Universitat de Barcelona

Facultat de Matemàtiques i Informàtica

Doble grado en Matemáticas y Administración y Dirección de Empresas

Trabajo de fin de grado

Aplicación del modelo Black-Litterman al sector hotelero barcelonés

Autor: Jon Sayés Jaurrieta

Director: Dr. Josep Vives Santa Eulalia
Realizado en: Departamento de Matemática Económica, Financiera y Actuarial

Barcelona, 15 de enero de 2025

Abstract

Investment constitutes a cornerstone of the economy, driving business growth, fostering job creation, and contributing to the development of strategic sectors. From a particular perspective, investment stands out over saving as it transforms resources into opportunities, promoting growth and value creation.

Diversification has become an essential strategy to reduce risks and enhance investment performance. In finance, portfolio management optimization is a key concern, and multiple methods have been developed to address this challenge. These methods combine mathematical rigor with practical applicability, adapting to the evolving needs of investors in a dynamic environment.

This project aims to provide a financial analysis tool based on the Black-Litterman model, an advanced approach in portfolio management that allows for the integration of subjective views into optimal asset allocation. The analysis focuses on evaluating the feasibility of investing in hotel assets in Barcelona, a key city in the tourism sector. Through this approach, the goal is to improve decision-making in the management of diversified portfolios, emphasizing the importance of applying innovative financial techniques in non-listed markets.

Resumen

La inversión constituye un pilar fundamental en la economía, ya que impulsa el crecimiento de las empresas, fomenta la generación de empleo y contribuye al desarrollo de sectores estratégicos. Desde un punto de vista particular, la inversión implica una diferencia clave frente al ahorro porque permite transformar los recursos en oportunidades, impulsando el crecimiento y la creación de valor.

Por su parte, la diversificación se ha consolidado como una estrategia esencial para reducir riesgos y mejorar el rendimiento de las inversiones. Adicionalmente, en el ámbito financiero, la optimización de la gestión de carteras resulta esencial. Para abordar estos desafíos, se han desarrollado numerosos métodos que combinan rigor matemático y aplicabilidad práctica, adaptándose a las necesidades de los inversores en un entorno cambiante.

Este trabajo tiene como objetivo proporcionar una herramienta de análisis financiero basada en el modelo de Black-Litterman, una herramienta que, mediante un enfoque avanzado en la gestión de carteras, permite integrar visiones subjetivas en la asignación óptima de activos. El análisis se centra en evaluar la viabilidad de invertir en activos hoteleros en Barcelona, una ciudad clave en el sector turístico. A través de este enfoque, se busca mejorar la toma de decisiones en la gestión de carteras diversificadas, destacando la importancia de aplicar técnicas financieras innovadoras en mercados no cotizados.

2020 Mathematics Subject Classification. 91G10, 91G30, 62P25, 62P05, 91G60, 91G70

Agradecimientos

Este trabajo culmina una intensa etapa de formación, tanto en el ámbito de las matemáticas como en el de la administración y dirección de empresas, además de a nivel personal.

Para empezar, me gustaría agradecer a todos los profesores que me han impartido clase a lo largo de estos años, por toda su dedicación y por haber compartido su conocimiento; en particular al Dr. Josep Vives Santa Eulalia, por toda la ayuda prestada para la realización de este trabajo.

También, me gustaría agradecer a todos mis compañeros y a todos los amigos que he podido hacer y conocer en esta etapa de mi vida. Gracias por los interminables días y noches de estudio, por haber sufrido conmigo en los momentos difíciles y por celebrar las alegrías juntos. En especial, gracias por el apoyo incondicional a Joan y a Arnau por haber aguantado tantas horas a mi lado y haber compartido tantas experiencias juntos.

Finalmente, agradecer en especial a mi familia, por su apoyo incondicional desde la distancia. Gracias por creer en mí en todo momento, y por hacerme sentir que todo iba a salir bien; incluso cuando las cosas no iban como se esperaba, por hacerme ver que no era el fin del mundo.

Sin todos vosotros, este camino habría sido muy diferente. Gracias.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

En el ámbito financiero, la inversión se entiende comúnmente como *el acto de asignar capital a activos o proyectos con la expectativa de obtener un rendimiento futuro* . De acuerdo al economista Benjamin Graham, "la inversión es una operación que, tras un análisis exhaustivo, promete seguridad para el principal y un rendimiento adecuado." Bajo esta premisa, la inversión no sólo se centra en aumentar los retornos, sino también en gestionar los riesgos asociados y en evaluar el horizonte temporal de los beneficios esperados. Este concepto básico de la inversión se ha ampliado con el tiempo, a medida que los mercados financieros se han vuelto más sofisticados. Entre otros factores, la inclusión de activos no tradicionales, como los bienes raíces, las materias primas o las criptomonedas y activos digitales, permite complementar las carteras de activos puramente financieros.

Al mismo tiempo, la industria hotelera también ha experimentado una importante transformación en las últimas décadas. Antes de los años 80, los negocios hoteleros se limitaban fundamentalmente a satisfacer la demanda turística local. Sin embargo, a partir de esa década, el sector ha ido evolucionando hacia una industria cada vez más globalizada y profesionalizada, marcada por el desarrollo de cadenas hoteleras internacionales y la diversificación hacia distintos segmentos del mercado.

Esta evolución se debe, entre otros factores, a la creciente movilidad internacional, debido a que viajar cada vez es más asequible, al surgimiento de plataformas online que facilitan las reservas y la comparación de precios, y a la aparición de nuevas preferencias de los consumidores. Hoy en día, el sector hotelero es muy atractivo para los inversores, ya que generan flujos de caja estables y se benefician de tendencias actuales, como el turismo global. No obstante, también presenta riesgos vinculados a la economía y al comportamiento del turismo, como se evidenció durante la pandemia del COVID-19.

En la teoría financiera, la gestión de carteras se ha basado tradicionalmente en modelos como el de Markowitz, quien introdujo la teoría moderna de carteras y, en ella, la noción de diversificación eficiente a través de la optimización de la relación riesgo-rendimiento. No obstante, el modelo de Markowitz tiene ciertas limitaciones ya que depende de estimaciones precisas sobre los rendimientos esperados y las covarianzas entre los activos. Cuando estas suposiciones no son del todo precisas, el modelo puede generar resultados inestables y poco fiables.

Para superar algunas de estas limitaciones, el modelo Black-Litterman surgió como una alternativa que combina la información del mercado, a través del modelo CAPM (Capital Asset Pricing Model), con las visiones subjetivas del inversor sobre el comportamiento futuro de determinados activos. Esto permite ajustar las carteras a las visiones individuales, disminuyendo la sensibilidad a errores en las estimaciones y proporciona carteras más estables.

Este trabajo tiene como objetivo analizar la aplicación del modelo Black-Litterman en la gestión de carteras de activos dedicados a la explotación de negocios hoteleros en la ciudad de Barcelona. Como estos activos tienen características distintas a los activos financieros tradicionales, se explorará cómo pueden ser integrados en una cartera diversificada utilizando este enfoque. Se discutirán los aspectos teóricos del modelo, sus ventajas en la gestión de carteras, y, posteriormente, se presentará un análisis empírico basado en datos reales del sector.

En este sentido, el trabajo se estructurará de la siguiente manera. En primer lugar, se abordará el marco teórico, comenzando por una revisión de los fundamentos de la gestión de carteras y el modelo de Markowitz, seguido del modelo CAPM y de una explicación detallada del modelo Black-Litterman. Finalmente, se llevará a cabo un análisis empírico en el que se aplicará el modelo Black-Litterman a una cartera compuesta por hoteles de Barcelona, analizando los resultados obtenidos y comentando las rentabilidades según diferentes perfiles inversores.

Capítulo 2

Marco teórico

De acuerdo con la teoría de *Portfolio Theory and Risk Management* de Maciej J. Capinski [CK14] , esta sección tiene como propósito presentar los conceptos fundamentales necesarios para comprender la teoría de carteras de Markowitz.

Los inversores, por lo general, actúan con la expectativa de que su inversión aumentará con el tiempo, incrementando así su patrimonio.

Durante un período de tiempo determinado, el inversor busca maximizar el retorno de la inversión, es decir, el incremento del valor del activo en comparación con la inversión inicial. La mayoría de los activos (excepto los préstamos a una tasa de interés fija) tienen un valor final incierto, por lo que los rendimientos de las inversiones tienen que expresarse como variables aleatorias. Para estimar el rendimiento de un activo utilizando un único valor, es natural utilizar el valor de **rendimiento esperado**, que promedia los rendimientos sobre todos los posibles resultados.

Nuestra incertidumbre sobre el comportamiento futuro del mercado se refleja en el segundo concepto clave de las finanzas: **el riesgo**. Los activos cuyos valores finales posibles presentan una mayor "dispersión"son percibidos como de mayor riesgo. Así, nuestro primer enfoque para medir el nivel de riesgo de una variable aleatoria será evaluar la dispersión del rendimiento, la cual los inversores racionales tratarán de minimizar mientras maximizan su retorno.

En resumen, el rendimiento refleja la eficiencia de una inversión, mientras que el riesgo se relaciona con la incertidumbre. La teoría de carteras busca el equilibrio entre ambos aspectos, y se centra en encontrar asignaciones óptimas de la riqueza inicial del inversor entre los activos disponibles: maximizar el retorno para un nivel de riesgo dado y minimizar el riesgo para un nivel esperado de rendimiento.

2.1. Rendimiento Esperado

Solo tendremos en cuenta dos instantes en el tiempo: el instante presente, denotado por 0, y el instante futuro 1, que puede ser en cualquier momento posterior al presente. Llamaremos X a la variable aleatoria que determina el precio de un activo, definida como:

$$X(1) : \Omega \to [0, +\infty),$$

donde Ω es el espacio muestral de algún espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Los elementos de Ω los denominaremos escenarios. Entonces, el precio actual conocido del activo es $X(0)$, y el precio futuro desconocido es $X(1)$.

Sea Ω finito, $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$, entonces adoptaremos la notación

$$X(1, \omega_i) = X(1)(\omega_i) \quad \text{para } i = 1, \ldots, N,$$

para los posibles valores de $X(1)$. Definimos una medida de probabilidad $P : \mathcal{F} \to [0,1]$, como $P(\{\omega_i\}) = p_i$, eligiendo $p_i \in (0,1]$ tal que $\sum_{i=1}^{N} p_i = 1$.

Entonces el precio esperado al final del período es

$$\mathbb{E}\left(X(1)\right) = \sum_{i=1}^{N} X(1, \omega_i)\, p_i,$$

y la varianza del precio es

$$\mathrm{Var}(X(1)) = \sum_{i=1}^{N} \left(X(1, \omega_i) - \mathbb{E}\left(X(1)\right)\right)^2 p_i.$$

Excluiremos todos los valores negativos de la variable aleatoria $S(1)$ ya que los precios negativos no tienen sentido desde el punto de vista económico. Es decir,

$$X(1) \in [0, \infty)$$

(lo que implica que $P(X(1) \geq 0) = 1$).

El **rendimiento** (también llamado **retorno**) de la inversión R es una variable aleatoria $R : \Omega \to \mathbb{R}$, definida como

$$R = \frac{X(1) - X(0)}{X(0)}.$$

Y por linealidad de la esperanza matemática, el **rendimiento esperado**, que lo denotaremos a partir de ahora como μ, está dado por

$$\mu = \mathbb{E}\left(R\right) = \frac{\mathbb{E}\left(X(1)\right) - X(0)}{X(0)}.$$

Para encontrar los precios de los activos, dados los rendimientos, usaremos que

$$X(1) = X(0)(1 + R),$$

$$\mathbb{E}\left(X(1)\right) = X(0)(1 + \mu)$$

Un activo libre de riesgo es aquel cuyo retorno es conocido de antemano. Un ejemplo típico es un bono sin riesgo que garantiza el pago de una unidad de moneda nacional en el tiempo t=1, es decir, $X(1) = 1$, y que puede adquirirse en el momento prensente por un precio $X(0) < 1$. Entonces definiremos el **rendimiento libre de riesgo** como

$$R_f = \frac{1 - X(0)}{X(0)}.$$

El precio del bono se puede expresar como

$$X(0) = \frac{1}{1 + R_f},$$

dando el valor presente de una unidad en el tiempo 1.

2.2. Varianza como medida de riesgo

Definimos riesgo como la incertidumbre sobre el rendimiento futuro de una inversión y la posibilidad de que los resultados reales difieran de los resultados esperados. La dispersión se mide de manera conveniente mediante la varianza.

Definición 2.2.1. *Por riesgo nos referimos a la* **varianza** *del rendimiento R, que se calcula como:*

$$Var(R) = \mathbb{E}\,(R-\mu)^2 = \mathbb{E}\left(R^2\right) - \mu^2,$$

donde $\mathbb{E}\,(R)$ es el valor esperado de R.

La varianza del rendimiento se puede calcular a partir de la varianza de $X(1)$:

$$Var(R) = Var\left(\frac{X(1)-X(0)}{X(0)}\right) = \frac{1}{X(0)^2}Var(X(1)-X(0)) = \frac{1}{X(0)^2}Var(X(1)).$$

Alternativamente, también podemos usar la **desviación estándar**

$$\sigma = \sqrt{Var(R)},$$

2.3. Ventas en descubierto

Consideremos que se quiere vender un activo del que no se dispone. Para ello, tomamos prestado una cantidad de acciones determinada, a un precio X(0) en un fecha determinada. Entonces, esta compra figura automáticamente en nuestra cartera, de modo que se puede vender. Si ejecutamos la venta en el mercado de estas acciones prestadas, esto es conocido como *short selling* o Venta en descubierto; es decir, hemos vendido algo que no tenemos.

Nuestro objetivo es recomprar las acciones en el futuro a un precio más bajo, devolverlas al prestamista y obtener una ganancia por la diferencia de precios. Este mecanismo, nos da dinero adicional en el momento 0, que puede ser invertido en otras acciones.

Es importante distinguir entre las dos posibles posiciones en un portafolio:

- Una posición **larga** ocurre cuando el número de acciones en el portafolio es positivo, lo que indica que el activo ha sido comprado.
- Una posición **corta** ocurre cuando el número de acciones en el portafolio es negativo, lo que refleja que las acciones han sido vendidas en descubierto.

Capítulo 3

El modelo de Markowitz para la Selección de Portafolios

El modelo de selección de carteras de Harry Markowitz, también conocido como modelo de media-varianza, fue introducido en 1952 [Mar52] y constituye uno de los fundamentos de la teoría moderna de carteras.

El modelo sostiene que un inversionista racional desea maximizar el rendimiento esperado del portafolio mientras minimiza su varianza. Esto implica la diversificación, o la combinación de activos con diferentes características de rendimiento y riesgo, con el objetivo de reducir la varianza sin sacrificar el rendimiento. A través de la diversificación, se busca lograr un portafolio eficiente que ofrezca el mejor equilibrio entre riesgo y rendimiento.

3.1. Hipótesis del Modelo de Markowitz

El modelo de Markowitz parte de las siguientes hipótesis:

- Asume que los rendimientos de los activos siguen una distribución normal, lo que implica que están definidos por una media y una varianza conocidas.
- Considera que el inversor es averso al riesgo y actúa de manera racional, es decir, que persigue obtener un beneficio a partir de su inversión e implica que este prefiera la composición de un portafolio que maximice la rentabilidad para un nivel de riesgo determinado, o que minimice el riesgo para una rentabilidad esperada.
- Asume que el inversor tiene la posibilidad de vender sus activos en el momento que estime conveniente sin restricciones, y que no existen costes de transacción ni impuestos.

3.2. Portafolio con múltiples activos

Un portafolio construido a partir de n activos distintos puede ser descrito mediante el vector de pesos:

$$w = (w_1, \dots, w_n),$$

tal que

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1.$$

Denotando por 1 el vector n-dimensional

$$1 = (1, \dots, 1),$$

la restricción puede escribirse convenientemente como

$$w^\top \cdot 1 = 1.$$

El conjunto alcanzable es el conjunto de todos los vectores de peso w que satisfacen esta restricción. Si la venta en descubierto no está permitida, agregamos la condición $w_j \geq 0$ a la restricción, por lo que en ese caso el conjunto alcanzable se convierte en

$$\left\{ w : w^\top 1 = 1,\ w_j \geq 0, \forall\, j \leq n \right\}.$$

Asumiremos que está disponible la venta en descubierto.

Además, un portafolio puede representarse mediante el vector que indica las posiciones tomadas en los distintos componentes (número de unidades de activos):

$$x = (x_1, \dots, x_n).$$

Tenemos las siguientes relaciones entre los pesos, los precios y el número de acciones:

$$w_j = \frac{x_j X_j(0)}{V(0)}, \quad j = 1, \dots, n,$$

donde x_j es el número de acciones del valor j en el portafolio, $X_j(0)$ es el precio inicial del valor j, y $V(0)$ es el dinero total invertido.

Denotemos los rendimientos aleatorios de los valores por $R = (R_1, \dots, R_n)$, y el vector de rendimientos esperados por

$$\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n),$$

donde

$$\mu_j = \mathbb{E}\left(R_j\right), \quad j = 1, \dots, n.$$

Las covarianzas entre los rendimientos se denotarán por $\sigma_{jk} = \mathrm{Cov}(R_j, R_k)$, en particular, $\sigma_{jj} = \sigma_j^2 = \mathrm{Var}(R_j)$. Estos son los elementos de la **matriz de covarianzas** $n \times n$:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}.$$

Escribimos como antes

$$R_w = \sum_{j=1}^{n} w_j R_j$$

Proposición 3.2.1. *El rendimiento esperado $\mu_w = \mathbb{E}\left(R_w\right)$ y la varianza $\sigma^2 = Var(R_w)$ de una cartera con pesos w están dados por*

$$\mu_w = w^\top \mu,$$
$$\sigma_w^2 = w^\top \Sigma w$$

Demostración. Veamos la primera:

$$\mu_w = \mathbb{E}\left(R_w\right) = \mathbb{E}(\sum_{j=1}^{n} w_j R_j) = \sum_{j=1}^{n} w_j \mathbb{E}(R_j) = w^\top \mathbb{E}(R) = w^\top \mu$$

La varianza se demuestra tal que así:

$$\sigma_w^2 = \mathrm{Var}(R_w) = \mathrm{Cov}(R_w, R_w) = \mathrm{Cov}(\sum_{i=1}^{n} w_i R_i, \sum_{j=1}^{n} w_j R_j)$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j \mathrm{Cov}(R_i, R_j) = \sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{\mathrm{i,j}} = w^\top \Sigma w$$

□

Proposición 3.2.2. *Para dos carteras cualesquiera, denotadas por*

$$w_A = (w_{A,1}, \ldots, w_{A,n}), \quad w_B = (w_{B,1}, \ldots, w_{B,n}),$$

la covarianza entre los rendimientos de estas carteras es:

$$\mathrm{Cov}(R_{w_A}, R_{w_B}) = w_A^\top \Sigma w_B,$$

Demostración.

$$\mathrm{Cov}(R_{w_A}, R_{w_B}) = \mathrm{Cov}\left(\sum_{j=1}^{n} w_{A,j} R_j, \sum_{k=1}^{n} w_{B,k} R_k\right)$$
$$= \sum_{j,k=1}^{n} w_{A,j} w_{B,k} \sigma_{jk}$$
$$= w_A^\top \Sigma w_B,$$

donde hemos usado la bilinearidad de la covarianza, y también hemos usado que $\mathrm{Cov}(R_j, R_k) = \sigma_{jk}$. □

La **región factible** es la colección de todas las carteras que se pueden construir mediante los activos dados y puede representarse en el plano (σ, μ).

3.3. El Problema de Optimización de Markowitz

El problema de optimización en el modelo de Markowitz puede enfocarse de dos maneras distintas:

1. **Minimizar la varianza** del portafolio sujeto a un rendimiento mínimo deseado:

$$\text{minimizar} \quad w^T \Sigma w \tag{3.3.1}$$

sujeto a

$$w^T \mu \geq R_{\text{mín}} \tag{3.3.2}$$

2. **Maximizar el rendimiento esperado** del portafolio sujeto a una varianza máxima permitida:

$$\text{maximizar} \quad w^T \mu \tag{3.3.3}$$

sujeto a

$$w^T \Sigma w \leq \sigma^2_{\text{máx}} \tag{3.3.4}$$

donde $\sigma^2_{\text{máx}}$ es la varianza máxima permitida del portafolio.

En este trabajo, nos centraremos en explicar y profundizar en el enfoque de la minimización de la varianza de la cartera, aunque todos los resultados, se podrían tratar de manera análoga bajo el otro enfoque.

3.4. Portafolio de Mínima Varianza

Teorema 3.4.1. *El portafolio de mínima varianza es el portafolio que presenta el menor riesgo posible (varianza) para un nivel dado de retorno. La fórmula para los pesos de este portafolio es:*

$$w_{min} = \frac{\Sigma^{-1} 1}{1^\top \Sigma^{-1} 1},$$

Demostración. Necesitamos minimizar la varianza del portafolio $\sigma_w^2 = w^\top \Sigma w$, sujeta a la restricción de que la suma de los pesos sea igual a 1:

$$1^\top w = 1.$$

Para resolver este problema, usamos los multiplicadores de Lagrange. Definimos el Lagrangiano como:

$$L(w, \lambda) = w^\top \Sigma w - \lambda(1^\top w - 1).$$

Derivamos $L(w, \lambda)$ con respecto a w para encontrar los pesos w que minimizan la varianza:

$$\frac{\partial L}{\partial w} = 2\Sigma w - \lambda 1.$$

Igualamos a 0:

$$2\Sigma w = \lambda 1.$$

Resolviendo para w:

$$w = \frac{\lambda}{2} \Sigma^{-1} 1.$$

Sustituimos w en la restricción:

$$1^\top w = 1^\top \left(\frac{\lambda}{2} \Sigma^{-1} 1 \right) = 1.$$

Esto nos permite encontrar el valor de λ:

$$\frac{\lambda}{2} 1^\top \Sigma^{-1} 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{2}{1^\top \Sigma^{-1} 1}.$$

Sustituimos λ de nuevo en la expresión para w:

$$w = \frac{\frac{2}{1^\top \Sigma^{-1} 1}}{2} \Sigma^{-1} 1.$$

Simplificando:

$$w = \frac{\Sigma^{-1} 1}{1^\top \Sigma^{-1} 1},$$

que es la cartera de mínima varianza, como estabamos buscando. □

3.4.1. Propiedad de Covarianza Constante

Corolario 3.4.2. *El portafolio de mínima varianza tiene una propiedad importante: la covarianza entre este portafolio y cualquier otro portafolio es constante. Esto se expresa como:*

$$\mathrm{Cov}(R_w, R_{w_{min}}) = \sigma^2_{w_{min}}$$

Demostración.

$$\mathrm{Cov}(R_w, R_{w_{\min}}) = w^\top \Sigma w_{\min} = w^\top \Sigma (\frac{\Sigma^{-1} 1}{1^\top \Sigma^{-1} 1}) = \frac{w^\top 1}{1^\top \Sigma^{-1} 1} = \frac{1}{1^\top \Sigma^{-1} 1}$$

Y como esto es para cualquier cartera, en particular si $w = w_{min}$ tenemos que

$$\sigma^2_{w_{min}} = Var(R_{min}) = Cov(R_{w_{min}}, R_{w_{min}}) = \frac{1}{1^\top \Sigma^{-1} 1}$$

Por lo que combinando ambas tenemos el resultado. □

Esta propiedad es útil al analizar la estructura de riesgo de diferentes combinaciones de activos y su relación en el espacio (σ, μ).

3.5. Línea de Mínima Varianza

La línea de mínima varianza incluye todos los portafolios que, para un nivel de rendimiento esperado dado m, presentan la menor varianza posible. Esta línea es fundamental para construir la frontera eficiente, ya que identifica portafolios no dominados en términos de riesgo y retorno. Entre todos los portafolios con rendimiento m $= \mu_w$, el único que no es redundante es aquel que minimiza la varianza. Esta familia de portafolios, parametrizada por el rendimiento esperado μ_w, se conoce como la línea de mínima varianza. La línea de mínima varianza se puede encontrar resolviendo el siguiente problema de optimización:

$$\min w^\top \Sigma w, \quad \text{sujeto a } w^\top \mu = m \quad \text{y} \quad w^\top 1 = 1,$$

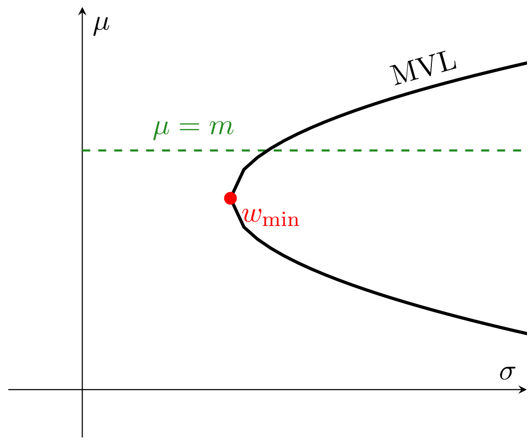

Figura 3.1: Línea de mínima varianza: MVL

donde m es el nivel de rendimiento esperado.

En el plano (σ, μ), la línea de mínima varianza toma la forma de una hipérbola centrada en el eje vertical. Esto proporciona una representación visual de cómo los portafolios eficientes se organizan en función del riesgo y el rendimiento esperado, y facilita la identificación de la frontera eficiente.

Suponemos que la elección de una cartera por parte de un inversor está restringida a los puntos factibles de una línea horizontal en el diagrama (σ, μ). Todas las carteras situadas en esta línea tienen la misma rentabilidad pero diferentes desviaciones típicas. La mayoría de los inversores preferirían la cartera situada en el punto más a la izquierda, ya que es la cartera que, dada una determinada rentabilidad, presenta la desviación típica mínima. Todo inversor que esté de acuerdo con esta elección se denomina averso al riesgo. Ahora bien, si se parte de una desviación típica determinada, cualquier inversor elegirá la cartera con la rentabilidad máxima posible. Estos argumentos implican que **solo la parte superior de la línea de mínima varianza** es de interés para los inversores que son aversos al riesgo y que bajo las mismas condiciones siempre eligen la opción con más rentabilidad. Esta línea curva superior de la línea de mínima varianza se llama **frontera eficiente** de la región factible.

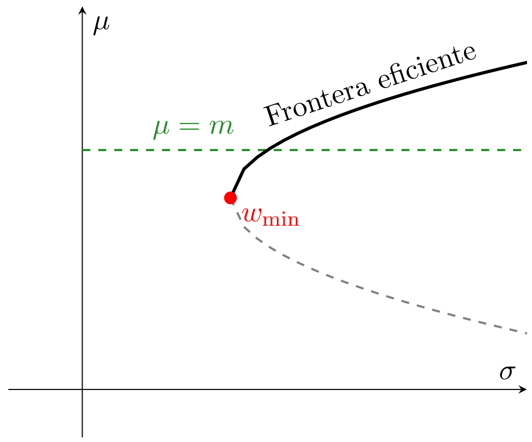

Figura 3.2: Frontera eficiente

Cada punto en la frontera representa un portafolio que es eficiente en términos de riesgo y retorno, y cualquier portafolio que no esté en esta frontera es subóptimo, ya que existe otro portafolio con el mismo rendimiento pero menor riesgo, o con el mismo riesgo y mayor rendimiento.

3.6. El Teorema de Dos Fondos

Teorema 3.6.1. *Sean $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^n$ dos portafolios en la línea de mínima varianza, con rendimientos esperados μ_1 y μ_2, respectivamente, donde $\mu_1 \neq \mu_2$. Entonces, para cualquier portafolio w en la línea de mínima varianza con rendimiento esperado μ_w, existe un $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que:*

$$w = \alpha w_1 + (1 - \alpha) w_2,$$

y su rendimiento esperado satisface:

$$\mu_w = \alpha \mu_1 + (1 - \alpha)\mu_2.$$

Demostración. Sean $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^n$ dos portafolios eficientes en la línea de mínima varianza, con rendimientos esperados μ_1 y μ_2, respectivamente, donde $\mu_1 \neq \mu_2$. Consideremos un portafolio w en la misma línea, con rendimiento esperado μ_w. Supongamos que w puede expresarse como una combinación lineal de w_1 y w_2:

$$w = \alpha w_1 + (1 - \alpha) w_2, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

El rendimiento esperado de w se expresa como:

$$\mu_w = w^\top \mu = \alpha w_1^\top \mu + (1 - \alpha) w_2^\top \mu,$$

donde $w_1^\top \mu = \mu_1$ y $w_2^\top \mu = \mu_2$. Por lo tanto:

$$\mu_w = \alpha \mu_1 + (1 - \alpha)\mu_2.$$

Resolviendo para α, obtenemos:

$$\alpha = \frac{\mu_w - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2}.$$

Sustituyendo α en la expresión para w, se tiene:

$$w = \frac{\mu_w - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} w_1 + \left(1 - \frac{\mu_w - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2}\right) w_2.$$

Esto demuestra que w es una combinación lineal de w_1 y w_2. Además, dado que $\mu_1 \neq \mu_2$, w está definido de manera única para cada μ_w dentro del intervalo $[\mu_2, \mu_1]$. Por lo tanto, cualquier portafolio en la línea de mínima varianza puede representarse de esta forma. □

3.7. Portafolio de Mercado

El Portfolio de Mercado representa la cartera óptima en la frontera eficiente cuando se incluye un activo libre de riesgo. La línea que conecta el portfolio de mercado con el activo libre de riesgo, es tangente a la línea de mínima varianza, y tiene la máxima pendiente entre todas las líneas determinadas por el activo libre de riesgo y cualquier otro portfolio. En otras palabras, este portafolio se define como el punto de tangencia entre la frontera eficiente y la línea de capital del mercado, la cual veremos ahora.

Teorema 3.7.1. *Si el activo libre de riesgo con rendimiento R_f es menor que el rendimiento esperado del portafolio de mínima varianza, entonces el portafolio de mercado existe y viene dado por*

$$m = \frac{\Sigma^{-1}(\mu - R_f 1)}{1^\top \Sigma^{-1}(\mu - R_f 1)}$$

Demostración. Queremos determinar los pesos del portafolio de mercado $\mathbf{w}$, el cual minimiza la varianza del portafolio riesgoso dado un nivel fijo de exceso de rendimiento esperado respecto al activo libre de riesgo.

La combinación de un activo libre de riesgo y un portafolio riesgoso tiene rendimiento esperado:

$$\mu_w = R_f + \mathbf{w}^\top(\mu - R_f \mathbf{1}),$$

donde $(\mu - R_f \mathbf{1})$ es el vector de excesos de rendimiento esperado sobre R_f. La varianza del portafolio riesgoso es:

$$\sigma_w^2 = \mathbf{w}^\top \Sigma \mathbf{w}.$$

Para el portafolio de mercado, minimizamos σ_w^2 sujeto a:

$$\mathbf{w}^\top(\mu - R_f \mathbf{1}) = k \quad \text{y} \quad \mathbf{1}^\top \mathbf{w} = 1,$$

donde $k > 0$ es un nivel fijo de exceso de rendimiento esperado.

Usamos multiplicadores de Lagrange λ_1 y λ_2 para las restricciones. El lagrangiano es:

$$\mathcal{L}(\mathbf{w}, \lambda_1, \lambda_2) = \mathbf{w}^\top \Sigma \mathbf{w} - \lambda_1(\mathbf{w}^\top(\mu - R_f \mathbf{1}) - k) - \lambda_2(\mathbf{1}^\top \mathbf{w} - 1).$$

Derivamos el lagrangiano respecto a $\mathbf{w}$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{w}} = 2\Sigma \mathbf{w} - \lambda_1(\mu - R_f \mathbf{1}) - \lambda_2 \mathbf{1} = \mathbf{0}.$$

Reorganizando:

$$\Sigma \mathbf{w} = \frac{\lambda_1}{2}(\mu - R_f \mathbf{1}) + \frac{\lambda_2}{2}\mathbf{1}.$$

Multiplicamos por $\mathbf{1}^\top \Sigma^{-1}$ para usar la restricción $\mathbf{1}^\top \mathbf{w} = 1$:

$$\mathbf{1}^\top \mathbf{w} = \frac{\lambda_1}{2}\mathbf{1}^\top \Sigma^{-1}(\mu - R_f \mathbf{1}) + \frac{\lambda_2}{2}\mathbf{1}^\top \Sigma^{-1}\mathbf{1}.$$

Resolviendo para λ_2, tenemos una expresión que relaciona λ_1 con la suma de los pesos.

Multiplicamos por $(\mu - R_f \mathbf{1})^\top \Sigma^{-1}$ para usar la restricción $\mathbf{w}^\top(\mu - R_f \mathbf{1}) = k$:

$$(\mu - R_f \mathbf{1})^\top \mathbf{w} = \frac{\lambda_1}{2}(\mu - R_f \mathbf{1})^\top \Sigma^{-1}(\mu - R_f \mathbf{1}) + \frac{\lambda_2}{2}(\mu - R_f \mathbf{1})^\top \Sigma^{-1}\mathbf{1}.$$

Combinando las expresiones para λ_1 y λ_2, obtenemos que los pesos del portafolio de mercado son:

$$\mathbf{w} = \frac{\Sigma^{-1}(\mu - R_f\mathbf{1})}{\mathbf{1}^\top\Sigma^{-1}(\mu - R_f\mathbf{1})}.$$

□

3.7.1. Línea de Mercado de Capitales

La línea de mercado de capitales es la línea que conecta el activo libre de riesgo, representado como $(0,R_f)$ con el portfolio de mercado (σ_m, μ_m). La pendiente de esta línea representa el rendimiento adicional (denominado prima de riesgo) que se obtiene por asumir más riesgo. La ecuación de la línea de mercado de capitales es:

$$\mu = R_f + \frac{\mu_m - R_f}{\sigma_m}\sigma$$

donde $\frac{\mu_m - R_f}{\sigma_m}\sigma$ es la prima de riesgo asociada al nivel de riesgo σ.

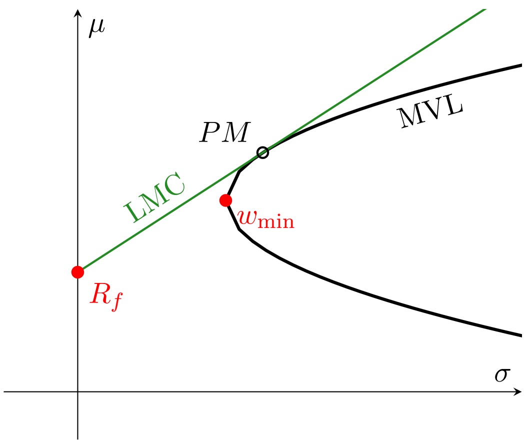

Figura 3.3: Portafolio de mercado (PM), Línea de Mercado de Capitales (LMC) y R_f rendimiento del activo sin riesgo

3.7.2. Combinación de Inversión sin Riesgo y Cartera Riesgosa

También podemos considerar la posibilidad de combinar activos riesgosos con activos sin riesgo. La tasa de retorno sin riesgo se asume como una constante R_f, y se puede combinar con un portafolio riesgoso de activos.

Si consideramos que los inversores pueden tomar posiciones tanto en activos sin riesgo como en activos riesgosos, la combinación de ambos se representa de la siguiente forma:

$$\mu_\alpha = \alpha R_f + (1 - \alpha)\mu_w$$

donde:
μ_α es el rendimiento esperado de la cartera combinada, μ_w es el rendimiento de la cartera riesgosa, R_f es el rendimiento del activo sin riesgo y α es el coeficiente de combinación, que varía dependiendo del nivel de riesgo que el inversor desea asumir.

3.8. Formulación del modelo de optimización de Markowitz

Tras el trabajo de Markowitz, introduce un enfoque que incluye la optimización con aversión al riesgo, introduciendo un parámetro, δ, que representa las preferencias del inversor. Este parámetro permite medir cuánto riesgo está dispuesto a asumir el inversor en relación con el rendimiento esperado. Bajo esta formulación, el problema se plantea como la maximización de la siguiente función objetivo:

$$\text{maximizar} \quad w^\top \mu - \frac{\delta}{2} w^\top \Sigma w \tag{3.8.1}$$

donde:
$\frac{\delta}{2} w^\top \Sigma w$ representa el costo asociado al riesgo, ponderado por el parámetro δ, que refleja la tolerancia del inversor al riesgo.

Para encontrar el portafolio óptimo, tomamos la derivada de la función objetivo con respecto a w y resolvemos:

$$\frac{\partial}{\partial w}\left(w^\top \mu - \frac{\delta}{2} w^\top \Sigma w \right) = 0 \tag{3.8.2}$$

La derivada es:

$$\mu - \delta \Sigma w = 0 \tag{3.8.3}$$

Despejando w, obtenemos el portafolio óptimo que es la solución para el vector de pesos w^* que maximiza el rendimiento ajustado por el riesgo:

$$w^* = (\delta \Sigma)^{-1} \mu \tag{3.8.4}$$

Este vector w^* proporciona las ponderaciones de los activos en el portafolio óptimo.

Capítulo 4

El modelo CAPM

El modelo CAPM, desarrollado independientemente a partir de los resultados de Markowitz por Jack Treynor (1961), William Sharpe (1964), John Lintner (1965) y Jan Mossin (1966) propone una estimación del retorno de cada activo basado en una relación de equilibrio. Este modelo considera la compensación del retorno esperado en función del riesgo sistemático (propio del mercado o la economía en general) y el riesgo no sistemático (aquel que puede reducirse por medio de la diversificación).

He decidido tomar los documentos de Karl Sigman [Sig05] como referencia para este capítulo, además del libro de Maciej Capinski *Portfolio Theory and Risk Management*[CK14]. El modelo **CAPM (Capital Asset Pricing Model)** parte de las siguientes suposiciones:

1. El mercado es un **mercado abierto**, en el que todos los activos con riesgo están a nuestra disposición, los agentes tienen **información perfecta** en cuanto a retornos esperados, varianza y covarianza de los activos, y los agentes no pueden afectar los precios.

2. Existe un **único activo libre de riesgo**, bajo el cual, cualquier inversor puede prestar dinero y endeudarse sin límites.

3. Todos los inversores son **aversos al riesgo**, los cuales parten de las bases de Markowitz sobre la teoría de carteras.

Como todos los inversores tienen los mismos activos de donde elegirlos, la misma información sobre cada uno de ellos y el mismo método de decisión, todos los inversores tendrán su cartera sobre la misma frontera eficiente, y esa cartera será una combinación entre el activo libre de riesgo y los activos con riesgo. Lo único que diferencia a cada inversor, es su **grado de aversión al riesgo**; aquellos que sean más aversos al riesgo, tendrán una mayor participación del activo libre de riesgo, y aquellos que sean más propensos al riesgo, tendrán una mayor proporción del activo riesgoso. En consecuencia, todos enfrentan el mismo problema de optimización y convergen en una solución común: la cartera eficiente, llamada portafolio de mercado (σ_m, μ_m), como se ha mencionado previamente.

La proporción de cada activo en la cartera de mercado se determina dividiendo el valor total de sus acciones entre el valor total del capital del mercado. Por ejemplo, , si el activo i representa las acciones de la compañía 1, y esta compañía tiene 1.000 acciones, que cada una tiene un precio de 5 €, entonces, el valor del capital del activo i es V_i= 1.000x5=5.000

€. Si la cartera tiene n activos, el valor total del mercado de la cartera será $V = \sum_{i=1}^{n} V_i$, y la ponderación w_i para el activo i en la cartera de mercado se calcula como $w_i = \frac{V_i}{V}$ $\forall i = 1, \ldots, n$.
La idea es, que los activos que tengan mucha demanda, tendrán mayores precios, y por lo tanto, esperarán altos retornos esperados, y viceversa.

El comercio repetido de los activos a lo largo del tiempo ajusta los diversos precios, generando un equilibrio que refleja este proceso; así, las ponderaciones óptimas w_i para la cartera de mercado están determinadas por la oferta y la demanda. Al final, no se necesitan usar métodos de optimización ni tampoco variables como varianzas, rendimientos esperados, covarianzas ni tampoco el rendimiento del activo sin riesgo para determinar el portafolio de mercado; solo necesitamos todos los valores V_i.

En esta situación, diremos que el mercado financiero está en equilibrio, es decir:

- El tipo de interés libre de riesgo es único y se establece mediante el **equilibrio** entre la oferta y la demanda, asegurando que la cantidad de dinero prestada sea igual a la cantidad tomada en préstamo.
- Todos los títulos con riesgo tienen una demanda que coincide exactamente con su oferta, lo que implica que **no hay exceso de demanda** y que cada título estará en posesión de algún inversor.

4.1. Fórmula del modelo CAPM

El modelo CAPM proporciona una relación lineal entre el rendimiento esperado del portafolio de mercado μ_m, y el de cualquier activo con riesgo. Esta relación se debe a que ambos están vinculados mediante un parámetro conocido popularmente como β, el cual proporciona una medida de riesgo no diversificable de un activo. El **riesgo diversificable**, es aquel que puede reducirse a cero expandiendo la cartera; mientras que el no diversificable, también conocido como **riesgo sistemático**, no se puede evitar porque los valores están relacionados con el mercado.

Definición 4.1.1. *Llamamos factor beta del activo i a*

$$\beta_i = \frac{Cov(R_i, R_m)}{\sigma_m^2}$$

Teorema 4.1.2. *Sea m el portafolio de mercado y R_f el retorno del activo libre de riesgo. Entonces, para cada $i \leq n$, el rendimiento esperado del activo i de una cartera, viene dado por la fórmula:*

$$\mu_i = R_f + \beta_i(\mu_m - R_f)$$

Demostración. Sea C una cartera compuesta de un activo i, y la cartera de mercado. Llamaremos c a la proporción de dinero invertido en el activo i, y $1 - c$ será la cantidad invertida en la cartera de mercado.
Entonces, $C = (c, 1 - c)$. Suponemos que este activo i no está en la frontera eficiente, y por lo tanto, a medida que varia c, va trazando una curva (σ_C, μ_C) =($\sigma(c)$,$\mu(c)$) donde

$$\mu_C = c\mu_i + (1 - c)\mu_m,$$

$$\sigma_C^2 = c^2\sigma_i^2 + (1 - c)^2\sigma_m^2 + 2c(1 - c)Cov(R_i, R_m)$$

Queremos calcular la pendiente de la recta tangente a esta curva, en el punto (σ_m, μ_m), y querremos igualar esa pendiente, a la de la línea de capitales de mercado. Nos percatamos de que cuando $c = 0$, $(\sigma_0, \mu_0) = (\sigma_m, \mu_m)$ y que cuando $c = 1$, $(\sigma_1, \mu_1) = (\sigma_i, \mu_i)$, por lo que la curva es tangente a la línea de mercado de capitales en el punto (σ_m, μ_m). Para calcular la pendiente de la recta tangente, calculamos las derivadas respecto a c en c=0:

$$\left.\frac{d\mu_C}{dc}\right|_{c=0} = \mu_i - \mu_m$$
$$\left.\frac{d\sigma_C}{dc}\right|_{c=0} = \frac{Cov(R_i, R_m) - \sigma_m^2}{\sigma_m}.$$

Entonces, la pendiente de la recta tangente es la relación entre estas dos derivadas, y la igualamos a la pendiente de la línea de mercado de capitales como hemos comentado anteriormente:

$$\frac{\mu_i - \mu_m}{\frac{Cov(R_i,R_m)-\sigma_m^2}{\sigma_m}} = \frac{\mu_m - R_f}{\sigma_m}.$$

Y ahora despejamos para μ_i

$$\begin{aligned}\mu_i &= \frac{(\mu_m - R_f)(Cov(R_i, R_m) - \sigma_m^2)}{\sigma_m^2} + \mu_m \\ &= \frac{\mu_m Cov(R_i, R_m) - \mu_m\sigma_m^2 - R_f Cov(R_i, R_m) + R_f\sigma_m^2 + \sigma_m^2\mu_m}{\sigma_m^2} \\ &= R_f - \frac{R_f Cov(R_i, R_m)}{\sigma_m^2} + \frac{\mu_m Cov(R_i, R_m)}{\sigma_m^2} = R_f + \frac{Cov(R_i, R_m)}{\sigma_m^2}(\mu_m - R_f)\end{aligned}$$

y como $\beta_i = \frac{Cov(R_i,R_m)}{\sigma_m^2}$, llegamos al resultado que buscábamos. □

Para una cartera $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n)$, definimos su coeficiente beta:

$$\beta_w = \frac{Cov(R_w, R_m)}{\sigma_m^2}$$

Teorema 4.1.3. *Sea como antes R_f el retorno del activo libre de riesgo, que es menor que el portafio mínimo de mercado (pues así el portafolio de mercado $\mathbf{m}$ existe). Entonces, para cualquier portafolio w,*

$$\mu_w = R_f + \beta_w(\mu_m - R)$$

Demostración. Por el Teorema 3.7.1, $m = \frac{\Sigma^{-1}(\mu - R_f 1)}{1^\top\Sigma^{-1}(\mu - R_f 1)}$, por lo que aplicando la proposición 3.2.2,

$$\beta_w = \frac{Cov(R_w, R_m)}{\sigma_m^2} = \frac{w^\top Cm}{m^\top Cm} = \frac{w^\top(\mu - R_f 1)}{m^\top(\mu - R_f 1)}$$

Y como $w^\top\mu = \mu_w$, $w^\top 1 = m^\top 1$ y $m^\top\mu = \mu_m$, entonces

$$\beta_w = \frac{\mu_w - R_f}{\mu_m - R_f}.$$

Por lo que despejando la μ_w de esta última igualdad, tenemos lo que queremos demostrar. □

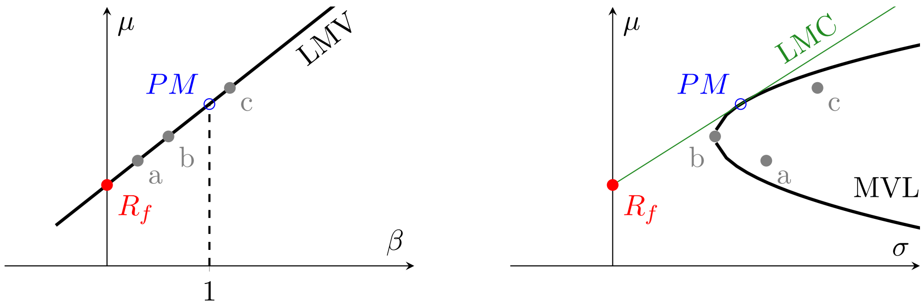

Figura 4.1: Línea de mercado de valores (LMV) y Línea de mercado de capitales (LMC) relacionadas

Del teorema 4.1.3, vemos que en el plano (β, μ), todas las carteras se encuentran en la línea recta $\mu = R_f + \beta(\mu_m - R)$. A esta recta en el plano (β, μ) se le llama **línea de mercado de valores**.

Como se puede apreciar en la figura 4.1, puede haber valores atractivos para los inversores, a pesar de tener pequeños retornos y amplias varianzas. Esto se debe a que estos valores, tienen betas negativas, lo que implica que la covarianza entre el retorno de ese activo con el mercado, es negativo; es decir, los precios de ese activo se mueven en dirección opuesta al mercado. Estos activos, son útiles para protegerse de tendencias negativas del mercado; un ejemplo muy típico es el oro, o los bonos del tesoro, que pueden actuar como seguros en crisis financieras.

Llamaremos al retorno o rendimiento de la fórmula del CAPM como **retorno requerido**, y podemos pensarlo como la forma en que el mercado percibe el rendimiento esperado de un valor determinado. Sin embargo, cada inversor tiene sus propias creencias y opiniones acerca del mercado, y si por ejemplo, para un valor, un inversor que tiene información adicional, cree que el rendimiento esperado real de ese valor es mayor que el retorno requerido,

$$\mu_i > R_f + \beta_i(\mu_m - R_f),$$

entonces, eso quiere decir que el activo está infravalorado; y por lo tanto, debería de invertir en él. Pero si más inversores comparten esta opinión, harán lo mismo, y como consecuencia de la demanda creada, los precios del valor subirán, lo que hará que el rendimiento esperado se reduzca. Por otro lado, si

$$\mu_m < R_f + \beta_i(\mu_m - R_f),$$

los inversores querrán vender o vender en corto este valor, por lo que el precio bajará por el exceso de oferta; y entonces, el rendimiento esperado crecerá.

4.2. Riesgo sistemático

Considerando la fórmula del CAPM, podemos representar su tasa de retorno como

$$R_w = R_f + \beta_w(R_m - R_f) + e_w,$$

donde el error e_w es una variable aleatoria determinada como,

$$e_w = R_w - [R_f + \beta_w(R_m - R_f)].$$

De la fórmula del CAPM, $\mathbb{E}(e_w) = \mu_w - [R_f + \beta_w(\mu_m - R_f)] = 0$.

Además, Cov(e_i,R_m)=0;

$$\begin{aligned}
Cov(e_i, R_m) &= Cov(R_i - R_f - \beta_i(R_m - R_f), R_m) \\
&= Cov(R_i, R_m) - Cov(R_f, R_m) - \beta_i Cov(R_m - R_f, R_m) \\
&= \beta_i Var(R_m) - \beta_i Var(R_m) = 0
\end{aligned}$$

Ya que $Cov(R_f, R_m)$ es 0, pues el retorno de un activo sin riesgo es contante, por lo que no tiene covarianza con R_m.
Por lo que el error tiene media 0 y está incorrelacionado con la cartera de mercado.

Proposición 4.2.1. *La varianza del rendimiento de una cartera se expresa como*

$$\sigma_w^2 = \beta_w^2 \sigma_m^2 + Var(e_w).$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\sigma_w^2 = Var(R_w) &= Var(R_f + \beta_w(R_m - R_f) + e_w) \\
&= Var(\beta_w R_m + e_w) \\
&= \beta_w^2 Var(R_m) + Var(e_w) + 2\beta_w Cov(R_m, e_w) \\
&= \beta_w^2 Var(R_m) + Var(e_w)
\end{aligned}$$

□

El primer término, $\beta_w^2 \sigma_m^2$ representa el riesgo sistemático; el riesgo que no puede evitarse añadiendo más activos a la cartera y es medido a través del coeficiente β.
La segunda parte de la fórmula, $Var(e_w)$ representa el riesgo no sistemático, el cual puede ser reducido diversificando. Si w=m, como $\beta_m = 1$,

$$e_m = R_m - R_f - \beta_m(R_m - R_f) = 0,$$

por lo que el término $Var(e_w)$ puede ser eliminado si se invierte en la cartera de mercado, o en una cartera suficientemente diversificada.

Capítulo 5

El modelo Black-Litterman

El modelo de Black-Litterman, desarrollado por Fischer Black y Robert Litterman en 1990 y publicado en 1992, representa un gran avance en la teoría de asignación de activos y la gestión de carteras. Este modelo surge como respuesta a las limitaciones prácticas del modelo de media-varianza de Markowitz, especialmente su sensibilidad a las estimaciones imprecisas de los rendimientos esperados y su tendencia a generar carteras poco estables ante variaciones en los datos reales.

El principal aporte del modelo es su capacidad para integrar de manera equilibrada las expectativas subjetivas del inversor (denominadas ”visiones”) con los retornos de equilibrio del mercado, derivados del *Capital Asset Pricing Model* (CAPM). Para ello, Black-Litterman utiliza un enfoque bayesiano, donde los retornos de equilibrio del mercado se consideran una “creencia previa“ y las visiones del inversor componen la información adicional. Esta combinación permite generar una nueva distribución de retornos esperados, que es utilizada en la optimización para determinar las ponderaciones óptimas de los activos en la cartera.

La innovación más importante del modelo radica en su metodología de “optimización inversa“, que parte de las ponderaciones de mercado observadas para inferir los retornos implícitos que equilibran oferta y demanda. Estos rendimientos actúan como base inicial para el cálculo, proporcionando estabilidad y coherencia frente a las fluctuaciones y contradicciones propias de los enfoques tradicionales. A partir de aquí, el inversor puede introducir sus opiniones sobre determinados activos o carteras, ajustando los resultados finales según su nivel de confianza en dichas visiones.

5.1. Base Teórica del Modelo de Black-Litterman

El modelo de Black-Litterman combina los principios de la teoría del equilibrio de mercado, representados por el modelo de *Capital Asset Pricing Model* (CAPM), con los fundamentos de la optimización de carteras de Markowitz. A través de un enfoque bayesiano, el modelo integra las rentabilidades implícitas en los precios de mercado con las visiones subjetivas de los inversores, generando distribuciones ajustadas que permiten construir carteras mejor equilibradas y personalizadas.

5.1.1. Supuestos del modelo

En este trabajo, tomamos como referencia la base teórica presentada por Satchell y Scowcroft [SS00] para el desarrollo del modelo.

El modelo Black-Litterman se basa en los siguientes supuestos:

1. El inversor tiene una función de utilidad estrictamente cóncava, lo que implica **aversión al riesgo**. Es decir, a mayor riesgo, el inversor requiere un mayor retorno esperado y viceversa.

2. Los rendimientos de los activos siguen una **distribución Normal**, es decir: sea r el vector de retornos de los activos de una cartera dada, y μ el vector de rendimientos esperados, y Σ la matriz de covarianza, como hemos visto en anteriores capítulos, entonces,
$$r \sim N(\mu, \Sigma).$$

3. El modelo Black-Litterman utiliza los supuestos del modelo *Capital Asset Pricing Model* (CAPM), ya que se basa en este para estimar los retornos de equilibrio. Estos retornos pueden ser incorporados, o no, en las expectativas subjetivas del gestor de carteras.

A diferencia de otros modelos, el modelo Black-Litterman combina variables subjetivas con las estimaciones derivadas del CAPM, que sirven para comparar las visiones propias del gestor con las oportunidades de inversión disponibles.

5.2. Integración de Creencias de Mercado y Visiones del Inversor

El modelo de Black-Litterman utiliza un enfoque bayesiano para combinar las **creencias previas** del mercado con las **visiones** del inversor, generando nuevos retornos esperados ajustados. Este proceso permite integrar opiniones subjetivas sobre ciertos activos o combinaciones de activos de forma estructurada y coherente.

1. Creencias Previas del Mercado: El modelo parte del supuesto de que las ponderaciones del portafolio de mercado (w_m) representan el portafolio de equilibrio. Estas ponderaciones se derivan de la capitalización de mercado de los activos, lo que implica que reflejan el equilibrio entre oferta y demanda, bajo la hipótesis de que todos los inversores comparten las mismas expectativas. En este contexto, el vector de exceso de rendimientos en equilibrio, Π (rendimientos esperados menos la tasa libre de riesgo), representa el rendimiento implícito que se deduce del mercado.

El vector de exceso de rendimientos en equilibrio se puede expresar como:

$$\Pi = \beta(\mu_m - R_f),$$

donde $\beta = \frac{\mathrm{Cov}(R, R^\top w_m)}{\sigma_m^2}$ y $R^\top w_m$ es el retorno del mercado. Al fijar $\Sigma = \mathrm{Cov}(R, R^\top)$, obtenemos la siguiente expresión:

$$\Pi = \delta \Sigma w_m,$$

con $\delta = \frac{\mu_m - R_f}{\sigma_m^2}$.

El cálculo de Π implica una *optimización inversa*, en la cual los retornos esperados implícitos del mercado se derivan de las ponderaciones de mercado w_m. Aquí, δ representa el coeficiente de aversión al riesgo del mercado, mientras que w_m es el vector de ponderaciones del portafolio de mercado.

Black y Litterman, simplificando, hicieron la suposición de que la estructura de la matriz de covarianza de la estimación es proporcional a la covarianza de los rendimientos Σ. Crearon el parámetro τ como la constante de proporcionalidad. Entonces, **la distribución a priori** es:

$$\mathbb{E}(R) \sim N(\Pi, \tau\Sigma)$$

donde τ es el escalar que indica la incerteza del CAPM a priori, y a menudo se establece en 1.
Esto representa nuestra estimación de la media, que es expresada como una distribución en torno a la media real desconocida.

2. Visiones del Inversor: Ahora nos centramos en la opinión del inversor. Según Mankert [Man06], el modelo Black-Litterman permite a los inversores expresar tanto una opinión absoluta (el rendimiento esperado absoluto de un activo) como una opinión relativa (el rendimiento esperado de un activo en relación con otros activos). Este mecanismo permite a los inversores integrar sus pronósticos personales en las rentabilidades esperadas de forma cuantificable, lo que da lugar a rentabilidades esperadas ajustadas de los activos y decisiones de inversión.

Para integrar estas opiniones subjetivas en el modelo, se utilizan tres componentes clave: la matriz P, el vector q y la matriz Ω. A continuación, se detalla cada uno:

- **Matriz P:** Representa cómo los activos están involucrados en cada visión. Esta matriz tiene dimensiones $m \times n$, donde m es el número de visiones y n es el número de activos. Cada fila especifica los pesos asignados a los activos relevantes para una visión particular:

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1} & \cdots & p_{mn} \end{pmatrix}$$

  Por ejemplo:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

  Esto refleja las siguientes visiones:

  a) Visión 1: El activo A tendrá un rendimiento absoluto esperado.
  b) Visión 2: El activo B superará al activo C en un rendimiento relativo.

  Los pesos en P se asignan de la siguiente manera:

  1) Para una visión absoluta (por ejemplo, el rendimiento esperado de un activo específico), se asigna un peso de 1 al activo correspondiente y 0 a los demás.

2) Para una visión relativa (por ejemplo, que un activo i supere a otro activo j), se asigna un peso de 1 al activo i y de -1 al activo j.

- **Vector q:** Contiene los rendimientos esperados asociados a cada visión, definidos por el inversor. Este vector tiene dimensiones $m \times 1$, donde m es el número total de visiones. Los rendimientos pueden expresar valores absolutos o diferenciales de rendimiento, dependiendo del tipo de visión definida en P:

$$q = (q_1, \ldots, q_m)^\top$$

Por ejemplo:

$$q = \begin{pmatrix} 3\,\% \\ 2\,\% \end{pmatrix}.$$

Aquí, $q_1 = 3\,\%$ refleja el rendimiento absoluto esperado del activo A, mientras que $q_2 = 2\,\%$ indica que el inversor espera que el activo B supere al activo C en un $2\,\%$.

- **Matriz Ω:** Matriz diagonal que mide la confianza del inversor en cada visión. Cada elemento en la diagonal (ω_{ii}) representa la varianza del error asociado a la visión i. Esta matriz tiene dimensiones $m \times m$:

$$\Omega = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \omega_{mm} \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, si el inversor tiene más confianza en la primera visión que en la segunda:

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0{,}01 & 0 \\ 0 & 0{,}04 \end{pmatrix}.$$

Según [Man06], una menor varianza (ω_{ii}) indica un mayor nivel de confianza en la visión, lo que aumenta su impacto en la asignación final de activos. Por el contrario, una mayor varianza reduce su influencia. Este ajuste permite que el modelo Black-Litterman cuantifique la confianza del inversor de forma más precisa y transparente.

La varianza de las visiones está inversamente relacionada con la confianza de los inversores en las visiones. Existen varias formas de calcular la varianza de las visiones Ω, como pueden ser el uso de un intervalo de confianza, el uso del método de Idzorek para especificar la confianza en función de la dimensión de los pesos o hacer el proporcional a la varianza de las creencias previas. En este trabajo solo hablaremos del cálculo de Ω a través del proporcional a la varianza de la distribución previa, pues es el más simple y el más comúnmente usado en la literatura.
Como bien es explicado en [Wal11], podremos asumir que la varianza de las visiones será proporcional a la varianza de los retornos de los activos, al igual que la varianza de la distribución previa:

$$\begin{aligned} w_{ij} &= p(\tau\Sigma)p^\top, \quad \forall i = j, \\ w_{ij} &= 0, \quad \forall i \neq j. \end{aligned}$$

o bien

$$\Omega = diag(P(\tau\Sigma)P^\top).$$

A1: Entonces, la primera suposición del modelo es que

$$P\,\mathbb{E}\,(R) \sim N(Q, \Omega).$$

donde $P\,\mathbb{E}\,(R)$ son las distribuciones ajustadas de los retornos esperados tras incorporar las visiones.

A2: La segunda suposición del modelo es que

$$\Pi|\,\mathbb{E}\,(R) \sim N(\mathbb{E}\,(R)\,, \tau\Sigma).$$

Esta suposición implica que los rendimientos en exceso en equilibrio, condicionados a las previsiones individuales, siguen una distribución normal con media $\mathbb{E}\,(R)$ y varianza $\tau\Sigma$. Es decir, en promedio, las previsiones individuales sobre los rendimientos esperados coinciden con los rendimientos en exceso de equilibrio del mercado, aunque existe una incertidumbre que modelada por la variable τ que mide el grado de confianza en estas previsiones.

Este condicionamiento debe entenderse en un contexto donde todos los individuos comparten esta visión e invierten en un mundo tipo CAPM. No obstante, en la práctica esta igualdad puede no cumplirse debido a que muchos profesionales tienden a mostrar importantes sesgos en comparación con la visión del mercado.

Observación 5.2.1. En el modelo CAPM, se tenía que $\Pi = \mathbb{E}\,(R)$, es decir, los rendimientos en exceso en equilibrio coinciden con los rendimientos esperados del mercado; pero en el modelo de Black-Litterman, al incorporar la visiones del inversor, esta igualdad deja de cumplirse, ya que los rendimientos en equilibrio se ajustan para reflejar dichas visiones.

3. Relación Matemática entre las Visiones y el Mercado. Las visiones del inversor se incorporan al modelo como la ecuación lineal:

$$q = P\Pi + \varepsilon,$$

donde ε es el error asociado a las visiones, con varianza Ω.

La relación se basa en que las visiones q no son independientes de las creencias implícitas del mercado, representadas por Π, sino que son una combinación lineal de estas.

El término de error ε captura la incertidumbre inherente a las visiones del inversor. Según la teoría, se supone que ε sigue una distribución normal con media cero y varianza Ω, es decir:

$$\varepsilon \sim N(0, \Omega),$$

5.3. Fórmula de Black-Litterman

Teorema 5.3.1. *Teniendo en cuenta las dos suposiciones comentadas anteriormente,*

$$\mathbb{E}\,(R)\,|\Pi \sim N(\mu_{BL}, \Sigma_{BL}),$$

donde

$$\mu_{BL} = ((\tau\Sigma)^{-1} + P^\top\Omega^{-1}P)^{-1}((\tau\Sigma)^{-1}\Pi + P^\top\Omega^{-1}q) \tag{5.3.1}$$

$$\Sigma_{BL} = ((\tau\Sigma)^{-1} + P^\top\Omega^{-1}P)^{-1}. \tag{5.3.2}$$

Demostración. Usando el teorema de Bayes, tenemos que:

$$\begin{aligned} f_{\mathbb{E}(R)|\Pi}(m \mid \Pi) &= \frac{f_{\mathbb{E}(R)|\Pi}(m,\pi)}{f_{\Pi}(\pi)} \\ &= \frac{f_{\Pi|\,\mathbb{E}(R)}(\pi \mid m) f_{\mathbb{E}(R)}(m)}{f_{\Pi}(\pi)} \\ &\propto f_{\Pi|\,\mathbb{E}(R)}(\pi \mid m) f_{\mathbb{E}(R)}(m) \end{aligned}$$

ya que $f_{\Pi}(\pi)$ es un valor constante. Por aclarar, Π es el vector de rendimientos esperados en equilibrio, derivado del modelo del mercado; mientras que π es un valor **particular** dentro de este espacio que son las expectativas previas derivadas del equilibrio del mercado.

Ahora, gracias a la suposición **A1**, $P\,\mathbb{E}(R) \sim N(q,\Omega)$; y como sabemos que para distribuciones normales multivariadas (con vectores x, media μ, y matriz de covarianza Σ, la función de densidad es

$$f(\mathbf{x};\boldsymbol{\mu},\Sigma) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^k \det(\Sigma)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^\top \Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\right),$$

entonces la función de densidad de **A1** es

$$f_{P\,\mathbb{E}(R)}(Pm) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m \det(\Omega)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(Pm-q)^\top \Omega^{-1}(Pm-q)\right).$$

Por otro lado, como por **A2**, $\Pi|\,\mathbb{E}(R) \sim N(\mathbb{E}(R), \tau\Sigma)$, tenemos la siguiente función de densidad:

$$f_{\Pi|\,\mathbb{E}(R)}(\pi,m) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\tau\Sigma)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\pi-m)^\top (\tau\Sigma)^{-1}(\pi-m)\right).$$

Observamos que en la hipótesis **A1**, $P\,\mathbb{E}(R)$ se asemeja a una distribución Normal, pero necesitamos la asemejanza de $\mathbb{E}(R)$ para encontrar su función de distribución y poder aplicar el teorema de Bayes. Por ello, como la matriz P no es una matriz cuadrada, no puede tener inversa, por lo que no podemos aplicar directamente que $f_{\mathbb{E}(R)}(m) = f_{P\,\mathbb{E}(R)}(Pm) * det(P)^{-1}$. Para solucionar este problema, completaremos la matriz P con ceros, para que sea de dimensión (n x n). Al realizar esto, también estamos modificando la matriz Ω, ya que tiene que tener dimensión (n x n) también. Para ello, el resto de coeficientes de la diagonal de la matriz serán infinitos, debido a que se desconoce completamente su valor y por tanto el grado de incertidumbre es mayor. Al hacer la inversa, esos coeficientes tenderán a 0 por lo que no nos afectará al resultado que queremos obtener.

$$\Omega = \begin{pmatrix} \omega_{11} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \omega_{mm} & & & \\ & & & \infty & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \infty \end{pmatrix}$$

Dicho esto, aplicamos la fórmula de Bayes, con la nueva función de distribución $f_{\mathbb{E}(R)}(m)$:

$$\begin{aligned} f_{\Pi|\,\mathbb{E}(R)}(\pi,m) f_{P\,\mathbb{E}(R)}(Pm) = & \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\tau\Sigma)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\pi-m)^\top(\tau\Sigma)^{-1}(\pi-m)\right)\cdot \\ & \cdot \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m \det(\Omega)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(Pm-q)^\top\Omega^{-1}(Pm-q)\right) \end{aligned}$$

Omitiendo las constantes obtenemos que

$$\begin{aligned} & f_{\Pi|\,\mathbb{E}(R)}(\pi,m) f_{P\,\mathbb{E}(R)}(Pm) \\ & = k\cdot\exp\left(-\frac{1}{2\tau}(\pi-m)^\top\Sigma^{-1}(\pi-m) - \frac{1}{2}(Pm-q)^\top\Omega^{-1}(Pm-q)\right) \end{aligned}$$

con k la constante.

Resolviendo el exponente,

$$m^\top P^\top\Omega^{-1}Pm - 2q^\top\Omega^{-1}Pm + q^\top\Omega^{-1}q + m^\top(\tau\Sigma)^{-1}m - 2\pi^\top(\tau\Sigma)^{-1}m + \pi^\top(\tau\Sigma)^{-1}\pi,$$

que agrupando nos queda

$$m^\top\left[P^\top\Omega^{-1}P + (\tau\Sigma)^{-1}\right]m - 2\left[q^\top\Omega^{-1}P + \pi^\top(\tau\Sigma)^{-1}\right]m + q^\top\Omega^{-1}q + \pi^\top(\tau\Sigma)^{-1}\pi.$$

Ahora, simplificamos la fórmula introduciendo variables:

$$\begin{aligned} A &= q^\top\Omega^{-1}q + \pi^\top(\tau\Sigma)^{-1}\pi \\ B &= (\tau\Sigma)^{-1} + P^\top\Omega^{-1}P, \\ C &= (\tau\Sigma)^{-1}\pi + P^\top\Omega^{-1}q, \end{aligned}$$

Por lo que simplificando lo anterior con estas nuevas variables, y sabiendo que $B = B^\top$ y que $B = B^{-1}$ obtenemos que

$$\begin{aligned} m^\top Bm - 2C^\top m + A &= m^\top B^\top B^{-1}Bm - 2C^\top B^{-1}Bm + A \\ &= (Bm-C)^\top B^{-1}(Bm-C) + A - C^\top B^{-1}C \\ &= (m-B^{-1}C)^\top B(m-B^{-1}C) + A - C^\top B^{-1}C. \end{aligned}$$

Nos percatamos de que el término $A - C^\top B^{-1}C$ no depende de Pm, por lo que desaparece con la constante de integración; y por lo tanto, la función de distribución nos queda

$$f_{\mathbb{E}(R)|\Pi}(m|\pi) = \exp\left(-\frac{1}{2}(m-B^{-1}C)^\top B(m-B^{-1}C)\right)$$

la cual tiene media

$$\mu_{BL} = B^{-1}C = \left((\tau\Sigma)^{-1} + P^\top\Omega^{-1}P\right)^{-1}\left((\tau\Sigma)^{-1}\Pi + P^\top\Omega^{-1}q\right)$$

y varianza

$$\Sigma_{BL} = B^{-1} = ((\tau\Sigma)^{-1} + P^\top\Omega^{-1}P)^{-1}$$

Y por lo tanto siguen la distribución normal que queríamos demostrar

□

5.4. Optimización y portafolio óptimo

Por lo que ya tenemos la distribución a posteriori:

$$\mathbb{E}(R) \sim N(\mu_{\mathrm{BL}}, \Sigma_{\mathrm{BL}}) \tag{5.4.1}$$

Con los nuevos retornos esperados y la matriz de covarianza, el modelo utiliza el enfoque de optimización de Markowitz para determinar el portafolio óptimo. La solución es:

$$w^* = \frac{1}{\delta}\Sigma_{\mathrm{BL}}^{-1}\mu_{\mathrm{BL}},$$

donde w^* representa las ponderaciones óptimas de los activos en el portafolio, ajustadas por las visiones del inversor. En resumen, el modelo de Black-Litterman se basa en tres componentes clave:

1. Los retornos implícitos del mercado, derivados del equilibrio del CAPM.
2. Las visiones del inversor, incorporadas mediante un enfoque bayesiano.
3. La optimización media-varianza para calcular el portafolio óptimo.

5.5. Ventajas y Limitaciones del Modelo de Black-Litterman

5.5.1. Ventajas

El modelo de Black-Litterman presenta varias ventajas importantes en comparación con otros enfoques tradicionales de optimización de portafolios:

- **Robustez frente a errores de estimación:** Al utilizar los retornos implícitos del mercado como creencias previas, el modelo reduce la sensibilidad a errores en las estimaciones de los rendimientos esperados.
- **Flexibilidad para incorporar visiones:** Permite a los inversores incluir sus opiniones subjetivas además de integrar la información del mercado a través del modelo CAPM.
- **Mejor estabilidad en los pesos del portafolio:** Las ponderaciones resultantes suelen ser más razonables y menos extremas que las obtenidas con el modelo de Markowitz.
- **Enfoque bayesiano:** Incorpora la incertidumbre mediante la matriz Ω, la cual permite ajustar el grado de confianza en las visiones del inversor.

5.5.2. Limitaciones

A pesar de sus ventajas, el modelo también presenta algunas limitaciones:

- **Dependencia de parámetros:** La elección de valores para δ y τ puede influir significativamente en los resultados, lo que introduce cierta subjetividad.
- **Suposiciones simplificadas:** El modelo asume que los retornos siguen una distribución normal y que las covarianzas estimadas son precisas, lo que no siempre se cumple en mercados reales.

Capítulo 6

Aplicación del modelo Black-Litterman al sector hotelero barcelonés

El sector hotelero ha experimentado un crecimiento significativo en los últimos años, consolidándose como una de las actividades económicas más destacadas en Barcelona. De acuerdo con varios reportes turísticos, la ciudad se ha transformado en un destino estratégico tanto para el turismo recreativo como empresarial, lo que ha propiciado un crecimiento continuo de la oferta hotelera y ha atraído a inversores nacionales e internacionales. Este dinamismo del sector hotelero hace que sea esencial disponer de herramientas analíticas sofisticadas que faciliten la valoración y administración adecuada de las oportunidades de inversión.

En este contexto, la aplicación del modelo de Black-Litterman al sector hotelero en Barcelona cobra especial relevancia. Su principal ventaja se basa en la capacidad de integrar datos cuantitativos y cualitativos en un marco robusto, lo que resulta especialmente útil en sectores como el hotelero, donde muchos activos no cotizan en bolsa y, por tanto, no cuentan con información directa sobre rendimientos o volatilidad.

La elección del sector hotelero en este trabajo se debe a su peso en la economía de la ciudad y a su carácter estratégico dentro de España. Como uno de los destinos turísticos más destacados a nivel global, Barcelona genera un impacto económico muy importante a través del empleo, la inversión en infraestructuras y el consumo asociado al turismo. Este protagonismo hace que sea relevante analizar la inclusión de activos hoteleros en una cartera de inversión, buscando maximizar el rendimiento ajustado al riesgo de los mismos.

En definitiva, este estudio busca aportar una visión innovadora y metodológicamente rigurosa al análisis de los activos hoteleros en Barcelona, utilizando el modelo de Black-Litterman como una herramienta clave para la toma de decisiones en el ámbito de la gestión de carteras y la planificación estratégica.

6.1. Limitaciones y alternativas en la aplicación del modelo

La mayoría de los estudios y aplicaciones del modelo de Black-Litterman se centran en activos financieros cotizados, como acciones o fondos de inversión, debido a la facilidad con la que se puede calcular el rendimiento esperado y la volatilidad. Esto se logra a través de datos históricos de precios de cierre en los mercados financieros, ampliamente disponibles y actualizados en tiempo real. Además, la alta liquidez y la accesibilidad para invertir en activos cotizados, mediante plataformas de intermediación financiera o *brokers*, los convierten en opciones ideales para el desarrollo de análisis cuantitativos y modelos de optimización de carteras.

Sin embargo, el sector hotelero en Barcelona presenta una particularidad distintiva: la mayoría de las empresas hoteleras no son entidades cotizadas en bolsa. Esto supone un gran desafío, ya que no es posible recurrir directamente a datos de mercado para calcular rendimientos esperados, volatilidades o correlaciones. Por ello, en este trabajo se han explorado vías alternativas para obtener información relevante y representar estos activos en un marco de inversión.

A pesar de no ser cotizados, los activos hoteleros no están fuera del alcance de los inversores. Existen diversas vías a través de las cuales un particular o una institución pueden participar en la inversión en hoteles no cotizados, tales como:

- **Fondos de inversión especializados**: Fondos que se centran en activos inmobiliarios o en el sector hotelero, ofreciendo exposición indirecta a esta clase de activos.
- **Fondos de capital privado (*private equity*)**: Firmas que adquieren participaciones significativas en empresas hoteleras con el objetivo de reestructurar y maximizar su valor antes de una futura venta.
- ***Club deals***: Acuerdos en los que un grupo reducido de inversores se une para adquirir un activo específico, como un hotel o una cartera de hoteles.
- ***Crowdfunding* inmobiliario**: Plataformas que permiten a pequeños inversores participar en proyectos de desarrollo o adquisición de hoteles, democratizando el acceso a este sector.
- ***Joint ventures***: Asociaciones estratégicas entre empresas o inversores individuales para desarrollar, adquirir o gestionar activos hoteleros.
- **Redes de inversores**: Asociaciones o plataformas que facilitan la inversión en proyectos hoteleros mediante conexiones entre promotores y posibles financiadores.

Estas alternativas reflejan la flexibilidad del mercado de inversión en activos hoteleros y justifican el interés de aplicar el modelo de Black-Litterman a un sector que, aunque mayoritariamente no cotizado, presenta oportunidades claras de inversión para distintos perfiles de inversores. En este trabajo, se ha adoptado un enfoque que permite adaptar el modelo a las características de los hoteles no cotizados, considerando métricas financieras como la facturación, el EBITDA (Beneficios antes de intereses, impuestos, depreciaciones y amortizaciones) y otros indicadores disponibles, además de un análisis cualitativo y estratégico para construir las visiones necesarias para el modelo.

De este modo, se busca no solo superar las limitaciones habituales asociadas a la falta de cotización, sino también demostrar la aplicabilidad del modelo de Black-Litterman en un contexto más amplio y complejo como el del sector hotelero en Barcelona.

6.2. Selección de activos y horizonte temporal

6.2.1. Horizonte temporal

Se ha seleccionado un horizonte temporal de 5 años (ejercicios 2019-2023) para este análisis, ya que permite capturar una diversidad de escenarios económicos que han influido en el sector hotelero en Barcelona. Este período incluye:

- **La recesión provocada por el COVID-19**: Abarcando los años de mayor impacto (2020-2021), en los que el sector se enfrentó con caídas históricas debido a las restricciones de movilidad y la contracción del turismo.
- **La recuperación y estabilización**: Reflejada a partir de 2022, con una progresiva recuperación del turismo internacional y una mayor adaptación de los hoteles a las nuevas condiciones del mercado.
- **Un periodo de bonanza**: En los últimos años, el sector hotelero ha experimentado un crecimiento significativo impulsado por la normalización de los viajes, el aumento del turismo de calidad y las mejoras operativas en los establecimientos.

Este horizonte temporal permite analizar tanto los efectos de crisis como las estrategias de recuperación y consolidación, ofreciendo una visión integral y representativa de la dinámica del sector en Barcelona.

6.2.2. Elección del número de activos y criterios de selección

Se ha decidido trabajar con un total de 15 hoteles, debido principalmente a:

- **Diversificación**: Permite diversificar suficientemente la cartera de activos para mitigar riesgos específicos de cada categoría.
- **Gestión operativa del modelo**: No es un número excesivo que complique la implementación del modelo Black-Litterman.

Los 15 hoteles seleccionados se han dividido en tres categorías principales, de acuerdo con su facturación y EBITDA en el último año:

- **Hoteles de lujo**: Son aquellos con una facturación superior a 20 millones de euros y un EBITDA mayor a 10 millones.
- **Hoteles de gama media**: Incluyen aquellos con una facturación entre 5 y 20 millones de euros, y un EBITDA entre 2 y 10 millones.
- **Hoteles económicos**: Corresponden a hoteles con una facturación entre 1 y 5 millones de euros, y un EBITDA inferior a 2 millones.

Criterios de exclusión:

- Se han excluido los grupos consolidados y las empresas que generan la mayor parte de su facturación fuera de Barcelona.

- Tampoco se han considerado apartahoteles, moteles, plataformas como Airbnb ni modelos de negocio similares.

Para la selección de hoteles, el análisis se ha centrado exclusivamente en empresas con sede en Barcelona. Aunque algunas de estas empresas pueden ser filiales de grandes grupos multinacionales, su inclusión no se considera relevante para los objetivos del estudio, que busca analizar activos cuya actividad esté vinculada mayoritariamente a la ciudad. Todos los datos han sido sacados de la **base de datos SABI**.

Las empresas con las que se trabajarán son las siguientes, divididas por facturación y EBITDA; **hoteles de lujo**: Hotel de la Villa Olímpica SA, Gargallo Hotels SL, Eurostars Hotel Company SL, Majestic Hotel Spa SL, Hotel Fira SA; **Hoteles de gama media**: Zoraida SA, Maritim Cambrils SA, Hotel Dorado Playa SL, Hotel Condes 2015 SL, Gran via Hotel Barcelona SL; **Hoteles económicos**: Hotel Grill Barbera SA, AC Hotel Sants SL, Evenia Hotels SL, Gaudi Hotel Barcelona SL y Hotel Rivoli de Barcelona.

La clasificación de los hoteles en segmentos de lujo, gama media y económicos basada en criterios cuantitativos como la facturación y el EBITDA presenta **bastantes limitaciones** que merecen ser destacadas. A pesar de que estos indicadores financieros ofrecen una visión clara de la dimensión económica de cada empresa, no necesariamente representan su posicionamiento en el mercado ni la percepción de los clientes sobre la categoría del hotel. Por ejemplo, un hotel que combina hoteles de lujo y gama media dentro de su portafolio puede generar ingresos altos y un EBITDA significativo, aunque parte de sus operaciones no pertenezcan exclusivamente al segmento de lujo. Además, factores cualitativos como la calidad del servicio, la reputación de la marca, las instalaciones, la ubicación, y el tipo de cliente objetivo son determinantes para clasificar un hotel en una categoría específica. Incorporar estas variables habría aportado más profundidad al análisis, pero también habría aumentado la complejidad considerable al requerir datos menos estandarizados y más subjetivos. Por lo tanto, aunque el uso de criterios financieros es un enfoque simplificado, proporciona una aproximación práctica y manejable para los objetivos de este trabajo.

6.3. Cálculo de rendimientos esperados y matriz de covarianza

6.3.1. Rendimientos esperados

Como se ha visto en *Capítulo 3* y en *Capítulo 5*, los modelos trabajan con las **tasas de retorno de los activos** en lugar de sus precios absolutos. Sin embargo, al tratarse de empresas no cotizadas, no disponemos de precios de mercado que permitan calcular directamente los rendimientos. Por ello, para el cálculo de los rendimientos de los hoteles seleccionados, recurriremos a un método de valoración de empresas ampliamente utilizado: **el múltiplo *EV/EBITDA***.

Este enfoque permite estimar el valor de la empresa (*Enterprise Value*, EV) a partir del EBITDA y un múltiplo representativo del sector. Posteriormente, el valor del equity (*Equity Value*) se obtiene ajustando el EV por la deuda neta.

$$\mathrm{EV} = \mathrm{EBITDA} \cdot \mathrm{k}$$

$$\text{Equity Value} = EV - \text{Deuda Neta}$$

donde k es el múltiplo EV/EBITDA específico para el sector.

Finalmente, las tasas de retorno se calcularán a partir de las variaciones en el *Equity Value* entre períodos consecutivos.

$$R_t = \frac{\text{Equity Value}_t - \text{Equity Value}_{t-1}}{\text{Equity Value}_{t-1}}$$

Para calcular el valor de los hoteles seleccionados, se ha empleado el múltiplo EV/EBITDA de 11,41 [Inf24], que corresponde a NH Hotel Group S.A. Este múltiplo, aunque proveniente de una empresa de lujo, se considera representativo de la valoración de empresas hoteleras de distintos segmentos en el mercado español. Es un múltiplo ampliamente utilizado en la industria hotelera independientemente del segmento en el que operen (lujo, gama media, económica). Aunque se reconoce que podría haber ligeras diferencias entre los segmentos, no se dispone de información específica más diferenciada, lo que justifica el uso de este múltiplo para todas las categorías de hoteles incluidas en el análisis.

En cuanto a la deuda neta, es calculada de la siguiente manera:

$$\text{Deuda Neta} = \text{Deuda a largo plazo} + \text{Deuda a corto plazo} - \text{Caja y Equivalentes}$$

Una vez detallado el procedimiento, pasamos ahora a efectuar los cálculos de todos los parámetros:

Nombre empresa	EBITDA 2023	EBITDA 2022	EBITDA 2021	EBITDA 2020	EBITDA 2019	EBITDA 2018	EV 2023	EV 2022	EV 2021	EV 2020	EV 2019	EV 2018
HOTEL DE LA VILLA OLIMPICA SA	30.494.896	1.568.647	-7.719.409	31.437.119	33.188.169	37.692.503	347.946.763	17.898.262	-88.078.457	358.697.528	378.677.008	430.071.459
GARGALLO HOTELS SL	21.409.143	13.611.288	4.978.749	-2.332.560	8.731.606	12.205.304	244.278.325	155.304.797	56.807.522	-26.614.504	99.627.623	139.262.519
EUROSTARS HOTEL COMPANY SL.	22.570.640	16.447.614	5.599.652	-641.923	11.799.510	11.535.936	257.531.002	187.667.276	63.892.029	-7.324.341	134.632.409	131.625.030
MAJESTIC HOTEL SPA SL	18.583.248	12.412.336	3.407.773	-1.225.763	13.901.148	14.238.470	212.034.860	141.624.754	38.882.690	-13.985.956	158.612.099	162.460.943
HOTEL FIRA S.A.	11.388.834	6.716.567	-2.298.929	-1.406.575	7.507.934	6.300.178	129.946.599	76.636.033	-26.230.777	-16.049.026	85.665.532	71.885.034
ZORAIDA SA	4.278.172	4.007.407	3.367.161	-1.474.708	3.873.684	4.502.154	48.813.942	45.724.514	38.419.301	-16.826.421	44.198.735	51.369.578
MARITIM CAMBRILS SA	5.379.090	4.354.460	3.217.230	1.099.450	4.700.640	4.999.170	61.375.417	49.684.389	36.708.594	12.544.725	53.634.302	57.040.530
HOTEL DORADO PLAYA SL	4.464.694	4.045.290	3.091.967	317.917	3.507.839	3.123.774	50.942.154	46.156.756	35.279.339	3.627.431	40.024.442	35.642.259
HOTEL CONDES 2015 SL.	3.375.651	907.616	-1.238.239	3.735.580	2.663.819	2.916.070	38.516.176	10.355.902	-14.128.307	42.622.973	30.394.175	33.272.355
GRAN VIA HOTEL BARCELONA SL.	2.172.644	-1.021.023	-1.963.631	575.504	-1.285.972	-2.709.263	24.789.872	-11.649.872	-22.405.026	6.566.499	-14.672.939	-30.912.685
HOTEL GRILL BARBERA SA	1.006.529	1.051.694	188.204	-195.479	912.257	712.017	11.484.498	11.999.824	2.147.410	-2.230.417	10.408.849	8.124.111
AC HOTEL SANTS SL	550.388	1.487.206	-886.756	-1.145.207	511.709	218.031	6.279.930	16.969.023	-10.117.886	-13.066.808	5.838.605	2.487.733
GAUDI HOTEL BARCELONA SL	1.800.807	1.432.461	530.289	-251.680	1.419.418	1.435.761	20.547.207	16.344.375	6.050.603	-2.871.664	16.195.560	16.382.038
HOTEL RIVOLI DE BARCELONA SA	1.400.689	1.217.383	1.072.447	1.310.614	1.301.195	1.173.256	15.981.864	13.890.337	12.236.621	14.954.104	14.846.634	13.386.856
EVENIA HOTELS SL	953.149	1.411.334	1.141.929	-534.133	860.875	832.970	10.875.435	16.103.319	13.029.408	-6.094.463	9.822.579	9.504.189

Multiplo EV/EBITDA	11,41

Figura 6.1: Cálculo del Enterprise Value a través del EBITDA y el múltiplo EV/EBITDA

El cálculo de la deuda neta se podrá consultar en el anexo debido a que es considerablemente largo (ver figura 7.1); el cálculo del Equity Value se haría como explicado anteriormente, Deuda a largo Plazo + Deuda a corto Plazo - Caja y Equivalentes, por lo que enseñamos directamente la tabla con los equity values para las 15 empresas:

Nombre empresa	Equity Value 2023	Equity Value 2022	Equity Value 2021	Equity Value 2020	Equity Value 2019	Equity Value 2018
HOTEL DE LA VILLA OLIMPICA SA	157.318.962	-191.320.202	-293.095.823	167.317.135	193.510.660	222.417.596
GARGALLO HOTELS SL	248.767.850	142.527.885	44.335.556	-39.901.421	91.008.922	128.195.978
EUROSTARS HOTEL COMPANY SL.	245.301.518	176.573.609	55.390.170	-14.979.132	126.694.395	122.553.199
MAJESTIC HOTEL SPA SL	197.953.414	130.763.030	30.137.218	-16.936.269	155.480.451	157.461.308
HOTEL FIRA S.A.	118.809.754	64.089.608	-45.220.625	-22.548.229	77.657.179	65.743.538
ZORAIDA SA	48.273.995	48.061.584	38.411.689	-19.960.905	42.707.430	49.869.269
MARITIM CAMBRILS SA	34.624.717	21.154.699	5.416.434	-20.059.596	47.295.692	47.004.130
HOTEL DORADO PLAYA SL	40.280.068	33.184.776	19.205.395	-13.923.592	22.665.707	15.652.431
HOTEL CONDES 2015 SL.	38.515.401	9.404.672	-15.396.004	41.391.972	30.362.919	27.107.576
GRAN VIA HOTEL BARCELONA SL.	-22.454.056	-78.343.258	-89.123.035	-57.337.726	-76.655.950	-84.421.286
HOTEL GRILL BARBERA SA	10.540.323	10.512.366	1.375.053	-2.861.178	9.593.811	7.493.934
AC HOTEL SANTS SL	4.745.094	15.435.136	-12.133.809	-14.142.216	5.711.189	2.545.519
GAUDI HOTEL BARCELONA SL	20.599.220	16.904.119	6.234.737	-2.969.447	16.911.391	16.684.709
HOTEL RIVOLI DE BARCELONA SA	14.532.943	11.613.202	8.986.096	11.742.273	10.882.047	8.964.648
EVENIA HOTELS SL	11.531.151	17.233.882	13.363.133	-6.559.399	10.167.862	9.956.732

Figura 6.2: Equity Values para los años 2018-2023

Una vez calculado los Equity Values, lo que nos interesaría es poder calcular los rendimientos de cada año para cada empresa, para poder así calcular después el vector de rendimientos o rentabilidad anual μ. Esto se puede ver calculado en la Figura 6.3

Nombre empresa	Rendimiento 2023	Rendimiento 2022	Rendimiento 2021	Rendimiento 2020	Rendimiento 2019
HOTEL DE LA VILLA OLIMPICA SA	-182,23%	-34,72%	-275,17%	-13,54%	-13,00%
GARGALLO HOTELS SL	74,54%	221,48%	-211,11%	-143,84%	-29,01%
EUROSTARS HOTEL COMPANY SL.	38,92%	218,78%	-469,78%	-111,82%	3,38%
MAJESTIC HOTEL SPA SL	51,38%	333,89%	-277,94%	-110,89%	-1,26%
HOTEL FIRA S.A.	85,38%	-241,73%	100,55%	-129,04%	18,12%
ZORAIDA SA	0,44%	25,12%	-292,43%	-146,74%	-14,36%
MARITIM CAMBRILS SA	63,67%	290,57%	-127,00%	-142,41%	0,62%
HOTEL DORADO PLAYA SL	21,38%	72,79%	-237,93%	-161,43%	44,81%
HOTEL CONDES 2015 SL.	309,53%	-161,09%	-137,20%	36,32%	12,01%
GRAN VIA HOTEL BARCELONA SL.	-71,34%	-12,10%	55,44%	-25,20%	-9,20%
HOTEL GRILL BARBERA SA	0,27%	664,51%	-148,06%	-129,82%	28,02%
AC HOTEL SANTS SL	-69,26%	-227,21%	-14,20%	-347,62%	124,36%
GAUDI HOTEL BARCELONA SL	21,86%	171,13%	-309,96%	-117,56%	1,36%
HOTEL RIVOLI DE BARCELONA SA	25,14%	29,24%	-23,47%	7,91%	21,39%
EVENIA HOTELS SL	-33,09%	28,97%	-303,72%	-164,51%	2,12%

Figura 6.3: Rendimientos para los años 2018-2023

La rentabilidad anual, la calcularemos como el índice TCAC (Tasa de Crecimiento Anual Compuesta) o también conocido como **CAGR** en inglés. Esta es una medida que describe el ritmo al que una inversión crece anualmente, en promedio, durante un período específico, asumiendo que las ganancias se reinvierten al final de cada año. He decidido escoger esta medida, en vez de la media aritmética, debido a que el CAGR es menos sensible a las fluctuaciones interanuales, lo que permite suavizar el impacto de la volatilidad y proporciona una estimación más estable y consistente, especialmente en escenarios como los vividos en este período de 5 años donde se ha producido una crisis como la del COVID, incurriendo así la mayoría de las empresas del sector hotelero en pérdidas extraordinarias. El CAGR se calcula como:

$$\text{CAGR} = (\frac{\text{Valor inicial}}{\text{Valor final}})^{\frac{1}{n}} - 1$$

donde n es el número de años que han transcurrido. Aplicando esta fórmula a nuestro modelo, nos da el vector μ que se puede ver en la la Figura 6.4.

	HOTEL DE LA VILLA OLIMPICA SA	GARGALLO HOTELS SL	EUROSTARS HOTEL COMPANY SL.	MAJESTIC HOTEL SPA SL	HOTEL FIRA S.A.	ZORAIDA SA	MARITIM CAMBRILS SA	HOTEL DORADO PLAYA SL	HOTEL CONDES 2015 SL.	GRAN VIA HOTEL BARCELONA SL.	HOTEL GRILL BARBERA SA	AC HOTEL SANTS SL	GAUDI HOTEL BARCELONA SL	HOTEL RIVOLI DE BARCELO	EVENIA HOTELS SL
CAGR 18-23	-6,69%	14,18%	14,89%	4,68%	12,56%	-0,65%	-5,93%	20,81%	7,28%	-23,27%	7,06%	13,26%	4,31%	10,14%	2,98%

Figura 6.4: Vector de rendimientos esperados (μ), calculado como la Tasa de Crecimiento Anual Compuesta (CAGR) para el período 2018-2023

6.3.2. Matriz de covarianza

Ahora ya, para aplicar nuestro modelo, el de creencias previas, solo haría falta calcular la matriz de covarianzas anuales, que en nuestro modelo la seguiremos llamando como en el apartado teórico, Σ.

Esta matriz se calcula en excel a partir de la siguiente fórmula:
= COVARIANCE.P(vector rentabilidad anual hotel i,vector rentabilidad anual hotel j), donde $i, j = 1, \ldots, 15$.

El problema que se ha tenido a la hora del cálculo de esta matriz, es que su determinante era muy cercano a cero (-2,8511E-168), por lo que no era invertible, y eso nos perjudicaba, ya que la inversa de Σ es usada en el modelo. Para arreglar este problema de invertibilidad de la matriz y debido a la existencia de muchos valores atípicos en los datos, mayoritariamente gracias a la crisis del COVID, y el gran impacto que tuvo en muchas empresas, se ha optado por aplicar el **método shrinkage** a Σ. [FL06]

La aplicación de este método en nuestra matriz de covarianza ha sido la siguiente:

1. **Cálculo del término de ajuste:** Se ha estimado un término de ajuste constante como el promedio de los elementos de la diagonal de la matriz de covarianza original, es decir $\frac{\sum x_{i,i}}{15}$ con $i = 1, \ldots, 15$ y $x_{i,j}$ cada elemento de la matriz. Después, este promedio se ha escalado mediante un factor de 10^{-2} para mantener el ajuste proporcional a la magnitud de los elementos de la matriz. El valor resultante es 0,026.

2. **Aplicación del ajuste:** Más tarde, sumamos el término de ajuste calculado (0,026) a cada elemento de la diagonal principal de la matriz de covarianza original.La matriz ajustada resultante es:
$$\Sigma_{\text{ajustada}} = \Sigma + \text{Ajuste} \cdot I$$
Donde I es la matriz identidad

   Esto lo que implica es aumentar las varianzas marginales de cada variable sin alterar las covarianzas fuera de la diagonal.

Por lo tanto, la matriz de covarianza ajustada, la que usaremos en el modelo y a la que a partir de ahora llamaremos Σ, es la siguiente:

	HOTEL DE LA VILLA OLIMPICA SA	GARGALLO HOTELS SL	EUROSTARS HOTEL COMPANY SL.	MAJESTIC HOTEL SPA SL	HOTEL FIRA S.A.	ZORAIDA SA	MARITIM CAMBRILS SA	HOTEL DORADO PLAYA SL	HOTEL CONDES 2015 SL.	GRAN VIA HOTEL BARCELONA SL.	HOTEL GRILL BARBERA SA	AC HOTEL SANTS SL	GAUDI HOTEL BARCELONA SL	HOTEL RIVOLI DE BARCELONA SA	EVENIA HOTELS SL
HOTEL DE LA VILLA OLIMPICA SA	115,97%	60,04%	165,61%	113,09%	-101,23%	74,59%	48,08%	67,28%	-15,05%	-15,69%	124,10%	-55,76%	105,51%	13,44%	84,04%
GARGALLO HOTELS SL	60,04%	240,92%	321,76%	304,72%	-106,59%	162,66%	235,76%	170,57%	23,67%	-33,81%	407,22%	-30,96%	235,47%	25,21%	166,80%
EUROSTARS HOTEL COMPANY SL.	165,61%	321,76%	526,69%	435,42%	-185,99%	263,64%	294,23%	260,09%	82,11%	-65,36%	512,31%	-81,34%	364,22%	42,90%	271,99%
MAJESTIC HOTEL SPA SL	113,09%	304,72%	435,42%	409,94%	-180,29%	211,14%	302,93%	218,26%	-7,47%	-40,73%	555,60%	-75,19%	314,45%	33,46%	220,35%
HOTEL FIRA S.A.	-101,23%	-106,59%	-185,99%	-180,29%	177,10%	-62,07%	-112,67%	-53,47%	98,18%	6,82%	-288,80%	153,78%	-126,49%	-11,81%	-69,56%
ZORAIDA SA	74,59%	162,66%	263,64%	211,14%	-62,07%	145,11%	145,34%	144,35%	71,62%	-36,11%	228,31%	3,87%	184,45%	22,59%	146,79%
MARITIM CAMBRILS SA	48,08%	235,76%	294,23%	302,93%	-112,67%	145,34%	249,47%	160,39%	-31,71%	-20,90%	446,64%	-19,83%	222,42%	21,87%	152,70%
HOTEL DORADO PLAYA SL	67,28%	170,57%	260,09%	218,26%	-53,47%	144,35%	160,39%	156,35%	50,63%	-30,38%	254,85%	38,49%	187,14%	22,14%	151,66%
HOTEL CONDES 2015 SL.	-15,05%	23,67%	82,11%	-7,47%	98,18%	71,62%	-31,71%	50,63%	285,27%	-56,04%	-191,94%	24,68%	40,50%	12,24%	52,83%
GRAN VIA HOTEL BARCELONA SL.	-15,69%	-33,81%	-65,36%	-40,73%	6,82%	-36,11%	-20,90%	-30,38%	-56,04%	19,10%	-16,14%	15,71%	-41,54%	-6,19%	-33,14%
HOTEL GRILL BARBERA SA	124,10%	407,22%	512,31%	555,60%	-288,80%	228,31%	446,64%	254,85%	-191,94%	-16,14%	896,00%	-111,95%	388,53%	34,97%	249,29%
AC HOTEL SANTS SL	-55,76%	-30,96%	-81,34%	-75,19%	153,78%	3,87%	-19,83%	38,49%	24,68%	15,71%	-111,95%	274,43%	-39,72%	-3,42%	14,52%
GAUDI HOTEL BARCELONA SL	105,51%	235,47%	364,22%	314,45%	-126,49%	184,45%	222,42%	187,14%	40,50%	-41,54%	388,53%	-39,72%	260,17%	29,47%	191,58%
HOTEL RIVOLI DE BARCELONA SA	13,44%	25,21%	42,90%	33,46%	-11,81%	22,59%	21,87%	22,14%	12,24%	-6,19%	34,97%	-3,42%	29,47%	6,27%	23,10%
EVENIA HOTELS SL	84,04%	166,80%	271,99%	220,35%	-69,56%	146,79%	152,70%	151,66%	52,83%	-33,14%	249,29%	14,52%	191,58%	23,10%	156,65%

Figura 6.5: Matriz de covarianzas.

También ha sido calculada la matriz de correlaciones cuya fórmula es $\text{Corr} = \frac{\text{Cov}(R_i, R_j)}{\sigma_i \cdot \sigma_j}$. La matriz se deja en el apéndice para comprobar la correlación entre los rendimientos de las empresas, ver en Figura 7.2. Las conclusiones que se han podido sacar son que el sector hotelero en general es un sector cíclico, por lo que en una época de recesión, la mayoría de hoteles tienen resultados malos, o incluso negativos, mientras que en un período de bonanza, a la mayoría de hoteles les va bien en términos de resultados de EBITDA.

6.4. Modelo Black-Litterman

Paso 1: Creencias Previas

Una vez calculados el vector de rendimientos esperados μ y la matriz de covarianzas Σ, nos disponemos como hemos visto en *Capítulo 3*, a calcular el portafolio de mercado w_m. Recordemos que el portafolio de mercado tiene como fórmula el vector de pesos:

$$w_m = \frac{\Sigma^{-1}(\mu - R_f 1)}{1^\top \Sigma^{-1}(\mu - R_f 1)}.$$

Para el rendimiento libre de riesgo R_f, se ha cogido el rendimiento de las letras del tesoro en España a doce meses, el cual es 2,63 % [Tes24]. Se ha cogido la del período de doce meses porque refleja mejor la tasa libre de riesgo durante un período más significativo, lo que es coherente con el análisis de carteras que suelen tener un horizonte de al menos un año. Además, son más comúnmente utilizadas como referencia en estudios financieros.

Aplicando la fórmula nos da que el portafolio de mercado es el siguiente:

	HOTEL DE LA VILLA OLIMPICA SA	GARGALLO HOTELS SL	EUROSTARS HOTEL COMPANY SL.	MAJESTIC HOTEL SPA SL	HOTEL FIRA S.A.	ZORAIDA SA	MARITIM CAMBRILS SA	HOTEL DORADO PLAYA SL	HOTEL CONDES 2015 SL.	GRAN VIA HOTEL BARCELONA SL.	HOTEL GRILL BARBERA SA	AC HOTEL SANTS SL	GAUDI HOTEL BARCELONA SL	HOTEL RIVOLI DE BARCELO NA SA	EVENIA HOTELS SL
m	16,16%	-16,31%	-20,27%	7,46%	-7,12%	27,50%	43,03%	-35,97%	19,18%	74,57%	-10,63%	-1,06%	9,68%	-21,15%	14,93%

Figura 6.6: Portafolio de mercado

Mediante este vector de pesos, podemos calcular el vector de rendimientos del portafolio de mercado μ_m y la varianza del portafolio de mercado σ_m^2, de la siguiente forma:

$$\mu_m = w_m^\top \cdot \mu$$

$$\sigma_m^2 = w_m^\top \cdot \Sigma \cdot w_m$$

Que nos lleva a los valores siguientes:

$$\mu_m = -0,353$$

$$\sigma_m^2 = 0,036$$

Debido a que ahora tenemos estos datos, ya podemos calcular el coeficiente de aversión al riesgo δ como en el *Capítulo 5*, es decir, por la siguiente fórmula:

$$\delta = \frac{(\mu_m - R_f)}{\sigma_m^2}$$

que nos da un coeficiente de aversión al riesgo de $-12,39$.

Ahora nuestro objetivo es calcular el vector de exceso de rendimientos en equilibrio antes también llamado como Π; que recordemos que hemos comentado que su expresión era la siguiente:

$$\Pi = \delta \Sigma w_m,$$

por lo que el vector aplicado a nuestro modelo sería:

	HOTEL DE LA VILLA OLIMPICA SA	GARGALLO HOTELS SL	EUROSTARS HOTEL COMPANY SL.	MAJESTIC HOTEL SPA SL	HOTEL FIRA S.A.	ZORAIDA SA	MARITIM CAMBRILS SA	HOTEL DORADO PLAYA SL	HOTEL CONDES 2015 SL.	GRAN VIA HOTEL BARCELONA SL.	HOTEL GRILL BARBERA SA	AC HOTEL SANTS SL	GAUDI HOTEL BARCELONA SL	HOTEL RIVOLI DE BARCELONA SA	EVENIA HOTELS SL
Π	-9,32%	11,55%	12,26%	2,05%	9,93%	-3,28%	-8,56%	18,18%	4,65%	-25,90%	4,43%	10,63%	1,68%	7,51%	0,35%

Figura 6.7: Vector de exceso de rendimientos en equilibrio Π

Sin embargo, este resultado presenta una interpretación problemática, ya que un coeficiente de aversión al riesgo negativo implica que los inversores, en promedio, preferirían un mayor riesgo incluso a expensas de un menor retorno, lo cual no es coherente con el comportamiento típico de los inversores.

Enfoque Alternativo

Dado que este resultado no resulta satisfactorio ni representativo, se ha optado por un enfoque que considera distintos valores de δ basados en perfiles de inversores comunes, diferenciados según su aversión al riesgo. De esta manera, se emplean cuatro escenarios típicos:

- **Inversor extremadamente tolerante al riesgo:** $\delta = 0,5$
- **Inversor tolerante al riesgo:** $\delta = 1$
- **Inversor moderado:** $\delta = 2$
- **Inversor más averso al riesgo:** $\delta = 5$

Esta aproximación permite incorporar una perspectiva más realista y flexible en el modelo, ajustando los resultados al perfil del inversor y facilitando así un análisis más interpretativo de las carteras.

Con estos nuevos coeficientes de aversión al riesgo, se ha calculado el vector de exceso de rendimientos Π para cada uno de ellos:

δ	0,5 Π	1 Π	2 Π	5 Π
HOTEL DE LA VILLA OLIMPICA SA	0,38%	0,75%	1,51%	3,76%
GARGALLO HOTELS SL	-0,47%	-0,93%	-1,86%	-4,66%
EUROSTARS HOTEL COMPANY SL.	-0,49%	-0,99%	-1,98%	-4,95%
MAJESTIC HOTEL SPA SL	-0,08%	-0,17%	-0,33%	-0,83%
HOTEL FIRA S.A.	-0,40%	-0,80%	-1,60%	-4,01%
ZORAIDA SA	0,13%	0,26%	0,53%	1,32%
MARITIM CAMBRILS SA	0,35%	0,69%	1,38%	3,46%
HOTEL DORADO PLAYA SL	-0,73%	-1,47%	-2,94%	-7,34%
HOTEL CONDES 2015 SL.	-0,19%	-0,38%	-0,75%	-1,88%
GRAN VIA HOTEL BARCELONA SL.	1,05%	2,09%	4,18%	10,45%
HOTEL GRILL BARBERA SA	-0,18%	-0,36%	-0,72%	-1,79%
AC HOTEL SANTS SL	-0,43%	-0,86%	-1,72%	-4,29%
GAUDI HOTEL BARCELONA SL	-0,07%	-0,14%	-0,27%	-0,68%
HOTEL RIVOLI DE BARCELONA SA	-0,30%	-0,61%	-1,21%	-3,03%
EVENIA HOTELS SL	-0,01%	-0,03%	-0,06%	-0,14%

Figura 6.8: Vector de exceso de rendimientos en equilibrio según δ

Paso 2: Visiones

Ahora lo que se va a implementar, es la característica diferenciadora del modelo de Black-Litterman respecto al resto de modelos; el añadido de las visiones del inversor al modelo.

Para ello, expondré mis visiones u opiniones acerca de la cartera de empresas y del sector hotelero en España, y más concretamente en Barcelona.

1. **Visión 1:** Los hoteles de lujo tendrán un rendimiento promedio superior al de los hoteles económicos. Habrá un incremento significativo debido a la alta recuperación del segmento de lujo, por lo que el retorno de estos últimos superará a los económicos en un 10 %.
$$q_1 = 10\,\%.$$
2. **Visión 2:** Los hoteles de gama media tendrán un rendimiento positivo debido a la expansión del turismo. Experimentarán una recuperación sólida, de alrededor de un 8 % respecto a años anteriores.
$$q_2 = 8\,\%.$$
3. **Visión 3:** Los hoteles de lujo tendrán un rendimiento promedio superior al de los hoteles de gama media. Tendrán un diferencial moderado dentro del contexto optimista, superándolos en 6 puntos porcentuales.
$$q_3 = 6\,\%.$$
4. **Visión 4:** El abaratamiento del turismo provocará que más personas opten por un hotel económico en lugar de uno de gama media. Por lo que habrá un aumento en la demanda de opciones económicas que supondrá un rendimiento superior al de la gama media en 4 puntos porcentuales.
$$q_4 = 4\,\%.$$
5. **Visión 5:** Los hoteles con menor deuda neta en 2023 (TOP 3) tendrán mejor rendimiento. Para ser más precisos, los de menor deuda neta tendrán un 9 % de mayor rendimiento que el resto.
$$q_5 = 9\,\%.$$
6. **Visión 6:** Los hoteles con mayor deuda neta en 2023 (TOP 3) tendrán peor rendimiento. En particular, tendrán un rendimiento de 4 puntos porcentuales menor (-4 %).
$$q_6 = -4\,\%.$$
7. **Visión 7:** Los hoteles con mayor margen EBITDA (EBITDA/Operating Revenue) en 2023 (TOP 3) tendrán mejor rendimiento. En particular, debido a la alta rentabilidad operativa de estas empresas, se espera que superen en un 10 % al resto de los activos de la cartera.
$$q_7 = 10\,\%.$$
8. **Visión 8:** Los hoteles con mayor liquidez (Cash/Long-term Debt) en 2023 (TOP 3) tendrán mejor rendimiento y menor riesgo. Debido al menor riesgo, se espera que superen en un 8 % al resto de activos de la cartera.
$$q_8 = 8\,\%.$$

9. **Visión 9:** Los hoteles con menor apalancamiento operativo (Deuda Neta/EBITDA) en 2023 (TOP 3) tendrán mejor rendimiento. El menor riesgo financiero provocará una alta rentabilidad superando en un 11 % al resto de activos.

$$q_9 = 11\,\%.$$

Para el cáculo de la matriz de visiones P, se ha procedido de la misma manera que se ha comentado en la *Sección 5.2* :

- Si es una visión absoluta, se asigna un peso de 1 al activo correspondiente y 0 a los demás; y si la visión es compartida por 5 activos,por ejemplo, entonces se asigna $1/5 = 0,2$ a cada activo.
- Por otra parte, si la visión es relativa, se asigna un peso de 1 al activo dominante y -1 al activo que es dominado; y lo mismo, si hay 5 activos dominantes y 5 dominados, el peso de cada activo dominante será $1/5 = 0,2$ y el peso de cada activo dominado será $-1/5 = -0,2$.

Matriz P y vector q

La matriz P, que representa las visiones del modelo, está definida como:

$$P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2 & -0.2 & -0.2 & -0.2 & -0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & -0.2 & -0.2 & -0.2 & -0.2 & -0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2 & -0.2 & -0.2 & -0.2 & -0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0.33 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.33 & 0 & 0.33 \\ -0.33 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.33 & 0 & 0 & -0.33 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.33 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.33 & 0.33 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.33 & 0.33 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.33 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.33 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.33 & 0 & 0 & 0.33 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El vector q, que representa los incrementos esperados, está definido como:

$$q = \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}08 \\ 0{,}06 \\ 0{,}04 \\ 0{,}09 \\ -0{,}04 \\ 0{,}1 \\ 0{,}08 \\ 0{,}11 \end{pmatrix}$$

Una vez definidas estas variables, el cálculo de la matriz Ω requiere la estimación del parámetro τ, que representa el nivel de incertidumbre asociado a las creencias del mercado. Este parámetro regula el peso relativo entre las visiones del inversor y los rendimientos históricos del mercado, determinando así la confianza que se otorga a cada fuente de información.

En nuestro caso particular, al trabajar con empresas no cotizadas y tener que aplicar métodos de valoración de empresas para poder aplicar los rendimientos anuales, se ha considerado oportuno otorgar un peso significativo a las visiones del inversor. Esta decisión no solo responde a las características particulares de nuestro análisis, sino que también al modelo, que da especial relevancia a las opiniones del inversor.

Dicho esto, se ha considerado que el parámetro τ sea 0,1, porque así el modelo le dará más importancia a las visiones que a los rendimientos del mercado, pues recordando la fórmula de los rendimientos esperados del modelo:

$$\mu_{BL} = ((\tau\Sigma)^{-1} + P^\top \Omega^{-1} P)^{-1}((\tau\Sigma)^{-1}\Pi + P^\top \Omega^{-1} q)$$

vemos que $(\tau\Sigma)^{-1}\Pi$ representa las creencias implícitas del mercado, ajustadas por la incertidumbre Σ y escaladas por τ, mientras que $P^\top \Omega^{-1} q$ representa las visiones del inversor, ajustadas por la matriz de incertidumbre de las visiones Ω (esta parte no depende de τ.

Por lo tanto, si τ es pequeño, $(\tau\Sigma)^{-1}$ tiene valores mayores, lo que amplifica la incertidumbre del mercado, y por tanto, esto reduce el impacto de Π y permite que $P^\top \Omega^{-1} q$(las visiones) domine la combinación.

Con todo esto, el cálculo de la matriz Ω se efectua de la siguiente forma:

$$\Omega = diag(P(\tau\Sigma)P^\top).$$

Resultando en:

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0{,}01952 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}06599 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}02184 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}03815 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}20505 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}04528 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}11816 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}10812 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}04528 \end{pmatrix}$$

Paso 3: Integración de las visiones al modelo

Una vez obtenidos todos los elementos del modelo, ya es posible efectuar su aplicación. Para ello, resolveremos las ecuaciones (5.3.1) y (5.3.2).

Primero calculamos el vector de rendimientos esperados posterior μ_{BL}:

$$\mu_{BL} = \begin{pmatrix} 0{,}0463 \\ 0{,}2727 \\ 0{,}4379 \\ 0{,}2535 \\ -0{,}0471 \\ 0{,}1163 \\ 0{,}0480 \\ 0{,}3103 \\ 0{,}1254 \\ -0{,}2998 \\ 0{,}2769 \\ -0{,}0334 \\ 0{,}2192 \\ 0{,}0991 \\ 0{,}1486 \end{pmatrix}$$

Por otro lado, nos percatamos de que Σ_{BL}, no depende de Π, es decir, no depende de δ, la calculamos:

Σ_BL	HOTEL DE LA VILLA OLIMPICA SA	GARGALLO HOTELS SL	EUROSTARS HOTEL COMPANY SL.	MAJESTIC HOTEL SPA SL	HOTEL FIRA S.A.	ZORAIDA SA	MARITIM CAMBRILS SA	HOTEL DORADO PLAYA SL	HOTEL CONDES 2015 SL.	GRAN VIA HOTEL BARCELONA SL.	HOTEL GRILL BARBERA SA	AC HOTEL SANTS SL	GAUDI HOTEL BARCELONA SL	HOTEL RIVOLI DE BARCELONA SA	EVENIA HOTELS SL
HOTEL DE LA VILLA OLIMPICA SA	0,0608	-0,0132	0,0387	0,0038	-0,0304	0,0186	-0,0217	0,0136	-0,0024	-0,0044	-0,0202	-0,0093	0,0189	0,0040	0,0240
GARGALLO HOTELS SL	-0,0132	0,0484	0,0431	0,0504	-0,0083	0,0214	0,0457	0,0221	0,0169	-0,0075	0,0702	-0,0140	0,0335	0,0030	0,0184
EUROSTARS HOTEL COMPANY SL.	0,0387	0,0431	0,0982	0,0611	-0,0262	0,0507	0,0293	0,0455	0,0464	-0,0184	0,0419	-0,0165	0,0617	0,0088	0,0512
MAJESTIC HOTEL SPA SL	0,0038	0,0504	0,0611	0,0669	-0,0320	0,0260	0,0500	0,0244	0,0041	-0,0081	0,0922	-0,0370	0,0442	0,0041	0,0240
HOTEL FIRA S.A.	-0,0304	-0,0083	-0,0262	-0,0320	0,0772	0,0061	-0,0120	0,0155	0,0507	-0,0019	-0,0710	0,0989	-0,0143	-0,0004	0,0065
ZORAIDA SA	0,0186	0,0214	0,0507	0,0260	0,0061	0,0360	0,0119	0,0335	0,0406	-0,0112	0,0015	0,0242	0,0333	0,0053	0,0346
MARITIM CAMBRILS SA	-0,0217	0,0457	0,0293	0,0500	-0,0120	0,0119	0,0540	0,0149	-0,0065	-0,0020	0,0891	-0,0163	0,0263	0,0011	0,0091
HOTEL DORADO PLAYA SL	0,0136	0,0221	0,0455	0,0244	0,0155	0,0335	0,0149	0,0397	0,0359	-0,0089	0,0034	0,0448	0,0315	0,0048	0,0358
HOTEL CONDES 2015 SL.	-0,0024	0,0169	0,0464	0,0041	0,0507	0,0406	-0,0065	0,0359	0,1248	-0,0245	-0,0749	0,0418	0,0276	0,0073	0,0365
GRAN VIA HOTEL BARCELONA SL.	-0,0044	-0,0075	-0,0184	-0,0081	-0,0019	-0,0112	-0,0020	-0,0089	-0,0245	0,0088	0,0061	0,0025	-0,0112	-0,0021	-0,0102
HOTEL GRILL BARBERA SA	-0,0202	0,0702	0,0419	0,0922	-0,0710	0,0015	0,0891	0,0034	-0,0749	0,0061	0,2017	-0,0878	0,0382	-0,0007	-0,0019
AC HOTEL SANTS SL	-0,0093	-0,0140	-0,0165	-0,0370	0,0989	0,0242	-0,0163	0,0448	0,0418	0,0025	-0,0878	0,1891	-0,0058	0,0010	0,0326
GAUDI HOTEL BARCELONA SL	0,0189	0,0335	0,0617	0,0442	-0,0143	0,0333	0,0263	0,0315	0,0276	-0,0112	0,0382	-0,0058	0,0439	0,0055	0,0334
HOTEL RIVOLI DE BARCELONA SA	0,0040	0,0030	0,0088	0,0041	-0,0004	0,0053	0,0011	0,0048	0,0073	-0,0021	-0,0007	0,0010	0,0055	0,0035	0,0054
EVENIA HOTELS SL	0,0240	0,0184	0,0512	0,0240	0,0065	0,0346	0,0091	0,0358	0,0365	-0,0102	-0,0019	0,0326	0,0334	0,0054	0,0398

Figura 6.9: Matriz de covarianzas posterior

Todo esto nos lleva a poder calcular el propósito del modelo, el vector de pesos de la cartera óptima que como hemos visto en la *Sección 5.4* recordemos que es:

$$w^* = \frac{1}{\delta}\Sigma_{\mathrm{BL}}^{-1}\mu_{\mathrm{BL}},$$

Por lo tanto, con la δ del modelo (-12,39), se ha procedido a normalizar el vector de pesos para garantizar que la suma sea igual al 100 %.

w*	w* normalizado
139,99%	14,78%
-176,98%	-18,69%
-215,37%	-22,74%
61,93%	6,54%
-85,91%	-9,07%
277,20%	29,27%
423,24%	44,69%
-355,55%	-37,54%
195,93%	20,69%
740,99%	78,24%
-101,71%	-10,74%
-3,99%	-0,42%
99,88%	10,55%
-207,19%	-21,88%
154,67%	16,33%

Estos resultados presentan ciertas inconsistencias que hacen que no sean directamente interpretables o útiles para este análisis. Por ejemplo, no es razonable que el primer activo, que tenía un rendimiento histórico negativo, reciba un peso superior al de otros activos con tasas de crecimiento anual compuesto (CAGR) positivas. Esta incongruencia se debe a que el parámetro δ, que representa la aversión al riesgo del inversor, es negativo. Este hecho introduce un sesgo en la asignación de pesos.

Se comentará en la alternativa a esta situación el motivo de la existencia de pesos negativos, y cómo solucionarlo.

Alternativa

Para resolver esta situación, seguiremos como antes, con diferentes coeficientes de aversión al riesgo δ, según el perfil del inversor. En función de este ajuste, se analizarán distintos escenarios que abarquen desde los más aversos al riesgo hasta los más tolerantes.

Volviendo a la implementación de las fórmulas (5.3.1) y (5.3.2), pero esta vez para $\delta = \frac{1}{2}, 1, 2, 5$. Como hemos comentado, la matriz Σ_{BL} permanece constante respecto al enfoque anterior, porque no depende de δ (pues no está relacionada con las expectativas del inversor, representadas por Π); por lo tanto, solo hará falta modificar los nuevos μ_{BL} en función de δ:

δ	0,5 μ	1 μ	2 μ	5 μ
HOTEL DE LA VILLA OLIMPICA SA	0,1155	0,1182	0,1235	0,1396
GARGALLO HOTELS SL	0,1283	0,1227	0,1115	0,0780
EUROSTARS HOTEL COMPANY SL.	0,2540	0,2469	0,2326	0,1898
MAJESTIC HOTEL SPA SL	0,1973	0,1951	0,1908	0,1777
HOTEL FIRA S.A.	-0,1366	-0,1401	-0,1470	-0,1679
ZORAIDA SA	0,1148	0,1147	0,1146	0,1142
MARITIM CAMBRILS SA	0,1099	0,1123	0,1171	0,1315
HOTEL DORADO PLAYA SL	0,0865	0,0778	0,0605	0,0084
HOTEL CONDES 2015 SL.	0,0471	0,0441	0,0380	0,0198
GRAN VIA HOTEL BARCELONA SL.	-0,0286	-0,0181	0,0029	0,0660
HOTEL GRILL BARBERA SA	0,2071	0,2044	0,1990	0,1828
AC HOTEL SANTS SL	-0,1459	-0,1503	-0,1590	-0,1852
GAUDI HOTEL BARCELONA SL	0,1646	0,1624	0,1582	0,1455
HOTEL RIVOLI DE BARCELONA SA	0,0165	0,0133	0,0069	-0,0124
EVENIA HOTELS SL	0,1120	0,1106	0,1077	0,0992

Y ahora, como antes, aplicamos la fórmula de la *Sección 5.4* para calcular el vector de pesos:

	inversores extremadamente tolerantes al riesgo	tolerantes al riesgo	inversor moderado	inversor más averso al riesgo
δ	0,5	1	2	5
	697,25%	429,43%	295,52%	215,17%
	180,95%	8,93%	-77,08%	-128,69%
	112,12%	-45,27%	-123,97%	-171,19%
	389,42%	232,02%	153,33%	106,11%
	292,90%	110,84%	19,81%	-34,80%
	221,01%	248,02%	261,52%	269,62%
	604,19%	517,23%	473,74%	447,65%
	-463,06%	-411,39%	-385,56%	-370,05%
	88,42%	140,09%	165,92%	181,42%
	863,25%	804,49%	775,11%	757,48%
	-219,92%	-163,10%	-134,70%	-117,66%
	-173,52%	-92,05%	-51,31%	-26,87%
	19,50%	58,13%	77,45%	89,04%
	-318,02%	-264,75%	-238,12%	-222,14%
	15,58%	82,43%	115,85%	135,90%

En este trabajo nos centraremos en los inversores que tienen **perfil moderado** ($\delta = 2$) y los que son **más aversos al riesgo** ($\delta = 5$), ya que en carteras bien diversificadas, el inversor suele desear aprovechar las oportunidades de mercado sin asumir una volatilidad excesiva.

Es por eso, que calcularemos los vectores de pesos normalizados para estos dos perfiles de inversor:

	w normalizado	w normalizado
δ	2	5
	22,26%	19,02%
	-5,81%	-11,38%
	-9,34%	-15,14%
	11,55%	9,38%
	1,49%	-3,08%
	19,70%	23,84%
	35,69%	39,58%
	-29,04%	-32,72%
	12,50%	16,04%
	58,39%	66,97%
	-10,15%	-10,40%
	-3,86%	-2,38%
	5,83%	7,87%
	-17,94%	-19,64%
	8,73%	12,02%

Si nos fijamos, en estos vectores de pesos, hay ciertos valores negativos, que reflejan ventas en corto de los activos.

La venta en corto implica tomar una posición inversa en un activo, es decir, venderlo con la expectativa de que su precio disminuirá en el futuro, permitiendo así recomprarlo a un precio inferior y obtener una ganancia.

En este caso, los pesos negativos destacan aquellos activos en los que el modelo Black-Litterman sugiere tomar una posición corta, como consecuencia de la combinación de la matriz de covarianza ajustada (Σ_{BL}) y las visiones reflejadas en μ_{BL}. La magnitud y el número de ventas en corto aumentan conforme disminuye la aversión al riesgo (δ más bajo), reflejando una mayor disposición del inversor a tomar riesgos. Los pesos negativos deberían interpretarse como una indicación de que el **modelo sugiere reducir la exposición** a estos activos.

Debido a que todas las empresas que conforman la cartera son activos no cotizados, no es posible venderlas en corto ya que no existe un mercado secundario organizado donde estas acciones puedan ser negociadas de forma abierta. Además, las acciones de empresas no cotizadas están generalmente en manos de un número reducido de propietarios, como fundadores o inversores privados, quienes no suelen permitir el préstamo de sus participaciones para este tipo de operaciones. Además, la falta de un precio de mercado continuo y de liquidez dificulta aún más cualquier intento de implementar una estrategia de venta en corto.

Es por ello, que a estos dos vectores de pesos resultantes, les aplicaremos dos restricciones:

- El peso de cada activo en la cartera deberá ser mayor o igual que 0.
- La suma de los pesos de todos los elementos del vector, deberá ser 1

Aplicando estas restricciones en excel a través de la función *Solver*, en la cuál se establece como objetivo minimizar la desviación cuadrada total de la cartera, obtenemos las siguiente carteras con sus respectivos rendimientos, varianzas y desviaciones estándar:

	Peso δ=2 sin ventas corto	Peso δ=5 sin ventas corto
HOTEL DE LA VILLA OLIMPICA SA	0,00%	0,00%
GARGALLO HOTELS SL	23,89%	21,40%
EUROSTARS HOTEL COMPANY SL.	23,86%	22,32%
MAJESTIC HOTEL SPA SL	8,27%	0,05%
HOTEL FIRA S.A.	22,19%	18,33%
ZORAIDA SA	0,00%	0,00%
MARITIM CAMBRILS SA	0,00%	0,00%
HOTEL DORADO PLAYA SL	15,73%	25,42%
HOTEL CONDES 2015 SL.	0,00%	0,00%
GRAN VIA HOTEL BARCELONA SL.	0,00%	0,00%
HOTEL GRILL BARBERA SA	0,00%	0,00%
AC HOTEL SANTS SL	4,33%	9,03%
GAUDI HOTEL BARCELONA SL	0,00%	0,00%
HOTEL RIVOLI DE BARCELONA SA	1,72%	3,45%
EVENIA HOTELS SL	0,00%	0,00%

Retorno de la cartera δ=2	6,80%
Retorno de la cartera δ=5	1,34%
Varianza de la cartera delta=2	2,70%
Varianza de la cartera delta=5	2,86%
Desviación estándar delta=2	16,42%
Desviación estándar delta=5	16,90%

Como podemos observar, a mayor δ, es decir, cuando el inversor es más averso al riesgo y, por lo tanto más conservador, menor es el retorno.

Capítulo 7

Conclusiones

Una vez terminado el estudio, paso a resumir brevemente las principales conclusiones que de él se desprenden.

En primer lugar, me gustaría comentar que existen dos factores, fundamentalmente, que complican la inversión en empresas del sector hotelero en Barcelona: (i) De un lado, la importante cantidad de capital necesario que tales inversiones precisan. (ii) De otro lado, la falta de accesibilidad y las dificultades para invertir en ellas, pues son empresas que no cotizan en mercados de valores, limitándose así las opciones de inversión directa. No obstante, existen varias vías indirectas para invertir en hoteles, como ya se ha comentado.

En segundo lugar, partiendo de la base de la diferente categorización de las empresas hoteleras, el presente trabajo presenta una visión limitada. En efecto, es cierto que existen empresas hoteleras que cubren un único segmento del mercado (por ejemplo, aquellas que solo se dedican al sector de lujo, las que solo se dedican a segmentos más económicos, etc.). Sin embargo, se ha podido corroborar que, en la práctica, existen infinidad de empresas hoteleras que ofrecen una gama de opciones mucho más amplia, combinando hoteles de cinco estrellas, con otros de categoría inferior. Por dicho motivo, siendo plenamente conscientes de dicha limitación, se ha optado por una simplificación del modelo basado en la categorización por el nivel de facturación e ingresos. Si se quisiera hacer un análisis más exhaustivo, habría que complementar nuestro estudio con diferentes estrategias (por ejemplo, segregar cada empresa hotelera según sus diferentes segmentos y categorías, o si adoptan una estrategia más amplia, etc.).

En tercer lugar, tras la realización de este trabajo nos hemos percatado de que la aplicación de los modelos de gestión de carteras debe ser complementado con un análisis macroeconómico. Como hemos podido observar, factores externos (e.g. la crisis del COVID-19) tuvieron un impacto significativo en los rendimientos anuales de los hoteles, lo que subraya la necesidad de incorporar variables macroeconómicas para entender mejor los riesgos y oportunidades del sector.

En cuarto lugar, otro aspecto a destacar en la realización de este trabajo ha sido haber optado por utilizar el método del múltiplo EBITDA para la valoración de las empresas hoteleras. Sin embargo, de nuevo soy plenamente consciente de que, ni es este el único método disponible, ni necesariamente el más adecuado en todos los casos. Existen otras metodologías, como los flujos de caja descontados (DCF), el método de valoración por activos netos, o incluso enfoques más recientes basados en métricas específicas del sector, como el ingreso por habitación disponible (RevPAR). Por ello, sería interesante explorar en futuros estudios cómo el uso de otros métodos de valoración podría complementar o incluso mejorar los resultados obtenidos en este limitado análisis.

Y terminamos nuestras conclusiones indicando el resultado obtenido por dos carteras diseñadas en función del estilo de inversor. Para los inversores más tolerantes al riesgo, la cartera presenta un retorno esperado del 6,8 % y una desviación del 16,42 %, lo que puede ser atractivo para el inversor, aunque implica una volatilidad considerable. Mientras que, para los inversores más adversos al riesgo, el retorno esperado es del 1,34 % con una desviación ligeramente inferior, del 15,9 %, lo que parece poco compensatorio, ya que el riesgo asumido no justifica la rentabilidad obtenida. Por ello, en principio, el modelo premia más al que tolera el riesgo, aunque plantea la cuestión de si el sector hotelero en Barcelona realmente ofrece una relación riesgo-rendimiento adecuada frente a otras opciones más estables.

También destacamos que este trabajo debería ir acompañado de un análisis fundamental de los activos que se vayan a incluir en el fondo, lo que nos permitiría obtener una visión más precisa sobre el futuro de las empresas, sus posibles rendimientos y los planes estratégicos que puedan implementar.

En conclusión, aunque el modelo muestra que los inversores más tolerantes al riesgo obtienen mayores retornos con una pequeña variación en el riesgo, también refleja la volatilidad del sector hotelero en Barcelona. Este resultado, resalta la necesidad de un seguimiento constante de las condiciones del mercado y factores externos como cambios regulatorios o crisis económicas. Mirando hacia el futuro, sería interesante considerar otros tipos de riesgos, como el geopolítico, y profundizar en el análisis de cómo se relacionan los distintos activos entre sí. Esto podría ayudar a mejorar la diversificación y a reducir el riesgo sin comprometer la rentabilidad.

Bibliografía

[CK14] Maciej J. Capiński and Ekkehard Kopp, *Portfolio theory and risk management*, Mastering Mathematical Finance, Cambridge University Press, 2014.

[FL06] Jianqing Fan and Runze Li, *Shrinkage estimators: An overview*, Journal of the American Statistical Association **101** (2006), no. 476, 1398–1410.

[Inf24] Infront Analytics, *NH Hotel Group SA: Beta and Valuation Multiples*, `https://www.infrontanalytics.com/fe-ES/30032EE/NH-Hotel-Group-SA/beta`, 2024.

[Man06] Charlotta Mankert, *The BLACK-LITTERMAN model : mathematical and behavioral finance approaches towards its use in practice.*

[Mar52] Harry Markowitz, *Portfolio selection*, The Journal of Finance **7** (1952), no. 1, 77–91.

[Sig05] Karl Sigman, *4700-07-notes-capm*, `https://www.columbia.edu/~ks20/FE-Notes/4700-07-Notes-CAPM.pdf`, 2005.

[SS00] Stephen Satchell and Alan Scowcroft, *A demystification of the BLACK–LITTERMAN model: Managing quantitative and traditional portfolio construction*, Journal of Asset Management **1** (2000).

[Tes24] Tesoro Público de España, *Letras del tesoro a 12 meses*, noviembre 2024, Última consulta: 5 de noviembre de 2024.

[Wal11] Jay Walters, *The BLACK-LITTERMAN model in detail*, SSRN Electronic Journal (2011).

Apéndice

Nombre empresa	Current liabilities 2023	Current liabilities 2022	Current liabilities 2021	Current liabilities 2020	Current liabilities 2019	Current liabilities 2018	Long-term debt 2023	Long-term debt 2022	Long-term debt 2021	Long-term debt 2020	Long-term debt 2019	Long-term debt 2018	Cash & cash equivalent 2023	Cash & cash equivalent 2022	Cash & cash equivalent 2021	Cash & cash equivalent 2020	Cash & cash equivalent 2019	Cash & cash equivalent 2018	Deuda Neta 2023	Deuda Neta 2022	Deuda Neta 2021	Deuda Neta 2020	Deuda Neta 2019	Deuda Neta 2018
HOTEL DE LA VILLA OLIMPICA	17.851.535	231.624.907	12.895.766	12.626.428	11.467.571	11.346.125	215.731.157	2.892.266	197.540.984	196.121.325	219.477.554	218.479.365	42.954.891	25.298.709	5.419.384	17.367.360	45.778.777	22.171.627	190.627.801	209.218.464	205.017.366	191.380.393	185.166.348	207.653.863
GARGALLO HOTELS SL	5.979.894	7.574.741	6.321.132	5.794.431	9.401.654	8.365.021	2.710.437	5.686.049	7.320.807	7.818.753	1.935.948	3.072.025	13.179.855	483.879	1.169.972	326.266	2.718.901	370.506	-4.489.525	12.776.911	12.471.967	13.286.917	8.618.702	11.066.540
EUROSTARS HOTEL COMPANY SL.	11.544.180	10.806.543	7.913.917	7.124.873	7.220.067	7.498.668	695.113	585.558	600.334	556.566	722.760	1.585.071	9.809	298.434	12.392	26.648	4.813	11.908	12.229.484	11.093.667	8.501.859	7.654.791	7.938.014	9.071.831
MAJESTIC HOTEL SPA SL	9.857.681	9.744.893	7.073.412	3.194.503	5.876.219	6.616.959	5.909.726	4.078.421	5.876.622	7.252.654	2.988.017	3.074.198	1.685.961	2.961.590	4.204.562	7.496.844	5.732.588	4.691.522	14.081.446	10.861.724	8.745.472	2.950.313	3.131.648	4.999.635
HOTEL FIRA S.A.	11.210.359	12.646.315	19.006.292	6.523.033	8.059.134	6.176.416	6.886	6.886	6.886	6.886	6.886	21.886	80.400	106.776	23.329	30.715	57.668	56.806	11.136.845	12.546.425	18.989.848	6.499.203	8.008.353	6.141.496
ZORAIDA SA	905.414	986.817	1.516.594	2.150.736	1.430.690	1.290.072	35.762	49.587	1.770.212	4.104.000	495.372	767.594	401.229	3.373.475	3.279.194	3.120.251	434.757	557.356	539.947	-2.337.071	7.612	3.134.485	1.491.305	1.500.309
MARITIM CAMBRILS SA	4.367.760	4.330.160	4.300.710	4.634.670	2.969.200	2.947.900	22.437.230	24.870.160	27.655.930	28.056.220	3.453.840	7.227.930	54.290	670.630	664.480	86.570	84.430	139.430	26.750.700	28.529.690	31.292.160	32.604.320	6.338.610	10.036.400
HOTEL DORADO PLAYA SL	4.503.123	3.826.425	4.529.092	2.664.020	4.148.636	3.590.082	8.540.548	11.175.513	14.578.374	16.399.943	14.332.492	16.505.942	2.381.585	2.029.958	3.033.521	1.512.939	1.122.393	106.196	10.662.086	12.971.980	16.073.945	17.551.023	17.358.735	19.989.828
HOTEL CONDES 2015 SL.	1.767.413	1.194.274	1.042.098	2.018.169	2.085.845	6.031.361	543.314	277.266	374.357	467.884	561.411	270.000	2.309.951	520.309	148.758	1.255.052	2.616.000	136.581	775	951.230	1.267.697	1.231.002	31.256	6.164.780
GRAN VIA HOTEL BARCELONA SL.	5.341.986	4.893.606	4.316.650	4.900.933	4.659.771	4.203.132	43.583.520	62.782.300	63.078.819	60.090.737	59.918.886	49.531.886	1.681.577	982.520	677.461	1.087.446	2.595.646	226.417	47.243.928	66.693.386	66.718.009	63.904.225	61.983.011	53.508.600
HOTEL GRILL BARBERA SA	1.184.371	1.571.214	816.414	649.084	898.223	664.079	2.326	0	0	0	0	0	242.523	83.756	44.056	18.322	83.184	33.903	944.174	1.487.458	772.357	630.762	815.039	630.177
AC HOTEL SANTS SL	1.295.246	1.087.728	1.433.633	1.109.464	287.390	508.639	458.509	760.728	799.927	75.477	0	0	218.919	314.569	217.637	109.532	159.974	566.425	1.534.836	1.533.887	2.015.923	1.075.409	127.416	-57.786
GAUDI HOTEL BARCELONA SL	580.441	369.045	391.394	204.995	773.528	639.064	126.321	110.050	116.749	107.792	160.623	128.821	758.776	1.038.840	692.277	215.004	1.649.983	1.070.555	-52.014	-559.744	-184.134	97.783	-715.831	-302.670
HOTEL RIVOLI DE BARCELONA SA	370.244	168.241	263.761	235.082	267.287	313.786	1.167.751	2.191.215	3.011.433	3.030.005	3.765.842	4.132.974	89.074	82.321	24.669	53.256	68.542	24.552	1.448.921	2.277.135	3.250.525	3.211.831	3.964.587	4.422.209
EVENIA HOTELS SL	400.953	534.506	214.433	176.185	293.177	266.607	198.127	261.768	324.406	419.309	7.397	11.309	1.254.795	1.926.837	872.563	130.559	645.857	730.459	-655.715	-1.130.563	-333.725	464.936	-345.283	-452.542

Figura 7.1: Cálculo de deuda neta

	HOTEL DE LA VILLA OLIMPICA SA	GARGALLO HOTELS SL	EUROSTARS HOTEL COMPANY SL.	MAJESTIC HOTEL SPA SL	HOTEL FIRA S.A.	ZORAIDA SA	MARITIM CAMBRILS SA	HOTEL DORADO PLAYA SL	HOTEL CONDES 2015 SL.	GRAN VIA HOTEL BARCELONA SL.	HOTEL GRILL BARBERA SA	AC HOTEL SANTS SL	GAUDI HOTEL BARCELONA SL	HOTEL RIVOLI DE BARCELONA SA	EVENIA HOTELS SL
HOTEL DE LA VILLA OLIMPICA SA	100,00%	35,92%	67,01%	51,87%	-70,64%	57,50%	28,26%	49,97%	-8,28%	-33,34%	38,50%	-31,25%	60,74%	49,87%	62,35%
GARGALLO HOTELS SL	35,92%	100,00%	90,33%	96,96%	-51,60%	86,99%	96,17%	87,89%	9,03%	-49,84%	87,65%	-12,04%	94,05%	64,89%	85,86%
EUROSTARS HOTEL COMPANY SL.	67,01%	90,33%	100,00%	93,71%	-60,90%	95,36%	81,17%	90,64%	21,18%	-65,16%	74,58%	-21,39%	98,39%	74,67%	94,69%
MAJESTIC HOTEL SPA SL	51,87%	96,96%	93,71%	100,00%	-66,91%	86,57%	94,73%	86,21%	-2,18%	-46,03%	91,67%	-22,42%	96,28%	66,03%	86,95%
HOTEL FIRA S.A.	-70,64%	-51,60%	-60,90%	-66,91%	100,00%	-38,72%	-53,60%	-32,13%	43,68%	11,73%	-72,50%	69,75%	-58,93%	-35,46%	-41,76%
ZORAIDA SA	57,50%	86,99%	95,36%	86,57%	-38,72%	100,00%	76,39%	95,83%	35,20%	-68,60%	63,32%	1,94%	94,93%	74,92%	97,36%
MARITIM CAMBRILS SA	28,26%	96,17%	81,17%	94,73%	-53,60%	76,39%	100,00%	81,21%	-11,89%	-30,27%	94,47%	-7,58%	87,30%	55,32%	77,24%
HOTEL DORADO PLAYA SL	49,97%	87,89%	90,64%	86,21%	-32,13%	95,83%	81,21%	100,00%	23,97%	-55,59%	68,09%	18,58%	92,79%	70,72%	96,91%
HOTEL CONDES 2015 SL.	-8,28%	9,03%	21,18%	-2,18%	43,68%	35,20%	-11,89%	23,97%	100,00%	-75,92%	-37,97%	8,82%	14,87%	28,95%	24,99%
GRAN VIA HOTEL BARCELONA SL.	-33,34%	-49,84%	-65,16%	-46,03%	11,73%	-68,60%	-30,27%	-55,59%	-75,92%	100,00%	-12,34%	21,70%	-58,93%	-56,55%	-60,58%
HOTEL GRILL BARBERA SA	38,50%	87,65%	74,58%	91,67%	-72,50%	63,32%	94,47%	68,09%	-37,97%	-12,34%	100,00%	-22,58%	80,47%	46,68%	66,54%
AC HOTEL SANTS SL	-31,25%	-12,04%	-21,39%	-22,42%	69,75%	1,94%	-7,58%	18,58%	8,82%	21,70%	-22,58%	100,00%	-14,86%	-8,25%	7,00%
GAUDI HOTEL BARCELONA SL	60,74%	94,05%	98,39%	96,28%	-58,93%	94,93%	87,30%	92,79%	14,87%	-58,93%	80,47%	-14,86%	100,00%	72,99%	94,90%
HOTEL RIVOLI DE BARCELONA SA	49,87%	64,89%	74,67%	66,03%	-35,46%	74,92%	55,32%	70,72%	28,95%	-56,55%	46,68%	-8,25%	72,99%	100,00%	73,73%
EVENIA HOTELS SL	62,35%	85,86%	94,69%	86,95%	-41,76%	97,36%	77,24%	96,91%	24,99%	-60,58%	66,54%	7,00%	94,90%	73,73%	100,00%

Figura 7.2: Matriz de correlaciones