}$ amb $r < n$. Aquí tornem a separar en casos.

- Si $r \neq n - m$, llavors $Q_m f_k = 0$, i altre cop, cal provar que $\|T f_k\|_E \leq 4$ (aquest cas torna a ser bastant tècnic, i no el fem aquí. Consultar [25] o el treball [8].
- Si $r = n - m$, aleshores $Q_m f_k(z) = -a_m z^{k-(n-m)a_n}$. Posant $k = (n - m)a_n + j$ per algun $j \in [0, v_{m-1}]$ ens queda $Q_m f_k(z) = -a_m z^j$ amb el que

$$T^s Q_m f_k(z) = -a_m z^{s+j}$$

Ara passem a veure que

$$k + s \in J_{n,r+1} = (ra_n + v_{n-(r+1)}, (r+1)a_n)$$

Observem que $v_{n-(r+1)} = v_{m-1}$. Com que, per hipòtesis tenim que $b_m + a_m \leq s \leq b_m + (m-1)a_m$, es segueix que

$$\begin{aligned} k + s &= ra_n + j + s \geq ra_n + j + b_m + a_m \\ &\geq ra_n + b_m + a_m \\ &\geq ra_n + v_{m-1} = ra_n + v_{n-(r+1)} \end{aligned}$$

Hem fet servir que tenim $a_m > v_{m-1}$. Tambè,

$$\begin{aligned} k + s &= ra_n + j + s \leq ra_n + v_{m-1} + b_m + (m-1)a_m \\ &\leq ra_n + a_m + (m-1)a_m + b_m \\ &\leq ra_n + 4b_m < (r+1)a_n \end{aligned}$$

si les successions creixen prou ràpid.

Com que $k + s \in J_{n,r+1}$, aleshores f_{k+s} ve definit per

$$f_{k+s}(z) = 2^{\frac{(r+1-\frac{1}{2})a_n-k-s}{b_n-1}} z^{k+s}$$

Per tant, posant $k = ra_n + j$,

$$\|z^{k+s}\|_E = 2^{\frac{k+s-(r+\frac{1}{2})a_n}{b_n-1}} = 2^{\frac{j+s-\frac{1}{2}a_n}{b_n-1}}$$

Com que $j + s \leq 4b_m$, obtenim

$$\|z^{k+s}\|_E \leq 2^{\frac{4b_m-\frac{1}{2}a_n}{b_n-1}} < \frac{1}{a_n} \quad (3.4.6)$$

si a_n és prou gran.

Treballant de manera semblant els paràmetres, es pot veure que $k' = k + s - a_n$ compleix que $k' \in I_{n,r-1}$. Per tant, aplicant la fórmula (i) del Lema 3.4.1, tenim que

$$\begin{aligned} \|z^{(r-1)a_n+j+s} - z^{j+s}\|_E &= \|z^{k+s-a_n} - z^{k+s-ra_n}\|_E \\ &= \|z^{k'} - z^{k'-(r-1)a_n}\|_E \\ &\leq 2a_{n-(r-1)}^{-1} = 2a_{m+1}^{-1} \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

Finalment, com que $k \in I_{n,n-m}$, tenim que $f_k(z) = a_m(z^k - z^{k-a_n})$, amb el que

$$\begin{aligned} (T^s f_k - T^s Q_m f_k)(z) &= a_m(z^{k+s} - z^{k+s-a_n}) + a_m z^{s+j} \\ &= a_m z^{k+s} - a_m(z^{k+s-a_n} - z^{j+s}) \\ &= a_m z^{k+s} - a_m(z^{(r-1)a_n+j+s} - z^{j+s}) \end{aligned}$$

Per tant, fent servir (3.4.6) i (3.4.7), obtenim finalment

$$\begin{aligned} \|T^s f_k - T^s Q_m f_k\|_E &\leq a_m \|z^{k+s}\|_E + a_m \|z^{(r-1)a_n+j+s} - z^{j+s}\|_E \\ &\leq a_m (1/a_n + 2/a_{m+1}) \leq 3 \end{aligned}$$

ja que $a_n \geq a_m$ i també $a_{m+1} \geq a_m$, obtenint el resultat desitjat.

□

Prova del Lema 3.3.4. Sigui $n \geq 0$ i $\varepsilon, \delta, M > 0$. Llavors, per a $m = 1, \dots, n$, es defineix

$$\Omega_m = \{g(z) \in \mathcal{P}_n : |g(z)| \leq M \text{ i } |P_m(g(z))| \geq \delta\}$$

Observem que Ω_m és compacte ja que és un conjunt definit per desigualtats tancades, i és acotat perquè està contingut en la imatge del conjunt compacte $[-M, M]$, sota la norma $|\cdot|$, que és una funció contínua. Per tant, és possible definir una cobertura per oberts de Ω_m . Fixem $m \leq n' \leq n$. Donat $q(z) \in \Omega_m$, amb $q(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_m z^m + \dots + a_{n'} z^{n'} + \dots + a_n z^n$, com que $|P_m(q(z))| \geq \delta$, es pot prendre $k = \min\{r : a_r \neq 0\}$. Llavors, per l'algorisme de la divisió per potències creixents (veure [8, Teorema 2.10]), existeix $g(z) \in \mathcal{P}_{n'}$ tal que

$$z^m = q(z)g(z) + r(z)$$

on

$$r(z) = c_{n'+1} z^{n'+1} + \dots + c_{n'+n} z^{n'+n}$$

D'aquesta manera, podem escriure $q(z)g(z) = z^m - r(z)$, on $r(z)$ és el residu del producte, que per construcció no té termes amb exponents menors a n' . Així, $P_{n'}(qg) = P_{n'}(z^m -$

$r) = P_{n'}(z^m) = z^m$. Per això, existeix un entorn obert no buit $U_q \subseteq \mathcal{P}_n$ al voltant de q , que depèn de q , n' i m , tal que si $g'(z) \in U_q$,

$$|P_{n'}(qg') - z^m| < \varepsilon$$

Utilitzant ara la compacitat de $\Omega_m \subseteq \bigcup_{q \in \Omega_m} U_q$, podem prendre un subrecobriment finit $U_{q_1}, \dots, U_{q_l}$ que el cobreixen per a cada $m \leq n' < n$. Finalment, definim

$$K = \max_m \max_{n_0} \max_{i=1, \dots, l} |q_i|$$

Observeu que si $q \in \mathcal{P}_n$ i n satisfà les hipòtesis del teorema, llavors per a tots m, n' tal que $0 \leq m \leq n' \leq n$, existeix U_{q_i} tal que

$$|P_{n'}(q_i q) - z^m| < \varepsilon$$

i $|q_i| \leq K$ per construcció.

□

3.5 Generalitzacions d'aquest exemple

Anomenem operador quasinilpotent a un operador lineal acotat $T : E \rightarrow E$ tal que

$$\|T^n\|^{\frac{1}{n}} \rightarrow 0$$

Equivalentment, $r(T) = 0$.

Read també ha descobert contraexemples amb propietats addicionals interessants. Per exemple, el 1997 va observar que l'exemple de [19] es podia modificar per tenir la propietat addicional de ser quasinilpotent [22], va donar un exemple d'operador quasinilpotent T en ℓ^1 sense subespais invariants tancats no trivials.

Recentment, el mateix Read conjuntament amb Eva A. Gallardo-Gutiérrez [12] han anat una mica més enllà, obtenint un exemple d'operador quasinilpotent en ℓ^1 de manera que l'operador $p(T)$ no té subespais invariants tancats no trivials per a tot polinomi no constant p . Aquest resultat suposa un gran avenç respecte a l'exemple aquí presentat, ja que permet obtenir una infinitat d'operadors en ℓ^1 sense subespais invariants, només cal escollir polinomis no constants qualsevol.

Conclusions

En aquest Treball de Fi de Grau hem abordat un dels problemes més fonamentals de l'anàlisi funcional: el problema del subespai invariant.

A l'Introducció, hem establert un marc temporal i conceptual que facilita la comprensió del problema i dels avenços assolits fins avui, destacant les contribucions de figures com Per H. Enflo, C. J. Read i V. Lomonosov. En el Capítol 1, hem presentat els conceptes i coneixements bàsics de l'anàlisi matemàtica necessaris per situar el context del problema i abordar-ne l'estudi, amb especial atenció a la fórmula del radi espectral.

Un cop definides les eines analítiques, hem dedicat el Capítol 2 a formular rigorosament el problema en el context dels espais de Banach, desenvolupant una anàlisi detallada d'alguns dels casos particulars més significatius. En aquest apartat, hem destacat el Teorema de Lomonosov, que ofereix una solució parcial al problema quan existeix un operador compacte que commuta amb un operador lineal acotat.

Finalment, en el Capítol 3, ens hem centrat en l'estudi del contraexemple de Read, que il·lustra les dificultats intrínseques per trobar una solució general en els espais de Banach. Aquest contraexemple posa de manifest la complexitat del problema i la necessitat de futurs estudis en aquest àmbit, estableix que, en general, el problema del subespai invariant té una solució negativa en espais de Banach.

El desenvolupament d'aquest treball ha implicat una tasca exhaustiva de recerca bibliogràfica, tant en format digital com en paper, i una revisió acurada dels conceptes fonamentals de l'anàlisi funcional. Aquesta feina m'ha permès aprofundir en els meus coneixements matemàtics i estructurar el treball de manera que els procediments es presenten pas a pas perquè qualsevol lector interessat pugui seguir-los i entendre'ls. Considero que l'enfocament adoptat permet al lector familiaritzar-se amb els resultats clau i comprendre la rellevància i complexitat del problema.

En conclusió, podem afirmar que aquest treball ha complert la seva finalitat, que no és altra que introduir el lector al problema del subespai invariant, encara que no hàgim pogut recrear algunes de les proves més tècniques a causa de la seva complexitat i el temps limitat. Tot i així, com hem vist, el problema continua sent una qüestió oberta per espais de Banach reflexius i en espais de Hilbert, amb múltiples vies d'estudi futures. Per exemple, seria interessant aprofundir en els casos particulars per a classes específiques d'operadors o explorar noves generalitzacions en contextos més amplis.

Bibliografia

- [1] N. Aronszajn and K. T. Smith, ‘Invariant subspaces of completely continuous operators’, *Ann. Math.* 60 (1954), 345–350.
- [2] W. B. Arveson and J. Feldman, ‘A note on invariant subspaces’, *Michigan Math. J.* 15 (1968), 61–64.
- [3] B. Beauzamy, ‘Un opérateur sans sous-espace invariant: simplification de l’exemple de P. Enflo’, *Integral Equations Operator Theory* 8 (1985), 314–384.
- [4] A. R. Bernstein and A. Robinson, ‘Solution of an invariant subspace problem of K. T. Smith and P. R. Halmos’, *Pacific J. Math.* 16 (1966), 421–431.
- [5] A. Beurling, ‘On two problems concerning linear transformations in Hilbert space’, *Acta Math.* 81 (1949), 239–255.
- [6] G. B. Borda, *El problema del subespacio invariante* (Dissertació presentada per obtenir el títol de Matemàtica, Facultat de Ciències, Departament de Matemàtiques), Assessor: Alexander Berenstein, Ph.D., Professor Associat, Universitat de los Andes, (2017).
- [7] A. M. Davie, Review of ‘On the invariant subspace problem for Banach spaces’ by P. Enflo, *Mathematical Reviews on the Web*, (1988).
- [8] C. Domingo, *Problema del subespacio invariante* (Treball Acadèmicament Dirigit, Llicenciatura de Matemàtiques), Tutors: F. Javier Soria i Pedro Tradacete, Universitat de Barcelona, (2010-2011).
- [9] P. H. Enflo, ‘A counterexample to the approximation problem in Banach spaces’, *Acta Math.* 130 (1973), 309–317.
- [10] P. H. Enflo, ‘On the invariant subspace problem for Banach spaces’, *Acta Math.* 158 (1987), 213–313.
- [11] P. H. Enflo, ‘On the invariant subspace problem in Hilbert spaces’, (2023), Disponible en: <https://arxiv.labs.arxiv.org/html/2305.15442>.
- [12] E. A. Gallardo-Gutierrez, C. Read, ‘Operators having no non-trivial closed invariant subspaces on ℓ^1 : a step further’, *Proc. London Math. Soc.* 118 (2019), 649–674.
- [13] D. W. Hadwin, E. A. Nordgren, H. Radjavi y P. Rosenthal, ‘An operator not satisfying Lomonosov’s hypothesis’, *Journal of Functional Analysis* 57 (1980), 410–415.

- [14] P. R. Halmos, ‘Invariant subspaces of polynomially compact operators’, *Pacific J. Math.* 16 (1966), 433–437.
- [15] V. I. Lomonosov, ‘Invariant subspaces of the family of operators that commute with a completely continuous operator’, *Funkcional. Anal. i Priložen.* 7 (1973), 55–56.
- [16] B. D. MacCluer, *Elementary Functional Analysis*, capítol 4, Springer Science + Business Media, 2009.
- [17] A. J. Michaels, ‘Hilden’s simple proof of Lomonosov’s invariant subspace theorem’, *Adv. Math.* 25 (1977), 56–58.
- [18] J. A. Noel, *The Invariant Subspace Problem* (Tesi de grau, Universitat Thompson Rivers, Departament de Matemàtiques i Estadística), Kamloops, British Columbia, Canada, 2011.
- [19] C. J. Read, ‘A short proof concerning the invariant subspace problem’, *J. London Math. Soc.* 34 (1986), 335–348.
- [20] C. J. Read, ‘A solution to the invariant subspace problem’, *Bull. London Math. Soc.* 16 (1984), 337–401.
- [21] C. J. Read, ‘A solution to the invariant subspace problem on the space ℓ^1 ’, *Bull. London Math. Soc.* 17 (1985), 305–317.
- [22] C. J. Read, ‘Quasinilpotent operators and the invariant subspace problem’, *J. London Math. Soc.* 56 (1997), 595–606.
- [23] W. Rudin, *Functional Analysis*, 2nd ed., McGraw-Hill, 1991.
- [24] K. Saxe, *Beginning Functional Analysis*, Springer, 2001.
- [25] W. Sliwa, ‘An explicit example concerning the invariant subspace problem for Banach spaces’, *Rocky Mountain J. Math.* 40 (2010), 627–641.
- [26] B. S. Yadav, ‘The Invariant Subspace Problem’, *NAW* 5/6 (2005), 148–152.