DOBLE GRADO DE ADE Y MATEMÁTICAS

Trabajo de fin de grado

UNIVERSITAT DE BARCELONA

Facultat de Matemàtiques i Informàtica

Probabilidades basadas en la teoría de juegos y su aplicación en el mercado de opciones Lookback

Autor: Joan Pastor Sánchez

Director:	**Dr. Carles Rovira Escofet**
Realizado en:	**Departamento de Matemáticas e Informática**
Director:	**Dr. Josep Vives Santa Eulalia**
Realizado en:	**Departamento de Matemática Económica, Financiera y Actuarial**

Barcelona, January 13, 2025

RESUMEN

El objetivo del trabajo es explorar las probabilidades de teoría de juegos y su aplicación a los mercados financieros, centrándose en las opciones Lookback. El trabajo se estructura en cuatro capítulos principales. El primero establece los fundamentos teóricos de las probabilidades en la teoría de juegos, introduciendo conceptos clave como protocolos de juego, estrategias y eventos. El segundo capítulo desarrolla constructos avanzados como las expectativas superiores y los valores esperados superiores, que generalizan los valores esperados matemáticos clásicos, destacando sus propiedades y utilidad en escenarios de optimización dinámica. El tercer capítulo integra las probabilidades de teoría de juegos con las probabilidades tradicionales basadas en medidas, ofreciendo una reinterpretación de conceptos clásicos dentro de un marco estratégico. Finalmente, el cuarto capítulo aplica la teoría desarrollada a la valoración y gestión de riesgos de las opciones Lookback.

ABSTRACT

This research explores game-theoretic probabilities and their application to financial markets, focusing on Lookback options. The work is structured into four main chapters. The first establishes the theoretical foundation of game-theoretic probabilities, introducing key concepts such as game protocols, strategies, and events. The second chapter develops advanced constructs like upper expectations and upper exxepcted values, which generalize classical mathematical expected values, highlighting their properties and utility in dynamic optimization scenarios. The third chapter integrates game-theoretic and traditional measure-theoretic probabilities, offering a reinterpretation of classical concepts within a strategic framework. Finally, the fourth chapter applies the developed theory to the valuation and risk management of Lookback options.

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, agradecer a mis tutores, Josep Vives y Carles Rovira, que han hecho posible realizar este trabajo. Agradecer también a mis padres y mis hermanos, que me han apoyado siempre que lo he necesitado. Por último, agradecer a Dylan, Daniel, Jon, Marc, Laura, Álvaro, Pau, Iván, Estanis, Marta, Guillermo, Alejandro, Mar, Guillem y Javier.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

En este trabajo se aborda el estudio de las probabilidades basadas en la teoría de juegos y su aplicación al mercado financiero, con un enfoque particular en las opciones Lookback. Este tipo de instrumento financiero, cuyo valor depende de los precios máximos o mínimos alcanzados durante un periodo determinado, plantea retos analíticos significativos que no siempre pueden resolverse de manera efectiva utilizando métodos probabilísticos clásicos. En respuesta a estas limitaciones, este estudio adopta una perspectiva fundamentada en la teoría de juegos, que extiende y complementa el enfoque tradicional basado en la teoría de la medida.

A diferencia del enfoque clásico, donde las probabilidades se definen mediante medidas en un espacio de probabilidad, la teoría de juegos permite modelar incertidumbre y decisiones estratégicas de manera dinámica. Este marco considera interacciones entre agentes que operan en condiciones de información perfecta o imperfecta, incorporando elementos de estrategia y adaptabilidad. Esto resulta especialmente relevante en contextos financieros, donde las decisiones de los participantes no solo responden a eventos aleatorios, sino que interactúan con las estrategias de otros agentes, generando dinámicas complejas y no triviales.

El principal objetivo de este estudio es explorar cómo las herramientas proporcionadas por la teoría de juegos pueden ofrecer soluciones analíticas más profundas y flexibles que las obtenidas mediante métodos probabilísticos tradicionales. Este enfoque se traduce en la introducción de conceptos como protocolos de juego, expectativas superiores y estrategias óptimas en escenarios dinámicos.

El trabajo se estructura en cuatro capítulos principales:

- En el primer capítulo se definen los conceptos clave de las probabilidades basadas en la teoría de juegos, como los protocolos, estrategias, variables y eventos. Este capítulo establece cómo estas herramientas permiten modelar interacciones dinámicas entre agentes.
- En el segundo capítulo se presentan las expectativas superiores, una extensión de la esperanza matemática clásica. Estas expectativas permiten modelar decisiones bajo incertidumbre, destacando sus propiedades fundamentales y su relevancia en la optimización de estrategias dinámicas.
- El tercer capítulo conecta el marco de las probabilidades basadas en juegos con las probabilidades tradicionales. Esto permite reinterpretar conceptos clásicos bajo una nueva perspectiva y explorar las implicaciones teóricas de esta integración.

- En el cuarto capítulo, se desarrolla un análisis detallado de las opciones Lookback, un instrumento financiero cuyo valor está directamente ligado a los precios extremos alcanzados durante el periodo de vigencia del contrato. Se presentan herramientas específicas basadas en estrategias, expectativas superiores y protocolos, demostrando su capacidad para resolver problemas de valoración y gestión del riesgo.

Adicionalmente, el trabajo incluye dos apéndices que complementan y profundizan los resultados principales. En el primer apéndice se revisan las probabilidades basadas en la teoría de la medida, proporcionando un marco comparativo que permite destacar las diferencias clave con la perspectiva basada en la teoría de juegos. Por otro lado, en el segundo apéndice se presentan adaptaciones de teoremas clásicos, como el teorema de Bernoulli y la ley de Kolmogorov, al contexto de la teoría de juegos, mostrando cómo los conceptos tradicionales pueden ser reformulados en este nuevo marco.

El enfoque adoptado en este trabajo no solo amplía el marco clásico de las probabilidades, sino que introduce una manera innovadora de entender fenómenos complejos en los mercados financieros. Al incorporar elementos estratégicos y dinámicos, las probabilidades basadas en la teoría de juegos proporcionan un nivel adicional de profundidad analítica, permitiendo describir y predecir comportamientos en mercados altamente interactivos y competitivos.

Esta perspectiva teórica y aplicada destaca la importancia de abordar los problemas financieros no solo desde un punto de vista estadístico, sino también considerando las interacciones estratégicas entre agentes. En última instancia, el trabajo pretende demostrar que la teoría de juegos no solo es una herramienta poderosa para comprender fenómenos financieros, sino también una plataforma para desarrollar soluciones prácticas y robustas en escenarios dinámicos e inciertos.

1 CAPÍTULO 1: Introducción a las probabilidades basadas en la Teoría de Juegos

Para este capítulo tomamos como referencia el capítulo 1 del libro "Game-Theoretic foundations for probability and finance" y el capítulo 1 de el libro "Probability and Finance, Its only a Game", referenciados en la bibliografía.

1.1 Terminología y conceptos básicos

Consideramos un juego secuencial de 2 jugadores en el que, en cada ronda, primero el jugador 1 (de ahora en adelante el Escéptico) especula sobre el resultado de un acontecimiento, y el jugador 2 (de ahora en adelante el Mundo) decide el resultado. En este juego asumimos también que ambos jugadores tienen información perfecta, es decir, conocen que ha decidido el otro jugador en todo momento.

Definición 1.1. *Dado un juego con las características anteriores, definimos un Protocolo como el conjunto de reglas que describe, para cada ronda, las secuencias de decisiones posibles de los jugadores, las relaciones entre las variables involucradas, y cómo estas decisiones afectan el desarrollo del juego a lo largo del tiempo*

En particular, un protocolo determina las secuencias de movimientos que el Mundo puede realizar:

Definición 1.2. *Definimos una situación como una secuencia finita de movimientos $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ realizados por los oponentes del Escéptico. En la n-ésima ronda, después de que se hayan realizado los movimientos $y_1, \ldots, y_{n-1}$, diremos que estamos en la situación $s = y_1 y_2 \ldots y_{n-1}$. En la primera ronda diremos que estamos en la situación inicial $\Box$. Denotamos por $\mathbb{S}$ al conjunto de todas las situaciones, incluyendo $\Box$, y llamamos a $\mathbb{S}$ el espacio de situaciones.*

Notemos que en la definición nos hemos referido a "los oponentes del Escéptico" y no al Mundo. Esto es porque, en algunos casos, es conveniente dividir al Mundo en más de un jugador, por ejemplo podemos considerar el siguiente juego, donde dividimos al Mundo en dos jugadores, el Pronosticador y la Realidad:

- El Pronosticador decide y anuncia un precio m para un pago y,
- El Escéptico decide y anuncia la cantidad M de y que comprará
- La Realidad decide y anuncia el valor de y
- El Escéptico recibe $M(y - m)$

Aunque hayamos dividido al Mundo en 2 jugadores, mantenemos que se trata de un juego del Escéptico contra el Mundo, que se van alternando secuencialmente.

Denotamos por $\mathcal{K}_n$ al capital del Escéptico tras la n-ésima ronda. Se permite al Escéptico determinar su capital inicial $\mathcal{K}_0$. El juego queda determinado por el siguiente protocolo:

Protocolo 1.3.
Escéptico anuncia $\mathcal{K}_0 \in \mathbb{R}$.
Para n=1,2,...;
    El Pronosticador anuncia $m_n \in [-1, 1]$.
    El Escéptico anuncia $M_n \in \mathbb{R}$.
    La Realidad anuncia $y_n \in [-1, 1]$.
    $\mathcal{K}_n := \mathcal{K}_{n-1} + M_n(y_n - m_n)$.

Un ejemplo practico de este protocolo sería considerar en el mercado de valores, para alguna acción en concreto, el Pronosticador anuncia m_n una predicción sobre la variación del valor de la acción en un momento n, el Escéptico apuesta a favor o en contra de esta predicción (si cree que la variación real será superior a la pronosticada, es decir, $y_n > m_n$, entonces tomara M_n positivo, y en caso contrario tomará M_n negativo). Finalmente la Realidad anuncia el valor real de la variación de la acción y el Escéptico obtiene $M_n(y_n - m_n)$.

Definición 1.4. *Llamaremos camino a una secuencia completa $\omega = y_1 y_2 ...$ de movimientos de los oponentes del Escéptico. Los caminos pueden ser infinitos o finitos, dependiendo del juego. Nos referiremos al n-ésimo elemento de un camino ω como ω_n, y a ω^n como a la subsecuencia de ω de largura n. Es decir, si $\omega = y_1 y_2 ...,\implies \omega_n = y_n$ y $\omega^n = y_1 y_2 ... y_n$.*
Denotamos Ω como el conjunto de todos los caminos, y llamamos a Ω nuestro espacio muestral. Llamamos a un subconjunto de Ω un Evento. A las funciones $X : \Omega \to \mathbb{R}$ las llamamos Variables.

Notemos que, en nuestra formulación, hemos definido una variable como una función real $X : \Omega \to \mathbb{R}$ sobre el espacio muestral Ω. Esta definición es coherente con la noción de variable aleatoria en la teoría de la probabilidad basada en la medida, donde las variables son funciones medibles definidas sobre un espacio de probabilidad. Nos referimos a ellas simplemente como "variables" para evitar confusión entre ambas y para enfatizar que nuestro concepto de variable no tiene ninguna medida ni σ-álgebra, asociada ni condición de medibilidad. No obstante, como veremos más adelante, ambos conceptos pueden relacionarse.

1.2 Estrategias y forzamiento de Eventos

Definición 1.5. *Sea $E \subseteq \Omega$ un evento, diremos que una estrategia para el Escéptico fuerza un evento E si se cumple siempre para el Escéptico que:*

$$\text{(i) } \mathcal{K}_n \geq 0 \quad \forall n \tag{1.1}$$

y

$$\text{(ii) } \textit{Si E no sucede, } \mathcal{K}_n \to \infty. \tag{1.2}$$

Notamos que si $\mathcal{K}_n(\omega)$ denota el capital del Escéptico en la n-ésima ronda cuando el Mundo sigue ω, (ii) *se puede reescribir como*

$$\mathcal{K}_n(\omega) \to \infty \; \forall \omega \notin E.$$

Cuando el Escéptico tiene una estrategia que fuerza E, diremos que puede forzar E. En este caso también diremos que E es casi seguro, o que sucede casi seguramente.
Diremos que el Escéptico quiebra al final de la n-ésima ronda si $\mathcal{K}_n < 0$ y $\mathcal{K}_i > 0 \; \forall \, i = 0, ..., n-1$.

Proposición 1.6. *En el Protocolo 1.3, el Escéptico tiene una estrategia que fuerza el evento*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (y_i - m_i) \right) = 0 \tag{1.3}$$

Para la demostración de la proposición usaremos lemas que se presentarán a continuación. Además, consideramos una versión simplificada del protocolo 1.3 donde retiramos al Pronosticador del juego, esta versión del juego queda reflejada en el siguiente protocolo:

Protocolo 1.7.
Escéptico anuncia $\mathcal{K}_0 \in \mathbb{R}$.
Para n=1,2,...;
    El Escéptico anuncia $M_n \in \mathbb{R}$.
    La Realidad anuncia $y_n \in [-1, 1]$
    $\mathcal{K}_n := \mathcal{K}_{n-1} + M_n y_n$.

Lema 1.8. *Sea $\overline{y}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i$. Si el Escéptico puede forzar en el protocolo 1.7 que*

$$\lim_{n\to\infty} \overline{y}_n = 0, \tag{1.4}$$

Entonces puede forzar (1.3) en el protocolo 1.3.

Gracias a este lema, nos es suficiente demostrar que el Escéptico puede forzar (1.4) en el protocolo 1.7, que es un juego mucho mas simple que el primero que habíamos introducido. A continuación demostramos el lema:

<u>Demostración:</u> Como el Escéptico puede forzar (1.4) en 1.7, tiene una estrategia que implica $\mathcal{K}_n \to \infty$ si (1.4) falla. Consideramos en el protocolo 1.3 la estrategia en la que cuando el Pronosticador anuncia $m_1, m_2, \ldots, m_{n-1}$ y la Realidad anuncia $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ el Escéptico elige anunciar $\frac{1}{2} M_n$ en la n-ésima ronda, donde M_n es el valor a elegir en la estrategia del protocolo 1.7 cuando la Realidad anuncia

$$\frac{y_1 - m_1}{2}, \frac{y_2 - m_2}{2}, \ldots \frac{y_{n-1} - m_{n-1}}{2}. \tag{1.5}$$

Como $y_i, m_i \in [-1,1]$, $\frac{y_i - m_i}{2} \in [-1,1]$. Cuando la Realidad anuncia (1.5) en el protocolo 1.7, la estrategia para el Escéptico de anunciar M_n implica que $\mathcal{K}_n \to \infty$ a menos que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - m_i)}{2} \right) = 0. \tag{1.6}$$

Entonces tenemos que en el protocolo 1.3 la estrategia para el Escéptico de anunciar $\frac{1}{2}M_n$ en la n-ésima ronda tiene una ganancia neto de $\frac{1}{2}M_n(y_n - m_n)$ $= M_n((y_n - m_n)/2)$, que es la ganancia neto de la estrategia de anunciar M_n en 1.7 cuando la Realidad anuncia (1.5), y como es una estrategia que fuerza (1.6) y (1.6) es equivalente a (1.3), obtenemos que la estrategia de anunciar $\frac{1}{2}M_n$ en 1.3. fuerza (1.3). $\square$

Definición 1.9. *Definimos un proceso como una función $\mathcal{S} : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$. Dado un proceso $\mathcal{S}$ y un entero $n \geq 0$, escribimos $\mathcal{S}_n$ como la variable $\mathcal{S}_n(\omega) = \mathcal{S}(\omega^n) \in \mathbb{R}$, donde $\omega \in \Omega$.*
Diremos que una función $\mathcal{A} : \mathbb{S} \setminus \{\square\} \to \mathbb{R}$ es un proceso previsible si $\forall \omega \in \Omega$ i $n \in \mathbb{N}, \mathcal{A}(\omega^n)$ depende únicamente de ω^{n-1}.Similarmente a un proceso, escribimos $\mathcal{A}_n$ como la variable $\mathcal{A}_n(\omega) = \mathcal{A}(\omega^n) \in \mathbb{R}$, donde $\omega \in \Omega$.

Una estrategia ψ para el Escéptico en el protocolo 1.7 puede ser representada como un par $(\psi^{\text{Inicial}}, \psi^M)$ donde $\psi^{\text{Inicial}} \in \mathbb{R}$ es el valor que ψ especifica como capital inicial $\mathcal{K}_0$ y ψ^M es un proceso previsible tal que $\psi^M(\omega^n)$ determina el valor a anunciar M_n en la situación ω^{n-1}. Requerimos que ψ^M sea un proceso previsible y no simplemente un proceso, ya que el Escéptico aún no conoce ω_n, el movimiento de la Realidad en la n-ésima ronda.

Corolario 1.10. *Las estrategias para el Escéptico en el protocolo 1.7 forman un espacio vectorial:*
(i) si $\psi = (\psi^{Inicial}, \psi^M)$ es una estrategia para el Escéptico y $\beta \in \mathbb{R}$, entonces $\beta\psi = (\beta\psi^{Inicial}, \beta\psi^M)$ es una estrategia para el Escéptico.
(ii)Si $\psi^1 = (\psi^{1,Inicial}, \psi^{1,M})$ y $\psi^2 = (\psi^{2,Inicial}, \psi^{2,M})$ son estrategias para el Escéptico $\psi^1 + \psi^2 = (\psi^{1,Inicial} + \psi^{2,Inicial}, \psi^{1,M} + \psi^{2,M})$

Una estrategia $\psi = (\psi^{\text{Inicial}}, \psi^M)$ para el Escéptico determina un proceso cuyo valor en s es el capital del Escéptico en s cuando sigue ψ. Este proceso, al que denotamos como $\mathcal{K}^\psi$, viene dado por:

$$\mathcal{K}_0^\psi = \psi^{Inicial} \text{ y } \mathcal{K}_n^\psi = \mathcal{K}_{n-1}^\psi + \psi_n^M y_n, n \geq 1. \tag{1.7}$$

Nos referiremos a $\mathcal{K}^\psi$ como el proceso de capital de ψ.
Siguiendo la anterior definición de forzar, diremos que una estrategia ψ para el Escéptico fuerza E si

$$\mathcal{K}^\psi \geq 0 \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} \mathcal{K}_n^\psi(\omega) = \infty \; \forall \omega \notin E.$$

Definición 1.11. *Sea ψ una estrategia y E un evento. Diremos que ψ fuerza débilmente E si*

$$\mathcal{K}^{\psi} \geq 0 \quad y \quad \sup_n \mathcal{K}_n^{\psi}(\omega) = \infty \ \forall \omega \notin E. \tag{1.8}$$

Lema 1.12. *Si el Escéptico puede forzar débilmente E, entonces puede forzar E.*

<u>Demostración:</u> Supongamos que ψ es una estrategia para el Escéptico que fuerza débilmente E. Definimos la estrategia ψ' de la siguiente manera:
Seguir ψ empezando por $\mathcal{K}_0 = \mathcal{K}_0^{\psi}$ hasta que el capital del Escéptico iguale o exceda $\mathcal{K}_0 + 1$, siguiendo ψ indefinidamente si el capital se mantiene siempre por debajo de $\mathcal{K}_0 + 1$. Sea m la primera ronda donde el capital del Escéptico $\mathcal{K}_m$ iguala o excede $\mathcal{K}_0 + 1$. A partir de la ronda $m + 1$ empezamos a seguir la estrategia

$$M_n := \frac{\mathcal{K}_m - 1}{\mathcal{K}_m} \cdot \psi_n^M \tag{1.9}$$

Por lo tanto, a partir de la m-ésima ronda, la estrategia (1.9) arriesga una pérdida menor a $\mathcal{K}_m - 1$. Ahora, se continúa siguiendo la estrategia (1.9) hasta que el capital supere $\mathcal{K}_m + 1$. Si se llega a ese caso, se vuelve a reescalar la estrategia para reducir el capital que se arriesga.
De esta manera, la estrategia $\psi^{'}$ tiene un proceso de capital siempre no negativo. En cualquier camino $\omega \notin E$, $\sup_n \mathcal{K}_n^{\psi}(\omega) = \infty$, por lo que $\psi^{'}$ es una estrategia que cumple $\mathcal{K}_n^{\psi^{'}}(\omega) > 0$ y donde $\psi^{'}$ reserva una unidad de capital infinitas veces, por lo que:

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{K}_n^{\psi^{'}}(\omega) = \infty \ \forall \omega \notin E.$$

Por lo tanto, $\psi^{'}$ fuerza E. (La idea es que $\psi^{'}$ es una estrategia que nunca arriesga al Escéptico que entre en bancarrota y que crece indefinidamente hacía el infinito $\forall\, \omega \notin E$. □

Lema 1.13. *Si el Escéptico puede forzar débilmente cada uno de los eventos de una secuencia $E_1, E_2, ...$ en el protocolo 1.7, entonces puede forzar $\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$ en el protocolo 1.7.*

<u>Demostración:</u> Sea ψ^k una estrategia que fuerza débilmente a E_k. Asumimos, sin perder generalidad, que ψ^k empieza con capital unitario. Como $\mathcal{K}_n \geq 0$,

$$|M_n| \leq \mathcal{K}_{n-1} \implies \mathcal{K}_n^{\psi^k} \leq 2^n.$$

Ahora, por (1.7) y porque $\mathcal{K}_n^{\psi^k} \geq 0$,

$$\mathcal{K}_n^{\psi^k} - |\psi_n^{k,M}| \geq 0 \implies |\psi_n^{k,M}| \leq 2^n \ \forall\, k, n \quad \implies \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \psi_n^{k,M} \text{ converge,}$$

La convergencia la obtenemos como resultado de que una serie es convergente si converge absolutamente y de que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |2^{-k}\psi_n^{k,M}| \leq 2^n \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 2^n \frac{1/2}{1-1/2} = 2^n$$

por lo que, por inducción sobre (1.7), $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\mathcal{K}_n^{\psi^k}$ también converge.
Por lo tanto podemos definir la estrategia ψ como $\psi := \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\psi^k$, y como ψ^k fuerza débilmente E_k, ψ también fuerza débilmente E_k $\forall k \implies \psi$ fuerza débilmente $\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$. □

Lema 1.14. *Sea $\kappa > 0$. En el protocolo 1.7, el Escéptico puede forzar débilmente*

$$\limsup_{n\to\infty} \overline{y_n} \leq \kappa \tag{1.10}$$

y también puede forzar débilmente

$$\liminf_{n\to\infty} \overline{y_n} \geq \kappa \tag{1.11}$$

Demostración: Asumimos sin perdida de generalidad que $\kappa \leq 1/2$. Sea ψ la estrategia tal que $\mathcal{K}_0 := 1$ y $M_n := \kappa\mathcal{K}_{n-1}$ en cada ronda. Su proceso de capital $\mathcal{K}^\psi$ viene dado por $\mathcal{K}_0^\psi = 1$ y

$$\mathcal{K}_n^\psi = \mathcal{K}_{n-1}^\psi(1+\kappa y_n) = \prod_{i=1}^{n}(1+\kappa y_i) \tag{1.12}$$

Sea $\omega = y_1 y_2 ...$ un camino tal que $\sup_n K_n^\psi(\omega) < \infty$, entonces $\exists C_\omega > 0$ tal que $\sup_n K_n^\psi(\omega) \leq C_\omega$ y por lo tanto

$$\sum_{i=1}^{n} \ln(1+\kappa y_i) \leq \ln C_\omega \ \forall n$$

Como $t - t^2 \leq \ln(1+t) \ \ \forall\, t \geq -1/2$, se sigue que $\forall n$

$$\kappa \sum_{i=1}^{n} y_i - \kappa^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \leq \ln C_\omega \implies \kappa \sum_{i=1}^{n} y_i - \kappa^2 n \leq \ln C_\omega \implies \overline{y_n} \leq \frac{\ln C_\omega}{\kappa n} + \kappa.$$

Por lo que (1.10) se cumple para el camino $\omega \implies \psi$ fuerza débilmente (1.10).
La demostración para demostrar que el Escéptico puede forzar débilmente (1.11) es análoga con $-\kappa$ en vez de κ. □

Ahora podemos pasar a demostrar la proposición 1.6.
Demostración: (De la proposición 1.6.)
Por el lema 1.15, el Escéptico puede forzar debilmente (1.10) y (1.11) en el protocolo 1.7 para $\kappa = 2^{-k}, k = 1, 2, ...$ Por el lema 1.13, puede forzar débilmente la intersección de los eventos $\forall k$, y la intersección es el evento $\overline{y_n} \to 0$. Entonces por el lema 1.12 puede forzar $\overline{y_n} \to 0$ en el protocolo 1.7, y por el lema 1.8, puede forzar (1.3) en el protocolo 1.3. □

1.3 Procesos de capital y Supermartingalas

Nuestro objetivo ahora es definir el concepto de *supermartingala* en el sentido de la teoría de juegos. Para ello, consideramos ahora una modificación del protocolo 1.7, donde el Escéptico tiene permitido controlar arbitrariamente la cantidad de que arriesga en cada ronda:

Protocolo 1.15.
Esceptico anuncia $\mathcal{K}_0 \in \mathbb{R}$.
Para $n = 1, 2, ...;$
El Escéptico anuncia $f_n \in \mathbb{R}^{[-1,1]}$ tal que
$\exists M \in \mathbb{R}$ tal que $\forall y \in [-1, 1] : f_n(y) \leq My$
La Realidad anuncia $y_n \in [-1, 1]$.
$\mathcal{K}_n := \mathcal{K}_{n-1} + f_n(y_n)$.

Donde $\mathbb{R}^{[-1,1]}$ denota el espacio de funciones $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$. Notamos que el protocolo 1.7 es el protocolo 1.15 tomando $f_n(y) = M_n y$, la diferencia en este nuevo protocolo recae entonces en que el Escéptico puede elegir una función de pago más general, $f_n(x)$, que está restringida por una línea superior $g(x) = M_n x$, esto significa que el Escéptico puede renunciar a parte de las ganancias potenciales. Este protocolo permite más generalidad en la elección de las estrategias del Escéptico.

Definición 1.16. *Llamaremos protocolo aflojado a un protocolo donde el Escéptico puede controlar arbitrariamente la cantidad que arriesga en cada ronda. Si un protocolo aflojado se obtiene derivándose a partir de un protocolo, nos referiremos a el como su aflojamiento. Es inmediato que un protocolo aflojado es su propio aflojamiento.*

Definición 1.17. *Si $\mathcal{T}$ es un proceso de capital en un protocolo aflojado, diremos que $\mathcal{T}$ es una supermartingala. Si $\mathcal{T}$ es un proceso de capital en el aflojamiento de un protocolo, diremos que es una supermartingala en el protocolo original Si $\mathcal{T}$ y $-\mathcal{T}$ son ambas supermartingalas, diremos que $\mathcal{T}$ es una martingala.*

En el caso del protocolo 1.15, es un ejemplo de un protocolo aflojado, pues el Escéptico puede anunciar cualquier función f_n acotada por lo que controla la cantidad que arriesga en cada ronda, y es el aflojamiento del protocolo 1.7, ya que conserva la estructura del protocolo original. Un ejemplo de supermartingala en el protocolo 1.15:

$$\mathcal{T}_0 = 1, \qquad \mathcal{T}_n = \exp\left(\kappa \sum_{i=1}^{n} y_i - \kappa^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) \tag{1.13}$$

Tenemos que $\mathcal{T}$ es un proceso de capital para 1.15, para el caso en que el Escéptico decide anunciar en cada ronda n,

$$f_n(y_n) = \mathcal{T}_{n-1}\left(\exp\left(\kappa y_n - \kappa^2 y_n^2\right) - 1\right), \, \kappa \in (0, 1/2],$$

ya que entonces

$$\mathcal{T}_n = \exp(\kappa \sum_{i=1}^{n-1} y_i - \kappa^2 \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2) \exp\left(\kappa y_n - \kappa^2 y_n^2\right) = \mathcal{T}_{n-1} \exp(\kappa y_n - \kappa^2 y_n^2),$$

$$= \mathcal{T}_{n-1} + \mathcal{T}_{n-1} \left(\exp\left(\kappa y_n - \kappa^2 y_n^2\right) - 1\right) = \mathcal{T}_{n-1} + f_n(y_n)$$

por lo que $\mathcal{T}_n$ es un proceso de capital en el protocolo 1.15 y por lo tanto cumple la definición de supermartingala.

Un resultado a partir de la definición que hemos dado de supermartingala es el siguiente:

Corolario 1.18. *El Escéptico puede forzar un evento $E \iff \exists$ una supermartingala no negativa $\mathcal{T} \to \infty \; \forall \omega \notin E$*

Demostración:

Supongamos que el Escéptico puede forzar E. Entonces, existe un proceso de capital $\mathcal{K}_n \geq 0$ tal que

$$\mathcal{K}_n \to \infty \quad \forall\, \omega \notin E.$$

Como $\mathcal{K}_n$ es un proceso de capital válido en el protocolo original, también es válido en cualquier protocolo aflojado, debido a que los protocolos aflojados amplían las posibilidades para el Escéptico.

Ahora definimos $\mathcal{T}_n := \mathcal{K}_n$. Por construcción, $\mathcal{T}_n$ es un proceso de capital no negativo válido en el protocolo aflojado, y por lo tanto $\mathcal{T}_n$ cumple la definición de supermartingala. Además, como $\mathcal{K}_n \to \infty$ cuando $\omega \notin E$, tenemos que $\mathcal{T}_n \to \infty$ para los mismos $\omega \notin E$.

Por lo tanto, la existencia de un proceso de capital $\mathcal{K}_n$ que fuerza E implica la existencia de una supermartingala $\mathcal{T}_n \geq 0$ tal que $\mathcal{T}_n \to \infty$ cuando $\omega \notin E$.

Recíprocamente, supongamos que existe una supermartingala $\mathcal{T}_n \geq 0$ tal que

$$\mathcal{T}_n \to \infty \quad \text{cuando } \omega \notin E.$$

Dado que $\mathcal{T}_n$ es un proceso de capital válido en el protocolo aflojado, existe una estrategia para el Escéptico asociada a $\mathcal{T}_n$. Esta estrategia también define un proceso de capital válido en el protocolo original, ya que cualquier estrategia en el protocolo aflojado puede aplicarse en el original.

Para todo $\omega \notin E$, sabemos que $\mathcal{T}_n \to \infty$, lo que implica que la Realidad no puede evitar que el Escéptico acumule capital ilimitado. Por lo tanto, el Escéptico puede usar esta estrategia para forzar E.

Por lo tanto, la existencia de un proceso de capital $\mathcal{K}_n \geq 0$ que fuerza E es equivalente a la existencia de una supermartingala $\mathcal{T}_n \geq 0$ tal que $\mathcal{T}_n \to \infty$ cuando $\omega \notin E$.

$\square$

2 CAPÍTULO 2: Introducción a las esperanzas y expectativas superiores

Este capítulo toma como principal referencia los capítulos 2, 6 y 7 del libro "Game-Theoretic foundations for probability and finance", referenciado en la bibliografía.

Para los resultados de este capítulo, diferenciaremos cuando el juego termina, o bien continua indefinidamente:

Definición 2.1. *Definimos la Largura $Larg : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ de un camino $\omega \in \Omega$ como el número de movimientos que se realizan hasta que el juego termina. Diremos que el juego es de Horizonte finito si $\forall \omega \in \Omega$ $Larg(\omega) < +\infty$. Contrariamente, diremos que el juego es de Horizonte infinito si $\forall\ \omega \in \Omega$ $Larg(\omega) = +\infty$.*

2.1 Juegos finitos

En esta primera parte del capítulo, consideraremos solo juegos de horizonte finito. Para ello, adaptamos el juego del capítulo 1 para que termine transcurridas N rondas. Consideramos ahora la versión de horizonte finito del protocolo 1.7:

Protocolo 2.2.
Parámetro: $N \in \mathbb{N}$
  Esceptico anuncia $\mathcal{K}_0 \in \mathbb{R}$.
  Para $n = 1, 2, ..., N$;
    El Escéptico anuncia $M_n \in \mathbb{R}$.
    La Realidad anuncia $y_n \in [-1, 1]$
    $\mathcal{K}_n := \mathcal{K}_{n-1} + M_n y_n$.

El espacio de situaciones $\mathbb{S}$ para el protocolo 2.2 es el conjunto de todas las secuencias de elementos s. El espacio muestral Ω es el subconjunto de $\mathbb{S}$ cuyos elementos tienen largura exactamente N. Denotamos por $\mathbf{T}$ el conjunto de todas las supermartingalas en el protocolo 2.2.

Definición 2.3. *Sea X una variable acotada inferiormente, definimos su esperanza global superior en el protocolo 2.2. como*

$$\overline{\mathbb{E}}(X) := \inf\{\mathcal{T}_0 \mid \mathcal{T} \in \mathbf{T} \text{ y } \mathcal{T}_N \geq X\} \tag{2.1}$$

Definimos también la esperanza global inferior de X como

$$\underline{\mathbb{E}}(X) = -\overline{\mathbb{E}}(-X) \tag{2.2}$$

Cuando $\underline{\mathbb{E}}(X) = \overline{\mathbb{E}}(X)$, denotamos por $\mathbb{E}(X)$ a su valor común y lo llamamos la Esperanza de X.

Lema 2.4. *En el protocolo 2.2, la esperanza global superior tiene las siguientes propiedades:*

a) $\overline{\mathbb{E}}(X_1 + X_2) \leq \overline{\mathbb{E}}(X_1) + \overline{\mathbb{E}}(X_2)$

b) *Sea* $c \in \mathbb{R} \implies \overline{\mathbb{E}}(X + c) = \overline{\mathbb{E}}(X) + c$

c) *Sea* $c \geq 0 \implies \overline{\mathbb{E}}(cX) = c\overline{\mathbb{E}}(X)$

d) *Si* $X_1 \leq X_2 \implies \overline{\mathbb{E}}(X_1) \leq \overline{\mathbb{E}}(X_2)$

e) *Si* $X(\omega) = c \; \forall \omega \in \Omega \implies \overline{\mathbb{E}}(X) = c$

Demostración:

a) Por definición,

$$\overline{\mathbb{E}}(X_1 + X_2) = \inf\{\mathcal{T}_0 \mid \exists \mathcal{T} \in \mathcal{T}, \mathcal{T}_N \geq X_1 + X_2\}.$$

Si $\mathcal{T}^1, \mathcal{T}^2 \in \mathcal{T}$ satisfacen $\mathcal{T}_N^1 \geq X_1$ y $\mathcal{T}_N^2 \geq X_2$, entonces $\mathcal{T} = \mathcal{T}^1 + \mathcal{T}^2$ cumple $\mathcal{T}_N \geq X_1 + X_2$. Por lo tanto,

$$\overline{\mathbb{E}}(X_1 + X_2) \leq \mathcal{T}_0^1 + \mathcal{T}_0^2.$$

Al tomar el ínfimo sobre todos los procesos válidos, se concluye que

$$\overline{\mathbb{E}}(X_1 + X_2) \leq \overline{\mathbb{E}}(X_1) + \overline{\mathbb{E}}(X_2).$$

b) Si $\mathcal{T}_N \geq X$, entonces $\mathcal{T}_N + c \geq X + c$, lo que implica que

$$\overline{\mathbb{E}}(X + c) \leq \overline{\mathbb{E}}(X) + c.$$

Inversamente, si $\mathcal{T}_N \geq X + c$, entonces $\mathcal{T}_N - c \geq X$, lo que implica que

$$\overline{\mathbb{E}}(X + c) \geq \overline{\mathbb{E}}(X) + c.$$

Por lo tanto,

$$\overline{\mathbb{E}}(X + c) = \overline{\mathbb{E}}(X) + c.$$

c) Si $\mathcal{T}_N \geq X$ con $\mathcal{T}_0 = \overline{\mathbb{E}}(X)$, entonces, para $c > 0$, el proceso reescalado $c\mathcal{T}$ satisface

$$(c\mathcal{T})_N = c\mathcal{T}_N \geq cX,$$

con $(c\mathcal{T})_0 = c\mathcal{T}_0$. Por lo tanto,

$$\overline{\mathbb{E}}(cX) \leq c\overline{\mathbb{E}}(X).$$

Inversamente, si $\mathcal{T}_N \geq cX$, entonces el proceso reescalado $\mathcal{T}/c$ satisface $(\mathcal{T}/c)_N \geq X$, lo que implica que

$$\overline{\mathbb{E}}(X) \leq \mathcal{T}_0/c.$$

Esto implica que $c\overline{\mathbb{E}}(X) \leq \overline{\mathbb{E}}(cX)$, y por lo tanto,

$$\overline{\mathbb{E}}(cX) = c\overline{\mathbb{E}}(X).$$

d) Si $\mathcal{T}_N \geq X_2$, entonces $\mathcal{T}_N \geq X_1$ porque $X_1 \leq X_2$. Por lo tanto, cualquier proceso válido para X_2 también lo es para X_1, lo que implica que

$$\overline{\mathbb{E}}(X_1) \leq \overline{\mathbb{E}}(X_2).$$

e) Si X es constante, el capital inicial necesario para alcanzar X es exactamente c. El proceso trivial $\mathcal{T}_n = c$ cumple $\mathcal{T}_N \geq X$, y por lo tanto,

$$\overline{\mathbb{E}}(X) = c.$$

□

Lema 2.5. *Si $\mathcal{M}$ es una martingala acotada, entonces $\mathbb{E}(\mathcal{M}_N) = \mathcal{M}_0$*

Demostración: Por definición, $\overline{\mathbb{E}}(\mathcal{M}_N) \leq \mathcal{M}_0$. Como $-\mathcal{M}$ es también una martingala, tenemos que $\overline{\mathbb{E}}(-\mathcal{M}_N) \leq -\mathcal{M}_0 \implies \underline{\mathbb{E}}(\mathcal{M}_N) \geq \mathcal{M}_0 \implies \underline{\mathbb{E}}(\mathcal{M}_N) = \overline{\mathbb{E}}(\mathcal{M}_N) = \mathcal{M}_0$ □

Definición 2.6. *Dado un evento E en el protocolo 2.2, si $\mathbf{1}_E$ denota la función donde:*

$$\mathbf{1}_E(\omega) = \begin{cases} 1 & si\ \omega \in E \\ 0 & si\ \omega \notin E \end{cases}$$

Definimos la probabilidad global superior de E como

$$\overline{\mathbb{P}}(E) = \overline{\mathbb{E}}(\mathbf{1}_E)$$

y su probabilidad global inferior de E como

$$\underline{\mathbb{P}}(E) = \underline{\mathbb{E}}(\mathbf{1}_E)$$

Por último, si $\mathbb{E}(\mathbf{1}_E)$ existe, llamamos probabilidad global de E a

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_E)$$

Lema 2.7. *Sea E un evento en el protocolo 2.2. Entonces:*

$$\overline{\mathbb{P}}(E) + \overline{\mathbb{P}}(E^c) \geq 1 \tag{2.3}$$

$$\underline{\mathbb{P}}(E) = 1 - \overline{\mathbb{P}}(E^c) \tag{2.4}$$

$$0 \leq \underline{\mathbb{P}}(E) \leq \overline{\mathbb{P}}(E) \leq 1 \tag{2.5}$$

Demostración: Para la demostración usaremos las propiedades del lema 2.4. (2.3) se obtiene de las propiedades (a) y (e) y del hecho que

$$1 = \overline{\mathbb{E}}(1) = \overline{\mathbb{E}}(\mathbf{1}_E + \mathbf{1}_{E^c}) \leq \overline{\mathbb{E}}(\mathbf{1}_E) + \overline{\mathbb{E}}(\mathbf{1}_{E^c}) = \overline{\mathbb{P}}(E) + \overline{\mathbb{P}}(E^c)$$

Para (2.4), usando la propiedad (b):

$$\underline{\mathbb{P}}(E) = \underline{\mathbb{E}}(\mathbf{1}_E) = -\overline{E}(-\mathbf{1}_E) = -\overline{E}(\mathbf{1}_{E^c} - 1) = -\overline{E}(\mathbf{1}_{E^c}) + 1 = 1 - \overline{\mathbb{P}}(E^c)$$

Por lo que respecta a (2.5), la segunda desigualdad se obtiene de (2.3) y (2.4), y la primera y la tercera se obtienen a partir de las propiedades (d) y (e). □

2.2 Expectativas Superiores

Hasta ahora hemos visto casos de protocolos muy concretos que determinaban ciertos juegos específicos. No obstante, también es posible realizar protocolos mas abstractos que nos den resultados más generales y no dependan de condiciones específicas de un juego en particular, y el objetivo de este capítulo es introducirnos en esta teoría mas general de la probabilidad en la teoría de juegos.

Definición 2.8. *Dado un conjunto no vacío $\mathcal{Y}$, sea $\overline{\mathbb{R}}^{\mathcal{Y}}$ el conjunto de funciones continuas $f : \mathcal{Y} \to \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, entonces definimos la expectativa superior en $\mathcal{Y}$ al funcional $\overline{\mathbf{E}} := \overline{\mathbb{R}}^{\mathcal{Y}} \to \overline{\mathbb{R}}$ si cumple las siguientes condiciones:*

1. *Si $f_1, f_2 \in \overline{\mathbb{R}}^{\mathcal{Y}}$, entonces $\overline{\mathbf{E}}(f_1 + f_2) \leq \overline{\mathbf{E}}(f_1) + \overline{\mathbf{E}}(f_2)$.*
2. *Si $f \in \overline{\mathbb{R}}^{\mathcal{Y}}$ y $c \in (0, \infty)$, entonces $\overline{\mathbf{E}}(cf) = c\overline{\mathbf{E}}(f)$.*
3. *Si $f_1, f_2 \in \overline{\mathbb{R}}^{\mathcal{Y}}$ y $f_1 \leq f_2$, entonces $\overline{\mathbf{E}}(f_1) \leq \overline{\mathbf{E}}(f_2)$.*
4. *Para cada $c \in \mathbb{R}$, $\overline{\mathbf{E}}(c) = c$.*
5. *Si $f_1 \leq f_2 \leq \cdots \in [0, \infty]^{\mathcal{Y}}$, entonces $\overline{\mathbf{E}}\left(\lim_{k\to\infty} f_k\right) = \lim_{k\to\infty} \overline{\mathbf{E}}(f_k)$.*

Definimos la expectativa inferior en $\mathcal{Y}$ como $\underline{\mathbf{E}}(f) := -\overline{\mathbf{E}}(-f)$. Definimos la esperanza superior de $f \in \overline{\mathbb{R}}^{\mathcal{Y}}$ como $\overline{\mathbf{E}}(f)$ y a la esperanza de f como $\underline{\mathbf{E}}(f)$. Cuando $\overline{\mathbf{E}}(f) = \underline{\mathbf{E}}(f)$ denotamos a $\mathbf{E}(f)$ como la esperanza de f.

A continuación damos una serie de propiedades relevantes para las expectativas superiores

Proposición 2.9. *Supongamos que $\overline{\mathbf{E}}$ es una expectativa superior sobre $\mathcal{Y}$. Entonces, se cumplen las siguientes propiedades:*

a) Si $f \in \overline{\mathbb{R}}^{\mathcal{Y}}$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces

$$\overline{\mathbf{E}}(f + c) = \overline{\mathbf{E}}(f) + c. \tag{2.6}$$

b) Si $f \in \overline{\mathbb{R}}^{\mathcal{Y}}$, entonces

$$\inf f \leq \overline{\mathbf{E}}(f) \leq \sup f. \tag{2.7}$$

c) Si $f_1, f_2, \dots \in [0,\infty]^{\mathcal{Y}}$*, entonces*

$$\overline{\mathbf{E}}\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\mathbf{E}}(f_k).$$

d) Si $f \in \overline{\mathbb{R}}^{\mathcal{Y}}$*, entonces*

$$f > 0 \implies \overline{\mathbf{E}}(f) > 0. \tag{2.8}$$

e) Si $f_1 \leq f_2 \leq \dots \in \overline{\mathbb{R}}^{\mathcal{Y}}$ *y* f_1 *está acotada inferiormente, entonces*

$$\overline{\mathbf{E}}\left(\lim_{k\to\infty} f_k\right) = \lim_{k\to\infty} \overline{\mathbf{E}}(f_k).$$

Demostración:

a) Observamos que

$$\overline{\mathbf{E}}(f+c) \overset{(1)}{\leq} \overline{\mathbf{E}}(f) + \overline{\mathbf{E}}(c) \overset{(4)}{=} \overline{\mathbf{E}}(f) + c,$$

y

$$\overline{\mathbf{E}}(f) \overset{(1)}{\leq} \overline{\mathbf{E}}(f+c) + \overline{\mathbf{E}}(-c) \overset{(4)}{=} \overline{\mathbf{E}}(f+c) - c.$$

(En cada relación se ha indicado la propiedad de la definición de expectativa superior que la justifica.)

b) La relación $\inf f \leq \overline{\mathbf{E}}(f) \leq \sup f$ (2.7) se deriva de las propiedades (3) y (4)

c) Aplicando la propiedad (5) a las variables $h_1 \leq h_2 \leq \cdots$, donde $h_k := \sum_{i=1}^{k} f_i$, y usando la propiedad (1), obtenemos

$$\overline{\mathbf{E}}\left(\sum_{i=1}^{\infty} f_i\right) = \lim_{k\to\infty} \overline{\mathbf{E}}\left(\sum_{i=1}^{k} f_i\right) \leq \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \overline{\mathbf{E}}(f_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{\mathbf{E}}(f_i).$$

d) Lo demostramos por contrarrecíproco. Supongamos que $\overline{\mathbf{E}}(f) = 0$. Entonces, por (c),

$$\overline{\mathbf{E}}\left(\sum_{k=1}^{\infty} f\right) \leq 0.$$

Dado que $\overline{\mathbf{E}}(\infty) = \infty$ por las propiedades 3 y 4, esto implica que $\sum_{k=1}^{\infty} f$ no es idénticamente igual a ∞, y, por lo tanto, $f > 0$ es falso.

e) Esto se deduce directamente de la propiedad 5 y de (a).

□

Damos ahora un resultado relevante de las expectativas superiores:

Definición 2.10. *Sea E subconjunto de $\mathcal{Y}$ un evento, $\overline{\mathbf{E}}$ una expectativa superior en $\mathcal{Y}$, escribimos $\overline{\mathbf{P}}(E)$ para denotar $\overline{\mathbf{E}}(\mathbf{1}_E)$. Llamamos a $\overline{\mathbf{P}}(E)$ la probabilidad superior de E. De manera similar, escribimos $\underline{\mathbf{P}}(E)$ para denotar $\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{1}_E)$ y la llamamos la probabilidad inferior de E.*

Se sigue inmediatamente de las propiedades de las expectativas superior e inferior que

$$0 \leq \underline{\mathbf{P}}(E) \leq \overline{\mathbf{P}}(E) \leq 1.$$

Cuando $\overline{\mathbf{P}}(E) = \underline{\mathbf{P}}(E)$, designamos su valor común por $\mathbf{P}(E)$, llamamos a $\mathbf{P}(E)$ la probabilidad de E (en el sentido de teoría de juegos), y decimos que E está probabilizado. Cuando $\overline{\mathbf{P}}(E) > \underline{\mathbf{P}}(E)$, decimos que E no está probabilizado. Cuando $\underline{\mathbf{P}}(E) = 0$ y $\overline{\mathbf{P}}(E) = 1$, decimos que E está completamente no probabilizado.

En la probabilidad basada en la teoría de la medida, la medida de probabilidad, que asigna probabilidades a los eventos, es un objeto fundamental. Los valores esperados de las variables aleatorias, siendo integrales de Lebesgue respecto a la medida de probabilidad, no aportan información adicional y, por tanto, el operador de expectativa a menudo se considera menos fundamental que la medida de probabilidad.

En contraste, una expectativa superior puede no estar completamente determinada por sus probabilidades superior e inferior y, por lo tanto, debe considerarse más fundamental. Por esta razón, exigimos a las expectativas superiores que cumplan las 5 propiedades de la definición, pero no lo hacemos para probabilidades superiores.

Proposición 2.11. *(Desigualdad de Markov)*
Sea $\overline{\mathbf{E}}$ una expectativa superior en $\mathcal{Y}$, $f \in \overline{\mathbb{R}}^{\mathcal{Y}}$, $f \geq 0$, $\overline{\mathbf{E}}(f) > 0$, y $K \in (0, \infty)$. Entonces:

$$\overline{\mathbf{P}}(f \geq K\overline{\mathbf{E}}(f)) \leq \frac{1}{K}.$$

<u>Demostración:</u> Por las propiedades 2 y 3:

$$\overline{\mathbf{P}}(f \geq K\overline{\mathbf{E}}(f)) = \overline{\mathbf{E}}(\mathbf{1}_{f \geq K\overline{\mathbf{E}}(f)}) \leq \overline{\mathbf{E}}\left(\frac{f}{K\overline{\mathbf{E}}(f)}\right) = \frac{1}{K}.$$

□

2.3 Esperanza Superior para juegos no finitos

Nuestro objetivo ahora es relacionar las expectativas superiores con los conceptos de los primeros capítulos. En particular, nuestro objetivo será relacionar las expectativas superiores con la esperanza superior. Consideramos para ello el siguiente protocolo, que a diferencia de los dados hasta ahora, no representa un juego en particular, y nos sirve para dar resultados más generales que no dependan de las reglas concretas de un juego.

Protocolo 2.12.
Parámetros: Conjunto no vacío $\mathcal{Y}$; expectativa superior $\overline{\mathbf{E}}$ en $\mathcal{Y}$.

El escéptico anuncia $\mathcal{K}_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. (2.9)

Para $n = 1, 2, \ldots$:

El Escéptico anuncia $f_n \in \mathbb{R}^{\mathcal{Y}}$ tal que $\mathbb{E}(f_n) \leq \mathcal{K}_{n-1}$. (2.10)

El mundo anuncia $y_n \in \mathcal{Y}$. (2.11)

$\mathcal{K}_n := f_n(y_n)$.

Definición 2.13. *Sea $\psi = (\psi^{Inicial}, \psi^f)$ una estrategia para el Escéptico en el Protocolo 2.12, de forma similar al Capítulo 1, llamamos al proceso de capital resultante de ψ una supermartingala. Si (2.10) siempre se cumple con igualdad cuando el Escéptico sigue la estrategia ψ, entonces llamamos a ψ y a su supermartingala eficientes.*

A partir de (2.9) y (2.11) en el Protocolo 2.12, vemos que la supermartingala $\mathcal{T}$ para la estrategia $(\psi^{Inicial}, \psi^f)$ está dada por

$$\mathcal{T}(\Box) = \psi^{Inicial} \text{ y } \mathcal{T}(y_1 \ldots y_n) = \psi^f(y_1 \ldots y_n)(y_n) \tag{2.12}$$

para todas las situaciones no iniciales $y_1 ... y_n$.

Como en el caso finito, escribimos $\mathbf{T}$ para el conjunto de supermartingalas. Además, escribimos $\mathbf{M}$ para el conjunto de martingalas y $\mathbf{L}$ para el subconjunto de $\mathbf{T}$ que consiste en supermartingalas que convergen en $\overline{\mathbb{R}}$ en cada camino.

A continuación damos una serie de resultados y propiedades para las supermartingalas.

Proposición 2.14. *Un proceso $\mathcal{T}$ es una supermartingala si y solo si*

$$\overline{\mathbf{E}}(\mathcal{T}(s\cdot)) \leq \mathcal{T}(s) \quad \text{para todo } s \in \mathbb{S}, \tag{2.13}$$

donde $s\cdot$ denota cualquier situación $s' \in \mathbb{S}$ cuyo inicio coincide con s. Una supermartingala $\mathcal{T}$ es eficiente si y solo si (2.13) se cumple con igualdad para todo $s \in \mathbb{S}$.

Demostración: (2.9) y (2.10) dan las condiciones necesarias y suficientes para que un par $(\psi^{\text{Inicial}}, \psi^{\text{f}})$ sea una estrategia para el Escéptico:

- $\psi^{\text{Inicial}} \in \overline{\mathbb{R}}$, y
- ψ^{f} es una aplicación de $\mathbb{S} \setminus \{\Box\}$ en $\overline{\mathbb{R}}^{\mathcal{Y}}$ que satisface

$$\overline{\mathbf{E}}(\psi^{\text{f}}(y')) \leq \psi^{\text{f}} \tag{2.14}$$

y

$$\overline{\mathbf{E}}(\psi^{\text{Inicial}}(syy')) \leq \psi^{\text{f}}(sy')(y) \tag{2.15}$$

para todo $s \in \mathbb{S}$ y todo $y, y' \in \mathcal{Y}$, donde $sy = y_1, ..., y_m, y$ para algún m.

Usando (2.12), podemos reescribir (2.14) y (2.15) como condiciones sobre la supermartingala $\mathcal{T}$ de ψ: $\mathcal{T}(\Box) \in \overline{\mathbb{R}}$,

$$\overline{\mathbf{E}}(\mathcal{T}(\Box\cdot)) \leq \mathcal{T}(\Box) \tag{2.16}$$

y

$$\overline{\mathbf{E}}(\mathcal{T}(sy\cdot)) \leq \mathcal{T}(sy) \tag{2.17}$$

para todo $s \in \mathbb{S}$ y $y \in \mathcal{Y}$. Las desigualdades (2.16) y (2.17) dicen que (2.13) se cumple para todo $s \in \mathbb{S}$.

La supermartingala $\mathcal{T}$ es eficiente si y solo si (2.10) se cumple con igualdad en todas las situaciones, y esto es equivalente a que las desigualdades (2.16) y (2.17) se cumplan siempre con igualdad, es decir, a que (2.13) se cumpla siempre con igualdad.

$\Box$

Lema 2.15. *Si $\mathcal{T}$ es una supermartingala, entonces*

$$\inf_{\omega\in\Omega_s} \limsup_{n\to\infty} \mathcal{T}_n(\omega) \leq \mathcal{T}(s) \tag{2.18}$$

para todo $s \in \mathbb{S}$.

Demostración: Es suficiente demostrar que si $r \in \mathbb{R}$ y $\mathcal{T}(s) < r$, entonces existe $\omega \in \Omega_s$ tal que $\limsup_{n\to\infty} \mathcal{T}(\omega_n) \leq r$. La existencia de tal ω se deduce por inducción una vez que mostramos la existencia de un $y \in \mathcal{Y}$ tal que $\mathcal{T}(sy) < r$. Pero esto se deduce de la relación $\inf f \leq \mathbb{E}(f)$ y la Proposición 2.14:

$$\inf_{y\in\mathcal{Y}} \mathcal{T}(sy) \leq \mathbb{E}(\mathcal{T}(s\cdot)) \leq \mathcal{T}(s).$$

$\Box$

Lema 2.16. *Se cumplen las siguientes afirmaciones para $\mathbf{T}$ y $\mathbf{L}$:*

1. *Los conjuntos $\mathbf{T}$ y $\mathbf{L}$ son conos convexos.*
2. *Si $\mathcal{T}^\alpha \in \mathbf{T}$ $\forall$ α en un conjunto no vacío A, entonces $\inf_{\alpha\in A} \mathcal{T}^\alpha \in \mathbf{T}$.*
3. *Si $\mathcal{T}^1 \leq \mathcal{T}^2 \leq \cdots \in \mathbf{T}$ y todas las $\mathcal{T}^k$ están acotadas inferiormente, entonces $\lim_{k\to\infty} \mathcal{T}_k \in \mathbf{T}$.*
4. *Si $\mathcal{T}^1, \mathcal{T}^2, \ldots$ son supermartingalas no negativas, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{T}^k$ es una supermartingala no negativa.*

Demostración:

1. Si $c_1, c_2 \in [0,\infty)$ y $\mathcal{T}^1, \mathcal{T}^2 \in \mathbf{T}$, entonces
$$\mathbf{E}\left(c_1\mathcal{T}^1(s\cdot) + c_2\mathcal{T}^2(s\cdot)\right) \leq c_1\mathbf{E}(\mathcal{T}^1(s\cdot)) + c_2\mathbf{E}(\mathcal{T}^2(s\cdot))$$
por las propiedades 1 y 2 de las expectativas superiores, y por lo tanto, $c_1\mathcal{T}^1 + c_2\mathcal{T}^2 \in \mathbf{T}$ por la Proposición 2.14. Así que $\mathbf{T}$ es un cono convexo. Dado que la propiedad de tener un límite se preserva por combinación convexa, $\mathbf{L}$ también es un cono convexo.

2. Por la propiedad 3 de las expectativas superiores y la Proposición 2.14,

$$\mathbf{E}\left(\inf_{\alpha \in A} \mathcal{T}^{\alpha}(s\cdot)\right) \leq \inf_{\alpha \in A} \mathbf{E}(\mathcal{T}^{\alpha}(s\cdot)) \leq \inf_{\alpha \in A} \mathcal{T}^{\alpha}(s)$$

   para todo $s \in \mathbb{S}$. Por lo tanto, $\inf_{\alpha \in A} \mathcal{T}^{\alpha}$ es una supermartingala por la Proposición 3.7.

3. Por la propiedad 5 de las expectativas superiores y la Proposición 2.14,

$$\mathbf{E}\left(\lim_{k \to \infty} \mathcal{T}^{k}(s\cdot)\right) = \lim_{k \to \infty} \mathbf{E}(\mathcal{T}^{k}(s\cdot)) \leq \lim_{k \to \infty} \mathcal{T}^{k}(s)$$

   para todo $s \in \mathbb{S}$. Por lo tanto, $\lim_{k \to \infty} \mathcal{T}^{k}$ es una supermartingala por la Proposición 2.14.

4. La afirmación 4 sigue de las afirmaciones 1 y 3.

□

Al inicio del capítulo habiamos definido la esperanza superior de una variable en el contexto de un protocolo específico de un juego de horizonte finito. Damos ahora una definicón más general que aplica a los protocolos mas abstractos:

Definición 2.17. *Dada una variable X, definimos*

$$\overline{\mathbb{E}}(X) \colon = \inf \left\{ \mathcal{T}_0 \mid \mathcal{T} \in \mathbf{T}, \inf \mathcal{T} > -\infty, \liminf_{n \to \infty} \mathcal{T}_n \geq X \right\}, \tag{2.19}$$

y llamamos a $\overline{\mathbb{E}}(X)$ la esperanza superior de X. Más generalmente, dada una variable X y una situación $s \in \mathcal{S}$, definimos

$$\overline{\mathbb{E}}_s(X) := \inf \left\{ \mathcal{T}(s) \mid \mathcal{T} \in \mathbf{T}, \inf \mathcal{T} > -\infty, \ y \ \forall\, \omega \in \Omega_s \colon \liminf_{n \to \infty} \mathcal{T}_n(\omega) \geq X(\omega) \right\}, \tag{2.20}$$

y llamamos a $\overline{\mathbb{E}}_s(X)$ la esperanza superior de X en s.

A continuación damos algunas propiedades más antes de finalizar el capítulo:

Proposición 2.18. *Para cada variable X, $\overline{\mathbb{E}}_0(X), \overline{\mathbb{E}}_1(X), \ldots$ es una supermartingala.*

<u>Demostración:</u> Escribimos $\mathcal{S}$ para el proceso $\overline{\mathbb{E}}_0(X), \overline{\mathbb{E}}_1(X), \ldots$. Supongamos que $\mathcal{S}(s) < r$. Por (2.19), existe una supermartingala acotada inferiormente $\mathcal{T}$ tal que $\mathcal{T}(s) < r$ y $\liminf_n \mathcal{T}_n \geq X$. Nuevamente, utilizando (2.19), pero con sy en lugar de s, vemos que $\mathcal{S}(sy) \leq \mathcal{T}(sy)$ para todo $y \in \mathcal{Y}$. Entonces, por la propiedad 3 de las expectativas superiores y la Proposición 3.7,

$$\overline{\mathbf{E}}(\mathcal{S}(s\cdot)) \leq \overline{\mathbf{E}}(\mathcal{T}(s\cdot)) \leq \mathcal{T}(s) < r.$$

Dado que esto se cumple para todo $r > \mathcal{S}(s)$, concluimos que

$$\overline{\mathbf{E}}(\mathcal{S}(s\cdot)) \leq \mathcal{S}(s),$$

y por lo tanto, por la Proposición 3.7, $\mathcal{S}$ es una supermartingala. $\square$

El siguiente teorema es una versión de la teoría de juegos de la Ley de Levy

Teorema 2.19. *Si X es una variable acotada inferiormente en el Protocolo 2.12, entonces*

$$\liminf_{n\to\infty} \overline{\mathbb{E}}_n(X) \geq X \quad c.s. \tag{2.21}$$

<u>Demostración:</u>

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que X está acotada inferiormente por una constante positiva c. (Por la Declaración 1 de la Proposición 2.9, agregar una constante a X agregará la misma constante a $\liminf_n \overline{\mathbb{E}}_n(X)$.) Por la definición de esperanza superior, podemos elegir para cada situación $s \in \mathbb{S}$ una supermartingala $\mathcal{U}^s$ tal que

$$\mathcal{U}^s(s) < \overline{\mathbb{E}}_s(X) + 2^{-|s|} \tag{2.22}$$

y

$$\liminf_{n\to\infty} \mathcal{U}^s_n(\omega) \geq X(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega_s. \tag{2.23}$$

Podemos elegir $\mathcal{U}^s$ de manera que $\mathcal{U}^s(t) = \mathcal{U}^s(s)$ para situaciones t que no siguen a s, y se deduce de (2.23) que $\mathcal{U}_s$ está acotada inferiormente por c.

Sea $[a_k, b_k], k \in \mathbb{N}$, una enumeración de todos los intervalos con $0 < a_k < b_k < \infty$ y ambos extremos racionales. Para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos una estrategia ψ^k y su supermartingala $\mathcal{T}^k$ estableciendo $\psi^{k,\text{Inicial}} := 1$ y definiendo $\psi^{k,\text{f}}$ mediante el siguiente algoritmo, que se inicia en (**1**).

(**1**) No se apuesta en la ronda actual y se continua sin apostar hasta que se alcanza por primera vez una ronda n tal que

$$n > \max(k, -\log(b_k - a_k)) \quad \text{y} \quad \overline{\mathbb{E}}_n(X) < a_k, \tag{2.24}$$

donde log es el logaritmo binario. Luego, ir al modo (**2**) . Si nunca se alcanza una ronda n que satisfaga (2.24), simplemente se continua sin apostar.

(**2**) Sea n la ronda en la que se entra en este modo, se apuesta siguiendo $\mathcal{U}^{\omega^n}$ (siendo ω el camino en Ω que se está tomando), escalado a su capital actual $\mathcal{K}_n$ (es decir, multiplicando el movimiento de $\mathcal{U}^{\omega^n}$ por $\mathcal{K}_n/\mathcal{U}^{\omega^n}_n$). Se continua siguiendo esta versión escalada de $\mathcal{U}^{\omega^n}$ en las rondas posteriores i, siempre que $\mathcal{U}^{\omega^n}_i \leq b_k$. (Observamos que $\mathcal{U}^{\omega^n}_n \leq b_k$ por (2.22) y (2.24).) Si se llega a una ronda i tal que $\mathcal{U}^{\omega^n}_i > b_k$, se vuelve al modo (**1**).

La supermartingala $\mathcal{T}^k$ es positiva, porque todas las $\mathcal{U}^s$ son positivas. Además, $\mathcal{T}^k$ tiende a infinito siempre que

$$\liminf_{n\to\infty} \overline{\mathbb{E}}_n(X) < a_k < b_k < X. \tag{2.25}$$

De hecho, por (2.24), abandona cada período "(**1**)" que ingresa a lo largo de dicho camino, y por (2.23), abandona cada período "(**2**)" en el que entra; así, ψ_k pasa por un número infinito de períodos "(**2**)" en dicho camino. Durante cada período "(**2**)", la supermartingala positiva $\mathcal{U}^{\omega^n}$, donde n es la ronda inicial del período y ω es el camino tomado, aumenta de $\mathcal{U}_n^{\omega^n}$, que satisface

$$\mathcal{U}_n^{\omega^n} < \overline{\mathbb{E}}_n(X)(\omega) + 2^{-n} < a_k + 2^{-n} < b_k,$$

a más de b_k. Esto implica que $\mathcal{U}^{\omega^n}$ y, por lo tanto también $\mathcal{T}_k$, se multiplica por más de

$$\frac{b_k}{a_k + 2^{-n}},$$

lo que es mayor que 1 y crece con n.

Ahora definimos una estrategia ψ por $\psi := \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \psi^k$. Esto significa que

$$\psi^{\text{Inicial}} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \psi^{k,\text{Inicial}} = 1$$

y

$$\psi_n^{\text{f}} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \psi_n^{k,\text{f}} \tag{2.26}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Para ver que la suma infinita en el lado derecho de (2.26) está bien definida, observamos que la variable $\psi_n^{k,\text{f}}(\omega)$ es una constante positiva cuando $k \geq n$ (por (2.24), ψ^k no apuesta en este caso); así, solo un número finito de las variables en la suma infinita pueden tomar valores negativos, y todos están acotados inferiormente.

Designamos la supermartingala producida por ψ como $\mathcal{T}$. Entonces $\mathcal{T}_0 = 1$, $\mathcal{T} > 0$ (porque el capital para cada ψ^k siempre es positivo), y $\mathcal{T}_n \to \infty$ cuando

$$\liminf_{n \to \infty} \overline{\mathbb{E}}_n(X) < X,$$

porque en este caso existe al menos un $k \in \mathbb{N}$ para el cual (2.25) se cumple y, por lo tanto, $\mathcal{T}_k^n$ tiende a infinito. Esto prueba (2.21).

□

Concluimos el capítulo relacionando el concepto de expectativa superior directamente con el de esperanza superior.

Proposición 2.20. *La esperanza superior* $\overline{\mathbb{E}}\colon X \in \mathbb{R}^{\Omega} \longmapsto \overline{\mathbb{E}}(X) \in \overline{\mathbb{R}}$ *es una expectativa superior en* Ω.

Demostración: Debido a que

- (i) $\liminf_n(\mathcal{T}_n^1 + \mathcal{T}_n^2) \geq \liminf_n \mathcal{T}_n^1 + \liminf_n \mathcal{T}_n^2$ y $\liminf_n c\mathcal{T}_n = c \liminf_n \mathcal{T}_n$ para cualquier proceso acotado inferiormente $\mathcal{T}^1, \mathcal{T}^2, \mathcal{T}$ y cualquier $c \geq 0$;

- (ii) $\mathbf{T}$ es un cono convexo,

se deduce directamente de (2.19) que $\mathbb{E}$ satisface las Propiedades 1 y 2. La Propiedad 3 también se deduce directamente de (2.19). La Propiedad 4 se deduce del Lema 2.15.

Para establecer la Propiedad 5, consideramos $X_1 \leq X_2 \leq \cdots \in [0, \infty]^\Omega$ y definimos $X := \lim_{k\to\infty} X_k = \sup_k X_k$. La Propiedad 3 implica que $\mathbb{E}(X) \geq \lim_{k\to\infty} \mathbb{E}(X_k)$. Así que solo necesitamos mostrar que $\mathbb{E}(X) \leq \lim_{k\to\infty} \mathbb{E}(X_k)$. Por la Proposición 2.18 y el Teorema 2.19, para cada X_k, el proceso $\mathcal{T}^k(s) := \overline{\mathbb{E}}_s(X_k)$ es una supermartingala no negativa tal que $\liminf_n \mathcal{T}_n^k \geq X_k$ casi seguramente. La secuencia $\mathcal{T}^k$ es creciente, $\mathcal{T}^1 \leq \mathcal{T}^2 \leq \cdots$, por lo que el límite $\mathcal{T} := \lim_{k\to\infty} \mathcal{T}^k = \sup_k \mathcal{T}^k$ existe y es una supermartingala no negativa (Declaración 3 del Lema 2.16) tal que $\mathcal{T}_0 = \lim_{k\to\infty} \mathbb{E}(X_k)$ y $\liminf_n \mathcal{T}_n \geq X$ casi seguramente. Podemos eliminar el "casi seguramente" añadiendo $\varepsilon\mathcal{S}$ a $\mathcal{T}$, donde $\varepsilon > 0$ es arbitrariamente pequeño y $\mathcal{S}$ es una supermartingala no negativa que comienza en $\mathcal{S}_0 < \infty$ y satisface $\lim_n \mathcal{S}_n(\omega) = \infty$ para todo $\omega \in \Omega$ que viole $\liminf_n \mathcal{T}_n(\omega) \geq X(\omega)$.

$\square$

3 CAPÍTULO 3: Relación con las Probabilidades basadas en la teoría de la medida

Para este capítulo tomamos como referencia el capítulo 9 de el libro "Game-Theoretic foundations for probability and finance", referenciado en la bibliografía.

El objetivo de este capitulo es relacionar la teoría de probabilidades que hemos desarrollado, a la que nos referiremos como "Probabilidades de la teoría de juegos", con la teoría de probabilidades de la medida. Sea ahora $\mathcal{P}(\mathcal{Y})$ el conjunto de todas las medidas de probabilidad en el espacio medible $(\mathcal{Y}, \mathcal{F})$, y $P(f)$ es la esperanza de f respecto a P.

3.1 Relación entre Esperanzas en la teoría de juegos y en la teoría de la medida

Consideramos ahora el siguiente protocolo, donde requerimos que las $f_n \in \overline{\mathbb{R}}^{\mathcal{Y}}$ y que $P(f)$ exista.

Protocolo 3.1.
Parámetro: El espacio medible $(\mathcal{Y}, \mathcal{F})$.
  El escéptico anuncia $\mathcal{K}_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.
  Para $n = 1, 2, \ldots$:
    El Pronosticador anuncia $P_n \in \mathcal{P}(\mathcal{Y})$.
    El Escéptico anuncia $f_n \in \mathbb{R}^{\mathcal{Y}}$ tal que $P_n(f_n) \leq \mathcal{K}_{n-1}$.
    La Realidad anuncia $y_n \in \mathcal{Y}$.
    $\mathcal{K}_n := f_n(y_n)$.

Definición 3.2. *Consideramos una estrategia ϕ para el Pronosticador en el protocolo 3.1, y sea $\phi_n(y_1 y_2 ...)$ la estrategia que recomienda P_n $\forall n \in \mathbb{N}$ cuando los movimientos de la Realidad son $y_1, ..., y_{n-1}$. Decimos que (ϕ_n) es un sistema pronosticador de probabilidades si $\phi_n(\omega)(E)$ es una función medible respecto a ω $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\forall E \subseteq \mathcal{Y}$.*

A continuación enunciamos un teorema de la la teoría de probabilidades de la medida que nos es relevante

Teorema 3.3. ***(De Ionescu Tulcea)*** [1]
Sean $(\Omega_n, \mathcal{F}_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, espacios medibles arbitrarios y

$$\Omega = \prod_n \Omega_n, \ \mathcal{F} = \bigotimes_n \mathcal{F}_n.$$

Supongamos que se da una medida de probabilidad P_1 en $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ y que, para cada conjunto $(\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$, $n \geq 1$, se dan medidas de probabilidad $P(\omega_1, \ldots, \omega_n; \ldots)$ en $(\Omega_{n+1}, \mathcal{F}_{n+1})$. Supongamos que, para cada $B \in \mathcal{F}_{n+1}$,

[1] El teorema y su demostración se obtienen de "Probability, 2e. sección II.9.", referenciado en la bibliografía

las funciones $P(\omega_1, \dots, \omega_n; B)$ *son funciones medibles en* $\mathcal{F}^n = \mathcal{F}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_n$ *de* $(\omega_1, \dots, \omega_n)$. *Sea, para* $A_i \in \mathcal{F}_i$, $n \geq 1$,

$$P(A_1 \times \cdots \times A_n) = \int_{A_1} P_1(d\omega_1) \int_{A_2} P(\omega_1; d\omega_2) \cdots \int_{A_n} P(\omega_1, \dots, \omega_{n-1}; d\omega_n).$$

Entonces existe una medida de probabilidad única P *sobre* $(\Omega, \mathcal{F})$ *tal que*

$$P(\omega : \omega_1 \in A_1, \dots, \omega_n \in A_n) = P(A_1 \times \cdots \times A_n)$$

para todo $n \geq 1$, *y existe una secuencia aleatoria* $X = (X_1(\omega), X_2(\omega), \dots)$ *tal que*

$$P(\omega : X_1(\omega) \in A_1, \dots, X_n(\omega) \in A_n) = P(A_1 \times \cdots \times A_n),$$

donde $A_i \in \mathcal{F}_i$.

Demostración: El primer paso es establecer que para cada $n \geq 1$, la función P_n definida sobre los rectángulos $A_1 \times \cdots \times A_n$ puede extenderse a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Para cada $n \geq 2$ y $B \in \mathcal{F}_n$, definimos

$$P_n(B) = \int_{\Omega_1} P_1(d\omega_1) \int_{\Omega_2} P(\omega_1; d\omega_2) \cdots \int_{\Omega_{n-1}} P(\omega_1, \dots, \omega_{n-2}; d\omega_{n-1})$$
$$\times \int_{\Omega_n} I_B(\omega_1, \dots, \omega_n) P(\omega_1, \dots, \omega_{n-1}; d\omega_n).$$

Además, cuando $n = 2$, se puede ver que P_2 es una medida. En consecuencia, se establece fácilmente por inducción que P_n es una medida para todo $n \geq 2$.

Ahora, para cada conjunto cilíndrico

$$J_n(B) = \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \dots, \omega_n) \in B\}, \quad B \in \mathcal{F}_n = \mathcal{F}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_n,$$

definimos la función de conjunto P por

$$P(J_n(B)) = P_n(B).$$

Se deduce que la función de conjunto P dada para conjuntos cilíndricos, y de manera obvia sobre el álgebra que contiene todos los conjuntos cilíndricos, es una medida finitamente aditiva en este álgebra. Resta verificar su aditividad numerable y aplicar el teorema de Carathéodory.

Sea $\{\widehat{B}_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de conjuntos cilíndricos

$$\widehat{B}_n = \{\omega : (\omega_1, \dots, \omega_n) \in B_n\},$$

que decrecen hasta el conjunto vacío $\emptyset$, pero satisfacen

$$\lim_{n\to\infty} P(\widehat{B}_n) > 0.$$

Para $n > 1$, tenemos que

$$P(\widehat{B}_n) = \int_{\Omega_1} f_n^{(1)}(\omega_1) P_1(d\omega_1),$$

donde

$$f_n^{(1)}(\omega_1) = \int_{\Omega_2} P(\omega_1; d\omega_2) \cdots \int_{\Omega_n} \mathbf{1}_{B_n}(\omega_1, \ldots, \omega_n) P(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}; d\omega_n).$$

Dado que $\widehat{B}_{n+1} \subseteq \widehat{B}_n$, tenemos $B_{n+1} \subseteq B_n \times \Omega_{n+1}$ y, por lo tanto,

$$I_{B_{n+1}}(\omega_1, \ldots, \omega_{n+1}) \leq \mathbf{1}_{B_n}(\omega_1, \ldots, \omega_n) \mathbf{1}_{\Omega_{n+1}}(\omega_{n+1}).$$

Por lo tanto, la sucesión $\{f_n^{(1)}(\omega_1)\}_{n \geq 1}$ decrece. Sea $f^{(1)}(\omega_1) = \lim_n f_n^{(1)}(\omega_1)$. Por el teorema de convergencia dominada,

$$\lim_n P(\widehat{B}_n) = \lim_n \int_{\Omega_1} f_n^{(1)}(\omega_1) P_1(d\omega_1) = \int_{\Omega_1} f^{(1)}(\omega_1) P_1(d\omega_1).$$

Por hipótesis, $\lim_n P(\widehat{B}_n) > 0$. Se deduce que existe $\omega_1^0 \in B_1$ tal que $f^{(1)}(\omega_1^0) > 0$, ya que si $\omega_1 \notin B_1$, entonces $f_n^{(1)}(\omega_1) = 0$ para $n \geq 1$.

Además, para $n > 2$,

$$f_n^{(1)}(\omega_1^0) = \int_{\Omega_2} f_n^{(2)}(\omega_2) P(\omega_1^0; d\omega_2),$$

donde

$$f_n^{(2)}(\omega_2) = \int_{\Omega_3} P(\omega_1^0, \omega_2; d\omega_3) \cdots \int_{\Omega_n} \mathbf{1}_{B_n}(\omega_1^0, \omega_2, \ldots, \omega_n) P(\omega_1^0, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}; d\omega_n).$$

Podemos establecer, al igual que para $\{f_n^{(1)}(\omega_1)\}$, que $\{f_n^{(2)}(\omega_2)\}$ es decreciente. Sea $f^{(2)}(\omega_2) = \lim_{n\to\infty} f_n^{(2)}(\omega_2)$. Entonces, se deduce que

$$0 < f^{(1)}(\omega_1^0) = \int_{\Omega_2} f^{(2)}(\omega_2) P(\omega_1^0; d\omega_2),$$

y existe un punto $\omega_2^0 \in \Omega_2$ tal que $f^{(2)}(\omega_2^0) > 0$. Entonces $(\omega_1^0, \omega_2^0) \in B_2$. Continuando este proceso, encontramos un punto $(\omega_1^0, \ldots, \omega_n^0) \in B_n$ para cada n. En consecuencia,

$$(\omega_1^0, \ldots, \omega_n^0, \ldots) \in \bigcap \widehat{B}_n,$$

pero por hipótesis tenemos $\bigcap \widehat{B}_n = \emptyset$. Esta contradicción muestra que $\lim_n P(\widehat{B}_n) = 0$.

Así, hemos demostrado la parte del teorema sobre la existencia de la medida de probabilidad P. La otra parte se sigue inmediatamente considerando $X_n(\omega) = \omega_n$, $n \geq 1$. $\square$

Por el teorema de Ionescu Tulcea , la única medida de probabilidad P_ϕ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$ y para toda función medible y acotada X en $\mathcal{Y}^\infty$ que depende de $\omega = y_1 y_2 ...$ únicamente en $y_1 ... y_2$ es:

$$P_\phi(X) = \int \cdots \int X(\omega)\, \phi_n(\omega)\, (dy_n) \cdots \phi_1(\omega)\, (dy_1).$$

Nos referiremos a P_ϕ como la medida de Ionescu Tulcea. Fijando para el Pronosticador un sistema pronosticador de probabilidades ϕ particular, y retirandolo del protocolo 3.1, obtenemos la especialización siguiente:

Protocolo 3.4.
Parámetros: Espacio medible $(\mathcal{Y}, \mathcal{F})$, Sistema pronosticador de probabilidades ϕ.

El escéptico anuncia $\mathcal{K}_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.
para $n = 1, 2, \ldots$:
    El Escéptico anuncia $f_n \in \mathbb{R}^{\mathcal{Y}}$ tal que $\phi_n(y_1, y_2, ...)(f_n) \leq \mathcal{K}_{n-1}$.
    La Realidad anuncia $y_n \in \mathcal{Y}$.
    $\mathcal{K}_n := f_n(y_n)$.

El siguiente teorema relaciona la esperanza desde un punto de vista de la teoría de la medida con la esperanza desde el punto de vista de la teoría de juegos:

Teorema 3.5. (Teorema de Ville) *En el protocolo 3.4, toda función acotada y medible X en $\mathcal{Y}^\infty$ tiene esperanza en el sentido de la teoría de juegos $\mathbb{E}(X)$, y $\mathbb{E}(X) = P_\phi(X)$*

Demostración: Nuestro objetivo es demostrar que

$$\inf\{V_0 \mid \liminf_{n\to\infty} V_n \geq X\} \leq P_\phi(X) \tag{3.1}$$

y

$$P_\phi(X) \leq \inf\{V_0 \mid \liminf_{n\to\infty} V_n \geq X\}, \tag{3.2}$$

donde V denota supermartingalas en el sentido de la teoría de juegos en el protocolo 3.4.

Consideraremos supermartingalas V_n en el sentido de la teoría de la medida en el espacio de probabilidad filtrado $(\mathcal{Y}_\infty, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}, P_\phi)$, donde $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es la filtración canónica: $\mathcal{F}_n$ es la menor σ-álgebra que hace que la aplicación $\omega \in \mathcal{Y}_\infty \mapsto \omega_n$ sea medible.

Comencemos comprobando (3.1). Según la ley de cero-uno de la teoría de la medida de Paul Lévy [2], existe una martingala en el sentido de la teoría de la

[2] Ver "Étude critique de la notion de collectif", Teorema VII.3, referenciado en la bibliografía

medida V que comienza en $V_0 = P_\phi(X)$ y converge a X casi seguramente con respecto a P_ϕ. Dado que V_n es una martingala en el sentido de la teoría de la medida,

$$\phi_n(y_1, y_2, \dots)(V_n) = V_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.3}$$

casi seguramente con respecto a P_ϕ. Nuestro objetivo ahora es tomar V para que cumpla siempre (3.3), no solo casi seguramente con respecto a P_ϕ, y por lo tanto califique como una martingala en el sentido de la teoría de juegos. Lo hacemos por inducción sobre n: V_0 es constante, y suponemos que $V_i, i = 1, ..., n-1$ cumple siempre (3.3), en vez casi seguramente con respecto a P_ϕ. Redefinimos V_n como

$$V_n := V_n \mathbf{1}_E + V_{n-1}\mathbf{1}_E,$$

donde $E \in \mathcal{F}_{n-1}$ es el evento $\phi_n(y_1, y_2, \dots)(V_n) \neq V_{n-1}$. Debido a que solo hemos cambiado V en un conjunto de probabilidad 0, sigue convergiendo a X casi seguramente respecto a P_ϕ. Ahora utilizamos el hecho de que para cualquier evento nulo respecto a P_ϕ, existe una martingala en el sentido de la teoría de juegos medible no negativa V' que comienza desde 1 y $\lim_{n\to\infty} V_n = \infty$ en ese evento [3]. Elegimos tal V' para el evento nulo respecto a P_ϕ en el que V no converge a X. Luego, $V + \epsilon V'$, donde $\epsilon > 0$, es una martingala medible en el sentido de la teoría de juegos que comienza en $P_\phi + \epsilon$ y satisface

$$\liminf_n (V + \epsilon V')_n \geq X.$$

Cuando $\epsilon \to 0$ se establece (3.1).

Demostramos (3.2) por reducción al absurdo. Supongamos que se viola (3.2) y fijamos una supermartingala en el sentido de la teoría de juegos V tal que $V_0 < P_\phi(X)$ y V subcubre X en todas partes: $\liminf_{n\to\infty} V_n \geq X$. Según el argumento en el párrafo anterior (aplicado a $-X$ en lugar de X), existe una martingala medible en el sentido de la teoría de juegos V' tal que $V_0 < V'_0$ y V' subcubre X en todas partes, de modo que tenemos

$$\limsup_{n\to\infty} V'_n(\omega) \leq X(\omega) \leq \liminf_{n\to\infty} V_n(\omega)$$

para todo ω. Esto lleva a una contradicción. Sea $\epsilon > 0$ tal que $V'_0 - V_0 > \epsilon$. Elegimos y_1 tal que $V'(y_1) - V(y_1) > \epsilon$. Dado y_1, elegimos y_2 tal que $V'(y_1y_2) - V(y_1y_2) > \epsilon$. Continuamos iterando obteniendo una secuencia infinita ω tal que

$$V'_n(\omega) - V_n(\omega) > \epsilon$$

para todo n. Por lo tanto, es imposible que V subcubre X en ω y V' subcubre X en ω.

$\square$

[3]Para la demostración de la existencia de tal martingala, ver ”Étude critique de la notion de collectif”, Teorema IV.1, referenciado en la bibliografía

3.2 Relación entre Esperanza Superior y la teoría de la medida

El objetivo ahora es relacionar la esperanza superior con la teoría de probabilidades de la medida.

Definición 3.6. *Sea $\mathcal{Y}$ un conjunto finito, sea P una medida de probabilidad, y $\overline{\mathbf{E}}$ una expectativa superior. Diremos que P afina $\overline{\mathbf{E}}$ en $\mathcal{Y}$ si*

$$P(f) \leq \overline{\mathbf{E}}(f) \ \ \forall f \in \overline{\mathbb{R}}^{\mathcal{Y}}$$

y lo denotamos $P \preceq \overline{\mathbf{E}}$.

Consideramos ahora $\overline{\mathcal{E}}(\mathcal{Y})$ el conjunto de todas las expectativas superiores en $\mathcal{Y}$. Para poder dar nuestro resultado que relacione la esperanza superior de una variable con la teoría de la medida, planteamos dos nuevos protocolos, con la diferencia de que uno plantea un juego adversativo mientras el otro plantea uno cooperativo:

Protocolo 3.7.
Parámetros: Conjunto finito no vacío $\mathcal{Y}$, espacio metrizable compacto Θ, función semicontínua superiormente $\overline{\mathbf{E}} : \theta \in \Theta \to \overline{\mathbf{E}}_\theta \in \overline{\mathcal{E}}(\mathcal{Y})$
El escéptico anuncia $\mathcal{K}_0 \in \mathbb{R}$.
Para $n = 1, 2, \ldots$:
El Pronosticador anuncia $\theta_n \in \Theta$.
El Escéptico anuncia $f_n \in \overline{\mathbb{R}}^{\mathcal{Y}}$ tal que $\overline{\mathbf{E}}_{\theta_n}(f_n) \leq \mathcal{K}_{n-1}$.
La Realidad anuncia $y_n \in \mathcal{Y}$.
El Escéptico anuncia $\mathcal{K}_n \leq f_n(y_n)$.

Nuestro espacio muestral es $\Omega := (\Theta \times \mathcal{Y})^\infty$ y nuestro espacio de situaciones es $\mathcal{S} := (\Theta \times \mathcal{Y})^*$, donde * denota el conjunto de secuencias finitas. Este protocolo, como todos los que hemos tratado hasta el momento, define un juego adversarial entre el Escéptico y sus oponentes, pero podemos considerar también un protocolo en el que retiramos al Escéptico. Definimos un nuevo protocolo en que los jugadores que intervienen son la Realidad y el Pronosticador, pero en vez del Escéptico presentamos un nuevo jugador, el Pronosticador de Probabilidades.

Protocolo 3.8.
Parámetros: Conjunto finito no vacío $\mathcal{Y}$, espacio metrizable compacto Θ, función semicontínua superiormente $\overline{\mathbf{E}} : \theta \in \Theta \to \overline{\mathbf{E}}_\theta \in \overline{\mathcal{E}}(\mathcal{Y})$
El escéptico anuncia $\mathcal{K}_0 \in \mathbb{R}$.
Para $n = 1, 2, \ldots$:
El Pronosticador anuncia $\theta_n \in \Theta$.
El Pronosticador de Probabilidades anuncia $P_n \in \mathcal{P}(\mathcal{Y})$ tal que $P_n \preceq \overline{\mathbf{E}}_{\theta_n}$.
La Realidad anuncia $y_n \in \mathcal{Y}$.

Este protocolo define un juego cooperativo y simplemente muestra la idea de que tras cada predicción del Pronosticador, el Pronosticador de Probabilidades afina la expectativa superior dada por el Pronosticador a una medida de Probabilidad P. A una estrategia conjunta para ambos pronosticadores la llamaremos *sistema pronosticador conjunto.* Si ϕ es un sistema pronosticador conjunto, la recomendación $\phi_n(y_1y_2...)$ para (θ_n, P_n) es un elemento de

$$\Psi := \{(\theta, P) \in \Theta \times \mathcal{P}(\mathcal{Y}) \mid P \preceq \overline{\mathbf{E}}_\theta\}.$$

Por lo que un sistema pronosticador conjunto se puede expresar como un par $\phi_n(\alpha) = \big(\phi_n^F(\alpha), \phi_n^P(\alpha)\big)$, $\alpha \in \mathcal{Y}^\infty$, donde ϕ^F es una estrategia para el pronosticador y ϕ^P es una estrategia para el Pronosticador de Probabilidades. De hecho, notamos que ϕ^P es un sistema pronosticador de probabilidades, y denotaremos P_{ϕ^P} a su correspondiente medida de probabilidades de Ionescu Tulcea en $\mathcal{Y}^\infty$. Para $\alpha \in \mathcal{Y}^\infty$ denotamos

$$\alpha_{\phi^F} := \big(\phi_1^F(\alpha), y_1, \phi_2^F(\alpha), y_2, \dots\big) \in \Omega.$$

Recordamos que para una funcion $f : \mathcal{Y}^\infty \to \overline{\mathbb{R}}$, definimos su integral superior como $\overline{\int} f\, d\mu = \inf\big\{\int g\, d\mu \mid g \text{ es medible, } g \geq f \text{ en } \mathcal{Y}^\infty\big\}$. Escribimos $\overline{P}_{\phi^P}(W)$ para la integral superior de W: $\mathcal{Y}^\infty \to \overline{\mathbb{R}}$ respecto a P_{ϕ^P}:

$$\overline{P}_{\phi^P}(W) := \overline{\int} \cdots \overline{\int} W(\omega)\, \phi_n(\omega)\, (dy_n) \cdots \phi_1(\omega)\, (dy_1),\ \omega \in \mathcal{Y}^\infty.$$

Dado un sistema pronosticador conjunto ϕ y una variable extendida $X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, denotamos

$$\mathbb{E}_\phi(X) := \overline{P}_{\phi^P}\big(X(\cdot, \phi^F)\big),$$

donde $\big(X(\cdot, \phi^F)\big) : \alpha \in \mathcal{Y}^\infty \to \big(X(\alpha, \phi^F)\big) \in \overline{\mathbb{R}}$. Aquí ϕ^F reduce X a una función dependiente únicamente de los movimientos de la Realidad, y ϕ^P transforma ϕ^F a una medida de probabilidad para los movimientos de la Realidad.

Definición 3.9. *Definimos*

$$\mathbb{E}^{mesu}(X) := \sup_{\phi} \mathbb{E}^\phi(X) = \sup_{\phi = (\phi^F, \phi^P)} \overline{P}_{\phi^P}\big(X(\cdot, \phi^F)\big)$$

como el mayor valor de la esperanza de la teoría de medidas que se puede atribuir a X mediante estrategias consistentes para ambos pronosticadores.
También, dado un evento E en el protocolo 3.7, escribimos

$$\mathbb{P}^{mesu}(E) := \mathbb{E}^{mesu}(\boldsymbol{1}_E)$$

El siguiente teorema da el resultado más importante que nos permite relacionar las esperanzas superiores de la teoría de juegos con la esperanza en la teoría de la medida.

Teorema 3.10. *Si X es una variable global Borel acotada en el protocolo 3.7, entonces* $\overline{\mathbb{E}}(X) = \mathbb{E}^{mesu}(X)$

Para la demostración necesitaremos una serie de resultados previos:

Definición 3.11. *Sea ϕ un sistema pronosticador conjunto. Una ϕ-supermartingala es una función $V : \mathcal{Y}^* \to \overline{\mathbb{R}}$ que satisface*

$$V_{n-1}(\alpha) \geq \phi_n^P(\alpha)\big(V(\alpha^{n-1}\cdot)\big) \tag{3.4}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in \mathcal{Y}^\infty$ (con la convención usual $0 \cdot (\pm\infty) := 0$). Decimos que V es una ϕ-martingala si (3.4) se cumple con igualdad.

Si $\mathcal{T}$ es una supermartingala, la función $\mathcal{T}^\phi : \mathcal{Y}^* \to \overline{\mathbb{R}}$ definida por

$$\mathcal{T}_n^\phi(\alpha) := \mathcal{T}_n(\alpha_\phi), \quad n \in \mathbb{N},\ \alpha \in \mathcal{Y}^\infty,$$

es una ϕ-supermartingala, ya que la definición de supermartingala en el sentido de la teoría de juegos implica que, para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in \mathcal{Y}^\infty$,

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{n-1}^\phi(\alpha) = \mathcal{T}_{n-1}(\alpha_\phi) &\geq \overline{\mathbf{E}}^n_{\phi^F(\alpha)}\big(\mathcal{T}(\alpha_\phi^{n-1}, \phi_n^F(\alpha), \cdot)\big) \\ &= \overline{\mathbf{E}}_{\phi_n^F(\alpha)}\big(\mathcal{T}^\phi(\alpha^{n-1}\cdot)\big) \geq \phi_n^P(\alpha)\big(\mathcal{T}^\phi(\alpha^{n-1}\cdot)\big),\end{aligned}$$

donde usamos la abreviatura $\alpha_k^\phi := (\alpha^\phi)_k$. Dado que $\mathcal{Y}$ es finito, el dominio de $\mathcal{T}^\phi$ es discreto, y no existen problemas de medibilidad.

Enunciamos ahora un lema importante de la teoría de la medida que necesitamos para la demostración:

Lema 3.12. ***(De Fatou)*** [4]
Si (X_n) es una sucesión de funciones integrables no negativas para las cuales

$$\liminf_n \int X_n \, d\mu < \infty,$$

entonces la función X, definida por

$$X(\omega) = \liminf X_n(\omega),$$

es integrable y

$$\int X \, d\mu \leq \liminf \int X_n \, d\mu.$$

Proposición 3.13. *Para cualquier $X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ acotada inferiormente,*

$$\overline{\mathbb{E}}(X) \geq \mathbb{E}^{\text{mesu}}(X).$$

Demostración: Es suficiente probar que $\mathbb{E}^\phi(X) \leq \mathcal{T}_0$ para cualquier sistema pronosticador conjunto ϕ y cualquier supermartingala $\mathcal{T}$ que satisface $\liminf_n \mathcal{T}_n \geq X$.

$$\mathbb{E}^\phi(X) = \overline{P}_{\phi^P}(X(\cdot\phi^F)) \overset{\text{Fatou}}{\leq} \overline{P}_{\phi^P}\left(\liminf_{n\to\infty} \mathcal{T}_n(\cdot\phi^F)\right) = P_{\phi^P}\left(\liminf_{n\to\infty} \mathcal{T}_n^\phi\right)$$

[4] La demostración del Lema de Fatou se puede encontrar en "Measure Theory (1 edición)", referenciado en la bibliografía.

$$\leq \liminf_{n\to\infty} P_{\phi^P}(\mathcal{T}_n^\phi) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathcal{T}_0^\phi = \mathcal{T}_0.$$

Notamos que nuestra aplicación del lema de Fatou es a funciones Borel, ya que $\mathcal{T}_n^\phi(\alpha)$ depende únicamente de los primeros n elementos de α y cada elemento toma solo un número finito de valores.

$\square$

Lema 3.14. *Para cada* $\overline{\mathbf{E}} \in \overline{\mathcal{E}}(\mathcal{Y})$ *y* $f \in \overline{\mathbb{R}}^{\mathcal{Y}}$*, se tiene que* $\overline{\mathbf{E}}(f) = \sup_{P \preceq \overline{\mathbf{E}}} P(f)$*. Además, el supremo se alcanza para todo* f*.*

Demostración: Se obtiene directamente por el teorema de Hahn-Banach [5] $\square$

Ahora podemos pasar a demostrar un caso especial básico del teorema 3.10.

Lema 3.15. *Supongamos que* $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *es una función acotada y semicontinua superiormente. Entonces,* $\mathbb{E}^{mesu}(X) = \overline{\mathbb{E}}(X)$*.*

Demostración: Sea $X_1 \geq X_2 \geq \cdots$ una sucesión decreciente de funciones semicontinuas superiormente uniformemente acotadas, tal que cada $X_j = X_j(\omega)$ depende de ω solo a través de ω^j y $X = \inf_{j\in\mathbb{N}} X_j$. (La existencia de tal sucesión sigue, por ejemplo, del hecho de que cada función semicontinua superiormentte sobre Ω es el límite de una sucesión decreciente de funciones continuas [6]). Para cada $j \in \mathbb{N}$, definimos una supermartingala W^j de la siguiente forma:

$$W_n^j := X_j, \quad n \geq j, \tag{3.5}$$

y luego procedemos de manera inductiva de la siguiente forma: Si W_n^j ya está definida para algún $n \in \{j, j-1, \dots, 1\}$, definimos W_{n-1}^j como

$$W_{n-1}^j(\omega) := \sup_{\theta\in\Theta} \overline{\mathbf{E}}_\theta(W^j(\omega^{n-1}, \theta, \cdot)), \quad \omega \in \Omega. \tag{3.6}$$

De aqui es facilmente deducible que $W_1 \geq W_2 \geq \cdots$.

Pasamos a demostrar ahora que para todo j y n, $W_n^j(\omega)$ es función de ω^n semicontinua superiormente. Por (3.5), obtenemos immediatamente que se cumple para $n \geq j$. Para el resto de casos lo hacemos por inducción, suponemos que es cierto para algún $n \in \{j, j-1, \dots, 2\}$, demostraremos que entonces es cierto para $n-1$. La hipótesis de que $\overline{\mathbf{E}}_\cdot(\cdot)$ es semicontinua superiormente y la finitud de $\mathcal{Y}$ implican que $f(s,\theta) := \overline{\mathbf{E}}_\theta(W_j(s,\theta,\cdot))$ es función de $\theta \in \Theta$ y $s \in (\Theta \times \mathcal{Y})^{n-1}$ semicontinua superiormente, ya que si (s', θ') está suficientemente cerca de (s,θ), $W_j(s',\theta',y)$ excederá a $W_j(s,\theta,y)$ por una cantidad arbitrariamente pequeña para todo $y \in \mathcal{Y}$, por lo que $E_{\theta'}(W_j(s',\theta',\cdot))$ excederá a $E_\theta(W_j(s,\theta,\cdot))$ por una cantidad arbitrariamente pequeña. Ahora, como f es función semicontinua superiormente y s y θ varían sobre espacios compactos metrizables, obtenemos que $\sup_\theta f(s,\theta)$ es semicontinua superiormente, por lo

[5] Ver el libro "Probabilities and Potential. C: Potential Theory for Discrete and Continuous Semigroups", X.31(b), referenciado en la bibliografía.

[6] La demostración de la existencia se puede encontrar en "Engelking, R. (1989). General Topology, 2e. Berlin: Heldermann.", 1.7.15(c), referenciado en la bibliografía.

que $W^j(s) = \sup_{\theta\in\Theta} f(s,\theta)$ es una función de $s \in (\Theta \times \mathcal{Y})^{n-1}$ semicontinua superiormente.

Dado que una función semicontinua superiormente alcanza siempre su supremo sobre un conjunto compacto, se alcanza el supremo en (3.6). Podemos definir ahora, para cada $j \in \mathbb{N}$, un sistema pronosticador conjunto $\phi^j = (\phi^{F,j}, \phi^{P,j})$ de la siguiente forma: Para cada $n = 1, \ldots, j$ y $\alpha \in \mathcal{Y}^\infty$, tomamos $\phi_n^{F,j}(\alpha)$ y $\phi_n^{P,j}(\alpha)$ tal que $\phi_n^{P,j}(\alpha) \preceq \overline{\mathbf{E}}_{\phi_n^{F,j}(\alpha)}$ y

$$\phi_n^{P,j}(\alpha)\left(W^j\left(\alpha^{n-1}_{\phi_{F,j}}, \phi_n^{F,j}(\alpha), \cdot\right)\right) = \overline{\mathbf{E}}_{\phi_n^{F,j}(\alpha)}\left(W^j\left(\alpha^{n-1}_{\phi_{F,j}}, \phi_n^{F,j}(\alpha), \cdot\right)\right)$$

$$= \sup_{\theta\in\Theta} \overline{\mathbf{E}}_\theta\left(W^j\left(\alpha^{n-1}_{\phi^{F,j}}, \theta, \cdot\right)\right) = W^j_{n-1}(\alpha_{\phi^{F,j}}). \tag{3.7}$$

(En particular, $W^j_{n-1}(\alpha_{\phi^{F,j}})$ ya está definida en el momento de definir $\phi_j^n(\alpha)$). La última igualdad se cumple por como hemos definido W^j_{n-1}, la segunda igualdad define $\phi_n^{F,j}(\alpha)$ y su existencia se sigue de que el supremo en (3.6) se alcanza. Finalmente, la primera igualdad define la medida de probabilidad $\phi_n^{P,j}(\alpha)$, y su existencia se sigue del Lema 3.14. Para $n > j$, definimos ϕ_n^j de forma arbitraria, por ejemplo, como la medida de probabilidad uniforme. La propiedad relevante de ϕ^j es que $(W^j)_{\phi^j}$ es una $\phi^{P,j}$-martingala y por lo tanto $P_{\phi^{P,j}}(X_j(\cdot_{\phi^{F,j}})) = W_0^j$.

Dado que el conjunto de todos los sistemas pronosticadores conjuntos es compacto en la topología del producto (esto se sigue de que el conjunto Ψ es cerrado), la sucesión ϕ^j tiene una subssucesión convergente $\phi^{j_k}, k \in \mathbb{N}$; sea $\phi := \lim_{k\to\infty} \phi^{j_k}$. Suponemos, sin pérdida de generalidad, que $j_1 < j_2 < \cdots$. Definimos

$$c := \inf_j W_0^j = \lim_{j\to\infty} W_0^j. \tag{3.8}$$

Fijamos $\epsilon > 0$ arbitrariamente pequeño. Pasamos a demostrar que $\mathbb{E}^\phi(X) \geq c - \epsilon$. Sea $K \in \mathbb{N}$, la restricción de $P_{\phi^{P,j_k}}$ a $\mathcal{Y}^{jK}$ varía como mucho en ϵ a la restricción de P_{ϕ^P} a $\mathcal{Y}^{jK}$ en distancia de variación total desde algún k en adelante; sea la distancia de variación total como máximo ϵ para todo $k \geq K' \geq K$. Sea $k \geq K'$, como $\overline{P}_{\phi^{P,j_k}}(X_{j_k}(\cdot_{\phi^{F,j_k}})) \geq c$, también se cumple que

$$\overline{P}_{\phi^{P,j_k}}(X_{j_k}(\cdot_{\phi^{F,j_k}})) \geq c.$$

Entonces, $\overline{P}_{\phi^P}(X_{jK}(\cdot_{\phi^{F,j_k}})) \geq c - \epsilon$. Por el lema de Fatou (lo podemos aplicar porque la sucesión X_j está uniformemente acotada), obtenemos que

$$\overline{P}_{\phi^P}\left(\limsup_k X_{jK}(\cdot_{\phi^{F,j_k}})\right) \geq \limsup_{k\to\infty} \overline{P}_{\phi^P}(X_{jK}(\cdot_{\phi^{F,j_k}})) \geq c - \epsilon. \tag{3.9}$$

Por otro lado,

$$\limsup_k X_{jK}(\cdot_{\phi^{F,j_k}}) \leq X_{jK}(\cdot_{\phi^F}). \tag{3.10}$$

Esto sigue inmediatamente del hecho de que $\phi^{j_k} \to \phi$ en la topología del producto y la función X_{jK} es semicontinua superiormente. A partir de (3.9) y (3.10), deducimos que

$$\forall K \in \mathbb{N} : \, P_{\phi^P}(X_{jK}(\cdot_{\phi^F})) \geq c - \epsilon.$$

Esto implica, nuevamente por el lema de Fatou, que $P_{\phi^P}(X(\cdot_{\phi^F})) \geq c - \epsilon$. Como esto se cumple $\forall\, \epsilon$, obtenemos

$$\mathbb{E}^{\phi}(X) = P_{\phi^P}(X(\cdot_{\phi^F})) \geq c.$$

El resto de la demostración es directa: como

$$\overline{\mathbb{E}}(X) \leq c \leq \mathbb{E}^{\phi}(X) \leq \mathbb{E}^{\text{mesu}}(X) \leq \overline{\mathbb{E}}(X),$$

(la última desigualdad es resultado de la proposición 3.13), finalmente tenemos que

$$\overline{\mathbb{E}}(X) = c = \mathbb{E}^{\phi}(X) = \mathbb{E}^{\text{mesu}}(X). \tag{3.11}$$

□

Para completar la demostración del teorema 3.10, nuestro objetivo ahora es extender el Lema 3.15 a cualquier variable X Borel.

Definición 3.16. *Una función γ definida en el conjunto de todas las funciones valoradas en $[0, \infty]$ sobre un espacio topológico Z es una capacidad si:*

- *Para cualquier par de funciones f y g valoradas en $[0, \infty]$ sobre Z, se cumple que*
$$f \leq g \implies \gamma(f) \leq \gamma(g); \tag{3.12}$$
- *Para cualquier sucesión creciente $f_1 \leq f_2 \leq \cdots$ de funciones valoradas en $[0, \infty]$ sobre Z, se cumple que*
$$\gamma\left(\sup_{k\in\mathbb{N}} f_k\right) = \lim_{k\to\infty} \gamma(f_k); \tag{3.13}$$
- *Para cualquier sucesión decreciente $f_1 \geq f_2 \geq \cdots$ de funciones semicontinuas superiormente valoradas en $[0, \infty]$ sobre Z, se cumple que*
$$\gamma\left(\inf_{k\in\mathbb{N}} f_k\right) = \lim_{k\to\infty} \gamma(f_k). \tag{3.14}$$

Lema 3.17. *Sea $C \in (0, \infty)$. Si $X_1 \geq X_2 \geq \cdots$ es una sucesión decreciente de variables semicontinuas superiormente con valores en $[0, C]$, entonces*

$$\overline{\mathbb{E}}\left(\inf_{k\in\mathbb{N}} X_k\right) = \lim_{k\to\infty} \overline{\mathbb{E}}(X_k). \tag{3.15}$$

Demostración: En la demostración del Lema 3.14 mostramos (con la diferencia de notación que usamos X en lugar de X_k) que cada X_k puede representarse en la forma $X_k = \inf_{j\in\mathbb{N}} X_{k,j}$, donde $X_{k,1} \geq X_{k,2} \geq \cdots$, y cada $X_{k,j} = X_{k,j}(\omega)$ es semicontinua superiormente y depende de ω solo a través de ω_j. Usamos la igualdad

$$\overline{\mathbb{E}}(X_k) = \lim_{j\to\infty} \overline{\mathbb{E}}(X_{k,j}). \tag{3.16}$$

Esta igualdad se deduce de

$$\overline{\mathbb{E}}(X_k) = c_k := \lim_{j\to\infty} W_0^{k,j} \geq \lim_{j\to\infty} \overline{\mathbb{E}}(X_{k,j}),$$

donde ahora, a diferencia del Lema 3.14, escribimos $W^{k,j}$ en lugar de W^j; la desigualdad

$$\lim_{j\to\infty} W_0^{k,j} \leq \lim_{j\to\infty} \overline{\mathbb{E}}(X_{k,j})$$

es obvia, de donde deducimos (3.16). Sin pérdida de generalidad, asumimos que $X_{1,j} \geq X_{2,j} \geq \cdots$ para todo j. Entonces, la función $X := \inf_{k\in\mathbb{N}} X_k$ puede representarse como $X = \inf_{j\in\mathbb{N}} X_{j,j}$, y así (3.15) se deduce de

$$\overline{\mathbb{E}}(X) = \overline{\mathbb{E}}\left(\inf_{j\in\mathbb{N}} X_{j,j}\right) = \lim_{j\to\infty} \overline{\mathbb{E}}(X_{j,j}) = \lim_{k\to\infty} \lim_{j\to\infty} \overline{\mathbb{E}}(X_{k,j}) = \lim_{k\to\infty} \overline{\mathbb{E}}(X_k).$$

(La segunda igualdad en esta cadena se sigue de (3.11) y (3.8) aplicadas a $X_{j,j}$ en lugar de X_j en esa demostración, y la última igualdad se deduce de (3.16)). $\square$

Lema 3.18. *La función* $\overline{\mathbb{E}}$ *es una capacidad en* $[0, C]^\Omega, \forall C \in (0, \infty)$.

Demostración: Por la Proposición 2.20, $\overline{\mathbb{E}}$ es una expectativa superior y, por lo tanto, satisface las condiciones (3.12) y (3.13). Por el Lema 3.17, $\overline{\mathbb{E}}$ satisface también (3.14), por lo que es una capacidad. $\square$

Lema 3.19. *La función* $\mathbb{E}^{mesu}$ *es una capacidad en* $[0, C]^\Omega$.

Demostración: La propiedad (3.12) es obvia para $\mathbb{E}^{\text{mesu}}$. La propiedad (3.14) se deduce del Lema 3.15 y de la validez de (3.14) para $\overline{\mathbb{E}}$.

Comprobamos la propiedad restante (3.13), con $\mathbb{E}^{\text{mesu}}$ como γ. Supongamos que existe una secuencia creciente $X_1 \leq X_2 \leq \cdots$ de variables valoradas en $[0, C]$ tal que

$$\mathbb{E}^{\text{mesu}}\left(\sup_{k\in\mathbb{N}} X_k\right) > \lim_{k\to\infty} \mathbb{E}^{\text{mesu}}(X_k).$$

Sea ϕ un sistema pronosticador conjunto que satisface

$$\mathbb{E}^{\phi}\left(\sup_{k\in\mathbb{N}} X_k\right) > \lim_{k\to\infty} \mathbb{E}^{\text{mesu}}(X_k).$$

Entonces, ϕ satisface $\mathbb{E}_\phi\left(\sup_{k\in\mathbb{N}} X_k\right) > \lim_{k\to\infty} \mathbb{E}_\phi(X_k)$, lo cual es equivalente a la obviamente errónea $\overline{P}_\phi\left(\sup_{k\in\mathbb{N}} X_k(\cdot\phi)\right) > \lim_{k\to\infty} \overline{P}_\phi X_k(\cdot\phi)$. Por lo tanto, la propiedad (3.13) queda demostrada también por reducción al absurdo. □

Enunciamos ahora un último resultado antes de pasar a demostrar el teorema 3.10, el teorema de capacitabilidad de Choquet. Usaremos la versión del teorema de Choquet en la cual las capacidades se definen, mediante las mismas condiciones, en el conjunto de funciones valoradas en $[0, C]$ para un C fijo en $(0, \infty)$. Esta versión es válida porque cualquier capacidad γ definida en el conjunto de funciones valoradas en $[0, C]$ puede extenderse a una capacidad γ' en el conjunto de funciones valoradas en $[0, \infty]$ mediante $\gamma'(f) := \gamma(f \wedge C)$.

Teorema 3.20. ***(de capacitabilidad de Choquet)***[7]
Si Z es un espacio compacto metrizable, γ es una capacidad en $[0, \infty]^Z$, y $X : Z \to [0, \infty]$ es una función Suslin, entonces

$$\gamma(X) = \sup\{\gamma(f) \mid f \text{ es semicontinua superiormente y } f \leq X\}.$$

Notamos que este resultado demostraría el teorema 3.10 para funciones Suslin y no Borel, no obstante aplicamos que toda función Suslin es Borel [8] y obtenemos el resultado deseado.

Demostración del teorema 3.10
Combinando el teorema de capacitabilidad de Choquet (aplicado al espacio compacto metrizable Ω) con los Lemas 3.13, 3.16 y 3.17, obtenemos

$$\overline{\mathbb{E}}(X) = \sup_{f \leq X} \overline{\mathbb{E}}(f) = \sup_{f \leq X} \mathbb{E}^{\text{mesu}}(f) = \mathbb{P}^{\text{mesu}}(X),$$

donde f recorre las funciones semicontinuas superiores no negativas.

[7]Para la demostración del teorema de Choquet ver "Ensembles analytiques, capacités, mesures de Hausdorff", Teorema II.5, referenciado en la bibliografía.
[8]Para la demostración de que toda función Suslin es Borel, ver "Ensembles analytiques, capacités, mesures de Hausdorff", Corolario I.6, referenciado en la bibliografía.

4 CAPÍTULO 4: Calibración de opciones Lookback

Para este capítulos tomamos como referencia el capítulo 11 de el libro "Game-Theoretic foundations for probability and finance", y los capítulos 5 y 9 de el libro "Comprender los productos derivados", ambos referenciados en la bibliografía.

El objetivo de este capítulo es aplicar la teoría de probabilidades basadas en la teoría de juegos que hemos desarrollado en el mercado de opciones, concretamente, en la calibración de opciones Lookback. No obstante, antes de eso, vamos a introducir brevemente algunos conceptos importantes relativos al mercado de opciones.

4.1 Introducción a las opciones Lookback

Definición 4.1. *Una opción financiera es un contrato a plazo que otorga al comprador el derecho, pero no la obligación, de comprar o vender (según sea opción de compra u opción de venta) un activo subyacente a un precio determinado en el contrato, a lo largo o al final de un período de tiempo también determinado en ese contrato*

Los contratos de opción poseen ciertos elementos básicos que los caracterizan y estructuran, entre los cuales destacan los siguientes:

- *Activo subyacente*: se refiere al activo sobre el cual se basa el contrato. Este puede incluir materias primas, acciones, depósitos, divisas, índices bursátiles, contratos de futuros, entre otros.
- *Cantidad de valores involucrados*: el valor nominal del contrato es establecido por el mercado correspondiente. Por ejemplo, en las opciones sobre acciones cotizadas en el MEFF, el nominal corresponde a un lote de 100 acciones, mientras que en las opciones sobre soja en el CME, este es de 5.000 bushels.
- *Fecha de vencimiento*: es la fecha en que el contrato expira y debe liquidarse.
- *Precio de ejercicio o strike price*: corresponde al precio de referencia establecido en el contrato. En caso de que la opción sea ejercida (ya sea de compra o de venta), este será el precio acordado para la transacción. Este valor es fijo y no se altera, independientemente de las fluctuaciones del precio del activo subyacente en el mercado.
- *Prima*: es el precio de la opción, que el comprador paga al vendedor. Este valor se negocia en el mercado y varía constantemente en función de la cotización del activo subyacente y otros factores, como el tiempo restante hasta el vencimiento, la tasa de interés y la volatilidad del activo subyacente.

En cuanto a los tipos de opciones, existen dos categorías principales: la opción de compra (*call*) y la opción de venta (*put*). Sus principales características, derechos y obligaciones son los siguientes:

- *Opción call*: otorga al comprador el derecho, pero no la obligación, de adquirir una cantidad específica de un activo a un precio determinado. A cambio de este derecho, el comprador paga una prima al vendedor de la opción. Por su parte, el vendedor de una opción call asume la obligación de vender la cantidad estipulada en el contrato al precio de ejercicio, siempre que el comprador decida ejercer su derecho. Como compensación por asumir este riesgo, el vendedor recibe la prima.

- *Opción put*: confiere al comprador el derecho, pero no la obligación, de vender una cantidad específica de un activo a un precio preestablecido. Por este derecho, el comprador abona una prima al vendedor. En este caso, el vendedor de una opción put está obligado a comprar la cantidad especificada en el contrato al precio de ejercicio, si el comprador decide ejercer su derecho. La prima actúa como compensación por el riesgo asumido por el vendedor.

Según el momento en el que pueden ejercerse, las opciones se clasifican en:

- *Opciones europeas*: sólo pueden ejercerse en la fecha de vencimiento especificada.

- *Opciones americanas*: pueden ejercerse en cualquier momento hasta la fecha de vencimiento.

Sin embargo, debido a la creciente complejidad y dinamismo del mercado financiero, las instituciones han desarrollado nuevos instrumentos para satisfacer necesidades más específicas de los participantes. Esto ha dado lugar a la creación de las denominadas *opciones exóticas*, que buscan cubrir riesgos particulares en términos de nominales, fechas de vencimiento, y otros requerimientos específicos.

Las opciones exóticas se definen como un conjunto heterogéneo de opciones en las que se modifican una o varias de las características habituales de las opciones estándar. Entre dichas características diferenciadoras destacan:

- La determinación y el cálculo del precio de ejercicio o del activo subyacente.

- La selección del propio subyacente.

- El número de subyacentes implicados, ya sea de forma agregada o alternativa.

- Las condiciones de pago de la prima.

- La modificación de las fechas de vencimiento.

- Los mecanismos de activación y desactivación de la opción.

Algunas de las principales razones para la existencia de las opciones exóticas son las siguientes:

- Costes: en algunos casos, es posible diseñar opciones exóticas que no conlleven costes iniciales y que, además, permitan al titular cancelarlas cuando mantenerlas implique un elevado coste de cobertura.
- Flexibilidad: ofrecen mayor flexibilidad para establecer las condiciones de ejercicio y la estructura financiera del contrato.
- Complejidad: permiten resolver necesidades específicas y complejas de los inversores.

Las opciones exóticas son instrumentos negociados exclusivamente en mercados OTC. Estas opciones suelen diseñarse a medida, son innovadoras, presentan una baja transparencia y, en ocasiones, resultan difíciles de valorar de forma eficiente. Debido a estas características, no existe un mercado específico para ellas. Las entidades financieras suelen crearlas para venderlas posteriormente a través de sus redes comerciales.

Los activos subyacentes de las opciones exóticas son similares a los de las opciones estándar, incluyendo materias primas, tipos de interés, tipos de cambio, acciones e índices bursátiles. Sin embargo, en las opciones exóticas es común encontrar combinaciones de varios subyacentes, a diferencia de las opciones estándar, donde el subyacente suele ser único.

A pesar de sus ventajas, las opciones exóticas presentan ciertos inconvenientes:

- Mercado exclusivamente OTC, lo que implica un mayor riesgo de crédito.
- Menor conocimiento generalizado respecto a las opciones estándar, dificultando su difusión debido a la amplia variedad y proliferación de modalidades personalizadas.
- Liquidez limitada o inexistente en mercados secundarios, complicando su negociación y acentuando la percepción de falta de transparencia.
- Asimetría en el mercado, donde las posiciones largas (compradoras) predominan en número, mientras que las posiciones cortas (vendedoras) suelen estar restringidas a instituciones financieras especializadas.
- Perfiles de riesgo complejos, difíciles de entender para los compradores y de valorar antes del vencimiento, lo que a menudo conduce a valoraciones imprecisas o sobrevaloradas en detrimento del inversor final.

Entre los tipos de opciones exóticas, nos centraremos en las opciones *path dependent* o con memoria. Estas opciones se caracterizan porque su valor final no depende únicamente del valor final del activo subyacente, sino de su evolución a lo largo de la vida del contrato. Entre estas opciones se encuentran las opciones *lookback*, que consideran el precio más favorable alcanzado por el subyacente durante la vigencia de la opción para determinar su flujo de pagos.

Existen diversas modalidades de opciones *lookback*, siendo las más comunes:

- Opciones *lookback* con precio de ejercicio flotante: En este caso, el precio de ejercicio se ajusta dinámicamente durante la vida de la opción. El pago final se calcula como la diferencia entre el precio más favorable del subyacente (máximo para una opción *call* y mínimo para una opción *put*) y el precio del subyacente en el momento en que se ejerce la opción.

- Opciones *lookback* con precio de ejercicio fijo: Aquí, el precio de ejercicio es fijo y se acuerda al inicio del contrato. El pago final se determina como la diferencia entre el precio más favorable del subyacente observado durante la vida de la opción (máximo para una opción *call* y mínimo para una opción *put*) y este precio de ejercicio fijo.

4.2 Calibración de Lookbacks mediante protocolos

Como hemos visto hasta ahora, la probabilidad basada en la teoría de juegos ofrece un marco conceptual sólido para llevar a cabo pruebas. En este contexto, el Escéptico desafía al Pronosticador con el objetivo de multiplicar de manera significativa el capital en riesgo. Este proceso de evaluación es inherentemente dinámico, dado que el grado de éxito del Escéptico (representado por el factor por el cual su capital se incrementa) fluctúa a lo largo del tiempo. En algunos casos, el Escéptico puede lograr un incremento considerable, lo que parecería desacreditar al Pronosticador de manera concluyente. Sin embargo, este mismo capital acumulado puede perderse parcial o completamente, cuestionando la validez del veredicto inicial. Ante este escenario, surgen preguntas clave: ¿cómo podemos protegernos contra una reversión completa? ¿De qué manera podemos garantizar que, al revisar el capital máximo alcanzado por el Escéptico, podamos conservar al menos una porción de esas ganancias como evidencia contra el Pronosticador?

Una solución sencilla para preservar parte de las ganancias del Escéptico consiste en establecer de antemano varios niveles de capital objetivo en los que se detendría la apuesta, asignar el capital entre dichos objetivos y luego replicar las estrategias del Escéptico con cada una de las cuentas creadas hasta alcanzar el nivel deseado.

Para formalizar esta idea, consideramos un escenario en el que dos jugadores evalúan al Pronosticador. Denominaremos a estos jugadores como Escéptico y Escéptico Rival. El Escéptico actúa primero, permitiendo que el Escéptico Rival lo imite con diferentes cuentas diseñadas para alcanzar distintos objetivos de capital. Este escenario queda descrito formalmente en el siguiente protocolo, donde $\mathcal{K}$ refleja el proceso de capital del Escéptico y $\mathcal{L}$ el proceso de capital del Escéptico Rival.

Protocolo 4.2.
Parámetro: Conjunto $\mathcal{Y}$ con al menos dos elementos.
El Escéptico anuncia $\mathcal{K}_0 = 1$
El Escéptico Rival anuncia $\mathcal{L}_0 = 1$
Para $n = 1, 2, \ldots$:
El Pronosticador anuncia una expectativa superior $\overline{\mathbf{E}}_n$ sobre $\mathcal{Y}$.
El Escéptico anuncia $f_n \in [0, \infty)^{\mathcal{Y}}$ tal que $\overline{\mathbf{E}}_n(f_n) \leq \mathcal{K}_{n-1}$.
El Escéptico Rival anuncia $g_n \in [0, \infty)^{\mathcal{Y}}$ tal que $\overline{\mathbf{E}}_n(g_n) \leq \mathcal{L}_{n-1}$.
La Realidad anuncia $y_n \in \mathcal{Y}$.
$\mathcal{K}_n := f_n(y_n)$ y $\mathcal{L}_n := g_n(y_n)$.

Dado que el Escéptico y el Escéptico Rival están obligados a elegir sus movimientos en $[0, \infty)^{\mathcal{Y}}$, su capital necesariamente permanece no negativo. Para $n = 0, 1, \ldots$, definimos:

$$\mathcal{K}_n^* := \max_{0 \leq i \leq n} \mathcal{K}_i.$$

Nos interesa saber cuánto de este capital máximo pasado puede el Escéptico Rival retener.

Definición 4.3. *Llamamos a una función creciente $H \colon [1, \infty) \to [0, \infty)$ un calibrador de lookbacks si $H(\infty) = \infty$ y el Escéptico Rival tiene una estrategia en el Protocolo 11.1 que garantiza que*

$$\mathcal{L}_n \geq H(\mathcal{K}_n^*) \tag{4.1}$$

para $n = 0, 1, \ldots$.

La siguiente proposición caracteriza a los calibradores de lookbacks.

Proposición 4.4. *Una función creciente $H \colon [1, \infty) \to [0, \infty)$ es un calibrador de lookbacks si y solo si $H(\infty) = \infty$ y*

$$\int_1^\infty \frac{H(v)}{v^2}\, dv \leq 1. \tag{4.2}$$

La demostración de la proposición se obtiene mas adelante a raíz de un resultado mas general. A partir de la proposición 4.4 obtenemos el siguiente corolario:

Corolario 4.5. *Si H es un calibrador de lookbacks, entonces $H(v) \leq v \; \forall v$ y $H(v)/v \to 0$ cuando $v \to \infty$.*

<u>Demostración:</u> Para demostrar que $H(v) \leq v$, dado que $H(v)$ es creciente y no negativa, supongamos que $H(v) > v$ para algún $v \geq 1$. Esto implica que la integral $\int_1^\infty \frac{H(v)}{v^2}\, dv$ divergiría porque $\frac{H(v)}{v^2} > \frac{v}{v^2} = \frac{1}{v}$, y $\int_1^\infty \frac{1}{v}\, dv$ no converge. Sin embargo, esto contradice $\int_1^\infty \frac{H(v)}{v^2}\, dv \leq 1$. Por lo tanto, $H(v) \leq v$ para todo $v \geq 1$.

Para demostrar que $\frac{H(v)}{v} \to 0$ cuando $v \to \infty$, redefinimos $\frac{H(v)}{v} = g(v)$, lo que implica que $\int_1^\infty g(v)\frac{1}{v}\,dv$ converge.

Si $g(v)$ no tiende a 0 cuando $v \to \infty$, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $g(v) \geq \epsilon$ para infinitos valores de v. Esto llevaría a $\int_1^\infty \frac{g(v)}{v}\,dv$ a ser divergente, lo cual contradice la condición inicial de convergencia. Por lo tanto, necesariamente, $\frac{H(v)}{v} = g(v) \to 0$ cuando $v \to \infty$.

□

Definición 4.6. *Un calibrador de lookbacks H es maximal si no existe otro calibrador de lookbacks G tal que $G(v) \geq H(v)$ para todo $v \in [1, \infty)$.*

El siguiente corolario resultante de la proposición 4.4 caracteriza los calibradores maximales de lookbacks.

Corolario 4.7. *Un calibrador de lookbacks es maximal si y solo si es continuo por la derecha y la ecuación (4.2) se cumple con igualdad. Para cada calibrador de lookbacks G, existe un calibrador de lookbacks maximal H tal que $H \geq G$.*

Demostración: Una función creciente $H\colon [1,\infty) \to [0,\infty)$ que satisface (4.2) puede ser incrementada a una función creciente que satisface (4.2) con igualdad (solo multiplicándola por la constante apropiada), y luego puede ser incrementada a una función creciente y a la vez contínua sin cambiar el valor de la integral en (4.2) (recordando que una función creciente tiene solo saltos numerables). Por otro lado, una función creciente y continua por la derecha $H\colon [1,\infty) \to [0,\infty)$ que satisface (4.2) con igualdad no puede ser incrementada más sin aumentar el valor de la integral. □

Es probable que el Escéptico Rival se sienta decepcionado, ya que la fracción del capital máximo de Escéptico que puede estar seguro de retener, $\frac{H(v)}{v}$, disminuye rápidamente a medida que v crece. Si el Escéptico Rival sospecha que el capital de Escéptico continuará creciendo indefinidamente, podría optar por aprovechar esta posibilidad destinando una parte de su capital a imitar a Escéptico. Si elige $c \in [0, 1)$ y dedica c de su capital inicial a imitar a Escéptico, y $1 - c$ a una estrategia que garantice $H(\mathcal{K}_n^*)$, entonces se cumple que

$$\mathcal{L}_n \geq c\mathcal{K}_n + (1-c)H(\mathcal{K}_n^*) \tag{4.3}$$

para todo $n \geq 0$. Podemos interpretar $1 - c$ como una prima que el Escéptico Rival paga inicialmente para asegurarse contra la posibilidad de que Escéptico pierda todo o casi todo el capital o evidencia que haya acumulado.

Proposición 4.8. *Si $c \in [0, 1)$ y $H : [1, \infty] \to [0, \infty]$ es creciente y satisface $H(\infty) = \infty$, entonces el Escéptico Rival tiene una estrategia que garantiza (4.3) en el Protocolo 4.2 si y solo si H satisface (4.2).*

La demostración de la proposición 4.8 se obtiene también más adelante como la de la proposición 4.4. De hecho, la proposición 4.4 es el caso particular de la proposición 4.8 para $c = 0$. La proposición 4.8 implica que si el Escéptico

Rival juega de manera que tiene garantizado al menos $H(\mathcal{K}_n^*)$ para todo n, donde $H : [1,\infty] \to [0,\infty]$ es creciente y satisface $H(\infty) = \infty$, entonces la mayor fracción del capital actual de Escéptico $\mathcal{K}_n$ de la que también puede estar seguro de tener para todo n es

$$1 - \int_1^\infty \frac{H(v)}{v^2}\, dv.$$

En este sentido, (4.3) es lo mejor que el Escéptico Rival puede lograr.

A cotninuación, definimos el siguiente protocolo que nos sirve para relacionar el protocolo 4.2 con el resto de protocolos.

Protocolo 4.9.
Parámetros: Conjunto $\mathcal{Y}$ no vacío, familia $(\mathcal{E}_s)_{s\in\mathbb{S}}$ de conjuntos no vacíos de expectativas superiores sobre $\mathcal{Y}$.

El Escéptico anuncia $\mathcal{K}_0 = 1$

El Escéptico Rival anuncia $\mathcal{L}_0 = 1$

Para $n = 1, 2, \ldots$:

El Pronosticador anuncia una expectativa superior $\overline{\mathbf{E}}_n \in \mathcal{E}_{y_1 \ldots y_{n-1}}$.

El Escéptico anuncia $f_n \in [0,\infty)^{\mathcal{Y}}$ tal que $\overline{\mathbf{E}}_n(f_n) \le \mathcal{K}_{n-1}$.

El Escéptico Rival anuncia $g_n \in [0,\infty)^{\mathcal{Y}}$ tal que $\overline{\mathbf{E}}_n(g_n) \le \mathcal{L}_{n-1}$.

La Realidad anuncia $y_n \in \mathcal{Y}$.

$\mathcal{K}_n := f_n(y_n)$ y $\mathcal{L}_n := g_n(y_n)$.

Llamamos al Protocolo 4.9 y a cualquier especialización de este un protocolo de lookback. Así, el Protocolo 4.2 es un protocolo de lookback; es la especialización en la que $\mathcal{Y}$ tiene al menos dos elementos y $\mathcal{E}_s$, para cada $s \in \mathbb{S}$, es el conjunto de todas las expectativas superiores sobre $\mathcal{Y}$. Todos los protocolos aflojados utilizados hasta ahora se convierten en protocolos de lookback una vez que se agrega el Escéptico Rival. En particular, la especialización del Protocolo 2.12 en su forma aflojada y agregando el Escéptico Rival produce un protocolo más simple pero esencialmente equivalente al Protocolo 4.9.

Definición 4.10. *Llamamos a un protocolo de lookback rico si* $\forall\, a \in (0,1)$ *y* $\forall\, s \in \mathbb{S}$ *existe un* $\overline{\mathbf{E}}_s \in \mathcal{E}_s$ *y un* $E_s \subseteq \mathcal{Y}$ *tal que*

$$\overline{\mathbf{P}}_s(E_s) = a. \tag{4.4}$$

Por ejemplo, el protocolo 4.2 es rico. Para verlo, elejimos dos elementos distintos cualsequiera de $\mathcal{Y}$, y y y'. Dado $a \in (0,1)$, definimos $\overline{\mathbf{E}}_s$ como

$$\overline{\mathbf{E}}_s(f) := af(y) + (1-a)f(y')$$

y establecemos $E_s := \{y\}$ para todo s..

Teorema 4.11. *Sea* $H : [1,\infty] \to [0,\infty]$ *una función creciente y tal que satisface* $H(\infty) = \infty$, $c \in [0,1)$, *y tal que el Escéptico Rival tiene una estrategia en un protocolo de lookback rico que garantiza*

$$\mathcal{L}_n \ge c\,\mathcal{K}_n + (1-c)H(\mathcal{K}_n^*)$$

para todo $n \geq 0\}$. Entonces, H satisface (4.2).

Demostración: Fijamos $a \in (0,1)$, y para todo $s \in \mathbb{S}$, elegimos E_s y $\overline{\mathbf{E}}_s$ tal que satisfacen (4.4). Sea $\overline{\mathbb{E}}$ la expectativa superior en el protocolo obtenido al requerir que el Pronosticador anuncie $\overline{\mathbf{E}}_s$ en cada situación s, eliminándolo como jugador y permitiendo que el Escéptico anuncie su propio capital inicial no negativo $\mathcal{K}_0$ antes de la primera ronda en lugar de fijar $\mathcal{K}_0 := 1$.

Definimos los eventos $A_1, A_2, \dots$ y las variables $X_1, X_2, \dots$ y $Y_1, Y_2, \dots$ como:

$$A_n := \{y_n \in E_{y_1 \dots y_{n-1}}\},$$

$$X_n := \max\{k \mid k \in \{0, 1, \dots, n\} \text{ donde } A_1, \dots, A_k \text{ ocurren todos}\},$$

$$Y_n := ca^{-n} \prod_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{A_k} + (1-c)H(a^{-X_n}). \tag{4.5}$$

Si el Escéptico anuncia $a^{-1}\mathcal{K}_{n-1}\mathbf{1}_{E_{y_1 \cdots y_{n-1}}}$ en la n-ésima ronda, entonces:

$$\mathcal{K}_n = a^{-n} \prod_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{A_k} \quad \text{y} \quad \mathcal{K}_n^* = a^{-X_n}.$$

Así que, por hipótesis, el Escéptico Rival tiene una estrategia que garantiza $\mathcal{L}_n \geq Y_n$ para todo n. El Escéptico puede jugar la misma estrategia, garantizando así $\mathcal{K}_n \geq Y_n$ para todo n. Esto implica que:

$$\overline{\mathbb{E}}(Y_n) \leq 1 \tag{4.6}$$

para todo n. Podemos reescribir (4.5) como

$$Y_n = ca^{-n} \prod_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{A_k} + (1-c)\left(H(1) + \sum_{k=1}^{n} \left(H(a^{-k}) - H(a^{-k+1})\right) \prod_{i=1}^{k} \mathbf{1}_{A_i}\right). \tag{4.7}$$

y luego deducir que

$$\overline{\mathbb{E}}(Y_n) = c + (1-c)\left(H(1) + \sum_{k=1}^{n} \left(H(a^{-k}) - H(a^{-k+1})\right) a^k\right). \tag{4.8}$$

Para deducir (4.8) a partir de (4.7), usamos que el valor esperado de una variable se puede calcular iterativamente:

$$\overline{\mathbb{E}}(Y_n) = \overline{\mathbb{E}}_0\left(\overline{\mathbb{E}}_1\left(\dots \overline{\mathbb{E}}_{n-1}(Y_n) \dots\right)\right). \tag{4.9}$$

Al final de la ronda $n-1$, $\mathbf{1}_{A_n}$ es la única variable en el lado derecho de (4.7) que es desconocida, y

$$\overline{\mathbb{E}}_{n-1}(\mathbf{1}_{A_n}) = \overline{\mathbf{P}}_{y_1 \dots y_{n-1}}(E_{y_1 \dots y_{n-1}}) = a$$

Entonces, por la propiedad 2 de las expectativas superiores y la Declaración 1 de la Proposición 2.9, obtenemos $\overline{\mathbb{E}}_{n-1}(Y_n)$ al reemplazar $\nVdash_{A_n}$ con a en el lado derecho de (4.7). De manera similar, obtenemos $\overline{\mathbb{E}}_{n-2}(\overline{\mathbb{E}}_{n-1}(Y_n))$ al reemplazar $\nVdash_{A_{n-1}}$ con a. Al implementar los n pasos en (4.9), reducimos (4.7) a (4.8).

Combinando (4.8) con (4.6), obtenemos

$$H(1) + \sum_{k=1}^{n} \left(H(a^{-k}) - H(a^{-k+1}) \right) a^k \leq 1,$$

lo cual se puede reescribir como

$$\sum_{k=1}^{n} H(a^{-k+1})(a^{k-1} - a^k) + H(a^{-n})a^n \leq 1.$$

Ignorando el último sumando en el lado izquierdo, dejando $n \to \infty$ y $a \to 1$, podemos ver que

$$\int_0^1 H\left(\frac{1}{w}\right) dw \leq 1,$$

y, por lo tanto,

$$\int_1^\infty \frac{H(v)}{v^2} dv = \int_0^1 H\left(\frac{1}{w}\right) dw \leq 1.$$

□

Lema 4.12. *Una función $H\colon [1,\infty) \to [0,\infty)$ es creciente y continua por la derecha si y solo si existe una medida Q en $[1,\infty)$ tal que*

$$H(v) = \int_{[1,v]} uQ(du) \tag{4.10}$$

para todo $v \in [1,\infty)$. En este caso,

$$\int_1^\infty \frac{H(v)}{v^2} dv = Q([1,\infty)).$$

<u>Demostración:</u> Si H es creciente y continua por la derecha, podemos definir una medida R en $[1,\infty)$ como $R([1,v]) := H(v)$ para todo $v \in [1,\infty)$. Sea Q la medida en $[1,\infty)$ definida por $Q(du) := \frac{1}{u}R(du)$. Entonces, (4.10) se cumple para todo $v \in [1,\infty)$.

Por otro lado, si existe una medida Q en $[1,\infty)$ tal que (4.10) se cumple, entonces H es evidentemente creciente y continua por la derecha, y

$$\int_1^\infty \frac{H(v)}{v^2} dv = \int_1^\infty \int_{[1,v]} \frac{u}{v^2} Q(du) dv = \int_{[1,\infty)} \int_u^\infty \frac{u}{v^2} dv Q(du).$$

Resolviendo la integral interna,

$$\int_u^\infty \frac{u}{v^2} dv = u \left[-\frac{1}{v} \right]_u^\infty = u \cdot \frac{1}{u} = 1.$$

Por lo tanto,
$$\int_1^\infty \frac{H(v)}{v^2}dv = \int_{[1,\infty)} Q(du). \tag{4.11}$$

□

Ahora consideremos una medida de probabilidad P en $[1,\infty]$, y definamos $H^P\colon [1,\infty) \to [0,\infty)$ por

$$H^P(v) := \int_{[1,v]} uP(du). \tag{4.12}$$

Consideremos un protocolo de lookback arbitrario, que puede o no ser rico. Los movimientos de los jugadores son $\overline{\mathbf{E}}$, f_n, g_n y y_n, y tanto el Escéptico como el Escéptico Rival comienzan con un capital unitario y tienen los capitales $\mathcal{K}_n$ y $\mathcal{L}_n$, respectivamente, al final de la n-ésima ronda. Definimos

$$k(u) := \inf\{n \in \{0,1,\dots\} \mid \mathcal{K}_n \geq u\}$$

(con $\inf\emptyset := \infty$) para todo $u \in [1,\infty)$, y

$$g_n^P := \int_{[1,\mathcal{K}^*_{n-1}]} \mathcal{K}_{k(u)}P(du) + P((\mathcal{K}^*_{n-1},\infty])f_n \tag{4.13}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como nos dice el siguiente lema, la sucesión $g_1^P, g_2^P, \dots$ forma una estrategia para el Escéptico Rival. La llamamos una estrategia de lookback trading.

Lema 4.13. *La sucesión $g_1^P, g_2^P, \dots$ constituye una estrategia para el Escéptico Rival. Cuando el Escéptico Rival sigue esta estrategia,*

$$\mathcal{L}_n = \int_{[1,\mathcal{K}^*_n]} \mathcal{K}_{k(u)}P(du) + P((\mathcal{K}^*_n,\infty])\mathcal{K}_n, \tag{4.14}$$

y por lo tanto (porque $\mathcal{K}_{k(u)} \geq u$),

$$\mathcal{L}_n \geq H^P(\mathcal{K}^*_n) + P((\mathcal{K}^*_n,\infty])\mathcal{K}_n \tag{4.15}$$

para $n = 0, 1, \dots$.

<u>Demostración:</u> Si $\mathcal{K}^*_{n-1} \geq u$, entonces $k(u) < n$, por lo que el Escéptico Rival conoce los valores de $k(u)$ y $\mathcal{K}_{k(u)}$ y puede calcular el lado derecho de (4.13) cuando es su turno de moverse en la n-ésima ronda. Tenemos

$$\overline{\mathbf{E}}_1(g_1^P) = \overline{\mathbf{E}}_1\left(\int_{[1,1]} \mathcal{K}_{k(u)}P(du) + P((1,\infty])f_1\right)$$

$$= \int_{[1,1]} \mathcal{K}_0P(du) + P((1,\infty])\overline{\mathbf{E}}_1(f_1) = P(\{1\}) + P((1,\infty])\overline{\mathbf{E}}_1(f_1) \leq 1. \tag{4.16}$$

y

$$\overline{\mathbf{E}}_n(g_n^P) = \overline{\mathbf{E}}_n\left(\int_{[1,\mathcal{K}^*_{n-1}]} \mathcal{K}_{k(u)} P(du) + P((\mathcal{K}^*_{n-1},\infty])f_n\right)$$

$$= \int_{[1,\mathcal{K}^*_{n-1}]} \mathcal{K}_{k(u)} P(du) + P((\mathcal{K}^*_{n-1},\infty])\overline{\mathbf{E}}_n(f_n)$$

$$\leq \int_{[1,\mathcal{K}^*_{n-1}]} \mathcal{K}_{k(u)} P(du) + P((\mathcal{K}^*_{n-1},\infty])\mathcal{K}_{n-1}$$

$$= \int_{[1,\mathcal{K}^*_{n-2}]} \mathcal{K}_{k(u)} P(du) + P((\mathcal{K}^*_{n-2},\infty])\mathcal{K}_{n-1} = g^P_{n-1}(y_{n-1}). \tag{4.17}$$

para $n \geq 2$. La penúltima igualdad en (4.17) se cumple porque $\mathcal{K}_{k(u)} = \mathcal{K}_{n-1}$ para cualquier $u \in (\mathcal{K}^*_{n-2}, \mathcal{K}^*_{n-1}]$. Por (4.16) y (4.17), $g_1^P, g_2^P, \ldots$ constituyen una estrategia para el Escéptico Rival. Si el Escéptico Rival sigue esta estrategia, entonces por (4.17),

$$\mathcal{L}_n = g_n^P(y_n) = \int_{[1,\mathcal{K}^*_{n-1}]} \mathcal{K}_{k(u)} P(du) + P((\mathcal{K}^*_{n-1},\infty])\mathcal{K}_n$$

$$= \int_{[1,\mathcal{K}^*_{n}]} \mathcal{K}_{k(u)} P(du) + P((\mathcal{K}^*_{n},\infty])\mathcal{K}_n. \tag{4.18}$$

□

A continuación enunciamos y demostramos un teorema, la proposición 4.8 se obtiene inmediatamente como resultado de este teorema (y por lo tanto la 4.4 también).

Teorema 4.14. *Supongamos que* $H\colon [1,\infty] \to [0,\infty]$ *es creciente y satisface* $H(\infty) = \infty$ *y (4.2). Entonces, en cualquier protocolo de lookback y para todo* $c \in [0,1]$*, el Escéptico Rival tiene una estrategia que garantiza (4.3) para* $n = 0, 1, \ldots$.

Demostración: Podemos asumir sin pérdida de generalidad que H es semicontinua por la derecha y satisface (4.2) con igualdad, porque podemos aumentar H a una función creciente y semicontinua por la derecha que cumpla estas condiciones. Entonces, $(1-c)H$ también es creciente y semicontinua por la derecha. Por el Lema 4.11, existe una medida Q en $[1,\infty)$ tal que

$$(1-c)H(v) = \int_{[1,v]} uQ(du)$$

para todo $v \in [1,\infty)$ y $Q([1,\infty)) = 1-c$. Extendemos Q a una medida de probabilidad P en $[1,\infty]$ definiendo $P(\{\infty\}) := c$. Entonces, $(1-c)H$ es idéntica en $[1,\infty)$ a la función H^P definida por (4.12), y $P((\mathcal{K}^*_n,\infty]) \geq c$. Por lo tanto, (4.15) implica (4.3).

□

4.3 Aplicaciónes de la calibración de Lookbacks

Veamos ahora como el usar este tipo de estrategias suponen una alternativa a las opciones lookback. Supongamos que y_n es el precio de una acción particular al final del n-ésimo día de negociación, y definimos

$$y_n^* = \max_{0 \leq i \leq n} y_i.$$

Un ejemplo de una opción lookback sobre la acción es una opción call lookback flotante que vence en el tiempo n; en el tiempo n, paga al inversor la diferencia $y_n^* - y_n$. Al comprar la acción y la opción en el tiempo 0 y mantenerla hasta el tiempo n, el inversor puede contar con tener y_n^*, la mayor cantidad que valió la acción durante el período de su inversión. Sin embargo, se debe deducir de esta cantidad su inversión inicial, el costo de la acción y el costo de la opción lookback flotante, y las opciones lookback pueden suponer un coste elevado.

Las estrategias de lookback trading definidas antes proporcionan una alternativa a la compra de opciones lookback. Garantizan menos ingresos, ya que $H(y_n^*)$ puede ser solo una pequeña fracción de y_n^*, pero aparte de su costo de transacción, que se limita al costo de vender periódicamente partes de la inversión en la acción, son libres de costes. Además, no dependen de ninguna suposición estadística.

El caso en el que el inversor mantiene solo una acción puede describirse mediante el siguiente protocolo:

Protocolo 4.15.
La Realidad anuncia $y_0 = 1$
El Escéptico Rival anuncia $\mathcal{L}_0 = 1$
Para $n = 1, 2, \ldots$:
  El Escéptico Rival anuncia $M_n \in [0, \infty)$ tal que $M_n y_{n-1} \leq \mathcal{L}_{n-1}$.
  La Realidad anuncia $y_n \in [0, \infty)$.
  $\mathcal{L}_n := \mathcal{L}_{n-1} + M_n(y_n - y_{n-1})$.

Suponemos, para simplificar, que el precio inicial de la acción, y_0, es 1. La Realidad es el mercado, que determina los precios. El Escéptico Rival es el inversor; su movimiento M_n es el número de acciones que mantiene en la n-ésima ronda. Al mantener estas acciones, está invirtiendo $M_n y_{n-1}$ en la acción, mientras conserva el resto de su capital, $\mathcal{L}_{n-1} - M_n y_{n-1}$.

El Pronosticador y el Escéptico están ausentes, ya que están jugando estrategias especificadas. El Pronosticador no tiene nada que añadir al anuncio de la Realidad en la ronda anterior, y el Escéptico simplemente está manteniendo la acción ($\mathcal{K}_n = y_n$ para todo n). Como confirma la siguiente proposición, esto significa que el aflojamiento del protocolo es un protocolo de lookback.

Proposición 4.16. *El aflojamiento del Protocolo 4.15 es la especialización del Protocolo 4.9 en la cual:*

1. $\mathcal{Y} := [0, \infty)$,

2. *para cada situación $s = y_1 \dots y_{n-1}$, $\mathcal{E}_s$ consiste en la única expectativa superior $\overline{\mathbf{E}}_s$ definida por*

$$\overline{\mathbf{E}}_s(f) := \inf\{\alpha \mid \exists M \in [0,\infty)\, \forall y \in \mathcal{Y} : f(y) \leq \alpha + M(y - y_{n-1})\}, \quad (4.19)$$

3. *y el Escéptico está limitado a hacer siempre el movimiento $f_n(y) = y$, de modo que su capital $\mathcal{K}_n$ es siempre igual a y_n.*

Demostración: Notamos que $\overline{\mathbf{E}}_s(\alpha + M(y - y_{n-1})) = \alpha$. Suponiendo que el Escéptico Rival juega de manera eficiente en esta especialización, su movimiento en la n-ésima ronda será de la forma $\alpha + M(y - y_{n-1})$, digamos $\alpha + M_n(y - y_{n-1})$, y satisfará $\overline{\mathbf{E}}_s(\alpha + M_n(y - y_{n-1})) = \mathcal{L}_{n-1}$ o $\alpha = \mathcal{L}_{n-1}$.

Por lo tanto,

$$\mathcal{L}_n = \mathcal{L}_{n-1} + M_n(y - y_{n-1}),$$

como en el Protocolo 4.15.

□

El protocolo de lookback descrito en la Proposición 4.13 es rico, porque (4.4) se satisface con

$$\overline{\mathbf{E}}_s := \left\{ \frac{y_n}{y_{n-1}} \geq \frac{1}{a} \right\},$$

el evento de que el precio de la acción se multiplica por $1/a$. Por lo tanto, por los Teoremas 4.11 y 4.14, la estrategia de lookback trading para un $c \in [0, 1)$ y un calibrador de lookbacks particular H permite al Escéptico Rival garantizar

$$\mathcal{L}_n \geq c y_n + (1 - c) H(y_n^*), \quad (4.20)$$

para todo n en el Protocolo 4.15, y esto es, en el sentido que hemos descrito, lo mejor que el Escéptico puede hacer.

La Proposición 4.16 se generaliza inmediatamente al caso en el que el Escéptico permanece en el protocolo y comercia en J acciones. En este caso, $\mathcal{Y} := [0, \infty)^J$, donde un elemento y de $\mathcal{Y}$ es el vector de precios de las J acciones, y el Escéptico y el Escéptico Rival deciden cuánto invertir en cada acción en cada ronda. Todavía podemos usar (4.19) para definir la expectativa superior que el Pronosticador debe anunciar, siempre que $M(y - y_{n-1})$ se interprete como el producto interno entre el vector M, que representa el número de acciones que el jugador posee, y el vector $y - y_{n-1}$.

Las estrategias de lookback trading pueden aplicarse a cualquier valor, fondo mutuo o producto básico que se negocie en un mercado lo suficientemente líquido como para que un inversor pueda encontrar un comprador al precio cotizado en cualquier ronda. También pueden aplicarse a cualquier estrategia para operar en dicho mercado o a cualquier otro inversor cuyo comportamiento el inversor pueda imitar, siempre que la estrategia o el inversor imitado solo tomen posiciones largas en los valores o productos básicos. Cualquier posición corta está sujeta a pérdidas ilimitadas, al menos en teoría, y por lo tanto es incompatible con el supuesto de que el Escéptico y el Escéptico Rival arriesgan solo su capital inicial.

Definición 4.17. *Llamamos compromiso de lookback a una función no negativa* $H(v, w)$ *con dominio* $v \in [1, \infty]$ *y* $w \in [0, v]$ *si satisface* $H(\infty, w) = \infty$ *para todo* $w \in [0, \infty]$ *y el Escéptico Rival tiene una estrategia en el Protocolo 4.2 que garantiza* $\mathcal{L}_n \geq H(\mathcal{K}_n^*, \mathcal{K}_n)$.

Un compromiso de lookback H *es máximo si no existe otro compromiso de lookback* G *tal que* $G \geq H$.

Decimos que una función de los precios de ciertos títulos está *supercubierta* cuando se utiliza una estrategia de negociación en valores para garantizar un pago al menos igual a dicha función. Podemos usar este lenguaje para describir el uso que hace el Escéptico Rival de una estrategia de lookback trading para garantizar un pago al menos igual a un compromiso de lookback $H(y_n^*, y_n)$: él *supercubre* este pago, y el costo de la supercobertura es como máximo 1.

De manera más general, un inversor puede usar una estrategia de lookback trading para supercubrir $G(y_n^*, y_n)$, donde G no es un compromiso de lookback. En este caso, el costo de la supercobertura puede exceder 1. Llamaremos *precio superior* de G al costo de supercobertura de $G(y_n^*, y_n)$.

Consideramos entonces una función arbitraria $G(v, w)$ definida para $v \geq 1$ y $w \in [0, v]$ y un contrato hecho al inicio del Protocolo 4.15 que paga $G(y_n^*, y_n)$ en cualquier momento n de elección del Escéptico Rival. Dicho contrato se llama *opción lookback perpetua estadounidense* con pago G. Su precio superior es el ínfimo de las cantidades que permiten al Escéptico Rival supercubrir el pago:

$$\overline{\mathbb{E}}(G) := \inf\{\mathcal{T}_0 \mid \mathcal{T} \in \mathbf{T},\, \forall n\, \forall y_1 y_2 \ldots : \mathcal{T}_n(y_1 y_2 \ldots) \geq G(y_n^*, y_n)\},$$

donde $\mathbf{T}$ es el conjunto de supermartingalas en el Protocolo 4.15.

Corolario 4.18. *Si el pago* G *de una opción lookback americana perpetua es de la forma* $G(v, w) = H(v) + cw$ *para una función de Borel no negativa* H *y* $c \geq 0$*, entonces*

$$\overline{\mathbb{E}}(G) = c + \int_1^\infty H(v) v^{-2}\, dv. \tag{4.21}$$

Este corolario se deduce de (4.20). Sin embargo, no es útil para la versión americana de la opción call lookback flotante. Específicamente, si $G(v, w) = v - w$, entonces $\overline{\mathbb{E}}(G) = \infty$.

También podemos considerar una *opción lookback europea perpetua*, con un pago en el tiempo ∞ igual a $G(y_\infty^*, y_\infty)$, donde $y_\infty^* := \lim_{n\to\infty} y_n^*$, y

$$y_\infty := \begin{cases} \lim_{n\to\infty} y_n & \text{si el límite existe,} \\ \infty & \text{si el límite no existe.} \end{cases}$$

El precio superior de tal opción es simplemente la esperanza superior global $\overline{\mathbb{E}}(G)$, como se define en (2.19).

Corolario 4.19. *Si el pago* G *de una opción lookback europea perpetua tiene la forma* $G(v, w) = H(v) + cw$ *para una función de Borel no negativa* H *y* $c \geq 0$*, entonces su precio superior* $\overline{\mathbb{E}}(G)$ *también está dado por (4.21).*

Apéndice 1: Probabilidades basadas en la teoría de la medida

Las definiciones dadas en este apéndice se pueden encontrar en los libros ”Probability Theory A Comprehensive Course Third Edition” y ”Probability An Introduction Through Theory and Exercises” referenciados en la bibliografía.

El objetivo de este apéndice es presentar una serie de conceptos y resultados básicos conocidos de las probabilidades basadas en la teoría de la medida.

Definición 5.1. *Dado un espacio $\mathcal{Y}$, diremos que una familia $\mathcal{F}$ de partes de $\mathcal{Y}$ es una σ-álgebra si cumple*

1. $\mathcal{Y} \in \mathcal{F}$
2. *Si $E \in \mathcal{F}$, entonces también $E^c \in \mathcal{F}$.*
3. *Si $\{E_n, n \geq 1\} \subset \mathcal{F}$, se cumple $\bigcup_{n\geq 1} E_n \in \mathcal{F}$.*

A los elementos $E \in \mathcal{F}$ los llamamos eventos.

Definición 5.2. *Sea μ una función definida en una σ-álgebra $\mathcal{F}$ con valores en $[0, +\infty]$. Se dice que μ es una medida en $\mathcal{F}$ si cumple:*

1. $\mu(\varnothing) = 0$
2. *Para toda sucesión $\{E_n\}$ de conjuntos disjuntos por pares en $\mathcal{F}$ cuya unión pertenece a $\mathcal{F}$, se cumple:*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \quad (\sigma\text{-aditividad}).$$

Una medida P definida en una σ-álgebra $\mathcal{F}$ sobre un conjunto $\mathcal{Y}$ se denomina una medida de probabilidad si

$$P(\mathcal{Y}) = 1.$$

Definición 5.3. *Si $\mathcal{Y}$ es un conjunto y $\mathcal{F}$ una σ-álgebra en $\mathcal{Y}$, el par $(\mathcal{Y}, \mathcal{F})$ se denomina un espacio medible, y los conjuntos en $\mathcal{F}$ se llaman conjuntos medibles. Si, además, se define una medida μ sobre la σ-álgebra $\mathcal{F}$, entonces la terna $(\mathcal{Y}, \mathcal{F}, \mu)$ que surge del espacio medible $(\mathcal{Y}, \mathcal{F})$ se denomina un espacio de medida. Si P es una medida de probabilidad, el espacio de medida $(\mathcal{Y}, \mathcal{F}, P)$ se denomina un espacio de probabilidad.*

Definición 5.4. *Sean $(\mathcal{Y}, \mathcal{F})$ y $(\mathcal{Y}', \mathcal{F}')$ espacios medibles, y sea $T : \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}'$ una aplicación de $\mathcal{Y}$ en $\mathcal{Y}'$. Decimos que T es $\mathcal{F}$-$\mathcal{F}'$-medible si*

$$T^{-1}(A') \in \mathcal{F}, \quad \text{para todo } A' \in \mathcal{F}'.$$

Expresamos la $\mathcal{F}$-$\mathcal{F}'$-medibilidad de T simbólicamente como

$$T : (\mathcal{Y}, \mathcal{F}) \to (\mathcal{Y}', \mathcal{F}')$$

y hablamos de una aplicación medible del primer espacio medible en el segundo.

Definición 5.5. *Sea $\mathcal{B}$ la σ-álgebra de Borel, definida como la σ-álgebra generada por los conjuntos abiertos de $\mathbb{R}$, es decir, la más pequeña de las σ-álgebras de partes de $\mathbb{R}$ que contiene todos los conjuntos abiertos de $\mathbb{R}$ respecto a la topología euclidiana.*

Sea $(\mathcal{Y}, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad. Una variable aleatoria es una aplicación $X : \mathcal{Y} \to \mathbb{R}$ que cumple la siguiente propiedad:

$$\forall B \in \mathcal{B},\, X^{-1}(B) \in \mathcal{F}.$$

A esta condición la llamamos condición de medibilidad. Además, diremos que una variable aleatoria X es Borel-medible o simplemente Borel si cumple la condición de medibilidad, $\mathcal{Y}$ es un espacio topológico y $\mathcal{F}$ es la más pequeña de las σ-álgebras de partes de $\mathcal{Y}$ que contiene todos los conjuntos abiertos de $\mathcal{Y}$ respecto a la topología de $\mathcal{Y}$.

Definición 5.6. *Una función medible $f : \mathcal{Y} \to \overline{\mathbb{R}}$ se llama P-integrable si $\int |f|\, dP < \infty$. Denotamos*

$$L^1(P) := L^1(\mathcal{Y}, \mathcal{F}, P) := \left\{ f : \mathcal{Y} \to \mathbb{R} : f \text{ es medible y } \int_{\mathcal{Y}} |f|\, dP < \infty \right\}.$$

Definición 5.7. *Sea X una variable aleatoria y $(\mathcal{Y}, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad.*

(i) Si $X \in L^1(P)$, entonces diremos que X es integrable y definimos

$$\mathbb{E}[X] := \int X\, dP$$

como la esperanza de X. Más generalmente, también escribimos $\mathbb{E}[X] = \int X\, dP$ solo si X^- o X^+ es integrable.

(ii) Si $n \in \mathbb{N}$ y $X \in L^n(P)$, entonces los valores

$$m_k := \mathbb{E}[X^k], \quad M_k := \mathbb{E}[|X|^k]$$

para cualquier $k = 1, \ldots, n$, se llaman el k-ésimo momento y el k-ésimo momento absoluto, respectivamente, de X.

(iii) Si $X \in L^2(P)$, entonces X se llama cuadráticamente integrable y

$$\mathrm{Var}[X] := \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

es la varianza de X. El número $\sigma := \sqrt{\mathrm{Var}[X]}$ se llama la desviación estándar de X. Formalmente, a veces escribimos $\mathrm{Var}[X] = \infty$ si $\mathbb{E}[X^2] = \infty$.

Definición 5.8. *Sea $\mathbb{F} = (\mathbb{F}_t, t \in I)$ una familia de σ-álgebras con $\mathbb{F}_t \subset \mathbb{F}$ para todo $t \in I$. $\mathcal{F}$ se llama una filtración si $\mathbb{F}_s \subset \mathbb{F}_t$ para todos $s, t \in I$ con $s \leq t$.*

Definición 5.9. *Sea $I \subset \mathbb{R}$. Una familia de variables aleatorias $X = (X_t, t \in I)$ (en $(\mathcal{Y}, \mathcal{F}, P)$) con valores en $(E, \mathcal{B})$ se llama un proceso estocástico con conjunto índice (o conjunto de tiempos) I y rango E.*

Un proceso estocástico $X = (X_t, t \in I)$ se dice adaptado a la filtración $\mathbb{F}$ si X_t es $\mathbb{F}_t$-medible para todo $t \in I$. Si $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$ para todo $t \in I$, entonces denotamos por $\mathbb{F} = \sigma(X)$ la filtración generada por X.

Sea $I = \mathbb{N}_0$ o $I = \mathbb{N}$. Un proceso estocástico $X = (X_n, n \in I)$ se llama predecible (o previsible) con respecto a la filtración $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}_0)$ si X_0 es constante (si $I = \mathbb{N}_0$) y si para todo $n \in \mathbb{N}$, X_n es $\mathbb{F}_{n-1}$-medible.

Definición 5.10. *Sea $(\mathcal{Y}, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$, y sea $\mathbb{F}$ una filtración. Sea $X = (X_t)_{t \in I}$ un proceso estocástico, adaptado, tal que $\mathbb{E}[|X_t|] < \infty$ para todo $t \in I$. Diremos que (con respecto a $\mathbb{F}$):*

- *X es una martingala si $\mathbb{E}[X_t \mid \mathbb{F}_s] = X_s$ para todos $s, t \in I$ con $t \geq s$,*
- *X es una submartingala si $\mathbb{E}[X_t \mid \mathbb{F}_s] \geq X_s$ para todos $s, t \in I$ con $t \geq s$,*
- *X es una supermartingala si $\mathbb{E}[X_t \mid \mathbb{F}_s] \leq X_s$ para todos $s, t \in I$ con $t \geq s$.*

Apéndice 2: Teoremas clásicos adaptados a la teoría de juegos

Para este apéndice nos basamos principalmente en los capítulos 2 y 4 del libro "Game-Theoretic foundations for probability and finance", referenciado en la bibliografía.

En este apéndice daremos la versión y demostración para la teoría de juegos de tres teoremas clásicos en las probabilidades basadas en la teoría de la medida, el teorema de Bernoulli, el teorema de la convergencia de Doob, y la ley de Kolmogorov.

6.1 Teorema de Bernoulli

Nuestro primer objetivo es dar una version para teoría de juegos del teorema de Bernoulli clásico:
Teorema de Bernoulli: $\forall \varepsilon > 0$

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\left(|\overline{y_n} - p| \geq \varepsilon\right) = 0,\ p \in [0,1]. \tag{6.1}$$

Para ello, consideramos un nuevo juego que queda reflejado en el siguiente protocolo

Protocolo 6.1.
Parámetro: $p \in [0,1]$
Esceptico anuncia $\mathcal{K}_0 \in \mathbb{R}$.
Para $n = 1, 2, ..., N$;
El Escéptico anuncia $M_n \in \mathbb{R}$.
La Realidad anuncia $y_n \in \{0,1\}$
$\mathcal{K}_n := \mathcal{K}_{n-1} + M_n(y_n - p)$.

Proposición 6.2. *Sea X una variable en el protocolo 6.1 que está determinada en las primeras N rondas. Entones*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{t\in\{0,1\}^N} \left(p^{\#t}(1-p)^{N-\#t}X(t)\right) \tag{6.2}$$

donde $\#t$ es el número de 1's en t.

Demostración: Consideramos el proceso $\mathcal{M}$ definido por $\mathcal{M}_N := X$, y por recursión hacia atrás, para $n = N-1, ..., 0$:

$$\mathcal{M}(y_1...y_n) := p\mathcal{M}(y_1...y_n1) + (1-p)\mathcal{M}(y_1...y_n0). \tag{6.3}$$

Se sigue de (6.3) que

$$\mathcal{M}(y_1...y_n) = \mathcal{M}(y_1...y_{n-1}) + L_n(y_n - p).$$

para n= 1,...,N, donde

$$L_n := \mathcal{M}(y_1...y_{n-1}1) - \mathcal{M}(y_1...y_{n-1}0). \tag{6.4}$$

Ya que, si y_n=1:

$$\mathcal{M}(y_1 \dots y_{n-1}) = \mathcal{M}(y_1 \dots y_{n-1}1) + L_n(p-1)$$
$$= p\mathcal{M}(y_1 \dots y_{n-1}1) + (1-p)\mathcal{M}(y_1 \dots y_{n-1}0).$$

Y si y_n=0

$$\mathcal{M}(y_1 \dots y_{n-1}) = \mathcal{M}(y_1 \dots y_{n-1}0) + L_n p =$$
$$= p\mathcal{M}(y_1 \dots y_{n-1}1) + (1-p)\mathcal{M}(y_1 \dots y_{n-1}0).$$

Entonces $\mathcal{M}$ es el proceso de capital para la estrategia con $\mathcal{K}_0 = \mathcal{M}_0$ y realiza el movimiento L_n definido en (6.4) en la n-ésima ronda. De igual forma $-\mathcal{M}$ es el proceso de capital para la estrategia con $\mathcal{K}_0 = -\mathcal{M}_0$ y realiza el movimiento $-L_n$. Por lo que $\mathcal{M}$ es una martingala.
Se deduce también de (6.4) por inducción hacia atrás, que

$$\mathcal{M}(y_1...y_n) = \sum_{t\in\{0,1\}^{N-n}} \left(p^{\#t}(1-p)^{N-n-\#t}X(y_1...y_n t)\right) \tag{6.5}$$

para $n = N-1, ..., 0$. Cuando n=0, (6.5) se reduce a

$$\mathcal{M}_0 = \sum_{t\in\{0,1\}^{N}} \left(p^{\#t}(1-p)^{N-\#t}X(t)\right)$$

Y por el lema 2.5, $\mathcal{M}_0 = \mathbb{E}(\mathcal{M}_N) = \mathbb{E}(X)$, obteniendo (6.2). $\square$

Definición 6.3. *Dado un protocolo con uno o más parámetros, a cualquier protocolo obtenido fijando los parámetros lo llamamos su instantanización.*

Proposición 6.4. $\forall\varepsilon > 0$ *y* $\forall\delta > 0$ $\exists N_{\varepsilon,\delta} \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$\overline{\mathbb{P}}(|\overline{y}_N| \geq \varepsilon) \leq \delta$$

en cualquier instantanización del protocolo 2.2 con $N \geq N_{\varepsilon,\delta}$

Los siguientes dos lemas constituyen una demostración de la proposición 6.4:

Lema 6.5. *Para cualquier* $\varepsilon > 0$ *y para cualquier valor del parámetro* N *en el protocolo 2.2,*

$$\overline{\mathbb{P}}(|\overline{y}_N| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2 N} \tag{6.6}$$

Demostración: Consideramos la supermartingala $\mathcal{T}$ tal que $\mathcal{T}_n := \left(\sum_{i=1}^n y_i\right)^2 - n$. En el protocolo 2.2, $\mathcal{T}$ empieza en 0 y nunca es menos que $-N$. Entonces el proceso $\mathcal{U}$ definido por

$$\mathcal{U}_n = \frac{\mathcal{T}_n + N}{\varepsilon^2 N^2} = \frac{n^2\left(\overline{y}_n\right)^2 - n + N}{\varepsilon^2 N^2}$$

es una supermartingala no negativa que inicia en $1/\varepsilon^2 N^2$. Además, $\mathcal{U}_n \geq 1$ si $|\bar{y}_N| \geq \varepsilon$. Como $\mathcal{U}$ es no negativa, $\mathcal{U}_N \geq \mathbf{1}_{|\bar{y}_N| \geq \varepsilon}$, por lo que

$$\overline{\mathbb{P}}(|\overline{y}_N| \geq \varepsilon) = \overline{\mathbb{E}}(\mathbf{1}_{|\bar{y}_N| \geq \varepsilon}) = \inf\{\mathcal{T}_0 \mid \mathcal{T} \in \mathbf{T} \text{ y } \mathcal{T}_N \geq (\mathbf{1}_{|\bar{y}_N| \geq \varepsilon})\} \leq \mathcal{U}_0 = \frac{1}{\varepsilon^2 N^2}.$$

□

Lema 6.6. $\forall \varepsilon > 0$ *y para cualquier valor del parametro* N *en el protocolo 2.2,*

$$\overline{\mathbb{P}}(|\overline{y}_N| \geq \varepsilon) \leq 2 \exp(-\frac{\varepsilon^2 N}{4}) \tag{6.7}$$

Demostración: Consideramos la supermartingala no negativa exponencial $\mathcal{T}$ definida en (1.13) en el capítulo 1 para $\kappa \in$(0,1/2]. Obtenemos

$$\mathcal{T}_N \geq \exp(\kappa N \varepsilon - \kappa^2 N)$$

cuando $|\overline{y}_N| \geq \varepsilon$, por lo que la supermartingala no negativa

$$\exp(-\kappa N \varepsilon + \kappa^2 N)\mathcal{T} \tag{6.8}$$

que inicia en $\exp(-\kappa N \varepsilon + \kappa^2 N)$ cumple que

$$\overline{\mathbb{P}}(|\overline{y}_N| \geq \varepsilon) \leq \exp(-\kappa N \varepsilon + \kappa^2 N). \tag{6.9}$$

También notamos que $\exp(-\kappa N \varepsilon + \kappa^2 N)$ queda minimizada en función de κ cuando $\kappa = \varepsilon/2$. Como $\overline{\mathbb{P}}(|\overline{y}_N| \geq \varepsilon) = 0$ cuando $\varepsilon > 1$, podemos asumir $\varepsilon \in$ (0, 1], por lo que $\kappa \in (0, 1/2]$. Sustituyendo κ por ε en (6.8) y (6.9), vemos que tomando la supermartingala no negativa $\mathcal{U}$ definida por

$$\mathcal{U}_n := \exp\left(-\frac{\varepsilon^2 N}{4} + \frac{\varepsilon^2}{2}\sum_{i=1}^{n} y_i - \frac{\varepsilon^2}{4}\sum_{i=1}^{n} y_i\right)$$

obtenemos

$$\overline{\mathbb{P}}(\overline{y}_N \geq \varepsilon) = \inf\{\mathcal{T}_0 \mid \mathcal{T} \in \mathbf{T} \text{ y } \mathcal{T}_N \geq (\mathbf{1}_{|\bar{y}_N| \geq \varepsilon})\} \leq \mathcal{U}_0 = \exp(-\frac{\varepsilon^2 N}{4}).$$

Por simetria, tomando la supermartingala no negativa $\mathcal{V}$ definida como

$$\mathcal{V}(y_1 \ldots y_n) = \mathcal{U}(-y_1 \ldots - y_n).$$

obtenemos

$$\overline{\mathbb{P}}(\overline{y}_N \leq -\varepsilon) = \exp(-\frac{\varepsilon^2 N}{4}).$$

Se obtiene entonces que tomando la supermartingala no negativa $\mathcal{U} + \mathcal{V}$ se cumple (6.7) □

Corolario 6.7. *En el protocolo 6.1, $\forall \varepsilon > 0$ y $\forall \delta > 0$ $\exists N_{\varepsilon,\delta} \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\mathbb{P}(|\overline{y}_N - p| \geq \varepsilon) \leq \delta,$$

con $N \geq N_{\varepsilon,\delta}$

Demostración: Por la proposicion 6.4 tenemos que la desigualdad se cumple para cualquier valor de N con $y_n \in [-1,1]$, en el protocolo 6.8 $y_n \in \{0,1\}, p \in [0,1] \implies (y_n - p) \in [-1,1]$, por lo que podemos trasladar las desigualdades (6.6) y (6.7) al protocolo 6.1. Ahora por la proposición 6.9 las probabilidades superiores son de hecho, probabilidades y por lo tanto tenemos que en el protocolo 6.1:

$$\mathbb{P}(|\overline{y}_N - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2 N} \text{ y } \mathbb{P}(|\overline{y}_N - p| \geq \varepsilon) \leq 2 \exp(-\frac{\varepsilon^2 N}{4})$$

De ambas desigualdades deducimos (6.1)

□

6.2 Ley de Kolmogorov y teorema de la convergencia de Doob

A continuación procedemos a enunciar y demostrar la ley de los grandes números de Kolmogorov en un contexto de la teoría de juegos.

Consideremos una versión de protocolo 1.3 donde el Mundo tiene permitidos sus movimientos, en vez de en un intervalo cerrado, en el conjunto entero de los números reales. Bajo estos supuestos, la proposición 1.6 ya no se mantiene, en la primera ronda en la que el Escéptico haga su primer movimiento no nulo, $M_n > 0$, la Realidad puede decidir y_n tal que $(y_n - m_n)M_n < -\mathcal{K}_0$, dejando al Escéptico en bancarrota. Para contrarrestar este efecto, permitimos al Escéptico una cobertura para este tipo de movimientos de la Realidad. Esta modificación del protocolo 1.3 queda reflejada en el siguiente protocolo:

Protocolo 6.8.
Escéptico anuncia $\mathcal{K}_0 \in \mathbb{R}$.
Para n=1,2,...;
    El Pronosticador anuncia $m_n \in \mathbb{R}$ y $v_n \geq 0$.
    El Escéptico anuncia $M_n \in \mathbb{R}$ y $V_n \geq 0$.
    La Realidad anuncia $y_n \in \mathbb{R}$.

$$\mathcal{K}_n := \mathcal{K}_{n-1} + M_n(y_n - m_n) + V_n((y_n - m_n)^2 - v_n). \tag{6.10}$$

Definición 6.9. *Diremos que una estrategia para la Realidad fuerza un evento E si se cumple una de las siguientes condiciones:*

(i) $\mathcal{K}_n < 0$ *para alguna* $n \in \mathbb{N}$,

(ii) $\mathcal{K}_n$ *está acotada y E sucede.*

Proposición 6.10. *Si el Escéptico puede forzar E en el protocolo 6.8, entonces la Realidad puede forzar E en el protocolo 6.8.*

Demostración: Suponemos que el Escéptico puede forzar E, sea ψ una estrategia para el Escéptico en el protocolo 6.8 que garantiza ambas condiciones: (i)

$$\mathcal{K}_0 \geq 0 \; \forall n \in \mathbb{N} \text{ y (ii) Si E no sucede, } \mathcal{K}_n \to \infty.$$

Consideramos ahora un Escéptico alternativo, denotémoslo Alt, cuyo movimiento siempre es la media entre el movimiento del Escéptico y el recomendado por ψ. El capital de Alt para cada n será siempre $\dfrac{(\mathcal{K}_n + \mathcal{K}_n^{\psi})}{2}$. Como ambos capitales son no negativos siempre, también lo es el capital de Alt. Consideramos la estrategia para la Realidad en que el capital de Alt se mantiene constante, esto es:

$$M_n(y_n - m_n) + V_n((y_n - m_n)^2 - v_n) = 0 \overset{z_n=(y_n-m_n)}{\iff} M_n(z_n) + V_n((z_n)^2 - v_n)$$

.

$$\iff z_n = \frac{-M_n \pm \sqrt{M_n^2 + 4V_n^2 v_n}}{2V_n} \iff y_n = \frac{-M_n \pm \sqrt{M_n^2 + 4V_n^2 v_n}}{2V_n} + m_n.$$

Cuando la Realidad sigue esta estrategia, el capital de Alt se mantiene constante, por lo que $\mathcal{K}_n$ y $\mathcal{K}_n^{\psi}$ se mantienen acotados. Como el escéptico puede forzar E y $\lim_{n\to\infty} \mathcal{K}_n < \infty \implies$ E sucede $\implies$ la Realidad puede forzar E. $\square$

Teorema 6.11. (Ley de Kolmogorov)
En el protocolo 6.8:

- *1. El Escéptico puede forzar*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n^2} < \infty \implies \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - m_i) \to 0. \tag{6.11}$$

- *2. La Realidad puede forzar*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n^2} = \infty \implies \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - m_i) \not\to 0. \tag{6.12}$$

Para la demostración será necesario introducir antes una serie de nuevos conceptos y lemas.

De igual forma que en el capitulo 1 presentamos el protocolo 1.7 como una versión simplificada del protocolo 1.3 para demostrar la proposición 1.6, introducimos una versión simplificada del protocolo 6.8 para demostrar el teorema 6.11:

Protocolo 6.12.
Escéptico anuncia $\mathcal{K}_0 \in \mathbb{R}$.
Para n=1,2,...;
El Pronosticador anuncia $v_n \geq 0$.
El Escéptico anuncia $M_n \in \mathbb{R}$ y $V_n \geq 0$.
La Realidad anuncia $y_n \in \mathbb{R}$.
$\mathcal{K}_n := \mathcal{K}_{n-1} + M_n y_n + V_n(y_n^2 - v_n)$.

En el protocolo 6.12, una situación es una secuencia finita $(v_1, y_1)...(v_n, y_n)$ y un camino una secuencia infinita $(v_1, y_1)(v_2, y_2)....$ El espacio de situaciones es $\mathbb{S} := ([0, \infty) \times \mathbb{R})^*$ y el espacio Muestral $\Omega := ([0, \infty) \times \mathbb{R})^\infty$.

Corolario 6.13.

- *Si el Escéptico tiene una estrategia que fuerza*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n^2} < \infty \implies \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i \to 0. \tag{6.13}$$

en el protocolo 6.12, entonces tiene una estrategia que fuerza (6.11) en el protocolo 6.8.

- *Si la realidad tiene una estrategia que fuerza*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n^2} = \infty \implies \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i \not\to 0. \tag{6.14}$$

en el protocolo 6.12, entonces tiene una estrategia que fuerza (6.12) en el protocolo 6.8.

Demostración: Si el Escéptico tiene una estrategia que fuerza (6.13) en el protocolo 6.12, puede adaptar dicha estrategia a una que fuerza (6.11) en el protocolo 6.8 respondiendo a la secuencia $y_1 m_1 v_1 ... y_n m_n v_n$ en el protocolo 6.8 de la forma que respondería a la secuencia $(y_1 - m_1)v_1...(y_n - m_n)v_n$ en el protocolo 6.12.
De la misma forma, la Realidad puede convertir una estrategia que fuerza (6.14) en el protocolo 6.12 a una que fuerza (6.12) en el protocolo 6.8 mediante anunciar $y_n + m_n$ en el protocolo 6.8 cuando los movimientos de sus oponentes la llevarían a anunciar y_n en el protocolo 6.12. □

Para construir una estrategia que fuerza (6.13) en el protocolo 6.12 necesitamos una version de la teoría de juegos del teorema de la convergencia de Doob. Para ello, repasamos y expandimos la terminología del capítulo 1 a este nuevo protocolo.

Un proceso es una función de valores reales $\mathcal{S}$ definida en $\mathbb{S}$, que se representa como la secuencia de variables $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1, \ldots$, donde $\mathcal{S}_n : \omega \in \Omega \mapsto \mathcal{S}(\omega_n) \in \mathbb{R}$.

Un proceso previsible $\mathcal{A}$ es una función de valores reales definida en $\mathbb{S} \setminus \{\Box\}$, tal que cuando $s = (v_1, y_1) \dots (v_n, y_n)$, el valor $\mathcal{A}(s)$ depende únicamente de $(v_1, y_1) \dots v_n$ y no de y_n, y se representa como la secuencia de variables $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots$, donde $\mathcal{A}_n \colon \omega \in \Omega \mapsto \mathcal{A}(\omega_n) \in \mathbb{R}$.

Una estrategia ψ para el Escéptico en el protocolo 6.12 es un triplete $(\psi^{\text{inicial}}, \psi^M, \psi^V)$, donde $\psi^{\text{inicial}} \in \mathbb{R}$ y ψ^M y ψ^V son procesos previsibles. Aquí, ψ^{inicial} es el valor que ψ especifica para el capital inicial $\mathcal{K}_0$, y $\psi^M(\omega_n)$ y $\psi^V(\omega_n)$ son los movimientos M_n y V_n que especifica en la situación ω_n.

Corolario 6.14. *El conjunto de estrategias para el Escéptico es un cono convexo:*

(i) Si $(\psi^{inicial}, \psi^M, \psi^V)$ es una estrategia para el Escéptico y $\beta \geq 0$, entonces $(\beta\psi^{inicial}, \beta\psi^M, \beta\psi^V)$ también es una estrategia para el Escéptico.

(ii) Si $(\psi_1^{inicial}, \psi_1^M, \psi_1^V)$ y $(\psi_2^{inicial}, \psi_2^M, \psi_2^V)$ son estrategias para el Escéptico, entonces $(\psi_1^{inicial} + \psi_2^{inicial}, \psi_1^M + \psi_2^M, \psi_1^V + \psi_2^V)$ también lo es.

Cuando el Escéptico sigue la estrategia ψ, su proceso de capital $\mathcal{K}^\psi$ viene dado por:

$$\mathcal{K}_0^\psi := \psi^{\text{inicial}}, \tag{6.15}$$

$$\mathcal{K}_n^\psi := \mathcal{K}_{n-1}^\psi + \psi_n^M y_n + \psi_n^V (y_n^2 - v_n) \tag{6.16}$$

De igual forma que en los anteriores capítulos, un proceso de capital en el protocolo 6.12 o en un aflojamiento del mismo es una supermartingala. Recordamos que el Escéptico puede forzar un evento si y solo si existe una supermartingala no negativa que tiende a infinito en todos los caminos donde el evento falla.

Definición 6.15. *Llamamos a un proceso $\mathcal{U}$ una semimartingala si $\mathcal{U} = \mathcal{T} + \mathcal{A}$, donde $\mathcal{T}$ es una supermartingala y $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \dots$ es un proceso creciente tal que $\mathcal{A}_0 = 0$ y $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots$ es un proceso previsible. Llamamos al proceso $\mathcal{A}$ un compensador para $\mathcal{U}$.*

Una semimartingala $\mathcal{U}$ es otro tipo de proceso de capital para el Escéptico, uno que surge cuando $\mathcal{A}_n$ es un pago adicional no negativo al Escéptico en la ronda n que no depende del movimiento de la Realidad en la ronda n.

Definición 6.16. *Dado un proceso previsible $\mathcal{D}$ y un proceso $\mathcal{S}$, escribimos $\mathcal{D} \cdot \mathcal{S}$ para el proceso*

$$(\mathcal{D} \cdot \mathcal{S})_n := \sum_{i=1}^{n} \mathcal{D}_i (\mathcal{S}_i - \mathcal{S}_{i-1}). \tag{6.17}$$

Llamamos a $\mathcal{D} \cdot \mathcal{S}$ la transformada de $\mathcal{S}$ por $\mathcal{D}$. Nos referimos a $\Delta X_n := X_n - X_{n-1}$ como la ganancia del proceso X en la ronda $n \geq 1$; usando esta notación, (6.17) *puede reescribirse como $\Delta(\mathcal{D} \cdot \mathcal{S})_n = \mathcal{D}_n \Delta \mathcal{S}_n$.*

Cuando un proceso previsible $\mathcal{D}$ solo toma los valores 0 y 1, lo llamamos un muestreador. En este caso, decimos que la transformación $\mathcal{D} \cdot \mathcal{S}$ toma las ganancias de $\mathcal{S}$ en las rondas n donde $\mathcal{D}_n = 1$ y se abstiene en las rondas n donde $\mathcal{D}_n = 0$.

A continuación presentamos una serie de lemas que nos seran útiles para presentar la transformada de Doob y la versión de la teoría de juegos del teorema de la convergencia de Doob.

Lema 6.17. *Supongamos que $\mathcal{D}$ es un proceso previsible no negativo y $\mathcal{S}$ es un proceso.*

1. *Si $\mathcal{S}$ es una supermartingala, entonces $\mathcal{D} \cdot \mathcal{S}$ es una supermartingala.*
2. *Si $\mathcal{S}$ es una semimartingala, entonces $\mathcal{D} \cdot \mathcal{S}$ es una semimartingala.*

Demostración:

1. Un proceso $\mathcal{S}$ es una supermartingala si y solo si existe una estrategia ψ para el Escéptico tal que
$$\mathcal{S}_n - \mathcal{S}_{n-1} \leq \psi_n^M y_n + \psi_n^V (y_n^2 - v_n)$$
en cada ronda n. Si $\mathcal{S}$ satisface esta condición, entonces $\mathcal{D} \cdot \mathcal{S}$ también la satisface sustituyendo ψ^M por $\mathcal{D}\psi^M$, y ψ^V por $\mathcal{D}\psi^V$.
2. De manera similar, $\mathcal{S}$ es una semimartingala si y solo si existe una estrategia ψ para el Escéptico y un proceso previsible creciente no negativo $\mathcal{A}$ tal que
$$\mathcal{S}_n - \mathcal{S}_{n-1} \leq \psi_n^M y_n + \psi_n^V (y_n^2 - v_n) + \mathcal{A}_n - \mathcal{A}_{n-1}$$
en cada ronda n, donde $\mathcal{A}_0 := 0$. Si $\mathcal{S}$ satisface esta condición, entonces $\mathcal{D} \cdot \mathcal{S}$ también la satisface sustituyendo ψ^M por $\mathcal{D}\psi^M$, ψ^V por $\mathcal{D}\psi^V$, y $\mathcal{A}$ por el proceso previsible cuyo incremento en la ronda n es $\mathcal{D}_n(\mathcal{A}_n - \mathcal{A}_{n-1})$.

□

Lema 6.18. *Sea $\mathcal{S}$ un proceso y $\mathcal{D}^1, \mathcal{D}^2, \ldots$ procesos previsibles uniformemente acotados, y sean $\beta_1, \beta_2, \ldots \in \mathbb{R}$ tal que $\beta_1 + \beta_2 = 1$. Entonces,*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k (\mathcal{D}_k \cdot \mathcal{S}) < \infty, \ \textit{y además} \ \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k (\mathcal{D}_k \cdot \mathcal{S}) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \mathcal{D}_k \right) \cdot \mathcal{S}.$$

Demostración: Debido a que los $\mathcal{D}^k$ están uniformemente acotados, $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \mathcal{D}^k < \infty \implies \left(\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \mathcal{D}^k\right) \cdot \mathcal{S} < \infty$, y el siguiente cálculo verifica que $\left(\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \mathcal{D}^k\right) \cdot \mathcal{S} = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k (\mathcal{D}^k \cdot \mathcal{S})$. En cada ronda n:

$$\left(\left(\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \mathcal{D}^k \right) \cdot \mathcal{S} \right)_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta \left(\left(\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \mathcal{D}^k \right) \cdot \mathcal{S} \right)_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \mathcal{D}_i^k \right) \Delta \mathcal{S}_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \mathcal{D}_i^k \Delta \mathcal{S}_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \Delta \left(\mathcal{D}^k \cdot \mathcal{S} \right)_i = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sum_{i=1}^{n} \Delta \left(\mathcal{D}^k \cdot \mathcal{S} \right)_i = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \left(\mathcal{D}^k \cdot \mathcal{S} \right)_n .$$

□

Por último, antes de dar y demostrar la versión de teoría de juegos del teorema de la convergencia de Doob, presentamos la construcción de la transformada de Doob:

Dado un proceso no negativo $\mathcal{S}$, comenzamos la construcción definiendo un muestreador $\mathcal{D}^{a,b}$ y, por lo tanto, una transformada $\mathcal{D}^{a,b} \cdot \mathcal{S}$ para cada par de números racionales positivos a y b tales que $a < b$. Definimos $\mathcal{D}^{a,b}$ dando instrucciones para alternar entre tomar las ganancias de $\mathcal{S}$ y abstenerse:

- Cuando $\mathcal{S}$ sea menor o igual a a, se toman las ganancias de $\mathcal{S}$ (Si $\mathcal{S}_0 \leq a$, se empieza en la primera ronda, de lo contrario, se abstiene hasta que $\mathcal{S}$ alcance un valor menor o igual a a. Si nunca lo hace, nunca empieza).

- Se siguen tomando las ganancias de $\mathcal{S}$ hasta que $\mathcal{S}$ sea mayor o igual a b; y se detiene tan pronto como lo sea. (Si $\mathcal{S}$ nunca alcanza b o más, nunca se detiene).

- Se repite el proceso indefinidamente: comienza de nuevo tan pronto como $\mathcal{S}$ sea menor o igual a a, luego se detiene tan pronto como sea mayor o igual a b, etc.

Ahora se ordenan todos los pares de números racionales positivos (a, b) con $a < b$ en una secuencia $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots$ y se define el proceso previsible $\mathcal{D}^{\mathcal{S}}$ como:

$$\mathcal{D}^{\mathcal{S}} := \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \mathcal{D}^{a_k, b_k} \tag{6.18}$$

Si $\mathcal{S}$ oscila indefinidamente, sin converger en $\overline{\mathbb{R}}$, entonces cruzará algún intervalo racional $[a, b]$ un número infinito de veces, por lo que $\mathcal{D}_{a,b} \cdot \mathcal{S}$ tenderá al infinito, y por el lema 6.18, $\mathcal{D}^{\mathcal{S}} \cdot \mathcal{S}$ también lo hará. Esto queda formalizado en el siguiente lema:

Lema 6.19. *Sea $\mathcal{S}$ es un proceso no negativo. Entonces, $\mathcal{D}^{\mathcal{S}} \cdot \mathcal{S}$ es no negativo y tiende al infinito en cada camino en el que $\mathcal{S}$ no converge en $\overline{\mathbb{R}}$.*

<u>Demostración:</u> Para un camino ω, definimos $\tau_0(\omega) := -1$ y, para $k = 1, 2, \ldots,$ definimos

$\sigma_k(\omega) := \min\{i > \tau_{k-1}(\omega) \mid \mathcal{S}_i(\omega) \leq a\}, \quad \tau_k(\omega) := \min\{i > \sigma_k(\omega) \mid \mathcal{S}_i(\omega) \geq b\},$

con $\min \varnothing := \infty$. Nuestro muestreador $\mathcal{D}^{a,b}$ se define como

$$\mathcal{D}_i^{a,b} := \begin{cases} 1 & \text{si existe } k \text{ tal que } \sigma_k < i \leq \tau_k, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En cada ronda n, tenemos

$$(\mathcal{D}^{a,b} \cdot \mathcal{S})_n = \mathcal{S}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\mathcal{S}_{\tau_k \wedge n} - \mathcal{S}_{\sigma_k \wedge n}), \tag{6.19}$$

donde los términos nulos se ignoran (lo que hace la suma finita). Todos los términos en la suma son no negativos excepto, posiblemente, uno. En efecto, $\mathcal{S}_0$ es no negativo, y para todo k tal que $\tau_k \leq n$, tenemos $\mathcal{S}_{\tau_k \wedge n} - \mathcal{S}_{\sigma_k \wedge n} = \mathcal{S}_{\tau_k} - \mathcal{S}_{\sigma_k} \geq b - a$, mientras que para todo k tal que $\sigma_k \geq n$, se cumple $\mathcal{S}_{\tau_k \wedge n} - \mathcal{S}_{\sigma_k \wedge n} = 0$. La única excepción posible es el k actual, i.e., k tal que $\sigma_k < n < \tau_k$ (si tal k existe, es único). Si k es el actual, entonces $\mathcal{S}_{\tau_k \wedge n} - \mathcal{S}_{\sigma_k \wedge n} = \mathcal{S}_n - \mathcal{S}_{\sigma_k}$ podría ser negativo. Pero dado que $\mathcal{S}_n \geq 0$ y $\mathcal{S}_{\sigma_k} \leq a$, este término negativo es al menos $-a$.

De esto podemos concluir que $\mathcal{D}^{a,b} \cdot \mathcal{S}$ es no negativo. Para ver que $(\mathcal{D}^{a,b} \cdot \mathcal{S})_n \geq 0$ a pesar de un posible término negativo en la suma, basta con considerar tres casos:

1. $\mathcal{D}^{a,b} = 1$ hasta la ronda n. En este caso, $\mathcal{D}^{a,b} \cdot \mathcal{S}$ toma las ganancias de $\mathcal{S}$ todo el tiempo hasta n, y por lo tanto $(\mathcal{D}_{a,b} \cdot \mathcal{S})_n = \mathcal{S}_n$.

2. $\mathcal{D}_1^{a.b} = 0$. En este caso, $\mathcal{S}_0 > a$, y dado que el único término negativo posible en la suma es al menos $-a$, la suma es positiva.

3. $\mathcal{D}_1^{a.b} = 1$ pero no siempre hasta la ronda n. En este caso, $\mathcal{D}^{a,b} \cdot \mathcal{S}$ comienza en $\mathcal{S}_0$, pero el primer término en la suma será al menos $b - \mathcal{S}_0$. De nuevo, dado que el único término negativo posible en la suma es al menos $-a$, la suma es positiva.

También podemos concluir que si $\mathcal{S}$ es menor o igual que a infinitamente a menudo y mayor o igual que b infinitamente a menudo, entonces $\mathcal{D}_{a,b} \cdot \mathcal{S}$ tiende al infinito. Esto es porque, a medida que n tiende a infinito, la suma adquirirá un número ilimitado de términos mayores o iguales a $b - a$, mientras que nunca tendrá más de un término negativo, que nunca será menor que $-a$.

Por el lema 6.18 y (6.18),

$$\mathcal{D}^{\mathcal{S}} \cdot \mathcal{S} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} (\mathcal{D}^{a_k, b_k} \cdot \mathcal{S}). \tag{6.20}$$

(6.20) nos pone en posición de establecer las dos afirmaciones del lema:

1. Dado que los términos $\mathcal{D}^{a_k, b_k} \cdot \mathcal{S}$ son todos no negativos, (6.20) implica que $\mathcal{D}^{\mathcal{S}} \cdot \mathcal{S}$ es no negativo.

2. Si $\mathcal{S}_n$ no converge en $\overline{\mathbb{R}}$ cuando $n \to \infty$, existen números racionales positivos $a < b$ tales que $\mathcal{S}$ es menor o igual que a infinitamente a menudo y mayor o igual que b infinitamente a menudo. En este caso, $\mathcal{D}^{a,b} \cdot \mathcal{S}$ tiende al infinito y, por lo tanto, por (6.20), $\mathcal{D}^{\mathcal{S}} \cdot \mathcal{S}$ también tiende al infinito.

□

El siguiente teorema es un resultado equivalente al teorema de la convergencia de Doob para la teoría de juegos.

Teorema 6.20. ***(De la convergencia de Doob)*** *Si $\mathcal{T}$ es una supermartingala no negativa, entonces $\mathcal{T}_n$ converge en $\mathbb{R}$ casi seguramente.*

Demostración: Sea
$$\mathcal{T}^* := \frac{1}{2}\left(\mathcal{T} + \mathcal{D}^{\mathcal{T}} \cdot \mathcal{T}\right). \tag{6.21}$$
El lema 6.17 implica que $\mathcal{T}^*$ es una supermartingala no negativa. El lema 6.19 implica que tiende al infinito en cualquier camino donde $\mathcal{T}_n$ no converge en $\mathbb{R}$. Por lo tanto, $\mathcal{T}^*$ certifica la convergencia casi segura de $\mathcal{T}_n$ en $\mathbb{R}$. (Recordamos que un evento sucede de forma casi segura si y solo si existe una supermartingala no negativa que tiende al infinito cuando el evento no sucede). □

Al considerar muestreadores que detienen una semimartingala no negativa cuando su compensador se vuelve demasiado grande, también obtenemos el siguiente resultado más general:

Lema 6.21. *Si $\mathcal{U}$ es una semimartingala no negativa con $\mathcal{A}$ como compensador, entonces $\mathcal{U}$ converge en $\mathbb{R}$ en casi todos los caminos en los que $\mathcal{A}_\infty := \lim_{n\to\infty} \mathcal{A}_n < \infty$*

Demostración: Consideramos la supermartingala $\mathcal{T}$ definida como $\mathcal{T} := \mathcal{U} - \mathcal{A}$. Para $k \in \mathbb{N}$, definimos un muestreador $\mathcal{D}^k$ como $\mathcal{D}^k_n := \mathbb{1}_{\mathcal{A}_n \le k}$. Dado que $\mathcal{U}$ es no negativa y $\mathcal{A}$ es creciente,
$$\mathcal{D}^k \cdot \mathcal{T} = \mathcal{D}^k \cdot (\mathcal{U} - \mathcal{A}) \ge -k,$$
y, por lo tanto, $\mathcal{D}^k \cdot \mathcal{T} + k$ es una supermartingala no negativa. Ahora consideramos el proceso previsible
$$\mathcal{D}^\dagger = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \mathcal{D}^k.$$
Usando el lema 6.18 y escribiendo
$$\mathcal{D}^\dagger := \mathcal{T} + 2 = \mathcal{D}^\dagger \cdot \mathcal{T} + \sum_{k=1}^{\infty} k 2^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}(\mathcal{D}^k \cdot \mathcal{T} + k), \tag{6.22}$$
vemos que la supermartingala $\mathcal{D}^\dagger \cdot \mathcal{T} + 2$ es no negativa.

Consideramos un camino en el cual $\mathcal{A}_\infty < \infty$. Por la definición de $\mathcal{D}^k$, vemos que:

- Para $k \geq \mathcal{A}_\infty$, $(\mathcal{D}^k \cdot \mathcal{T})_n = \mathcal{T}_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y
- Para $k < \mathcal{A}_\infty$, $(\mathcal{D}^k \cdot \mathcal{T})_n$ no depende de n para n suficientemente grande.

Se sigue de (6.22) que $(\mathcal{D}^\dagger := \mathcal{T} + 2)_n$ converge en $\mathbb{R}$ cuando $n \to \infty$ si y solo si $\mathcal{T}_n$ converge en $\mathbb{R}$. De hecho, a partir de algún n en adelante, $(\mathcal{D}^\dagger \cdot \mathcal{T} + 2)_n$ será la combinación convexa $\alpha c + (1-\alpha)\mathcal{T}_n$ de una constante c y $\mathcal{T}_n$ con el mismo $\alpha \in [0,1]$.

Ahora aplicamos la construcción en la demostración del lema 6.20 a la supermartingala no negativa $\mathcal{D}^\dagger \cdot \mathcal{T} + 2$. Esto produce una supermartingala no negativa, denotada $\mathcal{U}^*$, tal que $\mathcal{U}^*_n$ tiende a infinito cuando $n \to \infty$ en cada camino en el cual $(\mathcal{D}^\dagger \cdot \mathcal{T} + 2)_n$ no converge en $\mathbb{R}$. En particular, $\mathcal{U}^*_n$ tiende a infinito en cada camino en el cual $\mathcal{A}_\infty < \infty$ y $\mathcal{U}_n$ no converge en $\mathbb{R}$, porque en tal camino $\mathcal{T}_n$ no converge en $\mathbb{R}$ y, por lo tanto, $(\mathcal{D}^\dagger \cdot \mathcal{T} + 2)_n$ no converge en $\mathbb{R}$. $\square$

Ahora podemos pasar a demostrar el teorema 6.11:
Demostración: (Del teorema 6.11)
1. Consideremos la supermartingala $\mathcal{S}$ dada por

$$\mathcal{S}_n := \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{i}$$

y el proceso previsible no negativo creciente $\mathcal{A}$ dado por

$$\mathcal{A}_n := \sum_{i=1}^{n} \frac{v_i}{i^2}. \tag{6.23}$$

La diferencia

$$\mathcal{S}_n^2 - \mathcal{A}_n = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{i}\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} \frac{v_i}{i^2} = \sum_{i=1}^{n} M_i y_i + \sum_{i=1}^{n} V_i (y_i^2 - v_i), \tag{6.24}$$

donde

$$M_i := \frac{2}{i}\left(\sum_{j=1}^{i-1} \frac{y_j}{j}\right) \quad \text{y} \quad V_i := \frac{1}{i^2},$$

es una supermartingala, y por lo tanto $\mathcal{S}^2$ es una semimartingala con $\mathcal{A}$ como compensador.

Dado que $(\mathcal{S}+1)^2 - \mathcal{S}^2 = 2\mathcal{S}+1$ es una supermartingala, se sigue que $(\mathcal{S}+1)^2$ también es una semimartingala con $\mathcal{A}$ como compensador. Por lo tanto, por el lema 6.20, tanto $\mathcal{S}^2$ como $(\mathcal{S}+1)^2$ convergen en $\mathbb{R}$ en casi todos los caminos en los que $\mathcal{A}_\infty$ es finito, y $\mathcal{S}$, dado que se puede expresar como

$$\mathcal{S} = \frac{(\mathcal{S}+1)^2 - \mathcal{S}^2 - 1}{2},$$

también converge en $\mathbb{R}$ en casi todos estos caminos.

Nuestra conclusión de que $\mathcal{S}$ converge en $\mathbb{R}$ en casi todos los caminos donde $\mathcal{A}_\infty$ es finito se puede expresar diciendo que el Escéptico puede forzar

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n^2} < \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{n} \text{ existe y es finito.}$$

Aplicamos el lema de Kronecker [9]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{n} \text{ existe y es finito } \implies \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i = 0. \tag{6.25}$$

Consideremos las supermartingalas $\mathcal{S}^2 - \mathcal{A}$ de (6.24) y $(\mathcal{S}+1)^2 - \mathcal{A}$, ambas asociadas al proceso previsible $\mathcal{A}$. Aplicamos la transformación del lema 6.21 a ambas supermartingalas. Definimos una estrategia de muestreo $\mathcal{D}^k$ para cada $k \in \mathbb{N}$, donde $\mathcal{D}^k_n = \mathbf{1}_{\mathcal{A}_n \leq k}$, y construimos el proceso previsible combinado $\mathcal{D}^\dagger = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \mathcal{D}^k$. Usamos este muestreador $\mathcal{D}^\dagger$ para generar las supermartingalas

$$\mathcal{D}^\dagger := (\mathcal{S}^2 - \mathcal{A}) + 2$$

y

$$\mathcal{D}^\dagger := ((\mathcal{S}+1)^2 - \mathcal{A}) + 2,$$

que son no negativas y tienden al infinito en cualquier trayectoria donde $\mathcal{A}_\infty < \infty$ y $\mathcal{S}_n$ no converge. Finalmente, promediamos estas estrategias para definir

$$M_n = \frac{1}{2}\big((\mathcal{D}^\dagger \cdot (\mathcal{S}^2 - \mathcal{A}) + 2) + (\mathcal{D}^\dagger \cdot ((\mathcal{S}+1)^2 - \mathcal{A}) + 2)\big),$$

obteniendo una supermartingala no negativa que tiende a infinito $\forall\, \omega$ cuando (6.13) no se cumple, es decir, anunciando M_n en cada ronda n, el Escéptico tiene una estrategia que fuerza (6.13) en el protocolo 6.12.

2. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que el Escéptico fija $\mathcal{K}_0 := 1$. Si el Escéptico elige algún valor positivo mayor que 1 para $\mathcal{K}_0$, la estrategia que daremos para la Realidad funcionará con un reescalamiento apropiado. Si el Escéptico hace $\mathcal{K}_0 \leq 1$, la Realidad puede usar cualquier estrategia que funcione para $\mathcal{K}_0 = 1$.

Definimos una estrategia ρ para la Realidad como sigue:

1. Si $\mathcal{K}_{n-1} + V_n(n^2 - v_n) > 1$, fijar $y_n := 0$.
2. Si $\mathcal{K}_{n-1} + V_n(n^2 - v_n) \leq 1$, y $M_n \leq 0$, fijar $y_n := n$.
3. Si $\mathcal{K}_{n-1} + V_n(n^2 - v_n) \leq 1$, y $M_n > 0$, fijar $y_n := -n$.

Vamos a demostrar que ρ es una estrategia que fuerza (6.14) en el protocolo 6.12. Debemos demostrar que cuando la Realidad juega ρ, ocurre que:
(i) $\mathcal{K}_n < 0$ para algún n o (ii) $\mathcal{K}_n$ está acotado y se cumple (6.14).

[9] Ver el lema IV.3.2 del libro "Probability, 2e", referenciado en la bibliografía.

El Escéptico no obtiene ventaja alguna contra ρ haciendo que algunos de sus M_n sean distintos de cero, ya que esto solo disminuye su capital. Por lo tanto, basta mostrar que ρ logra su objetivo cuando el Escéptico hace todos sus M_n iguales a cero. En este caso,

$$\mathcal{K}_n = \mathcal{K}_{n-1} + V_n(y_n^2 - v_n),$$

y así ρ se reduce a los siguientes dos casos:

- 1'. Si $\mathcal{K}_{n-1} + V_n(n^2 - v_n) > 1$, fijar $y_n := 0$.
- 2'. Si $\mathcal{K}_{n-1} + V_n(n^2 - v_n) \leq 1$, fijar $y_n := n$.

Por lo tanto, el capital del Escéptico está acotado por 1. Solo queda demostrar que $\mathcal{K}_n < 0$ para algún n o que se cumple (6.14). Si la hipótesis del caso $2'$ se satisface infinitamente a menudo, de modo que la Realidad fija $y_n = n$ infinitamente a menudo, entonces

$$\sum_{n=1}^{i} \frac{y_i}{n} \not\to 0,$$

y, por lo tanto, se cumplirá (6.14).

Si $2'$ no se cumple infinitamente a menudo, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n > N$:

- (a) $y_n = 0$, y por lo tanto, el Escéptico pierde el monto no negativo $V_n v_n$ en la ronda n,
- (b) $\mathcal{K}_{n-1} + V_n(n^2 - v_n) > 1$, y por lo tanto $V_n > n^{-2}(1 - \mathcal{K}_{n-1})$, y dado que el Escéptico nunca aumenta su capital después de N, también se tiene $V_n > n^{-2}(1 - \mathcal{K}_N)$,
- (c) y, por lo tanto, de los puntos (a) y (b), el Escéptico pierde al menos $n^{-2} v_n (1 - \mathcal{K}_N)$ en la ronda n, y más si $v_n > 0$.

Asumiendo que $\sum_n v_n n^{-2} = \infty$ (de otro modo se satisface (6.14)), existirán n arbitrariamente grandes para los cuales $v_n > 0$, de modo que $\mathcal{K}_n$ eventualmente será menor que 1 después de $N \implies 1 - \mathcal{K}_N > 0$.

Se sigue de (c) y $\sum_n v_n n^{-2} = \infty$ que la pérdida acumulativa del Escéptico después de N será ilimitada, eventualmente llevando a la Realidad a su objetivo al hacer $\mathcal{K}_n < 0$. $\square$

6.3 Deducción de resultados de la teoría de la medida mediante supermartinagalas

El último objetivo de este apéndice es relacionar nuestro concepto de supermartingala de la teoría de juegos con el de supermartinagala en la teoría de la medida. Esto no es díficil, si consideramos las supermartingalas en teoría de juegos como funciones de los movimientos del Escéptico y les imponemos la

condición de medibilidad, estas se convierten en supermartingalas en un sentido de la teoría de la medida al sustituir los movimientos del Escéptico por variables aleatorias.
Para ilustrar esto veremos como, imponiendo ciertas condiciones de medibilidad, podemos extender la ley de los grandes números de Kolmogorov en un contexto de la teoría de juegos que hemos dado para demostrar la ley de los grandes números de Kolmogorov en un sentido de la teoría de la medida.

La estrategia que construimos para el Escéptico, siendo el resultado de procesos aritméticos simples y límites, es obviamente medible en el sentido de Borel. Por lo tanto, podemos fortalecer la declaración 1 del teorema 6.11 al siguiente enunciado:

Proposición 6.22. *El Escéptico puede forzar en el sentido de Borel que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n^2} < \infty \implies \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (y_i - m_i) = 0, \tag{6.26}$$

en el protocolo 6.8.

Sea $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1, \ldots$ el proceso de capital derivado de una estrategia medible en el sentido de Borel ψ en el protocolo 6.8. Entonces, $\mathcal{L}_0 := \psi^{\mathrm{f}}$ es el capital inicial, y

$$\mathcal{L}_n(\omega) := \mathcal{L}_{n-1}(\omega) + \psi_n^M(\omega)(y_n - m_n) + \psi_n^V(\omega)((y_n - m_n)^2 - v_n), \tag{6.27}$$

donde $\omega = (m_1, v_1, y_1, m_2, v_2, y_2, \ldots)$, es el capital al final de la ronda n. Las funciones $\mathcal{L}_n$ son funciones medibles de los movimientos del Pronosticador y la Realidad. Si todos los m_n, v_n, y y_n se consideran funciones medibles en un espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$, entonces $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1, \ldots$ también serán funciones medibles en $(\Omega, \mathcal{F})$.

(En este contexto, $(\Omega, \mathcal{F})$ es un espacio medible arbitrario; no usamos el símbolo Ω para designar el espacio muestral de un protocolo, como suele hacerse).

Si $(\mathbb{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ es una filtración en $(\Omega, \mathcal{F})$, y las funciones m_n, v_n y y_n son medibles con respecto a $\mathbb{F}_n$ para cada n, entonces $\mathcal{L}_n$ también será medible con respecto a $\mathbb{F}_n$ para cada n.

El siguiente corolario de la proposición 4.21 es la forma basada en la teoría de la medida de la ley de los grandes números de Kolmogorov.

Corolario 6.23. *Si $y_1, y_2, \ldots$ es una secuencia adaptada de variables aleatorias en un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}, P)$, entonces*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Var_P(y_n \mid \mathcal{F}_{n-1})}{n^2} < \infty \implies \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (y_i - P(y_i \mid \mathcal{F}_{i-1})) = 0 \quad c.s. \tag{6.28}$$

donde Var_P denota la varianza con respecto a la medida de probabilidad P.

Demostración: Según la proposición 6.22, el Escéptico tiene una estrategia medible en el sentido de Borel ψ en el protocolo 6.8, para la cual el proceso de capital $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1, \ldots$, dado por (6.27), es no negativo sin importar cómo se muevan el Pronosticador y la Realidad, y tiende a infinito si falla (6.28).

Fijamos versiones de las expectativas condicionales $P(y_n \mid \mathcal{F}_{n-1})$ y luego de las varianzas condicionales $\mathrm{Var}_P(y_n \mid \mathcal{F}_{n-1})$ (asegurándonos de que estas últimas sean no negativas), y las sustituimos por m_n y v_n en (4.18). Similarmente, sustituimos la variable aleatoria y_n por el movimiento y_n en (4.18). La función resultante $\mathcal{L}_n$ en Ω es medible con respecto a $\mathcal{F}_n$. Similarmente, ψ_n^M y ψ_n^V se convierten en funciones en Ω medibles con respecto a $\mathcal{F}_{n-1}$, y podemos reescribir (6.27) en la forma

$$\mathcal{L}_n := \mathcal{L}_{n-1} + \psi_n^M \left(y_n - P(y_n \mid \mathcal{F}_{n-1})\right)$$
$$+\psi_n^V \left((y_n - P(y_n \mid \mathcal{F}_{n-1}))^2 - \mathrm{Var}_P(y_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) \right).$$

Esto implica que $P(\mathcal{L}_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = \mathcal{L}_{n-1}$. Por lo tanto, $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1, \ldots$ es una martingala en el sentido de la teoría de la medida. Es no negativa y tiende a infinito si falla (6.28). Por el teorema de convergencia de Doob [10], una martingala en el sentido de la teoría de la medida no negativa tiende a infinito con probabilidad 0. Así que (6.18) ocurre casi seguramente. □

[10] Ver Ver el Teorema VII.4.1 del libro "Probability, 2e", referenciado en la bibliografía.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Shafer, G., & Vovk, V. (2019). *Game-Theoretic Foundations for Probability and Finance*. Wiley.

[2] Shafer, G., & Vovk, V. (2001). *Probability and Finance: It's Only a Game!*. Wiley.

[3] Elvira Benito, O., & Puig Pla, X. (2015). *Comprender los productos derivados: Futuros, opciones, productos estructurados, caps, floors, collars, CFDs*. Profit Editorial.

[4] Bauer, H. (2001). *Measure and Integration Theory*. De Gruyter.

[5] Baldi, P. (2002). *Probability: An Introduction Through Theory and Exercises*. Springer.

[6] Shiryaev, A. N. (1996). *Probability* (2ª ed.). Springer.

[7] Dellacherie, C. (1972). *Ensembles analytiques, capacités, mesures de Hausdorff*. Springer.

[8] Ville, J. (1939). *Étude critique de la notion de collectif*. Gauthier-Villars.

[9] Halmos, R. R. (1950). *Measure Theory*. Springer.

[10] Dellacherie, C., & Meyer, P.-A. (1988). *Probabilities and Potential. C: Potential Theory for Discrete and Continuous Semigroups*. North-Holland.

[11] Engelking, R. (1989). *General Topology* (2ª ed.). Heldermann Verlag.