



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

TEORIA EVOLUTIVA DE JOCS I APLICACIONS

Autor: Cloe Solé Narro

Director: Dr. Xavier Jarque

Realitzat a: Dept. de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 12 de gener de 2025

Abstract

Evolutionary Game Theory is a field of applied mathematics focused on modeling the strategic behavior of individuals or populations interacting in dynamic environments. This work connects fundamental concepts from classical game theory, such as Nash equilibrium, with tools from evolutionary game theory, including evolutionarily stable strategies (ESS) and the replicator equation. The analysis focuses on non-cooperative, static games with complete information to examine how strategies evolve within a population based on their relative fitness.

In this framework, the study introduces a model involving two communities, each consisting of $N/2$ individuals, while incorporating an additional variable to represent the environment as a key factor influencing population dynamics. The eco-evolutionary model is examined under different symmetry assumptions, exploring the stability of the resulting equilibria.

This approach provides a theoretical perspective that can be applied to fields such as ecology or sociology, laying the groundwork for future research on more complex models and scenarios involving multiple interactions.

Resum

La teoria de jocs evolutiva és una branca de la matemàtica aplicada que modelitza el comportament estratègic d'individus o poblacions que interaccionen en contextos dinàmics. Aquest treball relaciona conceptes fonamentals de la teoria de jocs clàssica, com l'equilibri de Nash, amb eines de la teoria de jocs evolutiva, com les estratègies evolutivament estables (ESS) i l'equació replicadora. S'estudien jocs no cooperatius, estàtics i amb informació completa per analitzar l'evolució de les estratègies dins d'una població en funció de la seva aptitud relativa.

En aquest context, es planteja un model que considera dues comunitats amb $N/2$ individus cadascuna, incorporant una variable addicional per representar l'entorn com un factor clau que influeix en les dinàmiques poblacionals. Aquest model eco-evolutiu s'estudia sota diferents supòsits de simetria, explorant l'estabilitat dels equilibris resultants.

Aquest enfocament ofereix una perspectiva teòrica que pot aplicar-se a camps com l'ecologia o la sociologia, obrint la porta a futures investigacions en models més complexos i situacions amb interaccions múltiples.

Agraïments

Vull agrair al meu tutor, el Dr. Xavier Jarque, per la seva valuosa ajuda, col·laboració i interès al llarg de tot el procés d'elaboració d'aquest treball. La seva orientació i suport han estat fonamentals per a l'èxit d'aquest projecte.

Índex

1	Introducció	1
2	Teoria de jocs i equilibri de Nash	4
2.1	Forma normal de representació i equilibri de Nash	5
2.2	Aplicacions	8
2.3	Estratègies mixtes i existència de l'equilibri de Nash	10
3	Jocs Evolutius	12
3.1	Estratègies evolutivament estables (ESS)	13
3.2	Equació replicadora	15
3.2.1	Classificació dels retrats de fase per $n = 2$ i $n = 3$	18
3.3	Permanència	23
3.4	Regles d'imitació	26
3.5	La millor resposta	30
4	Jocs Eco-evolutius	31
4.1	Model	31
4.2	Anàlisi de l'estabilitat: cas $\theta_1 = \theta_2 = \theta_{12}$	34
4.2.1	Equilibris als vèrtexs	34
4.2.2	Equilibris a l'interior	35
4.2.3	Equilibris a les arestes	36
4.2.4	Equilibris a les cares	42
4.3	Anàlisi de l'estabilitat pel cas 5-dimensional	48
5	Conclusions	49

Capítol 1

Introducció

La teoria de jocs és una àrea de la matemàtica aplicada que estudia les interaccions entre diversos individus que tenen per objectiu maximitzar els seus beneficis. La primera vegada que es va parlar sobre teoria de jocs va ser l'any 1713 en una carta de James Waldegrave, on donava una solució a una versió d'un joc de cartes anomenat *le Her*. Tot i això, no va ser fins a l'any 1838 que amb la publicació de les Recerques dels Principis Matemàtics de la Teoria de la Riquesa de Antoine-Augustin Cournot es va esmentar una anàlisi genèrica del que més endavant seria la teoria de jocs. En el seu estudi, Cournot considerava un duopoli entre dues empreses i la solució que va presentar pot considerar-se com una restricció de l'equilibri de Nash. La teoria de jocs que coneixem actualment no va existir fins al 1928 quan John Von Neumann va publicar l'estudi de diverses anàlisis que va tenir un gran impacte en la teoria de conjunts i en el desenvolupament de les bombes atòmiques i d'hidrogen, i dels ordinadors. El 1950 va aparèixer la primera discussió sobre el dilema del presoner, un clàssic de la teoria de jocs, i alhora John Nash va elaborar la primera definició d'estratègia òptima per a jocs de molts jugadors.

En teoria de jocs clàssica hi ha una gran distinció entre jocs cooperatius i no cooperatius. Un joc cooperatiu és aquell en el qual els jugadors no competeixen, sinó que col·laboren per aconseguir un objectiu comú establint acords vinculants, i per tant els beneficis o pèrdues són a nivell de grup. Un exemple d'un joc d'aquest tipus seria el cas en què algunes empreses farmacèutiques treballen conjuntament en el desenvolupament d'una vacuna. Per altra banda, un joc no cooperatiu és aquell en què els jugadors prenen les decisions de manera independent pensant en el seu benefici personal, tot i que a vegades aquestes decisions poden afavorir al conjunt. Això seria el cas d'una subhasta on diversos compradors competeixen per adquirir una obra d'art al mínim preu possible. Al llarg d'aquest treball s'estudiaran únicament jocs no cooperatius, estàtics i amb informació completa, això és, tots els jugadors prenen les decisions de forma simultània sense conèixer prèviament la decisió dels altres i coneixen les possibles estratègies i els pagaments de la resta de participants.

Durant la dècada de 1970, la teoria de jocs va aplicar-se a la biologia com a resultat de la investigació realitzada per John Maynard Smith sobre l'estratègia evolutiva. Una pregunta que podríem fer-nos és: Per què existeix la teoria de jocs evolutiva? La resposta està relacionada amb l'aplicació de la teoria de jocs en el camp de la biologia, i per conèixer-la ens hem basat en el llibre de Lee Alan Dugatkin i Hudson Kern Reeve [2]. Quan Charles Darwin va desenvolupar la teoria d'adaptació natural, va crear una imatge del procés evolutiu en què l'adaptació dels organismes era causada, en última instància,

per la competència per la supervivència i la reproducció. Aquesta “lluita per l’existència” té una semblança considerable amb la lluita entre empresaris que busquen l’èxit econòmic en mercats competitius. Abans que Darwin publicués la seva teoria, Adam Smith ja havia considerat que en la vida empresarial, la competència és la força impulsora darrere l’eficiència i l’adaptació econòmica. No obstant això, les teories de l’evolució i de l’economia van estudiar-se per separat, i no va ser fins dècades més tard que van explorar el que tenien en comú i com compartir esforç per desenvolupar més teoria.

Què va iniciar l’interès biològic per la teoria de jocs? L’esdeveniment clau va ser un paradigma respecte al nivell d’agregació. Fins a principis dels anys 1960 molts biòlegs sostenien la idea que l’evolució d’un atribut d’un organisme es podia explicar identificant el benefici d’aquest atribut per a tota l’espècie per sobre del nivell de l’individu. Aquesta visió va ser profundament qüestionada per Maynard Smith, ja que no representava correctament el pensament original de Darwin. Actualment, tenim la idea que la selecció natural tendeix a actuar més en l’àmbit individual que en entitats agregades. Per tant, hi ha una forta inclinació a mirar la selecció natural “a través dels ulls” dels individus immersos en la lluita darwiniana per l’existència. En economia, la idea és bastant semblant, ja que s’espera que els empresaris persegueixin el seu propi èxit. Depenent de les circumstàncies, aquesta recerca individual pot augmentar, o no, el benefici de la societat, i de manera molt semblant la selecció natural pot tenir efectes positius o negatius en el rendiment global de les poblacions d’animals. Actualment, la teoria de jocs ha anat més enllà i també s’aplica en ecologia per estudiar estratègies de cooperació entre espècies o en ecosistemes; en sociologia per modelitzar les dinàmiques de cooperació entre individus en contextos socials; o en intel·ligència artificial amb algorismes de cooperació entre agents que han de treballar junts en entorns de competència o col·laboració, ja que permet entendre aquests fenòmens i dissenyar solucions òptimes.

Tant en termes econòmics com biològics per poder estudiar un joc cal concretar a) els participants, b) quines són les accions o estratègies possibles i c) de quina manera l’èxit individual depèn del comportament de tots els participants. Una de les principals diferències entre biologia i economia està basada en el procés que genera el comportament. Així com els economistes es fonamenten en el procés de presa de decisions racionals, els biòlegs tendeixen a invocar la selecció natural com el principal decisor.

En els jocs evolutius, a diferència dels jocs tradicionals, es considera una població composta per n tipus, i no es parla d’estratègies triades de forma racional sinó de la freqüència amb què apareix el tipus i o la taxa amb què un individu adopta l’estratègia associada a i . En aquest context, els individus de la població no tenen un conjunt d’estratègies i en trien una de manera racional, ans al contrari segueixen comportaments o tenen unes característiques que es transmeten entre les diferents generacions a través de processos com la selecció natural o la transmissió cultural. Una de les eines més utilitzades per modelar els canvis en les freqüències és l’equació replicadora, una equació diferencial que permet analitzar l’estabilitat dels punts d’equilibri amb l’objectiu de comprendre les dinàmiques poblacionals. L’estat de la població està contingut en un simplex invariant, un espai d’estats que delimita les trajectòries de les freqüències dins la població i, per tant, el retrat de fase corresponent hi estarà contingut.

La teoria de jocs evolutiva considera que la freqüència de les decisions que es prenen pot canviar amb el temps com a resposta a les decisions preses per tots els individus de la població, és a dir, la dinàmica de la població evoluciona. Un concepte clau és el d’estratègia evolutivament estable (ESS), el qual va ser introduït per John Maynard Smith i George R. Prince el 1973. Una estratègia d’aquest tipus es considera una solució més

forta que l'equilibri de Nash, ja que una vegada és adoptada per tota la població, no pot ser envaïda per cap mutació o estratègia alternativa, és a dir, es manté estable al llarg del temps. En un capítol del treball es demostrarà que una estratègia evolutivament estable és un equilibri de Nash, però que el recíproc generalment no és cert.

L'aportació d'aquest treball a la teoria de jocs evolutiva es basa a suposar l'existència de dues comunitats amb $N/2$ individus cada una i la introducció d'una nova variable: l'entorn. Aquesta ampliació es coneix com a teoria de jocs eco-evolutiva i permet explicar algunes situacions d'una manera més realista. Una de les preguntes a les quals es busca resposta és com la cooperació pot mantenir-se en una població on els pagaments de cada jugador es veuen influenciats pels pagaments dels altres jugadors i també per l'entorn. És a dir, l'entorn juga un paper important en les dinàmiques poblacionals. El model que es presentarà dona lloc a un sistema 5-dimensional, però en aquest treball l'estudi de l'estabilitat dels punts d'equilibri es farà després d'haver assumit algunes simetries, donant lloc al següent sistema tridimensional:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(1-x) \left[(R_0 - T_0 - S_0 + P_0)x + S_0 - P_0 \right. \\ &\quad \left. + (-n_1 + \delta n_1 - \delta n_{12})((R_3 - T_3 - S_3 + P_3)x + (S_3 - P_3)) \right], \\ \dot{n}_1 &= n_1(1-n_1) \left[x(\theta_1 + 1) - 1 \right], \\ \dot{n}_{12} &= n_{12}(1-n_{12}) \left[x(\theta_1 + 1) - 1 \right].\end{aligned}$$

Aquest model permet estudiar l'evolució de les freqüències dins del cub unitat, on estan contingudes totes les trajectòries possibles del sistema, però també permet veure com el comportament evolutiu està influenciat per l'entorn. Mitjançant el retrat de fase es podrà analitzar l'estabilitat dels punts d'equilibri tant a l'interior del cub com a la frontera, i veure com evolucionen els punts de la frontera a mesura que el sistema s'hi aproxima. Aquesta anàlisi de l'estabilitat no es fa únicament tenint en compte els individus de la població sinó que també es té en compte l'entorn, el qual està representat per les variables n_1 i n_{12} . Això modelitza com les poblacions poden adaptar-se a entorns canviants i com la cooperació pot mantenir-se en situacions de competència individual i alteracions ambientals.

Capítol 2

Teoria de jocs i equilibri de Nash

La teoria de jocs es dedica a estudiar el comportament estratègic d'agents o jugadors que prenen decisions racionals per maximitzar el seu benestar o benefici en un joc regit per unes determinades regles, tenint en compte que les seves accions poden influir en els resultats dels altres. Un dels exemples més coneguts és l'aplicació en l'organització industrial, com seria el cas dels oligopolis, on cada empresa ha de considerar què faran les altres.

Tot i això, les aplicacions de la teoria de jocs s'estenen a molts altres àmbits. A nivell microeconòmic, apareix en models de processos comercials, com ara els models de negociació i subhastes. A un nivell intermedi d'agregació, l'economia laboral i financera utilitza models de teoria dels jocs per analitzar el comportament d'una empresa en els seus mercats d'entrada, en contrast amb els oligopolis que analitzen els mercats de sortida. Els mercats d'entrada són aquells on l'empresa adquireix els recursos o factors de producció que necessita per funcionar, mentre que els mercats de sortida fan referència a la venda de béns o serveis. Dins d'una empresa també sorgeixen problemes multipersona, com poden ser la competència entre treballadors per una promoció o la rivalitat entre divisions pel capital d'inversió corporativa.

Finalment, a un nivell alt d'agregació, l'economia internacional inclou models en què els països competeixen o es coordinen en la selecció de duanes i altres polítiques comercials. De manera similar, la macroeconomia incorpora models en què l'autoritat monetària i els agents que determinen salaris o preus interactuen estratègicament per determinar els efectes de les polítiques monetàries.

Dintre d'aquesta branca de l'economia es poden fer diverses distincions de jocs. La primera distingeix entre jocs cooperatius i no cooperatius. En jocs cooperatius els individus poden formar contractes vinculants que els afavoreixin, i, en canvi, en els no cooperatius els jugadors no poden formar cap tipus d'aliança. La segona és entre jocs estàtics que són aquells on cada jugador pren una única decisió de manera simultània, i cap d'ells coneix l'estratègia que han escollit els altres participants abans de prendre la seva pròpia o jocs dinàmics, que es desenvolupen per etapes, on els jugadors poden observar les decisions preses pels jugadors anteriors abans de prendre les seves. L'última distinció és entre jocs d'informació completa o incompleta. En jocs d'informació completa cada jugador coneix tant les possibles estratègies com els pagaments dels altres participants i en jocs d'informació incompleta algun jugador desconeix informació rellevant, com les preferències, els pagaments o les estratègies disponibles dels altres individus.

Al llarg del treball s'analitzaran únicament jocs no cooperatius, estàtics i amb informació completa. En primer lloc, s'explicarà la forma-normal de representació de jocs i el concepte d'equilibri de Nash. A continuació, es presentaran algunes aplicacions com són el model de Cournot de duopoli o el model de Bertrand de duopoli, dos clàssics de la teoria de jocs i l'organització industrial. En últim lloc, es parlarà d'estratègies mixtes i de l'existència de l'equilibri de Nash. Tota aquesta informació es basa en les explicacions del capítol 1 de Gibbons [3].

2.1 Forma normal de representació i equilibri de Nash

Sigui un joc amb N jugadors, on $N = \{1, \dots, n\}$, es denota per Σ_i el conjunt d'estratègies disponibles que té el jugador i , $\Sigma := \Sigma_1 \times \dots \times \Sigma_n$ i $s_i \in \Sigma_i$ una estratègia arbitrària del conjunt. Un joc es representa a partir de la seva forma normal, on s'especifiquen els jugadors, les estratègies i els pagaments.

Definició 2.1. Sigui $(s_1, \dots, s_n)$ un perfil d'estratègies, una per cada jugador. Un *pagament* pel jugador i és una funció $\pi_i(s_1, \dots, s_n) : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$. Es denotarà per Π el conjunt dels pagaments de tots els jugadors.

Definició 2.2. La *forma normal de representació* d'un joc de N -jugadors especifica l'espai d'estratègies dels jugadors Σ i les seves funcions de pagament $\pi_1, \dots, \pi_n$. Denotem aquest joc com $G = \{N, \Sigma, \Pi\}$.

En la representació en forma normal dels jocs cada jugador de manera simultània tria una estratègia, i la combinació de totes les estratègies triades per cada jugador determina el pagament per cada jugador. Tot i això, no és necessari que els jugadors actuïn al mateix temps, sinó que només cal que escullin la seva estratègia sense conèixer la decisió dels altres. En aquesta representació s'especifiquen: 1) els jugadors del joc, 2) les estratègies disponibles per a cada jugador i 3) el pagament que rep cada jugador per cada combinació d'estratègies que pot ser escollida.

Exemple 2.1. Considerem el joc pedra paper tisora, on dos jugadors, seleccionen de manera simultània una de les tres opcions possibles: Pedra (P), Paper (Pa) o Tisora (T). Aleshores, el seu conjunt d'estratègies és $\Sigma_1 = \Sigma_2 = (\text{Pedra, Paper, Tisora})$ i les funcions de pagament són:

$$\begin{aligned} \pi(P, Pa) &= (-1, 1); & \pi(P, T) &= (1, -1); & \pi(P, P) &= (0, 0); \\ \pi(Pa, Pa) &= (0, 0); & \pi(Pa, T) &= (-1, 1); & \pi(Pa, P) &= (1, -1); \\ \pi(T, Pa) &= (1, -1); & \pi(T, T) &= (0, 0); & \pi(T, P) &= (1, -1); \end{aligned}$$

Això pot representar-se en una matriu de la següent manera com es mostra a la Taula 2.1.

Aquest joc és un exemple clàssic de la forma normal de representació, on els jugadors no coneixen la decisió de l'altre jugador abans de fer la seva pròpia elecció.

Definició 2.3. En un joc de forma normal $G = \{N, \Sigma, \Pi\}$, siguin $s'_i \in \Sigma_i$ i $s''_i \in \Sigma_i$ estratègies disponibles pel jugador i . Es diu que s''_i *domina estrictament* a s'_i si el pagament

Jugador 1 / Jugador 2	P (Pedra)	Pa (Paper)	T (Tisora)
P (Pedra)	(0, 0)	(-1, 1)	(1, -1)
Pa (Paper)	(1, -1)	(0, 0)	(-1, 1)
T (Tisora)	(-1, 1)	(1, -1)	(0, 0)

Taula 2.1: Matriu de la representació normal del joc pedra paper tisora.

d'escollir s'_i és estrictament menor que el d'escollir s''_i , és a dir, es compleix la següent condició:

$$\pi_i(s_1, \dots, s_{i-1}, s'_i, s_{i+1}, \dots, s_n) < \pi_i(s_1, \dots, s_{i-1}, s''_i, s_{i+1}, \dots, s_n),$$

per cada $(s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$ que es pot construir a partir dels conjunts d'estratègies dels altres jugadors $\Sigma_1, \dots, \Sigma_{i-1}, \Sigma_{i+1}, \dots, \Sigma_n$.

Els jugadors racionals no utilitzaran estratègies d'aquest tipus, ja que no hi ha cap situació en què, tenint en compte les estratègies dels altres jugadors, sigui òptim triar-les.

Exemple 2.2. Suposem que dos delinqüents són interrogats separatament per la policia i cada un rep la següent oferta: si un confessa, llavors el confessor serà alliberat i l'altre passarà 5 anys a la presó; si tots dos confessen, cada un rebrà una condemna de 4 anys de presó i si cap dels dos confessa, cada un passarà 2 anys a la presó. Això pot representar-se amb la següent matriu de pagaments com es mostra a la Taula 2.2.

Sospitós 1 / Sospitós 2	Confessar	No confessar
Confessar	(-4, -4)	(0, -5)
No confessar	(-5, 0)	(-2, -2)

Taula 2.2: Matriu de la representació normal del Dilema del Presoner.

Què hauria de fer cada pres? Primer considerem el primer pres. Si el segon pres no confessa, aleshores el primer pres hauria de delatar perquè això comporta menys anys de presó. D'altra banda, si el segon pres delata, també hauria de delatar. Per tant, independentment del que faci el segon pres el primer delatarà. De manera similar, al segon pres també li surt més a compte delatar. Així doncs, tots dos presos haurien de delatar.

L'interès d'aquest joc, anomenat el Dilema del Presoner, sorgeix en observar que tots dos jugadors, seguint el seu interès individual, acaben pitjor que si haguessin guardat silenci. Es podria argumentar que haurien d'haver arribat a un acord abans de ser arrestats per no delatar-se mútuament. No obstant això, cada pres no té cap manera d'assegurar-se que l'altre segueixi aquest acord. Aquest exemple il·lustra que encara que les estratègies estrictament dominades es descarten en molts escenaris, en situacions com el Dilema del Presoner, les dinàmiques de confiança i la racionalitat individual poden conduir a decisions que no són òptimes per al conjunt.

Definició 2.4. En un joc de forma normal $G = \{N, \Sigma, \Pi\}$ el *procés d'eliminació iterativa d'estratègies dominades* consisteix a eliminar successivament, en cada iteració, les estratègies $s'_i \in \Sigma_i$ estrictament dominades de cada jugador fins que no n'hi hagi més per eliminar.

Aquest procés no només assumeix que els jugadors són racionals, sinó que tots els jugadors saben que els altres són racionals. No obstant, hi ha una limitació important perquè encara que el procés elimina les estratègies que són menys avantatjoses, no sempre condueix a una solució precisa o única. A continuació, es presentarà l'equilibri de Nash, que és una solució més forta que el procés iterat d'eliminació d'estratègies, en el sentit de què les estratègies de l'equilibri de Nash sobreviuen al procés, però el recíproc és fals.

Definició 2.5. En un joc de forma normal $G = \{N, \Sigma, \Pi\}$, les estratègies $(s_1^*, \dots, s_n^*)$ formen un *equilibri de Nash* si, per a cada jugador i , l'estratègia s_i^* és la millor resposta del jugador i a les estratègies fixades per als altres $n - 1$ jugadors, $(s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*)$, és a dir, es compleix:

$$\pi_i(s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*) \geq \pi_i(s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*) \quad \forall s_i \in \Sigma_i,$$

això és, s_i^* és solució de:

$$\max_{s_i \in \Sigma_i} \pi_i(s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*).$$

En altres paraules, un equilibri de Nash és una situació en què cada jugador tria l'estratègia que és la millor resposta a les estratègies dels altres, assegurant que ningú tingui incentius per canviar unilateralment la seva decisió.

Proposició 2.1. En un joc de forma normal $G = \{N, \Sigma, \Pi\}$, si les estratègies $(s_1^*, \dots, s_n^*)$ són un equilibri de Nash, aleshores sobreviuen al procés iterat d'eliminació d'estratègies estrictament dominades.

Demostració. Procedim per contradicció. Suposem que una de les estratègies d'un equilibri de Nash és eliminada pel procés iterat d'eliminació d'estratègies estrictament dominades.

Suposem que les estratègies $(s_1^*, \dots, s_n^*)$ són un equilibri de Nash del joc de forma normal $G = \{N, \Sigma, \Pi\}$, però que una de les estratègies, posem s_i^* per al jugador i , és la primera eliminada per ser estrictament dominada. Això implica que existeix una estratègia $s_i'' \in \Sigma_i$ que no ha estat eliminada i que domina estrictament a s_i^* , és a dir, per a totes les combinacions $(s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$ d'estratègies dels altres jugadors que no han estat eliminades, es compleix:

$$\pi_i(s_1, \dots, s_{i-1}, s_i^*, s_{i+1}, \dots, s_n) < \pi_i(s_1, \dots, s_{i-1}, s_i'', s_{i+1}, \dots, s_n).$$

Com que s_i^* és la primera estratègia de l'equilibri de Nash a ser eliminada, les estratègies dels altres jugadors $(s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*)$ no han estat eliminades, de manera que, una de les implicacions de la desigualtat anterior és:

$$\pi_i(s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*) < \pi_i(s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_i'', s_{i+1}^*, \dots, s_n^*).$$

Aquesta desigualtat contradiu la definició d'equilibri de Nash i, per tant, no pot existir una estratègia s_i'' que domini estrictament a s_i^* .

□

2.2 Aplicacions

En aquesta secció analitzarem algunes aplicacions utilitzant els conceptes que s'han explicat fins ara. Es començarà explicant el model de Cournot (1838) de competència imperfecte i seguidament s'explicarà el model de Bertrand (1883).

El model de Cournot va anticipar la definició d'equilibri de Nash en el context d'un model particular de duopoli. Siguin q_1 i q_2 les quantitats d'un producte homogeni produïdes per dues empreses 1 i 2 respectivament. Sigui $P(Q) = a - Q$ el preu d'equilibri de mercat quan la quantitat agregada al mercat és $Q = q_1 + q_2$, on a representa una constant que determina la disposició a pagar més alta dels consumidors. D'aquesta manera, $P(Q) = a - Q$ per $Q < a$ i $P(Q) = 0$ per $Q \geq a$. Se suposa que el cost total de l'empresa i de produir la quantitat q_i és $C_i(q_i) = cq_i$, això és, no hi ha costos fixos i el cost marginal és constant amb $c < a$. També se suposa que les empreses trien les quantitats a produir de manera simultània.

Per tal de trobar l'equilibri de Nash del joc de Cournot cal representar el problema de forma normal. En aquest joc els participants són les dues empreses, el conjunt d'estratègies serà $\Sigma_i = [0, \infty)$, ja que no es poden produir quantitats negatives i cada estratègia s_i serà una quantitat $q_i \geq 0$. Es pot argumentar que cap empresa produirà quantitats extremadament elevades, ja que $P(Q) = 0$ per $Q \geq a$ i cap empresa produirà una quantitat $q_i > a$. El pagament per cada empresa pot escriure's de la següent forma:

$$\pi_i(q_i, q_j) = q_i[P(q_i + q_j) - c] = q_i[a - (q_i + q_j) - c] \quad \forall i, j = 1, 2.$$

En el model de Cournot (q_1^*, q_2^*) és un equilibri de Nash si per a cada empresa i la quantitat q_i^* és solució de

$$\max_{0 \leq q_i < \infty} \pi_i(q_i, q_j^*) = \max_{0 \leq q_i < \infty} q_i[a - (q_i + q_j^*) - c].$$

Suposant $q_j^* < a - c$ optimitzant (fent la derivada i igualant a 0) i aïllant q_i^* obtenim

$$q_i^* = \frac{1}{2}(a - q_j^* - c). \quad (2.1)$$

Aleshores, perquè (q_1^*, q_2^*) sigui un equilibri de Nash s'ha de satisfer

$$q_1^* = \frac{1}{2}(a - q_2^* - c).$$

i

$$q_2^* = \frac{1}{2}(a - q_1^* - c).$$

Igualant, obtenim que l'equilibri és

$$q_1^* = q_2^* = \frac{a - c}{3}.$$

La intuïció darrere d'aquest equilibri és senzilla. Les empreses voldrien actuar com un monopoli per maximitzar beneficis, produint $q_m = \frac{a-c}{2}$ i obtenint $\pi_i(q_m, 0) = \frac{(a-c)^2}{4}$. Donat que hi ha dues empreses, els beneficis agregats del duopoli es maximitzarien si la quantitat agregada $q_1 + q_2$ fos igual a la quantitat de monopoli q_m , cosa que passaria si $q_i = \frac{q_m}{2}$ per a cada empresa. Tot i això, cada empresa té incentius per augmentar la seva producció, ja que el preu associat a q_m és elevat, malgrat la caiguda en el preu d'equilibri

de mercat. A l'equilibri de Cournot, en canvi, la quantitat agregada és més alta, per la qual cosa el preu associat és més baix i la temptació d'augmentar la producció es redueix.

També s'hagués pogut resoldre l'equilibri de manera gràfica, ja que l'equació (2.1) dona una millor resposta de l'empresa i a l'estratègia q_j^* de l'empresa j . D'aquesta manera, la millor resposta de l'empresa 2 assumint que $q_1 < a - c$ és

$$R_2(q_1) = \frac{1}{2}(a - q_1 - c),$$

i la millor resposta de l'empresa 1 assumint que $q_2 < a - c$ és

$$R_1(q_2) = \frac{1}{2}(a - q_2 - c).$$

Aquest problema es pot resoldre gràficament com es mostra a la Figura 2.1 on el punt d'intersecció (q_1^*, q_2^*) correspon a l'equilibri de Cournot.

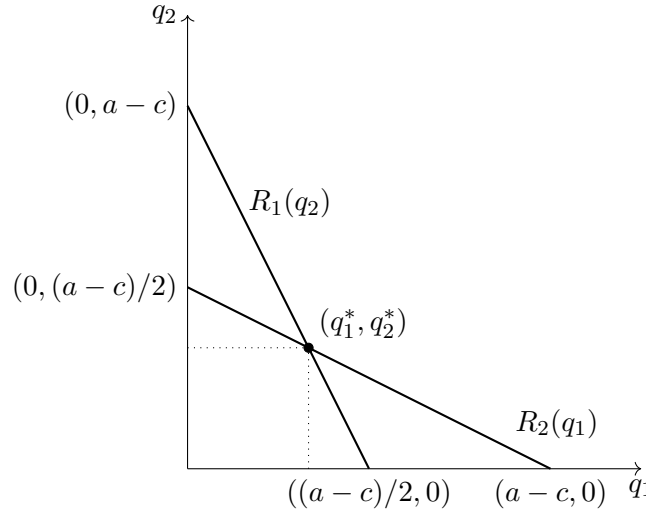


Figura 2.1: Solució gràfica del model de Cournot.

El model de Bertrand, en contrast amb el de Cournot, suposa que les empreses trien els preus en comptes de les quantitats. Cal tenir en compte que l'espai d'estratègies i les funcions de pagament són diferents i, en conseqüència, l'equilibri de Nash. Pel model de Bertrand es considerarà el cas en què els productes són diferenciats, de manera que les empreses poden fixar els seus preus de manera independent, i el preu que fixa una empresa afecta la demanda del producte de l'altra empresa.

Siguin dues empreses 1 i 2 que escullen preus p_1 i p_2 respectivament. Aleshores, la quantitat que els consumidors demanen de l'empresa i és

$$q_i(p_i, p_j) = a - p_i + bp_j \quad \forall i, j = 1, 2,$$

on $b > 0$ reflecteix el grau en què el producte de l'empresa i és un substitut del producte de l'empresa j . Si s'analitza la funció de demanda podria semblar que no és realista, ja que la demanda per part de l'empresa i és sempre positiva, fins i tot quan el preu és alt. Això passa perquè l'efecte positiu del preu del competidor p_j pot compensar el de l'empresa i . Per corregir aquest fet podem suposar que $b < 2$, garantint que la demanda no sigui excessivament alta quan els preus són elevats. De la mateixa manera que amb

Cournot, se suposa que no hi ha costos fixos, que el cost de producció marginal és $c < a$ i que les dues empreses actuen simultàniament.

Com abans, cal representar aquest problema de forma normal. Ara, el conjunt d'estratègies de cada empresa és $\Sigma_i = [0, \infty)$ i cada s_i correspon a un preu $p_i \geq 0$ que ha de ser positiu perquè tingui sentit. La funció de pagament d'una empresa i quan tria el preu p_i i l'altre empresa tria p_j serà

$$\pi_i(p_i, p_j) = q_i(p_i, p_j)[p_i - c] = [a - p_i + bp_j][p_i - c].$$

Un parell (p_1^*, p_2^*) serà un equilibri de Nash si, per cada empresa i , p_i^* és solució de

$$\max_{0 \leq p_i < \infty} \pi_i(p_i, p_j^*) = \max_{0 \leq p_i < \infty} [a - p_i + bp_j^*][p_i - c].$$

De manera similar a Cournot, després de resoldre el problema d'optimització (fent la derivada i igualant a 0), aïllant p_i^* i igualant el preu de cada empresa obtenim que l'equilibri és

$$p_1^* = p_2^* = \frac{a + c}{2 - b}.$$

2.3 Estratègies mixtes i existència de l'equilibri de Nash

En les seccions anteriors s'ha definit Σ_i com el conjunt d'estratègies disponibles per al jugador i , i la combinació d'estratègies $(s_1^*, \dots, s_n^*)$ com un equilibri de Nash si per a cada jugador i , s_i^* és la millor resposta a les estratègies dels altres $n - 1$ jugadors. A continuació, es presentarà un exemple on no existeix cap equilibri de Nash del joc amb la definició que s'ha donat fins ara.

Exemple 2.3. Siguin dos jugadors amb una moneda cada un. Els dos poden triar simultàniament entre cara o creu i han d'endevinar l'elecció de l'altre. El jugador 1 guanya si els dos jugadors trien la mateixa opció i el jugador 2 guanya si tots dos trien opcions diferents. Se suposarà que cada jugador que guanya rep 1 punt i cada jugador que perd -1. D'aquesta manera l'espai d'estratègies per cada jugador és $(Cara, Creu)$ i es pot representar el joc de forma normal amb una matriu com es mostra a la Taula 2.3.

Jugador 1 / Jugador 2	Cara	Creu
Cara	(+1, -1)	(-1, +1)
Creu	(-1, +1)	(+1, -1)

Taula 2.3: Matriu de la representació normal de l'emparellament de monedes.

En aquest joc, cap parell d'estratègies satisfà la condició d'equilibri de Nash, ja que si les estratègies dels dos jugadors coincideixen el jugador 1 prefereix canviar d'estratègia i si les dues estratègies escollides són diferents el jugador 2 canviarà.

A partir d'ara, al llarg de tot el treball se suposarà que els jocs són simètrics, és a dir, que tots els jugadors tenen el mateix conjunt d'estratègies i els mateixos pagaments associats.

Definició 2.6. Sigui un joc de forma normal $G = \{N, \Sigma, \Pi\}$. Una *estratègia mixta* pel jugador i és una distribució de probabilitat $\sigma_i = (\sigma_i^1, \dots, \sigma_i^m)$ on σ_i^j representa la probabilitat que el jugador i jugui l'estratègia j i $\sum_{j=1}^m \sigma_i^j = 1$.

Observació 2.1. Una estratègia pura es pot representar per un vector de probabilitats on totes les entrades són zero excepte una.

Per les estratègies mixtes també funciona la definició d'estratègies estrictament dominades i la definició d'equilibri de Nash. Per simplificar, s'adaptaran les definicions al cas de 2 jugadors. Sigui m el nombre d'estratègies pures de Σ_i , escrivim $\Sigma_i = \{s_1, \dots, s_m\}$. Si el jugador 1 creu que el jugador 2 utilitzarà les estratègies $(s_1, \dots, s_m)$ amb probabilitat $(\sigma_1^1, \dots, \sigma_2^m)$ llavors el pagament esperat pel jugador 1 jugant l'estratègia pura s_j vindrà donat per

$$\sum_{k=1}^m \sigma_2^k \pi_1(s_j, s_k),$$

i el pagament esperat per jugar l'estratègia mixta $\sigma_1 = (\sigma_1^1, \dots, \sigma_1^m)$ serà

$$v_1(\sigma_1, \sigma_2) = \sum_{j=1}^m \sigma_1^j \left[\sum_{k=1}^m \sigma_2^k \pi_1(s_j, s_k) \right] = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \sigma_1^j \sigma_2^k \pi_1(s_j, s_k),$$

on $\sigma_1^j \cdot \sigma_2^k$ és la probabilitat que el jugador 1 utilitzi s_j i el jugador 2 s_k . Així doncs, perquè l'estratègia mixta $(\sigma_1^1, \dots, \sigma_1^m)$ sigui la millor resposta del jugador 1 a l'estratègia mixta de 2 σ_2 s'ha de complir que per $\sigma_i^j > 0$

$$\sum_{k=1}^m \sigma_2^k \pi_1(s_j, s_k) \geq \sum_{k=1}^m \sigma_2^k \pi_1(s'_j, s_k) \quad \forall s'_j \in \Sigma_1.$$

Anàlogament, si el jugador 2 creu que el jugador 1 escollirà les estratègies $(s_1, \dots, s_m)$ amb probabilitats $(\sigma_1^1, \dots, \sigma_1^m)$ llavors el pagament esperat pel jugador 2 d'utilitzar les estratègies $(s_1, \dots, s_m)$ amb probabilitats $(\sigma_2^1, \dots, \sigma_2^m)$ és

$$v_2(\sigma_1, \sigma_2) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \sigma_1^j \sigma_2^k \pi_2(s_j, s_k).$$

Aleshores, (σ_1^*, σ_2^*) serà un equilibri de Nash si σ_1^* satisfà

$$v_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*) \geq v_1(\sigma_1, \sigma_2^*) \quad \forall \sigma_1 \in \Sigma_1, \quad (2.2)$$

i σ_2^* compleix

$$v_2(\sigma_1^*, \sigma_2^*) \geq v_2(\sigma_1^*, \sigma_2) \quad \forall \sigma_2 \in \Sigma_2. \quad (2.3)$$

Definició 2.7. En un joc de 2 jugadors de forma normal $G = \{\Sigma_1, \Sigma_2; \pi_1, \pi_2\}$ les estratègies mixtes (σ_1^*, σ_2^*) són un *equilibri de Nash* si l'estratègia mixta de cada jugador és una millor resposta a l'estratègia mixta de l'altre jugador, és a dir, es compleixen (2.2) i (2.3).

Teorema 2.2. [6] En tot joc en forma normal de n jugadors $G = \{N, \Sigma, \Pi\}$ existeix un equilibri de Nash del joc.

Aquest teorema va ser proporcionat per John Forbes Nash Jr. com a part de la seva tesi doctoral l'any 1950. La demostració es basa a utilitzar el teorema del punt fix de Brouwer i veure que la funció de la millor resposta satisfà les condicions generals del teorema. Tot i això, aquesta demostració no la farem ara, sinó que la veurem més endavant pel cas dels jocs evolutius, que són l'estudi d'aquest treball.

Capítol 3

Jocs Evolutius

En la secció anterior hem analitzat jocs de N jugadors, on la solució, és a dir, l'equilibri de Nash, es fonamenta en la idea que cada jugador adopta una estratègia que és la millor resposta a les estratègies escollides pels altres jugadors, de manera que cap jugador té incentius per canviar l'estratègia que ha seleccionat.

Per als equilibris de Nash simètrics, podem donar una interpretació alternativa situant el joc en un context poblacional. En una població on tothom utilitza l'estratègia σ^* , el millor és seguir la multitud. Així, si la població comença amb tots els individus adoptant σ^* , la població seguirà aquesta estratègia, establint un equilibri. Va ser Nash qui va introduir aquesta perspectiva, anomenant-la “interpretació d'acció massiva”. Una pregunta natural que sorgeix és: Què passa si la població està a prop de l'equilibri, però no hi és exactament? La població tendirà a evolucionar cap a l'equilibri o es desviarà d'ell? Aquesta qüestió es pot intentar respondre mitjançant la teoria de jocs evolutiva, que va ser inventada per a models biològics, però que posteriorment també ha sigut adoptada per introduir alguns models d'economia.

La teoria de jocs evolutiva considera un cas més general on la freqüència amb què es pren una decisió particular pot canviar amb el temps com a resposta a les decisions preses per tots els individus de la població, és a dir, la població evoluciona. En la interpretació biològica d'aquesta evolució, una població d'animals, cadascun dels quals ha estat genèticament programat per utilitzar una estratègia que es transmet a la seva descendència, pot estar inicialment composta per animals que utilitzen diferents estratègies. El pagament per a un individu que adopta una estratègia σ s'identifica amb la seva *aptitud* (*nombre esperat de descendents*) per aquest tipus dins de la població actual. Els animals amb més aptitud deixen més descendència, així que en la següent generació la composició de la població canviarà. En la interpretació econòmica, la població canvia perquè els individus juguen el joc moltes vegades i canvien d'estratègies de manera conscient. Els jugadors canvien cap a aquelles estratègies que ofereixen millors pagaments i s'allunyen de les que donen pagaments baixos (James N. Webb, [9], Capítol 8).

Començarem introduint el concepte d'estratègies evolutivament estables (ESS), seguidament presentarem l'equació replicadora i farem una classificació dels retrats de fase per a diferents valors de n . A continuació, també explicarem el concepte de permanència i explorarem models, com podrien ser els regits per regles d'imitació o per models de la millor resposta.

3.1 Estratègies evolutivament estables (ESS)

Com en l'anàlisi de sistemes dinàmics, una pregunta interessant és: Quins són els punts finals, si n'hi ha, de l'evolució? Un tipus de punt final és el que anomenem estratègia evolutivament estable (ESS). Per tal d'explicar el concepte de ESS i la relació que hi ha amb l'equilibri de Nash s'han utilitzat els capítols 1 i 2 de Fernando Vega-Redondo [8] i el capítol 9 de Eric van Damme [7].

Considerem una població monomorfa d'una determinada "espècie" que pot mostrar diferents comportaments o característiques. Aquests comportaments es poden veure com un conjunt (finit) d'estratègies pures $\Sigma = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$. Com estem en el cas en què la població és monomorfa, tots els individus adopten la mateixa estratègia, és a dir, són del mateix tipus.

Definició 3.1. Un *perfil de població* és un vector $\mathbf{x}$ que indica la probabilitat $x(s)$ amb què cada estratègia $s \in \Sigma$ és utilitzada dins de la població.

Fem notar que $\mathbf{x} \in S_n$, on S_n és un simplex a $\mathbb{R}^n$, és a dir, $\sum_{i=1}^n x_i = 1$. Considerem un individu particular, si aquest individu utilitza una estratègia mixta $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, llavors el pagament obtingut per aquest individu es denota per $\pi(\sigma, \mathbf{x})$. El pagament per aquesta estratègia es calcula com

$$\pi(\sigma, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \sigma_i \pi(s_i, \mathbf{x}).$$

Aquest pagament representa el nombre de descendents que cada tipus d'individu té. És natural pensar que els pagaments determinen l'evolució de la població.

Hi ha una equivalència entre les estratègies mixtes $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ i el perfil de població $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, ja que podem interpretar cada σ_i com la probabilitat que un individu sigui del tipus i . Aquesta probabilitat es pot entendre com el percentatge d'individus del tipus i dins de la població, que és $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ amb $\sum x_i = 1$.

Definició 3.2. Una estratègia $\sigma^* = (\sigma_1^*, \dots, \sigma_n^*) \in S_n$ es diu que és una *estratègia evolutivament estable (ESS)* si, per qualsevol altre $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_n) \in S_n$, existeix algun $\bar{\epsilon} > 0$ tal que si $0 < \epsilon < \bar{\epsilon}$, llavors

$$\pi(\sigma^*, (1 - \epsilon)\sigma^* + \epsilon\rho) > \pi(\rho, (1 - \epsilon)\sigma^* + \epsilon\rho).$$

Dit d'una altra manera, una estratègia σ^* és una ESS quan un cop ha sigut adoptada per tota la població, cap mutació ρ adoptada per una petita fracció d'individus pot envair (entrar a la població i sobreviure) obtenint almenys el mateix pagament, és a dir, el comportament de les espècies de la població no pot ser envaït per cap mutant. Cal tenir en compte que la mutació pot ser tan gran com es vulgui, però la fracció de mutants ha de ser petita, i d'aquí el rol de ϵ en la definició.

Aquest concepte que acabem de definir és vàlid per una gran varietat d'escenaris. Un dels més rellevants en el qual centrarem l'estudi a partir d'ara és: "Pairwise Contests". Es tracta d'un escenari on, en cada ronda d'interacció, un individu és aparellat aleatòriament amb un altre membre de la població per jugar un joc bilateral, finit i simètric. Un joc d'aquest tipus pot formalitzar-se a partir d'una matriu quadrada A de dimensió n , on n és el nombre d'estratègies. Cada a_{ij} de A indica el pagament d'un individu que tria

l'estratègia s_i contra l'estratègia s_j triada per la resta de la població ($i, j = 1, 2, \dots, n$). Tot i això, hi ha altres escenaris possibles com el "Playing the Field", en el qual que no es pot assumir una relació simple i directa (lineal) entre el resultat i la configuració inicial de la població, ja que les interaccions són més complexes i es desenvolupen de manera conjunta a nivell de tota la població, fent que no sigui possible predir el pagament d'una manera lineal abans de començar.

En el context de "Pairwise Contests" el concepte d'estratègia evolutivament estable pot veure's com un refinament de l'equilibri de Nash. Denotem per $A = (a_{ij})_{ij=1,2,\dots,n}$ la matriu de pagaments n -dimensional corresponent al joc simètric bilateral.

Proposició 3.1. Sigui $\sigma^* \in S_n$ una ESS. Llavors:

- i) El parell (σ^*, σ^*) és un equilibri de Nash simètric del joc bilateral corresponent a la matriu A , és a dir, $\forall \sigma' \in S_n, \sigma^* A \sigma^* \geq \sigma' A \sigma^*$.
- ii) $\forall \sigma' \in S_n, \sigma' \neq \sigma^*$, si $\sigma^* A \sigma^* = \sigma' A \sigma^*$, llavors $\sigma^* A \sigma' > \sigma' A \sigma'$.

Recíprocament, si es compleixen i) i ii), aleshores σ^* és una ESS.

Demostració. Suposem que $\sigma^* \in S_n$ és una ESS. Si (i) no es compleix, llavors:

$$\exists \sigma' \in S_n : \sigma' A \sigma^* > \sigma^* A \sigma^*,$$

la qual cosa implica que, per algun $\varepsilon > 0$ prou petit, es verifica:

$$\sigma' A ((1 - \varepsilon)\sigma^* + \varepsilon\sigma') \geq \sigma^* A ((1 - \varepsilon)\sigma^* + \varepsilon\sigma').$$

Aquesta desigualtat contradiu la definició d'estratègia evolutivament estable.

Ara suposem que (ii) no es compleix. És a dir, existeix algun $\sigma' \in S_n$, amb $\sigma' \neq \sigma^*$, tal que:

$$\sigma' A \sigma^* = \sigma^* A \sigma^* \tag{3.1}$$

i

$$\sigma' A \sigma' \geq \sigma^* A \sigma'. \tag{3.2}$$

Multiplicant la igualtat (3.1) per $(1 - \varepsilon)$ i la desigualtat (3.2) per ε , i sumant ambdues expressions, obtenim altre cop:

$$\sigma' A ((1 - \varepsilon)\sigma^* + \varepsilon\sigma') \geq \sigma^* A ((1 - \varepsilon)\sigma^* + \varepsilon\sigma'),$$

contradient així la definició de ESS.

El recíproc és immediat. Si la desigualtat de (i) es compleix estrictament, és clar que es pot trobar un $\varepsilon > 0$ tal que, si ε és prou petit,

$$\sigma^* A ((1 - \varepsilon)\sigma^* + \varepsilon\sigma') > \sigma' A ((1 - \varepsilon)\sigma^* + \varepsilon\sigma')$$

per a tot $\sigma' \in S_n$, amb $\sigma' \neq \sigma^*$. Si (i) es compleix amb igualtat per algun σ' , llavors (ii) implica que la desigualtat anterior també es verifica en aquest cas.

□

D'aquesta manera, una estratègia evolutivament estable serà un equilibri de Nash, però el recíproc no és cert. No hi ha prou resultats per identificar l'existència d'estratègies evolutivament estables en escenaris generals, fins i tot quan estem en "Pairwise Contests", que es tracta del cas més simple. Tantmateix, el següent resultat garanteix l'existència de ESS en el cas dels jocs 2×2 .

Proposició 3.2. Considerem un context de “Pairwise Contests” i una matriu de pagaments $A = (a_{ij})$ bidimensional. Suposem que $a_{ii} \neq a_{ij}$ per a $(i = 1, 2, j \neq i)$, llavors existeix una ESS.

Demostració. Primer, si $a_{ii} > a_{ji}$ per algun $i, j = 1, 2$ amb $i \neq j$, el resultat es dedueix del fet que, en aquest cas, existeix un equilibri de Nash estricte que també és una ESS.

Ara considerem el cas en què la desigualtat anterior no es compleix per a cap $i = 1, 2$, és a dir, $a_{ii} < a_{ji}$ per a $i = 1, 2$ i $i \neq j$. Llavors, l'única estratègia d'equilibri (mixta) del joc és

$$\sigma^* = (p, 1 - p),$$

on

$$p = \frac{a_{12} - a_{22}}{(a_{12} - a_{22} + a_{21} - a_{11})}.$$

s'obté d'igualar el pagament esperat d'utilitzar l'estratègia 1 amb el pagament esperat de l'estratègia 2.

En aquest cas, s'aplica la part (ii) de la Proposició 3.1. Per verificar que σ^* és una ESS, només cal demostrar que

$$\sigma^* A \sigma > \sigma A \sigma, \quad \forall \sigma = (q, 1 - q) \in S_n, \text{ amb } q \neq p. \quad (3.3)$$

Observem que la diferència es pot expressar com:

$$\sigma^* A \sigma - \sigma A \sigma = (p - q)^2 (a_{12} - a_{22} + a_{21} - a_{11}) > 0.$$

ja que,

$$\sigma^* A \sigma = p (a_{11}q + a_{12}(1 - q)) + (1 - p) (a_{21}q + a_{22}(1 - q)).$$

$$\sigma A \sigma = q (a_{11}q + a_{12}(1 - q)) + (1 - q) (a_{21}q + a_{22}(1 - q)).$$

i simplificant i restant els termes s'obté la igualtat.

Per tant, la desigualtat 3.3 es compleix, ja que el terme $(p - q)^2$ és sempre positiu per $q \neq p$, i el factor $(a_{12} - a_{22} + a_{21} - a_{11})$ és també positiu per la definició de p . Així, obtenim que σ^* és una ESS.

□

3.2 Equació replicadora

La teoria evolutiva de jocs ofereix un marc robust per analitzar com les estratègies dels individus en una població poden evolucionar al llarg del temps. L'equació replicadora és una de les eines més útils per modelar aquests canvis, ja que permet estudiar com les freqüències de les estratègies d'una població evolucionen com a resposta a l'èxit relatiu que té cada estratègia. D'aquesta manera, proporciona una bona comprensió del comportament dels sistemes dinàmics en diferents tipus de contextos. A continuació construirem l'equació replicadora pas a pas. Aquesta part està basada en l'article de Josef Hofbauer i Karl Sigmund [4].

Considerem una població composta per n tipus diferents. Sigui x_i la freqüència del tipus i o la taxa amb què un individu adopta l'estratègia associada a i . L'estat de la

població es pot descriure mitjançant el vector $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, on $\mathbf{x} \in S_n$ i S_n representa un simplex en l'espai $\mathbb{R}^n$. Es pot suposar que les freqüències x_i són funcions diferenciables respecte de t i $\sum_{i=1}^n x_i = 1$.

Si dos individus de la població s'ajunten de manera aleatòria per jugar un joc simètric amb matriu de pagaments A , es té que $(A\mathbf{x})_i$ és el pagament esperat per un individu del tipus i i $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ serà la mitjana dels pagaments de l'estat de la població $\mathbf{x}$. La taxa de creixement per càpita, és a dir, la derivada logarítmica $\frac{\dot{x}_i}{x_i}$, es determina fent la diferència entre el pagament que obtindria el tipus i i el pagament mitjà de la població. D'aquesta manera, l'equació replicadora vindrà definida com:

$$\dot{x}_i = x_i ((A\mathbf{x})_i - \mathbf{x}^T A\mathbf{x}) \quad (3.4)$$

Observació 3.1. Com que els hiperplans $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ i $x_i = 0$ són invariants, es dedueix que el simplex S_n també és invariant.

Anem a comprovar-ho.

Considerem l'equació $x_1 + \dots + x_n = c$. Prenent $c = 1$, aquesta és invariant si, i només si, $\sum_{i=1}^n \dot{x}_i = 0$, és a dir, la suma de totes les derivades $\dot{x}_i$ és zero.

Calculem:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \dot{x}_i &= \sum_{i=1}^n x_i (Ax)_i - \sum_{i=1}^n x_i (x^T Ax) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i (Ax)_i - (x^T Ax) \sum_{i=1}^n x_i \\ &= \sum_{i=1}^n x_i (Ax)_i - x^T Ax = 0, \end{aligned}$$

ja que $x^T Ax = x^T (Ax) = \sum_{i=1}^n x_i (Ax)_i$.

Definició 3.3. Un punt d'equilibri $z \in S_n$ és *estable* si, per a qualsevol entorn U de z , existeix un entorn V de z tal que, si $\mathbf{x} \in V$, llavors $x(t) \in U$ per a tot $t \geq 0$.

En altres paraules, un punt d'equilibri és estable si el sistema és robust davant de petites pertorbacions, això és, si el sistema rep una petita pertorbació tendirà a retornar a l'estat d'equilibri.

Definició 3.4. Un punt d'equilibri $z \in S_n$ és un *atractor* si existeix un entorn U de z tal que $x(t) \rightarrow z$ quan $t \rightarrow +\infty$ per a tot $\mathbf{x} \in U$.

Definició 3.5. Un punt d'equilibri $z \in S_n$ és *asimptòticament estable* si és estable i atractor alhora. Es diu que $z \in S_n$ és *globalment estable* si és estable i $x(t) \rightarrow z$ quan $t \rightarrow +\infty$, sempre que $x_i > 0$ per a tot i amb $z_i > 0$.

Aquestes definicions també poden aplicar-se al cas en què z és substituït per un conjunt tancat de punts d'equilibri o un conjunt compacte invariant.

Els punts d'equilibri de (3.4) són els punts $x \in S_n$ que satisfan $(A\mathbf{x})_i = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ per a tot $i \in S(x)$, on $S(x) = \{i \mid x_i \neq 0\}$. A més, els punts de la forma $x_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, amb un 1 en la posició i -èsima i 0 a les altres components, són sempre punts d'equilibri. Comprovem-ho:

Partint de la dinàmica:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_i &= x_i((A\mathbf{x})_i - \mathbf{x}^T A\mathbf{x}) \\
 &= 1 \cdot \left(A \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) A \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\
 &= (a_{i1} + \dots + a_{in}) - (a_{i1} + \dots + a_{in}) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n.
 \end{aligned}$$

Hi ha una relació entre els punts d'equilibri de l'equació replicadora i els equilibris de Nash. El teorema a continuació explica aquesta relació. A vegades es coneix amb el nom de *Folk Theorem* de la teoria de jocs evolutiva.

Teorema 3.3. [4] Les següents afirmacions són certes:

- (a) Si $z \in S_n$ és un equilibri de Nash, aleshores és un punt d'equilibri;
- (b) Si $z \in S_n$ és un equilibri de Nash estricte, aleshores és asimptòticament estable;
- (c) Si un punt d'equilibri $z \in S_n$ és el límit d'una òrbita interior (una òrbita $x(t) \subset \text{Int}(S_n)$) per a $t \rightarrow +\infty$, llavors z és un equilibri de Nash;
- (d) Si un punt d'equilibri $z \in S_n$ és estable, llavors és un equilibri de Nash.

A més, per a un punt d'equilibri $z \in \partial S_n$, z és un equilibri de Nash si i només si:

$$(Az)_i - z^T Az \leq 0, \quad \forall i \text{ tals que } z_i = 0.$$

El següent teorema assegura l'existència de com a mínim un equilibri de Nash.

Teorema 3.4. Cada joc té almenys un equilibri de Nash.

Per poder demostrar el teorema cal recordar el que diu el *Teorema del punt fix de Brouwer*.

Teorema del punt fix de Brouwer. Sigui K un conjunt compacte i convex en un espai euclidià i $f : K \rightarrow K$ una funció contínua, llavors existeix almenys un punt $x \in K$ tal que $f(x) = x$.

Demostració del teorema 3.4. S'afegeix un terme de pertorbació $\epsilon > 0$ a l'equació replicadora de manera que cap estratègia pugui desaparèixer per complet, fins i tot si no té gaire èxit entre els membres de la població. És a dir, considerem:

$$\dot{x}_i = x_i((A\mathbf{x})_i - \mathbf{x}^T A\mathbf{x} - n \cdot \epsilon) + \epsilon. \quad (3.5)$$

Es pot observar que aquesta equació manté la relació $\sum_i \dot{x}_i = 0$ a S_n ja que:

$$\begin{aligned}
 \sum_i \dot{x}_i \epsilon &= \sum_i x_i [Ax_i - x^T Ax - n\epsilon] + n\epsilon \\
 &= \sum_i [x_i Ax_i - x_i (x^T Ax) - x_i n\epsilon] + n\epsilon \\
 &= \sum_i [x_i Ax_i - x_i (x^T Ax)] - n\epsilon \sum_i x_i + n\epsilon \\
 &= \sum_i [x_i Ax_i - x_i (x^T Ax)] - n\epsilon + n\epsilon \\
 &= \sum_i [x_i Ax_i - x_i (x^T Ax)] = \sum_i \dot{x}_i = 0.
 \end{aligned}$$

A més, el flux en els punts de la frontera apunta cap a l'interior de S_n . Anem a veure-ho:

Suposem que $p \in \partial S_n$, llavors p serà de la forma $p = (x_1, \dots, x_n)$ i $\sum_1^n x_i = 1$ on almenys un dels $x_j = 0$.

Sense pèrdua de generalitat, suposem $p = (0, \dots, 0, x_{k+1}, \dots, x_n)$ amb $k \geq 1, k \leq n-1$. Això és, les primeres k cordenades són 0.

Llavors, sabem que

$$\sum_{i=1}^n \dot{x}_i \upharpoonright_p = 0,$$

i, per tant,

$$\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=k+1}^n x_i = 1.$$

Però $x_1 = \dots = x_k = \epsilon$ i, per tant, no hi ha punts d'equilibri a ∂S_n i a més tots els vectors $(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) \upharpoonright_{p \in \partial S_n}$ apunten cap a $\text{Int}(S_n)$, ja que els valors de x_i incrementen per a cada $i = 1, \dots, k$.

Si s'aplica una variant del Teorema del punt fix de Brouwer es té que existeix almenys un punt d'equilibri $z(\epsilon)$ a l'interior de S_n . A més,

$$(Az(\epsilon))_i - z(\epsilon)^T Az(\epsilon) - n \cdot \epsilon = \frac{-\epsilon}{z_i(\epsilon)} < 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad z_i(\epsilon) \neq 0$$

i cada punt d'acumulació z de $z(\epsilon)$ quan $\epsilon \rightarrow 0$ és un equilibri de Nash.

□

3.2.1 Classificació dels retrats de fase per $n = 2$ i $n = 3$

L'equació replicadora és una eina fonamental en la teoria dels jocs evolutius, ja que descriu com la freqüència de les estratègies en una població canvia al llarg del temps en funció del seu èxit relatiu. A nivell general, conèixer la dinàmica de l'equació replicadora permet identificar els diferents punts d'equilibri, així com la seva estabilitat, comportaments cíclics o patrons de convergència.

Definició 3.6. El *retrat de fase* és la representació geomètrica de les òrbites o trajectòries d'una equació diferencial autònoma en el seu espai de fase. És a dir, considerem un sistema dinàmic continu determinista de la forma: $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, on $x(t)$ és el vector de l'estat del sistema en el temps t , el *retrat de fase* és la partició de l'espai de fase en òrbites (trajectòries) generades per totes les possibles condicions inicials $x(0)$. Cadascuna d'aquestes òrbites és la solució del sistema dinàmic per una condició inicial específica, i es representa com una corba dins l'espai de fase.

En l'equació replicadora x_i representa la proporció d'individus del tipus i en un moment determinat i les solucions d'aquesta equació descriuen la trajectòria de com evoluciona la freqüència dels diferents tipus d'individus al llarg del temps. Per tant, mitjançant la classificació dels diferents retrats de fase es podrà comprendre millor l'evolució dels diferents tipus o de les diferents estratègies dins de la població. El concepte d'equivalència topològica és important en la classificació del comportament dels sistemes per especificar quan dos retrats de fase diferents representen el mateix comportament dinàmic qualitativament.

Definició 3.7. Es considera que dues equacions replicadores són *equivalents* si existeix un homeomorfisme entre el simplex S_n que transforma les òrbites orientades de la primera equació en òrbites de la segona equació.

Explicarem únicament els casos per $n = 2$ i per $n = 3$, ja que l'estudi en dimensions superiors està fora del nostre abast.

Per $n = 2$ es pot reduir l'equació replicadora fent $x = x_1$ i $1 - x = x_2$. De tal manera es té $x = (x_1, x_2) = (x, 1 - x)$.

Si la matriu de pagaments A

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

llavors per $x_1 = x$ es té $(Ax)_1 = a_{11}x + a_{12}(1 - x)$ i per $x_2 = 1 - x$ es té $(Ax)_2 = a_{21}x + a_{22}(1 - x)$. Per tant, l'equació replicadora es pot simplificar i quedarà de la forma següent:

$$\dot{x} = x(1 - x)((Ax)_1 - (Ax)_2). \quad (3.6)$$

En termes de la dinàmica de la població, els equilibris de Nash representen situacions on una estratègia es manté constant en el temps, és a dir, on les freqüències relatives no canvien. El que es vol estudiar és la presència d'equilibris, ja sigui a l'interior com als extrems del simplex. Es poden tenir diverses situacions:

- No hi ha cap equilibri interior, és a dir, hi ha una estratègia que domina a l'altra. D'aquesta manera, una de les dues estratègies desapareixerà, ja que la seva freqüència convergeix a 0, mentre que l'altra es mantindrà a 1. En aquest cas els equilibris de Nash seran els extrems $x = 0$ i $x = 1$ i la dinàmica acabarà amb un únic tipus de població dominant.
- Existeix un punt d'equilibri interior que pot ser estable o inestable. Si l'equilibri interior és globalment estable serà l'únic equilibri de Nash (simètric), $x = 0$ i $x = 1$ seran atractors inestables i, per tant, la dinàmica permet que els dos tipus coexisteixin. Si l'equilibri interior és inestable les dues estratègies pures $x = 0$ i $x = 1$ seran equilibris de Nash atractors i es parla de biestabilitat.

Exemple 3.1. Sigui un joc on dues empreses s'enfronten a una guerra de preus, on cada una d'elles pot fixar un preu alt o un preu baix. Si les dues empreses fixen un preu baix, el benefici per cada una d'elles serà nul. Si una empresa fixa preu baix i l'altra preu alt, l'empresa que hagi fixat el preu baix s'emporta tot el benefici $b > 0$ i si totes dues fixen un preu alt es reparteix el benefici entre les dues sent el pagament $b/2$. De tal manera, la matriu de pagament A estarà definida com:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & b/2 \end{pmatrix}$$

x representa la freqüència amb què una empresa fixa preu baix i $1 - x$ la freqüència de fixar preu alt.

- Si una empresa escull preu baix el benefici esperat serà 0 si l'altra empresa escull preu baix i b si escull preu alt.

$$(Ax)_1 = 0 \cdot x + (1 - x) \cdot b = b \cdot (1 - x).$$

- Si una empresa escull preu alt el benefici esperat serà 0 si l'altra empresa escull preu baix i $b/2$ si l'altra també escull preu alt.

$$(Ax)_2 = 0 \cdot x + (1 - x) \cdot \frac{b}{2} = \frac{b}{2} \cdot (1 - x).$$

Per tant, l'equació replicadora serà la següent:

$$\dot{x} = x(1 - x)\left(\frac{b}{2} - \frac{b}{2}x\right).$$

En aquest cas només hi ha els equilibris de Nash trivials $x = 0$ i $x = 1$ i no existeixen equilibris interiors. Això implica que, en termes de la dinàmica poblacional, una de les dues estratègies acabarà dominant per complet tota la població i, per tant, s'acabarà convergint cap a una població homogènia, on tothom fixa un preu alt o un preu baix.

Exemple 3.2. Sigui un joc de competència entre dos agricultors que poden ser del tipus competir pels recursos i el control de la collita o bé cooperar per optimitzar la collita compartint els recursos. Si els dos agricultors cooperen obtenen un benefici de 3 unitats cada un, si un coopera i l'altre competeix obtenen un benefici de 2 unitats i 4 unitats respectivament i si tots dos competeixen obtenen un benefici d'una unitat. Aquest joc pot representar-se per la següent matriu de pagaments:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Llavors l'equació replicadora serà:

$$\dot{x} = x(1 - x)(-2x + 1).$$

En aquest cas hi ha un punt d'equilibri interior $x = 1/2$ a més dels equilibris trivials $x = 0$ i $x = 1$. Aquest equilibri interior indica que, en algunes situacions, les dues estratègies poden coexistir mantenint una presència a llarg termini. Per determinar l'estabilitat dels punts d'equilibri cal mirar el signe de la derivada avaluada als punts. Si es posa $f(x) = x(1 - x)(-2x + 1)$ llavors $f'(x) = 6x^2 - 6x + 1$.

- $f'(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} < 0$ estable.
- $f'(0) = 1 > 0$ inestable.
- $f'(1) = 1 > 0$ inestable.

En aquest cas, l'equilibri interior és estable i, per tant, és l'únic equilibri de Nash, $x = 0$ i $x = 1$ són inestables, de manera que, la dinàmica permet que tant cooperadors com competidors coexisteixin.

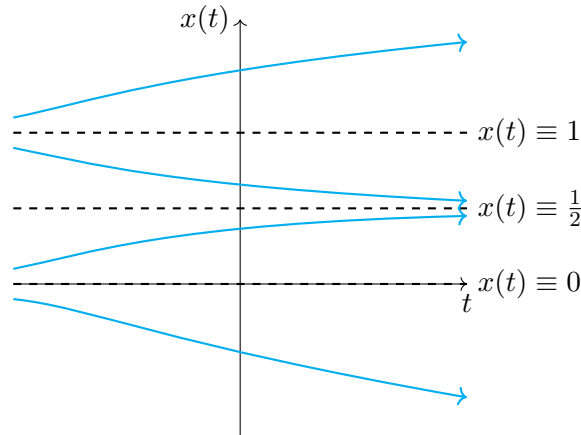


Figura 3.1: Estabilitat dels punts d'equilibri.

Per $n = 3$ l'anàlisi es complica una significativament. Un resultat important assegura que en el cas genèric no hi ha òrbites periòdiques aïllades ni tampoc hi ha cicles límit, de manera que el sistema tendirà a establir-se en punts d'equilibri, siguin estables o inestables, o en altres casos, fins i tot, pot tenir un comportament que no pot ser periòdic però sí caòtic. És a dir, el sistema no presentarà cap comportament cíclic al llarg del temps. En canvi, en casos no genèrics les dinàmiques poden arribar a ser molt més complexes. Dins dels casos genèrics es poden trobar 33 possibles retrats de fase diferents. Tot i això, si només ens fixem en la direcció del flux alguns d'aquests retrats es poden agrupar donant lloc a 19 possibles configuracions.

Exemple 3.3. Construïm l'equació replicadora del joc de pedra paper tisora, del qual ja s'ha presentat la forma normal de representació i la matriu de pagaments. Cada individu de la població pot ser del tipus pedra, paper o tisora. Sigui x_1 la freqüència de ser pedra, x_2 la freqüència de ser paper i x_3 de tisora. Cal recordar que $x_1 + x_2 + x_3 = 1$. Quan es troben dos individus, si $x_3 = 0$ llavors el tipus 2 domina al tipus 1, si $x_2 = 0$ llavors el tipus 1 domina al 3 i si $x_1 = 0$ llavors el tipus 3 domina al 2. La matriu de pagaments del joc serà:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & b_3 \\ b_1 & 0 & -a_2 \\ -a_3 & b_2 & 0 \end{pmatrix}$$

on a_i serà la quantitat que les estratègies perden contra la seva estratègia dominant i b_i el que guanyen.

El pagament esperat per x_1 serà: $(Ax)_1 = 0x_1 - a_1x_2 + b_3x_3 = -a_1x_2 + b_3x_3$.

El pagament esperat per x_2 serà: $(Ax)_2 = b_1x_1 + 0x_2 - a_2x_3 = b_1x_1 - a_2x_3$.

El pagament esperat per x_3 serà: $(Ax)_3 = -a_3x_1 + b_2x_2 + 0x_3 = -a_3x_1 + b_2x_2$.

Calculant la mitjana dels pagaments esperats de la població es tindrà:

$$x^T Ax = -a_1x_1x_2 + b_1x_1x_2 - a_2x_2x_3 + b_2x_2x_3 - a_3x_1x_3 + b_3x_1x_3.$$

De manera que l'equació replicadora d'aquest joc vindrà donada per:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1(-a_1x_2 + b_3x_3 - (-a_1x_1x_2 + b_1x_1x_2 - a_2x_2x_3 + b_2x_2x_3 - a_3x_1x_3 + b_3x_1x_3)), \\ \dot{x}_2 &= x_2(-a_2x_3 + b_1x_1 - (-a_1x_1x_2 + b_1x_1x_2 - a_2x_2x_3 + b_2x_2x_3 - a_3x_1x_3 + b_3x_1x_3)), \\ \dot{x}_3 &= x_3(-a_3x_1 + b_2x_2 - (-a_1x_1x_2 + b_1x_1x_2 - a_2x_2x_3 + b_2x_2x_3 - a_3x_1x_3 + b_3x_1x_3)). \end{aligned}$$

A més dels punts d'equilibri trivials $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ i $(0, 0, 1)$ cal mirar si hi pot haver altres equilibris a l'interior de S_3 . Farem aquest anàlisi pel cas concret on $a_i = 1$ i $b_i = 0.55$ per $i = 1, 2, 3$, de manera que la matriu de pagaments A és la següent:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0.55 \\ 0.55 & 0 & -1 \\ -1 & 0.55 & 0 \end{pmatrix}$$

L'equació replicadora d'aquest cas concret quedarà de la manera següent:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1(-x_2 + 0.55x_3 + 0.45x_1x_2 + 0.45x_1x_3 + 0.45x_2x_3), \\ \dot{x}_2 &= x_2(-x_3 + 0.55x_1 + 0.45x_1x_2 + 0.45x_1x_3 + 0.45x_2x_3), \\ \dot{x}_3 &= x_3(-x_1 + 0.55x_2 + 0.45x_1x_2 + 0.45x_1x_3 + 0.45x_2x_3). \end{aligned}$$

A més dels tres punts d'equilibri trivials tindrem que $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ també és un punt d'equilibri interior. Per estudiar l'estabilitat de cada punt cal calcular la matriu jacobiana en aquell punt i analitzar els valors propis.

- En el punt $(1, 0, 0)$ la matriu jacobiana serà:

$$\begin{pmatrix} 0 & -0.55 & 1 \\ 0 & 0.55 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

de manera que els valors propis són:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 0.55.$$

i per tant el punt $(1, 0, 0)$ té una varietat de dimensió 1 neutral associada al vap nul i una varietat de dimensió 2 que és un punt de sella amb un espai inestable de dimensió 1 associat al vap amb part real positiva i un espai estable de dimensió 1 associat al vap amb part real negativa.

- En els punts $(0, 1, 0)$ i $(0, 0, 1)$ els valors propis de la matriu jacobiana són:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 0.55.$$

de manera que els dos punts tenen les mateixes varietats associades.

- En el punt $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ la matriu jacobiana és la següent:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{-7}{30} & \frac{17}{60} \\ \frac{17}{60} & \frac{1}{10} & \frac{-7}{30} \\ \frac{-7}{30} & \frac{17}{60} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

Els valors propis d'aquesta matriu són:

$$\lambda_1 = 3/20, \quad \lambda_2 = \frac{3}{40} + \frac{-31\sqrt{3}}{120}i, \quad \lambda_3 = \frac{3}{40} + \frac{31\sqrt{3}}{120}i.$$

de manera que el punt $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ serà un punt hiperbòlic inestable. El fet que $\lambda_{2,3}$ tinguin part real positiva i siguin complexes ens indica que hi ha una varietat invariant de dimensió 2 on el comportament és focus inestable i en l'altre direcció associada a λ_1 com que el valor propi és real positiu les òrbites espiralen i al mateix temps s'allunyen.

A la Figura 3.2 es mostra el retrat de fase del joc pedra paper tisora en la varietat invariant 2 dimensional associada als valors propis λ_2 i λ_3 .

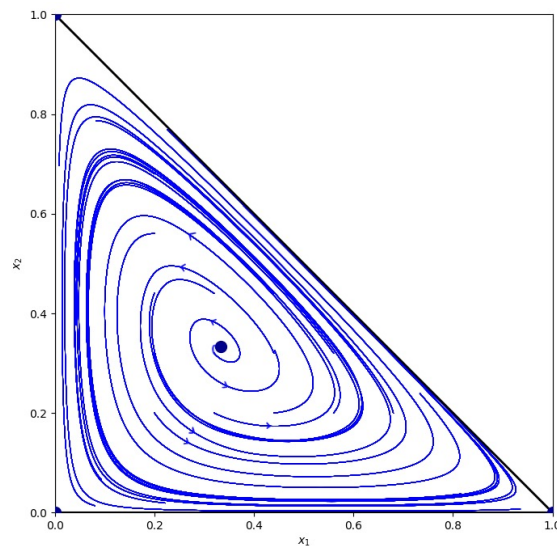


Figura 3.2: Retrat de fase del joc pedra paper tisora.

3.3 Permanència

A continuació es presentaran les equacions de *Lokta-Volterra*, també conegudes com a presa-depredador, que es tracta de n equacions diferencials no lineals que s'utilitzen per descriure dinàmiques de sistemes biològics en el que dues espècies, presa i depredador, interactuen. Aquest model va ser desenvolupat per Alfred J. Lokta al 1925 i Vito Volterra al 1926. A més, s'introduirà el concepte de *permanència*, que garanteix que si inicialment

tots els tipus estan presents a la població, aleshores a llarg termini es conservarà la diversitat i les poblacions no podran desaparèixer. Per la redacció d'aquesta secció, s'ha utilitzat el capítol 2 de Josef Hofbauer i Karl Sigmund [5].

Les equacions de *Lokta-Volterra* descriuen la dinàmica de com interactuen una presa que es denotarà per x i un depredador y . El que es vol conèixer és el creixement de cada població amb el temps i com poden coexistir depredadors i preses. Això dona lloc al següent sistema d'equacions diferencials:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax - bxy, \\ \dot{y} &= -cy + dyx.\end{aligned}$$

on $a, b, c, d > 0$. Analitzant la primera equació, és a dir el creixement de la presa, es pot observar que un gran nombre de preses faran que l'espècie creixi, mentre que si el producte de les dues espècies és elevat farà que l'espècie desaparegui.

Per models de n espècies, es té el següent sistema n -dimensional:

$$\dot{y}_i = y_i(r_i + \sum_j a_{ij}y_j) \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.7)$$

Per entendre aquestes equacions cal saber què representa cada paràmetre. Tenim que y_i denota la densitat de la població, r_i és la taxa de creixement (o decreixement) intrínseca, és a dir, la taxa de creixement natural de la població, i els a_{ij} descriuen els efectes de la població j -èssima sobre la i -èssima, que és positiu si afavoreix el creixement i negatiu si l'inhibeix. La matriu $A = (a_{ij})$ s'anomena matriu d'interacció. A més, el signe de $\dot{y}_i$ fa que l'espècie i sigui presa o sigui depredador. Tota classe d'interaccions es poden modelitzar d'aquesta manera, sempre que es pugui assumir que cada espècie influeix de manera lineal sobre el creixement.

L'espai d'estats és $\mathbb{R}_+^n = \{\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n : z_i \geq 0 \text{ per a } i = 1, \dots, n\}$. Els punts de la frontera de $\mathbb{R}_+^n$ es troben als plans de coordenades $z_i = 0$, que corresponen als estats on el tipus i està absent en la població. Aquests "costats" són invariants, ja que $z_i(t) = 0$ és l'única solució de l'equació i -èssima (3.7) que satisfà $z_i(0) = 0$. En un model així, cap espècie no existent a la població pot entrar-hi. Per tant, la frontera de $\mathbb{R}_+^n$, i en conseqüència, tot $\mathbb{R}_+^n$ són invariants sota les equacions de Lokta-Volterra. També és invariant l'interior de $\mathbb{R}_+^n$, cosa que significa que si $z_i(0) > 0$ llavors $z_i(t) > 0$ per a tot t . No obstant això, $z_i(t)$ pot aproximar-se a zero, cosa que implica l'extinció d'aquest tipus dins de la població.

Les equacions de *Lokta-Volterra* han estat àmpliament estudiades, de manera que els seus retrats de fase es coneixen prou bé. Així doncs, sovint s'utilitzen per analitzar i comparar altres models dinàmics més complexes.

Definició 3.8. Es diu que l'equació replicadora és *permanent* si existeix un conjunt compacte $K \subseteq \text{Int}(S_n)$ on $\forall x \in \text{Int}(S_n)$ hi ha T tal que $\forall t > T$ es té que $x(t) \in K$.

En altres paraules, el concepte de permanència garanteix que independentment de les condicions inicials, les trajectòries del sistema es queden dins d'una regió compacta K , un cop ha passat un cert temps. Això implica que el sistema no s'escapa d'uns certs límits i que les solucions es mantenen dins d'una zona estable del sistema dinàmic.

Teorema 3.5. Si l'equació replicadora (3.4) és permanent, llavors existeix un únic punt d'equilibri $z \in \text{Int}(S_n)$. La mitjana temporal al llarg de cada òrbita interior convergeix a

z :

$$\frac{1}{T} \int_0^T x_i(t) dt \rightarrow z_i \quad \text{quan } T \rightarrow \infty \quad \text{per a } i = 1, \dots, n.$$

Si $a_{ii} = 0$, llavors $(-1)^{n-1} \det A > 0$ i $\mathbf{z}^T A \mathbf{z} > 0$. Per altra banda, si l'equació replicadora no té cap punt d'equilibri interior, aleshores cada òrbita convergeix a la frontera de S_n .

Demostració. Suposem que (3.4) és permanent. Això vol dir que existeixen constants positives $a > 0$ i $A > 0$ tals que per a qualsevol solució $y(t)$, es compleix que $a < y_i(t) < A$ per a tot $t > 0$ i per a tot $i = 1, \dots, n$. Aquesta condició implica que les solucions són estrictament positives i estan acotades en el conjunt S_n .

A partir de les equacions de Lokta-Volterra, podem escriure el sistema com:

$$\frac{\dot{y}_i}{y_i} = r_i + \sum_j a_{ij} y_j.$$

Integrant aquesta expressió entre 0 i $T > 0$, obtenim:

$$\int_0^T \frac{\dot{y}_i}{y_i} dt = \int_0^T \left(r_i + \sum_j a_{ij} y_j \right) dt.$$

Dividint entre T , tindrem:

$$\frac{\ln(y_i(T)) - \ln(y_i(0))}{T} = r_i + \sum_j a_{ij} z_j(T),$$

on definim la mitjana temporal $z_j(T)$ com:

$$z_j(T) = \frac{1}{T} \int_0^T y_j(t) dt.$$

Ja que les solucions estan acotades, $a \leq y_j(t) \leq A$, es dedueix que les mitjanes temporals també estan acotades, és a dir:

$$a \leq z_j(T) \leq A \quad \text{per a tot } j \text{ i } T > 0.$$

Ara considerem una successió $T_k \rightarrow +\infty$. Com que les successions $\{z_j(T_k)\}$ estan acotades, pel Teorema de Bolzano-Weierstrass sabem que existeix una subsuccessió convergent per a cada j . Per tant, podem obtenir una subsuccessió T_{k_n} tal que $z_j(T_{k_n}) \rightarrow \bar{z}_j$ per a cada j .

Les successions $\frac{\ln(y_i(T_k)) - \ln(y_i(0))}{T_k}$ també estan acotades, ja que el terme $\ln(y_i(T_k))$ és limitat per la hipòtesi de permanència (és a dir, $y_i(t)$ està acotat i no es fa zero). Per tant, podem passar al límit l'expressió original:

$$\frac{\ln(y_i(T_k)) - \ln(y_i(0))}{T_k} = r_i + \sum_j a_{ij} z_j(T_k).$$

Prenent el límit quan $T_k \rightarrow +\infty$,

$$\frac{\ln(y_i(T_k)) - \ln(y_i(0))}{T_k} \rightarrow 0.$$

Així obtenim l'equació d'equilibri per a les mitjanes temporals:

$$0 = r_i + \sum_j a_{ij} \bar{z}_j \quad \text{per a tot } i = 1, \dots, n.$$

Per tant, el punt $\bar{z} = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)$ és una solució del sistema d'equilibri associat a l'equació:

$$0 = r_i + \sum_j a_{ij} \bar{z}_j.$$

Com que l'equilibri interior $z \in \text{Int}(S_n)$ és únic, es conclou que $\bar{z} = z$. Això implica que totes les subsuccions convergeixen al mateix punt z .

Així, hem demostrat que la mitjana temporal de les solucions $y_i(t)$ convergeix al punt d'equilibri z_i quan $T \rightarrow \infty$, és a dir:

$$\frac{1}{T} \int_0^T y_i(t) dt \rightarrow z_i \quad \text{quan } T \rightarrow \infty, \quad i = 1, \dots, n.$$

□

Aquest teorema proporciona una forma de poder predir i controlar el comportament de les estratègies a llarg termini i a més garanteix que el sistema, en cas de convergir, ho farà de manera suau. El cas en què no hi ha equilibris interiors serà més senzill, ja que les estratègies evolucionaran als extrems del simplex S_n .

3.4 Regles d'imitació

Fins ara hem suposat que el benefici mitjà de l'estratègia i ve donat per una funció lineal $(Ax)_i$. Aquesta suposició és vàlida quan les interaccions entre jugadors es produeixen per parelles, i els jugadors són seleccionats aleatòriament dins de la població. No obstant això, en molts casos, les funcions de benefici $a_i(x)$ dels jugadors no depenen de manera lineal de les estratègies dels altres. Basant-nos en l'article de Josef Hofbauer i Carl Sigmund [4], això dona lloc a la següent equació replicadora:

$$\dot{x}_i = x_i(a_i(x) - \bar{a}). \quad (3.8)$$

on $\bar{a} = \sum_i x_i a_i(x)$ representa la mitjana de pagaments de la població i $a_i(x)$ el pagament no lineal associat al tipus i .

Les estratègies o els tipus es poden transmetre dins d'una població a través de regles d'imitació. S'assumeix que cada individu selecciona aleatòriament un altre jugador de la població per observar la seva estratègia. Aleshores, en funció de certs paràmetres, com poden ser la diferència en els beneficis obtinguts per cada jugador o la freqüència relativa de les estratègies en la població, els individus decideixen si imitar l'estratègia observada o no. Aquest procés es modelitza a través del següent model d'entrada-sortida:

$$\dot{x}_i = x_i \sum_j (f_{ij}(x) - f_{ji}(x)) x_j, \quad (3.9)$$

on f_{ij} fa referència a la taxa amb què un jugador del tipus j adopta el tipus i .

Es podria assumir que aquesta taxa només depèn dels pagaments que rep cada jugador de manera que $f_{ij}(x) = f(a_i(x), a_j(x))$ on $f(u, v)$ defineix la regla d'imitació, on $a_i(x)$ i $a_j(x)$ representen els pagaments obtinguts pels tipus i i j respectivament.

La regla més senzilla d'imitació és imitar al millor tipus, és a dir, $f_{ij}(x) = 1$ si $a_i(x) > a_j(x)$ i $f_{ij}(x) = 0$ si $a_i(x) \leq a_j(x)$. Si el jugador i obté un major pagament que el jugador j , aleshores $f_{ij}(x) = 1$, de manera que el jugador que era del tipus j canviarà a i . Aquest enfocament presenta un problema, ja que condueix a un comportament discontinu en el sistema, perquè es produeixen salts de 0 a 1.

En aquest tipus de regles d'imitació una estratègia augmentarà si i només si el seu pagament és major en mitjana que els pagaments de la resta de jugadors de la població. Si es classifiquen els jugadors en ordre decreixent amb $a_1(x) > \dots > a_n(x)$ la dinàmica es pot descriure utilitzant una equació replicadora usant una matriu d'interacció A on $a_{ij} = 1$ si el jugador j té un pagament major que el jugador i , i conseqüentment i imitarà a j , $a_{ij} = -1$ si el pagament del jugador i és major que el de j i $a_{ii} = 0$. És a dir, la matriu A serà de la forma:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & \dots \\ 1 & 0 & -1 & \dots \\ -1 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Exemple 3.4. Reprenent l'Exemple 3.3 del joc pedra paper tisora es construirà l'equació replicadora seguint la regla d'imitar al millor. Per tant, fent servir (3.9) es tindrà:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 (f_{12}(x)x_2 - f_{21}(x)x_2 + f_{13}(x)x_3 - f_{31}(x)x_3), \\ \dot{x}_2 &= x_2 (f_{21}(x)x_1 - f_{12}(x)x_1 + f_{23}(x)x_3 - f_{32}(x)x_3), \\ \dot{x}_3 &= x_3 (f_{31}(x)x_1 - f_{13}(x)x_1 + f_{32}(x)x_2 - f_{23}(x)x_2), \end{aligned}$$

amb $f_{12}(x) = 0$ i $f_{21}(x) = 1$, ja que paper guanya a pedra, $f_{13}(x) = 1$ i $f_{31}(x) = 0$, ja que pedra guanya a tisora i $f_{23}(x) = 0$ i $f_{32}(x) = 1$, ja que tisora guanya a paper. D'aquesta manera, substituint quedarà la següent equació:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1(-x_2 + x_3), \\ \dot{x}_2 &= x_2(x_1 - x_3), \\ \dot{x}_3 &= x_3(-x_1 + x_2). \end{aligned}$$

S'observa que s'obté la mateixa equació replicadora que en el cas anterior fent $a_i = -1$ i $b_i = 1$. Com abans, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ i $(0, 0, 1)$ són punts d'equilibri trivials. Cal veure si hi ha algun punt d'equilibri a l'interior de S_3 . Si igualement $\dot{x}_1 = 0$ llavors $x_1 = 0$ o bé $x_3 = x_2$, $\dot{x}_2 = 0$ llavors $x_2 = 0$ o bé $x_1 = x_3$ i $\dot{x}_3 = 0$ llavors $x_3 = 0$ o bé $x_2 = x_1$. Com es vol estudiar l'existència d'equilibris interiors, no es contemplaran els casos $x_i = 0$. Si $x_3 = x_2$, com que $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, es té que $x_1 + 2x_2 = 1$ que implica que $x_1 = 1 - 2x_2$. De $\dot{x}_2 = 0$ es té $x_2(1 - 3x_2) = 0$ i, per tant, $x_2 = x_3 = 1/3$ i $x_1 = 1 - 2 \cdot 1/3 = 1/3$. De manera que $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ és l'únic equilibri interior. Cal estudiar l'estabilitat dels punts d'equilibri, per fer-ho cal obtenir la matriu jacobiana del sistema, que serà:

$$\begin{pmatrix} -x_2 + x_3 & -x_1 & x_1 \\ x_2 & x_1 - x_3 & -x_2 \\ -x_3 & x_3 & -x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

- En el punt $(1, 0, 0)$ els valors propis de la matriu jacobiana són: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ i $\lambda_3 = -1$. Per tant, el punt $(1, 0, 0)$ tindrà una varietat de dimensió 2 que serà una sella amb un espai inestable de dimensió 1 associat al vap positiu i un espai estable de dimensió 1 associat al vap negatiu i una varietat neutral associada al vap nul.
- En els punts $(0, 1, 0)$ i $(0, 0, 1)$ els valors propis de la matriu jacobiana tornen a ser: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ i $\lambda_3 = -1$ i, en conseqüència, els punts tindran la mateixa estabilitat que el punt anterior.
- Per últim, en el punt $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ la matriu jacobiana serà:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Els valors propis d'aquesta matriu són: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = i \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\lambda_3 = -i \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$. En aquest cas el punt és no hiperbòlic donat que els tres valors propis tenen part real 0 i, per tant, el Teorema de Hartman no pot aplicar-se. Aquí la matriu jacobiana no determina el comportament del camp no lineal i no podem concloure el comportament dins de la varietat de dimensió 2 associada als vaps λ_2 i λ_3 , ja que les òrbites poden tancar, poden fer espiral cap endins o cap enfora. Tot i això, utilitzant mètodes numèrics d'integració es pot observar que l'estructura és un centre, i per tant, estable, ja que les òrbites ni s'apropen al punt ni s'allunyen.

A la Figura 3.3 es mostra un retrat de fase de la varietat associada a λ_2 i λ_3 .

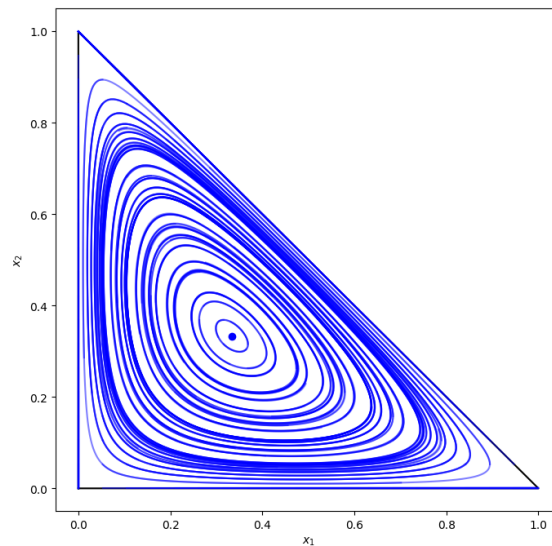


Figura 3.3: Retrat de fase del joc pedra paper tisora.

Per solucionar el problema de la discontinuïtat es pot assumir que $f(u, v)$ és una funció creixent $\phi(u - v)$ de manera que es dona una equació replicadora de la forma:

$$\dot{x}_i = x_i \sum_j (\psi(a_i(x) - a_j(x)) x_j). \quad (3.10)$$

En particular, si s'escull $\phi(u-v) = 0$ si $u-v < 0$ i $\phi(u-v) = \alpha \cdot (u-v)$ si $u-v > 0$, on α és una constant positiva, es tindrà una equació diferencial del tipus (3.8).

També pot assumir-se que la regla d'imitació és proporcional, és a dir, que els jugadors imiten aquelles estratègies que semblen tenir més èxit amb una probabilitat que depèn del benefici que guanyarien a l'adoptar aquella nova estratègia. Si el guany per canviar d'estratègia és elevat, és més probable que aquell jugador canviï la seva estratègia, però, si la diferència és petita, la probabilitat serà baixa. Això dona una equació del tipus:

$$\dot{x}_i = x_i(f(a_i(x)) - \sum_j x_j f(a_j(x))). \quad (3.11)$$

per una certa funció f creixent amb $f(u, v) = f(u) - f(v)$. En el cas en què f sigui lineal s'obté altre cop l'equació replicadora (3.8).

La regla més general per descriure la imitació seria la següent:

$$\dot{x} = x_i g_i(x). \quad (3.12)$$

on les funcions g_i satisfan $\sum x_i g_i(x) = 0$ a S_n .

Definició 3.9. Es diu que una equació replicadora és *monòtona en el guany* si, $\forall x$, es té

$$g_i(x) > g_j(x) \Leftrightarrow a_i(x) > a_j(x).$$

Per aquest tipus d'equacions es compleix el Teorema 3.3 o *Folk Theorem*.

Definició 3.10. Es diu que la dinàmica de (3.12) és *agregadament monòtona* si

$$\mathbf{y}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) > \mathbf{z}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) \Leftrightarrow \mathbf{y}^T \mathbf{a}(\mathbf{x}) > \mathbf{z}^T \mathbf{a}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in S_n.$$

Això vol dir que si un conjunt d'estratègies té un guany superior a un altre conjunt, aquesta superioritat es manté tant en termes de la dinàmica de les estratègies, com dels pagaments que reben els jugadors.

Definició 3.11. Una estratègia pura i es diu que és *estrictament dominada* si existeix algun $\mathbf{y} \in S_n$ tal que

$$a_i(\mathbf{x}) < \mathbf{y}^T \mathbf{a}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in S_n.$$

Definició 3.12. Es diu que la dinàmica de (3.12) és *monòtona convexa* si

$$a_i(x) < \mathbf{y}^T \mathbf{a}(\mathbf{x}) \longrightarrow g_i(x) < \mathbf{y}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}), \quad \forall i, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in S_n.$$

En el cas en què la dinàmica del joc és *monòtona convexa* les estratègies estrictament dominades no seran utilitzades pels jugadors.

Teorema 3.6. [4] Si la dinàmica d'un joc és convexa monòtona i l'estratègia i està iterativament estrictament dominada, llavors $x_i(t) \rightarrow 0$ per a $t \rightarrow +\infty$ al llarg de les solucions interiors.

Proposició 3.7. [4] Una equació de la forma (3.11) és monòtona convexa si i només si f és convexa.

Si f no és convexa, hi ha jocs amb estratègies estrictament dominades que sobreviuen al llarg d'un conjunt obert d'òrbites.

3.5 La millor resposta

Les regles d'imitació no requereixen que els jugadors tinguin grans capacitats cognitives, ja que es basen en l'observació del comportament dels altres jugadors i en copiar les seves estratègies si el rendiment que proporcionen és millor. El mètode de la resposta òptima permet que alguns jugadors revisin les seves estratègies i puguin escollir la millor resposta possible, que es denotarà per $BR(x)$, que es basa en l'estratègia mitjana actual de la població que està representada per $\mathbf{x}$. En aquest context, els jugadors han de tenir unes capacitats cognitives superiors, ja que analitzen les situacions abans de prendre decisions. Això dona lloc a la dinàmica de la millor resposta $BR(x)$ que és el resultat de la diferència entre la millor resposta i l'estratègia mitjana actual. Prenent com a referència l'article de Josef Hofbauer i Carl Sigmund [4], es té:

$$\dot{\mathbf{x}} \in BR(x) - \mathbf{x}. \quad (3.13)$$

Com que les millors respostes no són úniques, en general, es parla d'una inclusió diferencial en comptes d'una equació diferencial. Per a funcions de guanys contínues $a_i(x)$ el conjunt de les possibles millors respostes serà convex, compacte i semicontinu superior, és a dir, que els canvis respecte de $\mathbf{x}$ estan controlats.

Les solucions $\mathbf{x}$ de la inclusió diferencial seran funcions *Lipschitz* que satisfan (3.13) per a tot $t \geq 0$. Si la millor resposta $BR(x)$ és una única estratègia (pura) $\mathbf{b}$, la solució vindrà donada per $\mathbf{x}(t) = (1 - e^{-t})\mathbf{b} + e^{-t}\mathbf{x}$, que mostra que a mesura que el temps augmenta l'estratègia inicial s'acosta a la millor resposta $\mathbf{b}$ seguint una trajectòria lineal. Pot passar que quan els jugadors s'apropen a $\mathbf{b}$, ja no sigui la millor resposta única i, per tant, hi pugui haver un canvi en la dinàmica, on poden sorgir noves respostes òptimes.

Per a cada $\mathbf{x}$, sempre existeix una estratègia $\mathbf{b}$ que no només és una millor resposta a $\mathbf{x}$, sinó que també és una millor resposta contra si mateixa. Si restringim el joc a les millors respostes a $\mathbf{x}$, aquesta estratègia serà un equilibri de Nash en aquest subjoc, el qual serà la restricció al simplex $BR(x)$. Llavors, si el joc és lineal, es té $\mathbf{b} \in BR((1 - \epsilon)\mathbf{x} + \epsilon\mathbf{b})$ per a $\epsilon \geq 0$. Si s'aplica iterativament aquesta construcció a jocs lineals genèrics, s'obté una solució lineal a trossos de (3.13) que està definida per a tot $t > 0$.

El sistema resultant es descriu com un sistema semidinàmic amb valors múltiples que vol dir que el sistema no té una única trajectòria, sinó que hi ha varies solucions que poden evolucionar al mateix temps. En aquest cas, el simplex S_n només és invariant cap endavant i la frontera ja no cal que sigui invariant, sinó que estratègies que inicialment no estaven presents poden aparèixer i augmentar la seva freqüència. És per aquest motiu que es diu que la dinàmica de la millor resposta és una dinàmica innovadora, ja que pot introduir estratègies noves al joc. Això és una de les principals diferències amb la dinàmica d'imitació, que simplement manté les estratègies que ja estaven presents a la població.

En aquest cas, els equilibris de Nash estrictes són asimptòticament estables i les estratègies estrictament dominades són eliminades de les solucions de la dinàmica de la millor resposta.

Pel que fa a la classificació dels retrats de fase, les dinàmiques de la millor resposta són molt semblants a la dinàmica del replicador pel cas 2-dimensional i es tornen a tenir 3 casos possibles. En canvi, per $n = 3$ hi ha moltes més diferències amb la dinàmica del replicador.

Capítol 4

Jocs Eco-evolutius

La teoria de jocs evolutiva que s'ha estudiat fins ara tracta de modelar com canvien les estratègies dels individus d'una població sense tenir en compte la interacció que pot tenir l'entorn amb aquestes estratègies. En canvi, amb els jocs eco-evolutius, l'entorn passa a tenir un paper dinàmic que reacciona a les estratègies, ja que algunes poden deteriorar-lo. En el model que es presentarà s'introdueix una nova variable, l'entorn, que permetrà analitzar com la interacció canvia de forma dinàmica en resposta a les accions dels individus, cosa que fa que hi hagi una retroalimentació que influeix en l'evolució de les estratègies. Desenvolupaments recents en aquesta àrea han mostrat que les retroalimentacions entre les estratègies dels individus i l'entorn poden modificar la matriu de pagaments subjacent, alterant les dinàmiques poblacionals de manera significativa. Aquest tipus de retroalimentació entre estratègies i l'entorn es troba en sistemes complexos com ecosistemes, colònies d'insectes, poblacions microbianes o estructures socials humanes, i permet analitzar de manera més realista les dinàmiques d'interacció en xarxes poblacionals.

Un dels grans interrogants en els models de jocs eco-evolutius és com la cooperació pot mantenir-se dins d'una població quan els pagaments de cada jugador es veuen influenciats no només per l'acció dels altres individus, sinó també per l'entorn. Aquest estudi se centrarà en jocs simètrics, on tots els jugadors tenen el mateix conjunt d'estratègies i els pagaments només depenen de les estratègies triades. Aquesta simetria permet estudiar el model en comunitats diferenciades, analitzant tant les interaccions internes com entre comunitats.

A més, es considera que l'entorn no depèn ni de nodes individuals ni és compartit globalment, sinó que està associat a les arestes entre jugadors, assignant una variable ambiental específica per a cada tipus d'aresta (dins d'una comunitat o entre comunitats). Aquest enfocament permet modelar situacions on dos jugadors que comparteixen una aresta poden millorar o deteriorar conjuntament el seu entorn. Seguint l'article de Katherine Betz, Feng Fu i Naoki Masuda [1] es presentarà el model i s'estudiarà l'estabilitat dels diferents punts d'equilibri.

4.1 Model

Suposem que es tenen dues comunitats amb $N/2$ jugadors a cada una. Cada jugador pot interactuar amb individus de la seva comunitat o de l'altra comunitat. D'aquesta manera, dos jugadors de la mateixa comunitat interactuen amb una freqüència de $1 - \delta$ i

dos jugadors de diferents comunitats interactuen amb una freqüència δ , on $0 < \delta < 1$.

Cada jugador pot cooperar o defectar i a més dos jugadors que formin una interacció poden millorar o empitjorar l'entorn que comparteixen. Així doncs, $n_1 \in [0, 1]$ ($n_2 \in [0, 1]$) és l'estat de l'entorn de la comunitat 1 (comunitat 2), que representa les connexions dins de la comunitat 1 (comunitat 2) i $n_{12} \in [0, 1]$ l'estat de l'entorn quan un jugador de la comunitat 1 i un de la comunitat 2 interactuen. Es considera que si n (on n representa n_1 , n_2 o n_{12}) és proper a 0 l'estat és favorable a cooperació i si és proper a 1 favorable a defecció.

La matriu de pagaments ve definida com:

$$A(n) = (1 - n) \begin{pmatrix} R_0 & S_0 \\ T_0 & P_0 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} R_1 & S_1 \\ T_1 & P_1 \end{pmatrix}$$

on n pot ser n_1 , n_2 o n_{12} (recordem que n per definició és sempre un número entre 0 i 1). És a dir, es tracta d'una combinació lineal entre un entorn favorable a cooperar i un entorn favorable a no cooperar. Quan $n = 0$ la cooperació és l'únic equilibri de Nash, és a dir, suposem que $R_0 > T_0$ i $S_0 > P_0$. Així, faci el que faci l'altre jugador cooperar sempre rep un millor pagament. En canvi, quan $n = 1$ la no cooperació és l'únic equilibri de Nash i $R_1 < T_1$ i $S_1 < P_1$. Així doncs, s'ha de complir

$$R_0 > T_0, \quad S_0 > P_0, \quad R_1 < T_1 \quad \text{i} \quad S_1 < P_1. \quad (4.1)$$

Siguin q_1 i q_2 vectors 2-dimensionals associats a un jugador de la comunitat 1 i comunitat 2 respectivament, on la primera entrada del vector és el pagament per un cooperador i la segona entrada el pagament per un defector. Es denota per x la fracció de cooperadors de la comunitat 1, $1 - x$ la fracció de no cooperadors de la comunitat 1, y la fracció de cooperadors de la comunitat 2 i $1 - y$ la fracció de no cooperadors de la comunitat 2, de manera que $\mathbf{x} = (x \quad 1 - x)^T$ i $\mathbf{y} = (y \quad 1 - y)^T$. Aleshores, es té que els pagaments associats als jugadors de cada comunitat depenen del pagament obtingut jugant amb jugadors de la mateixa comunitat i el pagament de jugar amb jugadors de l'altra comunitat:

$$\begin{aligned} q_1 &= (1 - \delta)A(n_1)\mathbf{x} + \delta A(n_{12})\mathbf{y}, \\ q_2 &= (1 - \delta)A(n_2)\mathbf{y} + \delta A(n_{12})\mathbf{x}. \end{aligned}$$

S'està suposant que la competència entre cooperació i defecció és a nivell local, ja que els jugadors que viuen en diferents comunitats poden percebre entorns diferents a causa del diferent estat de l'ambient. Llavors la dinàmica replicadora de cooperadors de cada comunitat depèn del nombre de cooperadors i de defectors i de la diferència de pagaments entre cooperadors i no cooperadors, i ve donada per:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(1 - x)(q_{11} - q_{12}), \\ \dot{y} &= y(1 - y)(q_{21} - q_{22}). \end{aligned}$$

La dinàmica de l'estat de l'entorn de cada tipus de connexió és:

$$\begin{aligned} \dot{n}_1 &= n_1(1 - n_1)[x(\theta_1 + 1) - 1], \\ \dot{n}_2 &= n_2(1 - n_2)[y(\theta_2 + 1) - 1], \\ \dot{n}_{12} &= n_{12}(1 - n_{12})[z(\theta_{12} + 1) - 1]. \end{aligned}$$

on $z = (x + y)/2$ i $\theta_1 > 0$, $\theta_2 > 0$, $\theta_{12} > 0$ representen la capacitat que té la cooperació per millorar l'entorn. Dit d'una altra manera, són la proporció de millora de la variable ambiental pel respectiu tipus de connexió. Si θ_1 és gran, per exemple, un nombre petit de cooperadors pot millorar significativament l'entorn de la comunitat 1.

Posant $R_3 = R_0 - R_1$, $P_3 = P_0 - P_1$, $T_3 = T_0 - T_1$ i $S_3 = S_0 - S_1$, el següent sistema 5-dimensional modela la dinàmica dels models eco-evolutius.

$$\dot{n}_1 = n_1(1 - n_1) [x(\theta_1 + 1) - 1], \quad (4.2)$$

$$\dot{n}_2 = n_2(1 - n_2) [y(\theta_2 + 1) - 1], \quad (4.3)$$

$$\dot{n}_{12} = n_{12}(1 - n_{12}) [z(\theta_{12} + 1) - 1], \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \dot{x} = x(1 - x) & \left[(R_0 - T_0 - S_0 + P_0)x + S_0 - P_0 - n_1(S_3 - P_3) \right. \\ & - n_1x(R_3 - T_3 - S_3 + P_3) - \delta \left((R_0 - T_0 - S_0 + P_0)(x - y) \right. \\ & \left. \left. - (R_3 - T_3 - S_3 + P_3)(n_1x - n_{12}y) - (S_3 - P_3)(n_1 - n_{12}) \right) \right], \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \dot{y} = y(1 - y) & \left[(R_0 - T_0 - S_0 + P_0)y + S_0 - P_0 - n_2(S_3 - P_3) \right. \\ & - n_2y(R_3 - T_3 - S_3 + P_3) - \delta \left((R_0 - T_0 - S_0 + P_0)(y - x) \right. \\ & \left. \left. - (R_3 - T_3 - S_3 + P_3)(n_2y - n_{12}x) - (S_3 - P_3)(n_2 - n_{12}) \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.5)$$

En resum, aquest model combina la dinàmica evolutiva dels jugadors (com es propaguen la cooperació i la defecció) amb un entorn que també evoluciona com a resposta de les accions dels jugadors.

Abans de poder analitzar l'estabilitat del sistema que proporciona el model, cal comprovar que hi ha una relació entre les equacions del sistema obtingut en jocs evolutius pel cas bidimensional i les equacions en el cas de jocs eco-evolutius.

Recordem que, pel cas $n = 2$ en Jocs Evolutius havíem definit l'equació replicadora de la següent manera:

$$\dot{x} = x(1 - x)[(Ax)_1 - (Ax)_2].$$

En el model que acabem d'introduir, el paràmetre δ representa la interacció entre membres de dues comunitats. Si assumim que $\delta = 0$, de manera que només hi ha interacció entre membres de la mateixa comunitat, la dinàmica dels cooperadors d'una comunitat (per exemple, la comunitat 1) es pot escriure com:

$$\dot{x} = x(1 - x)[q_{11} - q_{12}],$$

que és equivalent a:

$$\dot{x} = x(1 - x)[(A(n_1)x)_1 - (A(n_1)x)_2],$$

ja que pel cas $\delta = 0$, tenim que:

$$q_1 = A(n_1)x,$$

i això correspon a l'equació replicadora anterior.

4.2 Anàlisi de l'estabilitat: cas $\theta_1 = \theta_2 = \theta_{12}$

En el següent apartat, per simplificar l'estudi del sistema dinàmic de dimensió 5 resultant del model, s'assumeixen algunes simetries. Això permetrà fer una anàlisi de l'estabilitat de la dinàmica replicadora d'un sistema 3-dimensional. Per fer-ho, s'analitzaran els punts d'equilibri als vèrtexs, a l'interior, als costats i a les cares, tenint en compte que les solucions del sistema dinàmic estan definides al cub unitat.

Suposem que tenim $\theta_1 = \theta_2$ i que la condició inicial satisfà $x = y$ i $n_1 = n_2$. Aleshores, $x = y$ i $n_1 = n_2$ són certes per a tot $t > 0$. Assumim també que $\theta_1 = \theta_2 = \theta_{12}$, de manera que el sistema 5-dimensional inicial es convertirà en el següent sistema 3-dimensional:

$$\begin{aligned} \dot{x} = x(1-x) & \left[(R_0 - T_0 - S_0 + P_0)x + S_0 - P_0 \right. \\ & \left. + (-n_1 + \delta n_1 - \delta n_{12})((R_3 - T_3 - S_3 + P_3)x + (S_3 - P_3)) \right], \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\dot{n}_1 = n_1(1-n_1) \left[x(\theta_1 + 1) - 1 \right], \quad (4.7)$$

$$\dot{n}_{12} = n_{12}(1-n_{12}) \left[x(\theta_1 + 1) - 1 \right]. \quad (4.8)$$

Per estudiar l'estabilitat dels punts d'equilibri cal conèixer la matriu jacobiana del sistema $J(x, n_1, n_{12})$. Posant $g(x, n_1, n_{12}) = q_{11} - q_{12}$ per simplificar la matriu $J(x, n_1, n_{12})$ dona

$$\begin{pmatrix} x(1-x)\frac{\partial g}{\partial x} + (1-2x)g(x, n_1, n_{12}) & x(1-x)\frac{\partial g}{\partial n_1} & x(1-x)\frac{\partial g}{\partial n_{12}} \\ n_1(1-n_1)(\theta_1 + 1) & (1-2n_1)(x\theta_1 + x - 1) & 0 \\ n_{12}(1-n_{12})(\theta_1 + 1) & 0 & (1-2n_{12})(x\theta_1 + x - 1) \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

4.2.1 Equilibris als vèrtexs

Els vèrtexs seran tots els punts tals que $x, n_1, n_{12} \in \{0, 1\}$. Avaluant la matriu jacobiana (4.9) en cada un dels vèrtexs obtenim:

- En el vèrtex $(0,0,0)$

$$J(0,0,0) = \begin{pmatrix} S_0 - P_0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- En el vèrtex $(1,0,0)$

$$J(1,0,0) = \begin{pmatrix} T_0 - R_0 & 0 & 0 \\ 0 & \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_{12} \end{pmatrix}$$

- En el vèrtex $(0,1,0)$

$$J(0,1,0) = \begin{pmatrix} S_0\delta - P_0\delta + S_1(1-\delta) - P_1(1-\delta) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- En el vèrtex $(0,0,1)$

$$J(0,0,1) = \begin{pmatrix} S_1\delta - P_1\delta + S_0(1-\delta) - P_0(1-\delta) & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- En el vèrtex $(1,1,0)$

$$J(1,1,0) = \begin{pmatrix} T_0\delta - R_0\delta + T_1(1-\delta) - R_1(1-\delta) & 0 & 0 \\ 0 & -\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_{12} \end{pmatrix}$$

- En el vèrtex $(1,0,1)$

$$J(1,0,1) = \begin{pmatrix} T_1\delta - R_1\delta + T_0(1-\delta) - R_0(1-\delta) & 0 & 0 \\ 0 & \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\theta_{12} \end{pmatrix}$$

- En el vèrtex $(0,1,1)$

$$J(0,1,1) = \begin{pmatrix} S_1 - P_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- En el vèrtex $(1,1,1)$

$$J(1,1,1) = \begin{pmatrix} T_1 - R_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\theta_{12} \end{pmatrix}$$

Com que $S_0 - P_0 > 0$, $T_0 - R_0 < 0$, $S_1 - P_1 < 0$ i $T_1 - R_1 > 0$ tenim que en tots els punts hi ha almenys un valor propi positiu i un de negatiu de manera que cada punt d'equilibri té un subespai invariant on el comportament de les solucions és tipus sella.

4.2.2 Equilibris a l'interior

Els punts d'equilibri de l'interior del cub unitat han de complir $0 < x^*, n_1^*, n_{12}^* < 1$. Imposant $\dot{n}_1 = 0$ i $\dot{n}_{12} = 0$ tenint en compte que $n_1, n_{12} \notin \{0, 1\}$, tindrem que $x^* = \frac{1}{\theta_1 + 1}$. Ara, substituint x^* a l'equació (4.6) i imposant $\dot{x} = 0$ tindrem

$$\left[(R_0 - T_0 - S_0 + P_0) \frac{1}{\theta_1 + 1} + S_0 - P_0 + (-n_1 + \delta n_1 - \delta n_{12}) \left((P_3 - T_3 - S_3 + P_3) \frac{1}{\theta_1 + 1} + (S_3 - P_3) \right) \right] = 0.$$

Simplificant, obtenim que els equilibris n_1^* i n_{12}^* han de satisfer

$$n_1^* - n_1^*\delta + n_{12}^* = \frac{R_0 + T_0 + S_0\theta_1 - P_0\theta_1}{R_3 - T_3 + S_3\theta_1 - P_3\theta_1}. \quad (4.10)$$

Qualsevol punts n_1^* i n_{12}^* que compleixin aquesta equació són punts d'equilibri, és a dir, no hi ha un únic punt d'equilibri, sinó una corba de punts fixos i, per tant, la situació és degenerada i no podem fer servir la matriu jacobiana per analitzar l'estabilitat dels punts d'equilibri.

4.2.3 Equilibris a les arestes

Els punts d'equilibri a les arestes del cub unitat han de complir que una de les variables x^*, n_1^*, n_{12}^* prengui valors entre 0 i 1 i les altres dues siguin 0 o 1. Si $x^* = 1$ tindrem $\dot{n}_1 = n_1(1 - n_1)\theta_1$ i $\dot{n}_{12} = n_{12}(1 - n_{12})\theta_1$ i igualant a 0 com que $\theta_1 > 0$ ha de ser $n_1, n_{12} \in \{0, 1\}$ cosa que no pot passar. Si $x^* = 0$ tindrem $\dot{n}_1 = n_1(1 - n_1)(-1)$ i $\dot{n}_{12} = n_{12}(1 - n_{12})(-1)$ i també és impossible pel mateix motiu. Així tindrem que $0 < x^* < 1$ i $n_1, n_{12} \in \{0, 1\}$. Si $(n_1, n_{12}) = (0, 0)$ llavors imposant $\dot{x} = 0$ tindrem que $(R_0 - T_0 - S_0 + P_0)x + S_0 - P_0 = 0$ i com que $x^* \in (0, 1)$ això fa que s'incompleixi (4.1) i, per tant, no pot ser. Seguint uns arguments similars obtenim que $(n_1, n_{12}) = (1, 1)$ tampoc té sentit. D'aquesta manera tindrem dos equilibris $(x^*, 0, 1)$ i $(x^*, 1, 0)$.

Si $(n_1, n_{12}) = (0, 1)$ llavors tindrem

$$\dot{x} = x(1 - x) \left((R_0 - T_0 - S_0 + P_0)x + S_0 - P_0 - \delta(S_3 - P_3) - \delta x(R_3 - T_3 - S_3 + P_3) \right).$$

com que $x^* \notin \{0, 1\}$ igualant a 0

$$(R_0 - T_0 - S_0 + P_0)x + S_0 - P_0 - \delta(S_3 - P_3) - \delta x(R_3 - T_3 - S_3 + P_3) = 0.$$

i aïllant obtenim

$$x^* = \frac{P_0 - S_0 + \delta(S_3 - P_3)}{R_0 - T_0 - S_0 + P_0 - \delta(R_3 - T_3 - S_3 + P_3)}. \quad (4.11)$$

De manera que en el punt d'equilibri $(x^*, n_1^*, n_{12}^*) = \left(\frac{P_0 - S_0 + \delta(S_3 - P_3)}{R_0 - T_0 - S_0 + P_0 - \delta(R_3 - T_3 - S_3 + P_3)}, 0, 1 \right)$ la matriu jacobiana (4.9) quedarà

$$\begin{pmatrix} J_{11}^{(1)} & J_{12}^{(1)} & J_{13}^{(1)} \\ 0 & J_{22}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & J_{33}^{(1)} \end{pmatrix}$$

on

$$J_{11}^{(1)} = \frac{[(P_0 - S_0)(1 - \delta) + \delta(P_1 - S_1)][(R_0 - T_0)(1 - \delta) + \delta(R_1 - T_1)]}{R_0 - T_0 - S_0 + P_0 - \delta(R_3 - T_3 - S_3 + P_3)},$$

$$J_{12}^{(1)} = \frac{(1 - \delta)\omega[(P_0 - S_0)(1 - \delta) + \delta(P_1 - S_1)][(R_0 - T_0)(1 - \delta) + \delta(R_1 - T_1)]}{(R_0 - T_0 - S_0 + P_0 - \delta(R_3 - T_3 - S_3 + P_3))^3},$$

$$J_{13}^{(1)} = \frac{\delta\omega[(P_0 - S_0)(1 - \delta) + \delta(P_1 - S_1)][(R_0 - T_0)(1 - \delta) + \delta(R_1 - T_1)]}{(R_1 - T_1 - S_1 + P_1 + \delta(R_3 - T_3 - S_3 + P_3))^3},$$

$$J_{22}^{(1)} = \frac{-R_0 + T_0 + P_0\theta_1 - S_0\theta_1 + \delta(R_3 - T_3 - P_3\theta_1 + S_3\theta_1)}{R_0 - T_0 - S_0 + P_0 - \delta(R_3 - T_3 - S_3 + P_3)},$$

$$J_{33}^{(1)} = -J_{22}^{(1)}.$$

amb

$$\omega = (P_0 - S_0)(R_1 - T_1) - (P_1 - S_1)(R_0 - T_0).$$

D'aquesta manera, els valors propis son $\lambda_1 = J_{11}^{(1)}$, $\lambda_2 = J_{22}^{(1)}$, $\lambda_3 = J_{33}^{(1)}$. Cal notar que els tres valors propis tenen el mateix denominador, d'aquesta manera, mirarem primer el signe del denominador analitzant 4 casos i dintre de cada cas analitzarem el signe del numerador de cada valor propi. Per simplificar la notació posem el següent:

$$\begin{aligned}\gamma &= R_3 - T_3 - S_3 + P_3, \\ \mu &= R_0 - T_0 - S_0 + P_0 - \delta\gamma, \\ \rho &= R_3 - T_3 + S_3\theta_1 - P_3\theta_1.\end{aligned}$$

Cas 1: $\gamma > 0$ i $\mu > 0$. Tindrem que γ és positiu si es compleix

$$R_0 - T_0 + T_1 - R_1 > S_0 - P_0 - S_1 + P_1.$$

Aleshores, μ és positiu si

$$\delta < \frac{R_0 - T_0 - S_0 + P_0}{\gamma}. \quad (4.12)$$

Com que $\delta > 0$ els valors que satisfacin (4.12) han de complir que

$$R_0 - T_0 > S_0 - P_0.$$

El valor propi $J_{22}^{(1)}$ és negatiu si

$$\delta < \frac{R_0 - T_0 - P_0\theta_1 + S_0\theta_1}{\rho}.$$

El valor propi $J_{33}^{(1)}$ és negatiu si

$$\delta > \frac{R_0 - T_0 - P_0\theta_1 + S_0\theta_1}{\rho}.$$

Per tant, cal que

$$\delta = \frac{R_0 - T_0 - P_0\theta_1 + S_0\theta_1}{\rho}. \quad (4.13)$$

Ara, perquè $J_{11}^{(1)}$ sigui negatiu s'ha de complir

$$\delta < \min\left\{\frac{P_0 - S_0}{P_0 - S_0 - P_1 + S_1}, \frac{R_0 - T_0}{R_0 - T_0 - R_1 + T_1}\right\}. \quad (4.14)$$

o bé

$$\delta > \max\left\{\frac{P_0 - S_0}{P_0 - S_0 - P_1 + S_1}, \frac{R_0 - T_0}{R_0 - T_0 - R_1 + T_1}\right\}. \quad (4.15)$$

Però no hi ha cap δ que satisfaci (4.12), (4.13) i (4.14) o bé (4.12), (4.13) i (4.15).

Cas 2: $\gamma > 0$ i $\mu < 0$. Si $\gamma > 0$ llavors $\mu < 0$ si

$$\delta > \frac{R_0 - T_0 - S_0 + P_0}{\gamma}. \quad (4.16)$$

Perquè δ satisfent (4.16) existeixi i estigui entre 0 i 1 cal que

$$R_0 - T_0 > S_0 - P_0 \quad \text{i} \quad R_1 - T_1 < S_1 - P_1.$$

Perquè $J_{22}^{(1)}$ i $J_{33}^{(1)}$ siguin negatius cal

$$\delta > \frac{R_0 - T_0 - P_0\theta_1 + S_0\theta_1}{\rho}.$$

i

$$\delta < \frac{R_0 - T_0 - P_0\theta_1 + S_0\theta_1}{\rho}.$$

Això dona

$$\delta = \frac{R_0 - T_0 - P_0\theta_1 + S_0\theta_1}{\rho}. \quad (4.17)$$

Perquè $J_{11}^{(1)}$ sigui negatiu cal que el numerador sigui positiu i, per tant, hem de tenir que $(P_0 - S_0)(1 - \delta) + \delta(P_1 - S_1)$ i $(R_0 - T_0)(1 - \delta) + \delta(R_1 - T_1)$ siguin positius o negatius alhora.

Si els dos son positius obtenim

$$\delta > \frac{P_0 - S_0}{P_0 - S_0 - P_1 + S_1}, \quad (4.18)$$

i

$$\delta < \frac{R_0 - T_0}{R_0 - T_0 - R_1 + T_1}. \quad (4.19)$$

Però no existeix cap δ satisfent (4.16), (4.17), (4.18) i (4.19) alhora.

Si els dos son negatius llavors

$$\delta < \frac{P_0 - S_0}{P_0 - S_0 - P_1 + S_1}, \quad (4.20)$$

i

$$\delta > \frac{R_0 - T_0}{R_0 - T_0 - R_1 + T_1}. \quad (4.21)$$

Amb un δ satisfent (4.20) i (4.21) s'ha de satisfer

$$\frac{R_0 - T_0}{R_0 - T_0 - R_1 + T_1} < \frac{P_0 - S_0}{P_0 - S_0 - P_1 + S_1}.$$

que és equivalent a

$$(P_0 - S_0)(R_1 - T_1) > (P_1 - S_1)(R_0 - T_0). \quad (4.22)$$

Aquest valor $\delta \in (0, 1)$ existeix si i només si RHS de (4.20) és positiu i RHS de (4.21) és menor que 1. La primera sempre es compleix perquè $P_0 - S_0 < 0$ i $S_1 - P_1 < 0$ i la segona sempre es compleix perquè $R_0 - T_0 > 0$ i $T_1 - R_1 < 0$. La intersecció de totes les equacions que defineixen δ (4.16), (4.17), (4.20) i (4.21) es pot resumir com

$$\delta = \frac{R_0 - T_0 - P_0\theta_1 + S_0\theta_1}{\rho}. \quad (4.23)$$

Cas 3: $\gamma < 0$ i $\mu > 0$. Si $\gamma < 0$ llavors s'ha de complir

$$R_0 - T_0 - R_1 + T_1 < S_0 - P_0 - S_1 + P_1.$$

Ara, $\mu > 0$ si i només si se satisfà (4.16). Perquè δ estigui ben definit i sigui menor que 1 cal que

$$R_1 - T_1 < S_1 - P_1 \quad \text{i} \quad R_0 - T_0 < P_0 - S_0.$$

Com que $\mu > 0$ obtenim altre cop que s'han de satisfer (4.13), (4.14) i (4.15) i tornem a tenir altre cop que no pot existir δ que satisfaci totes les condicions alhora.

Cas 4: $\gamma < 0$ i $\mu < 0$. Per tal que $\gamma < 0$ i $\mu < 0$ cal que es compleixi l'equació (4.12) i perquè δ estigui ben definida s'ha de complir $R_0 - T_0 > S_0 - P_0$. Aquest cas dona un resultat anàleg al cas 2 i trobem que l'equilibri és estable si es compleixen les equacions (4.22) i (4.23).

En cas que $\delta \neq \frac{R_0 - T_0 - P_0 \theta_1 + S_0 \theta_1}{\rho}$ obtindrem que la matriu jacobiana té dos valors propis positius i un de negatiu.

Si $(n_1, n_{12}) = (1, 0)$ tindrem

$$\dot{x} = x(1-x) \left[(R_0 - T_0 - S_0 + P_0)x + S_0 - P_0 + (\delta - 1) \left((R_3 - T_3 - S_3 + P_3)x + S_3 - P_3 \right) \right].$$

igualant a 0 i aïllant obtenim

$$x^* = \frac{P_1 - S_1 + \delta(P_3 - S_3)}{R_1 - T_1 - S_1 + P_1 + \delta(R_3 - T_3 - S_3 + P_3)}. \quad (4.24)$$

De manera que en el punt d'equilibri $(x^*, n_1^*, n_{12}^*) = \left(\frac{P_1 - S_1 + \delta(P_3 - S_3)}{R_1 - T_1 - S_1 + P_1 + \delta(R_3 - T_3 - S_3 + P_3)}, 1, 0 \right)$ la matriu jacobiana (4.9) quedarà

$$\begin{pmatrix} J_{11}^{(2)} & J_{12}^{(2)} & J_{13}^{(2)} \\ 0 & J_{22}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & J_{33}^{(2)} \end{pmatrix}$$

on

$$J_{11}^{(2)} = \frac{[(P_1 - S_1)(1 - \delta) + \delta(P_0 - S_0)][(R_1 - T_1)(1 - \delta) + \delta(R_0 - T_0)]}{R_1 - T_1 - S_1 + P_1 + \delta(R_3 - T_3 - S_3 + P_3)},$$

$$J_{12}^{(2)} = \frac{(1 - \delta)\omega[(P_1 - S_1)(1 - \delta) + \delta(P_0 - S_0)][(R_1 - T_1)(1 - \delta) + \delta(R_0 - T_0)]}{(R_1 - T_1 - S_1 + P_1 + \delta(R_3 - T_3 - S_3 + P_3))^3},$$

$$J_{13}^{(2)} = \frac{\delta\omega[(P_1 - S_1)(1 - \delta) + \delta(P_0 - S_0)][(R_1 - T_1)(1 - \delta) + \delta(R_0 - T_0)]}{(R_0 - T_0 - S_0 + P_0 - \delta(R_3 - T_3 - S_3 + P_3))^3},$$

$$J_{22}^{(2)} = \frac{-R_1 + T_1 + P_1\theta_1 - S_1\theta_1 - \delta(R_3 - T_3 - P_3\theta_1 + S_3\theta_1)}{R_1 - T_1 - S_1 + P_1 + \delta(R_3 - T_3 - S_3 + P_3)},$$

$$J_{33}^{(2)} = -J_{22}^{(2)}.$$

amb

$$\omega = (P_0 - S_0)(R_1 - T_1) - (P_1 - S_1)(R_0 - T_0).$$

D'aquesta manera, els valors propis son $\lambda_1 = J_{11}^{(2)}, \lambda_2 = J_{22}^{(2)}, \lambda_3 = J_{33}^{(2)}$. Cal notar que els tres valors propis tenen el mateix denominador, d'aquesta manera, mirarem primer el signe del denominador analitzant 4 casos i dintre de cada cas analitzarem el signe del numerador de cada valor propi. Per simplificar la notació posem el següent

$$\begin{aligned}\gamma &= R_3 - T_3 - S_3 + P_3, \\ \mu_2 &= R_1 - T_1 - S_1 + P_1 + \delta\gamma, \\ \rho &= R_3 - T_3 + S_3\theta_1 - P_3\theta_1.\end{aligned}$$

Cas 1: $\gamma > 0$ i $\mu_2 > 0$. Tindrem que γ és positiu si es compleix

$$R_0 - T_0 + T_1 - R_1 > S_0 - P_0 - S_1 + P_1.$$

Aleshores, μ_2 és positiu si

$$\delta > \frac{-R_1 + T_1 + S_1 - P_1}{\gamma}. \quad (4.25)$$

Per tal que $\delta > 0$ estigui ben definit i sigui menor que 1 els valors que satisfacin (4.25) han de complir que

$$R_0 - T_0 > S_0 - P_0 \quad \text{i} \quad T_1 - R_1 > P_1 - S_1.$$

Els valors propis $J_{22}^{(2)}$ i $J_{33}^{(2)}$ són negatius si el seu numerador és negatiu i per tant s'ha de complir

$$\delta > \frac{-R_1 + T_1 + P_1\theta_1 - S_1\theta_1}{\rho}.$$

i

$$\delta < \frac{-R_1 + T_1 + P_1\theta_1 - S_1\theta_1}{\rho}.$$

Per tant, cal que

$$\delta = \frac{-R_1 + T_1 + P_1\theta_1 - S_1\theta_1}{\rho}. \quad (4.26)$$

Ara, perquè $J_{11}^{(1)}$ sigui negatiu s'ha de complir

$$\delta < \min\left\{\frac{-P_1 + S_1}{P_0 - S_0 - P_1 + S_1}, \frac{-R_1 + T_1}{R_0 - T_0 - R_1 + T_1}\right\}. \quad (4.27)$$

o bé

$$\delta > \max\left\{\frac{-P_1 + S_1}{P_0 - S_0 - P_1 + S_1}, \frac{-R_1 + T_1}{R_0 - T_0 - R_1 + T_1}\right\}. \quad (4.28)$$

Però no hi ha cap δ que satisfaci (4.25), (4.26) i (4.27) o bé (4.25), (4.26) i (4.28).

Cas 2: $\gamma > 0$ i $\mu_2 < 0$. Si $\gamma > 0$ llavors $\mu_2 < 0$ si

$$\delta < \frac{-R_1 + T_1 + S_1 - P_1}{\gamma}. \quad (4.29)$$

Perquè δ estigui ben definida cal que

$$R_1 - T_1 < S_1 - P_1.$$

Perquè $J_{22}^{(1)}$ i $J_{33}^{(1)}$ siguin negatius el numerador ha de ser positiu i, per tant, s'ha de complir

$$\delta > \frac{-R_1 + T_1 + P_1\theta_1 - S_1\theta_1}{\rho}.$$

i

$$\delta < \frac{-R_1 + T_1 + P_1\theta_1 - S_1\theta_1}{\rho}.$$

Això dona

$$\delta = \frac{-R_1 + T_1 + P_1\theta_1 - S_1\theta_1}{\rho}. \quad (4.30)$$

Perquè $J_{11}^{(1)}$ sigui negatiu cal que el numerador sigui positiu i per tant hem de tenir que $(P_1 - S_1)(1 - \delta) + \delta(P_0 - S_0)$ i $(R_1 - T_1)(1 - \delta) + \delta(R_0 - T_0)$ siguin positius o negatius alhora.

Si els dos són positius obtenim

$$\delta < \frac{-P_1 + S_1}{P_0 - S_0 - P_1 + S_1}, \quad (4.31)$$

i

$$\delta > \frac{-R_1 + T_1}{R_0 - T_0 - R_1 + T_1}. \quad (4.32)$$

Però no existeix cap δ satisfent (4.29), (4.30), (4.31) i (4.32) alhora.

Si els dos són negatius llavors

$$\delta > \frac{-P_1 + S_1}{P_0 - S_0 - P_1 + S_1}, \quad (4.33)$$

i

$$\delta < \frac{-R_1 + T_1}{R_0 - T_0 - R_1 + T_1}. \quad (4.34)$$

Amb un δ satisfent (4.33) i (4.34) s'ha de satisfer

$$\frac{-R_1 + T_1}{R_0 - T_0 - R_1 + T_1} < \frac{-P_1 + S_1}{P_0 - S_0 - P_1 + S_1}.$$

que és equivalent a (4.22).

Aquest valor $\delta \in (0, 1)$ existeix si i només si RHS de (4.34) és positiu i RHS de (4.33) és menor que 1. La primera sempre es compleix perquè $T_1 - R_1 > 0$ i $R_0 - T_0 > 0$ i la segona sempre es compleix perquè $P_0 - S_0 < 0$ i $P_1 - S_1 > 0$. La intersecció de totes les equacions que defineixen δ (4.29), (4.30), (4.33) i (4.34) es pot resumir com

$$\delta = \frac{-R_1 + T_1 + P_1\theta_1 - S_1\theta_1}{\rho}. \quad (4.35)$$

En definitiva, si es compleixen les equacions (4.22) i (4.35) el punt d'equilibri és estable.

Cas 3: $\gamma < 0$ i $\mu_2 > 0$. Si $\gamma < 0$ llavors s'ha de complir

$$R_0 - T_0 - R_1 + T_1 < S_0 - P_0 - S_1 + P_1.$$

Ara, $\mu_2 > 0$ si i només si se satisfà (4.29). Perquè δ estigui ben definida s'ha de satisfer que

$$R_1 - T_1 < S_1 - P_1.$$

Com que $\mu_2 > 0$ obtenim altre cop que s'han de satisfer (4.26), (4.27), (4.28) i (4.29) i tornem a tenir altre cop que no pot existir δ que satisfaci totes les condicions alhora.

Cas 4: $\gamma < 0$ i $\mu_2 < 0$. Perquè $\gamma < 0$ i $\mu_2 < 0$ cal que es compleixi (4.25). Perquè δ estigui ben definida s'ha de complir $R_0 - T_0 > S_0 - P_0$. Aquest cas dona un resultat anàleg al cas 2 i trobem que l'equilibri és estable si es compleixen les equacions (4.22) i (4.35).

En cas que $\delta \neq \frac{-R_1+T_1+P_1\theta_1-S_1\theta_1}{\rho}$ obtindrem que la matriu jacobiana té dos valors propis positius i un de negatiu.

4.2.4 Equilibris a les cares

En aquest cas tindrem que una de les variables x^*, n_1^*, n_{12}^* serà 0 o 1 i les altres dues prendran valors entre 0 i 1. De manera similar al cas dels equilibris a les arestes si $x^* = 0$ o 1 obtindrem que l'equilibri és un vèrtex i, per tant, $0 < x^* < 1$. Fent que n_1^* o n_{12}^* siguin 0 o 1 obtenim quatre equilibris a les cares.

Si $n_{12}^* = 0$ imposant $\dot{n}_1 = 0$ com que $n_1 \neq 0, 1$ obtenim $x^* = \frac{1}{\theta_1+1}$. Ara, fent $\dot{x} = 0$ i tenint en compte $0 < x^* < 1$ tindrem

$$(R_0 - T_0 - S_0 + P_0) \frac{1}{\theta_1 + 1} - P_0 + S_0 + n_1(\delta - 1) \left((R_3 - T_3 - S_3 + P_3) \frac{1}{\theta_1 + 1} + (S_3 - P_3) \right) = 0.$$

ajuntant els termes que tenen n_1 a una banda de la igualtat

$$n_1(1 - \delta) \left((R_3 - T_3 - S_3 + P_3) \frac{1}{\theta_1 + 1} + (S_3 - P_3) \right) = (R_0 - T_0 - S_0 + P_0) \frac{1}{\theta_1 + 1} - P_0 + S_0.$$

això és equivalent a

$$n_1(1 - \delta) \left((R_3 - T_3 - S_3 + P_3) + (S_3 - P_3)(\theta_1 + 1) \right) = (R_0 - T_0 - S_0 + P_0) + (-P_0 + S_0)(\theta_1 + 1).$$

aïllant n_1 obtenim

$$n_1 = \frac{(R_0 - T_0 - S_0 + P_0) + (-P_0 + S_0)(\theta_1 + 1)}{(1 - \delta) \left((R_3 - T_3 - S_3 + P_3) + (S_3 - P_3)(\theta_1 + 1) \right)}.$$

finalment, simplificant

$$n_1 = \frac{R_0 - T_0 - P_0\theta_1 + S_0\theta_1}{(1 - \delta)(R_3 - T_3 + S_3\theta_1 - P_3\theta_1)}. \quad (4.36)$$

El punt d'equilibri serà $(x^*, n_1^*, n_{12}^*) = \left(\frac{1}{\theta_1+1}, \frac{R_0-T_0-P_0\theta_1+S_0\theta_1}{(1-\delta)(R_3-T_3+S_3\theta_1-P_3\theta_1)}, 0 \right)$. Avaluant la matriu jacobiana (4.9) obtenim

$$\begin{pmatrix} J_{11}^{(3)} & J_{12}^{(3)} & J_{13}^{(3)} \\ J_{21}^{(3)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

on

$$J_{11}^{(3)} = \frac{[(P_1 - S_1)(R_0 - T_0) - (P_0 - S_0)(R_1 - T_1)]\theta_1}{(\theta_1 + 1)(R_3 - T_3 - P_3\theta_1 + S_3\theta_1)},$$

$$J_{12}^{(3)} = \frac{-\theta_1(1 - \delta)(R_3 - T_3 - P_3\theta_1 + S_3\theta_1)}{(\theta_1 + 1)^3},$$

$$J_{13}^{(3)} = \frac{-\theta_1\delta(R_3 - T_3 - P_3\theta_1 + S_3\theta_1)}{(\theta_1 + 1)^3},$$

$$J_{21}^{(3)} = \frac{-(\theta_1 + 1)(R_0 - T_0 - P_0\theta_1 + S_0\theta_1)(R_1 - T_1 - P_1\theta_1 + S_1\theta_1 + \delta(R_3 - T_3 - P_3\theta_1 + S_3\theta_1))}{(1 - \delta)^2(R_3 - T_3 - P_3\theta_1 + S_3\theta_1)^2}.$$

El polinomi característic de la matriu jacobiana serà

$$-\lambda(\lambda^2 - J_{11}^{(3)}\lambda - J_{12}^{(3)}J_{21}^{(3)}) = 0.$$

Els valors propis són $\lambda_1 = 0$ i

$$\lambda_{2,3} = \frac{J_{11}^{(3)} \pm \sqrt{(J_{11}^{(3)})^2 - 4J_{12}^{(3)}J_{21}^{(3)}}}{2}.$$

Perquè la part real sigui negativa s'ha de complir que $J_{11}^{(3)} < 0$ i $J_{12}^{(3)}J_{21}^{(3)} < 0$. El denominador de $J_{11}^{(3)}$ és positiu, ja que $(R_3 - T_3 - P_3\theta_1 + S_3\theta_1) > 0$ i $\theta_1 > 0$. Per tant, necessitem que el numerador sigui negatiu, és a dir, s'ha de complir (4.22). Ara, com que $J_{12}^{(3)} < 0$ perquè $J_{12}^{(3)}J_{21}^{(3)} < 0$ cal que $J_{21}^{(3)} > 0$ i com $(R_0 - T_0 - (P_0 - S_0)\theta_1) > 0$ s'ha de complir

$$\frac{-R_1 + T_1 + P_1\theta_1 - S_1\theta_1}{R_3 - T_3 - P_3\theta_1 + S_3\theta_1} > \delta. \quad (4.37)$$

En resum, perquè el punt d'equilibri sigui estable s'ha de complir que (4.22) i (4.37).

Si $n_1 = 1$ imposant $\dot{n}_{12} = 0$ com que $n_{12} \neq 0, 1$ obtenim $x^* = \frac{1}{\theta_1 + 1}$. Ara, fent $\dot{x} = 0$ i tenint en compte $0 < x^* < 1$ tindrem que

$$(R_0 - T_0 - S_0 + P_0)\frac{1}{\theta_1 + 1} + S_0 - P_0 + (-1 + \delta - \delta n_{12})\left((R_3 - T_3 - S_3 + P_3)\frac{1}{\theta_1 + 1} + S_3 - P_3\right) = 0.$$

ajuntant els termes que tenen n_{12} a una banda de la igualtat

$$\delta n_{12}\left((R_3 - T_3 - S_3 + P_3) + (S_3 - P_3)(\theta_1 + 1)\right) =$$

$$R_0 - T_0 - S_0 + P_0 + (S_0 - P_0)(\theta_1 + 1) + (-1 + \delta)\left((R_3 - T_3 - S_3 + P_3) + (S_3 - P_3)(\theta_1 + 1)\right).$$

aïllant n_{12} i simplificant obtenim

$$n_{12} = \frac{R_1 - T_1 + S_1\theta_1 - P_1\theta_1 + \delta(R_3 - T_3 + S_3\theta_1 - P_3\theta_1)}{\delta(R_3 - T_3 + S_3\theta_1 - P_3\theta_1)}. \quad (4.38)$$

El punt d'equilibri serà $(x^*, n_1^*, n_{12}^*) = (\frac{1}{\theta_1 + 1}, 1, \frac{R_1 - T_1 + S_1\theta_1 - P_1\theta_1 + \delta(R_3 - T_3 + S_3\theta_1 - P_3\theta_1)}{\delta(R_3 - T_3 + S_3\theta_1 - P_3\theta_1)})$. Avaluant aquest punt a la matriu jacobiana (4.9) tindrem

$$\begin{pmatrix} J_{11}^{(4)} & J_{12}^{(4)} & J_{13}^{(4)} \\ 0 & 0 & 0 \\ J_{31}^{(4)} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

on

$$J_{11}^{(4)} = J_{11}^{(3)} = \frac{\theta_1[(P_1 - S_1)(R_0 - T_0) - (P_0 - S_0)(R_1 - T_1)]}{(\theta_1 + 1)(R_3 - T_3 + S_3\theta_1 - P_3\theta_1)},$$

$$J_{12}^{(4)} = J_{12}^{(3)} = \frac{-\theta_1(1 - \delta)(R_3 - T_3 - P_3\theta_1 + S_3\theta_1)}{(\theta_1 + 1)^3},$$

$$J_{13}^{(3)} = J_{13}^{(3)} = \frac{-\theta_1\delta(R_3 - T_3 - P_3\theta_1 + S_3\theta_1)}{(\theta_1 + 1)^3},$$

$$J_{31}^{(3)} = \frac{-(\theta_1 + 1)(R_1 - T_1 - P_1\theta_1 + S_1\theta_1)(R_1 - T_1 - P_1\theta_1 + S_1\theta_1 + \delta(R_3 - T_3 - P_3\theta_1 + S_3\theta_1))}{\delta^2(R_3 - T_3 - P_3\theta_1 + S_3\theta_1)^2}.$$

El polinomi característic de la matriu jacobiana serà

$$-\lambda(\lambda^2 - J_{11}^{(4)}\lambda - J_{13}^{(4)}J_{31}^{(4)}) = 0.$$

Els valors propis són $\lambda_1 = 0$ i

$$\lambda_{2,3} = \frac{J_{11}^{(4)} \pm \sqrt{(J_{11}^{(4)})^2 - 4J_{13}^{(4)}J_{31}^{(4)}}}{2}.$$

Perquè la part real sigui negativa s'ha de complir que $J_{11}^{(4)} < 0$ i $J_{13}^{(4)}J_{31}^{(4)} < 0$. El denominador de $J_{11}^{(4)}$ és positiu, ja que $(R_3 - T_3 - P_3\theta_1 + S_3\theta_1) > 0$ i $\theta_1 > 0$. Per tant, necessitem que el numerador sigui negatiu, és a dir, s'ha de complir (4.22). Ara, com que $J_{13}^{(4)} < 0$ perquè $J_{13}^{(4)}J_{31}^{(4)} < 0$ cal que $J_{31}^{(4)} > 0$ i com $(R_1 - T_1 - P_1\theta_1 + S_1\theta_1) < 0$ s'ha de complir

$$\frac{-R_1 + T_1 + P_1\theta_1 - S_1\theta_1}{R_3 - T_3 - P_3\theta_1 + S_3\theta_1} < \delta. \quad (4.39)$$

En resum, perquè el punt d'equilibri sigui estable s'ha de complir que (4.22) i (4.39).

Si $n_{12} = 1$ imposant $\dot{n}_1 = 0$ com que $n_1 \neq 0, 1$ obtenim $x^* = \frac{1}{\theta_1 + 1}$. Ara, fent $\dot{x} = 0$ i tenint en compte $0 < x^* < 1$ tindrem

$$(R_0 - T_0 - S_0 + P_0)\frac{1}{\theta_1 + 1} + S_0 - P_0 + (-n_1 + \delta n_1 - \delta)\left((R_3 - T_3 - S_3 + P_3)\frac{1}{\theta_1 + 1} + S_3 - P_3\right) = 0.$$

ajuntant els termes que tenen n_1 a una banda de la igualtat

$$n_1(1 - \delta)\left((R_3 - T_3 - S_3 + P_3)\frac{1}{\theta_1 + 1} + S_3 - P_3\right) = (R_0 - T_0 - S_0 + P_0)\frac{1}{\theta_1 + 1} + S_0 - P_0.$$

això és equivalent a

$$n_1(1 - \delta)\left((R_3 - T_3 - S_3 + P_3) + S_3 - P_3(\theta_1 + 1)\right) = R_0 - T_0 - S_0 + P_0 + S_0 - P_0(\theta_1 + 1).$$

aïllant n_1 i simplificant obtenim

$$n_1 = \frac{R_0 - T_0 - P_0\theta_1 + S_0\theta_1 - \delta(R_3 - T_3 + S_3\theta_1 - P_3\theta_1)}{(1 - \delta)(R_3 - T_3 + S_3\theta_1 - P_3\theta_1)}.$$

El punt d'equilibri serà $(x^*, n_1^*, n_{12}^*) = \left(\frac{1}{\theta_1 + 1}, \frac{R_0 - T_0 - P_0\theta_1 + S_0\theta_1 - \delta(R_3 - T_3 + S_3\theta_1 - P_3\theta_1)}{(1 - \delta)(R_3 - T_3 + S_3\theta_1 - P_3\theta_1)}, 1\right)$. Avaluant la matriu jacobiana (4.9) obtenim

$$\begin{pmatrix} J_{11}^{(5)} & J_{12}^{(5)} & J_{13}^{(5)} \\ J_{21}^{(5)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

on

$$J_{11}^{(5)} = J_{11}^{(3)} = \frac{[(P_1 - S_1)(R_0 - T_0) - (P_0 - S_0)(R_1 - T_1)]\theta_1}{(\theta_1 + 1)(R_3 - T_3 - P_3\theta_1 + S_3\theta_1)},$$

$$J_{12}^{(5)} = J_{12}^{(3)} = \frac{-\theta_1(1 - \delta)(R_3 - T_3 - P_3\theta_1 + S_3\theta_1)}{(\theta_1 + 1)^3},$$

$$J_{13}^{(5)} = J_{13}^{(3)} = \frac{-\theta_1\delta(R_3 - T_3 - P_3\theta_1 + S_3\theta_1)}{(\theta_1 + 1)^3},$$

$$J_{21}^{(5)} = \frac{-(\theta_1 + 1)(R_1 - T_1 - P_1\theta_1 + S_1\theta_1)(R_0 - T_0 - P_0\theta_1 + S_0\theta_1 - \delta(R_3 - T_3 - P_3\theta_1 + S_3\theta_1))}{(1 - \delta)^2(R_3 - T_3 - P_3\theta_1 + S_3\theta_1)^2}.$$

El polinomi característic de la matriu jacobiana serà

$$-\lambda(\lambda^2 - J_{11}^{(5)}\lambda - J_{12}^{(5)}J_{21}^{(5)}) = 0.$$

Els valors propis són $\lambda_1 = 0$ i

$$\lambda_{2,3} = \frac{J_{11}^{(5)} \pm \sqrt{(J_{11}^{(5)})^2 - 4J_{12}^{(5)}J_{21}^{(5)}}}{2}.$$

Perquè la part real sigui negativa s'ha de complir que $J_{11}^{(5)} < 0$ i $J_{12}^{(5)}J_{21}^{(5)} < 0$. El denominador de $J_{11}^{(5)}$ és positiu, ja que $(R_3 - T_3 - P_3\theta_1 + S_3\theta_1) > 0$ i $\theta_1 > 0$. Per tant, necessitem que el numerador sigui negatiu, és a dir, s'ha de complir (4.22). Ara, com que $J_{12}^{(5)} < 0$ perquè $J_{12}^{(5)}J_{21}^{(5)} < 0$ cal que $J_{21}^{(5)} > 0$ i com $(R_1 - T_1 - P_1\theta_1 + S_1\theta_1) < 0$ s'ha de complir

$$\frac{R_0 - T_0 - P_0\theta_1 + S_0\theta_1}{R_3 - T_3 - P_3\theta_1 + S_3\theta_1} > \delta. \quad (4.40)$$

En resum, perquè el punt d'equilibri sigui estable s'ha de complir que (4.22) i (4.40).

Si $n_1^* = 0$ imposant $n_{12} = 0$ com que $n_{12} \neq 0, 1$ obtenim $x^* = \frac{1}{\theta_1 + 1}$. Ara, fent $\dot{x} = 0$ i tenint en compte $0 < x^* < 1$ tindrem

$$(R_0 - T_0 - S_0 + P_0)\frac{1}{\theta_1 + 1} + S_0 - P_0 - \delta n_{12} \left((R_3 - T_3 - S_3 + P_3)\frac{1}{\theta_1 + 1} + S_3 - P_3 \right) = 0.$$

ajuntant els termes que tenen n_{12} a una banda de la igualtat

$$\delta n_{12} \left((R_3 - T_3 - S_3 + P_3)\frac{1}{\theta_1 + 1} + (S_3 - P_3)\frac{\theta_1 + 1}{\theta_1 + 1} \right) = (R_0 - T_0 - S_0 + P_0)\frac{1}{\theta_1 + 1} + (S_0 - P_0)\frac{\theta_1 + 1}{\theta_1 + 1}.$$

això és equivalent a

$$\delta n_{12} \left((R_3 - T_3 - S_3 + P_3) + (S_3 - P_3)(\theta_1 + 1) \right) = (R_0 - T_0 - S_0 + P_0) + (S_0 - P_0)(\theta_1 + 1).$$

aïllant n_{12} obtenim

$$n_{12} = \frac{(R_0 - T_0 - S_0 + P_0) + (S_0 - P_0)(\theta_1 + 1)}{\delta \left((R_3 - T_3 - S_3 + P_3) + (S_3 - P_3)(\theta_1 + 1) \right)}.$$

finalment, simplificant

$$n_{12} = \frac{R_0 - T_0 + S_0\theta_1 - P_0\theta_1}{\delta(R_3 - T_3 + S_3\theta_1 - P_3\theta_1)}. \quad (4.41)$$

De manera que el punt d'equilibri serà $(x^*, n_1^*, n_{12}^*) = \left(\frac{1}{\theta_1+1}, 0, \frac{R_0-T_0+S_0\theta_1-P_0\theta_1}{\delta(R_3-T_3+S_3\theta_1-P_3\theta_1)}\right)$. Avaluant la matriu jacobiana (4.9) obtenim

$$\begin{pmatrix} J_{11}^{(6)} & J_{12}^{(6)} & J_{13}^{(6)} \\ 0 & 0 & 0 \\ J_{31}^{(6)} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

on

$$J_{11}^{(6)} = J_{11}^{(3)} = \frac{\theta_1[(P_1-S_1)(R_0-T_0)-(P_0-S_0)(R_1-T_1)]}{(\theta_1+1)(R_3-T_3+S_3\theta_1-P_3\theta_1)},$$

$$J_{12}^{(6)} = J_{12}^{(3)} = \frac{-\theta_1(1-\delta)(R_3-T_3-P_3\theta_1+S_3\theta_1)}{(\theta_1+1)^3},$$

$$J_{13}^{(6)} = J_{13}^{(3)} = \frac{-\theta_1\delta(R_3-T_3-P_3\theta_1+S_3\theta_1)}{(\theta_1+1)^3},$$

$$J_{31}^{(6)} = \frac{-(\theta_1+1)(R_0-T_0-P_0\theta_1+S_0\theta_1)(R_0-T_0-P_0\theta_1+S_0\theta_1-\delta(R_3-T_3-P_3\theta_1+S_3\theta_1))}{\delta^2(R_3-T_3-P_3\theta_1+S_3\theta_1)^2}.$$

El polinomi característic de la matriu jacobiana serà

$$-\lambda(\lambda^2 - J_{11}^{(6)}\lambda - J_{13}^{(6)}J_{31}^{(6)}) = 0.$$

Els valors propis són $\lambda_1 = 0$ i

$$\lambda_{2,3} = \frac{J_{11}^{(6)} \pm \sqrt{(J_{11}^{(6)})^2 - 4J_{13}^{(6)}J_{31}^{(6)}}}{2}.$$

Perquè la part real sigui negativa s'ha de complir que $J_{11}^{(6)} < 0$ i $J_{13}^{(6)}J_{31}^{(6)} < 0$. El denominador de $J_{11}^{(6)}$ és positiu, ja que $(R_3 - T_3 - P_3\theta_1 + S_3\theta_1) > 0$ i $\theta_1 > 0$. Per tant, necessitem que el numerador sigui negatiu, és a dir, s'ha de complir (4.22). Ara, com que $J_{13}^{(6)} < 0$ perquè $J_{13}^{(6)}J_{31}^{(6)} < 0$ cal que $J_{31}^{(6)} > 0$ i com $(R_0 - T_0 - P_0\theta_1 + S_0\theta_1) > 0$ s'ha de complir

$$\frac{R_0 - T_0 - P_0\theta_1 + S_0\theta_1}{R_3 - T_3 - P_3\theta_1 + S_3\theta_1} < \delta. \quad (4.42)$$

En resum, perquè el punt d'equilibri sigui estable s'ha de complir que (4.22) i (4.42).

A continuació, es presenta un exemple que il·lustra els càlculs fets anteriorment.

Exemple 4.1. Suposem que hi ha dues empreses competidores, E_1 i E_2 , que operen en el mateix mercat i cadascuna té $N/2 = 100$ treballadors. Cada empresa pot triar entre dues estratègies: col·laborar amb l'altra empresa o competir. Les interaccions entre els treballadors de les empreses tenen un impacte en l'estat del mercat i l'ecosistema econòmic compartit. Suposem que les interaccions entre treballadors de la mateixa empresa es produeixen amb una freqüència de $1 - \delta = 0.8$, mentre que les interaccions entre

treballadors de diferents empreses tenen una freqüència de $\delta = 0.2$. Els paràmetres de millora ambiental són $\theta_1 = \theta_2 = \theta_{12} = 1.5$.

Les matrius de pagaments per $n = 0$ (favorable a cooperació) i $n = 1$ (desfavorable) són:

$$\begin{pmatrix} R_0 & S_0 \\ T_0 & P_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} R_1 & S_1 \\ T_1 & P_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'aquesta manera quedarà el següent sistema 3-dimensional

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(1-x)[1 + (-0.8n_1 - 0.2n_{12})(2x+2)], \\ \dot{n}_1 &= n_1(1-n_1)(2.5x-1), \\ \dot{n}_{12} &= n_{12}(1-n_{12})(2.5x-1). \end{aligned}$$

La matriu jacobiana del sistema vindrà donada per

$$\begin{pmatrix} \frac{(24n_1+6n_{12})x^2-10x-8n_1-2n_{12}+5}{5} & \frac{8x(x^2-1)}{5} & \frac{2x(x^2-1)}{5} \\ \frac{5(1-n_1)n_1}{2} & \frac{-(5x-2)(2n_1-1)}{2} & 0 \\ \frac{5(1-n_{12})n_{12}}{2} & 0 & \frac{-(5x-2)(2n_{12}-1)}{2} \end{pmatrix} \quad (4.43)$$

Equilibris als vèrtex: Tots els vèrtex són punts d'equilibri: P1(0, 0, 0), P2(1, 0, 0), P3(1, 1, 0), P4(0, 1, 0), P5(0, 0, 1), P6(1, 0, 1), P7(1, 1, 1) i P8(0, 1, 1). Fent els càlculs, obtenim altre cop que en tots els vèrtex hi ha almenys un valor propi positiu i un de negatiu de manera que cada punt d'equilibri té un subespai invariant on el comportament de les solucions és tipus sella.

Equilibris a l'interior: Fent els càlculs obtenim que $x^* = 2/5$ i que n_1^*, n_{12}^* han de satisfer $-0.8n_1^* + n_{12}^* = 13/14$, és a dir, tenim una recta de punts fixos que anomenem r , fent que la situació sigui degenerada i no podem fer servir la matriu jacobiana per l'estudi de l'estabilitat.

Equilibris a les arestes: En aquest cas, els punts que obtenim estan fora del cub unitat i, per tant, no hi ha cap punt d'equilibri a les arestes.

Equilibris a les cares: En aquest cas obtenim 2 punts d'equilibri, que són els següents

- En el punt P9($\frac{2}{5}, \frac{25}{26}, 0$) els valors propis són

$$\lambda_1 = 0; \quad \lambda_2 = \frac{-\sqrt{681}-39}{130} < 0; \quad \lambda_3 = \frac{\sqrt{681}-39}{130} < 0.$$

i per tant el punt és neutralment estable amb un espai 2 dimensional estable associat als vaps amb part real negativa.

- En el punt P10($\frac{2}{5}, \frac{11}{56}, 1$) els valors propis són

$$\lambda_1 = 0; \quad \lambda_2 = \frac{-3i\sqrt{446}-12}{140}; \quad \lambda_3 = \frac{3i\sqrt{446}-12}{140}.$$

i el punt torna a ser neutralment estable amb un espai de dimensió 2 estable associat als vaps amb part real negativa.

Per tal de que el lector es pugui fer una idea d'on estan situats els diferents punts d'equilibri en la Figura 4.1 es mostren tots els punts que s'han trobat al cub unitat, marcant de color vermell els punts d'equilibri als vèrtexs, de color verd els punts d'equilibri a les cares i de color blau la recta de punts fixos.

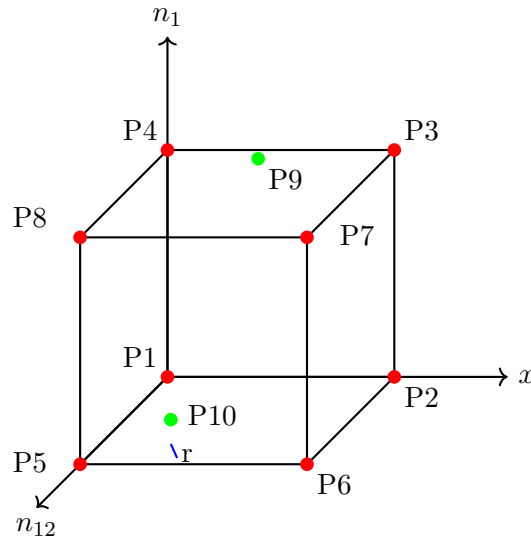


Figura 4.1: Cub unitat on es representen els diferents punts d'equilibri.

4.3 Anàlisi de l'estabilitat pel cas 5-dimensional

En el cas en què no s'assumeix cap tipus de simetria entre les dues comunitats de manera que tenim un sistema 5-dimensional, no estudiarem els retrats de fase. En aquest cas existeixen $3^5 = 243$ combinacions possibles de x, y, n_1, n_2 i n_{12} prenent valors 0, 1 o entre 0 i 1. Dintre d'aquestes combinacions, únicament 60 són equilibris, dels quals 21 són estables sota algunes condicions.

Capítol 5

Conclusions

En aquest treball s'ha estudiat en profunditat la teoria evolutiva de jocs amb l'objectiu de modelitzar i entendre les dinàmiques poblacionals en escenaris on diversos individus interactuen en busca d'un benefici personal. Primerament, s'han explicat alguns conceptes de teoria de jocs clàssica com la dominació estricta d'estratègies, les estratègies mixtes o l'equilibri de Nash. A continuació, aquests conceptes s'han relacionat amb eines molt importants dins dels jocs evolutius com les estratègies evolutivament estables (ESS) o l'equació replicadora, que han permès entendre com evoluciona la freqüència de les estratègies dins d'una població en funció de la seva aptitud relativa.

La principal contribució d'aquest treball ha sigut la proposta d'un model eco-evolutiu que introdueix l'entorn com una variable addicional per explicar l'evolució de les dinàmiques de la població. Aquest model permet analitzar com la cooperació pot mantenir-se dins d'una població en situacions de competència i amb un entorn canviant. Amb l'assumpció d'algunes simetries s'ha pogut simplificar el model a un sistema en tres dimensions. Això ha permès estudiar l'estabilitat dels punts d'equilibri a l'interior, a les cares, a les arestes i als vèrtexs del cub unitat, i trobar alguns punts que tenen varietats associades estables, inestables o sella. Tot i això, aquestes simetries no permeten capturar d'una forma realista la complexitat de les interaccions i només permeten obtenir una idea simplificada de la dinàmica.

De cara al futur, podria ser interessant ampliar el model per poder considerar escenaris amb més de dues comunitats on es produeixin interaccions no lineals més complexes. A més, també es podria validar el model amb dades reals per comprovar que s'ajusti de manera adequada i representi correctament les dinàmiques en situacions reals, ja sigui en l'estudi de la cooperació entre espècies o ecosistemes, o en contextos socials. Fins i tot, aquest model podria explorar-se en intel·ligència artificial mitjançant algorismes de cooperació entre agents.

En resum, aquest treball mostra com la teoria de jocs evolutiva pot contribuir a entendre diferents situacions i escenaris complexos, oferint una perspectiva teòrica que combina rigor matemàtic, aplicacions i exemples pràctics. Aquest estudi no només obre les portes per a futures investigacions, sinó que també reforça la importància i utilitat de la teoria de jocs com una eina que permet modelar els comportaments dels individus en contextos tant biològics, com econòmics, com informàtics o polítics, i analitzar les dinàmiques de diferents poblacions per estudiar l'evolució de les estratègies i de les decisions que es prenen.

Bibliografia

- [1] Betz, Katherine, Feng Fu, and Naoki Masuda. Evolutionary Game Dynamics with Environmental Feedback in a Network with Two Communities, abril de 2024.
- [2] Dugatkin, Lee Alan, i Hudson Kern Reeve. *Game Theory and Animal Behavior*. Oxford University Press, 1998.
- [3] Gibbons, R. *Game Theory for Applied Economists*, Princeton University Press, Princeton, Nova Jersey, 1992.
- [4] Hofbauer, J., i Sigmund, K. Evolutionary Game Dynamics, *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*, 40(4): 479-519, juliol de 2003.
- [5] Hofbauer, J., i Sigmund, K. *The Theory of Evolution and Dynamical Systems: Mathematical Aspects of Selection*, London Mathematical Society Student Texts, 7. Cambridge University Press, 1988.
- [6] Nash, John F. Jr. Equilibrium Points in N-Person Games. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 36(1): 48-49, 1950.
- [7] van Damme, Eric. *Stability and Perfection of Nash Equilibrium*, Capítol 9: Evolutionary Game Theory, Second, Revised, and Enlarged Version, Springer, 2002.
- [8] Vega-Redondo, F. *Evolution, Games, and Economic Behavior*, Oxford University Press, 1996.
- [9] Webb, James N. *Game Theory: Decisions, Interaction and Evolution*, Springer, 2007.