UNIVERSITAT DE BARCELONA

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

Modelització i pricing de futurs de temperatura

Autora: Silvia Poveda Alarcón

Directors:	**Dr. David Márquez Carreras i Dra. Sara Ana Solanilla Blanco**
Realitzat a:	**Departament de Probabilitats i Estadística i Departament de Matemàtica Econòmica Financera i Actuarial (Facultat d'Economia i Empresa)**
Barcelona,	**15 de gener de 2025**

Abstract

This work aims to analyze a section of the article published in the 'Journal of Energy Markets': "Approximation of the price dynamics of Heating Degree Day (HDD) and Cooling Degree Day (CDD) temperature futures", written by the co-supervisor of this project, Sara Ana Solanilla, together with Fred Espen Benth. The article proposes an approximation for pricing temperature futures based on the climatic indices Heating Degree Day (HDD) and Cooling Degree Day (CDD). This indices are assumed to depend linearly on temperature, which is modeled using a continuous-time autoregressive dynamic process. Based on this modeling, which uses climate data from New York, an adaptation of the Black-76 formula is applied to determine the price of a call option on HDD and CDD futures.

Specifically, this work will focus on the section related to the valuation of a future based on the aforementioned indices, highlighting the challenges encountered when attempting to price a European call option on these futures. Additionally, the modeling of the temperature variable will be further examined, reproducing the empirical case considered in the article.

To provide a theoretical framework for this work, the first five chapters present the necessary mathematical theory. This part includes an introduction to stochastic processes, with a particular focus on Brownian motion; the definition and construction of the Itô integral, highlighting its importance; the Itô formula in the unidimensional case and one of its fundamental applications, Girsanov's theorem; and, finally, the theory of stochastic differential equations (SDEs).

This project seeks to offer a perspective that bridges mathematical theory with its practical application in the field of climate derivatives, emphasizing the relevance of HDD and CDD indices in managing temperature-related risk.

Resum

Aquest treball té com a objectiu principal analitzar una part de l'article publicat a la revista de mercats energètics *Journal of Energy Markets*: "Approximation of the price dynamics of heating degree day (HDD) and cooling degree day (CDD) temperature futures", redactat per la cotutora del treball, la Sara Ana Solanilla, conjuntament amb el Fred Espen Benth. L'article proposa una aproximació per al preu dels futurs de temperatura a partir dels índexos climàtics Heating Degree Day (HDD) i Cooling Degree Day (CDD). Es considera que aquests índexos depenen linealment de la temperatura, que es modelitza mitjançant una dinàmica autoregressiva en temps continu. A partir d'aquesta modelització, basada en dades climàtiques de Nova York, s'utilitza una adaptació de la fórmula de Black-76 per determinar el preu d'una opció call sobre futurs d'HDD i CDD.

En concret, s'analitzarà la part relacionada amb la valoració d'un futur basat en els índexos mencionats, posant de manifest la problemàtica que sorgeix quan es pretén fer el pricing d'una opció call europea sobre aquests futurs. Addicionalment, s'aprofundirà en la modelització la variable temperatura, reproduint el cas empíric considerat a l'article.

Per tal de proporcionar un marc teòric sòlid, durant els cinc primers capítols es presenta la teoria matemàtica necessària. Aquesta part inclou una introducció als processos estocàstics, amb especial èmfasi en el moviment Brownià; la definició i la construcció de la integral d'Itô, destacant-ne la importància; la fórmula d'Itô en el cas unidimensional i una de les seves aplicacions fonamentals, el teorema de Girsanov; i, finalment, la teoria de les equacions diferencials estocàstiques (EDE).

Amb aquest treball, es busca oferir una perspectiva que connecti la teoria matemàtica amb la seva aplicació pràctica en el camp dels derivats climàtiques, destacant la utilitat dels índexos HDD i CDD en la gestió del risc associat a la temperatura.

Agraïments

En primer lloc, vull agrair al meu tutor i a la meva tutora, el David Márquez Carreras i la Sara Ana Solanilla Blanco. Ambdós han estat sempre disponibles i atents a tot el que he necessitat durant el desenvolupament del treball. A més a més, m'han proporcionat material addicional que ha estat clau per garantir-ne el bon desenvolupament.

En particular, vull agrarir a la Sara per facilitar-me tant l'article com la seva tesi, que han estat essencials per a l'anàlisi realitzada. També vull destacar la seva ajuda proporcionant-me les dades per a la modelització de la temperatura, així com el suport per al correcte ús del Matlab.

Finalment, vull agrair a la meva família, a la meva parella, i als meus amics i amigues, tant de dins com de fora de la Facultat, per tot el suport i l'ànim que m'han donat al llarg d'aquests mesos.

Índex

1 Introducció al càlcul estocàstic 1
1.1 Processos estocàstics 1
1.1.1 Llei d'un procés estocàstic 1
2 El moviment Brownià 5
2.1 Definicions 5
2.2 Construcció de Paul Lévy 6
2.3 Algunes propietats 9
2.4 La propietat de martingala 13
2.5 La propietat de Markov 15
3 La integral de Itô 17
3.1 Introducció 17
3.2 La integral de Itô com a procés estocàstic 22
3.3 Una extensió de la integral de Itô 23
4 Fórmules d'Itô 25
4.1 Fórmula 1-dimensional 25
4.2 Teorema de Girsanov 26
5 Equacions diferencials estocàstiques 29
5.1 Introducció 29
5.2 Equacions diferencials estocàstiques ordinàries 30
5.3 Teorema d'existència i unicitat de solucions 31
5.4 Propietats de les solucions 31
6 Mercat de derivats climàtics i pricing d'un futur 33
6.1 Mercat de derivats 33
6.1.1 Contractes de futurs i d'opcions 34
6.1.2 Pricing o valoració d'un futur 35
6.2 El mercat de derivats meteorològics 36
6.2.1 Heating Degree Days (HDD) i Cooling Degree Days (CDD) 37
6.2.2 Pricing d'un derivat de temperatura 39

7 Modelització de la temperatura i pricing d'un futur 40
7.1 Model proposat 40
7.2 Transformada de Girsanov 41
7.3 Pricing d'un futur 42
8 Modelització empírica de la temperatura 45
8.1 Relació entre els coeficients del model CAR(p) i els del model AR(p) 50
9 Conclusions 51
10 Apèndix 52
10.1 Funcions característiques 52
10.2 Variables aleatòries Gaussianes uni i multidimensionals 53
10.3 Alguns resultats importants de teoria de probabilitats 54
10.4 Esperança condicionada per una σ-àlgebra 55
10.5 Algunes demostracions del moviment Brownià 56
10.6 Demostracions de la integral d'Itô 57
10.7 Relació entre un procés CAR(p) i un AR(p) 59

1 Introducció al càlcul estocàstic

La teoria presentada en aquesta secció, així com en les cinc següents, és la necessària per a la comprensió de l'anàlisi de l'article mencionat. Excepte en els casos on es citin referències específiques, la teoria exposada s'ha extret principalment del llibre de Sanz-Solé [1].

Abans d'entrar en el contingut del capítol, és important remarcar que, al llarg del treball, treballarem en un espai de probabilitat. A continuació, definim el concepte:

Definició 1.1. *(espai de probabilitat) Un espai de probabilitat és una terna* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *on* Ω *és l'espai mostral,* $\mathcal{F}$ *una* σ*-àlgebra de* Ω *i* P *una probabilitat, és a dir, una aplicació* $P : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}$ *que pren valors a* $[0, 1]$ *complint* $P(\Omega) = 1$ *i que és* σ*-additiva.*

Abans de seguir, és essencial tenir clars alguns conceptes bàsics de teoria de Probabilitats. Els necessaris per al seguiment d'aquest capítol es troben a l'Apèndix, exactament a les seccions 10.1, 10.2, 10.3 i 10.4.

A continuació, introduïm el concepte més important d'aquest treball: els processos estocàstics.

1.1 Processos estocàstics

Considerem un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$. La noció de procés estocàstic ens permet descriure l'evolució de fenòmens aleatoris que prenen valors en un conjunt S, conegut com a *conjunt d'estats*. Associat a S, considerarem una σ-àlgebra de parts de S, denotada per $\mathcal{S}$, que habitualment serà $\mathcal{S} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, és a dir, la σ-àlgebra de Borel generada pels intervals oberts.

Definició 1.2. *(procés estocàstic) Sigui* I *un subconjunt de* $\mathbb{R}$ *(normalment serà un interval positiu), un procés estocàstic* X *en un espai d'estats* S *és una família* $\{X_i, i \in I\}$ *de variables aleatòries* $X_i : \Omega \longrightarrow S$*.*

Podem entendre un procés estocàstic com una aplicació

$$\begin{aligned} X_\cdot : \mathbb{R}^+ &\to L^0 \equiv L^0(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathbb{R}) \\ t &\mapsto X_t \end{aligned}$$

on L^0 denota l'espai vectorial de totes les variables aleatòries.

1.1.1 Llei d'un procés estocàstic

Com en el cas de les variables aleatòries, pels processos estocàstics també podem definir la seva llei.

Definició 1.3. *(distribucions conjuntes) Donat un procés estocàstic* $\{X_i, i \in I\}$*, definim les seves distribucions conjuntes de dimensió finita com una col·lecció de lleis de probabilitat multidimensionals d'una família finita de vectors aleatoris* $X_{i_1}, \ldots, X_{i_m}$*, on* $i_1, \ldots, i_m \in I$ *i* $m \in \mathbb{N}$*.*

Definició 1.4. *(procés estocàstic Gaussià) Un procés estocàstic $\{X_i, i \in I\}$ es dirà Gaussià si les seves distribucions conjuntes de dimensió finita són lleis Gaussianes, és a dir, per qualsevol $m \in \mathbb{N}$ i $t_1, \ldots, t_m \in I$, el vector aleatori m-dimensional $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_m})$ segueix una distribució normal m-dimensional.*

Podem considerar un procés estocàstic $\{X_t, t \geq 0\}$ com un vector aleatori

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^I,$$

escollint una σ-àlgebra d'esdeveniments a $\mathbb{R}^I$ [1] anomenada $\mathcal{B}(\mathbb{R}^I)$.

Ara sí, podem definir la llei d'un procés estocàstic. Formalment:

Definició 1.5. *(llei d'un procés estocàstic) La llei d'un procés estocàstic $\{X_t, t \geq 0\}$ és la llei d'una variable aleatòria $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}^+}$ definida per*

$$\begin{aligned} X : \Omega &\to \mathbb{R}^{\mathbb{R}^+} \\ \omega &\mapsto X_\cdot(\omega), \end{aligned}$$

prenent una σ-àlgebra producte de $\mathbb{R}_+$ còpies de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, denotada per $\mathcal{B}(\mathbb{R})^{\mathbb{R}_+}$.

L'existència de la llei d'un procés, la qual podem anomenar P_X, queda demostrada pel teorema següent:

Teorema 1.6. *(Teorema de Kolmogorov) Considerem una família*

$$\{P_{t_1,\ldots,t_n}, t_1 < \cdots < t_n, t_i \in \mathcal{I}, n \geq 1\}$$

on:

(1) $P_{t_1,\ldots,t_n}$ és una probabilitat a $\mathbb{R}^n$

(2) Si $\{t_{i_1} < \cdots < t_{i_m}\} \subset \{t_1 < \cdots < t_n\}$, la llei de probabilitat $P_{t_{i_1}\ldots t_{i_m}}$ és la distribució marginal de $P_{t_1,\ldots,t_n}$

Aleshores existeix un procés estocàstic $\{X_t, t \in I\}$ definit en algun espai de probabilitat tal que la seva distribució conjunta de dimensió finita ve donada per

$$\{P_{t_1,\ldots,t_n}, t_1 < \cdots < t_n, t_i \in I, n \geq 1\},$$

és a dir, la llei del vector aleatori $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ és $P_{t_1,\ldots,t_n}$.

Demostració. La demostració es pot consultar a [2]. □

Fins ara hem introduït els processos estocàstics Gaussians mitjançant les seves distribucions conjuntes de dimensió finita, que són Gaussianes. Tanmateix, no hem demostrat l'existència d'aquestes, és a dir, no hem provat que existeixi un objecte que satisfaci les hipòtesi del teorema de Kolmogorov. A continuació, ho veiem:

Sigui $k : I \times I \to \mathbb{R}$ una funció simètrica i definida no negativa, és a dir, complint:

[1] [2] $\mathbb{R}^I$ és un conjunt complex i per tant, no entrarem en detall. No obstant, representa el producte cartesià de I còpies de $\mathbb{R}$.

1. Per a tot $s,t \in I$, $k(t,s) = k(s,t)$;
2. Per a tot $n \in \mathbb{N}$, $t_1, \ldots, t_n \in I$ i $x_1, \ldots x_n \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{i,j=1}^{n} k(t_i, t_j) x_i x_j \geq 0.$$

Adonem-nos que un exemple de funció simètrica, definida i no negativa són les funcions de covariància d'un vector aleatori. Amb això, la següent proposició ens dona l'existència que volem provar:

Proposició 1.7. *Sigui $k : I \times I \to \mathbb{R}$ una funció simètrica definida i no negativa, aleshores existeix un procés Gaussià $\{X_t, t \geq 0\}$ tal que $\mathbb{E}(X_t) = 0$, per tot $t \in I$ i $Cov(X_{t_i}, X_{t_j}) = k(t_i, t_j)$, per tot $t_i, t_j \in I$.*

Demostració. Fixem $t_1, \ldots, t_n \in I$ i definim

$$\begin{aligned} \mu_{t_1,\ldots,t_n} &= (0, \ldots, 0); \\ \Lambda_{t_1,\ldots,t_n} &= (K(t_i, t_j))_{1 \leq i,j \leq n}; \\ P_{t_1,\ldots,t_n} &\sim N(0, \Lambda_{t_1,\ldots,t_n}). \end{aligned}$$

Observem que $P_{t_1,\ldots,t_n}$ és una llei gaussiana n-dimensional amb mitjana 0 i matriu de covariància $\Lambda_{t_1,\ldots,t_n}$. Per tant, si $det(\Lambda_{t_1,\ldots,t_m}) > 0$, aleshores la llei de $P_{t_1,\ldots,t_n}$ té densitat, i aquesta ve donada per la d'una normal multivant (l'expressió es troba a Apèndix 10.2). Per tant, si considerem $(X_{t_{i_1}}, \ldots, X_{t_{i_n}})$ el vector aleatori amb llei $P_{t_1,\ldots,t_n}$, per qualsevol $\{t_{i_1}, \ldots, t_{i_n}\} \subset \{t_1, \ldots, t_n\}$ tenim que

$$A(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) = (X_{t_{i_1}}, \ldots, X_{t_{i_m}})$$

amb

$$A = \begin{pmatrix} \delta_{t_1,t_{i_1}} & \cdots & \delta_{t_n,t_{i_1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \delta_{t_1,t_{i_m}} & \cdots & \delta_{t_n,t_{i_m}} \end{pmatrix}$$

on $\delta_{s,t}$ és la funció delta de Kronecker. Com sabem que transformacions lineals de vectors aleatoris gaussians són gaussians, sabem que el vector $(X_{t_{i_1}}, \ldots, X_{t_{i_n}}) \sim N(0, A\Lambda_{t_1,\ldots,t_n}A^*)$. Ara, per definició de la nostra matriu A, obtenim que

$$A\Lambda_{t_1,\ldots,t_n}A^* = (K(t_{i_l,t_{i_k}}))_{1 \leq l,k \leq m}.$$

Per tant, es compleixen les hipòtesi del teorema de Kolmogorov i per tant, existeix un procés gaussià amb aquestes condicions. □

Un exemple de procés Gaussià és el moviment Brownià. En el següent capítol el tractarem amb profunditat ja que serà el nostre objecte principal d'estudi.

Abans de continuar, mencionem algunes propietats dels processos estocàstics:

Definició 1.8. *Sigui $\{X_t,\ t \in I\}$ un procés estocàstic. Suposem que $I \subset \mathbb{R}$, amb l'ordre usual. Direm que el procés estocàstic X té*

(1) *Increments independents si per qualsevol elecció de* $t_1 < t_2 < \ldots < t_k$, $k \geq 4$, *les variables aleatòries*

$$X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_k} - X_{t_{k-1}}$$

són independents.

(2) *Increments estacionaris si per algun* $t_1 < t_2$ *la llei de la variable aleatòria* $X_{t_2} - X_{t_1}$ *depèn de* $t_2 - t_1$, *però no del valor particular de* t_1 *i* t_2.

Fins ara, hem vist els processos estocàstics com vectors aleatoris. No obstant, també es poden estudiar fixant valors $\omega \in \Omega$, als quals anomenarem observacions, i estudiar-los com una col·lecció de les seves observacions.

Per tant, podem considerar un procés estocàstic una aplicació donada per

$$\begin{aligned} X : \mathbb{R} \times \Omega &\to \mathbb{R} \\ (t, \omega) &\mapsto X_t(\omega). \end{aligned}$$

Definició 1.9. *(trajectòries) Les trajectòries d'un procés estocàstic* $\{X_t,\ t \in I\}$ *són la família de funcions indexades per* $\omega \in \Omega$,

$$X(\omega) : I \longrightarrow S$$

definida per $X(\omega)(t) = X_t(\omega)$.

2 El moviment Brownià

Tal com hem mencionat anteriorment, un exemple fonamental de procés Gaussià és el moviment Brownià. En aquest capítol ens centrarem a proporcionar-ne una definició formal i a presentar les seves propietats més rellevants, que seran essencials per al desenvolupament del nostre estudi.

2.1 Definicions

Definició 2.1. *(moviment Brownià 1-dimensional) Un procés estocàstic* $\{B_t,\, t \geq 0\}$ *es dirà moviment Brownià si és gaussià, té mitjana 0 i la seva funció de covariància ve donada per* $\mathbb{E}(B_t B_s) = \min(t,s) = t \wedge s$.

Notem que com $\mathbb{E}(B_0^2) = 0$, la variable aleatòria $B_0 = 0$ q.s. Per definició, cada variable aleatòria B_t, $t > 0$ segueix una distribució $N(0,t)$ i, per tant, té densitat

$$f_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2t\pi}} e^{-x^2/2t},\ x \in \mathbb{R}.$$

Observem que derivant $f_t(x)$ un cop respecte t i dos cops respecte $x \in \mathbb{R}$, obtenim

$$\begin{cases} \partial_t\ f_t(x) = \frac{1}{2}\partial^2_{xx}\ f_t(x),\ t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ f(0) = \delta_{\{0\}}. \end{cases}$$

que és l'equació de la calor a $\mathbb{R}$ amb condició inicial $p_0(x) = \delta_{\{0\}}(x)$. Aquest fet implica que la densitat de les variables aleatòries del moviment Brownià es comporten com un fenomen físic de difusió.

Una manera alternativa per demostrar que un procés estocàstic és un moviment Brownià és mitjançant la següent proposició.

Proposició 2.2. *Un procés estocàstic* $X = \{X_t, t \geq 0\}$ *és un moviment Brownià si i només si*

(1) $X_0 = 0$ *q.s.;*

(2) Per qualsevol $0 \leq s < t$*, la variable aleatòria* $X_t - X_s$ *és independent de* X_r*, per* $0 \leq r \leq s$*, i* $X_t - X_s$ *segueix una distribució* $N(0, t-s)$.

Demostració. Primer suposem que $X = \{X_t, t \geq 0\}$ és un moviment Brownià i volem veure que es compleixen les condicions (1) i (2). Per provar (1), usem la definició de moviment Brownià. Com $\mathbb{E}(X_0^2) = 0$, aleshores $X_0 = 0$ q.s. Per veure que també es compleix (2), considerem $0 \leq r \leq s \leq t$. Aleshores

$$\mathbb{E}(X_r(X_t - X_s)) = \mathbb{E}(X_r X_t) - \mathbb{E}(X_r X_s) = r \wedge t - r \wedge s = r - r = 0.$$

Ara usem que el moviment Brownià té esperança 0, és a dir, $\mathbb{E}(X_t) = 0\ \forall t$ per obtenir que

$$\mathbb{E}(X_r(X_t - X_s)) = \mathbb{E}(X_r)\mathbb{E}(X_t - X_s).$$

Com totes aquestes variables són Gaussianes (ja que transformacions lineals de Gaussianes són una Gaussiana) i el vector (X_r, X_t, X_s) també ho és, obtenim la independència de X_r i $X_t - X_s$. Finalment, com $X_t - X_s$ és gaussià, $X_t - X_s \sim N(0, t-s)$ ja que

$$\mathbb{E}((X_t - X_s)^2) = \mathbb{E}(X_t^2) + \mathbb{E}(X_s^2) - 2\mathbb{E}(X_t X_s) = t + s - 2s = t - s$$

i $\mathbb{E}(X_t - X_s) = 0$. Provem ara la implicació de dreta a esquerra. De (1) i (2) obtenim que $\{X_t, t \geq 0\}$ segueix una distribució normal multivariant. Veiem-ho. Prenem $m \geq 1$ i $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_m$ i considerem els vectors aleatoris

$$Y = (X_{t_1}, \ldots, X_{t_m}), \quad Z = (X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_m} - X_{t_{m-1}}),$$

ambdós amb lleis gaussianes. Això és degut al fet que totes les components de Z són gaussianes i independents. Per tant, existeix una matriu A complint

$$Y = AZ.$$

Això implica que Y també és Gaussià i, per tant, X_t també. Aleshores, prenent $0 \leq s \leq t$ i sumant i restant la variable X_s obtenim que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_t X_s) &= \mathbb{E}((X_t - X_s + X_s)X_s) = \mathbb{E}((X_t - X_s)X_s) + \mathbb{E}(X_s^2) \\ &= \mathbb{E}(X_t - X_s)\mathbb{E}(X_s) + \mathbb{E}(X_s^2) = \mathbb{E}(X_s^2) = s = s \wedge t,\end{aligned}$$

provant que $\{X_t, t \geq 0\}$ és un moviment Brownià, com volíem veure. □

Propietats del moviment Brownià:

A continuació, presentem algunes propietats del moviment Brownià. Les demostracions corresponents es troben a la Secció 10.5.

1. Si $\{B_t,\, t \geq 0\}$ és un moviment Brownià, $\{-B_t,\, t \geq 0\}$ també ho és;
2. *(Propietat d'escala)* Per qualsevol $\lambda > 0$, el procés $B^\lambda = \{\frac{1}{\lambda} B_{\lambda^2 t},\, t \geq 0\}$ és també un moviment Brownià;
3. Per qualsevol $a > 0$, $B^{+a} = \{B_{t+a} - B_a,\, t \geq 0\}$ és un moviment Brownià.

2.2 Construcció de Paul Lévy

Hi ha diversos mètodes per construir el moviment Brownià. En aquest apartat ens centrarem en la construcció proposada per Paul Lévy, que es basa a caracteritzar el moviment Brownià com un procés estocàstic continu amb increments independents i estacionaris. Aquests increments segueixen una distribució normal $N(0, t-s)$ en un interval $[0, 1]$. Per garantir l'existència d'un procés amb aquestes propietats i assegurar la continuïtat de les trajectòries, Lévy es va recolzar en el teorema de Kolmogorov, que presentarem més endavant.

La construcció comença amb l'ús d'una família de funcions connegudes com les funcions Haar:

Definició 2.3. *(funcions de Haar) Considerem l'interval* $[0,1]$ *i definim* $h_0(t) = \mathbf{1}_{[0,1]}(t)$,

$$h_{k2^{-n}}(t) = \begin{cases} 2^{\frac{n-1}{2}}, & si\ (k-1)2^{-n} \leq t < k2^{-n}, \\ -2^{\frac{n-1}{2}}, & si\ k2^{-n} \leq t < (k+1)2^{-n}; \end{cases}$$

per $n \geq 1$, $1 \leq k \leq 2^n$, *amb* k *senar.*

Proposició 2.4. *La família* $\{h_0,\ h_{n,k};\ n \geq 1,\ 1 \leq k \leq 2^n,\ k\ senar\}$ *forma un sistema ortonormal complet, és a dir, una base de l'espai de Hilbert* $L^2([0,1])$ [2].

Demostració. La demostració no és difícil de seguir. Es pot trobar a [3]. □

Com a conseqüència, obtenim la *identitat de Parseval*: Per qualsevol $f, g \in L^2([0,1])$,

$$\langle f, g\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{k=0,\\ k\ \text{senar}}}^{2^{n-1}-1} \langle f, h_{k,n}\rangle\langle g, h_{k,n}\rangle. \tag{2.1}$$

Ara definim les *funcions de Schauder* de la següent manera:

$$S_{k,n}(t) = \int_0^t h_{k,n}(u)du\ ,\ 0 \leq t \leq 1\ ,\ n \geq 0\ ,\ k = 0, \ldots, 2^{n-1} - 1,\ k \text{ senar}.$$

Observem que $S_{0,0}(t) = t$ i, per $n \geq 1$, els gràfics de $S_{k,n}$ són petites tendes de campanya centrades a $k/2^n$. Si denotem aquest punt com $t_{k,n}$, les punxes corresponen al valor màxim de $S_{k,n}$, on les funcions prenen el valor

$$\max_{0\leq t\leq 1} |S_{k,n}(t)| = S_{k,n}(t_{k,n}) = \frac{1}{2^{n+1/2}}.$$

Per tant, obtenim que

$$S_{k,n}(t) = \int_0^1 h_{k,n}(a)\mathbf{1}_{[0,t]}(u)dy = \langle \mathbf{1}_{[0,t]}, h_{k,n}\rangle \tag{2.2}$$

i

$$\langle \mathbf{1}_{[0,t]}, \mathbf{1}_{[0,s]}\rangle = \int_0^1 \mathbf{1}_{[0,s]}\mathbf{1}_{[0,t]}du = \int_0^{t\wedge s} du = t \wedge s. \tag{2.3}$$

Apliquem ara la identitat de Parseval (2.1) prenent $f = \mathbf{1}_{[0,s]}$ i $g = \mathbf{1}_{[0,t]}$. Usant (2.2) i (2.3) aleshores tenim que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{k=0,\\ k\ \text{senar}}}^{2^{n-1}-1} S_{k,n}(t)S_{k,n}(s) = t \wedge s.$$

Sigui ara $\{\zeta_{k,n};\ k = 0, \ldots, 2^{n-1} - 1,\ k \text{ senar}\}$ una successió numerable de variables aleatòries Gaussianes estàndard independents, considerem les funcions $\{B_n(t),\ 0 \leq t \leq 1\}$ definides per

$$B_n(t) = \sum_{m=0}^{n} \sum_{\substack{k=0,\\ k\ \text{senar}}}^{2^{n-1}-1} \zeta_{k,m}(w)S_{k,m}(t),\ \text{on } 0 \leq t \leq 1,\ n \geq 0,$$

[2] L'espai L^2 denota totes les funcions mesurables i de quadrat integrables.

que convergiran al moviment Brownià. Volem avaluar els punts del procés $B_n(t)$ a $t = k/2^n$ per k senar i $n \geq 0$ per veure com es defineix el procés i convergeix cap a on volem.

Com $\zeta_{k,m}$ són variables gaussianes, els valors del procés $B_n(t)$ a $t = \frac{k}{2^n}$ que, recordem que és el punt on $S_{k,m}$ pren el seu valor màxim, també ho són. No és difícil provar que aquests valors també són centrats i amb trajectòries contínues. Considerem doncs

$$\begin{aligned}\|B_n(t) - B_{n-1}(t)\|_\infty &= \sup_{0\leq t\leq 1} |B_n(t,w) - B_{n-1}(t,w)| \\ &= \sup_{0\leq t\leq 1} \left| \sum_{\substack{1\leq k\leq 2^n \\ k \text{ senar}}} \zeta_{k,n} S_{k,n}(t) \right| \leq 2^{-\frac{n+1}{2}} \max_{\substack{1\leq k\leq 2^n \\ k \text{ senar}}} |\zeta_{k,n}(w)| .\end{aligned}$$

Abans de seguir, necessitem acotar $\zeta_{k,n}$. Per fer-ho, considerem la següent cota, que usarem en el proper pas:

$$\int_a^\infty e^{-u^2/2} du \leq \int_a^\infty \frac{u}{a} e^{-u^2/2} du = \frac{1}{a} e^{-a^2/2}.$$

D'aquesta manera, tenim que

$$\begin{aligned} P\left(\|B_n(t) - B_{n-1}(t)\|_\infty > \sqrt{2\cdot 2^{-n}\log 2^n}\right) &\leq P\left(\max_{\substack{1\leq k\leq 2^n \\ k \text{ senar}}} |\zeta_{k,n}| > 2\sqrt{n\log 2}\right) \\ &= P\left(\bigcup_{k=1, k \text{ senar}}^{2^n} \left\{|\zeta_{k,n}| > 2\sqrt{n\log 2}\right\}\right) \\ &\leq 2^{n-1} P\left(|\zeta_{k,n}| > 2\sqrt{n\log 2}\right) \\ &= 2^{n-1}\cdot 2 \int_{2\sqrt{n\log 2}}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\, du \\ &\leq \frac{2^{n-1}\exp\left(-\frac{1}{2} n\log 2\right)}{\sqrt{2\pi}\sqrt{n\log 2}} \\ &= \frac{2^{-(n-1)}}{\sqrt{2\pi n\log 2}}. \end{aligned}$$

Prenem $A_n = \{w;\ \|B_n(w) - B_{n-1}(w)\|_\infty > \sqrt{2^{-n+1}\log 2^n}\}$ i, com tenim que

$$\sum_{k=1}^\infty P(A_n) < \infty,$$

aplicant el primer lema de Borel-Cantelli (es pot trobar detallat a la Secció 10.3), obtenim

$$P(\liminf_n A_n^c) = 1.$$

Això significa que $N = \limsup_n(A_n)$ és un conjunt de mida 0; per $\forall w \notin N$, $\exists n_0(w)$ tal que

$$\|B_n(w) - B_{n-1}(w)\|_\infty \leq \sqrt{2^{-n+1}\log 2^n}, \text{ si } n \geq n_0(w).$$

Per tant, $\sum_n |B_n(t) - B_{n-1}(t)|$ convergeix q.s. Aleshores, per $w \notin N$, la successió $\{B_n(t,w),\, n \geq 0\}$ convergeix a l'espai $\mathcal{C}([0,1])$. Definint

$$B(t,w) = \begin{cases} \lim_n B_n(t,w), & \text{si } w \notin N, \\ 0, & \text{si } w \in N, \end{cases}$$

tenim que el procés $\{B(t,w),\, t \in [0,1]\}$ té trajectòria contínua [3] i és Gaussià, per pertànyer a totes les combinacions lineals possibles generades pels elements de la família $\{\zeta_{k,n}\}$ i tots els límits d'aquestes combinacions en l'espai L^2. D'altra banda,

1. $\lim_n \mathbb{E}[B_n(t)] = 0$, $\forall t \in [0,1]$;
2. $\lim_n \mathbb{E}[B_n(s)B_n(t)] = s \wedge t$, $\forall s,t \in [0,1]$.

Usant funcions característiques, que es poden trobar a la Secció 10.1, les propietats anteriors impliquen que per cada $t_1, \ldots,\, t_k \in [0,1]$, el vector aleatori $(B_n(t_1), \ldots, B_n(t_k))$ convergeix en llei a un vector normal k-dimensional, centrat i amb matriu de covariàncies $\{(t_i \wedge l_j)\}$. Per tant, convergeix quasi segurament al moviment Brownià $\{B(t_1), \ldots, B(t_k)\}$.

Fins aquí, hem construït el moviment Brownià a l'interval $[0,1]$. Per extendre aquesta definició a tot $\mathbb{R}_+$, considerem la successió $B^{(k)}$, $k \geq 1$ de moviments Brownians $\{B_t^{(k)}, t \in [0,1]\}$ independents. Aleshores

$$B_t = B_1^{(1)} + \cdots + B_1^{(k)} + B_{t-k}^{(k+1)},\ t \in [k, k+1]$$

defineix un procés estocàstic $B = \{B_t, t \geq 1\}$ que és un moviment Brownià.

2.3 Algunes propietats

Continuïtat de Hölder de les trajectòries

Definició 2.5. *(funció localment Hölder contínua) Una funció $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ és localment Hölder contínua amb exponent $\gamma \in (0,1]$ si per tot conjunt acotat $\Theta \subset \mathbb{R}$, existeix una constant $\|g\|_{\mathcal{C}^\gamma(\Theta)} < \infty$ satisfent*

$$\sup_{\substack{x,y \in \Theta \\ x \neq y}} \frac{|g(x) - g(y)|}{|x-y|^\gamma} = \|g\|_{\mathcal{C}^\gamma(\Theta)}\,.$$

Si $\gamma = 1$, es diu que la funció g és localment Lipschitz contínua.

Les trajectòries del moviment Brownià són γ-Hölder contínues per qualsevol $\gamma \in (0, \frac{1}{2})$. Aquest fet és conseqüència del criteri de continuïtat de Kolmogorov:

Proposició 2.6. *Sigui $\{X_t,\, t \geq 0\}$ un procés estocàstic satisfent: Per qualsevol conjunt acotat de $\Theta \subset \mathbb{R}_+$, existeixen nombres reals positius $\alpha \geq 1$,β i η; de manera que per qualsevol $s,t \in \Theta$, es compleix*

$$\mathbb{E}[|X_t - X_s|^\alpha] \leq \eta\,|t-s|^{1+\beta}\,,$$

aleshores les trajectòries del procés són, quasi segurament, γ-Hölder contínues amb $\gamma \in (0, \frac{\beta}{\alpha})$.

[3] Si f_n són funcions contínues convergint uniformement a una funció f, aquesta funció f és contínua.

Demostració. La demostració formal es pot trobar a [4]. □

Veiem-ho pel cas del moviment Brownià $\{B_t,\, t \leq 0\}$. Per a cada $0 < s < t$, tenim que $B_t - B_s \sim N(0, t-s)$, per la Proposició 2.2. Aleshores, per qualsevol $k \in \mathbb{N}$, obtenim

$$\mathbb{E}[|B_t - B_s|^{2k}] = \frac{(2k)!}{2^k k!}(t-s)^k. \tag{2.4}$$

Com volem obtenir la desigualtat donada a l'enunciat, prenem $\alpha = 2k$ i $1 + \beta = k\,(\Leftrightarrow \beta = k-1)$. Per tant deduïm que les trajectòries són, quasi segurament, Hölder contínues amb exponent

$$\gamma \in (0, \frac{\beta}{\alpha}) = (0, \frac{k-1}{2k})$$

que, prenent $k \to \infty$, dona $\gamma \in (0, \frac{1}{2})$.

Pot ser natural preguntar-se què passa quan $\gamma \geq \frac{1}{2}$. Pel cas, $\gamma > \frac{1}{2}$, es demostrarà amb un argument basat en la variació quadràtica del procés, que definirem al proper apartat. Pel cas $\gamma = \frac{1}{2}$, es demostra mitjançant el teorema de Paul Lévy, que citem a continuació.

Teorema 2.7. *(Paul Lévy) Sigui $\{B_t,\, t \geq 0\}$ un moviment Brownià, aleshores*

$$P\left(\limsup_{h\to 0} \frac{\sup_{0\leq t\leq 1-h} |B(t+h) - B(t)|}{\sqrt{2h\,|\log h|}} = 1\right) = 1.$$

Demostració. La demostració formal es pot trobar a [5]. □

Variació quadràtica

La noció de variació quadràtica proporciona una mesura de la rugorositat i/o irregularitat d'una funció. Mitjançant l'estudi de l'existència de variació d'ordre 2 del moviment Brownià, proporcionarem l'explicació de per què el càlcul estocàstic d'Itô necessita eines diferents que les del càlcul determinista per definir una integral.

Fixem un interval $[0, T]$ i considerem la successió de particions definides per $\pi_n = \{t_0^n = 0 \leq t_1^n \leq \cdots \leq t_{r_n}^n = T\}$, per $n \geq 1$. Suposem que

$$\lim_{n\to\infty} |\pi_n| = 0,$$

on $|\pi_n|$ denota la norma de la partició π_n, és a dir,

$$|\pi_n| = \sup_{j=0,\ldots,r_n-1} (t_{j+1} - t_j).$$

D'ara en endavant, prenem $\triangle_k B = B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n}$.

Proposició 2.8. *La successió $\{\sum_{k=1}^{r_n} (\triangle_k B)^2,\, n \geq 1\}$ convergeix a una variable aleatòria determinista T en $L^2(\Omega)$, és a dir,*

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\left(\sum_{k=1}^{r_n} (\triangle_k B)^2 - T\right)^2\right] = 0.$$

Demostració. Ometem la dependèndia de n. Suposem que $T = \sum_{k=1}^{r_n} \triangle t_k$, on $\triangle t_k = t_k - t_{k-1}$. Usant la propietat del moviment Brownià que els seus increments tenen variància igual a la longitud de l'interval, és a dir, $\triangle_k B \sim N(0, t_k^n - t_{k-1}^n)$, obtenim que

$$\mathbb{E}[(\triangle_k B)^2] = \triangle t_k.$$

Aleshores, la independència d'aquests increments implica que

$$\mathbb{E}[(\triangle_k B)^2 - \triangle t_k] = 0,$$

és a dir, $(\triangle_k B)^2 - \triangle t_k$ és una variable centrada. Calculem doncs

$$\sum_{k=1}^{r_n} (\triangle_k B)^2 - T = \sum_{k=1}^{r_n} \left((\triangle_k B)^2 - \triangle t_k \right).$$

Definim $X_k = (\triangle_k B)^2 - \triangle t_k$ de manera que

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{r_n} (\triangle_k B)^2 - T \right)^2 \right] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{r_n} X_k \right)^2 \right].$$

Ara, com X_k són independents, l'esperança del quadrat és la suma d'esperances dels quadrats, és a dir, obtenim

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{r_n} X_k \right)^2 \right] = \sum_{k=1}^{r_n} \mathbb{E}\left[X_k^2 \right].$$

Usant la definició de X_k i el moment de quart ordre d'una normal [4], obtenim que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_k^2) &= \mathbb{E}((\triangle_k B)^4 + (\triangle t_k)^2 - 2(\triangle_k B)^2(\triangle_k B)) \\ &= \mathbb{E}((\triangle_k B)^4) + (\triangle t_k)^2 - 2(\triangle t_k)\mathbb{E}((\triangle_k B)^2) = 3(\triangle_k t)^2 + (\triangle t_k)^2 - 2(\triangle t_k)^2 \\ &= 2(\triangle t_k)^2 \end{aligned}$$

i, per tant,

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{r_n} X_k \right)^2 \right] = \sum_{k=1}^{r_n} 2(\triangle t_k)^2 = 2\sum_{k=1}^{r_n} (\triangle t_k)^2.$$

Finalment, per (2.4), per tal i com hem definit la successió de particions, $\sum_{k=1}^{r_n} (\triangle t_k)^2$ tendeix a zero quan $\triangle t_k \to 0$, obtenint el que volíem:

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{r_n} (\triangle_k B)^2 - T \right)^2 \right] \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

□

Aquesta proposició, conjuntament amb la continuïtat de les trajectòries, ens permet veure que, de fet, les trajectòries del moviment Brownià tenen variació infinita. En efecte, suposem

$$V = \sup_n \sum_{k=1}^{r_n} |\triangle_k B| < \infty$$

[4] Sigui $X \sim N(0, \sigma^2)$, tenim que $\mathbb{E}(X^4) = 3\sigma^4$.

Aleshores,

$$\sum_{k=1}^{r_n}(\triangle_k B)^2 \leq \sup_k |\triangle_k B|(\sum_{k=1}^{r_n}|\triangle_k B|) \leq V \sup_k |\triangle_k B|.$$

Per tant, tenim que $\lim_n \sum_{k=1}^{r_n}(\triangle_k B)^2 = 0$, q.s., contradient la proposició anterior. Per tant,

$$V = \sup_n \sum_{k=1}^{r_n} |\triangle_k B| = \infty, \text{ q.s.}$$

Observacions.

1. Pel cas particular $\pi_n \subset \pi_{n+1}$, $n \geq 1$, tenim

   $$\lim_n \sum_{k=1}^{r_n}(\triangle_k B)^2 = T, \text{ q.s.}$$

   Podem considerar, per exemple $\pi_n = \{(kT)2^{-n},\, k = 0, \ldots, 2^n\}$

2. Suposem que la partició π_n satisfà les hipòtesis de la proposició anterior i que existeix $\gamma \in (0,1)$ tal que $\sum_{n\geq 1} |\pi_n|^\gamma < \infty$. Aleshores també es compleix que

   $$\lim_n \sum_{k=1}^{r_n}(\triangle_k B)^2 = T, \text{ q.s.}$$

   Demostració. Usant la desigualtat de Txebichev, detallada a l'Apèndix 10.3 i els mateixos càlculs de la demostració anterior, obtenim

   $$P\left\{\left|\sum_{k=1}^{r_n}(\triangle_k B)^2 - T\right| > \lambda\right\} \leq \lambda^{-2}\mathbb{E}\left(\left|\sum_{k=1}^{r_n}(\triangle_k B)^2 - T\right|^2\right) \leq C\lambda^{-2}|\pi_n|$$

   i prenent $\lambda = |\pi_n|^{\frac{1-\gamma}{2}}$,

   $$\sum_{n\geq 1}\mathcal{P}\{\left|\sum_{k=1}^{r_n}(\triangle_k B)^2 - T\right| > \lambda\} \leq C\sum_{n\geq 1}|\pi_n|^\lambda < \infty.$$

   Aleshores, pel lema de Borel-Cantelli, que es pot trobar a l'Apèndix 10.3, concloem que

   $$\lim_n \sum_{k=1}^{r_n}(\triangle_k B)^2 = T, \text{ q.s.}$$

   □

No diferencialitat

A partir de la variació quadràtica, es poden donar arguments per demostrar la no diferenciabilitat del moviment Brownià en cap punt. Per veure-ho, la idea principal és que,

com hem vist, la variació quadràtica divergeix quan es calcula com si el procés fos diferenciable. Veiem-ho. Si B_t és un moviment Brownià, si aquest fos diferenciable en algun punt t_0, aleshores exisitiria

$$\frac{B_{t_0+h} - B_{t_0}}{h}, \text{ quan } h \to 0.$$

No obstant, acabem de veure que B_t té variació quadràtica definida com el següent límit:

$$\lim_{|\pi|\to 0} \sum_{i=1}^{n} (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2,$$

on π és una particio de l'interval $[0, T]$. Aquest límit existeix i val t, per a $t \geq 0$. Calculant doncs el moment de segon ordre de la derivada obtenim:

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{B_{t_0+h} - B_{t_0}}{h}\right)^2\right] = \frac{\mathbb{E}\left[(B_{t_0+h} - B_{t_0})^2\right]}{h^2} = \frac{1}{h},$$

que divereix per $h \to 0$. Aquesta divergència demostra que B_t no pot tenir una derivada finita en cap punt t_0. La intuïció d'aques fet és que les trajectòries osci·len molt ràpid en quasevol interval de temps, i per tant, no permeten l'existència d'una derivada.

2.4 La propietat de martingala

Abans de presentar una altra propietat del moviment Brownià, necessitem introduir alguns conceptes.

Definició 2.9. *(filtració) Una família $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ de σ-subàlgebres de $\mathcal{F}$ és una filtració si*

1. *$\mathcal{F}_0$ conté tots els conjunts de $\mathcal{F}$ de probabilitat 0*
2. *(monótona creixent) Per tot $0 \leq s \leq t$, es compleix $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$.*

Si, a més a més, tenim

$$\bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s = \mathcal{F}_t,$$

direm que la filtració és contínua per la dreta.

D'aquí en endavant, el concepte filtració [5] voldrà dir: filtració contínua per la dreta. Una forma de definir una filtració d'un procés estocàstic $X = \{X_t, t \geq 0\}$ és considerar la *filtració natural*:

Definició 2.10. *(filtració natural d'un procés estocàstic) Donat un procés estocàstic X, definim la σ-àlgebra natural com la menor σ-àlgebra generada per les variables aleatòries X_s on $0 \leq s \leq t$. Formalment, definim la σ-àlgebra natural com*

$$\mathcal{F}_t = \sigma(X_s,\ 0 \leq s \leq t),\ t \geq 0.$$

[5] El concepte de filtració recull la informació d'un esdeveniment aleatori.

Cal mencionar que la σ-àlgebra definida no sempre complirà les condicions de filtració. No obstant, més endavant ho veurem, pel cas del moviment Brownià sí que es compleixen.

Definició 2.11. *(martingala) Un procés estocàstic $\{X_t,\ t \geq 0\}$ és una martingala respecte la filtració $\{\mathcal{F}_t,\ t \geq 0\}$ si cada variable aleatòria $X_t \in L^1(\Omega)$ [6] i, a més a més, es compleixen les propietats següents:*

1. *X_t és $\mathcal{F}_t$-mesurable per qualsevol $t \geq 0$;*
2. *Per a tot $0 \leq s \leq t$, $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s$.*

Si a la segona propietat, enlloc de tenir una igualtat, tenim una desigualtat "$\leq$" (o "$\geq$"), direm que el procés descrit $X = \{X_t,\ t \geq 0\}$ és una supermartingala (o una submartingala, respectivament).

La segona condició de martingala es pot escriure alternativament com:

$$\mathbb{E}(X_t - X_s|\mathcal{F}_s) = 0.$$

A continuació, donem un resultat que ens proporciona la propietat de martingala d'un procés estocàstic.

Proposició 2.12. *Un procés estocàstic $X = \{X_t,\ t \geq 0\} \subset L^1(\Omega)$ amb X_0 constant, mitjana constant i increments independents té la la propietat de martingala respecte la filtració natural.*

Demostració. No és difícil provar que X és $\mathcal{F}_t$-mesurable per tot $t \geq 0$. Provem doncs la condició de l'esperança condicionada per ser una martingala. Recordem que la filtració $\mathcal{F}_s$ descriu la informació disponible del procés fins a temps s. Per tant, la informació de $\mathcal{F}_s$ fins a temps s es basa en els canvis del procés en l'interval de temps, és a dir, $\mathcal{F}_s$ està formada pels increment $X_r - X_u$, amb $0 \leq u \leq r \leq s$. A més a més, per hipòtesi, els increments de X_t són independents i, per tant, $X_t - X_s$ és independent de $\mathcal{F}_s$ per tot $0 \leq s \leq t$. Usant la propietat d'independència de l'esperança condicionada, veure a Apèndix 10.4, obtenim que

$$\mathbb{E}[X_t - X_s|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}(X_t - X_s) = 0,$$

ja que les dues variables tenen la mateixa esperança. □

Finalment, com a conseqüència d'aquest resultat, obtenim que:

Corołari 2.13. *Un moviment Brownià té la propietat de martingala respecte de la filtració natural.*

Demostració. La demostració es pot trobar detallada a Corol·lari 2.1 de [1]. □

[6] L'espai $L^1(\Omega)$ és l'espai de totes les variables aleatòries definides a $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mesurables i integrables respecte la probabilitat P.

2.5 La propietat de Markov

Una altra propietat del moviment Brownià és la propietat de Markov. Aquesta propietat descriu processos 'sense memòria', és a dir, processos l'estat futur dels quals només depèn de l'estat present, i no del passat.

Degut a la dificultat i la tecnicitat d'aquesta propietat, no hi entrarem en detall. No obstant, més endavant resoldrem una equació diferencial estocàstica, el resultat de la qual serà un procés de Markov. Per aquest motiu, donem a continuació una definició d'aquests processos.

Definició 2.14. *(funció de probabilitat Markoviana) Sigui p una aplicació definida a*

$$\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

i satisfent les següents propietats:

1. *Per tot $s,t \in \mathbb{R}$ amb $0 \leq s \leq t$ i $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ fixats,*

$$x \longrightarrow p(s,t,x,A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_A e^{-\frac{|x-y|^2}{2(t-s)}} dy$$

   és $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-mesurable;

2. *Per tot $s,t \in \mathbb{R}$ amb $0 \leq s \leq t$ i $x \in \mathbb{R}$ fixats,*

$$A \longrightarrow p(s,t,x,A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_A e^{-\frac{|x-y|^2}{2(t-s)}} dy$$

   és una probabilitat;

3. *Es compleix*

$$p(s,t,x,A) = \int_A p(u,t,y,A) p(s,u,x,dy)$$

   on, per a tot $0 \leq s \leq u$ i $x, y \in \mathbb{R}$

$$p(s,u,x,dy) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(u-s)}} \exp\{-\frac{|x-y|^2}{2(u-s)}\} dy = f_{N(x,u-s)}(y) dy.$$

Aleshores direm que p [7] és la funció de probabilitat de transició Markoviana.

Ara sí, podem donar la definició de procés de Markov.

Definició 2.15. *(procés de Markov) Sigui p la funció de probabilitat de transició Markoviana i μ una probabilitat a $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Un procés estocàstic $\{X_t,\ t \in \mathbb{R}_+\}$ és un procés de Markov amb llei μ i funció de probabilitat de transició p si*

1. *μ és la llei de X_0;*

[7] S'anomena equació de Champman-Kolmogorov

2. Per a tot $0 \leq s \leq t$*, es verifica*

$$P\{X_t \in A|\mathcal{F}_s\} = p(s,t,X_s,A).$$

on $P\{X_t \in A|\mathcal{F}_s\}$ *és la probabilitat condicionada respecte la* σ*-àlgebra* $\mathcal{F}_s$ *definida com*

$$P(X_t|\mathcal{F}_s) := \mathbb{E}(\mathbf{1}_{X_t}|\mathcal{F}_s),\ X_t \in \mathcal{F}_t.$$

És bo saber que aquesta propietat es pot extendre. Fins ara, només l'hem aplicat a un temps fixat però es pot extendre a *temps d'aturada*.

3 La integral de Itô

La integral d'Itô és necessària, entre moltes altres raons, per tractar les equacions diferencials dirigides per processos estocàstics, com per exemple, per un moviment Brownià. Una de les motivacions per al seu desenvolupament és la modelació d'evolucions de fenòmens amb una força aleatòria externa que recull influències desconegudes i caòtiques. Pot ser natural assumir que aquestes forces són independents les unes de les altres i que varien amb el temps. Per tant, de mitjana, seran variables aleatòries normals que dependran del temps, cosa que ens porta a considerar el moviment Brownià com a modelització d'aquesta força. Cal mencionar que no sempre serà apropiat considerar-lo. Per exemple, en casos en què les forces externes variïn de cop, ja que això implicaria processos amb salts.

Considerem equacions diferencials estocàstiques, donades pel moviment Brownià i definides com

$$\begin{cases} dX_t = \sigma\left(X_t\right) dB_t + b\left(X_t\right) dt, & \text{si } t > 0; \\ X_0 = x_0 \in \mathbb{R}, & \text{altrament,} \end{cases}$$

on $\{B_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ és un moviment Brownià i σ i b funcions deterministes.

Una manera d'interpretar l'equació presentada és a través de la forma integral:

$$X_t = x_0 + \int_0^t \sigma(X_s) dB_s + \int_0^t b(X_s) ds. \tag{3.1}$$

Resoldre-la és equivalent a provar l'existència d'un procés estocàstic $\{X_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ tal que per a tot $t \in \mathbb{R}_+$ fixat, es compleixi la identitat q.s..

Per entendre la necessitat de definir aquest nou càlcul, estudiem les dues integrals que apareixen a la dreta de la igualtat a (3.1). Estudiem primer $\int_0^t b(X_s) ds$. Observem que, tot i ser X_s un procés estocàstic, podem considerar una integral determinista. Això és degut al comportament de les trajectòries del procés, és a dir, per cada $\omega \in \Omega$, $X_s(\omega)$ és una trajectòria concreta i contínua. Per tant, podem considerar $b(X_s)$ una funció contínua, definida per

$$\left(\int_0^t b(X_s) ds\right)(\omega) := \int_0^t b(X_s(\omega)) ds,$$

on la integral de la dreta és una integral de Lebesgue i, per tant, determinista.

En canvi, pel terme $\int_0^t \sigma(X_s) dB_s$ no es pot aplicar cap definició per trajectòries ni per cap funció determinista. Això és degut al fet que B_s no és diferenciable. És, per tant, per aquest motiu que cal introduir una integral estocàstica.

3.1 Introducció

Considerem $B = \{B_t, t \geq 0\}$ un moviment Brownià 1-dimensional definit en un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i la filtració natural associada a B, $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$. Donem primer algunes definicions prèvies.

Definició 3.1. *Fixat un horitzó de temps T, definim $u \equiv \{u_t, t \in [0,T]\} \subset L^2_{a,T}$ com el conjunt de processos estocàstics, satisfent:*

1. *u és adaptat i mesurable a (t,w) respecte la σ-àlgebra producte $\mathcal{B}([0,T])\otimes\mathcal{F}$, és a dir,*
   (a) *La variable aleatòria u_t és $\mathcal{F}_t$-mesurable per a tot $t\in[0,T]$;*
   (b) *L'aplicació*
   $$X:[0,T]\times\Omega\to\mathbb{R}$$
   $$(t,\omega)\mapsto X(t,\omega)$$
   és mesurable respecte la σ-àlgebra $\mathcal{B}([0,T])\otimes\mathcal{F}$;
2. *$\int_0^T\mathbb{E}(u_t^2)dt<\infty$, és a dir, $u\in L^2([0,T]\times\Omega;\lambda\times P)$, on λ és la mesura de Lebesgue.*

Observem que $L^2_{a,T}$ és un espai de Hilbert amb la norma

$$\|u\|_{L^2_{a,T}}=\left[\int_0^T\mathbb{E}(u_t^2)dt\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Primer definirem la integral d'Itô per a processos esglaonats i més endavant extendrem aquesta construcció.

Definició 3.2. *(procés esglaonat) Un procés esglaonat u_t és un procés estocàstic*

$$u_t=\sum_{j=1}^n u_j\mathbf{1}_{[t_{j-1},t_j)}(t), \tag{3.2}$$

amb $0=t_0\le t_1\le\cdots\le t_n=T$, on u_j, amb $j=1,\dots,n$, són variables aleatòries mesurables a $\mathcal{F}_{t_{j-1}}$ amb integrabilitat quadràtica. Denotarem per $\mathcal{E}\subset L^2_{a,T}$ el conjunt de processos esglaonats.

Ara, podem donar la definició d'integral d'Itô per aquests processos.

Definició 3.3. *(integral d'Itô d'un procés esglaonat) Donat un procés esglaonat $u\in\mathcal{E}$, definim la seva integral estocàstica d'Itô com*

$$\int_0^T u_tdB_t=\sum_{j=1}^n u_j(B_t-B_{t_{j-1}}), \tag{3.3}$$

on $\int_0^T u_tdB_t$ és una variable aleatòria.

A continuació, donarem una propietat important de la integral d'Itô. Tot i així, cal saber es tracta d'una variable aleatòria centrada i que compleix la propietat de linealitat. Les demostracions d'aquestes propietats es troben a l'Apèndix 10.6.

Proposició 3.4. *(propietat d'isometria) Per qualsevol $u\in\mathcal{E}$,*

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T u_tdB_t\right)^2\right]=\mathbb{E}\left(\int_0^T u_t^2dt\right).$$

Conseqüentment, l'aplicació

$$u\mapsto\int_0^T u_tdB_t$$

és contínua de $L^2([0,T]\times\Omega,\lambda\times\mathcal{P})$ a $L^2(\Omega)$.

Demostració. La demostració es divideix en dos passos. El primer és l'expansió de la integral. Considerem el quadrat de la integral estocàstica

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T u_t dB_t\right)^2\right]$$

i una partició de $[0,T]$, $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$. Per (3.3), podem escriure

$$\int_0^T u_t dB_t = \sum_{j=1}^n u_j(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}).$$

Aleshores, posant $\triangle_j B = B_{t_j} - B_{t_{j-1}}$, el seu quadrat pot expressar-se com

$$\left(\int_0^T u_t dB_t\right)^2 = \left(\sum_{j=1}^n u_j(\triangle_j B)\right)^2 = \sum_{j=1}^n u_j^2(\triangle_j B)^2 + 2\sum_{j<k} u_j u_k(\triangle_j B)(\triangle_k B).$$

Prenent esperances a ambdós costats obtenim que

$$\mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^n u_j(\triangle_j B)\right)^2 = \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^n u_j^2(\triangle_j B)^2\right) + 2\mathbb{E}\left(\sum_{j<k} u_j u_k(\triangle_j B)(\triangle_k B)\right).$$

Pel primer terme tenim que, com les variables u_j^2 són independents del quadrat de l'increment brownià, aleshores podem posar l'esperança de la suma com la suma d'esperances. A més a més, $\mathbb{E}((\triangle_j B)^2) = Var(\triangle_j B) = t_j - t_{j-1}$, per definició del moviment brownià. Per tant,

$$\mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^n u_j^2(\triangle_j B)^2\right) = \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(u_j^2)\mathbb{E}[(\triangle_j B)^2] = \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(u_j^2)(t_j - t_{j-1}).$$

Prenent el límit, observem que aquest convergeix a la integral

$$\int_0^T \mathbb{E}(u_t^2)dt.$$

Pel segon terme observem que, per $j < k$, els increments brownians $\triangle_j B$ i $\triangle_k B$ són independents, altrament per definició del moviment brownià. Per tant,

$$\mathbb{E}[(\triangle_j B)(\triangle_k B)] = 0.$$

Per tant, obtenim el que volíem provar. □

Fins ara, hem definit la integral d'Itô com la suma acumulativa de canvis d'un procés esglaonat dins d'un interval $[0,T]$. El resultat d'aquesta és un valor aleatori que depèn del moviment Brownià. No obstant, en la majoria de casos necessitarem calcular-la en termes d'una acumulació contínua fins a un temps $t \geq 0$. És per aquest motiu que cal donar la integral indefinida d'un procés esglaonat.

Definició 3.5. *(integral d'Itô indefinida d'un procés esglaonat) Sigui $u \in \mathcal{E}$ un procés esglaont. Es defineix la seva integral d'Itô indefinida com*

$$\int_0^t u_s dB_s = \int_0^T u_s \mathbf{1}_{[0,t]}(s)dB_s,\ t \in [0,T].$$

Observem que ara el resultat és un procés aleatori que depen de t. Aquesta nova definició ens permet estudiar el procés resultant com un nou objecte estocàstic.

Per (3.3) i, tenint en compte que u es pot expressar com a (3.2), obtenim que la integral d'Itô indefinida es pot donar com

$$\int_0^t u_s dB_s = \int_0^T u_s \mathbf{1}_{[0,t]}(s) dB_s = \sum_{j,t_j \leq t} u_j (B_{t_j \wedge t} - B_{t_{j-1} \wedge t}).$$

A continuació, donem una propietat interessant sobre el procés resultant d'aquesta integral.

Proposició 3.6. *Per qualsevol $u \in \mathcal{E}$, el procés $I_t = \int_0^t u_s dB_s, t \in [0,T]$ és una martingala respecte la filtració $\mathcal{F}_t, t \geq 0$ associada al moviment Brownià.*

Demostració. Per provar aquest resultat cal veure que el procés I_t satisfà les propietats d'una martingala (Definició 2.11). Provar l'adaptabilitat respecte la filtració i la integrabilitat no és difícil (per l'adaptabilitat usem que u_s és adaptat i la integrabilitat la tenim per hipòtesi). Per tant, comprovem la condició de martingala. Recordem que volem veure

$$\mathbb{E}(I_t - I_s | \mathcal{F}_s) = 0, \text{ per qualsevol } 0 \leq s \leq t \leq T.$$

Pel cas $t_{k-1} < s < t_k < t_l < t \leq t_{l+1}$, definim I_s i I_t de la següent manera:

$$I_s = \sum_{j=0}^{k-1} u_j (B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) + u_k (B_s - B_{t_{k-1}})$$

i

$$I_t = I_s + u_k (B_{t_k} - B_s) + \sum_{j=k+1}^{l} u_j (B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) + u_{l+1} (B_t - B_{t_l}).$$

Calculem la diferència $I_t - I_s$, obtenint

$$I_t - I_s = u_k (B_{t_k} - B_s) + \sum_{j=k+1}^{l} u_j (B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) + u_{l+1} (B_t - B_{t_l}).$$

Veiem ara que l'esperança de cadascun dels termes de la diferència, condicionada a $\mathcal{F}_s$ val 0. Primer provem que $\mathbb{E}(u_k (B_{t_k} - B_s) | \mathcal{F}_s) = 0$: Observem que u_k és $\mathcal{F}_{t_k - 1}$-mesurable i, per tant $\mathcal{F}_s$-mesurable. A més a més, $B_{t_k} - B_s$ és independent de $\mathcal{F}_s$ i té esperança 0. Per tant,

$$\mathbb{E}(u_k (B_{t_k} - B_s) | \mathcal{F}_s) = u_k \mathbb{E}(B_{t_k} - B_s | \mathcal{F}_s) = 0.$$

Veiem ara que $\mathbb{E}(\sum_{j=k+1}^{l} u_j (B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) | \mathcal{F}_s) = 0$: Observem que u_j és $\mathcal{F}_{t_{j-1}}$-mesurable i que $B_{t_j} - B_{t_{j-1}}$ és independent de $\mathcal{F}_{t_{j-1}}$ i amb esperança 0. Aleshores,

$$\mathbb{E}(u_j (B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(u_j (B_{t_j} - B_{t_{j-1}} | \mathcal{F}_{t_{j-1}}) | \mathcal{F}_s) = 0, \, \forall j.$$

Finalment, obtenim que $\mathbb{E}(u_{l+1}(B_t - B_{t_l})) = 0$. En efecte, u_{l+1} és $\mathcal{F}_{t_l}$-mesurable i $B_t - B_{t_l}$ és independent de $\mathcal{F}_{t_l}$ i té esperancça 0. Per tant,

$$\mathbb{E}(u_{l+1}(B_t - B_{t_l}) | \mathcal{F}_s) = 0,$$

provant el que volíem veure. Hem usat dues propietats de l'esperança condicionada, que es poden trobar a l'Apèndix 10.4. Un raonament similar s'usa per provar el resultat per la resta de casos de s i t. □

Fins ara hem definit la integral d'Itô per a processos esglaonats. Volem extendre-la a processos mesurables, adaptats i quadràticament integrables dins l'espai $L^2_{a,T}$. Per tant, a partir de la definició d'integral d'Itô d'un procés esglaonat (Definició 3.3) i de la propietat d'isometria (Proposició 3.4), considerem una isometria (aplicació contínua)

$$u \longmapsto I_T(u) = \int_0^T u_t dB_t = \sum_{j=1}^{n} u_j (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})$$

definida de $L^2_{a,T}$ a $L^2(\Omega)$. Aquesta extensió es fa dins l'espai $L^2_a([0,T]\times\Omega)$ (ja que $L^2_{a,T}$ és un subespai d'aquest). Per tant, $L^2_a([0,T]\times\Omega)$ també és un espai de Hilbert amb el producte escalar

$$\langle u, v\rangle_{L^2_{a,T}} = \int_0^T \mathbb{E}(u_t v_t)dt,\ u, v \in L^2_{a,T}.$$

El resultat que justifica l'extensió de la integral d'Itô a processos més generals [8] és el següent:

Proposició 3.7. *Per qualsevol $u \in L^2_{a,T}$ existeix una successió $(u^n,\ n \geq 1) \subset \varepsilon$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \mathbb{E}(u_t^n - u_t)^2 dt = 0.$$

Demostració. No detallarem la demostració. No obstant, es pot trobar a Proposició 3.3 de [1]. □

Un cop obtingut aquest resultat, podem donar la següent definició d'integral d'Itô per a un procés més general:

Definició 3.8. *(integral estocàstica d'Itô d'un procés) Donat un procés $u \in L^2_{a,T}$, la seva integral d'Itô estocàstica es defineix com*

$$\int_0^T u_t dB_t := L^2(\Omega) - \lim_{n\to\infty} \int_0^T u_t^n dB_t.$$

La propietat d'isometria justifica que aquesta integral està ben definida. Per més detall, es pot consultar la demostració formal a l'Apèndix 10.6.

D'aquí en edavant, usarem la notació

$$I(u) = \int_0^T u_t dB_t.$$

per referir-nos a la integral que acabem de definir.

És important tenir en compte que, en la majoria de casos, no podrem calcular explícitament aquesta integral. També cal destacar que aquestes integrals tenen les mateixes propietats que les definides per a processos esglaonats: satisfan la propietat d'isometria, l'operador és lineal i són variables aleatòries centrades.

[8] Aquest resultat usa el fet que l'espai de processos esglaonats $\mathcal{E}$ és dens a $L^2_{a,T}$, que és un espai de Hilbert i, per tant, complet. Aleshores qualsevol successió de Cauchy convergeix. Per tant, com $\overline{\mathcal{E}}$, l'adherència d'$\mathcal{E}$, conté tots els processos que es poden aproximar per una successió de processos esglaonats, $\overline{\mathcal{E}} = L^2_{a,T}$.

3.2 La integral de Itô com a procés estocàstic

Com hem fet pels processos estocàstics esglaonats, també podem definir la integral indefinida d'un procés.

Definició 3.9. *(integral estocàstica indefinida d'un procés) Donat un procés $u \in L^2_{a,T}$, es defineix la integral estocàstica d'Itô indefinida com*

$$I_t(u) = \int_0^t u_s dB_s := \int_0^T u_s \mathbf{1}_{[0,t]}(s) dB_s,\ t \in [0,T].$$

Aquesta definició té sentit ja que per qualsevol $t \in [0,T]$, el procés $\{u_s \mathbf{1}_{[0,T]}(s), s \in [0,T]\} \in L^2_{a,T}$. A continuació, presentem algunes de les seves propietats:

Proposició 3.10. *(Propietat de martingala) El procés $\{I_t = \int_0^t u_s dB_s,\ t \in [0,T]\}$ és una martingala respecte la filtració natural associada al moviment Brownià.*

Demostració. La demostració segueix la mateixa estructura que la de la *Proposició 3.6.* Tot i així, es pot trobar detallada a Proposició 3.4 de [1]. □

Proposició 3.11. *(Variació quadràtica de la integral estocàstica). Per qualsevol procés $u \in L^2_{a,T}$, el procés estocàstic*

$$\left(\int_0^t u_s dB_s\right)^2 - \int_0^t u_s^2 ds,\ t \in [0,T]\}$$

és una martingala respecte la filtració natural associada al moviment Brownià. $\{\int_0^t u_s^2 ds,\ t \in [0,T]\}$ s'anomena la variació quadràtica.

Demostració. La demostració es pot trobar a [6] □

A més a més, es compleix que

$$L^1(\Omega) - \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} u_s dB_s\right)^2 = \int_0^t u_s^2 ds,$$

on el sumatori és una successió de particions de $[0,t]$ que tendeixen a 0 i, per tant, tot en conjunt convergeix cap a la integral.

A continuació, donarem una versió més extensa de la propietat d'isometria.

Proposició 3.12. *(desigualtat de Burkholder) Sigui $p \in [2,\infty)$. Aleshores existeix una constant positiva $C(p)$ tal que*

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t u_s dB_s\right)^p\right] \leq C(p)\mathbb{E}\left(\int_0^t u_s^2 ds\right)^{\frac{p}{2}}.$$

Demostració. El resultat es pot trobar demostrat a [7]. □

Aquesta propietat, conjuntament amb el criteri de continuïtat de Kolmogorov (veure Proposició 2.6), ens permet deduir la continuïtat de les trajectòries de la integral estocàstica indefinida. La demostració formal es dona a l'Apèndix 10.6.

3.3 Una extensió de la integral de Itô

Com hem vist fins ara, els processos esglaonats són útils per construir la teoria. No obstant, no permeten descriure el comportament de fenòmens estocàstics en la pràtica. És per aquest motiu que cal extendre l'espai $L^2_{a,T}$; espai que conté processos u mesurables respecte la filtració $\mathcal{F}_t$, quadràticament integrables i regulars, a un espai $\Lambda^2_{a,T}$ que conté processos més generals. En concret, processos

1. Adaptats respecte la filtració $\mathcal{F}_t$, amb informació disponible fins l'instant t;
2. Mesurables respecte la σ-àlgebra producte $\mathcal{B}([0,T]) \times \mathcal{F}$;
3. Que compleixen
$$P\left(\int_0^T u_t^2 dt < \infty\right) = 1, \tag{3.4}$$
és a dir, que la integral quadràtica del procés u és finita q.s.

Aquesta extensió es farà mitjançant una aproximació. Abans, cal observar que $L^2_{a,T} \subseteq \Lambda^2_{a,T}$, ja que els processos a $L^2_{a,T}$ satisfan (3.4).

Definició 3.13. *(integral estocàstica a $\Lambda^2_{a,T}$) Sigui $\{u^n, n \geq 1\}$ una successió de processos de la forma (3.2), on les variables aleatòries $u_j, j = 1, \ldots, n$ són $\mathcal{F}_{t_{j-1}}$-mesurables i finites quasi segurament; és a dir, $u^n \in \Lambda^2_{a,T}$. La integral estocàstica es defineix com a la Definició 3.8.*

Per poder fer l'extensió necessitarem dos ingredients, la demostració dels quals no donarem. La primera proposició fa referència a un resultat d'aproximació, mentre que la segona proporciona una connexió entre la integral estocàstica de processos esglaonats a $\Lambda^2_{a,T}$ i la seva variació quadràtica.

Proposició 3.14. *Per a tot $u \in \Lambda^2_{a,T}$, existeix una successió de processos esglaonats $\{u^n, n \geq 1\}$ de la forma (3.2) que pertanyen a $\Lambda^2_{a,T}$ i satisfan*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T |u_t^n - u_t|^2 \, dt = 0$$

en probabilitat.

Demostració. La demostració formal es pot veure a [8]. □

Proposició 3.15. *Sigui u un procés esglaonat a $\Lambda^2_{a,T}$. Per qualsevol $\epsilon > 0, N > 0$,*

$$P\{\left|\int_0^T u_t dB_t\right| > \epsilon\} \leq P\{\int_0^T u_t^2 dt > N\} + \frac{N}{\epsilon^2}$$

Demostració. La demostració detallada es troba a Proposició 3.7 de [1]. □

Combinant aquestes dues propietats [9], es dona la següent definició d'integral estocàstica.

[9] La Proposició 3.14 proporciona la convergència dels processos esglaonats u^n a un procés u i, usant la Proposició 3.15 es veu que la seqüència d'integrals estocàstiques ($\int_0^T u_t^n dB_t$) és Cauchy en probabilitat. Per tant, com l'espai $L^0(\Omega)$ és complet, tota successió té límit en probabilitat.

Definició 3.16. *(integral estocàstica d'un procés respecte un moviment Brownià) Siguin* $u \in \Lambda^2_{a,T}$ *un procés i* B_t *un moviment Brownià, es defineix la integral estocàtica del procés* u *respecte* B_t *com*

$$\int_0^T u_t dB_t := P - \lim_{n\to\infty} \int_0^T u_t^n dB_t,$$

que és independent de l'aproximació per successió emprada a la construcció.

4 Fórmules d'Itô

Les fórmules d'Itô són una eina fonamental per descriure l'evolució de processos estocàstics i analitzar equacions diferencials estocàstiques. En l'anàlisi de l'article proposat, considerarem una equació diferencial estocàstica multidimensional dirigida per un moviment Brownià unidimensional. Per definir una nova mesura de probabilitat Q, caldrà aplicar la transformada de Girsanov, una aplicació directa de la fórmula d'Itô en el cas unidimensional.

Per aquest motiu, en aquest capítol ens centrarem exclusivament en la presentació de la fórmula d'Itô unidimensional, sense entrar en detall en la seva demostració. Tot i que aquesta demostració és enginyosa, no la inclourem explícitament ja que només farem ús d'una de les seves aplicacions pràctiques.

Les fórmules d'Itô permeten desenvolupar processos estocàstics que es poden expressar de la següent forma:

$$X_t = \int_0^t u_s dB_s + \int_0^t v_s ds,$$

on u i v són processos adequats, i $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és una funció suficientment suau de X_t, és a dir, $f(X_t)$. Les condicions necessàries per a la suavitat de f i les hipòtesis sobre els processos u i v es presentaran a continuació.

4.1 Fórmula 1-dimensional

Donem les condicions que han de complir els processos u i v.

Definició 4.1. *(procés d'Itô) Sigui $\{v_t,\ t \in [0,T]\}$ un procés estocàstic adaptat* [10]*, amb trajectòries integrables Lebesgue, quasi segurament; és a dir, complint*

$$\int_0^T |v_t| dt < \infty,\ q.s.$$

Considerem també un procés estocàstic $\{u_t,\ t \in [0,T]\} \in \Lambda^2_{a,T}$, on $\Lambda^2_{a,T}$ és l'espai definit a l'Apartat 3.3, i una variable aleatòria X_0 $\mathcal{F}_0$-mesurable. Aleshores, el procés estocàstic definit per

$$X_t = X_0 + \int_0^t u_s dB_s + \int_0^t v_s ds,\ t \in [0,T] \tag{4.1}$$

s'anomena procés d'Itô.

Aquest procés es pot escriure en forma diferencial com

$$dX_t = u_t dB_t + v_t dt,$$

conservant X_0 com a condició inicial. Com hem vist a l'inici del capítol anterior, aquesta equació ve donada per un terme estocàstic $u_t dB_t$, que representa la part aleatòria donada pel moviment Brownià, i un terme $v_t dt$ que, tot i que v_t és un procés estocàstic, el seu comportament a l'interval infinitessimal $[t, t+dt]$, fa que poguem calcular la seva integral

[10] Un procés estocàstic és adaptat si la seva evolució no depèn de la informació futura. Recordem que el moviment Brownià B_t, procés amb el qual nosaltres treballem, és adaptat a una filtració $\mathcal{F}_t$.

com la integral de Riemann o Lebesgue.

Pel que fa a les funcions $f(X_t)$, considerem totes les funcions de l'espai $\mathcal{C}^{1,2}$, és a dir, funcions $f(t,x)$ contínues respecte les variables t i x, $\mathcal{C}^1$ (diferenciables un cop) respecte t i $\mathcal{C}^2$ (diferenciables dos cops) respecte x. Denotem per $\partial_t f(t,x)$, $\partial_x f(t,x)$ i $\partial^2_{xx} f(t,x)$ les derivades parcials de primer i segon ordre de f. Ja tenim totes les eines per presentar la fórmula d'Itô que permetrà estudiar l'evolució el procés $\{f(t,X_t), t \in [0,T], f \in C^{1,2}\}$.

Teorema 4.2. *Sigui $f : [0,T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció a $C^{1,2}$ i X un procés d'Itô donat per (4.1), es compleix:*

$$f(t,X_t) = f(0,X_0) + \int_0^t \partial_s f(s,X_s)ds + \int_0^t \partial_x f(s,X_s)u_s dB_s$$
$$+ \int_0^t \partial_x f(s,X_s)v_s ds + \frac{1}{2}\int_0^t \partial^2_{xx} f(s,X_s)u_s^2 ds. \tag{4.2}$$

Demostració. La demostració es pot trobar a Proposició 4.2 de [1]. □

Podem escriure (4.2) com

$$f(t,X_t) = f(0,X_0) + \int_0^t \partial_s f(s,X_s)ds + \int_0^t \partial_x f(s,X_s)dX_s$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^t \partial^2_{xx} f(s,X_s)(dX_s)^2;$$

o, alternativament, en forma diferencial com

$$df(t,X_t) = \partial_t f(t,X_t) + \partial_x f(t,X_t)dX_t + \frac{1}{2}\partial^2_{xx} f(t,X_t)(dX_t)^2.$$

Per conveni, $(dX_t)^2$ es calcula com

$$dB_t \times dB_t = dt,$$
$$dB_t \times dt = dt \times dB_t = 0,$$
$$dt \times dt = 0.$$

Tot i que no la presentarem, la fórmula d'Itô es pot extendre pel cas multidimensional.

4.2 Teorema de Girsanov

Tal com hem mencionat anteriorment, una de les aplicacions més importants de la fórmula d'Itô és el teorema de Girsanov.

Si X és una variable aleatòria gaussiana de dimensió n, qualsevol transformació lineal del tipus $Y = AX + b$, on A és una matriu $n \times n$ i $b \in \mathbb{R}^n$, genera una nova variable Y que també és gaussiana. De manera anàloga, el teorema de Girsanov estableix un resultat similar pel cas del moviment Brownià: donada una mesura de probabilitat P associada a un moviment Brownià B_t, la transformada de Girsanov permet construir una nova mesura de probabilitat, anomenada Q, sota la qual el moviment Brownià experimenta una nova dinàmica temporal.

Aquest resultat és fonamental per al nostre treball, ja que a les Seccions 6 i 7 el farem servir per valorar futurs sota una mesura de probabilitat específica. A continuació, construirem aquesta nova mesura de probabilitat Q.

Lema 4.3. *Donat $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espai de probabilitat i L una variable aleatòria no negativa complint $\mathbb{E}(L) = \mathbb{E}_P(L) = 1$. Per $A \in \mathcal{F}$, tenim*

$$Q(A) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_A L). \tag{4.3}$$

Q defineix una probabilitat a $\mathcal{F}$, equivalent a P, amb densitat donada per L. Recíprocament, si P i Q són probabilitats a $\mathcal{F}$ i $P \ll Q$; és a dir, P és absolutament contínua respecte Q, aleshores existeix una variable aleatòria L no negativa, tal que $\mathbb{E}(L) = 1$ i que compleix (4.3).

Demostració. Veurem la primera part de l'enunciat. Per tal que Q sigui una mesura probabilitat, cal provar primer que és una mesura σ-additiva sobre $\mathcal{F}$. Per fer-ho, usarem (4.3). Siguin $A_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, \ldots$ elements disjunts, tenim

$$Q\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} L\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_i} L\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}(1_{A_i} L) = \sum_{i=1}^{\infty} Q(A_i).$$

A més a més, hem de veure que es compleix $Q(\Omega) = 1$. En efecte,

$$Q(\Omega) = \mathbb{E}(1_\Omega L) = \mathbb{E}(L) = 1.$$

Fins aquí hem provat que Q és una probabilitat però hem de veure que és equivalent a P. Per demostrar-ho, comprovarem que

$$Q(A) = 0 \Leftrightarrow P(A) = 0,\ A \in \mathcal{F}.$$

Per la implicació d'esquerra a dreta, prenem $A \in \mathcal{F}$ tal que $Q(A) = 0$. Com $L \geq 0$ q.s. i tenim (4.3), aleshores $\mathbf{1}_A L = 0$ q.s. i, per tant, $P(A) = 0$. Recíprocament, si $P(A) = 0$, aleshores $1_A = 0$ q.s. i, altrament per (4.3) obtenim que $Q(A) = 0$. □

Un cop donat aquest lema, és natural preguntar-se com calcular esperances respecte la probabilitat Q. Denotem per $\mathbb{E}_Q$ l'esperança respecte Q. Aleshores, per qualsevol $X \in L^1(\Omega, Q)$, relacionem l'esperança respecte Q amb l'esperança respecte P de la següent forma:

$$\mathbb{E}_Q(X) = \mathbb{E}(XL),$$

on L és una densitat que relaciona ambdues mesures de probabilitat. Donat un moviment Brownià $\{B_t,\ t \in [0,T]\}$, fixem una constant $\lambda \in \mathbb{R}$ i definim $L = \{L_t,\ t \geq 0\}$ com

$$L_t = \exp\left(-\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2} t\right).$$

Aquesta expressió proporciona la funció de densitat que necessitem. Hem de veure, per tal de poder aplicar el lema anterior, que L és no negativa i que té esperança igual a 1. A més a més, per tal de definir la nova probabilitat Q, cal que estigui ben definida; és a dir, L ha de ser consistent amb $\mathcal{F}$. Totes aquestes condicions les demostrarem provant que L_t és una martingala.

Per fer-ho usarem la fórmula d'Itô unidimensional, donada al Teorema 4.2. Considerem $L_t = f(B_t, t)$, amb $f(x,t) = \exp\left(-\lambda x - \frac{\lambda^2}{2}t\right)$ i calculem les derivades parcials

$$\begin{aligned}\partial_x f &= -\lambda f(x,t);\\ \partial_t f &= -\frac{\lambda^2}{2} f(x,t);\\ \partial_{xx} f &= \lambda^2 f(x,t).\end{aligned}$$

Aleshores, per la fórmula d'Itô tenim que

$$dL_t = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dB_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dB_t)^2.$$

Substituint les derivades i simplificant, arribem a

$$dL_t = -\lambda L_t dB_t$$

que, integrant dona

$$L_t = L_0 - \int_0^t \lambda L_s dB_s.$$

Com $L_0 = 1$, obtenim que

$$L_t = 1 - \int_0^t \lambda L_s dB_s.$$

Això demostra que L_t és una martingala positiva que es pot usar com a densitat per passar de P a Q. Per tant, definim la nova mesura de probabilitat Q com

$$Q(A) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_A L_T),\ A \in \mathcal{F}_{\mathcal{T}}. \tag{4.4}$$

Pel lema anterior, les probabilitats Q i P són equivalents a $\mathcal{F}_T$ i, per la propietat de martingala de L_t, aquesta equivalència es manté per tot $t \in [0,T]$.

Ara sí, donem el teorema de Girsanov.

Teorema 4.4. *(teorema de Girsanov) Siguin $\lambda \in \mathbb{R}$ i B_t un moviment Brownià. Aleshores el procés $\{W_t, t \in [0,T]\}$ definit per*

$$W_t = B_t + \lambda t$$

és un moviment Brownià a l'espai de probabilitats $(\Omega, \mathcal{F}_T, Q)$, amb Q definida com a (4.4).

Demostració. La demostració formal es pot veure a Teorema 4.7 de [1]. □

5 Equacions diferencials estocàstiques

Finalment, l'única base teòrica que ens queda introduir abans de començar amb l'anàlisi de l'article són les equacions diferencials estocàstiques (EDE). Tot i que el model que es presentarà a l'article es defineix mitjançant una EDE multidimensional dirigida per un moviment Brownià unidimensional, en aquest capítol només introduirem la teoria de les EDE unidimensionals ja que és suficient per a la comprensió del model.

A continuació, definirem formalment les EDE unidimensionals i proporcionarem un resultat d'existència i unicitat de solucions, sota propietats adequades dels coeficients.

5.1 Introducció

Sigui $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espai de probabilitat, considerem un moviment Brownià $B = \{B_t,\, t \geq 0\}$ tal que $B_0 = 0$, amb la filtració $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ natural satisfent:

1. B és adaptat a $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$;
2. La σ-àlgebra generada per $\{B_u - B_t, u \geq t\}$ és independent de $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$.

Considerem també les funcions

$$b : [0, \infty) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ \sigma : [0, \infty) \times \mathbb{R} \longrightarrow L(\mathbb{R}; \mathbb{R}),$$

on $L(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ és l'espai d'aplicacions lineals de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$. Aleshores, una equació diferencial estocàstica ve donada per

$$\begin{aligned} dX_t &= \sigma(t, X_t)dB_t + b(t, X_t)dt,\ t \in (0, \infty) \\ X_0 &= x, \end{aligned} \tag{5.1}$$

on x és un valor aleatori independent del moviment Brownià.

Les funcions b i σ s'anomenen coeficients de l'equació: b és el coeficient independent mentre que σ és el coeficient dependent. L'expressió $X_0 = x$ s'anomena condició inicial i també pot venir donada per un valor $s \geq 0$, $s \in \mathbb{R}$. En aquest cas, escriurem $t \in (s, \infty)$ i $X_s = x$. En la majoria de casos, de fet, nosaltres sempre ho assumirem, direm que x és determinista.

Podem entendre doncs l'equació diferencial (5.1) com:

$$X_t = x + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s + \int_0^t b(s, X_s)ds, \tag{5.2}$$

A continuació donem una definició de solució d'una equació diferencial estocàstica [11].

Definició 5.1. *(solució forta) Sigui $(X_t, t \geq 0)$ un procés estocàstic, mesurable a (t, w) i $\mathcal{F}_t$-adaptat. Direm que és una solució forta de (5.2) si:*

[11] Els espais que apareixen a la definició, $L^2_{a,\infty}$ i $L^1_{a,\infty}$, són espais similars a L^2 i L^1, respectivament, però amb condicions d'integrabilitat de les trajectòries més dèbils. És a dir, no es compleix la integrabilitat estricta però el comportament de les cues dels processos està controlat. Observem doncs que $L^i \subset L^i_{a,\infty}$, per $i = 1, 2$.

1. *El procés* $(\sigma(s, X_s), s \geq 0) \subset L^2_{a,\infty}$;
2. *El procés* $(b(s, X_s), s \geq 0) \subset L^1_{a,\infty}$;
3. *El moviment Brownià satisfà l'equació per qualsevol* $t \geq 0$, *q.s.*

Definició 5.2. *L'equació diferencial (5.2) té una única solució per trajectòria si qualsevol parell de solucions fortes* X_1 *i* X_2 *són iguals, és a dir, compleixen*

$$P\{X_1(t) = X_2(t), \text{ per qualsevol } t \geq 0\} = 1.$$

Fins ara, hem definit l'existència i la unicitat de les solucions però no hem demostrat que (5.2) tingui solució ni que aquesta sigui única. Per fer-ho, cal que imposem unes condicions a les funcions que hi apareixen:

1. b i σ han de ser funcions mesurables respecte la σ-àlgebra $\mathcal{B}([0,\infty) \times \mathbb{R}) = \mathcal{B}([0,\infty) \bigotimes \mathcal{B}(\mathbb{R}))$;
2. Les funcions han de créixer linealment respecte la variable x, sense dependre de t; és a dir, de forma que existeixi una constant $C \geq 0$ tal que, per a tot $x \in \mathbb{R}$, se satisfaci
$$\sup_t [|b(t,x)| + |\sigma(t,x)|] \leq C(1 + |x|).$$
3. Les funcions han de ser Lipschitz respecte la variable x, sense dependre de t; és a dir, de forma que existeixi una constant $C \geq 0$ tal que, per qualsevol $x, y \in \mathbb{R}$, es compleixi
$$\sup_t [|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)|] \leq C|x - y|.$$

D'aquí en endavant, a aquest conjunt de condicions les denotarem amb (H).

5.2 Equacions diferencials estocàstiques ordinàries

Un exemple molt comú, que serà el que nosaltres tractarem, és quan l'equació diferencial estocàstica és ordinaria. Això significa que el procés depèn únicament del temps t. En aquest cas, la solució de (5.2) es pot donar d'una forma explícita. Suposem $s = 0$ i considerem el següent exemple:

$$\sigma(t,x) = \Sigma(t) + F(t)x,$$
$$b(t,x) = c(t) + D(t)x,$$

on Σ, F, c i D són funcions que només depenen de t. Prenent un moviment Brownià B_t i suposant que $\sigma(t,x) = \Sigma(t)$, $b(t,x) = c(t) + Dx$, llavors l'equació ve donada per

$$X_t = \int_0^t \Sigma(s) dB_s + \int_0^t (c(s) + DX_s) ds. \tag{5.3}$$

La seva solució forta ve donada per

$$X_t = X_0 e^{Dt} + \int_0^t e^{Dt}(c(s)ds + \Sigma(s)dB_s). \tag{5.4}$$

Veiem com s'obté aquesta solució. Prenem primer el coeficient determinista, considerant l'equació homogènia

$$dX_t = DX_t dt.$$

que té com a solució

$$X_t = X_0 e^{Dt},\ t \geq 0.$$

Ara apliquem la fórmula de variació de les constants i escrivim

$$X_t = X_0(t)e^{Dt}.$$

Estudiem quina forma el terme $X_0(t)$. Com e^{Dt} és diferenciable, calculem la derivada, obtenint

$$dX_t = dX_0(t)e^{Dt} + X_0(t)e^{Dt}Ddt.$$

Aplicant la forma diferencial de (5.3), obtenim que

$$dX_0(t)e^{Dt} + X_0(t)e^{Dt}Ddt = \Sigma(t)dB_t + (c(t) + DX_t)dt,$$

o, equivalentment,

$$dX_0(t) = e^{-Dt}[\Sigma(t)dB_t + c(t)dt]$$

que, en forma integral és la solució (5.4).

A continuació, donem un teorema sobre l'existència i unicitat de solucions.

5.3 Teorema d'existència i unicitat de solucions

Restringim t a un interval $[0, T]$.

Teorema 5.3. *Donada una equació diferencial estocàstica on les funcions σ i b satisfan les condicions (H). Aleshores existeix una única solució forta de (5.2) definida ω a ω.*

Demostració. La demostració d'aquest teorema és molt llarga i, tot i que és enginyosa, no és difícil de seguir. Segueix la mateixa idea que pel cas de les equacions diferencials no estocàstiques. Tot i que no la donarem, la demostració rigurosa es pot trobar a Teorema 5.1 de [1]. □

5.4 Propietats de les solucions

Per l'aplicació, una de les propietats que ens interessa estudiar és l'existència de moment d'ordre 2 de la solució ja que necessitarem calcular una esperança. En aquest capítol estudiarem algunes de les propietats més importants de la solució d'una equació diferencial estocàstica, com ara: l'existència de moments d'ordre p, la dependència respecte la condició inicial i la regularitat de les trajectòries.

Comencem proporcionant un resultat que demostra l'existència de moments d'ordre p del procés solució de l'equació.

Teorema 5.4. *Assumint les mateixes condicions que al teorema d'existència i unicitat de solucions fortes i suposem, a més a més, que la condició inicial X_0 és una variable*

aleatòria $\mathcal{F}_0$-mesurable. Per qualsevol $p \in [2, \infty]$ i $t \in [0, T]$, existeix una constant positiva C que depèn de t i de p, tal que

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq s\leq t} |X_s|^p\right) \leq C(1 + \mathbb{E}|X_0|^p).$$

Demostració. La demostració es pot trobar detallada a Teorema 5.2 de [1]. □

Més enllà de demostrar que el suprem de la solució X_t té moments d'ordre p finits, aquest resultat és molt important ja que garantitza l'estabilitat i la regularitat de la solució.

Com hem anat veient fins ara, la solució de l'equació diferencial depèn de la condició inicial X_0. El següent teorema proporciona un resultat més precís sobre aquest aspecte.

Teorema 5.5. *Siguin X_0, Y_0 dues condicions inicials diferents d'una equació diferencials estocàstica (deterministes o variables aleatòries F_0-mesurables). Denotem per $X(X_0)$, $X(Y_0)$ dues solucions de l'equació, per les condicions inicials respectives. Sota les mateixes condicions que als teoremes previs, per qualsevol $t \in [0, T]$ i $p \in [2, \infty)$, existeix una constant positiva C, que depèn de t i de p, tal que*

$$\mathbb{E}(\sup_{0\leq s\leq t} |X_s(X_0) - X_s(Y_0)|^p) \leq C(\mathbb{E}|X_0 - Y_0|^p). \tag{5.5}$$

Si X_0 i Y_0 són deterministes, (5.5) implica la L^p-continuïtat [12] de la solució respecte la condició inicial.

Finalment, veiem l'última de les propietats de la solució: la regularitat de les trajectòries. És d'esperar que les solucions de les equacions diferencials estocàstiques preservin la regularitat de les trajectòries del moviment Brownià. Veiem-ho:

Teorema 5.6. *Sota les mateixes condicions que anteriorment i, amb condició inicial X_0. Sigui $p \in [2, \infty), 0 \leq s \leq t \leq T$, aleshores eisteix una constant positiva $C = C(p, L, T)$ complint*

$$E(|X_t - X_s|^p) \leq C(1 + \mathbb{E}|X_0|^p)|t - s|^{\frac{p}{2}}.$$

Demostració. La demostració formal es troba a Teorema 5.4 de [1]. □

Considerant aquest teorema i el criteri de continuïtat de Kolmogorov, deduïm la continuïtat de les trajectòries de la solució.

Corołari 5.7. *Sota les mateixes condicions, assumim que per a tot $p \in [2, \infty), \mathbb{E}(|X_0|^p) \leq C < \infty$. Per tant, les trajectòries de la solució de (5.2) són Hölder contínues, amb exponent $\gamma \in (0, \frac{1}{2})$.*

Demostració. La demostració es pot trobar a Corol·lari 5.1 de [1]. □

Per últim, cal mencionar que a la Secció 2.5 hem discutit la propietat de Markov pel cas del moviment Brownià. Cal saber que aquesta propietat es manté pel procés solució d'una EDE. No obstant, de la mateixa manera que hem fet pel moviment Brownià, no entrarem en detall. Només és necessari tenir una idea sobre què significa aquesta propietat ja que el procés resultant de la nostra aplicació serà un procés de Markov.

[12] [9] La continuïtat L^p és una propietat de les equacions diferencials que descriu la variació de la solució en termes de la norma L^p, $p \geq 1$. Que la solució sigui L^p contínua significa que la diferència de la solució per temps propers tendeix a 0.

6 Mercat de derivats climàtics i pricing d'un futur

Fins aquí, hem presentat les eines matemàtiques necessàries per analitzar l'article "Approximation of the price dynamics of heating degree day and cooling degree day temperature futures". L'article, de la cotutora del treball, la Sara Ana Solanilla Blanco i el seu director de tesi, el Fred Espen Benth, va ser publicat l'any 2014 a la revista Journal of Energy Markets durant la seva estada de doctorat a la Universitat d'Oslo, Noruega.

En aquest article [10] es treballa amb futurs sobre índexos de temperatura Heating Degree Day (HDD) i Cooling Degree Day (CDD) on es proposa un model autoregressiu en temps continu per modelitzar la variable de temperatura. Primer de tot, es valora un futur sobre un índex de temperatura i s'observa que no és possible obtenir una fórmula tancada d'una opció call/put d'estil europeu sobre aquest, de manera que cal recórrer a mètodes computacionals de simulació, com el mètode de Montecarlo. Davant d'aquest fet, l'article proposa dues aproximacions dels preus dels futurs que resulten ser lineals en la variable temperatura i que permeten obtenir una fórmula tancada quan es valora una opció d'aquest tipus. Per determinar si les aproximacions proposades són adequades, l'article proposa un cas empíric on es modelitza la temperatura, mitjançant una base de dades de més de 53 anys de temperatures diàries mitjanes de Nova York, amb un procés autorregressiu en temps continu que resulta ser d'ordre $p = 3$ i es conclou per quins mesos de l'any funcionen adequadament cadascuna d'elles.

Durant aquest capítol i posteriors, explicarem amb detall com valorar un futur sobre índexos HDD i CDD i deixarem constància de la problemàtica que sorgeix quan es pretén fer el pricing d'una opció call europea sobre futurs d'aquests índexos. També explicarem amb detall com modelitzar de manera teòrica la variable temperatura i reproduirem el cas empíric considerat a l'article. Cal mencionar que la teoria i els procediments seguits han estat extrets de la tesi doctoral [11] de la doctora Sara Solanilla; on es presenta tant el model com la teoria de forma extensa.

Abans de començar, és necessari introduir alguns conceptes que apareixeran al llarg dels propers capítols. Començarem explicant què és un mercat de derivats, un futur, una opció i com es fixa el preu d'un futur i, tot seguit, ens centrarem en el mercat de derivats climatològics, el Chicago Mercantile Exchange (CME), on es comercialitzen derivats com futurs sobre índexos HDD, CDD i opcions sobre aquests futurs. Després, presentarem els índexos de temperatura mencionats i definirem amb tot detall matemàtic què és un futur i una opció.

6.1 Mercat de derivats

Un derivat és un instrument financer, el valor del qual ve determinat pel moviment del preu d'altres actius, anomenenats actius subjacents. Podem dir que un derivat és un acord entre dues parts que fixen unes condicions en l'actualitat per, un cop arribada la data establerta (data de venciment), es realitzin els moviments i transaccions corresponents. Els actius subjacents associats als derivats poden ser de molts tipus: accions, valors de renda fixa, tipus d'interés, matèries primeres, etc i la variabilitat en el preu d'aquests és

el que fa que hi hagi un risc financer [13].

Els derivats es poden comercialitzar tant a mercats regulats, és a dir, mercats subjectes a normes i reglaments de l'autoritat de regulació; com a mercats no regulats, coneguts com OTC (Over-The-Counter). En aquests últims, les transaccions es realitzen directament entre les dues parts, sense passar per una borsa organitzada. En el cas que abordem, el Chicago Mercantile Exchange (CME) és un exemple de mercat OTC.

Per parlar dels primers derivats financers cal viatjar a mitjans del segle XVII on, a Holanda, per exemple, ja es comercialitzava amb els bulbs dels tulipans; o al Japó, on ho feien amb l'arròs. [12] No obstant, no va ser fins el segle XIX quan va néixer la borsa més important de futurs: el Chicago Board of Trade (CBOT), on es van començar a comercialitzar productes com el blat de moro, els cereals o la soja. Al llarg dels anys, altres països van consolidar mercats d'aquesta tipologia i ampliant l'oferta de subjacents. L'any 2007, la CBOT es va fusionar amb la Chicago Mercantile Exchange (CME). [13] El CME és el principal mercat de derivats a nivell internacional. Es comercialitzen futurs, opcions, operacions al comptat i productes del mercat extraborsàtil, oferint un ampli ventall d'actius basats en tipus d'interés, índexos de renda variable, tipus de canvi, energia, productes agrícoles i metalls.

6.1.1 Contractes de futurs i d'opcions

Al CME es comercialitzen contractes futurs basats en índexos climatològics i opcions europees sobre aquests. És per aquest motiu que cal entendre bé què són els futurs i les opcions i com es fa el pricing d'un futur.

La Comissió Nacional del Mercat de Valors (CNME), veure [14], defineix un futur com un contracte en un termini fixat que es negocia en un mercat organitzat (borses). Que el mercat sigui organitzat vol dir que els instruments amb què es comercialitza estan regulats, cosa que els fa més líquids i accessibles. En aquest contracte, dues parts acorden comprar o vendre una quantitat determinada d'actiu o matèria primera subjacent en una data establerta (data de liquiditat) a un preu fixat (preu del futur). En aquest contracte, el comprador fa un petit dipòsit que li permet operar i, un cop arribada la data de liquiditat, és obligatori que les dues parts compleixin amb la seva obligació contractual. Els contractes de futurs s'usen com a protecció del risc causat per la fluctuació dels preus i també per especular sobre aquestes fluctuacions.

A diferència, una opció és un contracte que dona al comprador el dret, però no l'obligació, de comprar (opció CALL) o vendre (opció PUT) una quantitat determinada d'actiu subjacent a un preu predeterminat (preu d'exercici o strike) abans o en la data de venciment. El comprador paga una prima (preu de contracte) per adquirir aquest dret i, un cop decideix si vol o no exercir-lo, el venedor té l'obligació de vendre o comprar si l'altra part ho decideix. Per tant, a diferència dels futurs, on les dues parts tenen un risc potencialment il·limitat, en aquest cas, pel comprador el risc es limita a pagar el preu d'accés al contracte (prima), mentre que pel venedor, el risc és potencialment il·limitat. Com hem mencionat, existeixen dos tipus d'opcions: les opcions call o de compra, que

[13] El risc financer és la possibilitat que una de les parts del contracte no pugui complir amb les seves obligacions financeres, degut a factors tant interns com externs. Hi ha diferents tipus de risc financer: el risc de crèdit, el de mercat, el de liquiditat, l'operacional, el de tasa d'interés i el de canvi.

donen el dret a comprar l'actiu subjacent; i les opcions put o de venda, que donen el dret a vendre'l, i aquestes opcions poden ser d'estil europeu, quan només es poden exercir en la data de venciment; o d'estil americà, quan es poden exercir en qualsevol moment previ a la data de venciment.

6.1.2 Pricing o valoració d'un futur

Tot seguit, veurem com valorar futurs i opcions en un mercat financer clàssic. Sigui $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espai de probabilitat, on $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ és la filtració que conté la informació disponible del mercat fins a temps t i P és la probabilitat del mercat. [15]

Considerem S un procés estocàstic que defineix el preu spot d'actiu subjacent amb risc i $r > 0$ la taxa d'interés lliure de risc. La taxa d'interés és el cost que es paga per 'demanar diners' o pel retorn de la inversió. Assumim que hem entrat a un contracte de futur en el qual s'ha de fer entrega d'una unitat del spot a temps τ. Denotem per $f(t,\tau)$ el preu futur d'un contracte a temps $t \geq 0$ entregant una unitat de l'actiu S a un temps futur τ, amb $0 \leq t \leq \tau < \infty$. El guany o la pèrdua que s'obtindrà a temps τ, vindrà donada per

$$S(\tau) - f(t,\tau).$$

Definició 6.1. *(mesura de probabilitat neutral al risc) Donat un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, direm que una mesura de probabilitat Q és neutral al risc si Q és equivalent a P ($Q \sim P$) [14] i el preu de l'actiu descomptat, en el nostre cas $e^{-rt}S(t)$, és una martingala local sota Q.*

La teoria de preus lliures d'arbitratge [15], veure a [16], estableix que qualsevol derivat ve donat pel valor present estimat de la liquidació, on l'esperança es pren respecte a una probabilitat neutral al risc Q [16]. Per tant, tenint en compte que entrar en un contracte de futur no té cap cost, obtenim que

$$\mathbb{E}_Q[e^{-r(\tau-t)}(S(\tau) - f(t,\tau))|\mathcal{F}_t] = 0.$$

Aquí, $\mathcal{F}_t$ és una filtració que conté la informació del mercat fins a temps t i $\mathbb{E}_q$ és l'operador d'esperança respecte a una mesura de probabilitat neutral al risc. El futur a temps t no conté més informació del mercat que la que proporciona $\mathcal{F}_t$, de manera que podem aprofitar que és adaptat a aquesta filtració, obtenint que

$$f(t,\tau) = \mathbb{E}_Q[S(\tau)|\mathcal{F}_t]. \tag{6.1}$$

Observem que $f(\tau,\tau) = S(\tau)$. Per tant, $f(t,\tau) = \mathbb{E}_Q[f(\tau,\tau)|\mathcal{F}_t]$. Així doncs, el futur és una martingala sota Q, obtenint que la valoració és lliure d'arbitratge.

[14] $Q \sim P$ si ambdues mesures de probabilitat tenen els mateixos esdeveniments però amb diferents probabilitats associades a aquests esdeveniments.

[15] L'arbitratge és una estratègia financera que consisteix en aprofitar les diferències de preu d'un mateix actiu, o d'equivalents, en diferents mercats o formes de negociació. És a dir, es tracta d'obtenir benefici sense assumir cap tipus de risc. La teoria de finances moderna es basa en la impossibilitat d'arbitratge i aquesta idea, en el principi que als mercats oberts i líquids, les oportunitats de fer arbitratge desapareixen ràpidament. Per exemple, si un mateix producte financer cotitza en dos mercats diferents i el preu d'aquest és diferent en cadascun d'ells, l'estratègia de comprar a preu barat i vendre a preu car seria arbitratge. No obstant, si molta gent ho fa, immediatament el preu barat puja, equilibrant-se amb el car.

[16] Sota una mesura de probabilitat neutral al risc s'assumeix que el preu esperat d'un actiu, descomptat pel tipus d'interés lliure de risc, és igual al seu preu actual. Per tant, que els inversors no tenen preferència pel risc i esperen el mateix rendiment per qualsevol actiu, independentment del seu risc.

A [17] es presenta la teoria de preus sense arbitratge. Trobem el Primer Teorema Fonamental de les Finances Matemàtiques, que diu el següent:

Teorema 6.2. *(Primer Teorema Fonamental de les Finances) Suposem que existeix un actiu sense risc i, denotrem per r l'interés lliure de risc. Aleshores el mercat no té arbitratge, és a dir, és un mercat viable, si i només si existeix una mesura $Q \sim P$ tal que*

$$S_0^i = \frac{1}{1+r}\mathbb{E}_Q[S_1^i], \text{ per qualsevol } i = 1, \ldots, N.$$

El teorema ens diu que cal trobar aquesta mesura Q per tal de poder aplicar la teoria. La condició qu $e^{-rt}S(t)$ és una martingala local, per definició de mesura de probabilitat neutral al risc, ens permet reescriure el preu del futur com segueix

$$f(t,\tau) = e^{r(\tau-t)}S(t).$$

L'estratègia de comercialitzar l'actiu subjacent es coneix com estratègia de comprar i mantenir.

En els models tradicionals, els preus dels actius es modelitzen amb processos de semimartingales ja que, sota condicions especials, garanteixen l'existència de probabilitats neutrals al risc. No obstant, com explicarem a continuació, el mercat de temperatura és un mercat incomplet des del punt de vista que l'actiu subjacent és un índex que no es pot comercialitzar, no té cap valor. Això ens facilita el pricing ja que no cal assumir que l'actiu subjacent descomptat sigui martingala local. Per tant, l'única condició necessària per fixar el preu és definir una probabilitat $Q \sim P$.

El pricing d'un futur es pot fer mitjançant la prèvia modelització del preu de l'actiu subjacent. A l'article, on es treballa amb mercats incomplets, es proposa modelitzar la variable temperatura de l'índex amb un tipus de processos estacionaris de Lévy (LSS), anomenats processos CAR (Continous Autoregressive) que sí que són semimartingales. No obstant, pel tipus de mercat considerat, solament cal treballar amb una probabilitat $Q \sim P$, que obtindrem més endavant.

6.2 El mercat de derivats meteorològics

Com hem mencionat anteriorment, l'article analitzat es centra en derivats de temperatura. La informació que es presenta en aquest apartat ha estat extreta dels articles [18], [19] i [20].

Per parlar sobre el seu origen, cal situar-nos en els anys 1996-1998, quan van tenir lloc els esdeveniments coneguts com 'El Niño'. Aquest fenomen fa referència a les primeres previsions climàtiques que la comunitat meteorològica va predir correctament. En concret, va preveure que l'hivern de 1997-1998 seria suau. Aquest fet va fer reflexionar a moltes empreses, que depenien del clima per obtenir guanys, com les del sector de agrícola, sobre la importància de cobrir el risc associat a les condicions climàtiques adverses o inesperades. Va ser aleshores quan l'any 1997 es va començar a desenvolupar la indústria dels derivats climàtics.

L'any 1999, el CME va promoure els primers contractes de futurs i opcions sobre futurs meteorològics. Aquests contractes van permetre a empreses i inversors gestionar els riscos relacionats amb el clima amb més seguretat i liquiditat. El CME disposa d'una clearing house que permet garantir les condicions contractuals, eliminant d'aquesta manera el risc de crèdit o de contrapartida. D'aquesta manera, les empreses van començar a cobrir el volum de producció i els guanys que tindrien [17].

El mercat de derivats meteorològics és un mercat incomplet ja que l'actiu subjacent és solament un índex. [21] [22] La incompletitut d'un mercat pot estar causada per diversos motius. Un dels més habituals i que també és el cas dels derivats meteorològics [23] és que no existeixen actius comercialitzables per cobrir tots els riscos. Això provoca salts o volatilitat [18] en els preus al mercat. [24] No obstant, aquest tipus de mercats són adequats ja que accepten propostes per índexos i models, innovant en cobertures i administració de riscos climàtics.

Aquests índexos es basen en un desencadenant específic del clima, com pot ser la temperatura, les precipitacions, el vent o la irradiació solar. Els més usats són els relacionats amb la temperatura [19] i, dins de tots, els més habituals que, a més a més són els de l'article, són els Heating Degree Days o dies de calefacció (HDD) i els Cooling Degree Days o dies de refrigeració (CDD). Els mesos en què es poden comprar o vendre contractes relacionats amb aquests índexos són en els de tardor o hivern, pel cas dels HDD, ja que es comercialitzen durant els mesos d'octubre fins l'abril; o en els de primavera o estiu, pel cas dels CDD, ja que es comercialitzen durant els mesos de maig fins el setembre.

6.2.1 Heating Degree Days (HDD) i Cooling Degree Days (CDD)

A continuació, expliquem de manera detallada com són aquests índexos i com es poden usar.

L'índex HDD o graus-dia de calefacció d'un dia t estableix el nombre de graus per sota de $65°F$ de la temperatura mitjana diària. S'estableixen $65°F$ (graus Farenheit), que equivalen a 18 °C ja que es considera la *temperatura de confort*, és a dir, la temperatura en què no cal ni refrigerar ni escalfar. Formalment, sigui $t \geq 0$,

$$HDD(t) = \max(65 - T(t); 0),$$

on $T(t)$ és la temperatura mitjana del dia $t \geq 0$, és a dir,

$$T(t) = \frac{T_{max}(t) + T_{min}(t)}{2}.$$

Aquest índex mesura la demanda de calefacció i, per tant, es pot usar per cobrir hiverns inusualment freds. Anàlogament, els graus-dia de refrigeració pel dia $t \geq 0$, venen donats per

$$CDD(t) = \max(T(t) - 65; 0).$$

De la mateixa manera, aquest índex recull les temperatures per sobre dels $65°F$ durant el període estudiat, proporcionant una cobertura per estius inusualment calorosos, és a dir,

[17] Notem que els derivats meteorològics donen una cobertura sobre el volum, i no sobre el preu.

[18] La volatilitat és la inestabilitat dels preus als mercats financers.

[19] Les variables de temperatura usades són: la temperatura promig d'un període, els HDD, els CDD o la Cumulative Average Temperatura (CAT).

mesurant la demanda de refrigeració. Aquests productes basats en índexos de temperatura es comercialitzen per un període determinat, normalment per mesos, i per una localitat concerta [20]. A continuació, es presenta una taula amb la informació corresponent per localització.

Localitzacions	Índex (temporada de fred)	Índex (temporada de calor)	Termini contractes $[\tau_1, \tau_2]$
Estats Units	HDD	CDD	Setmanalment, mensualment i per estacions
Canadà	HDD	CDD, CAT	Mensualment i per estacions
Europa	HDD	CAT	Mensualment i per estacions
Costa del Pacífic	CAT	CAT	Mensualment i per estacions
Austràlia	HDD	CDD	Mensualment i per estacions

Taula 1: Localitats on es comercialitzen productes basats en índexos de temperatura.

Per un any, s'obtenen els valors d'aquest índexos sumant les dades mensuals. Així doncs, per un interval $[\tau_1, \tau_2]$, els índexos HDD i CDD venen donats per

$$HDD(\tau_1, \tau_2) = \sum_{t=\tau_1}^{\tau_2} HDD(t)$$

i per

$$CDD(\tau_1, \tau_2) = \sum_{t=\tau_1}^{\tau_2} CDD(t).$$

Si una empresa està exposada a canvis del clima en un període de temps i una regió concreta, pot cobrir-se mitjançant la compra o la venta d'un contracte de futur basat en aquests índexos, de manera que una de les parts rebrà un pagament si els gaus-dia queden per sobre dels $65°F$, mentre que l'altra ho farà en cas contrari. Alternativament, una empresa podria emetre una opció. Podria ser el cas d'un minorista de combustible que pot pensar que si hi ha un hivern molt fred, rebrà bons ingressos i, per tant, podria vendre una opció de compra de HDD. Per tant, si l'hivern resulta ser suau, el minorista de combustible es quedarà amb la prima de l'opció de compra, mentre que si l'hivern és molt fred, aleshores financiarà el pagament de l'opció amb els ingressos obtinguts. Actualment, els majors consumidors dels derivats meteorològics són les empreses de serveis públics.

A continuació definim els índexos HDD i CDD en temps continu sobre un període de temps $[\tau_1, \tau_2]$, $0 \leq \tau_1 < \tau_2$. Els índexos venen donats per

$$HDD(\tau_1, \tau_2) := \int_{\tau_1}^{\tau_2} \max(65 - T(t); 0)dt \tag{6.2}$$

i per

$$CDD(\tau_1, \tau_2) := \int_{\tau_1}^{\tau_2} \max(T(t) - 65; 0)dt. \tag{6.3}$$

Notem, per tant, que aquestes definicions són aproximacions matemàtiques de la definició dels índexos HDD i CDD en temps discret.

[20] [18] L'any 2006, la CME oferia contractes de futurs i opcions sobre el clima a 18 ciutats d'Estats Units, 9 d'Europa i 2 d'àsia i el Pacífic

6.2.2 Pricing d'un derivat de temperatura

Prenent com a mètode de pricing l'explicat a l'apartat 6.1.2 i tenint en compte que el nostre mercat és incomplet, denotem de forma genèrica per *Index* els índexos definits a (6.2) i (6.3). El preu d'un contracte d'un futur a temps $t \geq 0$ en un interval $[\tau_1, \tau_2]$, $0 \leq t \leq \tau_1 < \tau_2$ es denotarà per $F_{Index}(t, \tau_1, \tau_2)$ i s'ha de complir que

$$0 = \mathbb{E}_Q[e^{-(\tau_2 - t)}(Index(\tau_1, \tau_2) - F_{Index}(t, \tau_1, \tau_2))|\mathcal{F}_t].$$

Per tant, el preu d'un futur vindrà donat per

$$F_{Index}(t, \tau_1, \tau_2) = \mathbb{E}_Q[Index(\tau_1, \tau_2)|\mathcal{F}_t].$$

7 Modelització de la temperatura i pricing d'un futur

Un cop estudiats els mercats de derivats de temperatura i els índexos associats, observem que aquests depenen directament de la temperatura subjacent, que cal modelitzar. Per fer-ho, l'article proposa un model autoregressiu en temps continu i valora un futur basat en els índexos CDD i HDD. No obstant, aquest enfocament condueix a una fórmula no lineal en la variable temperatura, que dificulta la valoració d'opcions europees (call/put) sobre aquests futurs.

Per simplificar aquesta situació, l'article proposa una aproximació basada en una linealització d'una funció derivada de la fórmula teòrica del preu dels futurs, usant el marc de pricing sense arbitrartge. Aquesta funció, estretament vinculada a la funció de distribució acumulada (cdf), té bones propietats analítiques que permeten avaluar la qualitat de l'aproximació. Les conclusions es validen usant observacions històriques de temperatura recollides a New York durant un període de més de 53 anys.

En aquest capítol presentarem el model autoregressiu en temps continu (CAR) proposat a l'article i la metodologia per valorar els futurs basats en els índexos CDD i HDD. La modelització de la temperatura es fonamenta en la idea que l'estat actual depèn de temperatures passades, un enfocament justificat per [25] i [26]. Seguint [27], la temperatura ve donada per una part determinista i una part estocàstica. En aquest context, la part estocàstica es modelitzarà mitjançant un procés autoregressiu d'ordre p, que per [28], permet fixar els preus dels HDD i CDD en un mercat incomplet i donar expressions dels pagaments descomptats esperats.

7.1 Model proposat

Sigui $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, P)$ un espai de probabilitat filtrat i sigui $T(t)$ la temperatura mitjana en un temps determinat $t \geq 0$. Suposem doncs que podem escriure la temperatura com

$$T(t) = \Lambda(t) + Y(t),$$

on $\Lambda(t)$ és una funció determinista que recull el comportament estacional mitjà i on $Y(t)$ és una funció estocàstica que modelitzarà les variacions que s'hi produeixen.

Per modelitzar $Y(t)$, prenem la classe de processos autoregressius en temps continu, CAR(p), amb $p \in \mathbb{N}$. Un procés CAR(p) es defineix com

$$Y(t) = e_1' X(t), \tag{7.1}$$

on $X(t)$ ve definit per l'equació diferencial estocàstica p-dimensional

$$dX(t) = AX(t)dt + \sigma(t)e_p dB(t). \tag{7.2}$$

on $X(t)$ és un procés estocàstic $\mathbb{R}^p$-dimensional, $B(t)$ és un moviment Brownià unidimensional, e_i amb $i = 1, \ldots, p$ és el i-èssim vector de la base canònica, $\sigma(t)$ és una funció determinista i acotada que representa la volatilitat i A una matriu quadrada de dimensió p, definida de la següent forma:

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{p-1} & & I_{p-1\times p-1} \\ -\alpha_p & \cdots & -\alpha_1 \end{pmatrix},$$

on $\mathbf{0}_{p-1}$ és el vector $(p-1)$-dimensional de zeros i $I_{p-1\times p-1}$ la matriu identitat $(p-1)$-dimensional. S'assumeix que les constants $\alpha_i > 0$, $i = 1, \ldots, p$ per tal de tenir un procés estacionari. Com vam observar al Capítol 5.2, la primera component és la part determinista que descriu la 'tendència' del procés mentre que la segona és la part estocàstica que dona l'aleatorietat del procés. Per un temps inicial $s \geq 0$, la solució de (7.1) és el procés $X(t)$, amb $t \geq s$, que ve donat per

$$X(t) = e^{A(t-s)}X(s) + \int_s^t e^{A(t-u)}\sigma(u)e_p dB(u).$$

Observem que $e^{A(t-s)}$ és l'exponencial de la nostra matriu A [21] i és de la forma:

$$e^{A(t-s)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A(t-s))^k}{k!}.$$

Una suposició que cal imposar sobre la matriu A és que els seus valors propis (VAPs) tinguin part real negativa, és a dir, $Re(\lambda_i) < 0$, $i = 1, \ldots, p$. Aquesta suposició es fa per tal que la matriu actui com un operador que atrau el procés $X(t)$ cap a una posició d'equilibri, és a dir, amb aquesta condició, $e^{A(t-s)}$ decreix exponencialment amb el temps. Això es coneix com reversió a la mitjana i assegura que $X(t)$ sigui un procés estacionari. L'estacionarietat del procés garanteix que característiques com la mitjana o la variància es mantinguin al llarg del temps [29]. Per tant, com la distribució de $X(t)$ serà estable a llarg termini, això ens permetrà modelitzar les dinàmiques de la temperatura de forma consistent per qualsevol període de temps. A més a més, la predicció de l'estat futur d'$X(t)$ es simplificarà amb el seu estat actual, facilitant-nos el càlcul del preu de futurs (F_{HDD} i F_{CDD}). L'estacionarietat de la distribució de $X(t)$ també redueix la dependència de condicions inicials i justifica l'ús del model autoregressiu en temps continu (CAR) per definir d'una altra manera la solució $X(t)$; expressada com a (7.1).

L'estructura del model CAR, en concret el terme determinista de l'equació (7.2), i la condició d'estacionarietat imposada pels valors propis de la matriu A justifiquen que el procés $X(t)$ és un procés de Ornstein-Uhlenbeck amb reversió a la mitjana donada per la matriu A i una evolució estocàstica donada per un moviment Brownià unidimensional. Aquest comportament és essencial per capturar la dinàmica de les temperatures al llarg del temps i garantir la validesa del model.

7.2 Transformada de Girsanov

Recordem que, per tal de valorar derivats, cal definir una mesura de probabilitat Q neutral al risc tal que $Q \sim P$. Cal doncs que reescrivim aquesta equació sota un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, Q)$. Per fer-ho, com volem que es mantinguin les propietats del model definit, usarem el teorema de Girsanov, Teorema 4.4, explicat amb detall a la secció 4.2, per tal de definir un procés $W(t)$ que, sota la mesura de probabilitat Q, sigui un Brownià. Definim el procés $W(t)$ com

$$dW(t) = -\frac{\theta(t)}{\sigma(t)}dt + dB(t),$$

[21] Si volguéssim calcular explícitament la matriu resultant, veuríem que no es tracta d'una matriu diagonalitzable i per tant, caldria aplicar Jordan.

on $\theta(t)$ és una funció determinista acotada que representa una parametrització de la prima de risc del mercat [22] i $\sigma(t)$ és estrictament positiva que, més endavant, per facilitar els càlculs, suposarem $\sigma = 1$. Aleshores aïllant $dB(t)$ tenim que

$$dB(t) = dW(t) + \frac{\theta(t)}{\sigma(t)}dt.$$

Substituint a (7.1), l'equació ve donada per

$$dX(t) = (AX(t) + \theta(t)e_p)dt + \sigma(t)e_p dW(t)$$

que, ara sí, està preparada per calcular el pricing d'un futur.

Abans, cal veure com varia la solució (7.2) amb aquest canvi de mesura. La solució la suposarem donada i s'escriu de la següent forma:

$$X(s) = e^{A(t-s)}X(t) + \int_t^s e^{A(s-u)}e_p\theta(u)du + \int_t^s e^{A(t-u)}e_p\sigma(u)dW_u.$$

7.3 Pricing d'un futur

Reprenem l'apartat 6.2.2. Hem vist que el preu dels futurs $F_{CDD}(t,\tau_1,\tau_2)$ i $F_{HDD}(t,\tau_1,\tau_2)$, per un mercat lliure d'arbitratge en el moment $t \leq \tau_2$ venen donats per les següents expressions

$$F_{CDD}(t,\tau_1,\tau_2) := \mathbb{E}_Q[CDD(\tau_1,\tau_2)|\mathcal{F}_t].$$

i

$$F_{HDD}(t,\tau_1,\tau_2) := \mathbb{E}_Q[HDD(\tau_1,\tau_2)|\mathcal{F}_t],$$

respectivament. Calculem doncs les esperances, començant pel cas dels CDD. Tenim doncs que per $t \leq \tau_1 < \tau_2$,

$$\begin{aligned} F_{CDD}(t,\tau_1,\tau_2) = \mathbb{E}_Q[CDD(\tau_1,\tau_2)|\mathcal{F}_t] &= \mathbb{E}_Q\left[\int_{\tau_1}^{\tau_2}\max(T(t)-c;0)dt|\mathcal{F}_t\right] \\ &= \int_{\tau_1}^{\tau_2}\mathbb{E}_Q[\max(T(s)-c,0)|\mathcal{F}_t]ds \\ &= \int_{\tau_1}^{\tau_2}\mathbb{E}_Q\left[(T(s)-c)\mathbf{1}_{\{T(s)-c>0\}}\right]_{X(t)=x}ds. \end{aligned}$$

Observem que la temperatura $T(s)$ ve donada per

$$T(s) = \Lambda(s) + e_1'e^{A(s-t)}X(s) + \int_t^s e_1'e^{A(s-u)}e_p\theta(u)du + \int_t^s e_1'e^{A(s-u)}e_p dW_u.$$

on

$$m_\theta(t,s,x) = \mathbb{E}_Q[T(s)|\mathcal{F}_t] = \Lambda(s) + e_1'e^{A(s-t)}X(s) + \int_t^s e_1'e^{A(s-u)}e_p\theta(u)du$$

ja que l'últim terme estocàstic s'anul·la per l'esperança del moviment Brownià; i

$$\Sigma^2(t,s) = Var_Q[T(s)|\mathcal{F}_t] = \int_t^s (e_1'e^{A(s-u)}e_p)^2 dW_u.$$

[22] [30] La prima de risc de mercat és la màxima rendibilitat que un inversor exigeix a l'actiu per assumir el risc que aquest comporta en comparació a un altre actiu que es considera lliure de risc.

Així doncs, $T(s) \sim N(m_\theta(t,s,x), (\Sigma(t,s))^2)$ sota la mesura de probabilitat $Q(\cdot|\mathcal{F}_t)$. Això és degut a la transformada de Girsanov, que ens ha proporcionat un nou moviment Brownià W_t amb nous paràmetres de mitjana i variància. Per tant, obtenim que

$$F_{CDD}(t,\tau_1,\tau_2) = \int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_c^\infty (\mathbf{y}-c)\frac{1}{\Sigma(t,s)\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\mathbf{y}-m_\theta(t,s,x)}{\Sigma(t,s)}\right)^2} d\mathbf{y}ds.$$

Aplicant el canvi de variable $\mathbf{y} - c = y$, obtenim que la integral que acabem de donar és igual a

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{1}{\Sigma(t,s)\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty y e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y+c-m_\theta(t,s,x)}{\Sigma(t,s)}\right)^2} dyds.$$

Considerem el canvi de variable $\frac{y+c-m_\theta(t,s,x)}{\Sigma(t,s)} = k$, d'on obtenim que $y = \Sigma(t,s)k + m_\theta(t,s,x) - c$ i $dy = \Sigma(t,s)dk$ i els límits d'integració canvien, anant de $\frac{c-m_\theta(t,s,x)}{\Sigma(t,s)}$ a ∞. Aleshores, la integral anterior ens queda de la següent forma

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{1}{\Sigma(t,s)\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{c-m_\theta(t,s,x)}{\Sigma(t,s)}}^\infty (\Sigma(t,s)k + m_\theta(t,s,x) - c)\, e^{-\frac{1}{2}k^2} (\Sigma(t,s)dk)ds =$$

$$= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[\int_{\frac{c-m_\theta(t,s,x)}{\Sigma(t,s)}}^\infty \frac{\Sigma(t,s)}{\sqrt{2\pi}} k e^{-\frac{1}{2}k^2} dk + \int_{\frac{c-m_\theta(t,s,x)}{\Sigma(t,s)}}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (m_\theta(t,s,x) - c) e^{-\frac{1}{2}k^2} dk \right] ds.$$

Resolem per separat les dues integrals de dins del parèntesi. Abans de seguir, cal recordar les definicions i propietats de les pdf's i les cdf's. Per més detall, consultar l'Apèndix 10.2. Comencem amb la segona integral: Observem que

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{c-m_\theta(t,s,x)}{\Sigma(t,s)}}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (m_\theta(t,s,x) - c) e^{-\frac{1}{2}k^2} dk &= (m_\theta(t,s,x) - c) \int_{\frac{c-m_\theta(t,s,x)}{\Sigma(t,s)}}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}k^2} dk \\
&= (m_\theta(t,s,x) - c)\left(1 - \Phi\left(\frac{c - m_\theta(t,s,x)}{\Sigma(t,s)}\right)\right) \\
&= (m_\theta(t,s,x) - c)\left(1 - \Phi\left(\frac{m_\theta(t,s,x) - c}{\Sigma(t,s)}\right)\right).
\end{aligned}$$

Resolem ara la primera integral:

Considerem el canvi de variable $\frac{-k^2}{2} = z$ que ens dona $dk = \frac{-1}{k}dz$ i ens fa variar els límits d'integració de $-\infty$ a $z = -\frac{1}{2}\left(\frac{c-m_\theta(t,s,x)}{\Sigma(t,s)}\right)^2$. Per tant,

$$\frac{\Sigma(t,s)}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{c-m_\theta(t,s,x)}{\Sigma(t,s)}}^\infty k e^{-\frac{1}{2}k^2} dk = \frac{\Sigma(t,s)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{c-m_\theta(t,s,x)}{\Sigma(t,s)}\right)^2} e^z dz = \frac{\Sigma(t,s)}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{m_\theta(t,s,x)-c}{\Sigma(t,s)}\right)^2}.$$

Juntant ambdues integrals, obtenim que

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[\frac{\Sigma(t,s)}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{m_\theta(t,s,x)-c}{\Sigma(t,s)}\right)^2} + (m_\theta(t,s,x) - c)\Phi\left(\frac{m_\theta(t,s,x) - c}{\Sigma(t,s)}\right) \right] ds$$

$$= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[\Sigma(t,s)\Phi'\left(\frac{m_\theta(t,s,x) - c}{\Sigma(t,s)}\right) + (m_\theta(t,s,x) - c)\Phi\left(\frac{m_\theta(t,s,x) - c}{\Sigma(t,s)}\right) \right] ds$$

$$= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \Sigma(t,s) \left[\Phi'\left(\frac{m_\theta(t,s,x) - c}{\Sigma(t,s)}\right) + \left(\frac{m_\theta(t,s,x) - c}{\Sigma(t,s)}\right)\Phi\left(\frac{m_\theta(t,s,x) - c}{\Sigma(t,s)}\right) \right] ds$$

$$= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \Sigma(t,s)\Psi\left(\frac{m_\theta(t,s,x-c)}{\Sigma(t,s)}\right) ds,$$

on, a l'última igualtat hem posat $\Psi(x) = \Phi'(x) + x\Phi(x)$.

Pel cas $\tau_1 \leq t \leq \tau_2$ tenim

$$\begin{aligned} F_{CDD}(t,\tau_1,\tau_2) &= \mathbb{E}_Q[CDD(\tau_1,\tau_2)|\mathcal{F}_t] \\ &= \mathbb{E}_Q\left[\int_{\tau_1}^{t} \max(T(s)-c;0)ds|\mathcal{F}_t\right] + \mathbb{E}_Q\left[\int_{t}^{\tau_2} \max(T(s)-c;0)ds|\mathcal{F}_t\right] \\ &= \int_{\tau_1}^{t} \max(T(s)-c;0)ds + \mathbb{E}_Q[CDD(t,\tau_2)|\mathcal{F}_t] \\ &= \int_{\tau_1}^{t} \max(T(s)-c;0)ds + \int_{t}^{\tau_2} \Sigma(t,s)\Psi\left(\frac{m_\theta(t,s,x)-c}{\Sigma(t,s)}\right) ds. \end{aligned}$$

Juntant ambdós casos, obtenim que

$$F_{CDD}(t,\tau_1,\tau_2) = \int_{\tau_1}^{\max(t,\tau_1)} \max(T(s)-c;0)ds + \int_{\max(t,\tau_1)}^{\tau_2} \Sigma(t,s)\Psi\left(\frac{m_\theta(t,s,X(t))-c}{\Sigma(t,s)}\right) ds.$$

Per obtenir $F_{HDD}(t,\tau_1,\tau_2)$ usarem el que es coneix com la paritat CDD-HDD. Per això, usem un corol·lari, la demostració del qual es troba a [26], que diu el següent:

Corołari 7.1. *Es compleix que*

$$F_{CDD}(t,\tau_1,\tau_2) - F_{HDD}(t,\tau_1,\tau_2) = \mathbb{E}_Q\left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} T(s)ds|\mathcal{F}_t\right] - c(\tau_2-\tau_1).$$

Per tant, amb una petita generalització d'una proposició de [26] i mantenint la mateixa notació que per l'expressió de $F_{CDD}(t,\tau_1,\tau_2)$, obtenim que

Proposició 7.2. *Per $t \leq \tau_2$ se satisfà*

$$F_{HDD}(t,\tau_1,\tau_2) = \int_{\tau_1}^{\max(t,\tau_1)} \max(c-T(s);0)ds + \int_{\max(t,\tau_1)}^{\tau_2} \Sigma(t,s)\Psi\left(\frac{c-m_\theta(t,s,X(t))}{\Sigma(t,s)}\right) ds.$$

Observem que els preus dels futurs de HDD i CDD depenen de manera no lineal del procés $X(t)$. Això dificulta la valoració d'opcions. A l'article, es proposen diverses maneres de linealitzar aquest preu, mitjançant la linealització de la funció Ψ, per tal de poder fer el pricing de les opcions call dels futurs de CDD i HDD. No obstant, no analitzarem aquesta part.

8 Modelització empírica de la temperatura

Finalment, acabem l'anàlisi amb la modelització de la temperatura mitjançant un cas empíric. Per fer-ho, usarem el programa Matlab. Comptem amb una base de dades de les temperatures mitjanes diàries, expressades en graus Fahrenheit, recollides a la ciutat de Nova York des de l'1 de gener de 1960 fins el 20 d'abril de 2013. Per tal que tots els anys comptin amb el mateix número de dades, les dades corresponents als dies 29 de febrer s'han eliminat, obtenint un total de 19.455 observacions. El primer que podríem fer és preguntar-nos com d'aprop estan les temperatures de seguir una distribució normal. Veiem els resultats de les freqüències de les temperatures a la Figura 1.

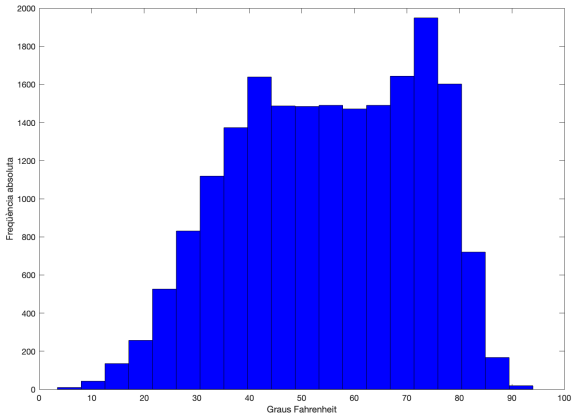

Figura 1: Histograma de temperatures mitjanes.

Com podem observar a l'histograma, les temperatures no es distribueixen segons una distribució normal. Com hem proposat teòricament, podem expressar la temperatura mitjançant una funció determinista, la qual hem anomenat Λ, i una altra estocàstica, procés que hem anomenat Y. Graficant les temperatures, com podem veure a la Figura 2, s'observa que, efectivament, la temperatura té un comportament determinista, que és periòdic i, per tant, podríem dir que representa les diferents estacions, però amb petites variacions irregulars, que no poden ser representades amb una funció determinista.

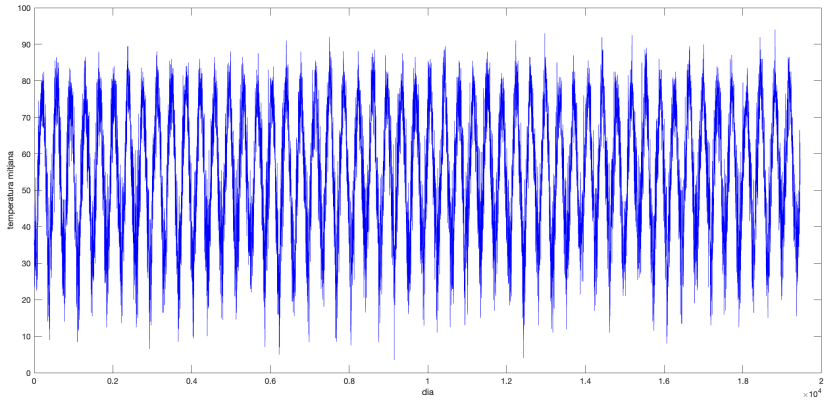

Figura 2: Gràfic de les temperatures mitjanes.

Per tant, seguint amb la mateixa notació, diem T_i a la temperatura mitjana del dia i, on $i = 1, 2, \ldots$, sent T_1 la temperatura mitjana del dia 1 de gener de 1960. Aleshores, pel dia i, la temperatura es pot expressar com

$$T_i = \Lambda_i + y_i,$$

on y_i denota un procés autoregressiu d'ordre $p \in \mathbb{N}$, AR(p). Justificant aquesta elecció a [31], per la part determinista, l'article proposa la següent funció

$$\Lambda(t) = a_1 + a_2 t + a_3 \cos\left(\frac{2\pi(t - a_4)}{365}\right), \tag{8.1}$$

on la part lineal $a_1 + a_2 t$ determina l'augment de temperatura degut al canvi climàtic i el cosinus $cos\left(\frac{2\pi(t-a_4)}{365}\right)$ modelitza l'estacionalitat de la temperatura.

Volem determinar els coeficients a_i, $i = 0, 1, 2, 3$. Per fer-ho, a continuació mostrem el codi de Matlab que retorna un vector a amb els coeficients de Λ.

```
a0=[55.0146, 0, 90, 244];
lambda = @(a,t) a(1)+a(2).*t+a(3).*cos(2.*pi.*(t-a(4))./365);
[a,r1]=nlinfit(t,DAT',lambda,a0);
```

La funció *nlinfit* calcula un vector amb els coeficients estimats mitjançant una estimació iterativa de mínims quadrats per una regressió no lineal, en el nostre cas la funció *lambda*, partint d'un vector inicial donat, a_0. A més a més, la funció retorna un vector amb els residus d'aquesta estimació, $r_1 = T_i - \Lambda(i)$. Els coeficients $\hat{a}_i$ retornats pel Matlab són els següents: $\hat{a}_1 = 54.19$, $\hat{a}_2 = 0.0001$, $\hat{a}_3 = 22.15$ i $\hat{a}_4 = 204.81$. Si grafiquem (8.1) sobre la base de dades obtenim la Figura 3.

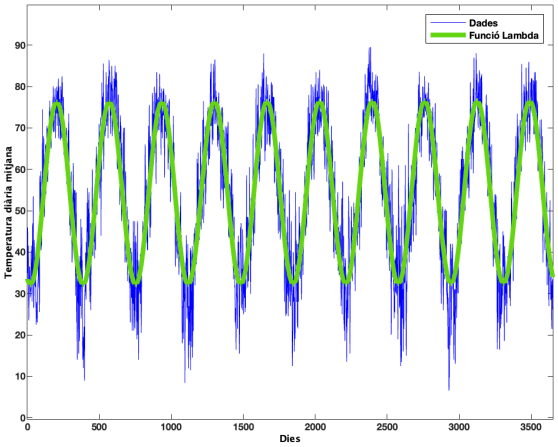

Figura 3: Funció Λ sobre les dades.

Observem que hi ha una tendència periòdica amb temperatures més altes i més baixes de manera regular, representant les estacions de l'any, com havíem dit, i una part no representada, corresponent a la part estocàstica y_i. Volem modelitzar doncs aquesta part, la qual ve donada per

$$y_i = T_i - \Lambda(i),$$

que són els residus r_1 de l'estimació.

Un cop més, podríem preguntar-nos com d'aprop es troeben aquests residus de seguir una distribució normal. Per veure-ho, calculem la mitjana i la desviació típica del conjunt de valors y_i, mitjançant les funcions implementades al Matlab, *mean* i *std* i les imposem a la funció de densitat de probabilitat (pdf) d'una distribució normal, donada per a l'Apèndix 10.1. Volem comparar aquesta pdf amb la pdf empírica dels valors y_i. Per calcular-la, usem una funció implementada per Matlab, *kdensity* que retorna una estimació de la pdf d'un conjunt de valors donats. La comparació d'ambdues densitats es mostra a la Figura 4.

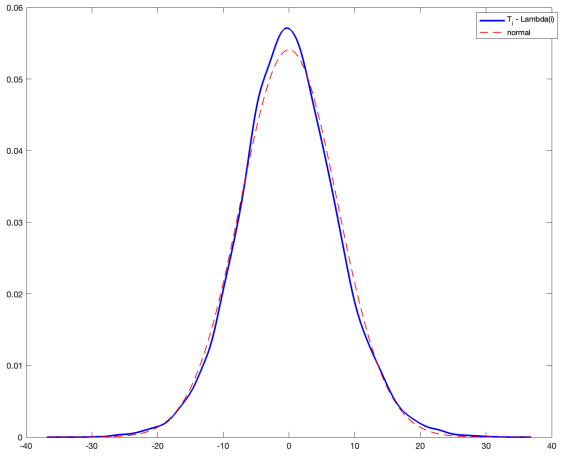

Figura 4: Comparació normal i $T_i - \Lambda(i)$.

Com es pot observar, tot i que ambdues distribucions no són iguales, són properes. A l'article, es suggereix un model autoregressiu CAR(p) per modelitzar la part estocàstica de la temperatura. No obstant, cal determinar el grau p. Per fer-ho, inicialment, haurem de treballar amb un model autoregressiu d'ordre $p \in \mathbb{N}$ per modelitzar els residus. Estudiem doncs la correlació entre els valors y_i, mitjançant les funcions d'autocorrelació i autocorrelació parcial. [32] L'autocorrelació d'un conjunt de valors estudia si un valor es correlaciona amb ell mateix, buscant relacions entre les diferents dades de la sèrie. Per veure-ho, es calcula la relació entre un valor y_i i els seus retards k, que corresponen a valors anteriors. Matemàticament, l'autocorrelació es defineix com

$$\rho_k = \frac{Cov(y_i, y_{i-k})}{\sigma^2_{y_i}},$$

on $Cov(y_i, y_{i-k})$ és la covariància entre els valors y_i i y_{i-k} i $\sigma^2_{y_i}$ la variància de y_i. [33] La funció d'autocorrelació (ACF) estudia, per diferents retards k, quina és l'autocorrelació entre els valors de la sèrie que es troben a k intervals de distància. El Matlab conté aquesta funció implementada, amb el nom de *xcorr*. Els resultats de l'ACF obtinguts es mostren a la Figura 5.

Com es pot observar al gràfic, l'ACF decreix exponencialment. Aquest comportament és comú en els models autoregressius i la ràpida caiguda dels valors indica que l'ordre d'autocorrelació és baix. Mitjançant aquest gràfic podem intuir, però no assegurar, el valor de p. Com a partir del tercer retard, els valors que s'obtenen són propers entre

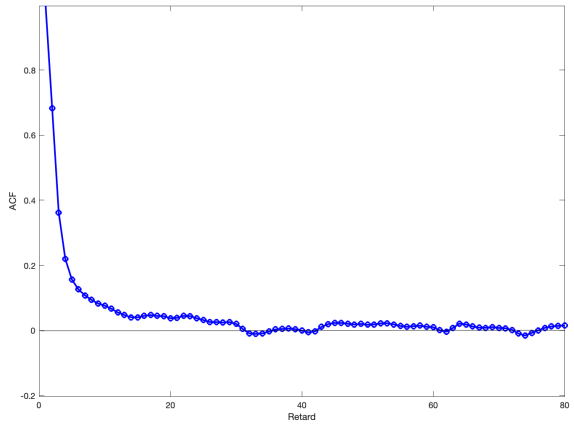

Figura 5: ACF de $T_i - \Lambda(i)$.

si, podem suposar que l'ordre és 3. No obstant, cal assegurar-se. Per fer-ho, usem la funció d'autocorrelació parcial (PACF), també implementada al Matlab, amb el nom *pacf*. La funció PACF calcula, donat un retard k, l'autocorrelació entre dos valors de la base de dades que es troben a k intervals de distància, eliminant la influència dels retards intermitjos. És molt útil en els models autoregressius ja que permet determinar l'ordre del model, observant quins valors es situen fora i dins d'unes bandes de significació definides. Aquestes bandes de significació es determinen sota la suposició que no hi ha autocorrelació. La manera de determinar-les és mitjançant la següent fórmula:

$$\pm \frac{z}{\sqrt{N}}, \tag{8.2}$$

on N és el nombre total d'observacions i z el valor d'una distribució normal estàndard per un nivell de significació donat. Normalment es pren un nivell de significació del 95% i el valor z correspon a 1,96. Per estimar els coeficients de la PACF, a continuació es mostra el codi que s'implementa a Matlab:

```
[arcoefs,E,K] = aryule(r1,3);
arcoefs;
pacf = -K;
lag = 1:3;
```

La funció *aryule* calcula els paràmetres autorregressius (AR) normalitzats, corresponents a un model d'ordre p, en el nostre cas 3, per la base de dades introduïda, en el nostre cas els residus r_1. El resultat es guarda al vector *arcoefs*. A més a més, també retorna la variància estimada, E i els coeficients de reflexió, K. Aquests coeficients K s'estimen per minimitzar els errors de la predicció en l'ajust del model AR i són els necessaris pel càlcul de la PACF. Per convenció, a Matlab es defineix que els valors negatius dels coeficients de reflexió, -K, són els valors de la PACF en cada retard. Els resultats de l'autocorrelació parcial amb $p = 3$ es mostren a la Figura 6.

Com es pot observar al gràfic, en vermell es veuen les bandes de confiança, determinades per (8.2). Com es pot observar, pels tres primers retards, els valors se situen fora d'aquestes, la qual cosa implica un grau significatiu de correlació. No obstant, a partir del quart,

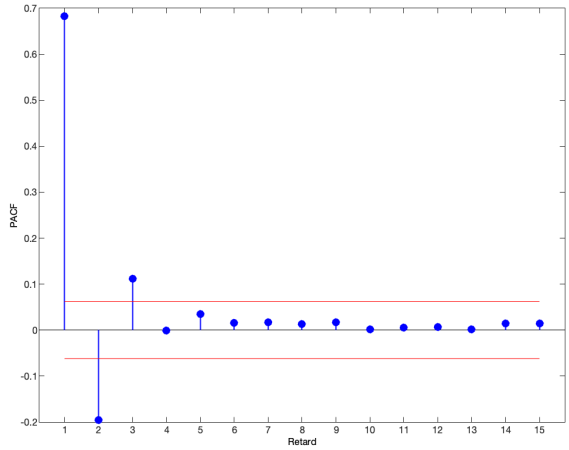

Figura 6: PACF de $T_i - \Lambda(i)$.

les correlacions parcials cauen dins de la franja, indicant que ja no són significatives. És per aquest motiu que podem concloure que el nostre procés és un model autorregressiu d'ordre 3 amb coeficients $\hat{b}_1 = 0.84$, $\hat{b}_2 = -0.29$ i $\hat{b}_3 = 0.11$, on

$$y_{i+3} = b_1 y_{i+2} + b_2 y_{i+1} + b_3 y_i + \epsilon_i$$

on ϵ_i representa l'error aleatori que es distribueix com una $N(0, \sigma^2)$, on σ^2 és constant i, en el nostre cas, determina la constant de volatilitat. Addicionalment, grafiquem a la Figura 7 els residus normalitzats del model estimat AR(3) sobre una distribució normal estàndard.

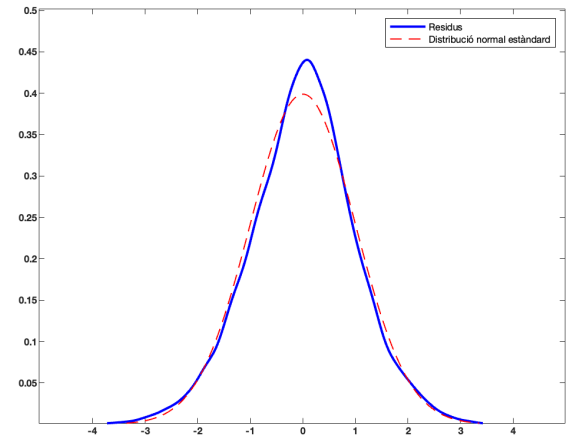

Figura 7: Residus normalitzats i distribució normal estàndard.

Com podem observar, tot i no ser perfecta, s'obté una bona aproximació. Això conclou que es tracta d'un model autoregressiu d'ordre 3.

8.1 Relació entre els coeficients del model CAR(p) i els del model AR(p)

A [15] s'estableix la relació entre els coeficients del procés AR(3) obtinguts i els del procés CAR(3). La relació s'estableix entre els b_j i els α_i, coeficients de la matriu A del procés $X(t)$, definit a (7.2). Per veure com s'obté aquesta relació consultar Apèndix 10.7. Veiem-ho en el nostre cas, on $p = 3$. Aplicant (10.5) i reordenant els termes, tenim que

$$\begin{aligned} x_1(t+3) =& (3-\alpha_1)\ x_1(t+2)\ +\ (2\alpha_1-\alpha_2-3)\ x_1(t+1) \\ &+ (\alpha_2+1-\alpha_1-\alpha_3)\ x_1(t)\ +\ \sigma(t)\epsilon(t), \end{aligned}$$

on $b_1 = 3-\alpha_1$, $b_2 = 2\alpha_1-\alpha_2-3$ i $b_3 = \alpha_2+1-\alpha_1-\alpha_3$. Resolent el sistema obtenim doncs que $\hat{\alpha}_1 = 2.16$, $\hat{\alpha}_2 = 1.61$ i $\hat{\alpha}_3 = 0.34$. Per tant, la matriu A queda de la següent forma:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.34 & -1.61 & -2.16 \end{pmatrix},$$

i té com a valors propis $\lambda_1 = -0.35$, $\lambda_2 = -0.91 + 0.40i$ i $\lambda_3 = -0.91 - 0.40i$ que, efectivament, tenen part real negativa. Per tant, Y és un procés estacionari CAR(3).

9 Conclusions

La realització d'aquest treball m'ha permès conèixer i aprofundir en els coneixements matemàtics avançats necessaris per a l'anàlisi de l'article "Approximation of the price dynamics of Heating Degree Day (HDD) and Cooling Degree Day (CDD) temperature futures". Aquest estudi m'ha introduït en el mercat dels derivats, especialment el dels derivats climàtics, un mercat OTC i incomplet que, malgrat la poca liquiditat que ofereixen deguda al poc volum de comercialització, brinda oportunitats significatives per gestionar i cobrir el risc associat a les fluctuacions de la temperatura.

Tal i com es va plantejar, durant la primera part del treball he establert les bases teòriques necessàries per entendre i abordar els problemes plantejats en l'article. Estudiar de manera rigorosa els processos estocàstics, fent especial èmfasi en el moviment Brownià, la integral d'Itô, el teorema de Girsanov i les equacions diferencials estocàstiques (EDEs), ha estat fonamental per comprendre la dinàmica de la temperatura i la seva modelització. Aquest marc teòric m'ha permès contextualitzar i justificar l'ús dels índexos HDD i CDD, posant en valor la seva rellevància per valorar futurs i opcions en mercats de derivats meteorològics.

La part dedicada al pricing d'un futur m'ha permès conèixer com valorar futurs basats en índexos de temperatura, com ara els Heating Degree Day (HDD) i els Cooling Degree Day (CDD). Aquesta anàlisis m'ha ajudat a entendre la problemàtica que es deriva en aquest estudi de la dependència no lineal de la temperatura que té el preu del futur, així com la importància de modelitzar-la amb precisió.

Pel que fa a la modelització de la temperatura, m'ha permès conèixer els processos autorregressius i com s'utilitzen. A més a més, la reproducció del cas empíric presentat a l'article, usant les dades històriques de la temperatura de Nova York, m'ha permés treballar amb un gran nombre d'observacions i veure com, amb una combinació de components deterministes, que tenen en compte tant el canvi climàtic com la periodicitat estacional, i components estocàstiques, modelitzades mitjançant processos CAR(p), es pot descriure amb precisió el comportament de la temperatura, oferint un model robust que connecta la teoria i la pràctica.

Aquest treball també m'ha posat de manifest algunes de les problemàtiques i limitacions inherents a l'ús d'aquests models en el context de la valoració de derivats, com ara l'impacte del canvi de mesura de probabilitat mitjançant la transformada de Girsanov o les dificultats associades a la predicció acurada de la temperatura futura. Tot i aquestes limitacions, considero que aquest treball ha demostrat el poder de l'aplicació de la teoria matemàtica en un cap tan especialitzat com el mercat dels derivats climàtics.

En conclusió, amb aquest treball he aconseguit complir amb l'objectiu que em vaig proposar inicialment de vincular la teoria matemàtica amb la seva aplicació pràctica. A més a més, m'ha proporcionat una base sòlida per a futurs estudis, tant acadèmics com professionals, en l'àmbit de la matemàtica aplicada i la gestió del risc. En definitiva, aquest projecte ha estat una experiència enriquidora, tant a nivell de coneixement com personal, mostrant-me un cop més com les matemàtiques poden i contribueixen significativament a la comprensió i desenvolupament de qüestions quotidianes, com ara és, en aquest cas, mercats innovadors i interdisciplinaris com el mercat de derivats climàtics.

10 Apèndix

10.1 Funcions característiques

Les funcions característiques són útils per descriure la distribució d'una variable aleatòria X. A continuació donem la definició i algunes de les seves propietats més importants.

Definició 10.1. *(funció característica d'una variable aleatòria) Donada una variable aleatòria X que pren valors a $\mathbb{R}^n$ i prenent $t \in \mathbb{R}^n$, la seva funció característica φ_X es defineix com*

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) = E[e^{i\langle t,X\rangle}] = E[e^{it^*X}] &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle t,x\rangle} P_X(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \cos(\langle t,X\rangle) P_X(dx) + i\int_{\mathbb{R}^n} \sin(\langle t,x\rangle) P_X(dx),\end{aligned}$$

on P_X és la llei d'X.

A continuació, donem algunes propietats de la funció característica:

1. $\varphi_X(0) = 1$, $0 \in \mathbb{R}^n$;
2. (conjugat complex) $\varphi_X(-t) = \overline{\varphi_X(t)}$;
3. φ és uniformement contínua;
4. Donats $A \in \mathbb{R}^{n\times r}$ i $b \in \mathbb{R}^r$, es compleix
$$\varphi_{AX+b}(t) = e^{i\langle t,b\rangle}\varphi_X(A^*t);$$
5. P_X és simètrica $\Leftrightarrow$ φ_X és real;
6. Les variables aleatòries $X_1,\dots,X_n$ són independents $\Leftrightarrow$ $\varphi_X(t) = \prod_{j=1}^n \varphi_{X_j}(t_j)$ on $X = (X_1,\dots,X_n)$ i $t = (t_1,\dots,t_n)$;
7. Si les variables $X_1,\dots,X_n$ són independents $\Rightarrow$ $\varphi_{X_1+\cdots+X_n}(t) = \varphi_{X_1}(t)\dots\varphi_{X_n}(t)$.

Proporcionem ara alguns resultats importants sobre les funcions característiques:

Teorema 10.2. *Sigui X una variable aleatòria a $\mathbb{R}$ amb $E(|X|^m) < +\infty$ per algun $m \in \mathbb{N} - \{0\}$, aleshores la funció característica φ_X té derivades contínues fins ordre m i es calculen de la següent forma:*

$$\varphi_X^{(k)}(t) = i^k \int_{\mathbb{R}} x^k e^{itx} P_X(dx), k = 1, ..., m.$$

En particular,

$$\varphi_X^{(k)}(0) = i^k E[X^k].$$

Teorema 10.3. *Sigui X una variable aleatòria a $\mathbb{R}$. Si la funció característica φ_X és k cops diferenciable al voltant del 0, aleshores X té moments d'ordre fins a $2m$, amb $2m \le k$.*

Teorema 10.4. *La funció caracterísitica d'una mesura de probabilitat P a $\mathbb{R}$ determina de manera única P. és a dir, si dues mesures de probabilitat sobre $\mathbb{R}$ admeten la mateixa funció característica, aleshores són iguals. Per tant,*

$$\varphi_X \equiv \varphi_Y \Leftrightarrow P_X \equiv P_Y.$$

Les demostracions de les propietats de la funció característica i dels teoremes: Teorema 10.2, Teorema 10.3 i Teorema 10.4 es poden consultar a [34].

10.2 Variables aleatòries Gaussianes uni i multidimensionals

Sigui X una variable aleatòria a $\mathbb{R}$ que segueix una distribució normal $N(\mu, \sigma^2)$, on μ és la mitjana i $\sigma > 0$ la desviació típica (σ^2 la variància). La seva funció de densitat (pdf) ve donada per

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2},\ x \in \mathbb{R}, \tag{10.1}$$

on

$$\mathbb{E}(X) = \mu;\ Var(X) = \sigma^2.$$

A més a més, per qualsevol pdf es compleix

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1.$$

Podem definir també la funció de distribució acumulada (cdf):

$$\Phi(a) = P(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f_X(x)dx.$$

A més a més, observem que si $X \sim N(0,1)$, aleshores

$$\Phi(-x) = \int_{-x}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} dx = 1 - \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} dx = 1 - \Phi(x).$$

Definim ara un vector aleatori mitjançant la seva funció característica:

Definició 10.5. *(vector gaussià) Sigui $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un vector aleatori que pren valors a $\mathbb{R}^n$, direm que el vector X és un vector aleatori gaussià si la seva funció característica és de la forma:*

$$\varphi_X(t) = e^{i\langle t,\mu\rangle - \frac{1}{2}t^*\Lambda t}$$

on $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ és el vector de mitjanes de X i on $\Lambda \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és la matriu de covariàncies de X, simètrica i semidefinida positiva.

Cal tenir en compte que $t^*\Lambda t = \langle t, \Lambda t\rangle$, que és el producte quadràtic associat a Λ.

Sigui $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_m})$ un vector aleatori Gaussià com s'acaba de definir, aquest està caracteritzat per dos paràmetres: la mitjana μ i la matriu de covariàncies Λ. Tenim doncs que

$$\mu_{t_1,\ldots,t_m} = \mathbb{E}(X_{t_1,\ldots,t_m}) = (\mathbb{E}(X_{t_1}), \ldots, \mathbb{E}(X_{t_m}))$$

i

$$\Lambda_{t_1,\ldots,t_m} = (Cov(X_{t_i}, X_{t_j}))_{1\leq i,j\leq m}.$$

Si $det(\Lambda_{t_1,\ldots,t_m}) > 0$, aleshores la llei de $(X_{t_1},\ldots,X_{t_m})$ té densitat, i aquesta ve donada per la densitat d'una normal multivariada, és a dir,

$$f_{t_1,\ldots,t_m}(x) = \frac{1}{((2\pi)^m det(\Lambda_{t_1,\ldots,t_m}))^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu_{t_1,\ldots,t_m})^T \Lambda^{-1}_{t_1,\ldots,t_m}(x-\mu_{t_1,\ldots,t_m})},$$

on $x \in \mathbb{R}^m$.

Algunes propietats de les distribucions Gaussianes són:

1. Si $X \sim N(\mu,\Lambda)$. Sigui C una matriu ortogonal [23] tal que $\Lambda = C^*DC$ on D és una matriu diagonal amb valors propis $d_1,...,d_n$, aleshores la variable aleatòria $Y = C(X-\mu)$ té marginals independents $N(0,d_i)$, $d_i \geq 0$.
2. Si $X \sim N(\mu,\Lambda) \Rightarrow \mathbb{E}(X) = \mu$, $\mathbb{E}((X-\mu)(X-\mu)^*) = \Lambda$, $\mathbb{E}(X_iX_j) = \mu_i\mu_j + \Lambda_{ij}$.
3. Si $X \sim N(\mu,\Lambda)$ i A és una matriu $r \times n$, aleshores $AX \sim N(A\mu, A\Lambda A^*)$.
4. Donat $X \sim N(\mu,\Lambda)$, les components X_i són independents si i només si la matriu de covariàncies Λ és diagonal.

Les demostracions dels resultats donats es poden trobar a [35].

10.3 Alguns resultats importants de teoria de probabilitats

Teorema 10.6. *(Teorema central del límit) Sigui $(X_i)_{i\geq 1}$ una successió de vectors aleatoris independents i idènticament distribuïts (i.i.d) a $\mathbb{R}^n$. Sigui $\mu = \mathbb{E}(X_j)$ i Λ la matriu de covariàncies $\Lambda = (\lambda_{k,l})_{1\leq k,l\leq d}$, amb $\lambda_{k,l} = Cov(X_i^k, X_i^l)$, on X_i^k és la k-éssima component de la variable aleatòria X_i, aleshores*

$$\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} Z \sim N(0,\Lambda),$$

on $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ i $\mathcal{L}$ denota la convergència en llei.

Lema 10.7. *(primer lema de Borel-Cantelli) Donat un espai de probabilitat $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{P})$. Sigui $\{A_n, n \geq 1\}$ una successió d'esdeveniments. Si*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}(A_n) < \infty,$$

aleshores

$$P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 0.$$

Lema 10.8. *(segon lema de Borel-Cantelli) Donat un espai de probabilitat $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{P})$. Sigui $\{A_n, n \geq 1\}$ una successió d'esdeveniments independents. Si*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}(A_n) = \infty,$$

aleshores

$$P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 1.$$

[23] Una matriu C és ortogonal si $C^*C = CC^* = Id$

Proposició 10.9. *(desigualtat de Markov). Sigui X una variable aleatòria no negativa. Si aquesta variable té esperança, denotada per $\mathbb{E}(X)$, aleshores per qualsevol $a > 0$ es compleix*

$$P(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

Proposició 10.10. *(desigualtat de Txebixev). Sigui X una variable aleatòria amb moment de segon ordre finit, és a dir, tal que $\mathbb{E}(X^2) < \infty$, aleshores*

$$P(|X - \mathbb{E}(X)| \geq k) \leq \frac{Var(x)}{k^2}, \forall k > 0.$$

Les demostracions dels teoremes i lemes presentats en aquesta secció es troben a [35].

10.4 Esperança condicionada per una σ-àlgebra

Al llarg dels capítols, hem parlat sobre l'esperança condicionada respecte una σ-àlgebra i hem usat algunes propietats d'aquesta. En aquest apartat donarem la definició formal i algunes de les seves propietats. Donat un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, recordem que si $\Omega = \mathbb{R}$, aleshores $\mathcal{F} = \mathcal{B}$, on $\mathcal{B}$ és la σ-àlgebra de Borel; és a dir, la σ-àlgebra generada pels intervals oberts de $\mathbb{R}$.

Definició 10.11. *(esperança condicionada respecte una σ-àlgebra) Sigui X una variable aleatòria tal que $\mathbb{E}(|X|) < \infty$, donada una σ-àlgebra $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, l'esperança de X condicionada a $\mathcal{G}$ és una variable aleatòria Z que compleix*

1. *Z és $\mathcal{G}$-mesurable, és a di, donat qualsevol conjunt $G \in \mathcal{G}$, $Z^{-1}(G) \in \mathcal{G}$;*
2. *Per qualsevol $G \in \mathcal{G}$,*
$$\mathbb{E}(Z\mathbf{1}_G) = \mathbb{E}(X\mathbf{1}_\mathbf{G}).$$

Normalment denotarem per $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ la variable Z.

A continuació, donem algunes de les propietats de l'esperança condicionada que s'usen al llarg del treball:

1. Si X és independent de $\mathcal{G}$, volent dir que qualsevol conjunt de la forma $X^{-1}(B)$, on B és un borelià, és independent de qualsevol $\mathcal{G}$, aleshores $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbb{E}(X)$;
2. Siguin $\mathcal{G}_i$, $i = 1, 2$ complint $\mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_2 \subseteq \mathcal{F}$, aleshores
$$\mathbb{E}[\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_1)|\mathcal{F}_2] = \mathbb{E}[\mathbb{E}(X|\mathcal{G}_2)|\mathcal{G}_1] = \mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1)$$
3. Si Y és una variable aleatòria $\mathcal{G}$-mesurable i XY és integrable, es compleix que
$$\mathbb{E}(XY|\mathcal{F}) = Y\mathbb{E}(X|\mathcal{F});$$

Les demostracions corresponents es poden trobar a [36].

10.5 Algunes demostracions del moviment Brownià

Provem les següents propietats del moviement Brownià:

(1) Si $\{B_t,\, t \geq 0\}$ és un moviment Brownià, $\{-B_t,\, t \geq 0\}$ també ho és

(2) *(Propietat escala)* Per qualsevol $\lambda > 0$, el procés $B^\lambda = \{\frac{1}{\lambda} B_{\lambda^2 t},\, t \geq 0\}$ és també un moviment Brownià

(3) Per qualsevol $a > 0$, $B^{+a} = \{B_{t+a} - B_a,\, t \geq 0\}$ és un moviment Brownià.

Provem (1): Primer veiem que $-B_0 = 0$. En efecte

$$(-B_0) = -(0) = 0.$$

Considerem ara $0 \leq s \leq t$ i sabem que per a B_t se satisfà que $B_t - B_s$ és independent de B_r, per qualsevol $0 \leq r \leq s$. Com la independència es manté per combinacions lineals d'una variable aleatòria, els increments de $-B_t$ són

$$-B_t - (-B_s) = -(B_t - B_s),$$

que també són independents. Finalment, si $B_s - B_s \sim N(0, t-s)$, per simetria de la distribució normal respece l'origen (per tenir mitjana 0),

$$(-B_t) - (-B_s) = -(B_t - B_s) \sim N(t-s).$$

Per tant, $-B_t$ és un moviment Brownià.

Provem ara (2): Provem primer que $B_0 = 0$. En efecte

$$B_0^\lambda = \frac{1}{\lambda} B_{\lambda^2 0} = \frac{1}{\lambda} B_0 = 0.$$

Considerem ara els increments de B_t^λ. Per $0 \leq s \leq t$ tenim que

$$B_t^\lambda - B_s^\lambda = \frac{1}{\lambda} B_{\lambda^2 t} - \frac{1}{\lambda} B_{\lambda^2 s} = \frac{1}{\lambda}(B_{\lambda^2 t} - B_{\lambda^2 s}).$$

Per la independència dels increments de B_t, com multiplicar per $\frac{1}{\lambda}$ és multiplicar per una constant, aquesta independència es manté. Per tant, els increments de B_t^λ també són independents. Volem veure ara que els increments són estacionaris. Prenem $t, s \geq 0$ i considerem l'increment

$$B_{(t+s)}^\lambda - B_s^\lambda = \frac{1}{\lambda}(B_{\lambda^2(t+s)} - B_{\lambda^2 s}),$$

que té la mateixa distribució que $B_{\lambda^2 t}$, per la propietat d'increments estacionaris de B_t. Conseqüentment, com $B_{\lambda^2 t}$ té la mateixa distribució que B_t, es compleix l'estacionarietat dels increments. D'altra banda, per $t \geq 0$, com $B_{\lambda^2 t} \sim N(0, \lambda^2 t)$, deduïm que

$$\frac{1}{\lambda} B_{\lambda^2 t} \sim N(0, \frac{1}{\lambda^2}\lambda^2 t) = N(0, t).$$

Per tant, B^λ és també un moviment Brownià.

Per últim veiem (3): Primer provem que $B_0^{+a} = 0$. En efecte,

$$B_0^{+a} = B_{0+a} - B_a = 0.$$

Ara volem provar que els increments són independents. Prenem $0 \leq s \leq t$ i considerem els increments del procés

$$B_t^{+a} - B_s^{+a} = B_{t+a} - B_a - (B_{s+a} - B_a) = B_{t+a} - B_{s+a}.$$

Per ser B_t un moviment Brownià, sabem que els increments són independents. Per tant, els de B_t^{+a} també ho són. Provem ara l'estacionarietat dels increments. Prenem $t, s \geq 0$, aleshores

$$B_{t+s}^{+a} - B_s^{+a} = (B_{t+s+a} - B_a) - (B_{s+a} - B_a) = B_{t+s+a} - B_{s+a}$$

que, per la propietat d'estacionarietat dels increments de B_t, sabem que segueix la mateixa distribució que B_t. Finalment, com els increments de B_t segueixen una distribució de mitjana 0 i variància corresponent a la llargada de l'interval, sabem que $B_{t+s+a} - B_{s+a} \sim N(0,t)$. Per tant,

$$B_{t+s}^{+a} - B_s^{+a} \sim N(0,t),$$

que demostra que B^{+a} també és un moviment Brownià.

10.6 Demostracions de la integral d'Itô

Propietats de la integral d'Itô d'un procés esglaonat

En aquest apartat donarem la prova de dues propietats més de la integral d'Itô d'un procés esglaonat, definida a Definició 3.3. Primer, veurem que es tracta una variable aleatòria centrada. En efecte, tenim

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T u_t dB_t\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^n u_j \left(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}\right)\right)$$

Ara, com les variables u_j i $B_{t_j} - B_{t_{j-1}}$ són independents, donat que u_j és $\mathcal{F}_{t_{j-1}}$-mesurable, tenim que

$$\mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^n u_j \left(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}\right)\right) = \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(u_j)\mathbb{E}(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})$$

i, per $\mathbb{E}(B_{t_j} - B_{t_{j+1}}) = 0$, obtenim

$$\sum_{j=1}^n \mathbb{E}(u_j)\mathbb{E}(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) = 0.$$

Un cop hem provat que és una variable aleatòria centrada, volem veure que es compleix la propietat de linealitat, és a dir, que donats $u^1, u^2 \in \varepsilon$ i $a, b \in \mathbb{R}$, es compleix $au^1 + bu^2 \in \varepsilon$ i

$$\int_0^T \left(au^1 + bu^2\right)(t) dB_t = a\int_0^T u^1(t) dB_t + b\int_0^T u^2(t) dB_t.$$

Recordem que els processos esglaonats u^1 i u^2 es defineixen, per la Definició 3.2, com $\sum_{j=1}^n u_j^1 \mathbf{1}_{[t_{j-1},t_j)}(t)$ i $\sum_{j=1}^n u_j^2 \mathbf{1}_{[t_{j-1},t_j)}(t)$, respectivament. Definim ara un procés format

per una combinació lineal d'aquests; considerem el procés $v_t = au_t^1 + bu_t^2$, on $a, b \in \mathbb{R}$, és a dir,

$$v_t = \sum_{j=1}^{n} (au_j^1 + bu_j^2)\mathbf{1}_{[t_{j-1},t_j)]}(t).$$

Aplicant ara la definició de la integral estocàstica, donada a Definició 3.3, obtenim que

$$\int_0^T v_t dB_t = \sum_{j=1}^{n} (au_j^1 + bu_j^2)(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}))$$

que, per linealitat de la suma, es pot descomposar en dues parts, cadascuna d'elles corresponent a la definició d'integral estocàstica d'u_t^1 i u_t^2, obtenint el que volíem veure.

La integral d'itô està ben definida

Provarem que la integral d'Itô d'un procés estocàstic

$$\int_0^T u_t dB_t = L^2(\Omega) - \lim_{n\to\infty} \int_0^T u_t^n dB_t,$$

definida a Definició 3.8 , està ben definida. Ho veurem provant que no depèn de l'elecció de la successió. Prenem dues successions diferents $u_t^{n,1}, u_t^{n,2} \in L_{a,T}^2$ on, ambdós convergeixen al mateix procés u. Volem veure que la diferència entre les dues integrals que defineixen tendeix a 0 quan $n \to \infty$. Usant la propietat d'isometria (Proposició 3.4), obtenim que

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T u_t^{n,1} dB_t - \int_0^T u_t^{n,2} dB_t\right)^2 = \int_0^T \mathbb{E}\left(u_t^{n,1} - u_t^{n,2}\right)^2 dt$$

$$\leq 2\int_0^T \mathbb{E}\left(u_t^{n,1} - u_t\right)^2 dt + 2\int_0^T \mathbb{E}\left(u_t^{n,2} - u_t\right)^2 dt \longrightarrow 0, \text{ quan } n \to \infty.$$

Denotem per $I^i(u) = \lim_{n\to\infty} \int_0^T u_t^{n,i} dB_t$, on $i = 1, 2$ i prenem la norma a $L^2(\Omega)$. Aplicant la desigualtat triangular tenim que

$$\|I^1(u) - I^2(u)\|_2 \leq \|I^1(u) - \int_0^T u_t^{n,1} dB_t\|_2 + \| \int_0^T u_t^{n,1} dB_t - \int_0^T u_t^{n,2} dB_t\|_2$$

$$+\|I^2(u) - \int_0^T u_t^{n,2} dB_t\|_2.$$

El primer i el tercer terme tendeixen a 0 quan $n \to \infty$, per la definició del límit. Pel que fa al segon terme, usem de nou la propietat d'isometria i la definició de $u^{n,1}$ i $u^{n,2}$ per concloure que

$$\| \int_0^T u_t^{n,1} dB_t - \int_0^T u_t^{n,2} dB_t\|_2^2 = \mathbb{E}\left(\int_0^T (u_t^{n,1} - u_t^{n,2})^2 dt\right) \longrightarrow 0.$$

Per tant, hem vist que $\|I^1(u) - I^2(u)\|_2 \longrightarrow 0$ i, per tant, la integral no depèn de la successió de processos escollida.

Propietats de la integral d'Itô

El següent objectiu és provar que les trajectòries de la integral estocàstica indefinida $\{\int_0^t u_s dB_s,\, t \in [0,T]\}$, donada a Definició 3.9, són Hölder contínues.

Per la propietat de linealitat i la desigualtat de Burkholder (Proposició 3.12), obtenim que

$$\mathbb{E}\left(\int_s^t u_r dB_r\right)^p \leq C(p)\mathbb{E}\left(\int_s^t u_r^2 dr\right)^{\frac{p}{2}} \leq C(p)|t-s|^{\frac{p}{2}-1}\int_0^t \mathbb{E}(u_r)^p dr$$
$$\leq C(p)|t-s|^{\frac{p}{2}-1}. \tag{10.2}$$

Mentre $p \geq 2$ és arbitrari, tenim que les trajectòries de $\{\int_0^t u_s dB_s,\, t \in [0,T]\}$ són γ-Hölder contínues, amb $\gamma \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$.

10.7 Relació entre un procés CAR(p) i un AR(p)

A continuació establim la relació entre un procés CAR(p), $X(t)$, i un procés AR(p). Primer, considerem

$$dX_q(t) = X_{q+1}(t)dt \tag{10.3}$$

i

$$dX_p(t) = -\sum_{q=1}^{p} \alpha_{p-q+1} X_q(t)dt + \sigma(t)dB(t). \tag{10.4}$$

El primer pas d'una aproximació d'Euler de l'equació diferencial (10.4), ens condueix a una sèrie temporal $x_p(t)$, $t = 0, 1, \ldots$ amb la següent forma:

$$x_p(t+1) - x_p(t) = -\sum_{q=1}^{p} \alpha_{p-q+1} x_q(t) + \sigma(t)\varepsilon(t),$$

on $\epsilon(t)$, $t = 0, 1, \ldots$ són variables aleatòries i.i.d. que es distribueixen com una normal estàndard. De manera similar, obtenim de (10.3) que

$$x_q(t+r) - x_q(t+r-1) = x_{q+1}(t+r-1), \quad q = 1, \ldots, p-1, \quad r \geq 1.$$

Iterativament, obtenim el següent resultat:

Lema 10.12. *Per $q = 1, \ldots, p-1$ es compleix*

$$x_{q+1}(t) = \sum_{k=0}^{q} (-1)^k \; b_k^q \; x_1(t+q-k)$$

on, els coeficients b_k^q es defineixen de manera recursiva com

$$b_k^q = b_{k-1}^{q-1} + b_k^{q-1}, \quad k = 1, \ldots, p-1, \quad q \geq 2$$

i on $b_0^q = b_q^q = 1$, per $q = 0, \ldots, p$. A més a més,

$$x_p(t+1) - x_p(t) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \; b_k^p \; x_1(t+p-k).$$

Demostració. La demostració es troba a Lema 10.2 de [15]. □

Per tant, pel lema anterior, posant l'expressió x_q en funció de x_1, obtenim que

$$\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\ b_k^p\ x_1(t+p-k) =$$

$$= -\sum_{q=1}^{p}\alpha_{p-q+1}\sum_{k=0}^{q-1}(-1)^k\ b_k^{q-1}\ x_1(t+q-1-k)+\sigma(t)\epsilon(t). \tag{10.5}$$

Aquesta expressió ens proporciona la relació que buscàvem entre els coeficients b_i del model AR(p) i els α_i del procés $X(t)$ CAR(p).

Bibliografia

[1] M. Sanz-Solé. *An introduction to stochastic calculus*. 2022.

[2] I. Karatzas i S. E. Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer, 1998.

[3] P.F.X. Müller. *Isomorphisms between H1 Spaces*. 2005.

[4] I. I. Gikhman i A. V. Skorokhod. *The Theory of Stochastic Processes I*. 2013.

[5] P. Mörter et al. *Brownian Motion*. Cambridge University Press, 2010.

[6] P. Protter. *Stochastic Integration and Differential Equations*. Springer–Verlag, 2004.

[7] D.L. Burkholder, B. Davis i R.F. Gundy. "Integral inequalities for convex functions of operators on martingales". A: *Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Satistics and Probability* (1972).

[8] P. Baldi. *Stochastic Calculus. An Introduction Through Theory and Exercises*. Springer, 2017.

[9] Y. Kim. *Uniform Lp Continuity of the solution of stochastic differential equations*. 2013.

[10] F. Espen Benth i S. A. Solanilla Blanco. "Approximation of the price dynamics of heating degree day and cooling degree day temperature futures". A: *Journal of Energy Markets* (2015).

[11] S. A. Solanilla Blanco. *Stochastic Modelling and Pricing of Energy and Weather Derivatives*. 2015.

[12] I. Lizarralde Olabarria. "¿Qué son los Futuros Financieros?, Ejemplos, Opciones, Mercados, Derivados." A: *IBT* (2020).

[13] CME Group. "Futures and Options Trading for Risk Management". A: *CME* ().

[14] CNMV Group. *Futures and Options*. 2004.

[15] F. E. Benth i J. Saltyte Benth. "Stochastic modelling of electricity and related markets". A: *World Scientific, Singapore* (2008).

[16] D. Duffie. *Dynamic Asset Pricing Theory*. 1992.

[17] T. Björk. *Arbitrage Theory in Continuous Time*. 2004.

[18] T. L. Jones. "Agricultural Applications Of Weather Derivatives". A: *International Business and Economics Research Journal* (2007).

[19] "Derivados Meteorológicos". A: *ENEL Gobal Trading* ().

[20] G. Considine. "Introduction to Weather Derivatives". A: *Weather Derivatives Group, Aquila Energy. CME Group* (2000).

[21] J. Staum. *Incomplete Markets*. 2007.

[22] "Mercados incompletos, el rompecabezas de los mercados incompletos en marcos de equilibrio general". A: *Faster Capital* (2024).

[23] N. C. Dzupire, P. Ngare i L. Odongo. "Pricing basket weather derivatives on rainfall and temperatura". A: *International Journal of Financial Studies* (2019).

[24] J. A. Climent Hernández i D. Rodríguez Benavides. "Valuación de opciones sobre índices de la temperatura de la Ciudad de México". A: *Universidad Autónoma Metropolitana, México* (2020).

[25] W. Härdle i B. Lopez Cabrera. "Implied market price of weather risk". A: *Appl. Math, Finance* (2012).

[26] F.E. Benth i J. Saltyté Benth. *Modeling and Pricing in Financial Markets for Weather Derivatives*. 2012.

[27] D. C. Brody, J. Syroka i M. Zervos. "Dynamical pricing of weather derivatives". A: *Quantitative Finance* (2002).

[28] G. E. Uhlenbeck i L. S. Ornstein. "On the theory of Brownian motion". A: *Physical Review Journals* (1930).

[29] G. Lindgren. *Stationary Stochastic Processes. Theory and Applications*. CRC Press, 2013.

[30] "Guía para entender la prima de riesgo". A: *Banco Santander* (2015).

[31] K. Antonis Alexandridis i Achilleas D. Zapranis. *Weather derivatives*. 2012.

[32] J. Noble i E. Kavlakoglu. "¿Qué es la autocorrelación?" A: *IBM* (2024).

[33] "Funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial". A: *IBM* (2021).

[34] W. Feller. *An Introduction to probability and Its Applications*. John Wiley i Sons, Inc., 1950.

[35] Marta. Sanz-Solé. *Probabilitats*. Edicions Universitat de Barcelona, 1999.

[36] J. Martínez i García J. *Introducción al Cálculo Estocástico Aplicado a la Modelización Económico-Financiero-Actuarial*. Netbiblo, 2003.