

Doble Grau en Estadística i Economia

Títol: Models estratègics de decisió en entorns estocàstics

Autor: Alexandre Fitzgerald Estero

Director: Dr. Josep Vives Santa Eulalia

Departament: Matemàtica Econòmica, Financera i
Actuarial

Convocatòria: Juny 2024

:



UNIVERSITAT DE
BARCELONA



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH

Facultat de Matemàtiques i Estadística

Agraïments

Voldria donar les gràcies a totes les persones que s'han implicat en aquest treball, tant en contingut com en forma de suport, i sense les quals l'assoliment no hagués estat possible.

Gràcies al meu tutor Josep Vives, per la gran implicació i consells, per ajudar-me sempre a anar més enllà per obtenir els millors resultats possibles.

També donar les gràcies a la meva família, per donar-me suport en tot moment, així com per impulsar-me a donar el màxim durant tota la meva etapa formativa.

I als amics, per les idees, consells, i ajuda que m'han brindat.

Abstract

This study aims to address various situations that commonly arise in the field of economics. Given their inherent complexity, the analysis is carried out through modeling using stochastic processes, aiming to illustrate the scenarios to which agents are subject. These situations require decision making, often in an iterative manner, and while interacting with other entities.

The framework of uncertainty which is provided by the use of a non-deterministic model from a game-theoretical perspective provides flexibility to study multiple variants of common cases, and to deeply analyze the optimality of strategic behaviours that players may undertake.

Resum

El present treball aborda diferents situacions que emergeixen de manera recurrent en el camp de l'economia. Atesa la inherent complexitat que les caracteritza, l'anàlisi s'efectua mitjançant la modelització emprant processos estocàstics, amb l'objectiu d'il·lustrar els escenaris als quals els agents s'enfronten. Aquestes situacions requereixen la presa de decisions, sovint iteratives, i la interacció amb altres entitats.

El marc d'incertesa que proporciona un model no determinista de Teoria de Jocs, atorga la flexibilitat necessària per explorar múltiples variants de casos comuns, i per aprofundir en l'optimització dels comportaments estratègics que poden dur a terme els jugadors.

Classificació AMS: 91A15 Stochastic games, 91A20 Multistage and repeated games, 90C40 Markov and semi-Markov decision processes

Índex

Agraïments	i
Abstract	ii
Índex de Figures	vi
Índex de Taules	viii
1 Introducció	1
1.1 Objectius	1
1.2 Metodologia	2
2 Marc Teòric	3
2.1 Teoria de Jocs	3
2.1.1 Definició i concepte d'utilitat	3
2.1.2 Elements d'un joc i paper de la informació	3
2.1.3 Tipus de jocs	4
2.1.4 La noció d'equilibri de Nash	5
2.2 Processos Estocàstics	5
2.2.1 Definició i classificació segons àmbit temporal	5
2.2.2 Tipus de processos estocàstics	6
2.2.3 Cadenes de Markov: característiques i distribució estacionària	6
2.2.4 Processos estocàstics a temps continu: Moviment brownià, procés de Wiener	10
3 Jocs de Markov: decisions individuals	12
3.1 Individu en el mercat laboral	12
3.1.1 Descripció de la situació i problema a resoldre	12
3.1.2 Suposicions i elements en Teoria de Jocs	12
3.1.3 Representació i solució analíticament	13

3.1.4	Solució computacionalment per simulació	15
3.1.5	Conclusions del cas	17
3.2	Individu en el mercat de bens	21
3.2.1	Descripció de la situació i problema a resoldre	21
3.2.2	Suposicions i elements en Teoria de Jocs	21
3.2.3	Representació i plantejament analític	23
3.2.4	Solució computacionalment per simulació	24
3.2.5	Conclusions del cas	27
3.2.6	Una variant de la situació: magnitud dels desajustos penalitzats . . .	27
4	Jocs estocàstics amb més d'un agent	31
4.1	Joc del comerç	31
4.1.1	Descripció de la situació i problema a resoldre	31
4.1.2	Suposicions i elements en Teoria de Jocs	32
4.1.3	Representació i plantejament analític	33
4.1.4	Solució computacionalment per simulació	34
4.1.5	Conclusions del cas	36
4.2	Joc de l'explotació del recurs comú	37
4.2.1	Descripció de la situació i problema a resoldre	37
4.2.2	Suposicions i elements en teoria de jocs	38
4.2.3	Representació i plantejament analític	39
4.2.4	Solució computacionalment per simulació	41
4.2.5	Solució computacionalment per simulació (creixement elevat)	48
4.2.6	Resolució analítica	55
4.2.7	Conclusions del cas	56
5	Conclusions	58
	Referències	58

Índex de figures

3.1	Representació del joc del mercat de treball.	13
3.2	Comparativa del nombre de mesos en atur segons l'estratègia en un període de 5 anys.	16
3.3	Comparativa del nombre de mesos en atur segons l'estratègia en un període de 20 anys.	16
3.4	Comparativa del nombre de mesos en atur segons l'estratègia en un període de 50 anys.	16
3.5	Salari d'indiferència entre les dues estratègies (5 anys).	18
3.6	Salari d'indiferència entre les dues estratègies (20 anys).	19
3.7	Salari d'indiferència entre les dues estratègies (50 anys).	20
3.8	Representació del joc del productor.	24
3.9	Test Anova diferències entre grups.	25
3.10	Diferències entre grups específics.	26
3.11	Diferències entre l'estratègia d'Estat Estacionari, i l'estratègia d'Adaptar. . .	27
3.12	Proporció d'etapes en cada estat de demanda en l'extensió del joc del productor.	29
4.1	Representació del joc del comerç.	33
4.2	Resum de les interaccions entre estratègies en el joc del comerç.	35
4.3	Evolució del recurs amb perfils coincidents (Agressiva).	44
4.4	Evolució del recurs amb perfils coincidents (Conservador 10%).	44
4.5	Evolució del recurs amb perfils coincidents (Conservador 25%).	45
4.6	Evolució del recurs amb perfils coincidents (Conservador 40%).	45
4.7	Evolució del recurs amb perfils coincidents (Mínim).	46
4.8	Evolució del recurs amb perfils coincidents (Adapta).	46
4.9	Evolució del recurs amb perfils coincidents (Agressiva, creixement elevat). . .	50
4.10	Evolució del recurs amb perfils coincidents (Conservador 10%, creixement elevat).	51
4.11	Evolució del recurs amb perfils coincidents (Conservador 25%, creixement elevat).	51
4.12	Evolució del recurs amb perfils coincidents (Conservador 40%, creixement elevat).	52
4.13	Evolució del recurs amb perfils coincidents (Mínim, creixement elevat). . . .	52

4.14 Evolució del recurs amb perfils coincidents (Adapta, creixement elevat). . . .	53
---	----

Índex de taules

3.1	Comparativa del salari mitjà percebut segons l'estratègia i l'horitzó temporal del joc.	15
3.2	Comparativa del temps mig en atur segons l'estratègia i l'horitzó temporal del joc.	17
3.3	Comparativa dels resultats del Joc del productor.	25
3.4	Comparativa dels resultats del Joc del productor.	26
3.5	Comparativa extensió del Joc del productor.	28
4.1	Comparativa dels resultats del joc del comerç.	35
4.2	Resultats del perfil Agressiu en el joc de l'explotació del recurs comú.	41
4.3	Resultats del perfil Conservador (10%) en el joc de l'explotació del recurs comú.	41
4.4	Resultats del perfil Conservador (25%) en el joc de l'explotació del recurs comú.	42
4.5	Resultats del perfil Conservador (40%) en el joc de l'explotació del recurs comú.	42
4.6	Resultats del perfil Mínim en el joc de l'explotació del recurs comú.	43
4.7	Resultats del perfil Adapta en el joc de l'explotació del recurs comú.	43
4.8	Suma de resultats de cada perfil en el joc de l'explotació del recurs comú.	47
4.9	Resultats del perfil Agressiu en el joc de l'explotació del recurs comú (creixement elevat).	48
4.10	Resultats del perfil Conservador (10%) en el joc de l'explotació del recurs comú (creixement elevat).	48
4.11	Resultats del perfil Conservador (25%) en el joc de l'explotació del recurs comú (creixement elevat).	48
4.12	Resultats del perfil Conservador (40%) en el joc de l'explotació del recurs comú (creixement elevat).	49
4.13	Resultats del perfil Mínim en el joc de l'explotació del recurs comú (creixement elevat).	49
4.14	Resultats del perfil Adapta en el joc de l'explotació del recurs comú (creixement elevat).	49
4.15	Suma de resultats de cada perfil en el joc de l'explotació del recurs comú (creixement elevat).	53

1 Introducció

1.1 Objectius

La realitat econòmica és complexa i variant en el temps, motiu pel qual es fa ús de models per estudiar aquesta realitat mitjançant aproximacions.

En el camp de l'economia una de les disciplines centrals és la Teoria de Jocs, capaç de modelitzar el comportament de diversos agents al llarg del temps, en diverses situacions i amb diferent grau de coneixement respecte a la situació, cadascun d'ells amb l'objectiu d'acabar en la millor situació possible. Per tant, permet plantejar diversos problemes amb molta llibertat, podent il·lustrar moltes situacions d'interès: decisió de producció tant en preus com en quantitats, de diverses empreses, estratègies de negociació en àmbits de relacions internacionals, estratègies d'explotació a uns recursos d'accés comú amb competidors, decisió sobre quines polítiques implementar donada la incertesa en la reacció dels beneficiaris...

Una manera de modelitzar la situació en la que prenen aquestes decisions els agents, és mitjançant processos estocàstics. En cada moment del temps, cada agent vol arribar a una situació òptima, però les decisions venen marcades per l'entorn en el que s'han de prendre, que alhora pot variar en funció de les decisions preses per cadascun dels interessats, influint per tant en l'estratègia a seguir. És per aquest motiu que els processos estocàstics esdevenen una eina útil per definir el marc de la situació en que es troba el sistema en cada moment del temps.

El present treball és una recerca aplicada, estudiant com es comporten i evolucionen al llarg del temps les diverses situacions a les que estan sotmesos els agents econòmics, fent ús de processos estocàstics per determinar analíticament els canvis que es produiran.

Després de definir el marc teòric per la Teoria de Jocs i pels Processos Estocàstics, es presentaran casos concrets en els quals aplicar les eines estadístiques. En cada cas es definirà en primer lloc la situació (el problema a resoldre, els agents implicats, les opcions de les que disposen, i les situacions en les que es poden trobar). Posteriorment, es resoldrà d'una banda el problema analíticament mitjançant els càlculs pertinents, i d'altra es resoldrà computacionalment a través de simulacions. De la solució computacional s'obtidran resums tant de la situació final (si existeix una única) com de l'evolució del sistema fins a aquella situació.

En primer lloc s'estudiarà casos de jocs d'un sol jugador, que s'enfronta a un problema on és l'únic agent. Per tant, la situació depèn de les decisions pròpies i de les característiques del sistema, que alhora poden influir sobre les possibles accions disponibles, i les decisions pròpies. Aquestes decisions poden també canviar les propietats del sistema. En segon lloc s'estudiarà casos on hi hagi més d'un jugador, i les decisions s'hauran de prendre tenint també en compte a quines opcions poden accedir la resta de jugadors. En aquestes situacions serà d'interès estudiar quins perfils d'actuació donen lloc a millors resultats, i veure com distintes maneres d'actuar interactuen entre elles.

1.2 Metodologia

Cadascuna de les situacions modelitzades es resoldran computacionalment mitjançant simulació. Fent ús de software estadístic, concretament el llenguatge de programació R.

Obtenint milers de simulacions, on cadascuna d'elles produirà resultats diferents, es pot analitzar el comportament del sistema, i com evolucionen les variables del model. Hi haurà patrons i elements comuns que comparteixin, i es podrà obtenir resums de la informació mitjançant estadístics. Són d'especial interès la situació final (estat final en que es trobi el joc, valor que prenen les variables en aquell estat), l'acumulació de resultats de cada etapa (guany total) i el temps que ha estat el joc en cada estat.

Simulant diferents estratègies es podrà comparar quina és l'òptima donats els supòsits del model. Addicionalment, modelitzant les situacions amb diferents característiques, com el punt de partida, les probabilitats de transició o les recompenses, es mirarà si l'estratègia òptima varia en funció de la situació. Per tant es podrà analitzar si modelitzacions més complexes canvien els resultats, i així determinar fins quant es poden fer simplifications per entendre la realitat, o si diferents realitats (com per exemple, característiques d'institucions econòmiques com els mercats en diferents països) influeixen en les decisions que han de prendre els agents.

2 Marc Teòric

2.1 Teoria de Jocs

2.1.1 Definició i concepte d'utilitat

La Teoria de Jocs és una branca de les matemàtiques i l'economia que estudia, mitjançant models, les interaccions entre individus anomenats jugadors, que prenen decisions. Les decisions tenen l'objectiu de maximitzar una utilitat, i s'assumeix que els jugadors són perfectament racionals, i per tant donades alternatives, son capaços d'assignar una utilitat a cadascuna d'elles, triant la que maximitzi la pròpia utilitat. La funció d'utilitat que té un agent (això és, com varia la seva utilitat segons el que té) depèn de les seves preferències. Les preferències dels agents segueixen uns axiomes, que defineixen la relació que té la utilitat i els lots (conjunts de bens) disponibles.

El primer axioma és que les preferències són completes. Això és, que els consumidors sempre poden comparar dos lots de bens i determinar quin és preferent (aquell del que en deriva una major utilitat). Per tant, donats dos lots A i B: $A \succsim B$ o $B \succsim A$ o ambdós alhora (que implica indiferència entre els dos lots).

El segon axioma és el de transitivitat. La preferència d'un lot per sobre d'un altre, que és alhora preferent a un tercer, implica que la utilitat que dona el primer lot és superior a la que dona el tercer (i per tant, és preferent). Donats tres lots A, B i C: $A \succsim B$ i $B \succsim C$ implica $A \succsim C$.

El tercer axioma estableix que les preferències són uniformes. Sempre és preferent una quantitat major d'un bé. Per tant, no es considera els “bens mals” (aquells bens dels quals el seu consum o possessió comporten un decrement de la utilitat). Donats dos lots $A=(x,y)$ i $B=(x',y')$, amb bens idèntics, i per tant diferenciant-se únicament en les quantitats: $A \succsim B$ si $x \geq x'$ i $y \geq y'$, i $B \succsim A$ si $x' \geq x$ i $y' \geq y$.

2.1.2 Elements d'un joc i paper de la informació

Els entorns en els que es desenvolupa l'anàlisi s'anomenen jocs, formats per diversos elements.

- Jugadors: els agents que prenen decisions en els jocs. En pot ser un únic, jugant sol, o múltiples jugant alhora.
- Estats: situacions en les que es troben els agents en cada moment. Pot ser un únic estat, o poden haver-hi múltiples.
- Accions: opcions de les que disposen els agents en cada moment. Poden ser iguals en tots els estats del joc, o poden diferir en funció de l'estat en que es trobin el jugadors.
- Estratègies: regles que tenen els jugadors per decidir quines accions prendre en funció de la situació en la que estan en un moment donat.

- Recompensa: valor associat als resultats dels jocs.

Un factor clau a considerar és el de la informació, que es pot estudiar en dues vessants. D'una banda es pot analitzar si els jugadors tenen coneixement sobre tota la informació possible sobre el joc que estiguin jugant o no. No tenir tota la informació podria ser el desconeixement de l'estat en el que s'està, o de la presència d'altres jugadors. Es considerarà però, que tots els jugadors tindran coneixement absolut sobre les accions que poden jugar en cada moment del joc, i de les recompenses associades (malgrat que aquestes no han de ser deterministes, i poden ser una distribució de probabilitat sobre un conjunt de valors).

D'altra banda es pot analitzar si els jugadors tenen la mateixa informació sobre el joc, podent-se donar el cas on un subgrup dels jugadors tingui més informació sobre el joc que els altres. No només el fet de tenir més informació, sinó també el fet de conèixer que es té més informació o que altres jugadors en tenen menys, poden afectar les estratègies que tenen els jugadors.

2.1.3 Tipus de jocs

Els jocs es poden classificar en diferents tipus, en base a com són els elements que els conformen. Hi ha per tant múltiples maneres de classificar-los, i aquestes maneres no són excloents (per tant, un mateix joc pot pertànyer a diversos tipus, segons la manera en que es decideixi classificar).

- Cooperatius vs no cooperatius: un joc és cooperatiu si els jugadors poden formar aliances, i per tant cooperar o bé per maximitzar la utilitat conjunta (en forma de la suma de les utilitats individuals) o bé per no prendre decisions que perjudiquin a un membre de l'aliança (un exemple seria no fer una jugada que porti a un resultat on un dels jugadors vegi la seva utilitat disminuïda, essent possible que aquesta jugada augmenti la utilitat total dels jugadors de l'aliança). Els jocs no cooperatius són aquells on els individus es centren exclusivament en les recompenses pròpies (això no implica que no considerin en les seves estratègies els moviments o accions que pugui jugar la resta).
- Simètrics vs asimètrics: un joc es classifica com simètric si els pagaments que reben els jugadors són idèntics si realitzen la mateixa acció.
- De suma zero vs no de suma zero: un joc és considerat de suma zero quan les recompenses que guanyen els jugadors en cada estat sumen zero. Per tant, el guany total és zero, i la millora en la utilitat d'un subgrup de jugadors comporta necessàriament la disminució en la utilitat en els altres (i seran iguals en termes agregats).
- Simultanis vs seqüencials: els jocs es classifiquen en un tipus o un altre considerant l'àmbit temporal. Si tots els jugadors fan una acció a la mateixa vegada, el joc es considera simultani. Si en canvi les decisions d'alguns jugadors es prenen posteriorment a les accions d'altres, el joc serà seqüencial.

2.1.4 La noció d'equilibri de Nash

L'equilibri de Nash és aquella situació resultat d'accions triades (la intersecció) en la qual individualment cap canvi d'acció (que un jugador triï una altra acció que la que dona lloc a l'equilibri de Nash) millorarà la seva situació en cap cas.

Formalment, un equilibri de Nash d'un joc amb N jugadors, un conjunt A de perfils estratègics (definit com el conjunt de possibles accions que es poden realitzar), i funció d'utilitat que els jugadors volen maximitzar, es pot definir com el perfil estratègic $a^* \in A$ tal que $\forall i \in N$:

$$u_i(a_i^*, a_{-i}^*) \geq (a_i, a_{-i}^*). \quad (1)$$

En l'expressió l'element $a_{-i}^* = (a_1^*, \dots, a_{i-1}^*, a_{i+1}^*, \dots, a_n^*)$, i representa el conjunt d'accions diferents a la que s'estudia. L'acció a_i^* que dona lloc a una utilitat al menys tan elevada com l'acció a és la que correspon a l'equilibri de Nash.

Per tant, l'equilibri de Nash és un equilibri en el sentit que no té sentit desviar-se de l'estratègia (unilateralment), atès el supòsit de racionalitat dels jugadors, maximitzadors d'utilitat.

L'equilibri de Nash és una noció central en teoria de jocs, indicant la situació en la que, per molt que es donessin més etapes en el joc o noves oportunitats a un jugadors per triar, s'acabaria en el mateix resultat (sempre sota la creença de cada jugador que cap dels altres variarà la seva posició). En molts casos un dels objectius principals en l'estudi dels jocs és trobar l'equilibri de Nash, que no necessàriament és únic.

És important recalcar que la no desviació en l'equilibri de Nash fa referència a un únic jugador. Més d'un jugador pot canviar d'acció, i simultàniament arribar a una situació millor que la que s'assoleix en un dels equilibris de Nash.

2.2 Processos Estocàstics

2.2.1 Definició i classificació segons àmbit temporal

En aquest apartat es fa ús dels conceptes presentats per Kai Lai Chung [1], i per Robert B. Ash [2].

Un procés estocàstic $X = \{X(t) : t \in T\}$ és un objecte matemàtic definit com una successió de variables aleatòries indexades, normalment amb un índex temporal, que representa el temps transcorregut en el procés. Una família de variables aleatòries associada a un espai d'estats, amb cadascuna identificada mitjançant un conjunt d'índexs (espai de paràmetres).

Hi ha diferents tipus de processos estocàstics, essent la cardinalitat del conjunt d'índexs (el temps en el cas que ocupa) un criteri de classificació. En cas que el conjunt tingui un nombre finit o un infinit numerable d'elements, es tracta d'un procés estocàstic a temps discret. Si el conjunt d'índexs té un nombre d'elements infinit no numerable (un interval en la recta dels reals per exemple), es tractarà d'un procés estocàstic a temps continu.

2.2.2 Tipus de processos estocàstics

Hi ha diverses maneres de representar un procés estocàstic. Algunes d'elles il·lustrades a continuació.

- Processos de Bernoulli: seqüència de variables aleatòries independents i idènticament distribuïdes, prenent cada variable aleatòria valors de 0 o 1, amb probabilitats que sumen la unitat.
- Passeigs aleatoris: definida com la suma de variables aleatòries independents i idènticament distribuïdes, essent cada element en la seqüència resultat d'haver sumat un valor a l'element anterior, de manera aleatòria.
- Processos de Poisson: procés de comptatge en que el valor de cada variable representa el nombre de vegades que s'ha produït l'event fins al moment associat a l'índex de la variable.
- Processos de Markov: són processos estocàstics que tenen la propietat Markoviana. La propietat de Markov implica que la probabilitat de transició a un estat des d'un altre, és condicionalment independent dels estats previs, i per tant és únicament funció de l'estat en el que s'està (no té memòria). Formalment: $P(X_t = a_t | X_{t-1} = a_{t-1}, X_{t-2} = a_{t-2}, \dots, X_0 = a_0) = P(X_t = a_t | X_{t-1} = a_{t-1}) = P_{a_t, a_{t-1}}$. El procés de Poisson en una dimensió és un cas particular d'un procés de Markov.

2.2.3 Cadenes de Markov: característiques i distribució estacionària

Els elements d'una cadena de Markov es detallen a continuació:

- Estat: situació específica en la que es pot trobar el sistema que s'està estudiant.
- Camí: és una seqüència de transicions entre estats que porta d'un estat i a un estat j .
- Matriu de transicions: matriu on l'element ij -èssim representa la probabilitat de passar de l'estat i a l'estat j .

Els elements de la matriu de transicions han de sumar 1 per files.

Considerant que P_{ij}^k indica la probabilitat de passar de l'estat i -èssim a l'estat j -èssim en k passos, hi ha una sèrie de definicions que els elements de les cadenes de Markov poden complir:

- Estat accessible: propietat que pot tenir un estat j d'un segon estat i , si existeix un camí que pot portar del segon al primer. Formalment, $\exists k : P_{ij}^k > 0$, l'estat j -èssim és accessible.

- Estats comunicants: propietat que pot tenir un conjunt d'estats, quan cadascun és accessible directament des de la resta. Formalment, $P_{ij} > 0, \forall (ij)$
- Classe d'estats: subconjunt d'estats tal que qualsevol parell en la classe està comunicat.
- Cadena irreductible: cadena en la que tots els estats es comuniquen ($\iff$ té una sola classe).
- Estat transitori: estat al qual es pot arribar des d'un altre, sense tornar a l'estat del que s'ha vingut. Formalment, $P_{ij}^k > 0$, i $P_{ji}^k = 0$, representant la primera expressió la probabilitat de passar de l'estat i-èsim a l'estat j-èsim, on i és l'estat transitori.
- Estat recurrent: estat que no és transitori.
- Estat absorbent: estat del qual no es pot sortir. Formalment, $P_{ii}^k = 1$.
- Període: se'n diu que un estat és periòdic amb període $k > 1$ si k és l'enter més petit tal que la longitud de qualsevol camí que va de l'estat al mateix estat és múltiple de k .
- Temps mitjà de recurrència: temps mitjà que es triga des d'un estat i a tornar a l'estat i .

La distribució estacionària és una propietat clau en el context de les cadenes de Markov. Degut a la naturalesa estocàstica de les cadenes de Markov, les propietats varien en el temps, canviant la situació del sistema i les probabilitats que s'accedeixi a un altre constantment. Però en cas d'existir una distribució invariant, s'assoleix un equilibri, essent el comportament de la matriu independent de la situació inicial en el llarg termini.

Són condicions necessàries (però no suficients) per l'existència d'estat estacionari que la cadena sigui irreduïble i aperiòdica.

La irreductibilitat implica que es pot arribar a qualsevol estat partint de qualsevol altre, en un nombre finit de passos i amb probabilitat positiva. D'aquesta manera es garantitza que no hi hagi conjunts d'estats no comunicats.

L'aperiodicitat implica que es pot arribar de nou a qualsevol estat un cop s'ha sortit d'ell, en un nombre finit de passos i amb probabilitat positiva. Per tant, no hi ha cap estat al qual no s'hi pugui arribar des de qualsevol punt en la cadena.

D'aquestes dues propietats se'n deriva el Teorema Fonamental de les Cadenes de Markov, que estableix que si una cadena de Markov és irreduïble i aperiòdica, aleshores té una distribució estacionària que és única. Si una cadena de Markov és una cadena ergòdica, aleshores tindrà una distribució estacionària.

El següent desenvolupament es pot trobar en l'obra de Michael Mitzenmacher i Eli Upfal [3].

Teorema: *Qualsevol cadena de Markov finita, irreductible, i aperiòdica té les següents propietats:*

1. La cadena té una distribució estacionària única $\bar{\pi} = (\pi_1, \dots, \pi_k)$.
2. Per a tot i i j , el límit $\lim_{t \rightarrow \infty} P_{j,i}^t$ existeix i és independent de i .
3. $\pi_i = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{j,i}^t = 1/h_{i,i}$, el temps mitjà entre visites.

Lema: *Per qualsevol cadena de Markov irreductible i ergòdica, i per qualsevol estat i , el límit $\lim_{t \rightarrow \infty} P_{i,i}^t$ existeix, i $\lim_{t \rightarrow \infty} P_{i,i}^t = 1/h_{i,i}$.*

Aquest resultat es deriva de que el temps mitjà entre visites a l'estat i és $h_{i,i}$, i per tant l'estat i es visita una freqüència del temps de $1/h_{i,i}$. Com que $\lim_{t \rightarrow \infty} P_{i,i}^t$ representa la probabilitat que partint de l'estat i s'acabi a l'estat i , aquesta probabilitat és $1/h_{i,i}$.

Demostració:

Definint $r_{j,i}^t$ com la probabilitat que, començant a j , la cadena visiti primer i en el temps t . Com que la cadena és irreductible, tenim que $\sum_{t=1}^{\infty} r_{j,i}^t = 1$, i per a qualsevol $\varepsilon \geq 0$ existeix un $t_1 = t_1(\varepsilon)$ finit, tal que $\sum_{t=1}^{t_1} r_{j,i}^t \geq 1 - \varepsilon$.

Per a $j \neq i$, tenim:

$$P_{j,i}^t = \sum_{k=1}^t r_{j,i}^k \cdot P_{i,i}^{t-k} \quad (2)$$

Per a $t \geq t_1$,

$$\sum_{k=1}^{t_1} r_{j,i}^k \cdot P_{i,i}^{t-k} \leq \sum_{k=1}^t r_{j,i}^k \cdot P_{i,i}^{t-k} = P_{j,i}^t. \quad (3)$$

Utilitzant el fet que $\lim_{t \rightarrow \infty} P_{i,i}^t$ existeix i t_1 és finit, tenim:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_{j,i}^t \geq \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{t_1} r_{j,i}^k \cdot P_{i,i}^{t-k} = \sum_{k=1}^{t_1} r_{j,i}^k \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} P_{i,i}^t \geq (1 - \varepsilon) \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} P_{i,i}^t \quad (4)$$

D'altra banda:

$$P_{j,i}^t = \sum_{k=1}^t r_{j,i}^k \cdot P_{i,i}^{t-k} \leq \sum_{k=1}^{t_1} r_{j,i}^k \cdot P_{i,i}^{t-k} + \varepsilon \quad (5)$$

a partir del qual es pot deduir:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_{j,i}^t \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{t_1} r_{j,i}^k \cdot P_{i,i}^{t-k} + \varepsilon = \sum_{k=1}^{t_1} r_{j,i}^k \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} P_{i,i}^{t-k} + \varepsilon \leq \lim_{t \rightarrow \infty} P_{i,i}^t + \varepsilon \quad (6)$$

Quan ε s'aproxima a zero, es compleix que, per a qualsevol parella i i j ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_{j,i}^t = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{i,i}^t = \frac{1}{h_{i,i}} \quad (7)$$

Ara, sigui

$$\pi_i = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{j,i}^t = \frac{1}{h_{i,i}} \quad (8)$$

Mostrem que $\bar{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \dots)$ és una distribució estacionària, corresponent a un nombre d'estats n .

Per a tot $t \geq 0$, tenim $P_{i,i}^t \geq 0$, i per tant, $\pi_i \geq 0$. Per a qualsevol $t \geq 0$, $\sum_{i=0}^n P_{j,i}^t = 1$, i per tant,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n P_{j,i}^t = \sum_{i=0}^n \lim_{t \rightarrow \infty} P_{j,i}^t = \sum_{i=0}^n \pi_i = 1, \quad (9)$$

i $\bar{\pi}$ és una distribució. Ara,

$$P_{j,i}^{t+1} = \sum_{k=0}^n P_{j,k}^t \cdot P_{k,i} \quad (10)$$

Deixant que $t \rightarrow \infty$ tenim

$$\pi_i = \sum_{k=0}^n \pi_k \cdot P_{k,i} \quad (11)$$

demonstrant que $\bar{\pi}$ és una distribució estacionària.

Suposem que hi hagués una altra distribució estacionària $\bar{\phi}$. Aleshores, pel mateix argument, tindriem

$$\phi_i = \sum_{k=0}^n \phi_k \cdot P_{k,i} \quad (12)$$

i prenent el límit quan $t \rightarrow \infty$ obtenim

$$\phi_i = \sum_{k=0}^n \phi_k \cdot \pi_i = \pi_i \cdot \sum_{k=0}^n \phi_k \quad (13)$$

Com que $\sum_{k=0}^n \phi_k = 1$, es compleix que $\phi_i = \pi_i \forall i$, o sigui $\bar{\phi} = \bar{\pi}$.

A aquesta distribució estacionària s'hi arribarà des de qualsevol distribució inicial, convergint a mesura que passi el temps. Formalment:

Un vector de probabilitats $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_k)$ és una distribució estacionària de la cadena si es compleix que $\pi = \pi P$. Es verifica que per qualssevol estats i, j $\pi_j = \lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}^n$.

2.2.4 Processos estocàstics a temps continu: Moviment brownià, procés de Wiener

Un procés de Wiener estàndard i unidimensional és un procés estocàstic $\{W_t, t \geq 0\}$, també anomenat moviment Brownià. Les propietats elementals són les que es detallen a continuació:

- $W_0 = 0$.
- Amb probabilitat 1, la funció $t \mapsto W_t$ és contínua en tot t .
- Els increments del procés $\{W_t\}_{t \geq 0}$ són estacionaris i independents.
- L'increment $W_{t+s} - W_s$ té distribució Normal $\mathcal{N}(0, t)$.

La noció de procés de Wiener definida es pot generalitzar per a d -dimensions, W_t definida per valors vectorials tal que $W_t = (W_t^{(1)}, W_t^{(2)}, \dots, W_t^{(d)})$, on cadascun dels $W_t^{(i)}$ són processos de Wiener estàndard unidimensionals, tots independents.

Els increments independents es satisfan quan per cada elecció de nombres reals no negatius, $0 \leq s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2 \leq \dots \leq s_n < t_n < \infty$, les variables aleatòries $W_{t_1} - W_{s_1}, W_{t_2} - W_{s_2}, \dots, W_{t_n} - W_{s_n}$ que representen increments, són conjuntament independents. La propietat d'estacionarietat es satisfà si per a qualsevol $0 \leq s, t \leq \infty$, $W_{t+s} - W_s$ i $W_t - W_0 = W_t$ tenen la mateixa distribució.

Un procés estocàstic amb increments que compleixen aquestes característiques s'anomena procés de Lévy. La intersecció d'aquests amb la classe de processos Gaussians, és precisament el procés de Wiener.

Teorema: El procés $\{W(t+s) - W(s)\}_t \geq 0$ és un moviment brownià, i es deriva de la propietat de Markov del moviment brownià. Concretament, $W(r)_{0 \leq r \leq s}$ que indica el procés en un moment r entre 0 i s , no té cap efecte sobre $\{W(t+s) - W(s)\}_{t \geq 0}$, que és per tant independent dels estats previs.

Demostració: Fent ús del teorema de Kac: siguin X_1 i X_2 variables aleatòries amb valors en els nombres reals, que X_1 i X_2 siguin independents és equivalent a escriure:

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{E} [e^{\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2}] = \mathbb{E} [e^{\lambda_1 X_1}] \cdot \mathbb{E} [e^{\lambda_2 X_2}] \quad (14)$$

Si considerem $(t+s) = t' > s$:

Sigui $a, b \in \mathbb{R}$. Aleshores

$$\mathbb{E} [e^{aW_s + b(W_{t'} - W_s)}] = \mathbb{E} [\mathbb{E} [e^{aW_s + b(W_{t'} - W_s)} \mid \mathcal{F}_s]] \quad (15)$$

(on $\mathcal{F}_s$ és una filtració de l'espai de probabilitats denotada per $\Omega, \mathcal{F}, P$, una família de σ -àlgebres indexada per s).

L'expressió és equivalent a

$$\mathbb{E}[e^{aW_s} \mathbb{E}[e^{b(W_{t'}-W_s)} \mid \mathcal{F}_s]], W_s \in \mathcal{F}_s. \quad (16)$$

Reescribint,

$$\mathbb{E}[e^{aW_s} \mathbb{E}[e^{b(W_{t'}-W_s)}]] = \mathbb{E}[e^{aW_s}] \mathbb{E}[e^{b(W_{t'}-W_s)}] \quad (17)$$

Per tant, $\{W_{t'} - W_s\}_{t \geq 0} = \{W_{t+s} - W_s\}_{t \geq 0}$ i W_s són independents. El mateix raonament es pot aplicar a $r : 0 \leq r \leq s$, complint-se doncs la propietat de Markov.

3 Jocs de Markov: decisions individuals

3.1 Individu en el mercat laboral

3.1.1 Descripció de la situació i problema a resoldre

La taxa d'atur és una de les magnituds fonamentals en l'economia, juntament amb la inflació. Està lligat amb la producció d'un país, influint directament en la riquesa i en el nivell de vida promig dels seus habitants. Per aquest motiu és que és una variable tan estudiada: les seves causes, les múltiples formes que pot prendre, i les conseqüències que pot tenir en un país el fet de tenir una taxa d'atur elevat.

Es suposa un individu en atur i cercant feina. Amb la formació que té, un grau universitari, pot començar a buscar immediatament, i accedir a un treball amb una remuneració. Malgrat això, no té el treball assegurat, havent-hi una certa probabilitat de ser acceptat.

També té la opció de fer una formació addicional, un màster, que li ocuparà un temps, i en acabar-la, tindrà un perfil més atractiu (podent traduir-se o bé en accedir a un treball amb un salari superior, o en tenir una probabilitat major de ser acceptat, que de no haver realitzat la formació).

3.1.2 Suposicions i elements en Teoria de Jocs

El supòsit bàsic del model és que per aquest individu només hi ha aquests dos treballs, i per cada nivell de formació, pot accedir a un d'ells amb una probabilitat no nul·la de ser acceptat, i a l'altre amb probabilitat zero. El treball al que pot accedir amb la formació afegida del màster és millor en les dues dimensions que les caracteritzen, salari i probabilitat de ser acceptat (es suposarà que guanya un 17,5% més i que la probabilitat de ser acceptat també augmenta, en base a informació similar al respecte [4]). També es suposa que el fet de formar-se implica que no pot estar cercant treball en aquell moment, comportant un cost d'oportunitat, que dura un any complet. Un cop està treballant, es manté en aquell treball (no l'acomiadaran i tampoc marxarà voluntàriament), percebent el salari fins al l'últim període del joc.

Els elements de l'escenari, en teoria de jocs es defineixen a continuació.

Els jugadors, es tracta d'un únic l'individu que està cercant treball.

Els estats són les possibles situacions en les que està jugant al joc, i són quatre, podent estar en l'atur o treballant, amb dues possibilitats a cadascuna. En atur, primerament pot estar amb la formació bàsica (universitària) amb la qual comença, o també amb la formació afegida (màster). Si està treballant, pot estar en el treball bàsic al que pot accedir des del principi fins al moment que fa la formació (en cas de fer-la) o en el treball avançat al qual pot anar únicament si ha passat la segona formació. Atès que si treballa en un particular, ho farà per tota la durada del joc, els dos estats de treballant bàsic i treballant avançat són absorbents.

Les accions que pot realitzar l'individu són diferents en cadascun dels estats. En l'estat de formació bàsica, té dues accions disponibles: cercar treball immediatament, o fer una formació. Si el jugador està en l'estat de formació avançada, únicament pot fer una acció, que és cercar treball. Si està treballant però, independentment del tipus de treball, sempre estarà en ell (il·lustrant-se mitjançant una única acció possible, el fet de quedar-se).

Les recompenses són els salaris mensuals que pot percebre l'individu en cada treball, essent la recompensa del treball avançat estrictament superior a la que pot rebre del treball bàsic. Quan està en els estats d'atur, les recompenses que rep són nul·les.

En quant al nombre d'etapes del joc, es consideraran diferents horitzons temporals. D'aquesta manera s'afegeix a l'anàlisi veure si hi ha diferències segons els períodes que dura el joc. Cada període representarà un mes, i per tant la formació dura 12 períodes.

L'individu, racional i maximitzador d'utilitat, que en deriva del salari, vol actuar de manera que acabi guanyant la major quantitat de diners possible.

3.1.3 Representació i solució analíticament

Gràficament, el problema al que s'enfronta el jugador queda il·lustrat en la figura 2.1.

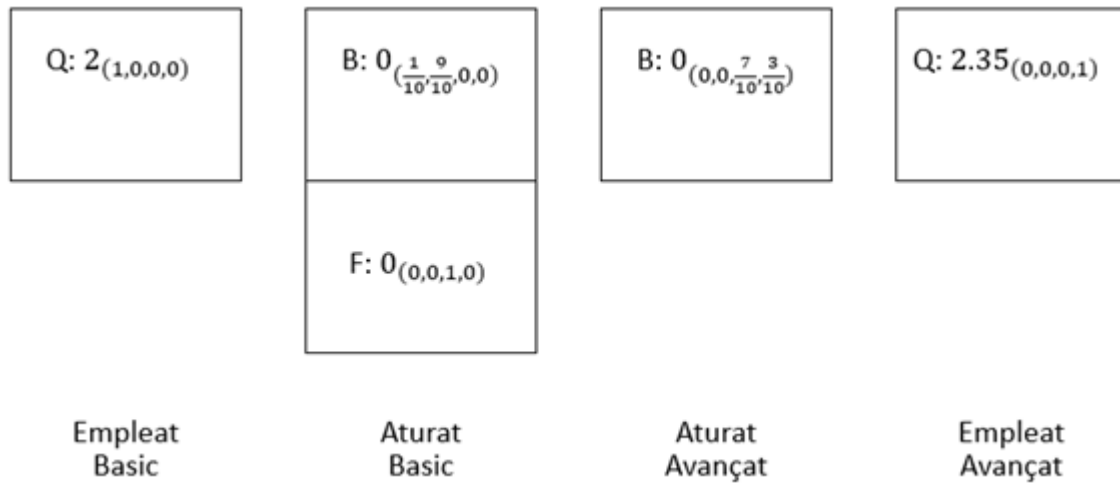


Figura 3.1: Representació del joc del mercat de treball.

En la figura, cada requadre representa un estat possible en el que pot estar el joc. Dins cadascun dels estats, hi ha les accions que pot fer el jugador en ells (Q : quedar-se, B : buscar treball, F : formar-se). Cada acció té associada tant una recompensa, el salari mensual en milers d'euros (0 sempre i quan estigui en l'atur, i positiva representant el salari quan treballa), i un vector de transicions de probabilitat (on l'element i -èssim representa la probabilitat de canviar a l'estat i -èssim si es fa aquella jugada).

Inicialment, el jugador es troba en l'estat Aturat Bàsic (en aquest primer període, sempre guanyarà 0. Si trobés feina al primer període, seria al principi del segon quan comencés

a treballar). Només en aquest estat és quan té diverses opcions per escollir. Té com a estratègies possibles o bé buscar sempre treball, o bé formar-se en el primer període i després buscar treball. Aquestes serien estratègies pures, ja que sempre té cada acció que tria, ho fa amb probabilitat 1. Formalment:

Estratègia B: $A[i] = B \forall i$

Estratègia F:

$$A[i] = \begin{cases} F \iff i = 1 \\ B \iff i = 2, \dots, n \end{cases} \quad (18)$$

També podria decantar-se per una estratègia mixta, en la qual assigni una funció de distribució de probabilitat a les diferents accions possibles. Per tant, en cada etapa, assigna probabilitat p a buscar, i probabilitat $1 - p$ a formar-se, sempre i quan no s'hagi format. Si s'ha format, l'estratègia tornarà a ser pura, triant sempre buscar, degut a la impossibilitat de formar-se de nou. Formalment:

Estratègia 3: $A[i] = B$ amb p i F amb $1 - p \iff A[j] \neq F, j = 1, \dots, i - 1 ; A[i] = B$ altrament.

Analíticament es pot resoldre el problema mitjançant la comparació del guany esperat seguint cada estratègia en aquest procés Markovià. En el cas de l'estratègia B , el guany esperat és (on 0.1 és la probabilitat de trobar feina, i 0.9 la de romandre en l'atur):

$$\begin{aligned} \overline{R}_B &= 0 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} 0.9^i + 2 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} 0.9^{i-1} \cdot 0.1 \\ &= 2 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} 0.9^{i-1} \cdot 0.1 = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0.1 \cdot (1 - 0.9^n)}{1 - 0.9} = 2 \end{aligned} \quad (19)$$

En el cas de l'estratègia F , el guany esperat és (aquí la probabilitat de trobar feina és de 0.3, i de no trobar en un període és de 0.7):

$$\begin{aligned} \overline{R}_F &= 0 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} 0.7^i + 2.35 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} 0.7^{i-1} \cdot 0.3 \\ &= 2.35 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} 0.7^{i-1} \cdot 0.3 = 2.35 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0.3 \cdot (1 - 0.7^n)}{1 - 0.7} = 2.35 \end{aligned} \quad (20)$$

S'aprecia que l'estratègia de començar a formar-se és superior, atès que en ambdues el guany mensual mig tendeix al propi valor del salari mensual. Degut a això, l'estratègia mixta tindrà un guany mig entre els dos valors. Serà superior al guany mig associat a l'estratègia B sempre i quan es formi (la probabilitat de formar-se és $1 - p^n$, on p és la probabilitat de buscar treball en comptes de formar-se. L'expressió és creixent en el nombre de períodes n atès que $|p| < 1$, garantint que amb prou períodes la probabilitat de no haver-se format tendeixi a 0). I serà

com a màxim igual al de l'estratègia F si i només si es forma en el primer període (amb probabilitat p) i estrictament inferior altrament.

3.1.4 Solució computacionalment per simulació

Amb un nombre infinit de períodes l'estratègia a seguir per l'individu racional és formar-se el més aviat possible. És clar però, que si el joc durés només dotze períodes (un any complet) o menys, l'estratègia òptima seria buscar treball en aquells període tot i tenir únicament formació baixa. Ja que amb una probabilitat del 10% tindrà treball en el segon període i rebrà el salari menor si és que busca, mentre que si es forma en el període inicial guanyarà 0 i en el segon mentre busca també (tot i poder acabar el període 2 tenint una feina millor, ja hauria acabat el joc).

Es realitzarà per tant un anàlisi mitjançant simulacions, per veure com evoluciona el sistema i el guany final. Fent 10000 simulacions per cada tipus d'estratègia, i pels escenaris de durada de joc de 60 etapes, 240 etapes, i 600 etapes (5 anys, 20 anys, i 50 anys respectivament), s'obtenen els següents resultats de recompenses en mitjana.

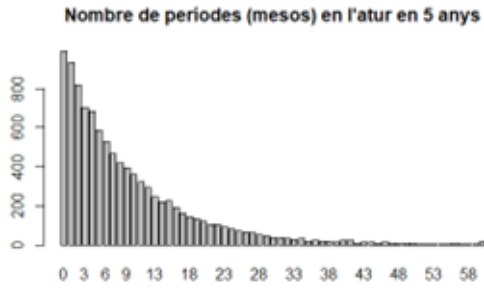
	Sempre Buscar	Primer Formar-se
5 anys	102.11	107.15
20 anys	461.71	530.28
50 anys	1181.96	1376.23

Taula 3.1: Comparativa del salari mitjà percebut segons l'estratègia i l'horitzó temporal del joc.

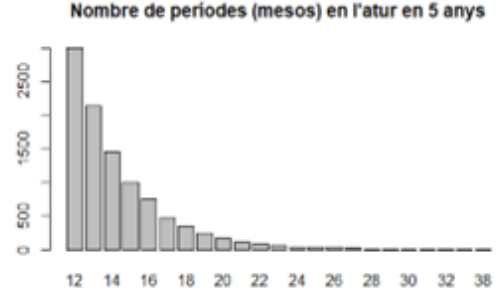
Clarament l'estratègia més adequada és formar-se en primer lloc, malgrat renunciar a la possibilitat de trobar treball en els primers 12 períodes (la durada de la formació). D'aquesta manera, en els següents períodes és més probable trobar feina, i el major salari derivat de la feina que requereix formació avançada compensa el fet d'haver de renunciar segur a un salari en el segon període (el primer després de l'inicial).

Es pot apreciar com a mesura que augmenten els anys, i per tant els períodes del joc, la recompensa total dividida pel nombre de períodes, equivalent al guany mig mensual, s'aproxima al salari mensual, tal i com s'ha vist en la resolució analítica.

Es pot observar el nombre de períodes que s'ha estat en atur, en cadascun dels escenaris.

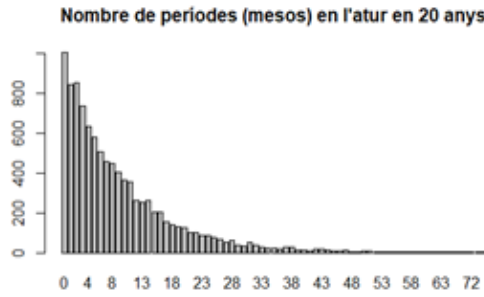


(a) Estratègia buscar sempre

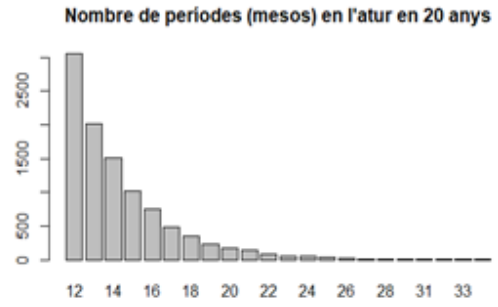


(b) Estratègia primer formar-se

Figura 3.2: Comparativa del nombre de mesos en atur segons l'estratègia en un període de 5 anys.

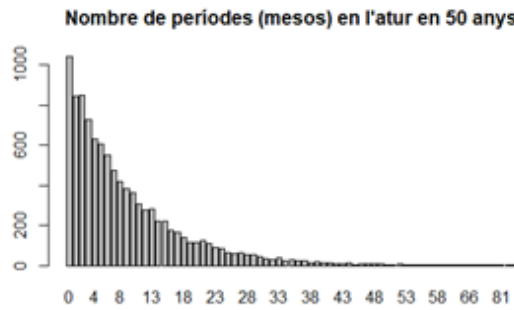


(a) Estratègia buscar sempre

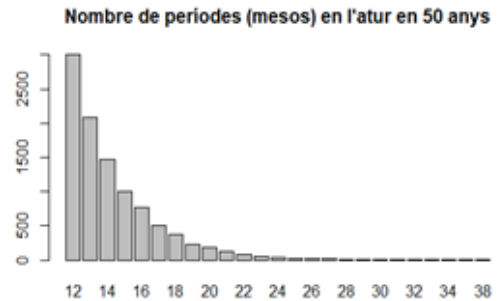


(b) Estratègia primer formar-se

Figura 3.3: Comparativa del nombre de mesos en atur segons l'estratègia en un període de 20 anys.



(a) Estratègia buscar sempre



(b) Estratègia primer formar-se

Figura 3.4: Comparativa del nombre de mesos en atur segons l'estratègia en un període de 50 anys.

Ambdues recompenses i nombre de períodes en atur estan relacionades, de manera inversa. S'aprecia que en ambdues estratègies la forma del nombre d'etapes en atur es comporta de manera similar a una distribució exponencial. Si es segueix l'estratègia F, el valor mínim que pren és de 12 (la durada de la formació), mentre que el valor és 0 per l'estratègia B. Malgrat això, un cop l'individu s'ha format, en mitjana està menys de 3 etapes en atur (essent la mitjana global d'uns 14), mentre que buscant directament el valor mitjà és d'aproximadament 9. Això es deu a l'augment en la probabilitat de trobar feina havent fet el màster.

	Sempre Buscar	Primer Formar-se
5 anys	8.95	14.41
20 anys	9.15	14.35
50 anys	9.02	14.37

Taula 3.2: Comparativa del temps mig en atur segons l'estratègia i l'horitzó temporal del joc.

Es pot apreciar que malgrat el temps mig mesurat en mesos en l'atur és inferior quan sempre es busca, un cop passats els 12 mesos obligatoris, formant-se es passa poc més de 2 mesos en l'atur, com s'ha esmentat prèviament. Aquesta quantitat de temps en atur és aproximadament un terç del temps en atur per la formació bàsica, coherent amb el la probabilitat de trobar feina que és també d'un terç respecte de la situació amb formació avançada.

3.1.5 Conclusions del cas

Els resultats per simulació mostren que dedicar 12 períodes a formar-se, per obtenir la titulació del màster tot just acabar la formació universitària és millor estratègia que començar a buscar treball tenint únicament la formació inicial. No és rentable renunciar a la millora salarial i de probabilitat de trobar feina per tal de poder accedir a un treball de manera immediata.

La solució és òptima, atès que l'estratègia de formar-se és superior en qualsevol cas. Si bé és cert que els elements d'incertesa que suposen les probabilitats condueix a resultats que es basen en l'esperança matemàtica, aquests mostren que no suposa cap avantatge substituir el buscar directament per l'estratègia de formar-se primer.

Aquesta conclusió és vàlida sota els supòsits del model, i poden variar sobretot en funció de l'increment en el salari i en la probabilitat d'acceptació. Si la probabilitat d'acceptació no fos molt més gran, o si l'increment salarial fos menys notable, podria ser més rentable buscar directament treball. La immediatesa de rebre el salari al principi seria millor per l'individu que no pas rebre una quantitat lleugerament superior en futurs períodes.

Es pot estudiar per quins valors salarials de la situació amb formació elevada, estaria l'individu indiferent entre buscar directament treball i formar-se primer.

Com s'ha vist en els resultats analítics, en el límit és sempre millor formar-se. En el model però, on s'estudien els tres horitzons temporals, aquest resultat no es pot aplicar sense

considerar el nombre d'etapes (amb un nombre d'etapes petit, formar-se no seria òptim).

Així, per cadascuna de les situacions, es calcula quin és el salari que fa que formar-se es compensi de manera exacta amb renunciar a estudiar just acabada la formació bàsica. Mitjançant un procés iteratiu, on es compara el salari percebut en el total d'etapes per 5 anys, per 20 anys, i per 50 anys, s'obté que els resultats són els següents:

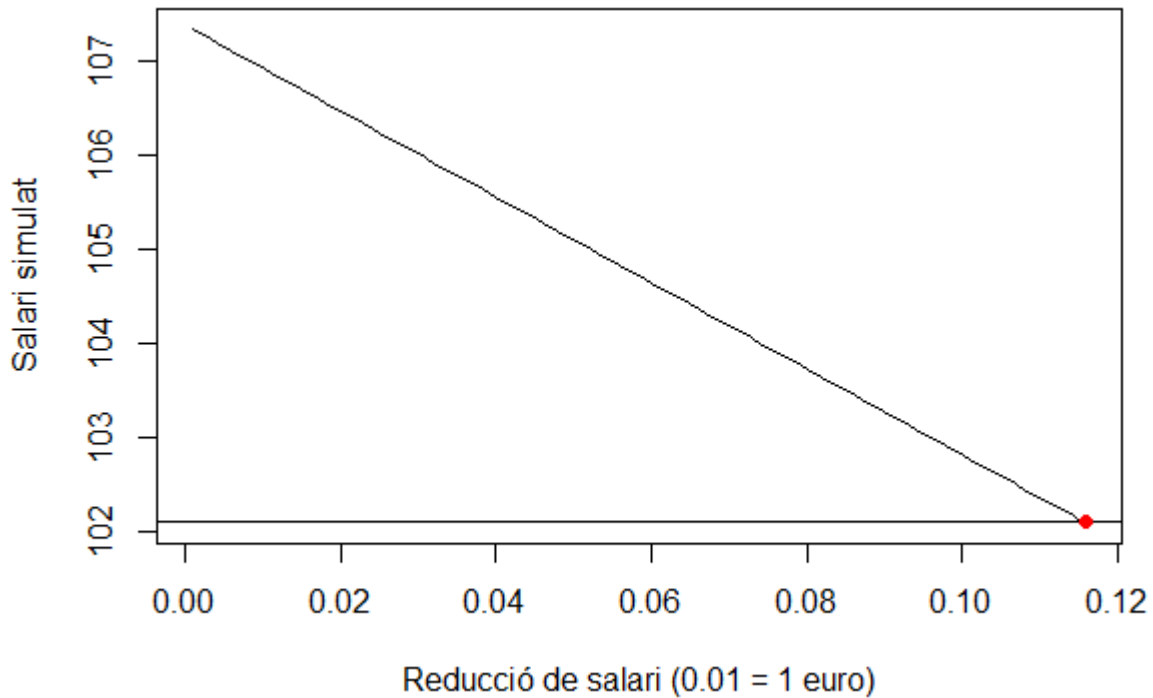


Figura 3.5: Salari d'indiferència entre les dues estratègies (5 anys).

La reducció salarial és tal que el salari de la formació elevada seria de 2.233 milers d'euros en l'horitzó de 5 anys, un 11.65% major que el de formació baixa, una tercera part menys del 17.5% de superioritat inicial.

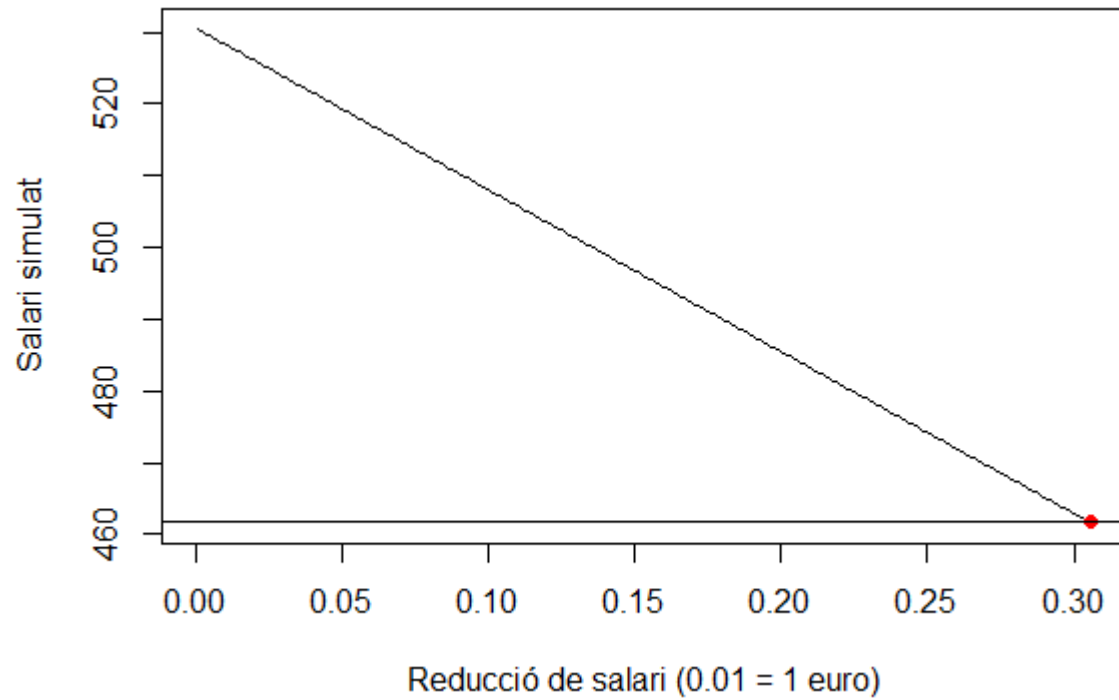


Figura 3.6: Salari d'indiferència entre les dues estratègies (20 anys).

Quan el joc s'estudia en 20 anys, la reducció salarial per la indiferència és tal que el salari de la formació elevada seria de 2.045 milers d'euros, un 2.25% major que el de formació baixa, envers del 17.5% de superioritat inicial.

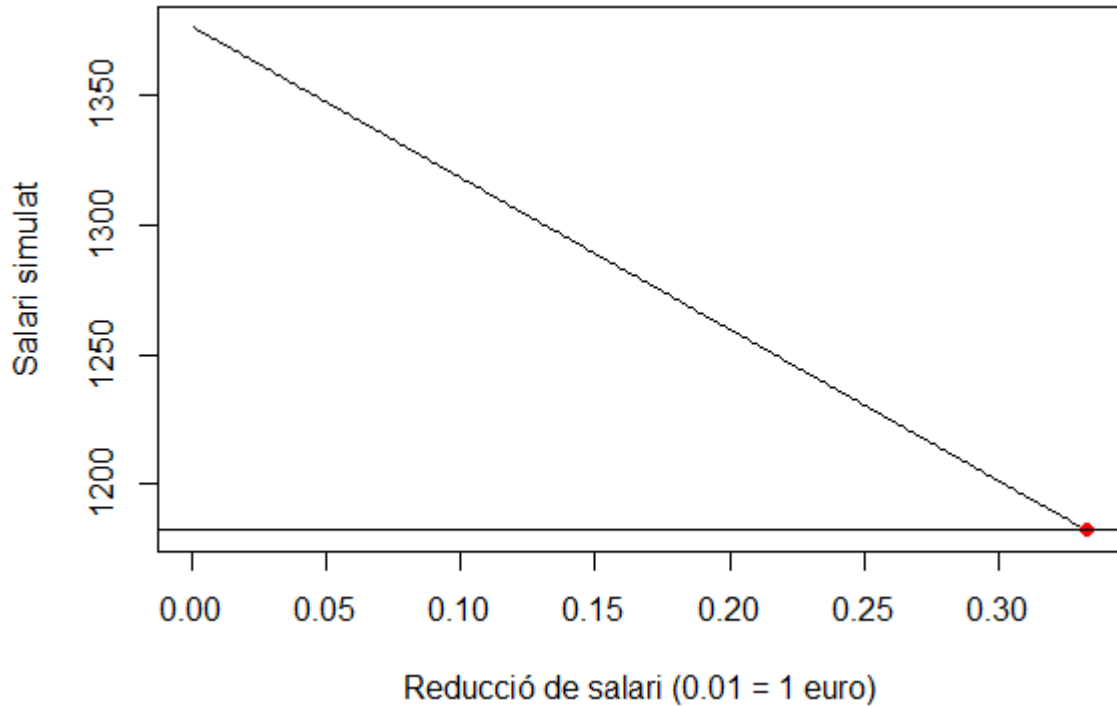


Figura 3.7: Salari d'indiferència entre les dues estratègies (50 anys).

En l'últim cas, de 50 anys d'etapes de joc, la reducció salarial per la indiferència és tal que el salari de la formació elevada seria de 2.017 milers d'euros, solament un 0.85% major que el de formació baixa, 20 vegades menys que la superioritat de 17.5%.

Es pot notar com la necessitat de compensar per la formació addicional és inferior, a major nombre de períodes. El motiu és senzill: el temps dedicat a l'estudi, que comporta un sacrifici de salari, i és fix, representa una major proporció del temps de joc quant menys dura aquest. En el cas de 5 anys, s'està deixant de rebre salari un 20% del temps, mentre que en l'altre extrem de 50 anys, la formació és només un 2% de la durada del joc, gairebé negligible.

3.2 Individu en el mercat de bens

3.2.1 Descripció de la situació i problema a resoldre

L'estratègia de producció és sovint complexa i dependent de multitud de factors, com els recursos disponibles, la capacitat d'obtenir finançament, les condicions de la indústria, el context de l'economia... Els factors es relacionen entre sí, i és difícil estudiar cadascun de manera aïllada. Per aquest motiu es pot incorporar la informació de la situació de cada factor en indicadors més globals, com per exemple, la demanda. La demanda reflecteix les condicions del mercat, les expectatives dels inversors, i diverses característiques de les ja esmentades.

Es suposa un individu empresari que pren decisions de producció en funció de la demanda que espera tenir. Per tant, té una funció d'oferta planejada segons la demanda esperada. Disposa de capital, que pot o bé emprar per produir, o bé invertir-lo. Si el destina a la producció, pot fer-ho de manera intensiva (com podria ser, operar amb les màquines a temps complet, o fer hores addicionals) o de manera habitual. També pot dedicar a invertir-lo, obtenint rendibilitat.

La demanda que pot tenir l'agregat dels consumidors pot ser alta, mitjana, o baixa. En cas que sigui alta, el productor voldrà haver produït de manera intensiva (mode de producció 1), ja que vol realitzar el màxim nombre de vendes. Si la demanda és l'habitual, voldrà haver produït de manera habitual (mode de producció 2), ja que de manera intensiva haurà usat els recursos en excés, podent haver-los destinat a invertir per exemple. Si la demanda és baixa, voldrà haver destinat la major part del capital a invertir, i la resta a produir per satisfer la baixa demanda d'aquell període (mode de producció 3).

Es poden donar diversos desajustos. Pel productor, l'ideal seria haver seguit el mode de producció 1 en el període on la demanda és alta, haver realitzar el mode de producció 2 quan la demanda és habitual, i el mode de producció 3 en cas contrari, quan és baixa. El productor no pot, però, saber de manera exacta quina serà la demanda, i en un període, donada una demanda, haurà de satisfer-la segons la producció que hagi realitzat prèviament (no té temps a observar la demanda actual, produir de manera adient, i satisfer-la en un mateix període). Els desajustos es donen quan el mode de producció no es correspon a la demanda de l'etapa.

3.2.2 Suposicions i elements en Teoria de Jocs

Els supòsits sobre les característiques d'aquesta economia són que el que produeix l'empresari no és un producte de primera necessitat (sinó, sempre tindria demanda de tots els clients). Addicionalment, que és l'únic productor del bé que hi ha en el mercat, i per tant té una quota de mercat del 100%, no havent-se de preocupar per competidors (podria assumir-se per exemple, que les barreres d'entrada són massa costoses). El marge de benefici unitari que percep d'una venda és superior a la rendibilitat esperada que hagués obtingut en cas d'haver dedicat els recursos per produir aquella unitat, a invertir, i per tant prefereix una venda a la rendibilitat d'inversió, per unitat de capital utilitzada (en cas contrari, sempre decidiria

invertir). Si hi dediqués tots els seus recursos a produir, podria abastir a tots els clients. Malgrat això, en cas de sobrar, l'inventari que no vengui es quedarà obsolet en el següent període.

Un altre supòsit és sobre el comportament dels individus. La propensió marginal a consumir no és rellevant pel productor. Sap que si en conjunt els individus es decideixen per demanda alta, ho faran de manera homogènia.

El jugador és un únic individu que decideix el mode de producció. Per tal de minimitzar els desajustos entre recursos destinats a produir, i per tant unitats produïdes, amb unitats venudes, vol dedicar a la inversió tants recursos com els que sobrin, corresponents a cada proporció de demanda. Vol dedicar a produir tant com per abastir les necessitats de la resta de la manera més ajustada possible, i que la producció s'esgoti sense deixar cap client sense producte. Per tant vol equiparar el mode de producció a la demanda corresponent, de la manera més precisa possible.

Les possibles situacions són les diferents proporcions de demanda del total dels consumidors. En la situació de demanda alta, es suposa que l'economia està en demanda alta, no volent dir que tots els consumidors volen adquirir el producte. Com la demanda fa referència a l'economia, i no individu a individu, els estats de demanda son esdeveniments disjunts (per exemple, malgrat alguns individus no consumeixin, que tindrien demanda baixa individualment, si la gran majoria vol consumir, l'estat de l'economia serà de demanda alta).

Al contrari que en el cas previ, en cada situació l'empresari té sempre l'acció de produir disponible, podent decidir quant en cada etapa del joc.

En aquesta situació la utilitat la derivarà de quant de bé ha ajustat la producció a la demanda efectiva. En cas d'haver-la ajustat perfectament, tindrà una utilitat d'1, mentre que disminuirà en funció de la magnitud del desajust. La funció d'utilitat que l'empresari vol maximitzar s'il·lustra a continuació:

$$U(q) = 1 - \max(|q_A^s - q_A^d|, |q_M^s - q_M^d|, |(1 - q_A^s - q_M^s) - (1 - q_A^d - q_M^d)|) \quad (21)$$

$$q_A^s, q_A^d, q_M^s, q_M^d \in \{0, 1\}$$

Les variables valen 0 o 1 en funció de si l'estat actual hi correspon. El superíndex s indica la oferta, la producció, mentre que d indica la demanda dels clients. El subíndex a indica una producció o demanda alta, i el subíndex m indica quantitats mitjanes.

Si el productor ha seguit el mode de producció 1, que exactament cobreix demanda alta, q_A^s val 1, i en cas contrari val 0. El mateix succeeix per q_M^s , que cobreix demanda mitjana, i correspon al mode de producció 2. De manera similar, les variables q_A^d , i q_M^d valen 1 si la demanda ha estat alta o mitjana respectivament, i 0 en cas contrari (i en cap cas podent valer les dues 1). Si aquestes quatre variables valen 0, vol dir que la demanda de l'economia ha estat baixa, i que el productor ha seguit el mode de producció 3.

Si la decisió del mode de producció que es reflecteix en q_A^s (mode de producció 1 per demanda alta) o q_M^s (resultat del mode de producció 2 per demanda mitja) es corresponen a la

demanda q_A^d (demanda de l'economia alta) o q_M^d (demanda de l'economia mitja, l'habitual), el complementari de les seves sumes (majoria de gent que no vol consumir el bé, i mode de producció 3) també coincidiran. En aquest cas, la funció d'utilitat prendrà valor 1, ja que l'expressió del màxim valdrà 0, el mateix valor pels tres termes inclosos. Aquest és el valor màxim, i per tant la utilitat està fitada superiorment pel valor 1 (podent-se interpretar, com la unitat, el total possible). En cas que hi hagi un desajust, una de les tres diferències dins el màxim serà 1, i la utilitat resultant serà nul·la, essent aquesta la fita inferior (podent-se interpretar com que no en deriva utilitat).

En quant al nombre d'etapes del joc, es considerarà un any on el productor treballa de dilluns a divendres i mai als caps de setmana, i per tant seran 260, corresponent als dies. Cada etapa correspon a un cicle de vendes, en el qual opera l'empresa del productor. La peculiaritat és que és inviable predir per cada període i estimar les futures proporcions de manera precisa, ja que les dades sobre les vendes en una etapa no es recopilen amb prou antelació respecte a la següent etapa.

L'empresari, racional i maximitzador d'utilitat, vol actuar de manera que acabi minimitzant els desajustos.

3.2.3 Representació i plantejament analític

El productor disposa de la següent informació per tal de fer la tria respecte a la quantitat de capital destinada a la producció, i la quantitat que invertirà. Es tracta de les probabilitats de transició dels individus, els estats possibles són estalvi baix, mig, i alt, ordenats per fila i columna. Des del punt de vista del productor, representaria el consum alt, mig, i baix de cadascun dels clients (el consum baix, o estalvi alt, representa un no consum).

$$\begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}$$

Per cada perfil d'estalvi, és més probable que en el següent període s'estalviï el mateix nivell. Si bé és cert que després d'estalviar molt, un individu es pot permetre estalviar menys en períodes posteriors, i de igual manera després d'estalviar poc és probable que necessiti estalviar molt posteriorment, és raonable considerar que els potencials clients tenen inèrcia en el seu comportament.

Aquesta matriu és representació d'una cadena de Markov ergòdica. Per tant, hi ha un estat estacionari que és únic, una distribució a la que tendirà a llarg termini independentment de la distribució inicial. Una estratègia viable pel productor seria, per tant, seguir un mode de producció amb probabilitat segons la distribució de probabilitats de demanda en l'estat estacionari.

Gràficament, el problema al que s'enfronta l'agent queda representat en la figura 2.4.

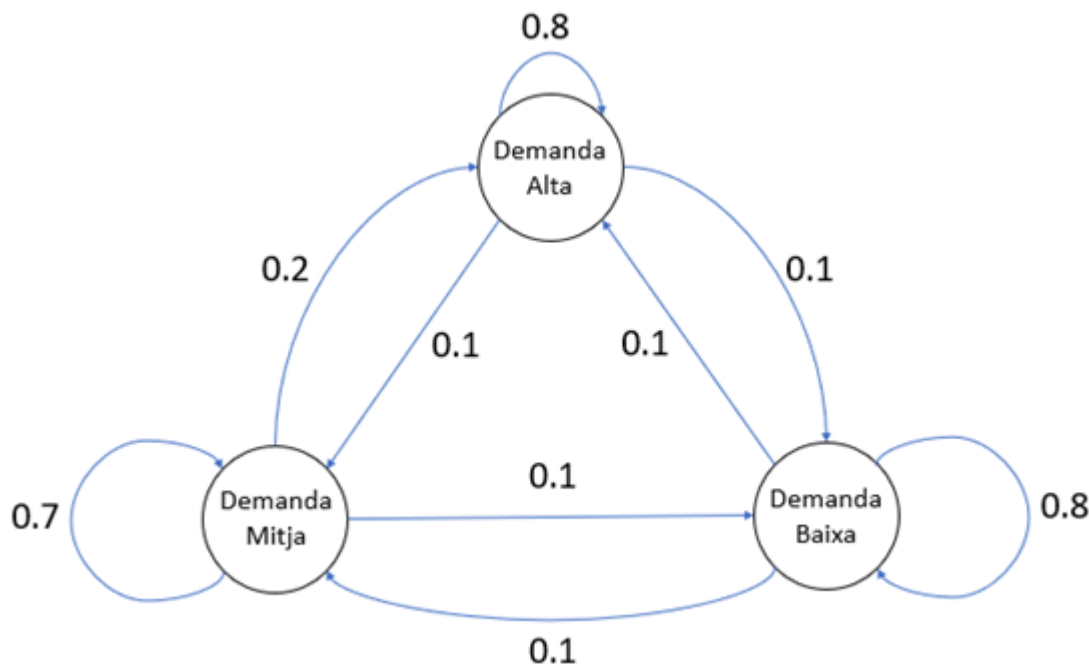


Figura 3.8: Representació del joc del productor.

L'estat estacionari d'aquesta cadena és π , tal que $\pi = \pi \cdot P$. El vector de probabilitats que satisfà aquesta igualtat és $\pi = (0.4167, 0.2500, 0.3333)$.

Una estratègia aparentment coherent seria aplicar al procés de producció la distribució de l'estat estacionari, on cadascun dels modes de producció té assignat una probabilitat de ser seleccionat.

3.2.4 Solució computacionalment per simulació

Atès que el productor està restringit a prendre decisions amb antelació, ha de triar una distribució de com produir segons les probabilitats que anticipi del mercat. Com ha de triar-ne una única, i sabent que la cadena de Markov que representa aquest problema és ergòdica, l'estratègia més raonable és atribuir les probabilitats de l'estat estacionari, a cada possible nivell de demanda que pot tenir l'economia.

De nou, mitjançant simulacions, s'analitzarà quin és el nombre de desajustos que es produeixen, entre la oferta planejada i la demanda efectiva.

Per comparar l'efectivitat de la tria de proporcions corresponents a l'estat estacionari, es consideraran les alternatives estratègiques que es defineixen a continuació.

Estratègia equiprobable: $A_E[t] = X[j]$ amb $p[j]$, $\forall t$, on $X[j] = Mode1, Mode2, Mode3$, i $p[j] = 1/3, \forall j$. Assigna la mateixa probabilitat a cada nivell de demanda, i produeix d'acord a aquest fet.

Estratègia ponderada: $A_P[t] = X[j]$ amb $p[j]$, $\forall t$, on $X[j] = Mode1, Mode2, Mode3$, i $p[j] = \sum_i (M_{ij})$, $\forall j$, on M_{ij} és la matriu de transicions de probabilitat. Assigna cada nivell de demanda la suma de probabilitats d'arribar a aquell estat, i produeix d'acord a aquest fet.

Estratègia d'estat estacionari: $A_{EE}[t] = X[j]$ amb $p[j]$, $\forall t$, on $X[j] = Mode1, Mode2, Mode3$, i $p[j] = (0.4167, 0.2500, 0.3333)$ és la matriu de transicions de probabilitat. Assigna cada nivell de demanda la suma de probabilitats d'arribar a aquell estat, i produeix d'acord a aquest fet.

Els resultats després de realitzar 10000 simulacions, i mirant el nombre de desajustos, es presenten a continuació.

Perfil Estratègic	Mitjana	Mediana	Mínim	Màxim	Desviació estàndard
Equiprobable	173.4	173	144	203	7.6039
Ponderat	171.9	172	143	201	7.6295
Estat Estacionari	169.8	170	139	198	7.8949

Taula 3.3: Comparativa dels resultats del Joc del productor.

Malgrat pugui semblar que els resultats són similars, tot i veure que l'estratègia de seguir l'estat estacionari és el millor (menor nombre de desajustos segons totes les mètriques presentades), s'ha de considerar la variabilitat. Atès el nombre de simulacions, les estimacions puntuals tenen associats intervals molt precisos, i no es solapen. Les diferències són significativament diferents estadísticament.

```

      Df  Sum Sq Mean Sq F value Pr(>F)
group    2   65046   32523     547 <2e-16 ***
Residuals 29997 1783408     59
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

```

Figura 3.9: Test Anova diferències entre grups.

Amb l'Anova s'evita augmentar la probabilitat de cometre un error de tipus 1 a l'hora de comparar múltiples mitjanes. El resultat global indica que hi ha diferències estadísticament significatives entre al menys dos dels tres grups. Per esbrinar però, en quins hi ha específicament diferències, es pot emprar el mètode de Tukey per comparacions múltiples, els resultats del qual es detallen a continuació.

```

Tukey multiple comparisons of means
95% family-wise confidence level

Fit: aov(formula = value ~ group, data = df)

$group
      diff      lwr      upr p adj
2-1  3.5828  3.327234  3.838366    0
3-1  2.1513  1.895734  2.406866    0
3-2 -1.4315 -1.687066 -1.175934    0

```

Figura 3.10: Diferències entre grups específics.

Tots els p-valors són molt significatius, i per tant les hipòtesis nul·les es rebutjen fortament.

L'estratègia d'Estat Estacionari domina a les altres dues, i l'estratègia de ponderar també domina l'estratègia equiprobable. Tot i no considerar que no és igual de probable partir de cadascun dels tres estats, té certa lògica el fet d'atribuir més possibilitats a arribar a l'estat amb la major suma de probabilitats d'arribada en la matriu de transicions de probabilitat. Les diferències estadísticament significatives es corroboren amb el test de diferència de mitjanes.

En el cas que ocupa, el productor coneix la matriu de probabilitats de transició. El que desconeix és la demanda en un moment determinat. Si suposem que la pot observar, i actua de manera que segueixi el mode de producció que sigui igual a la demanda que acaba de tenir (atès que la probabilitat de romandre al mateix estat de demanda és major que de canviar), es pot construir la mateixa taula que anteriorment. L'estratègia, que s'anomenarà com que s'adapta, formalment es defineix com:

Estratègia adapta: $A_A[t] = X[j] = Y[t-1]$, on $Y[t-1]$ és la demanda observada en el període previ. Decideix mode de produir imitant el que ha vist al període anterior el 100% de les vegades.

Perfil Estratègic	Mitjana	Mediana	Mínim	Màxim	Desviació estàndard
Adapta	58.95	59	35	84	6.9390

Taula 3.4: Comparativa dels resultats del Joc del productor.

Els estimadors puntuals dels resultats, mitjana i mediana, són substancialment millors que en qualssevol de les estratègies fixes que s'han definit anteriorment. Això es deu la gran superioritat de probabilitat de romandre en el mateix estat. La desviació estàndard també es millor, en ser la més petita de totes.

De les tres estratègies originals, la que té menor mitjana, i per tant millors resultats, és l'estratègia d'Estat Estacionari. Es pot fer una comparació directa amb el nou perfil estratègic plantejat, d'adaptar-se.

```
welch Two Sample t-test

data: desajustEE and desajustadapta
t = 1058.5, df = 19714, p-value < 2.2e-16
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 110.5248 110.9348
sample estimates:
mean of x mean of y
 169.6847   58.9549
```

Figura 3.11: Diferències entre l'estratègia d'Estat Estacionari, i l'estratègia d'Adaptar.

El p-valor és extremadament inferior al nivell de significació del 5%, i indica un rebuig de la hipòtesi nul·la. L'estratègia d'adaptar-se domina a l'estratègia d'Estat Estacionari, que decideix el nivell de producció en base a les probabilitats de l'estat invariant. I com ja s'ha comprovat que aquesta última és la millor d'entre les tres opcions estratègiques originals, l'estratègia nova d'adaptar-se al nivell de demanda observat en un període és globalment la millor. Cal recordar que no és una estratègia viable, ja que la seva aplicació requereix de poder adaptar la producció d'un període a la demanda del període previ, que viola un dels supòsits del model.

3.2.5 Conclusions del cas

Imposant la restricció de la falta de coneixement, o incapacitat d'obtenir la informació de manera prou ràpida entre períodes, fa que la predicció que porta a menys desajustos és aquella que assigna les probabilitats d'estat estacionari a cada possible escenari de demanda. És l'estratègia dominant, ja que obté els millors resultats, que alhora són estadísticament significativament diferents que els que aconseguiria un jugador que jugués segons les alternatives estratègiques.

De les estratègies plantejades, l'equiprobabilitat és la menys adequada, atès que considera que els tres possibles nivells de demanda es donen amb la mateixa freqüència. Sembla clar que com més s'apropi la freqüència amb la que duu a terme els modes de producció a les probabilitats de la distribució invariant de la demanda, menor serà el nombre de desajustos, i major serà la utilitat del productor.

3.2.6 Una variant de la situació: magnitud dels desajustos penalitzats

Fins ara s'ha suposat que la manca d'ajustos era la font de desutilitat del productor, indiferentment de la seva magnitud. És raonable pensar, però, que un major desajust causi una major desutilitat. És a dir, que el productor es vegi més perjudicat per produir per demanda baixa quan la real és alta o a l'inrevés, que no pas equivocar-se produint quantitats mitjanes.

Per il·lustrar aquest fet, es simularà de nou 10000 casos, i afegint tres estratègies: que produeixi sempre pel nivell alt, que produeixi sempre segons demanda baixa, i que produeixi

en quantitats mitjanes, de manera més conservadora. Aquestes s'inclouen addicionalment a les ja esmentades prèviament, que també s'incorporen a aquesta variant. Els resultats són visibles en la següent taula.

Perfil Estratègic	Mitjana	Mediana	Mínim	Màxim	Desviació estàndard
Equiprobable	231.01	231	180	278	13.05298
Ponderat	228.15	228	179	281	12.79525
Estat Estacionari	223.88	224	174	274	13.03975
Sempre Alt	238.68	238	124	376	32.69914
Sempre Baix	281.32	282	144	396	32.69914
Sempre Mitjà	195.01	196	135	239	13.84416
Adapta	83.10	83	46	128	11.03384

Taula 3.5: Comparativa extensió del Joc del productor.

Si es considera únicament les tres estratègies inicials, s'obtenen els mateixos resultats que prèviament en quant a ordenació. Respecte la que considera l'estat estacionari com la distribució de probabilitats que seguirà la variable aleatòria de la demanda, ambdues mètriques de localització (mitjana i mediana) prenen els valors més petits. Per tant, no només s'equivoca en mitjana menys vegades, sinó si es pren atenció a la magnitud de les diferències, també ho fa en menor mesura.

Si es mira considerar únicament les estratègies que segueixen una producció determinista (sempre produir esperant demanda alta, sempre produir esperant demanda baixa, i sempre produir esperant demanda mitjana), es veu que en termes de valor mitjà, de la mediana, de valor mínim, i de valor màxim, el més eficient és sempre triar l'estratègia mitja. La pitjor estratègia seria la de sempre assumir que en el futur hi haurà un nivell baix de demanda. El motiu pel qual triar sempre baixa dona pitjor que sempre produir esperant demanda alta és intuïtiu si es considera la matriu de transicions de probabilitat i l'estat invariant. És més probable estar a l'estat de demanda alta que el de demanda baixa.

És interessant considerar, però, que malgrat l'estat de demanda mitjana és en mitjana el menys visitat quan el nombre d'etapes augmenta (tendint tan sols a un quart de les vegades, en comparació a la probabilitat d'estar en l'estat alt d'un 41.67% i d'estar en l'estat baix d'un terç de les vegades en un moment donat), el fet que sigui més conservador implica que la diferència entre l'estat triat (el mitjà), i l'estat que realment succeeix serà com a màxim 1. Malgrat que produir sempre alt o sempre baix encerta més vegades, quan la producció no es correspon a la demanda, la diferència pot arribar a ser el doble. És per aquest motiu també que la variabilitat mesurada amb la desviació estàndard resultant de seguir l'estratègia mitjana és menor que la meitat que el de les seves contrapartides (13 en comptes de 32). De fet, té una desviació estàndard similar a les tres estratègies inicials (l'equiprobable, la que pondera, i la de l'estat estacionari).

Es pot observar quantes vegades s'equivoca cadascuna de les tres estratègies deterministes, a partir del resum de la proporció d'etapes on hi ha cada nivell de demanda:

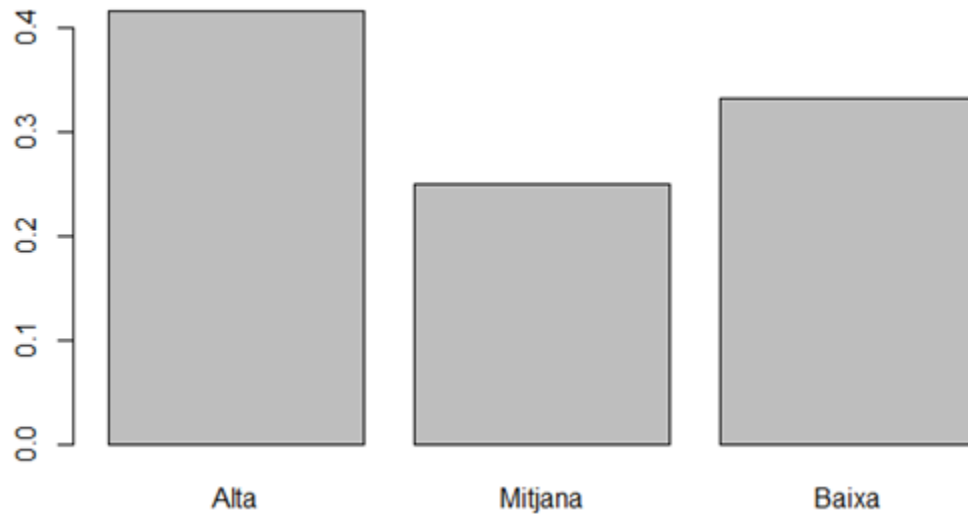


Figura 3.12: Proporció d'etapes en cada estat de demanda en l'extensió del joc del productor.

Com els estats observats són iguals (en termes mitjans) per tots, es pot usar l'anterior figura per avaluar les estratègies deterministes. Es pot observar que com es prediu en l'estat estacionari, l'estratègia mitjana encertarà un quart de les vegades (a la figura queda il·lustrada la proporció d'estats que efectivament van ser de demanda mitjana com d'un 25% aproximadament). De la mateixa manera, es pot veure el terç de l'estratègia baixa, i que l'estratègia alta es produeix més d'un 40% de les vegades, corresponent al 41,67% de l'estat estacionari). Així que malgrat equivocar-se més vegades, l'estratègia mitjana, més conservadora que les altres dues, produeix millors resultats si el que es desitja és minimitzar la magnitud de les equivocacions.

Però si el problema fos en la versió original, on el que es desitja és minimitzar el nombre de vegades que la predicció feta pel productor no es correspon a la realitat, l'estratègia mitjana seria la pitjor, i l'òptima seria esperar sempre demanda alta (sempre considerant que s'està restringint al grup d'estratègies deterministes).

És interessant notar que el més petit (millor resultat, i encara estudiant les estratègies deterministes) dels mínims dels desajustos va associat a l'estratègia de demanda alta, i el major (pitjor resultat) dels màxims va associat a l'estratègia de demanda baixa. El més segur és que aquest fet es degui a que són estratègies oposades dins el rang de les deterministes, corresponent les decisions als dos extrems possibles. Això no succeeix en l'estadístic del valor màxim.

Per últim, analitzant l'estratègia que s'adapta, és a dir la que donat el que ha observat a un període, planifica el mateix pel següent (que viola el supòsit de que això no és possible per al productor), s'arriba a la conclusió que és millor que les estratègies deterministes, i

també és superior a les estratègies originals. És sense cap dubte la que a millors resultats condueix. En aquest sentit tenir més informació comporta gran utilitat, i de fet en cas de creure que copiar allò observat prèviament és el més encertat (suposició raonable degut a que les probabilitats de transició més grans des de cada estat són les de tornar al mateix estat en el proper període), la informació podria suposar una avantatge molt notòria.

Considerant però les estratègies disponibles i possibles d'executar, la d'estat estacionari mitjana i la de predir sempre demanda mitjana són les dues millors, essent l'última la que domina a tota la resta. La millor estratègia de totes globalment és centrar-se en la producció mitjana. Malgrat equivocar-se moltes més vegades que en la resta, la desutilitat fruit d'aquestes equivocacions com a molt seria la meitat que a on pot arribar la desutilitat d'equivocar-se si es segueix la resta d'estratègies (però en el cas original del productor, l'estratègia mitjana seria dominada per les altres dues deterministes, com s'ha vist en la figura 3.12 de la proporció dels estats observats en les simulacions).

4 Jocs estocàstics amb més d'un agent

4.1 Joc del comerç

4.1.1 Descripció de la situació i problema a resoldre

La globalització és possiblement el fenomen econòmic més rellevant en el creixement de la riquesa del món en tota la història, i en especial en els últims 50 anys. Si es mesura el grau d'obertura comercial (això és, la participació del comerç internacional, la suma d'exportacions i importacions) sobre el Producte Interior Brut, a partir dels anys 70 és quan hi ha hagut una major evolució de la interconnexió de les diferents economies del món, passant l'indicador d'un 30% a més del doble a principis del segle XXI [5].

Un dels factors més rellevants és la confiança que tenen els països, que mitjançant la formació d'organitzacions econòmiques internacionals com la Organització Mundial del Comerç, el Fons Monetari Internacional o el Banc Mundial busquen millorar la seva posició econòmica en un context on l'especialització i l'intercanvi són elements essencials pel progrés.

En aquest cas, es modelitzarà com es desenvolupen els països en funció de quines decisions prenen envers la formació de relacions de comerç. S'estudiarà diferents perfils, veient les seves interaccions, per veure quin comportament és el que maximitza el creixement econòmic del país.

Es suposarà l'existència de dos països, que tenen la possibilitat de decidir la relació econòmica que tenen. Cadascuna de les nacions és capaç de produir tots els productes que necessita, però amb costos relatius diferents. És a dir, hi ha avantatge comparativa: cada país pot produir un determinat bé de manera més barata en relació a la resta de productes que l'altre país, fins al punt que és més rentable importar el producte produït per l'altre, que no pas fer-lo en el propi país. Així, com cada país està especialitzat, al principi del joc estan en una situació on ambdues tenen intenció de comerciar.

Malgrat això, els països poden voler aprendre a crear el producte que inicialment importen, potser per no dependre de l'altre o estimular l'economia domèstica. Per tal de fer això, podrien posar aranzels o restriccions quantitatives, afectant a una part de la importació. Amb l'objectiu d'uniformitzar l'anàlisi es suposarà però, que abandonar la relació comercial actual implica la prohibició d'importar el bé de l'altre país durant tota l'etapa.

Un cop es decideix trair a l'altre país en aquell període, el temps que es té per posar en marxa la indústria nacional nova és aquell any. Hi haurà una probabilitat no nul·la per dos possibles resultats: un èxitós, representa que aquell any han aconseguit construir la indústria prou capaç d'abastir les necessitats de demanda d'aquell any, i d'altra banda un fracàs, perden la inversió realitzada i a més no tenint el producte que han decidit deixar d'importar de l'altre país.

4.1.2 Suposicions i elements en Teoria de Jocs

El joc és no cooperatiu, i tampoc és de suma zero. El pagament és simètric, ja que si els jugadors trien la mateixa acció, tenen la mateixa recompensa (malgrat que la recompensa depengui, com es detalla a continuació, del conjunt d'accions), i les decisions simultànies, no pas seqüencials.

Els primer supòsit del model és la situació inicial, on ambdós països, tenint la creença que seguiran cooperant, poden decidir ja en el primer període si volen col·laborar, i per tant no fer res, o deixar de comerciar, optant per una política proteccionista. Un cop han decidit, de manera simultània i sense saber de l'elecció de l'altre, passa un any fins que poden canviar la decisió presa (degut, per exemple, a la necessitat de fer canvis a l'estructura productiva, que comporta un temps considerable). Un cop ha passat l'any, ambdós països decideixen de nou per a l'any que inicia, quina és la relació comercial que volen tenir.

Els elements de l'escenari, en teoria de jocs es defineixen a continuació.

Els jugadors, dos països que han de decidir sobre la relació econòmica entre ells.

Els estats són les possibles situacions en les que està jugant al joc. Es suposarà que inicialment s'enfronten a una situació amb possibles recompenses, segons l'estructura inicial de cada país. Al final de cada període, segons l'acció que hagin pres, poden empitjorar la seva situació (al joc es modelitzarà com que les recompenses associades a cada acció disminuiran fins la meitat), o millorar-la (es modelitzarà com que les recompenses associades a cada acció augmentaran un terç). Mai però, per incorporar un element de realisme en quant a l'escalabilitat de la producció, podran les recompenses superar el doble de la quantitat inicial, ni ser inferiors a una quarta part. Per tant hi ha infinits possibles estats, tots definits per les recompenses de cada acció, delimitades inferiorment per un quart de les inicials, i superiorment pel doble.

Les accions que pot realitzar cada país són les mateixes en cada situació. Poden o bé col·laborar o bé traïr l'altre país. De la combinació d'accions dependran les probabilitats de transició.

Les recompenses són els ingressos anuals per l'activitat econòmica, podent canviar cada any (empitjorant, quedant-se igual, o millorant). Inicialment, si ambdós cooperen, obtenen 100 d'ingressos, i si ambdós traeixen l'altre, obtenen 80. En cas que realitzin accions diferents, qui hagi trait ingressarà 120 aquell any, mentre que qui hagi col·laborat només rebrà 80.

En quant al nombre d'etapes del joc, es considerarà un horitzó temporal de 20 anys, corresponent al nombre d'etapes.

Els països volen obtenir la major quantitat d'ingressos al cap dels 20 anys. Per fer-ho, disposaran de diferents perfils estratègics. S'analitzarà per tant no només quin és el millor perfil dels presentats, sinó si el millor depèn del perfil que segueix l'altre país. Es consideren 4 perfils estratègics:

- Sempre col·laborar: aquest perfil sempre, independentment de la situació en que estigui, decidirà seguir comerciant, i per tant fent importació de productes estrangers.

- Pessimista: quan les recompenses d'un període siguin inferiors a les inicials (per tant en mitjana l'economia haurà caigut respecte a l'inici) trairà. Quan les recompenses siguin superiors a les inicials (per tant en terme mig l'economia haurà crescut) col·laborarà. Creu que centrar-se en la pròpia economia és la millor estratègia per sortir de les recessions, veient el multilateralisme com una eina a usar només en casos de bonança econòmica. En cas d'estar igual que inicialment, tria una acció equiprobablement.
- Optimista: quan les recompenses d'un període siguin inferiors a les inicials col·laborarà. Quan les recompenses siguin superiors a les inicials trairà. Creu que la col·laboració és la millor estratègia per sortir de les recessions, i en períodes de creixement econòmic prefereix concentrar-se en la indústria nacional. En cas d'estar en la mateixa situació que a l'inici, tria aleatòriament quina acció prendre.
- Copiador: excepte en l'inici, quan tria aleatòriament, imita sempre la última decisió presa per l'altre.

4.1.3 Representació i plantejament analític

Atès el nombre infinit d'estats, la representació gràfica no és possible. La il·lustració de les probabilitats de transició a continuació:

	MM	MI	MP	IM	II	IP	PM	PI	PP
CC	0,14	0,16	0,08	0,16	0,22	0,04	0,08	0,04	0,08
CT				0,67		0,33			
TC		0,67						0,33	
TT	0,11		0,22				0,22		0,44

Figura 4.1: Representació del joc del comerç.

Les files de la figura representen l'estratègia conjunta (ambdues individuals, no pas una decisió presa de manera conjunta), essent la primera lletra l'acció d'un país i la segona l'acció de l'altre ("C" representa col·laboració, "T" una traïció). Les columnes representen el resultat de l'etapa, ordenades de manera que corresponen a les accions individuals de cada país ("M" vol dir millora, "I" fa referència a quedar-se igual, "P" a acabar pitjor que en l'inici de l'etapa).

Si els dos col·laboren (primera fila) és més probable millorar la situació que no pas empitjorar-la, però de manera individual el més possible és que es quedi igual. Si un millora, és més improbable que l'altre empitjori que no pas es quedi igual (degut a la mútua col·laboració).

Si un col·labora i l'altre el traeix (segona i tercera files), el país que ha col·laborat es quedarà igual. El que ha decidit no comerciar millorarà la seva situació en un 66.67% dels casos, i l'empitjorarà en l'altre 33.33% (és més probable que millori atès que l'altre país ha col·laborat, i el que traeix ha rebut uns ingressos de les exportacions que podrà emprar en el projecte nacional).

Si els dos decideixen traïr (la última fila), cadascun té una situació similar que si haguessin traït l'altre país que ha decidit cooperar. Individualment les probabilitats d'empitjorar i de millorar són del 33.33% i del 66.67%. Ara empitjorar té més probabilitats que millorar, atès que no disposen dels ingressos derivats de l'exportació a l'altre país, que també ha decidit traïr (en cas de que l'altre col·labori, les probabilitats són l'inrevés). De manera conjunta, hi ha un 11.11% de probabilitats de millorar els dos. Hi ha el doble, un 22.22% de que millori un i empitjori l'altre. Hi ha un doble d'aquesta probabilitat, és a dir un 44.44% de probabilitats que ambdós empitjorin (en aquest cas no és possible quedar-se igual. Han decidit invertir en un projecte nacional, i no han rebut un ingrés de l'altre país, que també ha traït, i per tant depenen de l'èxit o fracàs del nou pla d'indústria nacional).

Les estratègies es defineixen formalment com ($R[i]$ representa les recompenses disponibles en un període de joc):

Estratègia Col·laborar: $A[i] = C, \forall i$

Estratègia Pessimista:

$$A[i] = \begin{cases} C \iff R[i] > R[1] \\ T \iff R[i] < R[1] \\ C \text{ amb } p = 0.5, \text{ i } T \text{ amb } p = 0.5 \text{ altrament} \end{cases} \quad (22)$$

Estratègia Optimista:

$$A[i] = \begin{cases} C \iff R[i] < R[1] \\ T \iff R[i] > R[1] \\ C \text{ amb } p = 0.5, \text{ i } T \text{ amb } p = 0.5 \text{ altrament} \end{cases} \quad (23)$$

Estratègia Copiadora (A' representa l'estratègia de l'altre país):

$$A[i] = \begin{cases} C \text{ amb } p = 0.5, \text{ i } T \text{ amb } p = 0.5 \iff i = 1 \\ A'[i-1], \text{ i } i = 2, \dots, 20 \end{cases} \quad (24)$$

4.1.4 Solució computacionalment per simulació

Es programa per cada combinació d'estratègies, 10.000 simulacions d'un joc de 20 períodes. Al final de cadascuna de les simulacions de les interaccions, es calcula el guany mitjà de cada estratègia, així com la proporció de períodes en que han jugat cada acció. És important notar que el producte màxim que pot obtenir un país en els 20 anys que dura el joc és de 3.809,89 (millorar la situació en els tres primers períodes i arribar al topall màxim del doble de la inicial, i obtenir aquesta recompensa màxima els disset següents), i el mínim és de 600 (empitjorar la situació en els dos primers períodes, i obtenir la recompensa mínima que s'ha assolit els divuit següents). No canviar de situació en cap etapa comportaria un guany de 2.000.

Els resultats es mostren en la figura 4.2:

	COL-LABORA		PESSIMISTA		OPTIMISTA		COPIADOR	
COL-LABORA	2047,05	2048,84	1870,54	2175,73	1764,07	2407,49	1944,44	1945,16
	C: 100% T: 0% C: 100% T: 0%		C: 100% T: 0% C: 61% T: 39%		C: 100% T: 0% C: 37% T: 63%		C: 100% T: 0% C: 98% T: 2%	
PESSIMISTA			1835,21	1833,01	1787,62	1884,42	1840,75	1844,2
			C: 53% T: 47% C: 52% T: 48%		C: 52% T: 48% C: 47% T: 53%		C: 52% T: 48% C: 52% T: 48%	
OPTIMISTA					1837,59	1833,89	1852,16	1809,47
					C: 48% T: 52% C: 49% T: 51%		C: 48% T: 52% C: 48% T: 52%	
COPIADOR							1846,91	1844,86
							C: 50% T: 50% C: 50% T: 50%	

Figura 4.2: Resum de les interaccions entre estratègies en el joc del comerç.

Respecte a les accions. Col·laborar sempre col·labora, i per tant traeix un 0% de les vegades. Els perfils pessimista i optimista tenen patrons gairebé oposats quan interactuen amb qual·sevol dels altres (és d'esperar, atès que les seves estratègies són oposades). El perfil copiador segueix el mateix patró que amb qui interactua, podent-se explicar les mínimes diferències amb la decisió que pren a la primera jugada, que és aleatòria per aquest comportament.

En quant a com interactuen valorant si obtenen majors rendiments que amb qui juguen, es veu que totes les estratègies empaten quan juguen contra sí mateixes (les lleugeres diferències venen explicades pel component aleatori que suposa la matriu de probabilitats de transició).

Però quan són l'única estratègia del seu tipus, hi ha diferents resultats.

Col·laborar mai guanya, essent el resultat més favorable l'empat contra copiador.

Pessimista només guanya contra l'estratègia de sempre col·laborar, i empatant amb copiador.

Optimista és la millor estratègia en quant a guanyar més recompensa que l'oponent, guanyant a tots.

Copiador és una estratègia conservadora, que perd únicament contra optimista, i empata en altres casos.

Adicionalment es pot estudiar les quantitats globals guanyades, atès que és més important tenir una millor bonança econòmica que no pas ser més avantatjós que una estratègia en particular. L'última columna representa el guany mig quan l'estratègia s'enfronta a sí mateixa, és a dir si el cas estudiat i l'oponent es comporten igual:

Perfil Estratègic	Mitjana	Mínim	Màxim	Desviació estàndard	Mitjana si igual
Col·laborar	1906,53	1764,07	2048,84	119,41	2047,95
Pessimista	1909,28	1787,62	2175,73	179,28	1834,11
Optimista	1995,42	1837,59	2407,49	275,41	1835,74
Copiador	1860,92	1809,47	1945,16	58,54	1845,89

Taula 4.1: Comparativa dels resultats del joc del comerç.

L'estratègia optimista és la que té un millor guany mig, seguit per la pessimista, i la de

col·laborar (malgrat que col·laborar no domina a cap altre estratègia, i de fet és dominat per pessimista, la diferència en guanys mitjos és petita). Per últim, malgrat no ser l'estratègia que més vegades perd contra la resta, es troba seguir un comportament copiador.

Coincidint amb qui més sovint perd i qui més sovint guanya respectivament, el més petit dels mínims guanys en mitjana va associat al perfil de col·laborar sempre (1764,07 unitats), i el major valor el té el perfil optimista (1837,59 unitats). D'entre totes les simulacions, els guanys més grans per cada perfil, el major valor és per optimista (2407,49 unitats), i qui menor valor en té dels màxims és copiador (1945,16 unitats).

En termes de desviació estàndard, una mesura de variabilitat, l'estratègia optimista és la que major en té. Malgrat això no seria una estratègia arriscada, ja que la variància prové de tenir un valor màxim molt més elevat que el de la resta de perfils estratègics, i un valor mínim superior a tots (per tant, la variabilitat no comporta un risc de guanyar poc, sinó més aviat de guanyar molt menys que el màxim, que és un nombre elevat comparat amb la resta). De manera anàloga l'estratègia amb menor variabilitat mesurada segons la desviació estàndard, el perfil que copia, té una variabilitat petita i al voltant dels valors baixos que obté jugant al joc.

És interessant observar que si cada perfil juga contra sí mateix, aquell que acaba amb una major quantitat és el perfil col·laborador, un dels menys desitjables segons les mesures prèviament descrites. Pessimista i optimista tenen la pitjor recompensa total en aquesta situació, gairebé un 10% menys que el col·laborador aproximadament, tot i dominar a aquesta estratègia.

4.1.5 Conclusions del cas

Sota els supòsits del model, tant de recompenses com de probabilitats de transició, sembla ser que de les estratègies esmentades, la optimista és la millor. És un perfil associat a voler cooperar quan es troba en dificultats, i concentrar-se en la producció pròpia quan està en períodes d'expansió econòmica.

Copiar l'última estratègia de l'altre és l'estratègia amb pitjors resultats, tant en mitjana com en el valor màxim que pot aspirar.

En cas que ambdós països tinguin perfils similars, col·laborar és la millor estratègia (i la única que supera el llindar de recompensa de 2.000, associat a quedar-se en la mateixa situació durant tot el joc). Per tant, en totes les altres situacions, quan l'altre país es comporta de igual manera, la situació final és pitjor que neutre, excepte quan es col·labora incondicionalment.

Per analitzar l'equilibri de Nash, es considera les diferents combinacions de seleccions d'estratègies, i s'estudia com afecta al resultat propi canviar. Observant la figura 4.2, si l'altre país col·labora, la millor resposta és la optimista. Per tant, cap combinació amb col·labora que no impliqui la optimista, no és equilibri de Nash, atès que hi ha incentiu de desviar-se de l'estratègia. El mateix passa quan l'oponent opta per ser pessimista o per ser optimista, però

no és així pel perfil copiador. Per identificar l'equilibri de Nash, s'ha de trobar la combinació de jugades on cap dels agents pugui tenir una millora en cas de canviar unilateralment de perfil estratègic.

Com si el jugador 1 decideix col·laborar, pessimista, o optimista, la millor resposta per part del jugador 2 és optimista, es pot mirar quina de les 3 opcions del jugador 1 és millor, i resulta ser optimista. Si el jugador 1 copia, malgrat la millor resposta del jugador 2 és col·laborar, el jugador 1 pot millorar la seva situació canviant a optimista. Això no succeeix per cap dels dos jugadors si trien ambdós optimista, i aquesta combinació és per tant l'equilibri de Nash.

Cal esmentar que l'anàlisi depèn fortament no només de les recompenses i probabilitats, sinó sobretot dels perfils plantejats. Les interaccions són un element clau, i l'estratègia del país amb que es manté relacions és tant important com les decisions pròpies que ha de considerar un país. Per obtenir resultats desitjables, poder incorporar informació sobre el comportament general de l'oponent és absolutament avantatjós.

4.2 Joc de l'explotació del recurs comú

4.2.1 Descripció de la situació i problema a resoldre

En l'economia hi ha un conjunt de recursos que donen utilitat als agents, i pot succeir que més d'un agent cerqui apropiar-se d'un mateix recurs (per exemple, clients en un mercat, o diferents empreses).

En aquest cas es pretén il·lustrar com dos entitats (poden representar o bé nacions, o bé corporacions) poden triar com s'aprofiten d'un recurs, al qual hi poden accedir de manera simultània.

Es suposarà l'existència de dos agents, que volen explotar els recursos d'una mateixa font, que és limitada. A mesura que passa el temps, el recurs va creixent, i els agents volen rebre'n els beneficis el més aviat possible. Són conscients de l'existència de l'altre, i que no únicament han de considerar que és el que més els hi convé, sinó que han de tenir present que la contrapart té el mateix objectiu de maximitzar la seva utilitat.

La font de recursos té la peculiaritat que pot créixer en quantitat a diferents ritmes, i que depèn fonamentalment de la quantitat present en un moment determinat. Addicionalment, si el recurs es consumeix completament, hi ha la possibilitat que no segueixi creixent, i per tant que els agents no puguin accedir al seu contingut. En aquest joc, per tant, els jugadors volen consumir la major quantitat possible del recurs (sabent de la possibilitat que si en consumeixen massa en un període, hi ha la possibilitat de no poder tornar a explotar el recurs, i per tant tenir un menor guany a llarg termini).

4.2.2 Suposicions i elements en teoria de jocs

El joc és no cooperatiu, i no és de suma zero. La naturalesa de les recompenses i la tria d'accions fa que sigui simètric i simultani.

Els primer supòsit del model és la simetria d'informació, i que aquesta és completa. Ambdues parts són conscients del rati al qual pot créixer el recurs, i que en cas d'explotar massa, poden deixar de tenir accés a ell de manera permanent. També coneixen en cada moment del temps quanta quantitat de recurs hi ha (el model no podria per tant, explicar una situació on les empreses no sapiguessin si queda molt recurs sense explotar o no).

Els elements de l'escenari, en teoria de jocs es defineixen a continuació.

Els jugadors, dos empreses que han de decidir amb quina intensitat extreure el recurs en cada període.

Els estats són les possibles situacions en les que està jugant al joc. Inicialment hi ha una quantitat de recurs, i al final de cada període, després del seu consum per part dels dos, aquest recurs pot créixer. En aquest sentit, cada quantitat possible de recurs és un estat diferent del joc. Al final de cada període, segons la quantitat que roman del recurs, aquest creixerà. En cas que no quedi recurs, se suposarà que no pot tornar a créixer més (representant que si la font està buida durant un període sencer, no té la capacitat de generar el recurs mai més).

Les accions que tenen disponibles les empreses són independents de la quantitat de recurs que hi hagi, sempre tenen les mateixes. Poden decidir quina proporció del recurs consumir.

Atès que hi ha el risc que no creixi la quantitat de recurs, si aquesta arriba a 0, és raonable pensar que les empreses tinguin la restricció de no consumir mai més de la meitat, que representaria la proporció que els hi pertoca. Si ambdós agents pensen d'aquesta manera, mai arribarà a 0 el recurs, atès que els dos consumiran menys de la meitat. Si els agents són conscients d'això, però, poden decidir consumir més de la meitat, sabent que l'altre no ho farà, garantint per tant que no s'esgota el recurs (sempre i quan la quantitat addicional respecte de la pròpia meitat sigui inferior al marge que deixi l'altre que s'adhereix a consumir una proporció de la seva meitat).

Les recompenses són les quantitats extretes en cada període (sense seguir cap funció d'utilitat en particular. D'aquesta manera es pot generalitzar per a qualsevol cas on la funció d'utilitat sigui creixent en el recurs.).

L'horitzó temporal al qual estan subjectes els agents és de 10 anys, sota el desig d'operar a llarg termini. Cada etapa correspondrà a un any. És important notar que això no vol dir que extreguin recursos durant un any, i en un instant es recuperin. L'etapa comporta la totalitat del procés d'extracció i de generació del recurs per part de la font.

Es consideren 4 perfils estratègics:

- Estratègia agressiva: sempre consumeix la meitat, la totalitat de la part que li correspondria si es dividís el recurs entre les dues empreses. El raonament que segueix

és que l'oponent no vol arriscar-se a deixar que el recurs arribi a 0 i s'esgoti. Aquest perfil està enfocat en els beneficis a curt termini, i pren decisions arriscades donada la probabilitat de no poder seguir explotant en períodes posteriors.

- Estratègia conservadora: tria sempre una proporció que va de 0 a 1, de la meitat del recurs, per garantir que, si l'altre empresa aplica la mateixa estratègia, que no s'esgoti mai el recurs.
- Estratègia de mínim: aquest perfil sempre explota el recurs mínimament. La lògica darrere aquesta decisió és de deixar, que el recurs creixi al màxim, per poder arribar a ser la major quantitat en l'últim període, i consumir-ne una gran quantitat.

Aquests tres perfils, malgrat tenir en la definició “sempre”, en l'últim període explotaran molt, ja que no hi ha cap risc associat sobre la quantitat disponible en futures etapes. Per tant, en la última etapa, el recurs s'esgotarà, cada empresa consumirà la meitat.

- Estratègia d'adaptar: aquest perfil té una estratègia variable, en la qual explotarà molt, gairebé la meitat del recurs a l'inici. Després, assumeix que l'altre no varia el seu patró d'explotació, i consumeix el complementari del patró de l'altre empresa, deixant un petit marge per tal que la quantitat de recurs no arribi a ser nul·la.

4.2.3 Representació i plantejament analític

Les equacions que descriuen l'evolució de la quantitat de recurs, que es produeix entre períodes, són les següents:

$$S_{i-} = S_{i-1} + \mu \cdot S_{i-1} \cdot \delta + \sigma \cdot \sqrt{\delta} \cdot S_{i-1} \cdot Z_i \quad (25)$$

$$S_i = S_{i-} - \lambda_1 \cdot S_{i-} - \lambda_2 \cdot S_{i-} = S_{i-} \cdot [1 - (\lambda_1 + \lambda_2)] \quad (26)$$

La primera expressió, mostra la quantitat que creix el recurs, on S_{i-} és la nova quantitat, que depèn de l'antiga S_{i-1} , de manera que es suma una constant μ sempre positiva ja que hi ha inèrcia en el creixement, i addicionalment l'expressió que depèn de σ , una variabilitat en el creixement, que pot indicar un biaix a l'alça o cap a baix, segons el signe de la variable aleatòria Z_i , una $\mathcal{N}(0,1)$, diferent a cada període. Ambdós termes estan multiplicats per una expressió representant la diferència de temps entre períodes, δ . La segona expressió indica la quantitat que roman després de que ambdues empreses hagin explotat la quantitat que hagin triat consumir en aquell període, on cadascuna de les λ indica la proporció.

Combinant les dues equacions, i desenvolupant:

$$\begin{aligned} S_i &= S_{i-1} + \mu \cdot S_{i-1} \cdot \delta + \sigma \cdot \sqrt{\delta} \cdot S_{i-1} \cdot Z_i \cdot [1 - (\lambda_1 + \lambda_2)] \\ &= S_{i-1} \cdot (1 + \mu \cdot \delta + \sigma \cdot \sqrt{\delta} \cdot Z_i) \cdot [1 - (\lambda_1 + \lambda_2)] \end{aligned} \quad (27)$$

Es pot expressar la proporció de recurs que roman respecte de la quantitat de l'etapa immediatament prèvia:

$$\frac{S_i}{S_{i-1}} = 1 + \mu \cdot \delta + \sigma \cdot \sqrt{\delta} \cdot Z_i - (1 + \mu \cdot \delta + \sigma \cdot \sqrt{\delta} \cdot Z_i) \cdot (\lambda_1 + \lambda_2) \quad (28)$$

Per últim, es mostra l'increment relatiu en la quantitat:

$$\frac{S_i - S_{i-1}}{S_{i-1}} = \mu \cdot \delta + \sigma \cdot \sqrt{\delta} \cdot Z_i - (1 + \mu \cdot \delta + \sigma \cdot \sqrt{\delta} \cdot Z_i) \cdot (\lambda_1 + \lambda_2) \quad (29)$$

Per tant, l'increment respecte de la quantitat prèvia té com a primer sumand una expressió que descriu un moviment Brownià discretitzat, atès que l'expressió per increments de temps qualssevol, ara està definida per uns δ determinats. De l'expressió $\mu + \sigma \cdot W_t$, on el procés de Wiener té la característica $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$, el cas que s'estudia correspon a la diferència de termes $\sqrt{\delta} \cdot Z_i$ en dos períodes consecutius. En ser Z_i una Normal estàndard, la constant $\sqrt{\delta}$ no varia l'esperança, i fa que la desviació estàndard quedi multiplicada precisament per $\sqrt{\delta} = \sqrt{t - s}$.

El segon terme indica que la quantitat resultant d'aplicar la variació descrita pel moviment Brownià (el creixement si no hi hagués cap intervenció, un creixement natural) es veu reduïda pel consum conjunt $(\lambda_1 + \lambda_2)$ que és una fracció de la quantitat posterior a aquest creixement natural.

L'objectiu de cada empresa és trobar quina és la pròpia λ que maximitza el benefici propi, durant el transcurs del joc.

Les estratègies es defineixen formalment com (λ representa la quantitat que exploten, i d el marge que deixen, corresponent a un 1%. L'últim període és el n -èssim.).

Estratègia agressiva: $A[i] = \lambda = 0.5 \ \forall i$

Estratègia conservadora:

$$A[i] = \begin{cases} \lambda \iff i = 1, \dots, n-1, \ \lambda \in (0, 0.5] \\ \lambda = 0.5 \iff i = n \end{cases} \quad (30)$$

Estratègia de mínim:

$$A[i] = \begin{cases} \lambda = 0 \iff i = 1, \dots, n-1 \\ \lambda = 0.5 \iff i = n \end{cases} \quad (31)$$

Estratègia d'adaptar (λ' representa el consum de l'altre empresa, i $A'[i]$ la seva acció):

$$A[i] = \begin{cases} \lambda - d = 0.5 - d \iff i = 1 \\ 1 - \lambda' - d, \ \lambda' = A'[i-1] \iff i = 2, \dots, n-1 \\ \lambda = 0.5 \iff i = n \end{cases} \quad (32)$$

4.2.4 Solució computacionalment per simulació

La taxa de creixement serà de $\mu=2$, i els períodes de temps seràn tals que els increments són de 0.02, dues centèsimes d'unitat. La variació de $\sigma=0.2$. S'analitzarà com exerceix cada estratègia, veient com interactuen, per poder trobar si hi ha una òptima independentment de l'estratègia que segueixi l'altre, i en cas d'haver, quina és. Per l'estratègia conservadora, es defineixen 3 valors d'intensitat d'explotació: $\lambda=0.1$, $\lambda=0.25$, i $\lambda=0.4$, corresponents a una quantitat baixa de la meitat, una quantitat mitjana (just la meitat de la pròpia meitat), i una quantitat alta (un 80% de la pròpia meitat). Per tant, es creuaran les 6 estratègies possibles.

A continuació es presenten els resultats. La tercera columna de cada taula indica la suma de les dues primeres, el guany agregat dels dos jugadors.

Perfil Estudiad	Oponent	Guany estudiat	Guany oponent	Guany conjunt
Agressiu	Agressiu	5	5	10
Agressiu	Conservador 0.1	8,477379	1,695476	10,172855
Agressiu	Conservador 0.25	6,698571	3,349285	10,047856
Agressiu	Conservador 0.4	5,560379	4,448303	10,008682
Agressiu	Mínim	10,10888	0,0117951	10,1206751
Agressiu	Adapta	5,050939	4,949921	10,00086

Taula 4.2: Resultats del perfil Agressiu en el joc de l'explotació del recurs comú.

L'estratègia agressiva és més adequada quan l'oponent segueix l'estratègia de mínim, i el perfil agressiu consumeix en agregat, més que la quantitat inicial de recurs. I el pitjor oponent és el que segueix també l'estratègia agressiva. En aquest últim cas, els dos consumeixen la meitat de la quantitat inicial, que en tornar-se 0, ja no creix. Per tant, després del primer període, ja no hi ha recurs a consumir. En aquest cas, un patró de consum agressiu és millor quan l'oponent o bé no és capaç, o bé no està disposat a consumir molt. En cas de sí fer-ho o estar-ho, la intensitat de la competició és perjudicial pels dos jugadors, fins al punt on només en el primer període poden rebre algun benefici.

Perfil Estudiad	Oponent	Guany estudiat	Guany oponent	Guany conjunt
Conservador 0.1	Agressiu	1,695476	8,477379	10,172855
Conservador 0.1	Conservador 0.1	5,418218	5,418218	10,836436
Conservador 0.1	Conservador 0.25	3,009381	7,344227	10,353608
Conservador 0.1	Conservador 0.4	2,037199	8,115408	10,152607
Conservador 0.1	Mínim	8,755351	2,28182	11,037171
Conservador 0.1	Adapta	1,419759	8,635854	10,055613

Taula 4.3: Resultats del perfil Conservador (10%) en el joc de l'explotació del recurs comú.

Si es segueix l'estratègia conservadora del 10%, és millor que l'altre empresa tingui un enfoc de mínim. De nou, que el competidor no accedeixi a tant recurs és beneficiós. Ara però, la pitjor situació no és quan l'altre jugador és agressiu, sinó quan s'adapta. Això es deu a que l'agressiu

sempre consumeix la seva meitat, mentre el que s'adapta només ho fa inicialment, i en posteriors períodes, en veure que el conservador de 10% només consumeix aquesta proporció, decideix consumir un 89% (per tal de no arribar al 100%), més que l'agressiu. En aquest sentit, l'estratègia més agressiva en quant a quantitat de recurs que consumeix, és la que s'adapta.

Perfil Estudiad	Oponent	Guany estudiat	Guany oponent	Guany conjunt
Conservador 0.25	Agressiu	3,349285	6,698571	10,047856
Conservador 0.25	Conservador 0.1	7,344227	3,009381	10,353608
Conservador 0.25	Conservador 0.25	5,077971	5,077971	10,155942
Conservador 0.25	Conservador 0.4	3,856256	6,17001	10,026266
Conservador 0.25	Mínim	10,03451	0,4570359	10,491546
Conservador 0.25	Adapta	3,161538	6,858153	10,019691

Taula 4.4: Resultats del perfil Conservador (25%) en el joc de l'explotació del recurs comú.

Quan la proporció de consum del conservador és del 25% (la meitat del recurs total que li correspondria si es dividís equitativament), el millor resultat de nou es dona quan l'altre empresa explota el mínim, mentre que el pitjor quan l'altre s'adapta. El raonament és anàleg al cas previ: malgrat explotar una mica menys (deixant el marge inicial) que l'agressiu, un cop el que s'adapta observa que l'altre consumeix un 25%, i sota la creença que no variarà, opta per explotar en un gairebé tres quartes parts, més intensament que no pas l'estratègia agressiva, que només n'explota la meitat.

Perfil Estudiad	Oponent	Guany estudiat	Guany oponent	Guany conjunt
Conservador 0.4	Agressiu	4,448303	5,560379	10,008682
Conservador 0.4	Conservador 0.1	8,115408	2,037199	10,152607
Conservador 0.4	Conservador 0.25	6,17001	3,856256	10,026266
Conservador 0.4	Conservador 0.4	5,036134	5,036134	10,072268
Conservador 0.4	Mínim	10,2286	0,0590117	10,2876117
Conservador 0.4	Adapta	4,453209	5,568484	10,021693

Taula 4.5: Resultats del perfil Conservador (40%) en el joc de l'explotació del recurs comú.

L'última possibilitat del conservador és que exploti la majoria de la seva meitat, un 80% concretament (un 40% del total). Un individu que segueixi aquesta estratègia tindria les mateixes preferències que altres individus conservadors que explotin un 10% i un 25%: desitgen enfrontar-se a una empresa de tipus mínim, i no volen que el competidor segueixi un comportament d'adaptar-se. En aquest cas, el guany quan es juga amb l'estratègia agressiva i que s'adapta és molt més similar que en els altres percentatges del conservador. Això es deu a que l'agressiu té una proporció de consum del 50%, i quan el conservador opta per 40%, el complementari que usa l'adaptador (amb el marge) és de 59% (molt més proper que el 89% o el 74% que fa quan el conservador tria un 10% i un 25% respectivament).

Perfil Estudiad	Oponent	Guany estudiat	Guany oponent	Guany conjunt
Mínim	Agressiu	0,0117951	10,10888	10,1206751
Mínim	Conservador 0.1	2,28182	8,755351	11,037171
Mínim	Conservador 0.25	0,4570359	10,03451	10,491546
Mínim	Conservador 0.4	0,0590117	10,2286	10,2876117
Mínim	Mínim	6,004849	6,004849	12,009698
Mínim	Adapta	0	10,09821	10,09821

Taula 4.6: Resultats del perfil Mínim en el joc de l'explotació del recurs comú.

Quan l'individu fa un consum mínim, obté el major guany quan l'empresa amb qui competeix segueix el mateix raonament. En aquesta situació, el recurs creix molt, i no és fins l'últim període quan obtenen beneficis, però són substancials. És interessant notar que a major consum de l'oponent, pitjor resultat per qui segueix l'estratègia de mínim. De fet, el que s'adapta (que posteriorment al període inicial, consumirà un 99% del recurs), l'acaba esgotant abans que acabi el joc. A l'últim període, quan el de mínim decideix consumir la meitat del que queda al final, no hi ha res.

Perfil Estudiad	Oponent	Guany estudiat	Guany oponent	Guany conjunt
Adapta	Agressiu	4,949921	5,050939	10,00086
Adapta	Conservador 0.1	8,635854	1,419759	10,055613
Adapta	Conservador 0.25	6,858153	3,161538	10,019691
Adapta	Conservador 0.4	5,568484	4,453209	10,021693
Adapta	Mínim	10,09821	0	10,09821
Adapta	Adapta	5,0033	5,0033	10,0066

Taula 4.7: Resultats del perfil Adapta en el joc de l'explotació del recurs comú.

S'ha comprovat que en tots els casos excepte l'agressiu, l'estratègia d'adaptar-se és la que pitjors resultats porta a l'oponent. L'agressiva és el pitjor oponent per la que s'adapta, però. Els resultats per qui s'adapta són similars quan l'oponent segueix la mateixa, ja que quan l'altre s'adapta al 49% inicial, segueix el joc triant un 50% (el complementari del percentatge menys el marge), que és justament la jugada del competidor que és agressiu. Per tant, quan s'enfronta contra l'estratègia d'adaptar-se, ella mateixa i l'agressiva només són diferents en el primer període, i idèntics en la resta. Com en els altres casos, un individu amb aquest perfil desitja enfrontar-se a un que segueix l'estratègia de mínim, és quan obté la major recompensa.

En general, es pot apreciar que quant menys consumeix l'oponent, més avantatjós és per l'empresa. En tots els casos el millor és enfrontar-se a un jugador que segueixi l'estratègia de mínim, i majoritàriament el que menys desitja un jugador és que l'oponent segueixi l'estratègia d'adaptar-se (excepte en el cas d'adaptar-se i de jugar agressiu).

Aquest fet s'estén a que quan els dos segueixen la mateixa estratègia, el millor cas és el de mínim. En aquesta situació, el recurs creix molt ràpidament, sense l'impediment que suposa

que les empreses en consumeixin part, i se'n beneficien a l'última etapa del joc.

Es pot veure l'evolució de la quantitat de recurs quan el perfil estratègic d'ambdós jugadors és idèntic, com es mostra a continuació:

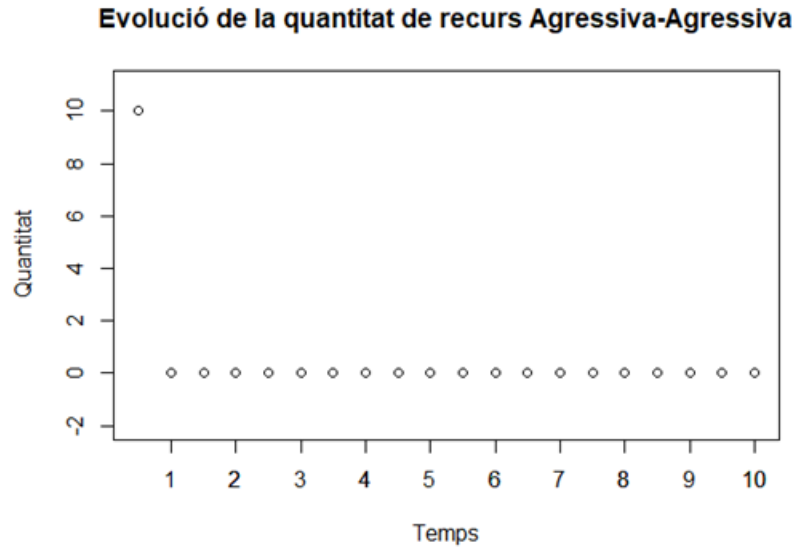


Figura 4.3: Evolució del recurs amb perfils coincidents (Agressiva).

Quan ambdues parts segueixen l'estratègia agressiva, obtenen el recurs a l'inici, l'esgoten atès que cadascun consumeix la meitat, i no hi ha creixement que recuperi el recurs, degut a la condició de necessitat que hi hagi recurs per tal de que es generi més.

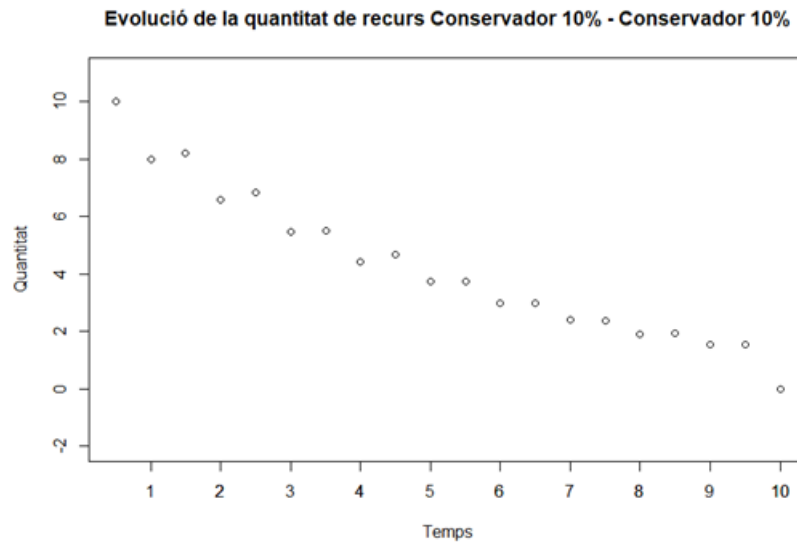


Figura 4.4: Evolució del recurs amb perfils coincidents (Conservador 10%).

Quan els dos tenen un consum del 10%, dins el perfil conservador, el recurs decreix lentament, i fins l'últim període encara n'hi ha disponible. Això canviaria amb un horitzó temporal més llarg, i la λ hauria de ser menor per tal que no es consumeixi completament.

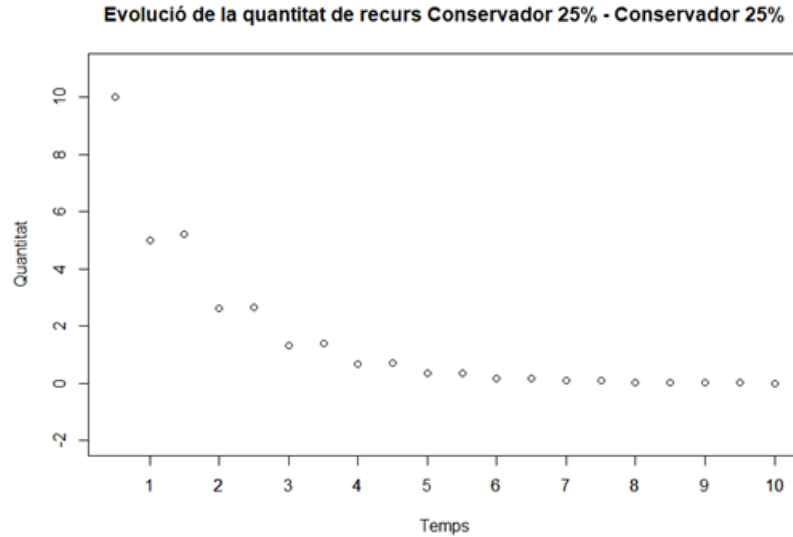


Figura 4.5: Evolució del recurs amb perfils coincidents (Conservador 25%).

Dins el perfil conservador, si cada empresa consumeix la meitat del que li suposadament pertoca, sota la hipòtesi que cadascú té accés a la meitat del recurs, el recurs tampoc s'esgota. Malgrat això, la quantitat és negligible a partir del 8è període, menys d'un 1% de la quantitat inicial.

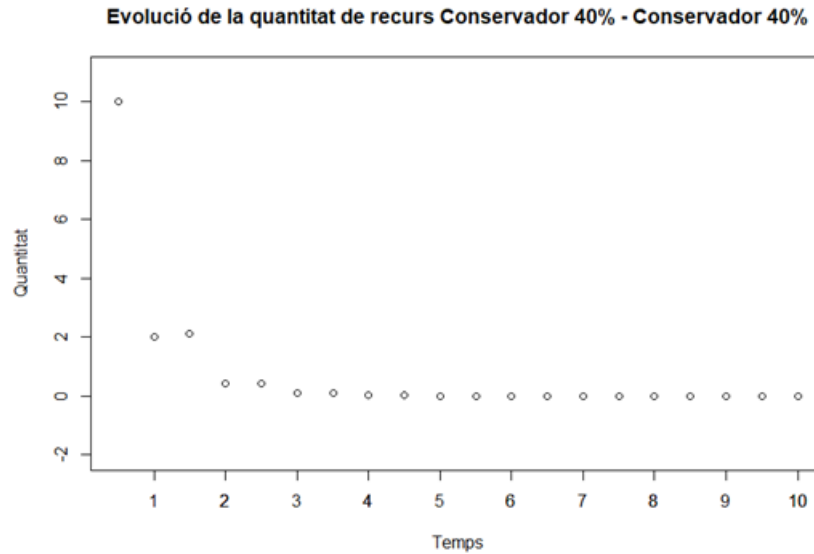


Figura 4.6: Evolució del recurs amb perfils coincidents (Conservador 40%).

Quan cadascun consumeix un 80% de la seva meitat, el recurs existeix en la primera meitat del joc, el 5è és l'últim període on no és nul.

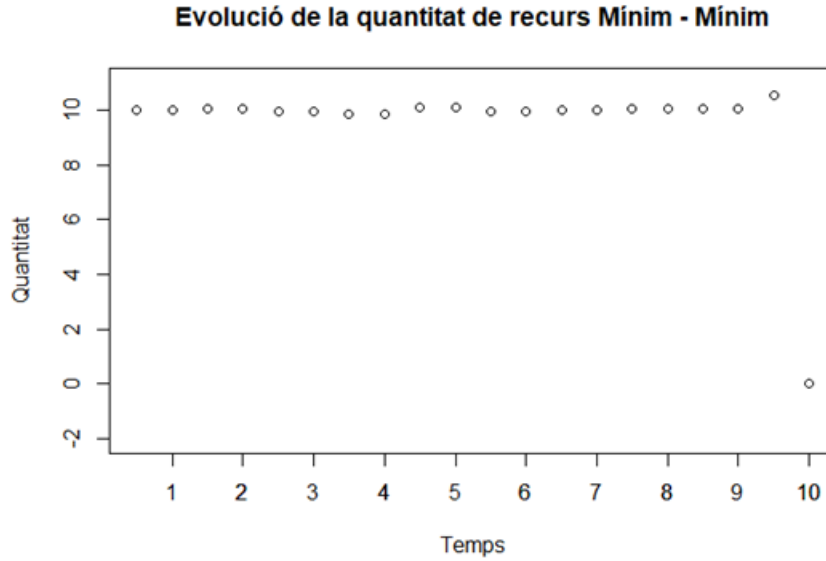


Figura 4.7: Evolució del recurs amb perfils coincidents (Mínim).

El millor dels casos sempre i quan l'oponent segueixi la mateixa estratègia que el propi jugador, és a dir la del mínim, mostra que el recurs va variant, i només al final cau de manera sobtada, degut a l'estratègia que segueix cada perfil estratègic en l'últim període.

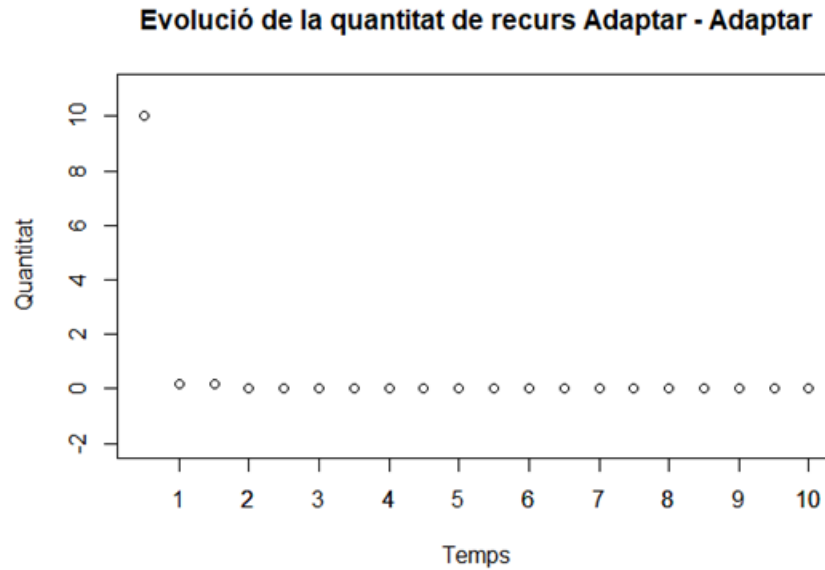


Figura 4.8: Evolució del recurs amb perfils coincidents (Adapta).

Quan els dos s'adapten, el gràfic mostra un comportament similar al de la interacció d'estratègies agressives. L'única diferència, com s'ha esmentat, és en el primer període, ja que els jugadors deixen el marge. En veure que l'oponent ha actuat amb una λ de 49%, els dos opten per 50%, actuant de manera efectiva com ho fa el perfil agressiu. En aquest segon període és quan s'esgota tot el recurs.

Si es fa la suma dels beneficis obtinguts, les recompenses de cada estratègia, s'obtenen els següents resultats.

Perfil estratègic	Guany total
Adapta	41,113922
Agressiu	40,896148
Conservador 40%	38,451664
Conservador 25%	32,823787
Conservador 10%	22,335384
Mínim	8,8145117

Taula 4.8: Suma de resultats de cada perfil en el joc de l'explotació del recurs comú.

Es pot apreciar com les estratègies més efectives són aquelles que exploten una major quantitat del recurs. El mínim queda en últim lloc, en no fer res excepte l'últim període. De les conservadores, increments de λ produeixen millors resultats. L'agressiu, equivalent a un perfil conservador de λ de 50% té encara majors beneficis que el conservador de λ de 40%. El millor de tots, és clarament el perfil adaptador, que menys en el primer període on consumeix menys de la meitat, té λ que pren el valor de 99% si s'enfronta al perfil de mínim, de 89%, 74% i 59% si s'enfronta a cadascun dels conservadors, i 49% si s'enfronta al perfil agressiu. Per tant, té els majors valors de λ . I com s'ha vist, a major λ , o alternativament, a menor consum de l'oponent (que es tradueix en una major λ pel que s'adapta), millor es desenvolupa.

És interessant notar, però, que no s'ha contemplat la possibilitat de cooperar. Si els dos jugadors decideixen cooperar, i repartir-se els beneficis al final, podrien prendre torns en guanyar molt. Com en el cas que s'estudia no s'imposa la necessitat immediata de recurs, cooperar implicaria obtenir el major guany total, i dividir-ho entre els dos. Si es segueix aquest fil de pensament, l'estratègia òptima de cooperació és precisament una que no requereix de cooperar, en el sentit de repartir el benefici. Si els dos jugadors es limiten senzillament a no fer res, i per tant adherir-se al perfil estratègic del mínim, el guany total, que és la totalitat de recurs en l'últim període (i si competeixen, cadascun s'emporta la meitat), es dividirà entre els dos sense haver de fer cap pacte. Per tant, en cas d'estar disposat a no variar d'estratègia, els dos poden obtenir els majors beneficis possibles.

L'inconvenient d'aquest raonament és que unilateralment, desviar-se de l'estratègia dona lloc a majors resultats. Com s'ha observat, cap perfil guanya menys que el mínim quan s'enfronta a ell. D'aquesta manera, els altres perfils es poden aprofitar d'una suposada pactada col·laboració de no explotar res fins l'últim període, i quan l'altre jugador es comporti d'aquesta manera, trair-lo, canviant d'estratègia i beneficiant-se. Però si l'altre jugador fa el mateix raonament, es tornaria una situació d'agressiu contra agressiu, o d'adaptar contra adaptar si decideix consumir més de la meitat de recurs. Aquests dos perfils, en enfrontar-se a sí mateixos tenen el menor guany. Per tant, no jugar mínim domina a jugar els dos mínim pel jugador que no ho fa, però que cap dels dos jugui mínim és dominat per que els dos ho facin.

4.2.5 Solució computacionalment per simulació (creixement elevat)

S'ha comprovat que l'estratègia de no consumir res, el perfil anomenat mínim, és viable si l'altre jugador segueix el mateix comportament. També s'ha conclòs que a menor consum de l'altre i major consum propi, millors resultats s'aconsegueixen, si no es decideix repartir el global dels beneficis, el recurs extret, en finalitzar el joc . En aquest exemple es provarà d'usar una taxa de creixement $\mu=20$. És tal que en absència del terme aleatori $\sigma \cdot \delta \cdot Z_i$ (en quant a considerar-ho, ja que té esperança nul·la), el recurs en un període sigui un 20% major que en el que el precedeix.

Per tal d'estudiar l'efecte d'un increment en la taxa de creixement de la quantitat de recurs, els resultats es presenten de igual manera que en el cas de creixement baix.

Perfil Estudiad	Oponent	Guany estudiat	Guany oponent	Guany conjunt
Agressiu	Agressiu	5	5	10
Agressiu	Conservador 0.1	9,643388	1,932759	11,576147
Agressiu	Conservador 0.25	7,147736	3,573868	10,721604
Agressiu	Conservador 0.4	5,685099	4,548079	10,233178
Agressiu	Mínim	12,3626	0,04931058	12,41191058
Agressiu	Adapta	5,059898	4,9587	10,018598

Taula 4.9: Resultats del perfil Agressiu en el joc de l'explotació del recurs comú (creixement elevat).

Perfil Estudiad	Oponent	Guany estudiat	Guany oponent	Guany conjunt
Conservador 0.1	Agressiu	1,932759	9,643388	11,576147
Conservador 0.1	Conservador 0.1	10,991	10,991	21,982
Conservador 0.1	Conservador 0.25	4,571811	10,63445	15,206261
Conservador 0.1	Conservador 0.4	2,509544	9,88868	12,398224
Conservador 0.1	Mínim	22,71951	10,1654	32,88491
Conservador 0.1	Adapta	1,499906	9,349165	10,849071

Taula 4.10: Resultats del perfil Conservador (10%) en el joc de l'explotació del recurs comú (creixement elevat).

Perfil Estudiad	Oponent	Guany estudiat	Guany oponent	Guany conjunt
Conservador 0.25	Agressiu	3,573868	7,147736	10,721604
Conservador 0.25	Conservador 0.1	10,63445	4,571811	15,206261
Conservador 0.25	Conservador 0.25	6,243394	6,243394	12,486788
Conservador 0.25	Conservador 0.4	4,299348	6,878957	11,178305
Conservador 0.25	Mínim	17,30421	1,944114	19,248324
Conservador 0.25	Adapta	3,278534	7,204459	10,482993

Taula 4.11: Resultats del perfil Conservador (25%) en el joc de l'explotació del recurs comú (creixement elevat).

Perfil Estudiad	Oponent	Guany estudiat	Guany oponent	Guany conjunt
Conservador 0.4	Agressiu	4,548079	5,685099	10,233178
Conservador 0.4	Conservador 0.1	9,88868	2,509544	12,398224
Conservador 0.4	Conservador 0.25	6,878957	4,299348	11,178305
Conservador 0.4	Conservador 0.4	5,246204	5,246204	10,492408
Conservador 0.4	Mínim	13,9122	0,2625402	14,1747402
Conservador 0.4	Adapta	4,536369	5,691144	10,227513

Taula 4.12: Resultats del perfil Conservador (40%) en el joc de l'explotació del recurs comú (creixement elevat).

Perfil Estudiad	Oponent	Guany estudiat	Guany oponent	Guany conjunt
Mínim	Agressiu	0,04931058	12,3626	12,41191058
Mínim	Conservador 0.1	10,1654	22,71951	32,88491
Mínim	Conservador 0.25	1,944114	17,30421	19,248324
Mínim	Conservador 0.4	0,2625402	13,9122	14,1747402
Mínim	Mínim	25,98407	25,98407	51,96814
Mínim	Adapta	0	11,11009	11,11009

Taula 4.13: Resultats del perfil Mínim en el joc de l'explotació del recurs comú (creixement elevat).

Perfil Estudiad	Oponent	Guany estudiat	Guany oponent	Guany conjunt
Adapta	Agressiu	4,9587	5,059898	10,018598
Adapta	Conservador 0.1	9,349165	1,499906	10,849071
Adapta	Conservador 0.25	7,204459	3,278534	10,482993
Adapta	Conservador 0.4	5,691144	4,536369	10,227513
Adapta	Mínim	11,11009	0	11,11009
Adapta	Adapta	5,018264	5,018264	10,036528

Taula 4.14: Resultats del perfil Adapta en el joc de l'explotació del recurs comú (creixement elevat).

De la mateixa manera que abans, tots els perfils desitjarien competir pel recurs comú amb un jugador que decideixi actuar segons mínim, i es veuria més perjudicat si jugués contra una empresa amb perfil d'adaptar-se. De fet, la ordenació de recompensa guanyada es manté igual que en el cas previ, però és superior en quantitat. Els únics casos on jugadors guanyen el mateix segons les dues taxes de creixement són l'agressiu quan juga amb sí mateix (de nou, consumeix la meitat en el primer curs cadascun, fent que s'esgoti en la primera etapa), i el de mínim quan competeix amb el que s'adapta (el recurs no arriba a l'últim període, que és l'únic en el que l'estratègia de mínim consumeix, i per tant no queda res quan es disposa a fer-ho). En aquests dos casos, els jugadors no poden gaudir de la més ràpida taxa de creixement de la situació plantejada.

La millora que es produeix en la resta de casos, que prové de la major taxa de creixement μ , s'aprofita més a menor consum λ , ja que la variació és multiplicativa, i depenent de la

quantitat prèvia. Atès això, el perfil conservador que més es beneficia de l'augment és el de la taxa de consum del 10%, i el que menys el que ho fa en un 40%. El perfil agressiu es beneficia poc, i el que s'adapta també.

Novament, es pot veure l'evolució de la quantitat de recurs quan el perfil estratègic d'ambdós jugadors és idèntic.

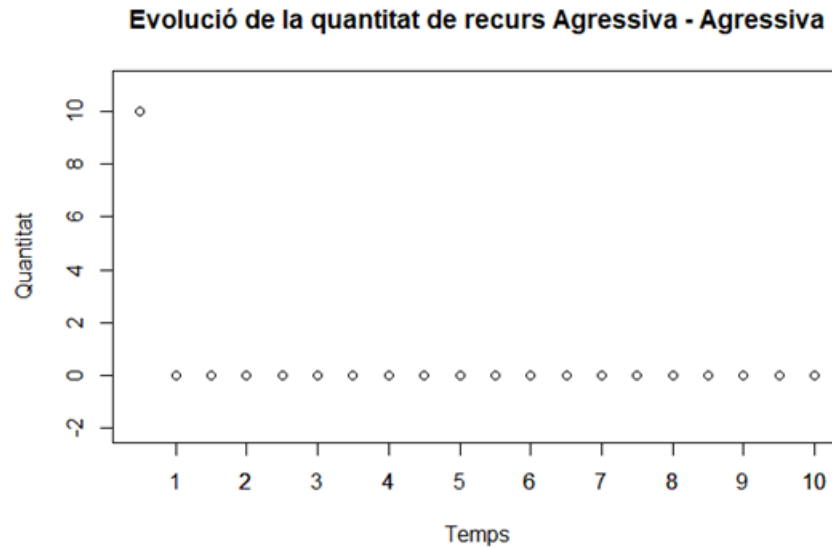


Figura 4.9: Evolució del recurs amb perfils coincidents (Agressiva, creixement elevat).

Si al joc participen dos perfils agressius, succeeix el mateix que prèviament, i ho faria independentment del paràmetre μ . No podran jugar després de la primera etapa, no podran gaudir del creixement, i sempre rebran en total la meitat de la quantitat inicial.

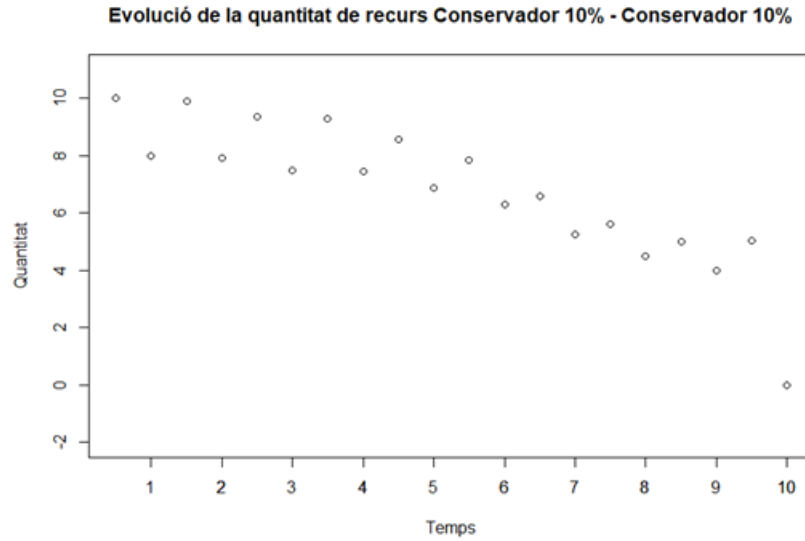


Figura 4.10: Evolució del recurs amb perfils coincidents (Conservador 10%, creixement elevat).

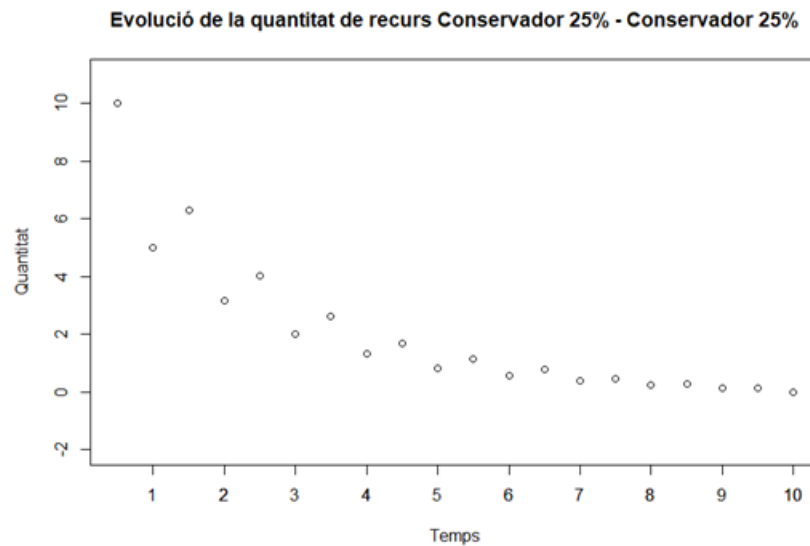


Figura 4.11: Evolució del recurs amb perfils coincidents (Conservador 25%, creixement elevat).

Amb la modificació d'aquest cas, en les dues situacions del perfil conservador que exploten menys enfrontant-se a sí mateixos, la quantitat no arriba a ser nul·la fins l'últim període (de igual manera que abans), i és molt major en ell.

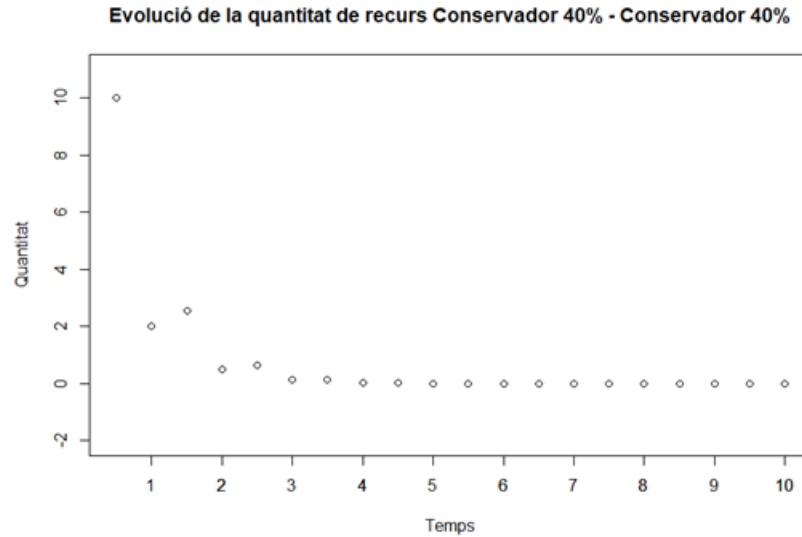


Figura 4.12: Evolució del recurs amb perfils coincidents (Conservador 40%, creixement elevat).

Ara, quan de la seva meitat cadascun consumeix un 80%, també es dona que el recurs existeix només en la primera meitat del joc, el 5è és l'últim període abans que s'extingeixi completament.

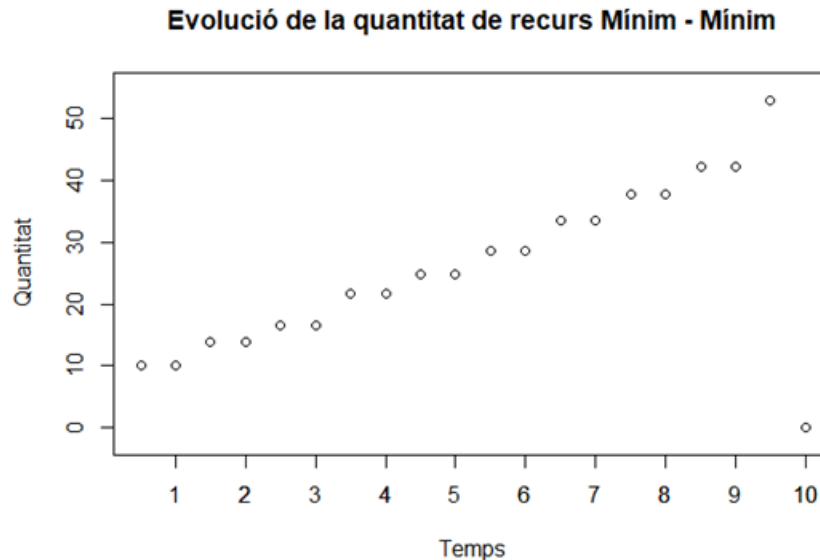


Figura 4.13: Evolució del recurs amb perfils coincidents (Mínim, creixement elevat).

Sota el perfil que més es beneficia de l'increment en la taxa de creixement, el recurs arriba a quintuplicar-se en l'horitzó temporal que abasta el joc. D'aquesta manera, ambdós jugadors reben un 250% de la quantitat inicial, envers el 50% del perfil agressiu. Del major creixement es beneficien tots els perfils excepte l'agressiu, i qui més utilitat en deriva és el mínim, si l'altre

jugador té la mateixa filosofia.

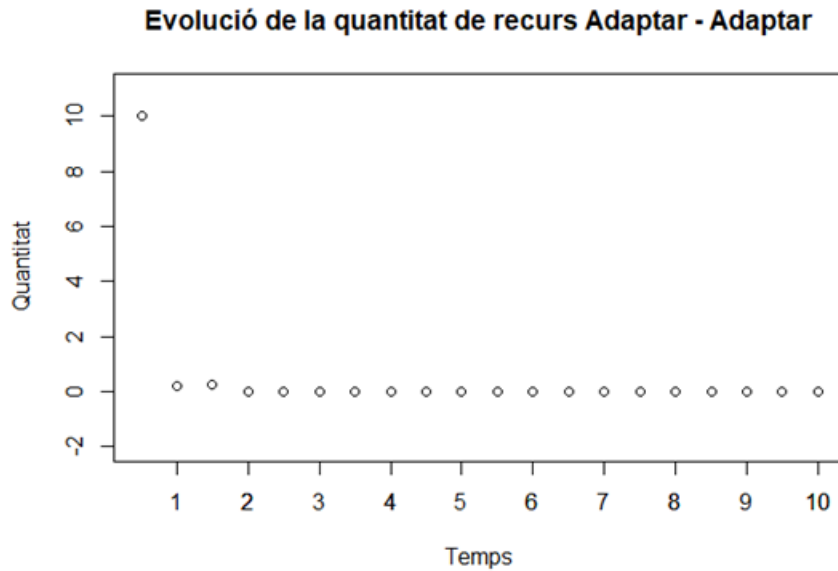


Figura 4.14: Evolució del recurs amb perfils coincidents (Adapta, creixement elevat).

En el cas on ambdós decideixen adaptar l'estratègia a la decisió de l'oponent, no només és similar que en el cas del creixement menor, sinó que també hi ha la similitud amb el perfil agressiu. A partir del segon període, que és quan els dos jugadors adopten l'estratègia de λ d'un 50%, la quantitat del recurs pel que competeixen té el mateix comportament: deixa d'existir fins al final.

Si es calcula la suma dels beneficis obtinguts tenint en compte tots els possibles creuaments, s'obtenen els següents resultats.

Perfil estratègic	Guany total
Conservador 25%	45,333804
Conservador 40%	45,010489
Agressiu	44,898721
Conservador 10%	44,22453
Adapta	43,331822
Mínim	38,405435

Taula 4.15: Suma de resultats de cada perfil en el joc de l'explotació del recurs comú (creixement elevat).

Ara la millor estratègia no és la que s'adapta, de fet és la segona que pitjors resultats dona. El perfil agressiu pren la tercera posició. Malgrat que quan competeix amb sí mateixa té els pitjors resultats, aprofita el fet de consumir la meitat del recurs que va creixent quan l'oponent no té una λ elevada. El que adapta també consumeix el recurs intensament aprofitant que l'oponent no ho fa, però a un nivell massa elevat. En aquest sentit, la moderació de l'estratègia agressiva (que mai supera el 50%, quan la que s'adapta pot arribar al 74% o al 89% en canvi) és beneficiosa.

El perfil de mínim és el pitjor, però en termes relatius s'ha vist beneficiat pel creixement en gran mesura, ja que ha passat de guanyar en total poc més d'una tercera part de la quantitat del penúltim (8,81 envers el 22,33), a gairebé un 90% (38,41 envers 43,33).

El conjunt d'estratègies conservadores també presenta diferències. És la proporció de 25% la que millors resultats obté, ja no hi ha un patró clar de millora de resultats a mesura que millora el percentatge. És interessant notar que els resultats, depenen de la resta de perfils. I per tant el percentatge de consum òptim es pot trobar de forma analítica, com es presenta posteriorment.

Si s'introdueix la possibilitat de cooperar, és de nou que ambdues empreses segueixin l'estratègia de mínim la millor alternativa. De fet, cadascú guanyaria 25,98 unitats, que és més que el total que guanyarien els dos jugadors sumats en qualsevol altre cas. En aquesta situació, hi ha menys incentiu per desviar-se de l'estratègia de seguir el mínim, ja que traïr no donarà un major benefici.

4.2.6 Resolució analítica

Per analitzar quina és la millor tria d'estratègia si l'altre jugador segueix la mateixa, es resol el problema de maximització següent:

$$z = \frac{\Lambda}{2} \cdot S \cdot \sum_{i=0}^{n-2} [(1 - \Lambda) \cdot (1 + \mu\delta)]^i + \frac{S}{2} \cdot [(1 - \Lambda) \cdot (1 + \mu\delta)]^{n-1} \quad (33)$$

On Λ representa la suma de λ individuals, correspondria a 2λ . El sumatori representa una sèrie geomètrica de raó $r = (1 - \Lambda)(1 + \mu\delta)$ i $n - 1$ termes.

Seguint la fórmula genèrica:

$$\sum_{i=0}^k r^i = \frac{1 - r^{k+1}}{1 - r} \quad (34)$$

i atenent que $k = n - 2$, obtenim:

$$\sum_{i=0}^{n-2} [(1 - \Lambda)(1 + \mu\delta)]^i = \frac{1 - [(1 - \Lambda)(1 + \mu\delta)]^{n-1}}{1 - (1 - \Lambda)(1 + \mu\delta)} \quad (35)$$

Substituint l'expressió en la funció objectiu:

$$\begin{aligned} z &= \frac{\Lambda}{2} \cdot S \cdot \frac{1 - [(1 - \Lambda)(1 + \mu\delta)]^{n-1}}{1 - [(1 - \Lambda)(1 + \mu\delta)]} + \frac{S}{2} \cdot [(1 - \Lambda)(1 + \mu\delta)]^{n-1} \\ &= \frac{\Lambda}{2} \cdot S \cdot \frac{1 - [(1 - \Lambda)(1 + \mu\delta)]^{n-1}}{\Lambda \cdot (1 + \mu\delta) - \mu\delta} + \frac{S}{2} \cdot [(1 - \Lambda)(1 + \mu\delta)]^{n-1} \end{aligned} \quad (36)$$

Usant un algoritme d'optimització, es troba que el valor de Λ (entre 0 i 1) que maximitza l'expressió, és 0. Aquest valor correspon a la situació on ambdues taxes d'explotació λ són nul·les, i és coherent amb que aquest és el millor valor de λ (atenent al fet que l'altre actuarà d'igual manera). El resultat analític és igual que els resultats obtinguts mitjançant simulació, ja que quan el perfil de mínim competia amb sí mateix, assolia els millors resultats d'entre tots els perfils que jugaven contra sí mateixos. S'ha de considerar que malgrat teòricament la taxa d'explotació sigui nul·la, en l'últim període cadascun consumeix la meitat (i es beneficien del creixement elevat del recurs, atès que cap jugador ha intervingut en els primers períodes).

També és interessant estudiar quina és la millor estratègia a seguir, donat que l'oponent tria una λ determinada. L'anàlisi està restringit pel fet que una solució calculística implica suposar que aquesta taxa no variarà. L'expressió a maximitzar seria:

$$z = \lambda \cdot S \cdot \sum_{i=0}^{n-2} [(1 - \lambda - L)(1 + \mu\delta)]^i + \frac{S}{2} \cdot [(1 - \lambda - L)(1 + \mu\delta)]^{n-1} \quad (37)$$

La variable de decisió és ara λ , i L representa la quantitat que decideix consumir l'altre jugador, fixa. En aquest cas:

$$\sum_{i=0}^{n-2} [(1 - \lambda - L) \cdot (1 + \mu\delta)]^i = \frac{1 - [(1 - \lambda - L) \cdot (1 + \mu\delta)]^{n-1}}{1 - (1 - \lambda - L) \cdot (1 + \mu\delta)} \quad (38)$$

I de nou substituint l'expressió en la funció objectiu:

$$\begin{aligned} z &= \lambda \cdot S \cdot \frac{1 - [(1 - \lambda - L) \cdot (1 + \mu\delta)]^{n-1}}{1 - (1 - \lambda - L) \cdot (1 + \mu\delta)} + \frac{S}{2} \cdot [(1 - \lambda - L) \cdot (1 + \mu\delta)]^{n-1} \\ &= \lambda \cdot S \cdot \frac{1 - [(1 - \lambda - L) \cdot (1 + \mu\delta)]^{n-1}}{(\lambda + L) \cdot (1 + \mu\delta) - \mu\delta} + \frac{S}{2} \cdot [(1 - \lambda - L) \cdot (1 + \mu\delta)]^{n-1} \end{aligned} \quad (39)$$

Resolent el problema d'optimització, amb la variable de decisió subjecte a la restricció de ser menor a L (el jugador no pot consumir part del que ha consumit l'altre jugador), es troba que la solució òptima s'assoleix quan λ val $1 - L$. El valor òptim és precisament $S \cdot \lambda$, corresponent al consum de la quantitat inicial.

Després del primer període el recurs s'esgota i no torna a créixer, atès que la suma de les explotacions és 1 (donat que λ és el complementari de L). Malgrat els resultats simulats mostren que el perfil que s'adapta (que busca consumir el complementari que l'oponent) no és el millor, això no és incoherent amb el resultat analític. El motiu és que per replicar exactament el resultat analític, el jugador hauria de saber prèviament el nivell de consum de l'oponent en el primer període, i actuar en conseqüència. El que fa el perfil que s'adapta és jugar una λ de 49%, i posteriorment s'adapta, no compleix per tant que ja en l'inici del joc consumeixi el complementari, sino que ho fa en els següents. Aquesta distinció és important ja que l'estratègia òptima és tal que després del primer període, no quedi més recurs, i consumir la pròpia λ en el primer. El perfil que s'adapta no és capaç de preveure el que farà l'oponent, i per tant no replica de manera exacta a l'estratègia que planteja la resolució analítica del problema.

4.2.7 Conclusions del cas

Com s'ha pogut comprovar en la resolució analítica, la millor acció a prendre està directament relacionada amb la informació que es té, i amb l'existència de possibilitat de cooperar.

Si els jugadors es poden posar d'acord, prendran la decisió de ser molt conservadors, fins l'últim període, aprofitant l'elevat creixement que experimentarà la quantitat de recurs. Com s'ha vist en els resultats per simulació, el resultat conjunt és el més gran. Malgrat és cert que si un dels dos decideix traïr a l'oponent, pot millorar els resultats, només ho fa en cas que l'altre jugador mantingui l'estratègia de mínim. Això no és un supòsit realista, ja que posteriorment al període de traïció, és probable que l'oponent decideixi consumir molt també, fent que s'esgoti el recurs. Per tant, que els dos juguin mínim pot no ser equilibri de Nash en el sentit que es pot millorar de manera unilateral el benefici propi variant d'estratègia, però

sí que es pot considerar un equilibri en el sentit que en un context d'aplicació real, la traïció comportaria una disminució de resultats al final.

Quan es suposa que no hi ha la possibilitat d'arribar a un acord, i donada una taxa d'explotació fixa de l'oponent, la solució analítica esdevé en consumir una proporció consistent en el complementari. Si un dels jugadors sap què farà l'altre, és senzill. Però si cap dels dos ho sap, i han de triar una proporció arbitrària, el joc evolucionarà de la següent manera:

1. Els dos jugadors trien una proporció. Si la suma és major a 1, cadascun s'emportaria la meitat del recurs, i acabaria el joc en el primer període. En cas contrari, el joc passaria a la segona fase.
2. Quan la suma és menor a la unitat, al 100% del recurs, en el segon període els dos jugadors decidiran consumir el complementari del que ha jugat l'altre, efectivament esgotant el recurs (al primer període es consumirà $\lambda_1 + \lambda_2 < 1$, i en el segon es consumirà $(1 - \lambda_2) + (1 - \lambda_1) = 2 - (\lambda_2 + \lambda_1) > 1$) i acabaria el joc.
3. Alternativament es podria arribar a una tercera fase, on el joc seguiria. En aquest cas, cap dels dos consumeixen més del que han fet inicialment, per no arriscar-se a que l'altre, actuant de la mateixa manera, esgoti el recurs. Però si l'oponent fa el mateix raonament, i decideix no consumir més del que ha fet inicialment, el jugador en qüestió sí que té possibilitat d'augmentar el consum sense que s'esgoti el recurs, ja que la suma de les taxes d'explotació no serà major a 1. I, evidentment, l'oponent pot seguir el mateix fil de pensament, donant lloc a una situació d'incertesa, on l'estratègia òptima faria ús de prediccions sobre què farà l'oponent.

En aquest cas descrit, el paper de l'economia del comportament seria més important que no pas la optimització numèrica d'una funció objectiu, per maximitzar la utilitat.

És també destacable que s'ha suposat que les empreses no necessiten recurs de manera immediata. Aquest supòsit no és realista en segons quines indústries. Es pot donar que en cada període es necessiti un mínim de recurs, que podria fins i tot variar al llarg del joc. També és possible que els costos que implica una activació sobtada del procés d'extracció (en l'últim període, com diu la solució òptima) no sigui factible. A despit d'aquestes restriccions, l'estratègia òptima seria la mateixa que ha proporcionat la solució analítica (no obstant, el valor de la funció objectiu de la utilitat guanyada seria diferent), sempre i quan es compleixi la restricció addicional, que el consum estigüés per sobre del llindar necessari. Això es deu a que a la funció objectiu es restaria el paràmetre de la necessitat de consum, i un cop restat, seria equivalent a formular un problema d'optimització on la quantitat de recurs és menor en cada període que la del cas actual (reduïda per les necessitats mínimes de consum), però que segueix el mateix patró de creixement que el que s'ha descrit inicialment.

5 Conclusions

Com s'ha fet esment, modelitzar és requisit imprescindible, atesa la complexitat de la realitat econòmica. Per analitzar el comportament dels diferents agents, la teoria de jocs pren un paper clau, tant a l'hora de definir el context en el qual es desenvoluparan les situacions, com les diferents maneres en que cada agent participant pot adreçar el problema al qual s'enfronta.

En el primer cas presentat, de l'individu en el mercat laboral, s'ha posat en evidència la importància dels supòsits, especialment en l'àmbit de recompenses. Variacions petites poden fer que la conclusió sobre la millor estratègia a adoptar, i l'estratègia òptima difereixi segons els paràmetres donats. Addicionalment, els efectes que tenen variacions sobre els resultats, alhora depenen d'altres magnituds (com és l'horitzó temporal). És imprescindible per tant, considerar en tot moment quines característiques defineixen la situació, així com possibles restriccions a l'anàlisi que puguin sorgir.

En joc del productor ha mostrat un resultat que podria semblar poc intuïtiu. L'estratègia més complexa i refinada, com seria seguir les probabilitats en l'estat estacionari no és equilibri la millor opció, i és a més dominada pel perfil estratègic aparentment rudimentari que és produir sempre quantitats mitjanes, seguint el fet que és la demanda més probable que hi ha.

Respecte als jocs amb més d'un jugador, s'obre un nou ventall de possibilitats, ja que s'incorpora un nou element no determinista. I la informació sobre quines jugades farà l'oponent proporciona una avantatge crucial. De fet, l'estratègia que copia, amb una filosofia similar a la que s'adapta en el joc del productor, amb èxit considerable en ell, és la pitjor que es podria seguir de totes les plantejades. El jugador ja no s'enfronta a l'entorn que representa el joc, sinó que competeix amb un element addicional. La interacció d'estratègies que surt de manera natural porta a que els jocs estocàstics necessitin un anàlisi més sofisticat que no pas els jocs de Markov. També mostra la necessitat de fer simulacions i de fer interactuar totes les estratègies les unes amb les altres, evidenciat pel fet que si bé la millor estratègia és l'optimista, el perfil pessimista que fa les accions justament oposades, no és el pitjor, i de fet és el segon perfil que més beneficis dona a l'agent que l'adopta.

El millor resultat que s'esmenta és en termes mitjos, a falta d'informació sobre què jugarà l'oponent, com és lògic. Però si es sabés com actuaria, l'estratègia optimista no és la millor possible (com per exemple si l'oponent copia les pròpies jugades, el perfil ha de ser el de col·laborar). Es podria estendre al fet on es permetés posar-se d'acord sobre quina estratègia seguir, i repartir-se els beneficis, cas en que al combinació d'optimista i col·laborar és la millor alternativa. La informació és especialment rellevant en cas que no hi hagi una estratègia única com a millor resposta a qualsevol altre.

En l'últim joc, de l'explotació del recurs, s'ha vist en la resolució analítica que introduir la possibilitat de col·laborar amb l'oponent fa canviar l'estratègia òptima a seguir. Si la cooperació està permesa, l'estratègia a seguir és la més conservadora possible, mentre que en cas contrari s'ha de buscar el perfil més agressiu, de consumir el complementari. Si no

hi ha informació, s'ha de consumir el màxim possible, que quedarà limitat per la quantitat sobrant del que intenti explotar l'altre jugador. La col·laboració porta a un resultat oposat en extrem, de no consumir res fins l'últim període.

Els dos casos de jocs estocàstics mostren com un anàlisi numèric o per simulació queda obsolet si la informació és asimètrica. I l'avantatge més gran que es pot tenir és tenir la opció de posar-se d'acord amb l'altre jugador, encara que per fer-ho és necessari que hi hagi confiança.

Referències

- [1] Kai Lai Chung. From Random Walks to Markov Chains. *A: A Course in Probability Theory*. 3rd Edition. New Delhi, India: Rekha Printers, 1990, p. 211-240. ISBN 81-85015-36-8.
- [2] Ash, Robert B. Markov Chains. *A: Basic Probability Theory*. 3rd Edition. NY, USA: Wiley, 1970, p. 240-296. ISBN 978-0-486-46628-0.
- [3] Michael Mitzenmacher, Eli Upfal. Markov Chains and Random Walks. *A: Probability and Computing. Randomization and Probabilistic Techniques in Algorithms and Data Analysis*. 2nd Edition. Cambridge, United Kingdom; New York, NY, USA: Cambridge University Press, 2017, p. 183-185. ISBN 9781107154889.
- [4] "Education pays, 2023", *Career Outlook*, U.S. Bureau of Labor Statistics, April 2024, [consulta: 16 de juny de 2024] Disponible a: <https://www.bls.gov/careeroutlook/2023/home.htm>.
- [5] Martin Kessler; Arvind Subramanian. *The Hyperglobalization of Trade and Its Future* [en línia]. PIIE.Com. Peterson Institute of International Economics, Juliol 2013. SEVEN IMPORTANT CHARACTERISTICS OF THE MOST RECENT WAVE OF GLOBALISATION, [consulta: 31 de gener de 2024]. Disponible a: <https://www.piie.com/publications/working-papers/hyperglobalization-trade-and-its-future>.
- [6] Kreps, D.M. *Nash Equilibrium*. Game Theory. London, United Kingdom: Palgrave Macmillan, 1989, p. 167-177. ISBN 9780333495377.
- [7] Eilon Solan. *Markov Decision Problems*. A Course in Stochastic Game Theory. Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press, 2022, p. 9-15. ISBN 9781009014793.
- [8] Delahaye, Jean-Paul. ¿Tiene recompensa el altruismo?. *A: Investigación y Ciencia*. España: Prensa Científica, 1995. Núm. 221, p. 87-92. ISSN 0210-136X.
- [9] Steven Lalley. *Statistics Course* [en línia]. University of Chicago, n.d. BROWNIAN MOTION. [consulta: 22 d'abril de 2024]. Disponible a: <https://galton.uchicago.edu/~lalley/Courses/313/BrownianMotionCurrent.pdf>.

Annexos

```
1 set.seed(0123)
2
3 ##Funcions del paquet markovchains
4 library(markovchain)
5
6 ##Creem dades en el cas de BUSCAR sempre
7 TransMatrix <- matrix(data = c(1,0,0.1,0.9), byrow = TRUE, nrow=2)
8 mc_employment <- new("markovchain", states=c("EmployedB","UnemployedB"),
9               transitionMatrix=TransMatrix, name = "Employment")
10
11 #GUANY ESPERAT ANALITICAMENT
12 #En 10 etapes
13 ew.B_10 <- expectedRewards(mc_employment,10,c(2,0))[2]
14 #En 100 etapes
15 ew.B_100 <- expectedRewards(mc_employment,100,c(2,0))[2]
16 #En 1000 etapes
17 ew.B_1000 <- expectedRewards(mc_employment,1000,c(2,0))[2]
18
19 ##SIMULACIONS
20 #En 60 etapes (5 anys)
21 n.sim <- 10000
22 simulacions <- vector("list", n.sim)
23 simulacions <- lapply(1:n.sim, function(i) {
24   markovchainSequence(60, mc_employment, t0="UnemployedB", include.t0=
25     FALSE,
26     userCcpp=TRUE)
27 })
28 obtenirrecompensa <- function(simulacions) {
29   sum(simulacions == "EmployedB") * 2
30 }
31 resultats.B_60 <- sapply(simulacions, obtenirrecompensa)
32 ew.B_60 <- mean(resultats.B_60)
33
34 tempsentreballar <- function(simulacions) {
35   sum(simulacions == "UnemployedB")
36 }
37 tempsatur.B_60 <- sapply(simulacions, tempsentreballar)
38
39 #En 240 etapes (20 anys)
40 n.sim <- 10000
41 simulacions <- vector("list", n.sim)
42 simulacions <- lapply(1:n.sim, function(i) {
43   markovchainSequence(240, mc_employment, t0="UnemployedB",
44     include.t0=FALSE, userCcpp=TRUE)
45 })
46
47 obtenirrecompensa <- function(simulacions) {
48   sum(simulacions == "EmployedB") * 2
49 }
50 resultats.B_240 <- sapply(simulacions, obtenirrecompensa)
```

```

51 ew.B_240 <- mean(resultats.B_240)
52
53 tempsentreballar <- function(simulacions) {
54   sum(simulacions == "UnemployedB")
55 }
56 tempsatur.B_240 <- sapply(simulacions, tempsentreballar)
57
58 #En 600 etapes (50 anys)
59 n.sim <- 10000
60 simulacions <- vector("list", n.sim)
61 simulacions <- lapply(1:n.sim, function(i) {
62   markovchainSequence(600, mc_employment, t0="UnemployedB",
63     include.t0=FALSE, useRCpp=TRUE)
64 })
65
66 obtenirrecompensa <- function(simulacions) {
67   sum(simulacions == "EmployedB") * 2
68 }
69 resultats.B_600 <- sapply(simulacions, obtenirrecompensa)
70 ew.B_600 <- mean(resultats.B_600)
71
72 tempsentreballar <- function(simulacions) {
73   sum(simulacions == "UnemployedB")
74 }
75 tempsatur.B_600 <- sapply(simulacions, tempsentreballar)
76
77 ##Creem dades en el cas de FORMAR-SE primer, i BUSCAR despres
78 TransMatrix <- matrix(data = c(0.7,0.3,0,1), byrow = TRUE, nrow=2)
79 mc_employment <- new("markovchain", states=c("UnemployedA","EmployedA"),
80   transitionMatrix=TransMatrix, name = "Employment")
81
82 ##GUANY ESPERAT ANALITICAMENT
83 #En 10 etapes
84 ew.F_10 <- expectedRewards(mc_employment,10-1,c(0,2.35))[1]
85 #En 100 etapes
86 ew.F_100 <- expectedRewards(mc_employment,100-1,c(0,2.35))[1]
87 #En 1000 etapes
88 ew.F_1000 <- expectedRewards(mc_employment,1000-1,c(0,2.35))[1]
89
90 ##SIMULACIONS
91 #En 60 etapes (5 anys)
92 n.sim <- 10000
93 simulacions <- vector("list", n.sim)
94 simulacions <- lapply(1:n.sim, function(i) {
95   markovchainSequence(48, mc_employment, t0="UnemployedA",
96     include.t0=FALSE, useRCpp=TRUE)
97 })
98
99 obtenirrecompensa <- function(simulacions) {
100   sum(simulacions == "EmployedA") * 2.35
101 }
102 resultats.F_60 <- sapply(simulacions, obtenirrecompensa)
103 ew.F_60 <- mean(resultats.F_60)
104

```

```

105 tempsentreballar <- function(simulacions) {
106   sum(simulacions == "UnemployedA")
107 }
108 tempsatur.F_60 <- sapply(simulacions, tempsentreballar)+12
109
110 #En 240 etapes (20 anys)
111 n.sim <- 10000
112 simulacions <- vector("list", n.sim)
113 simulacions <- lapply(1:n.sim, function(i) {
114   markovchainSequence(228, mc_employment, t0="UnemployedA",
115   include.t0=FALSE, useRCpp=TRUE)
116 })
117
118 obtenirrecompensa <- function(simulacions) {
119   sum(simulacions == "EmployedA") * 2.35
120 }
121 resultats.F_240 <- sapply(simulacions, obtenirrecompensa)
122 ew.F_240 <- mean(resultats.F_240)
123
124 tempsentreballar <- function(simulacions) {
125   sum(simulacions == "UnemployedA")
126 }
127 tempsatur.F_240 <- sapply(simulacions, tempsentreballar) + 12
128
129 #En 600 etapes
130 n.sim <- 10000
131 simulacions <- vector("list", n.sim)
132 simulacions <- lapply(1:n.sim, function(i) {
133   markovchainSequence(588, mc_employment, t0="UnemployedA",
134   include.t0=FALSE, useRCpp=TRUE)
135 })
136
137 obtenirrecompensa <- function(simulacions) {
138   sum(simulacions == "EmployedA") * 2.35
139 }
140 resultats.F_600 <- sapply(simulacions, obtenirrecompensa)
141 ew.F_600 <- mean(resultats.F_600)
142
143 tempsentreballar <- function(simulacions) {
144   sum(simulacions == "UnemployedA")
145 }
146 tempsatur.F_600 <- sapply(simulacions, tempsentreballar) + 12
147
148 ##RESUM RECOMPENSES
149 recompenses_mat <- matrix(c(ew.B_60,ew.F_60,ew.B_240,ew.F_240,ew.B_600,
150 ew.F_600),byrow = T, nrow=3)
151 recompenses_df <- data.frame(recompenses_mat)
152 colnames(recompenses_df) <- c("Sempre Buscar","Primer Formar-se")
153 rownames(recompenses_df) <- c("5 anys","20 anys","50 anys")
154 recompenses_df
155
156 ##RESUM TEMPS EN ATUR
157 atur_mat <- matrix(c(mean(tempsatur.B_60),mean(tempsatur.F_60),
158 mean(tempsatur.B_240),mean(tempsatur.F_240),

```

```

159 mean(tempsatur.B_600),mean(tempsatur.F_600)),byrow = T, nrow=3)
160 atur_df <- data.frame(atur_mat)
161 colnames(atur_df) <- c("Sempre Buscar","Primer Formar-se")
162 rownames(atur_df) <- c("5 anys","20 anys","50 anys")
163 atur_df
164
165 barplot(table(tempsatur.B_60),
166 main="Nombre de periodes (mesos) en l'atur en 5 anys")
167 barplot(table(tempsatur.B_240),
168 main="Nombre de periodes (mesos) en l'atur en 20 anys")
169 barplot(table(tempsatur.B_600),
170 main="Nombre de periodes (mesos) en l'atur en 50 anys")
171
172 barplot(table(tempsatur.F_60),
173 main="Nombre de periodes (mesos) en l'atur en 5 anys")
174 barplot(table(tempsatur.F_240),
175 main="Nombre de periodes (mesos) en l'atur en 20 anys")
176 barplot(table(tempsatur.F_600),
177 main="Nombre de periodes (mesos) en l'atur en 50 anys")
178
179
180 #Per quin salari s formar-se primer pitjor (restant 1 euro
181 #de manera incremental)
182 #En 60 etapes (5 anys)
183 n.sim <- 10000
184 simulacions <- vector("list", n.sim)
185 simulacions <- lapply(1:n.sim, function(i) {
186   markovchainSequence(48, mc_employment, t0="UnemployedA",
187   include.t0=FALSE, useRCpp=TRUE)
188 })
189
190 variable.salari <- 2.35
191 y <- c()
192 while(ew.F_60 > recompenses_df[1,1]){
193   obtenirrecompensa <- function(simulacions) {
194     sum(simulacions == "EmployedA") * variable.salari
195   }
196   resultats.F_60 <- sapply(simulacions, obtenirrecompensa)
197   ew.F_60 <- mean(resultats.F_60)
198   y <- c(y,ew.F_60)
199   variable.salari <- variable.salari - 0.001
200 }
201 variable.salari
202 x <- seq(0.001,2.35-variable.salari,by=0.001)
203 plot(x,y, type="l", xlab="Reducció de salari (0.01 = 1 euro)",
204 ylab="Salari simulat")
205 points(2.35-variable.salari,recompenses_df[1,1], pch=16, col="red")
206 abline(h=recompenses_df[1,1])
207
208
209 #En 240 etapes (20 anys)
210 n.sim <- 10000
211 simulacions <- vector("list", n.sim)
212 simulacions <- lapply(1:n.sim, function(i) {

```

```

213   markovchainSequence(228, mc_employment, t0="UnemployedA",
214   include.t0=FALSE, useRCpp=TRUE)
215 })
216
217 variable.salari <- 2.35
218 y <- c()
219 while(ew.F_240 > recompenses_df[2,1]){
220   obtenirrecompensa <- function(simulacions) {
221     sum(simulacions == "EmployedA") * variable.salari
222   }
223   resultats.F_240 <- sapply(simulacions, obtenirrecompensa)
224   ew.F_240 <- mean(resultats.F_240)
225   y <- c(y,ew.F_240)
226   variable.salari <- variable.salari - 0.001
227 }
228 variable.salari
229 x <- seq(0.001,2.35-variable.salari,by=0.001)
230 plot(x,y, type="l", xlab="Reduccio de salari (0.01 = 1 euro)",
231 ylab="Salari simulat")
232 points(2.35-variable.salari,recompenses_df[2,1], pch=16, col="red")
233 abline(h=recompenses_df[2,1])
234
235 #En 600 etapes
236 n.sim <- 10000
237 simulacions <- vector("list", n.sim)
238 simulacions <- lapply(1:n.sim, function(i) {
239   markovchainSequence(588, mc_employment, t0="UnemployedA",
240   include.t0=FALSE, useRCpp=TRUE)
241 })
242
243 variable.salari <- 2.35
244 y <- c()
245 while(ew.F_600 > recompenses_df[3,1]){
246   obtenirrecompensa <- function(simulacions) {
247     sum(simulacions == "EmployedA") * variable.salari
248   }
249   resultats.F_600 <- sapply(simulacions, obtenirrecompensa)
250   ew.F_600 <- mean(resultats.F_600)
251   y <- c(y,ew.F_600)
252   variable.salari <- variable.salari - 0.001
253 }
254 variable.salari
255 x <- seq(0.001,2.35-variable.salari,by=0.001)
256 plot(x,y, type="l", xlab="Reducci de salari (0.01 = 1 euro)",
257 ylab="Salari simulat")
258 points(2.35-variable.salari,recompenses_df[3,1], pch=16, col="red")
259 abline(h=recompenses_df[3,1])

```

Listing 1: Joc del Mercat de Treball

```

1 set.seed(0123)
2
3 library(markovchain)
4
5 ##Creem dades
6 TransMatrix <- matrix(data = c(0.8,0.1,0.1,0.2,0.7,0.1,0.1,0.1,0.8), byrow
  = TRUE, nrow=3)
7 mc_demand <- new("markovchain", states=c("ConsumAlt","ConsumMig","
  ConsumBaix"), transitionMatrix=TransMatrix, name = "Demand")
8 steadyStates(mc_demand)
9
10
11 ##SIMULACIONES
12 n.sim <- 10000
13 simulacions <- vector("list", n.sim)
14 simulacions <- lapply(1:n.sim, function(i) {
15   markovchainSequence(52*5, mc_demand, t0=sample(mc_demand@states,1),
16     include.t0=FALSE, userCcpp=TRUE)
17 })
18 #####EQUIPROBABLE
19 funcioequiprobable <- function(n){
20   for(i in 1:n){
21     number <- runif(1,0,1)
22     if(number<=1/3){mode <- "ConsumAlt"}
23     if(number>1/3 & number<=2/3){mode <- "ConsumMig"}
24     if(number>2/3){mode <- "ConsumBaix"}
25     equiprobable <- c(equiprobable,mode)
26   }
27   return(equiprobable)
28 }
29 equiprobable <- c()
30 simequiprobable <- lapply(1:n.sim, function(i) {
31   funcioequiprobable(52*5)
32 })
33 desajustequiprobable <- c()
34 for(i in 1:n.sim){
35   desajustequiprobable[i] <- sum(simulacions[[i]]!=simequiprobable[[i]])
36 }
37 #####EE
38 funcioEE <- function(n){
39   for(i in 1:n){
40     number <- runif(1,0,100)
41     if(number<=41.66667){mode <- "ConsumAlt"}
42     if(number>41.66667 & number<=66.66667){mode <- "ConsumMig"}
43     if(number>66.66667){mode <- "ConsumBaix"}
44     EE <- c(EE,mode)
45   }
46   return(EE)
47 }
48 EE <- c()
49 simEE <- lapply(1:n.sim, function(i) {
50   funcioEE(52*5)
51 })
52 desajustEE <- c()

```

```

52 for(i in 1:n.sim){
53   desajustEE[i] <- sum(simulacions[[i]]!=simEE[[i]])
54 }
55 #####PONDERAT
56 funcioponderat <- function(n){
57   for(i in 1:n){
58     number <- runif(1,0,100)
59     if(number<=36.66667){mode <- "ConsumAlt"}
60     if(number>36.66667 & number<=66.66667){mode <- "ConsumMig"}
61     if(number>66.66667){mode <- "ConsumBaix"}
62     ponderat <- c(ponderat,mode)
63   }
64   return(ponderat)
65 }
66 ponderat <- c()
67 simponderat <- lapply(1:n.sim, function(i) {
68   funcioponderat(52*5)
69 })
70 desajustponderat <- c()
71 for(i in 1:n.sim){
72   desajustponderat[i] <- sum(simulacions[[i]]!=simponderat[[i]])
73 }
74 #####ADAPTA
75 funcioadapta <- function(simulacio) {
76   adapta <- c("ConsumMig")
77   adapta <- c(adapta, head(simulacio,-1))
78   return(adapta)
79 }
80 simadapta <- lapply(simulacions, funcioadapta)
81 desajustadapta <- c()
82 for(i in 1:n.sim){
83   desajustadapta[i] <- sum(simulacions[[i]]!=simadapta[[i]])
84 }
85
86 summary(desajustequiprobable)
87 summary(desajustEE)
88 summary(desajustponderat)
89
90 equiprobableinf <- mean(desajustequiprobable)-sd(desajustequiprobable)/
91   sqrt(10000)*1.96
92 equiprobablesup <- mean(desajustequiprobable)+sd(desajustequiprobable)/
93   sqrt(10000)*1.96
94 adaptainf <- mean(desajustadapta)-sd(desajustadapta)/sqrt(10000)*1.96
95 adaptasup <- mean(desajustadapta)+sd(desajustadapta)/sqrt(10000)*1.96
96 EEinf <- mean(desajustEE)-sd(desajustEE)/sqrt(10000)*1.96
97 EEsup <- mean(desajustEE)+sd(desajustEE)/sqrt(10000)*1.96
98 ponderatinf <- mean(desajustponderat)-sd(desajustponderat)/sqrt(10000)*
99   1.96
100 ponderatsup <- mean(desajustponderat)+sd(desajustponderat)/sqrt(10000)*
101   1.96
102 c(equiprobableinf,equiprobablesup)
103 c(EEinf,EEsup)
104 c(ponderatinf,ponderatsup)
105 c(adaptainf,adaptasup)

```

```

102
103 #Comparaci de mitjanes
104 df <- data.frame(
105   value = c(desajustEE, desajustequiprobable, desajustponderat),
106   group = factor(rep(1:3, each = length(desajustEE)))
107 )
108
109 anova_result <- aov(value ~ group, data = df)
110 summary(anova_result)
111
112 TukeyHSD(anova_result)
113
114 t.test(desajustEE, desajustadapta)
115
116
117 #El que interessa s per quant s'ha equivocat
118 auxequiprobable <- c()
119 sumequiprobable <- c()
120 for(i in 1:n.sim){
121   auxequiprobable <- as.numeric(as.factor(simequiprobable[[i]]))-as.
122     numeric(as.factor(simulacions[[i]]))
123   sumequiprobable[i] <- sum(abs(auxequiprobable))
124 }
125 summary(sumequiprobable)
126
127 auxEE <- c()
128 sumEE <- c()
129 for(i in 1:n.sim){
130   auxEE <- as.numeric(as.factor(simEE[[i]]))-as.numeric(as.factor(
131     simulacions[[i]]))
132   sumEE[i] <- sum(abs(auxEE))
133 }
134 summary(sumEE)
135
136 auxponderat <- c()
137 sumponderat <- c()
138 for(i in 1:n.sim){
139   auxponderat <- as.numeric(as.factor(simponderat[[i]]))-as.numeric(as.
140     factor(simulacions[[i]]))
141   sumponderat[i] <- sum(abs(auxponderat))
142 }
143 summary(sumponderat)
144
145 auxadapta <- c()
146 sumadapta <- c()
147 for(i in 1:n.sim){
148   auxadapta <- as.numeric(as.factor(simadapta[[i]]))-as.numeric(as.factor(
149     simulacions[[i]]))
150   sumadapta[i] <- sum(abs(auxadapta))
151 }
152 summary(sumadapta)
153
154 simulacions_n <- simulacions
155 for(i in 1:n.sim){

```

```

152   for(j in 1:260){
153     if(simulacions_n[[i]][j] == "ConsumAlt"){simulacions_n[[i]][j] <- 1}
154     if(simulacions_n[[i]][j] == "ConsumMig"){simulacions_n[[i]][j] <- 2}
155     if(simulacions_n[[i]][j] == "ConsumBaix"){simulacions_n[[i]][j] <- 3}
156   }
157 }
158 auxalta <- c()
159 sumalta <- c()
160 for(i in 1:n.sim){
161   auxalta <- 1-as.numeric(as.factor(simulacions_n[[i]]))
162   sumalta[i] <- sum(abs(auxalta))
163 }
164 summary(sumalta)
165 auxbaixa <- c()
166 sumbaixa <- c()
167 for(i in 1:n.sim){
168   auxbaixa <- 3-as.numeric(as.factor(simulacions_n[[i]]))
169   sumbaixa[i] <- sum(abs(auxbaixa))
170 }
171 summary(sumbaixa)
172 auxmitja <- c()
173 summitja <- c()
174 for(i in 1:n.sim){
175   auxmitja <- 2-as.numeric(as.factor(simulacions_n[[i]]))
176   summitja[i] <- sum(abs(auxmitja))
177 }
178 summary(summitja)
179
180 totssimulacions <- c()
181 for(i in 9216:n.sim){
182   totssimulacions <- c(totssimulacions,simulacions_n[[i]])
183 }
184
185 barplot(table(totssimulacions)/length(totssimulacions),names.arg = c("Alta",
186   "Mitjana","Baixa"))
187
188 barplot(table(auxalta)/length(auxalta))
189 barplot(table(auxbaixa)/length(auxbaixa))
190 barplot(table(auxmitja)/length(auxmitja))
191
192 #El que interessa s si s'ha equivocat
193 auxequiprobable <- c()
194 sumequiprobable2 <- c()
195 for(i in 1:n.sim){
196   auxequiprobable <- as.numeric(as.factor(simequiprobable[[i]]))-as.
197     numeric(as.factor(simulacions[[i]]))
198   auxequiprobable2 <- ifelse(auxequiprobable==0,0,1)
199   sumequiprobable2[i] <- sum(abs(auxequiprobable2))
200 }
201 summary(sumequiprobable2)
202
203 auxEE <- c()
204 sumEE2 <- c()
205 for(i in 1:n.sim){

```

```

204   auxEE <- as.numeric(as.factor(simEE[[i]]))-as.numeric(as.factor(
      simulacions[[i]]))
205   auxEE2 <- ifelse(auxEE==0,0,1)
206   sumEE2[i] <- sum(abs(auxEE2))
207 }
208 summary(sumEE2)
209
210 auxponderat <- c()
211 sumponderat2 <- c()
212 for(i in 1:n.sim){
213   auxponderat <- as.numeric(as.factor(simponderat[[i]]))-as.numeric(as.
      factor(simulacions[[i]]))
214   auxponderat2 <- ifelse(auxponderat==0,0,1)
215   sumponderat2[i] <- sum(abs(auxponderat2))
216 }
217 summary(sumponderat2)
218
219 auxadapta <- c()
220 sumadapta2 <- c()
221 for(i in 1:n.sim){
222   auxadapta <- as.numeric(as.factor(simadapta[[i]]))-as.numeric(as.factor(
      simulacions[[i]]))
223   auxadapta2 <- ifelse(auxadapta==0,0,1)
224   sumadapta2[i] <- sum(abs(auxadapta2))
225 }
226 summary(sumadapta2)

```

Listing 2: Joc del Mercat de bens

```

1 set.seed(0123)
2
3 #0. Inicialment
4 accions_posssiblesA <- c("C","T")
5 accions_posssiblesB <- c("C","T")
6 recompenses_inicialsA <- c(100,80,120,80)
7 recompenses_inicialsB <- c(100,120,80,80)
8
9 canvi_recompenses.CC <- function(recompensa1, recompensa2){
10   a <- runif(1,0,1)
11   if(a<0.38){
12     recompenses_A <- recompenses_A*1.33 #CAS MILLOR
13   }
14   if(a>0.38 & a<0.8){
15     recompenses_A <- recompenses_A #CAS IGUAL
16   }
17   if(a>0.8){
18     recompenses_A <- recompenses_A*0.5 #CAS PITJOR
19   }
20   recompenses_A <- ifelse(rep(recompenses_A[1]<2*recompenses_inicialsA
21     [1],4),recompenses_A,2*recompenses_inicialsA)
22   recompenses_A <- ifelse(rep(recompenses_A[1]>0.25*recompenses_inicialsA
23     [1],4),recompenses_A,0.25*recompenses_inicialsA)
24
25   b <- runif(1,0,1)
26   if(b<0.38){
27     recompenses_B <- recompenses_B*1.33 #CAS MILLOR
28   }
29   if(b>0.38 & b<0.8){
30     recompenses_B <- recompenses_B #CAS IGUAL
31   }
32   if(b>0.8){
33     recompenses_B <- recompenses_B*0.5 #CAS PITJOR
34   }
35   recompenses_B <- ifelse(rep(recompenses_B[1]<2*recompenses_inicialsB
36     [1],4),recompenses_B,2*recompenses_inicialsB)
37   recompenses_B <- ifelse(rep(recompenses_B[1]>0.25*recompenses_inicialsB
38     [1],4),recompenses_B,0.25*recompenses_inicialsB)
39
40   return(list(recompenses_A,recompenses_B))
41 }
42
43 canvi_recompenses.CT <- function(recompensa1, recompensa2){
44   recompenses_A <- recompenses_A
45   recompenses_B <- ifelse(rep(runif(1,0,1)<2/3,4), recompenses_B*1.33,
46     recompenses_B*0.5)
47   recompenses_B <- ifelse(rep(recompenses_B[1]<2*recompenses_inicialsB
48     [1],4),recompenses_B,2*recompenses_inicialsB)
49   recompenses_B <- ifelse(rep(recompenses_B[1]>0.25*recompenses_inicialsB
50     [1],4),recompenses_B,0.25*recompenses_inicialsB)
51
52   return(list(recompenses_A,recompenses_B))
53 }
54
55 canvi_recompenses.TC <- function(recompensa1, recompensa2){
56   recompenses_A <- ifelse(rep(runif(1,0,1)<2/3,4), recompenses_A*1.33,

```

```

    recompenses_A*0.5)
48   recompenses_A <- ifelse(rep(recompenses_A[1]<2*recompenses_inicialsA
    [1],4),recompenses_A,2*recompenses_inicialsA)
49   recompenses_A <- ifelse(rep(recompenses_A[1]>0.25*recompenses_inicialsA
    [1],4),recompenses_A,0.25*recompenses_inicialsA)
50   recompenses_B <- recompenses_B
51
52   return(list(recompenses_A,recompenses_B))
53 }
54 canvi_recompenses.TT <- function(recompensa1, recompensa2){
55   recompenses_A <- ifelse(rep(runif(1,0,1)<1/3,4), recompenses_A*1.33,
    recompenses_A*0.5)
56   recompenses_A <- ifelse(rep(recompenses_A[1]<2*recompenses_inicialsA
    [1],4),recompenses_A,2*recompenses_inicialsA)
57   recompenses_A <- ifelse(rep(recompenses_A[1]>0.25*recompenses_inicialsA
    [1],4),recompenses_A,0.25*recompenses_inicialsA)
58   recompenses_B <- ifelse(rep(runif(1,0,1)<1/3,4), recompenses_B*1.33,
    recompenses_B*0.5)
59   recompenses_B <- ifelse(rep(recompenses_B[1]<2*recompenses_inicialsB
    [1],4),recompenses_B,2*recompenses_inicialsB)
60   recompenses_B <- ifelse(rep(recompenses_B[1]>0.25*recompenses_inicialsB
    [1],4),recompenses_B,0.25*recompenses_inicialsB)
61   return(list(recompenses_A,recompenses_B))
62 }
63 #####
64 #1. COOPERAR+COOPERAR
65 recompenses_A <- recompenses_inicialsA
66 recompenses_B <- recompenses_inicialsB
67
68 similarunavez.CC <- function(accions_posiblesA, accions_posiblesB,
    recompenses_A, recompenses_B) {
69   accions_presesA <- character(20)
70   accions_presesB <- character(20)
71   guanyA <- 0
72   guanyB <- 0
73   accio_conjunta <- character(20)
74
75   for(i in 1:20){
76     accioA <- accions_posiblesA[1]
77     accioB <- accions_posiblesB[1]
78     accions_presesA[i] <- accioA
79     accions_presesB[i] <- accioB
80     accio_conjunta[i] <- paste0(accioA,accioB)
81
82     if(accio_conjunta[i]=="CC"){
83       guanyA <- guanyA + recompenses_A[1]
84       guanyB <- guanyB + recompenses_B[1]
85
86       temp <- canvi_recompenses.CC(recompenses_A, recompenses_B)
87       recompenses_A <- temp[[1]]
88       recompenses_B <- temp[[2]]
89     }
90   }
91   return(list(guanyA = guanyA, guanyB = guanyB, accio_conjunta = accio_

```

```

    conjunta))
92 }
93
94 num_simulaciones <- 10000
95 resultados <- lapply(1:num_simulaciones, function(x) simularunavez.CC(
    accions_posiblesA, accions_posiblesB, recompenses_A, recompenses_B))
96
97 guanyA_ColCol <- sapply(resultados, function(x) x$guanyA)
98 guanyB_ColCol <- sapply(resultados, function(x) x$guanyB)
99 accio_conjunta_ColCol <- lapply(resultados, function(x) x$accio_conjunta)
100
101
102 #####
103 #2. PESSIMISTA+PESSIMISTA
104 #Traicionar si pitjor que inici, cooperar si millor (aleatori altrament)
105 recompenses_A <- recompenses_inicialsA
106 recompenses_B <- recompenses_inicialsB
107
108 simularunavez.PP <- function(accions_posiblesA, accions_posiblesB,
    recompenses_A, recompenses_B) {
109     accions_presesA <- character(20)
110     accions_presesB <- character(20)
111     guanyA <- 0
112     guanyB <- 0
113     accio_conjunta <- character(20)
114
115     for(i in 1:20){
116         if(recompenses_A[1]==recompenses_inicialsA[1]){
117             accioA <- ifelse(runif(1,0,1)<0.5,accions_posiblesA[1],accions_
    possiblesA[2])
118         }
119         if(recompenses_A[1]<recompenses_inicialsA[1]){
120             accioA <- accions_posiblesA[2]
121         }
122         if(recompenses_A[1]>recompenses_inicialsA[1]){
123             accioA <- accions_posiblesA[1]
124         }
125         if(recompenses_B[1]==recompenses_inicialsB[1]){
126             accioB <- ifelse(runif(1,0,1)<0.5,accions_posiblesB[1],accions_
    possiblesB[2])
127         }
128         if(recompenses_B[1]<recompenses_inicialsB[1]){
129             accioB <- accions_posiblesB[2]
130         }
131         if(recompenses_B[1]>recompenses_inicialsB[1]){
132             accioB <- accions_posiblesB[1]
133         }
134
135         accions_presesA[i] <- accioA
136         accions_presesB[i] <- accioB
137         accio_conjunta[i] <- paste0(accioA, accioB)
138
139         if(accio_conjunta[i]=="CC"){
140             guanyA <- guanyA + recompenses_A[1]

```

```

141     guanyB <- guanyB + recompenses_B[1]
142
143     temp <- canvi_recompenses.CC(recompenses_A, recompenses_B)
144     recompenses_A <- temp[[1]]
145     recompenses_B <- temp[[2]]
146   }
147   if(accio_conjunta[i]=="CT"){
148     guanyA <- guanyA + recompenses_A[2]
149     guanyB <- guanyB + recompenses_B[2]
150
151     temp <- canvi_recompenses.CT(recompenses_A, recompenses_B)
152     recompenses_A <- temp[[1]]
153     recompenses_B <- temp[[2]]
154   }
155   if(accio_conjunta[i]=="TC"){
156     guanyA <- guanyA + recompenses_A[3]
157     guanyB <- guanyB + recompenses_B[3]
158
159     temp <- canvi_recompenses.TC(recompenses_A, recompenses_B)
160     recompenses_A <- temp[[1]]
161     recompenses_B <- temp[[2]]
162   }
163   if(accio_conjunta[i]=="TT"){
164     guanyA <- guanyA + recompenses_A[4]
165     guanyB <- guanyB + recompenses_B[4]
166
167     temp <- canvi_recompenses.TT(recompenses_A, recompenses_B)
168     recompenses_A <- temp[[1]]
169     recompenses_B <- temp[[2]]
170   }
171 }
172
173 return(list(guanyA = guanyA, guanyB = guanyB, accio_conjunta = accio_
  conjunta))
174 }
175
176 num_simulaciones <- 10000
177 resultados <- lapply(1:num_simulaciones, function(x) simularunavez.PP(
  accions_posssiblesA, accions_posssiblesB, recompenses_A, recompenses_B))
178
179 guanyA_PessimPessim <- sapply(resultados, function(x) x$guanyA)
180 guanyB_PessimPessim <- sapply(resultados, function(x) x$guanyB)
181 accio_conjunta_PessimPessim <- lapply(resultados, function(x) x$accio_
  conjunta)
182
183
184 #####
185 #3. OPTIMISTA+OPTIMISTA
186 #Cooperar si pitjor que inici, traicionar si millor (aleatori altrament)
187 recompenses_A <- recompenses_inicialsA
188 recompenses_B <- recompenses_inicialsB
189
190 simularunavez.OO <- function(accions_posssiblesA, accions_posssiblesB,
  recompenses_A, recompenses_B) {

```

```

191 accions_presesA <- character(20)
192 accions_presesB <- character(20)
193 guanyA <- 0
194 guanyB <- 0
195 accio_conjunta <- character(20)
196
197 for(i in 1:20){
198   if(recompenses_A[1]==recompenses_inicialsA[1]){
199     accioA <- ifelse(runif(1,0,1)<0.5,accions_possiblesA[1],accions_
200     possiblesA[2])
201   }
202   if(recompenses_A[1]<recompenses_inicialsA[1]){
203     accioA <- accions_possiblesA[1]
204   }
205   if(recompenses_A[1]>recompenses_inicialsA[1]){
206     accioA <- accions_possiblesA[2]
207   }
208   if(recompenses_B[1]==recompenses_inicialsB[1]){
209     accioB <- ifelse(runif(1,0,1)<0.5,accions_possiblesB[1],accions_
210     possiblesB[2])
211   }
212   if(recompenses_B[1]<recompenses_inicialsB[1]){
213     accioB <- accions_possiblesB[1]
214   }
215   if(recompenses_B[1]>recompenses_inicialsB[1]){
216     accioB <- accions_possiblesB[2]
217   }
218
219   accions_presesA[i] <- accioA
220   accions_presesB[i] <- accioB
221   accio_conjunta[i] <- paste0(accioA,accioB)
222
223   if(accio_conjunta[i]=="CC"){
224     guanyA <- guanyA + recompenses_A[1]
225     guanyB <- guanyB + recompenses_B[1]
226
227     temp <- canvi_recompenses.CC(recompenses_A, recompenses_B)
228     recompenses_A <- temp[[1]]
229     recompenses_B <- temp[[2]]
230   }
231   if(accio_conjunta[i]=="CT"){
232     guanyA <- guanyA + recompenses_A[2]
233     guanyB <- guanyB + recompenses_B[2]
234
235     temp <- canvi_recompenses.CT(recompenses_A, recompenses_B)
236     recompenses_A <- temp[[1]]
237     recompenses_B <- temp[[2]]
238   }
239   if(accio_conjunta[i]=="TC"){
240     guanyA <- guanyA + recompenses_A[3]
241     guanyB <- guanyB + recompenses_B[3]
242
243     temp <- canvi_recompenses.TC(recompenses_A, recompenses_B)
244     recompenses_A <- temp[[1]]

```

```

243     recompenses_B <- temp[[2]]
244   }
245   if(accio_conjunta[i]=="TT"){
246     guanyA <- guanyA + recompenses_A[4]
247     guanyB <- guanyB + recompenses_B[4]
248
249     temp <- canvi_recompenses.TT(recompenses_A, recompenses_B)
250     recompenses_A <- temp[[1]]
251     recompenses_B <- temp[[2]]
252   }
253 }
254
255 return(list(guanyA = guanyA, guanyB = guanyB, accio_conjunta = accio_
conjunta))
256 }
257
258 num_simulaciones <- 10000
259 resultados <- lapply(1:num_simulaciones, function(x) simularunavez.00(
accions_posiblesA, accions_posiblesB, recompenses_A, recompenses_B))
260
261 guanyA_OptimOptim <- sapply(resultados, function(x) x$guanyA)
262 guanyB_OptimOptim <- sapply(resultados, function(x) x$guanyB)
263 accio_conjunta_OptimOptim <- lapply(resultados, function(x) x$accio_
conjunta)
264
265
266 #####
267 #4. COPIA+COPIA
268 #Primer aleatori i després copia l'ltim moviment de l'altre
269 recompenses_A <- recompenses_inicialsA
270 recompenses_B <- recompenses_inicialsB
271 simularunavez.CopiaCopia <- function(accions_posiblesA, accions_
posiblesB, recompenses_A, recompenses_B) {
272   accions_presesA <- character(20)
273   accions_presesB <- character(20)
274   guanyA <- 0
275   guanyB <- 0
276   accio_conjunta <- character(20)
277
278   #Primera iteraci
279   accioA <- ifelse(runif(1,0,1)<0.5,accions_posiblesA[1],accions_
posiblesA[2])
280   accioB <- ifelse(runif(1,0,1)<0.5,accions_posiblesB[1],accions_
posiblesB[2])
281   accions_presesA[1] <- accioA
282   accions_presesB[1] <- accioB
283   accio_conjunta[1] <- paste0(accioA,accioB)
284
285   if(accio_conjunta[1]=="CC"){
286     guanyA <- guanyA + recompenses_A[1]
287     guanyB <- guanyB + recompenses_B[1]
288
289     temp <- canvi_recompenses.CC(recompenses_A, recompenses_B)
290     recompenses_A <- temp[[1]]

```

```

291     recompenses_B <- temp[[2]]
292 }
293 if(accio_conjunta[1]=="CT"){
294     guanyA <- guanyA + recompenses_A[2]
295     guanyB <- guanyB + recompenses_B[2]
296
297     temp <- canvi_recompenses.CT(recompenses_A, recompenses_B)
298     recompenses_A <- temp[[1]]
299     recompenses_B <- temp[[2]]
300 }
301 if(accio_conjunta[1]=="TC"){
302     guanyA <- guanyA + recompenses_A[3]
303     guanyB <- guanyB + recompenses_B[3]
304
305     temp <- canvi_recompenses.TC(recompenses_A, recompenses_B)
306     recompenses_A <- temp[[1]]
307     recompenses_B <- temp[[2]]
308 }
309 if(accio_conjunta[1]=="TT"){
310     guanyA <- guanyA + recompenses_A[4]
311     guanyB <- guanyB + recompenses_B[4]
312
313     temp <- canvi_recompenses.TT(recompenses_A, recompenses_B)
314     recompenses_A <- temp[[1]]
315     recompenses_B <- temp[[2]]
316 }
317
318 for(i in 2:20){
319     accioA <- accions_presesB[i-1]
320     accioB <- accions_presesA[i-1]
321     accions_presesA[i] <- accioA
322     accions_presesB[i] <- accioB
323     accio_conjunta[i] <- paste0(accioA,accioB)
324
325     if(accio_conjunta[i]=="CC"){
326         guanyA <- guanyA + recompenses_A[1]
327         guanyB <- guanyB + recompenses_B[1]
328
329         temp <- canvi_recompenses.CC(recompenses_A, recompenses_B)
330         recompenses_A <- temp[[1]]
331         recompenses_B <- temp[[2]]
332     }
333     if(accio_conjunta[i]=="CT"){
334         guanyA <- guanyA + recompenses_A[2]
335         guanyB <- guanyB + recompenses_B[2]
336
337         temp <- canvi_recompenses.CT(recompenses_A, recompenses_B)
338         recompenses_A <- temp[[1]]
339         recompenses_B <- temp[[2]]
340     }
341     if(accio_conjunta[i]=="TC"){
342         guanyA <- guanyA + recompenses_A[3]
343         guanyB <- guanyB + recompenses_B[3]
344

```

```

345     temp <- canvi_recompenses.TC(recompenses_A, recompenses_B)
346     recompenses_A <- temp[[1]]
347     recompenses_B <- temp[[2]]
348   }
349   if(accio_conjunta[i]=="TT"){
350     guanyA <- guanyA + recompenses_A[4]
351     guanyB <- guanyB + recompenses_B[4]
352
353     temp <- canvi_recompenses.TT(recompenses_A, recompenses_B)
354     recompenses_A <- temp[[1]]
355     recompenses_B <- temp[[2]]
356   }
357 }
358
359 return(list(guanyA = guanyA, guanyB = guanyB, accio_conjunta = accio_
conjunta))
360 }
361
362 num_simulaciones <- 10000
363 resultados <- lapply(1:num_simulaciones, function(x) simularunavez.
CopiaCopia(accions_possiblesA, accions_possiblesB, recompenses_A,
recompenses_B))
364
365 guanyA_CopiaCopia <- sapply(resultados, function(x) x$guanyA)
366 guanyB_CopiaCopia <- sapply(resultados, function(x) x$guanyB)
367 accio_conjunta_CopiaCopia <- lapply(resultados, function(x) x$accio_
conjunta)
368
369
370 #####
371 #####
372 #5. COOPERAR+PESSIMISTA
373 recompenses_A <- recompenses_inicialsA
374 recompenses_B <- recompenses_inicialsB
375
376 simularunavez.CP <- function(accions_possiblesA, accions_possiblesB,
recompenses_A, recompenses_B) {
377   accions_presesA <- character(20)
378   accions_presesB <- character(20)
379   guanyA <- 0
380   guanyB <- 0
381   accio_conjunta <- character(20)
382
383   for(i in 1:20){
384     accioA <- accions_possiblesA[1]
385     if(recompenses_B[1]==recompenses_inicialsB[1]){
386       accioB <- ifelse(runif(1,0,1)<0.5,accions_possiblesB[1],accions_
possiblesB[2])
387     }
388     if(recompenses_B[1]<recompenses_inicialsB[1]){
389       accioB <- accions_possiblesB[2]
390     }
391     if(recompenses_B[1]>recompenses_inicialsB[1]){
392       accioB <- accions_possiblesB[1]

```

```

393 }
394 accions_presesA[i] <- accioA
395 accions_presesB[i] <- accioB
396 accio_conjunta[i] <- paste0(accioA, accioB)
397
398 if(accio_conjunta[i]=="CC"){
399   guanyA <- guanyA + recompenses_A[1]
400   guanyB <- guanyB + recompenses_B[1]
401
402   temp <- canvi_recompenses.CC(recompenses_A, recompenses_B)
403   recompenses_A <- temp[[1]]
404   recompenses_B <- temp[[2]]
405 }
406 if(accio_conjunta[i]=="CT"){
407   guanyA <- guanyA + recompenses_A[2]
408   guanyB <- guanyB + recompenses_B[2]
409
410   temp <- canvi_recompenses.CT(recompenses_A, recompenses_B)
411   recompenses_A <- temp[[1]]
412   recompenses_B <- temp[[2]]
413 }
414 if(accio_conjunta[i]=="TC"){
415   guanyA <- guanyA + recompenses_A[3]
416   guanyB <- guanyB + recompenses_B[3]
417
418   temp <- canvi_recompenses.TC(recompenses_A, recompenses_B)
419   recompenses_A <- temp[[1]]
420   recompenses_B <- temp[[2]]
421 }
422 if(accio_conjunta[i]=="TT"){
423   guanyA <- guanyA + recompenses_A[4]
424   guanyB <- guanyB + recompenses_B[4]
425
426   temp <- canvi_recompenses.TT(recompenses_A, recompenses_B)
427   recompenses_A <- temp[[1]]
428   recompenses_B <- temp[[2]]
429 }
430 }
431
432 return(list(guanyA = guanyA, guanyB = guanyB, accio_conjunta = accio_
  conjunta))
433 }
434
435 num_simulaciones <- 10000
436 resultados <- lapply(1:num_simulaciones, function(x) simularunavez.CP(
  accions_posiblesA, accions_posiblesB, recompenses_A, recompenses_B))
437
438 guanyA_ColPessim <- sapply(resultados, function(x) x$guanyA)
439 guanyB_ColPessim <- sapply(resultados, function(x) x$guanyB)
440 accio_conjunta_ColPessim <- lapply(resultados, function(x) x$accio_
  conjunta)
441
442
443 #####

```

```

444 #6. COOPERAR+OPTIMISTA
445 recompenses_A <- recompenses_inicialsA
446 recompenses_B <- recompenses_inicialsB
447
448 similarunavez.CO <- function(accions_possiblesA, accions_possiblesB,
    recompenses_A, recompenses_B) {
449   accions_presesA <- character(20)
450   accions_presesB <- character(20)
451   guanyA <- 0
452   guanyB <- 0
453   accio_conjunta <- character(20)
454
455   for(i in 1:20){
456     accioA <- accions_possiblesA[1]
457     if(recompenses_B[1]==recompenses_inicialsB[1]){
458       accioB <- ifelse(runif(1,0,1)<0.5, accions_possiblesB[1], accions_
    possiblesB[2])
459     }
460     if(recompenses_B[1]<recompenses_inicialsB[1]){
461       accioB <- accions_possiblesB[1]
462     }
463     if(recompenses_B[1]>recompenses_inicialsB[1]){
464       accioB <- accions_possiblesB[2]
465     }
466     accions_presesA[i] <- accioA
467     accions_presesB[i] <- accioB
468     accio_conjunta[i] <- paste0(accioA, accioB)
469
470     if(accio_conjunta[i]=="CC"){
471       guanyA <- guanyA + recompenses_A[1]
472       guanyB <- guanyB + recompenses_B[1]
473
474       temp <- canvi_recompenses.CC(recompenses_A, recompenses_B)
475       recompenses_A <- temp[[1]]
476       recompenses_B <- temp[[2]]
477     }
478     if(accio_conjunta[i]=="CT"){
479       guanyA <- guanyA + recompenses_A[2]
480       guanyB <- guanyB + recompenses_B[2]
481
482       temp <- canvi_recompenses.CT(recompenses_A, recompenses_B)
483       recompenses_A <- temp[[1]]
484       recompenses_B <- temp[[2]]
485     }
486     if(accio_conjunta[i]=="TC"){
487       guanyA <- guanyA + recompenses_A[3]
488       guanyB <- guanyB + recompenses_B[3]
489
490       temp <- canvi_recompenses.TC(recompenses_A, recompenses_B)
491       recompenses_A <- temp[[1]]
492       recompenses_B <- temp[[2]]
493     }
494     if(accio_conjunta[i]=="TT"){
495       guanyA <- guanyA + recompenses_A[4]

```

```

496     guanyB <- guanyB + recompenses_B[4]
497
498     temp <- canvi_recompenses.TT(recompenses_A, recompenses_B)
499     recompenses_A <- temp[[1]]
500     recompenses_B <- temp[[2]]
501   }
502 }
503
504   return(list(guanyA = guanyA, guanyB = guanyB, accio_conjunta = accio_
    conjunta))
505 }
506
507 num_simulaciones <- 10000
508 resultados <- lapply(1:num_simulaciones, function(x) simularunavez.CO(
    accions_posiblesA, accions_posiblesB, recompenses_A, recompenses_B))
509
510 guanyA_ColOptim <- sapply(resultados, function(x) x$guanyA)
511 guanyB_ColOptim <- sapply(resultados, function(x) x$guanyB)
512 accio_conjunta_ColOptim <- lapply(resultados, function(x) x$accio_conjunta
    )
513
514 #####
515 #7. COOPERAR+COPIA
516 recompenses_A <- recompenses_inicialsA
517 recompenses_B <- recompenses_inicialsB
518
519 simularunavez.CCopia <- function(accions_posiblesA, accions_posiblesB,
    recompenses_A, recompenses_B) {
520   accions_presesA <- character(20)
521   accions_presesB <- character(20)
522   guanyA <- 0
523   guanyB <- 0
524   accio_conjunta <- character(20)
525
526   #Primera iteraci
527   accioA <- accions_posiblesA[1]
528   accioB <- ifelse(runif(1,0,1)<0.5, accions_posiblesB[1], accions_
    possiblesB[2])
529   accions_presesA[1] <- accioA
530   accions_presesB[1] <- accioB
531   accio_conjunta[1] <- paste0(accioA, accioB)
532
533
534   for(i in 2:20){
535     accioA <- accions_posiblesA[1]
536     accioB <- accions_presesA[i-1]
537     accions_presesA[i] <- accioA
538     accions_presesB[i] <- accioB
539     accio_conjunta[i] <- paste0(accioA, accioB)
540
541     if(accio_conjunta[i]=="CC"){
542       guanyA <- guanyA + recompenses_A[1]
543       guanyB <- guanyB + recompenses_B[1]
544

```

```

545     temp <- canvi_recompenses.CC(recompenses_A, recompenses_B)
546     recompenses_A <- temp[[1]]
547     recompenses_B <- temp[[2]]
548   }
549   if(accio_conjunta[i]=="CT"){
550     guanyA <- guanyA + recompenses_A[2]
551     guanyB <- guanyB + recompenses_B[2]
552
553     temp <- canvi_recompenses.CT(recompenses_A, recompenses_B)
554     recompenses_A <- temp[[1]]
555     recompenses_B <- temp[[2]]
556   }
557   if(accio_conjunta[i]=="TC"){
558     guanyA <- guanyA + recompenses_A[3]
559     guanyB <- guanyB + recompenses_B[3]
560
561     temp <- canvi_recompenses.TC(recompenses_A, recompenses_B)
562     recompenses_A <- temp[[1]]
563     recompenses_B <- temp[[2]]
564   }
565   if(accio_conjunta[i]=="TT"){
566     guanyA <- guanyA + recompenses_A[4]
567     guanyB <- guanyB + recompenses_B[4]
568
569     temp <- canvi_recompenses.TT(recompenses_A, recompenses_B)
570     recompenses_A <- temp[[1]]
571     recompenses_B <- temp[[2]]
572   }
573 }
574
575 return(list(guanyA = guanyA, guanyB = guanyB, accio_conjunta = accio_
  conjunta))
576 }
577
578 num_simulaciones <- 10000
579 resultados <- lapply(1:num_simulaciones, function(x) simularunavez.CCopia(
  accions_posiblesA, accions_posiblesB, recompenses_A, recompenses_B))
580
581 guanyA_ColCopia <- sapply(resultados, function(x) x$guanyA)
582 guanyB_ColCopia <- sapply(resultados, function(x) x$guanyB)
583 accio_conjunta_ColCopia <- lapply(resultados, function(x) x$accio_conjunta
  )
584
585
586 #####
587 #8. PESSIMISTA+OPTIMISTA
588 recompenses_A <- recompenses_inicialsA
589 recompenses_B <- recompenses_inicialsB
590
591 simularunavez.PO <- function(accions_posiblesA, accions_posiblesB,
  recompenses_A, recompenses_B) {
592   accions_presesA <- character(20)
593   accions_presesB <- character(20)
594   guanyA <- 0

```

```

595 guanyB <- 0
596 accio_conjunta <- character(20)
597
598 for(i in 1:20){
599     if(recompenses_A[1]==recompenses_inicialsA[1]){
600         accioA <- ifelse(runif(1,0,1)<0.5,accions_possiblesA[1],accions_
        possiblesA[2])
601     }
602     if(recompenses_A[1]<recompenses_inicialsA[1]){
603         accioA <- accions_possiblesA[2]
604     }
605     if(recompenses_A[1]>recompenses_inicialsA[1]){
606         accioA <- accions_possiblesA[1]
607     }
608     if(recompenses_B[1]==recompenses_inicialsB[1]){
609         accioB <- ifelse(runif(1,0,1)<0.5,accions_possiblesB[1],accions_
        possiblesB[2])
610     }
611     if(recompenses_B[1]<recompenses_inicialsB[1]){
612         accioB <- accions_possiblesB[1]
613     }
614     if(recompenses_B[1]>recompenses_inicialsB[1]){
615         accioB <- accions_possiblesB[2]
616     }
617
618     accions_presesA[i] <- accioA
619     accions_presesB[i] <- accioB
620     accio_conjunta[i] <- paste0(accioA,accioB)
621
622     if(accio_conjunta[i]=="CC"){
623         guanyA <- guanyA + recompenses_A[1]
624         guanyB <- guanyB + recompenses_B[1]
625
626         temp <- canvi_recompenses.CC(recompenses_A, recompenses_B)
627         recompenses_A <- temp[[1]]
628         recompenses_B <- temp[[2]]
629     }
630     if(accio_conjunta[i]=="CT"){
631         guanyA <- guanyA + recompenses_A[2]
632         guanyB <- guanyB + recompenses_B[2]
633
634         temp <- canvi_recompenses.CT(recompenses_A, recompenses_B)
635         recompenses_A <- temp[[1]]
636         recompenses_B <- temp[[2]]
637     }
638     if(accio_conjunta[i]=="TC"){
639         guanyA <- guanyA + recompenses_A[3]
640         guanyB <- guanyB + recompenses_B[3]
641
642         temp <- canvi_recompenses.TC(recompenses_A, recompenses_B)
643         recompenses_A <- temp[[1]]
644         recompenses_B <- temp[[2]]
645     }
646     if(accio_conjunta[i]=="TT"){

```

```

647     guanyA <- guanyA + recompenses_A[4]
648     guanyB <- guanyB + recompenses_B[4]
649
650     temp <- canvi_recompenses.TT(recompenses_A, recompenses_B)
651     recompenses_A <- temp[[1]]
652     recompenses_B <- temp[[2]]
653   }
654 }
655
656   return(list(guanyA = guanyA, guanyB = guanyB, accio_conjunta = accio_
    conjunta))
657 }
658
659 num_simulaciones <- 10000
660 resultados <- lapply(1:num_simulaciones, function(x) simularunavez.PO(
    accions_posiblesA, accions_posiblesB, recompenses_A, recompenses_B))
661
662 guanyA_PessimOptim <- sapply(resultados, function(x) x$guanyA)
663 guanyB_PessimOptim <- sapply(resultados, function(x) x$guanyB)
664 accio_conjunta_PessimOptim <- lapply(resultados, function(x) x$accio_
    conjunta)
665
666
667 #####
668 #9. PESSIMISTA+COPIA
669 recompenses_A <- recompenses_inicialsA
670 recompenses_B <- recompenses_inicialsB
671
672 simularunavez.PCopia <- function(accions_posiblesA, accions_posiblesB,
    recompenses_A, recompenses_B) {
673   accions_presesA <- character(20)
674   accions_presesB <- character(20)
675   guanyA <- 0
676   guanyB <- 0
677   accio_conjunta <- character(20)
678
679   #Primera iteraci
680   accioA <- ifelse(runif(1,0,1)<0.5, accions_posiblesA[1], accions_
    possiblesA[2])
681   accioB <- ifelse(runif(1,0,1)<0.5, accions_posiblesB[1], accions_
    possiblesB[2])
682   accions_presesA[1] <- accioA
683   accions_presesB[1] <- accioB
684   accio_conjunta[1] <- paste0(accioA, accioB)
685
686   if(accio_conjunta[1]=="CC"){
687     guanyA <- guanyA + recompenses_A[1]
688     guanyB <- guanyB + recompenses_B[1]
689
690     temp <- canvi_recompenses.CC(recompenses_A, recompenses_B)
691     recompenses_A <- temp[[1]]
692     recompenses_B <- temp[[2]]
693   }
694   if(accio_conjunta[1]=="CT"){

```

```

695   guanyA <- guanyA + recompenses_A[2]
696   guanyB <- guanyB + recompenses_B[2]
697
698   temp <- canvi_recompenses.CT(recompenses_A, recompenses_B)
699   recompenses_A <- temp[[1]]
700   recompenses_B <- temp[[2]]
701 }
702 if(accio_conjunta[1]=="TC"){
703   guanyA <- guanyA + recompenses_A[3]
704   guanyB <- guanyB + recompenses_B[3]
705
706   temp <- canvi_recompenses.TC(recompenses_A, recompenses_B)
707   recompenses_A <- temp[[1]]
708   recompenses_B <- temp[[2]]
709 }
710 if(accio_conjunta[1]=="TT"){
711   guanyA <- guanyA + recompenses_A[4]
712   guanyB <- guanyB + recompenses_B[4]
713
714   temp <- canvi_recompenses.TT(recompenses_A, recompenses_B)
715   recompenses_A <- temp[[1]]
716   recompenses_B <- temp[[2]]
717 }
718
719 for(i in 2:20){
720   if(recompenses_A[1]==recompenses_inicialsA[1]){
721     accioA <- ifelse(runif(1,0,1)<0.5,accions_possiblesA[1],accions_
722     possiblesA[2])
723   }
724   if(recompenses_A[1]<recompenses_inicialsA[1]){
725     accioA <- accions_possiblesA[2]
726   }
727   if(recompenses_A[1]>recompenses_inicialsA[1]){
728     accioA <- accions_possiblesA[1]
729   }
730   accioB <- accions_presesA[i-1]
731   accions_presesA[i] <- accioA
732   accions_presesB[i] <- accioB
733   accio_conjunta[i] <- paste0(accioA,accioB)
734
735   if(accio_conjunta[i]=="CC"){
736     guanyA <- guanyA + recompenses_A[1]
737     guanyB <- guanyB + recompenses_B[1]
738
739     temp <- canvi_recompenses.CC(recompenses_A, recompenses_B)
740     recompenses_A <- temp[[1]]
741     recompenses_B <- temp[[2]]
742   }
743   if(accio_conjunta[i]=="CT"){
744     guanyA <- guanyA + recompenses_A[2]
745     guanyB <- guanyB + recompenses_B[2]
746
747     temp <- canvi_recompenses.CT(recompenses_A, recompenses_B)
748     recompenses_A <- temp[[1]]

```

```

748     recompenses_B <- temp[[2]]
749   }
750   if(accio_conjunta[i]=="TC"){
751     guanyA <- guanyA + recompenses_A[3]
752     guanyB <- guanyB + recompenses_B[3]
753
754     temp <- canvi_recompenses.TC(recompenses_A, recompenses_B)
755     recompenses_A <- temp[[1]]
756     recompenses_B <- temp[[2]]
757   }
758   if(accio_conjunta[i]=="TT"){
759     guanyA <- guanyA + recompenses_A[4]
760     guanyB <- guanyB + recompenses_B[4]
761
762     temp <- canvi_recompenses.TT(recompenses_A, recompenses_B)
763     recompenses_A <- temp[[1]]
764     recompenses_B <- temp[[2]]
765   }
766 }
767
768 return(list(guanyA = guanyA, guanyB = guanyB, accio_conjunta = accio_
  conjunta))
769 }
770
771 num_simulaciones <- 10000
772 resultados <- lapply(1:num_simulaciones, function(x) simularunavez.PCopia(
  accions_posiblesA, accions_posiblesB, recompenses_A, recompenses_B))
773
774 guanyA_PessimCopia <- sapply(resultados, function(x) x$guanyA)
775 guanyB_PessimCopia <- sapply(resultados, function(x) x$guanyB)
776 accio_conjunta_PessimCopia <- lapply(resultados, function(x) x$accio_
  conjunta)
777
778
779
780 #####
781 #10. OPTIMISTA+COPIA
782 recompenses_A <- recompenses_inicialsA
783 recompenses_B <- recompenses_inicialsB
784
785 simularunavez.OCopia <- function(accions_posiblesA, accions_posiblesB,
  recompenses_A, recompenses_B) {
786   accions_presesA <- character(20)
787   accions_presesB <- character(20)
788   guanyA <- 0
789   guanyB <- 0
790   accio_conjunta <- character(20)
791
792   #Primera iteraci
793   accioA <- ifelse(runif(1,0,1)<0.5, accions_posiblesA[1], accions_
     posiblesA[2])
794   accioB <- ifelse(runif(1,0,1)<0.5, accions_posiblesB[1], accions_
     posiblesB[2])
795   accions_presesA[1] <- accioA

```

```

796 accions_presesB[1] <- accioB
797 accio_conjunta[1] <- paste0(accioA, accioB)
798
799 if(accio_conjunta[1]=="CC"){
800   guanyA <- guanyA + recompenses_A[1]
801   guanyB <- guanyB + recompenses_B[1]
802
803   temp <- canvi_recompenses.CC(recompenses_A, recompenses_B)
804   recompenses_A <- temp[[1]]
805   recompenses_B <- temp[[2]]
806 }
807 if(accio_conjunta[1]=="CT"){
808   guanyA <- guanyA + recompenses_A[2]
809   guanyB <- guanyB + recompenses_B[2]
810
811   temp <- canvi_recompenses.CT(recompenses_A, recompenses_B)
812   recompenses_A <- temp[[1]]
813   recompenses_B <- temp[[2]]
814 }
815 if(accio_conjunta[1]=="TC"){
816   guanyA <- guanyA + recompenses_A[3]
817   guanyB <- guanyB + recompenses_B[3]
818
819   temp <- canvi_recompenses.TC(recompenses_A, recompenses_B)
820   recompenses_A <- temp[[1]]
821   recompenses_B <- temp[[2]]
822 }
823 if(accio_conjunta[1]=="TT"){
824   guanyA <- guanyA + recompenses_A[4]
825   guanyB <- guanyB + recompenses_B[4]
826
827   temp <- canvi_recompenses.TT(recompenses_A, recompenses_B)
828   recompenses_A <- temp[[1]]
829   recompenses_B <- temp[[2]]
830 }
831
832 for(i in 2:20){
833   if(recompenses_A[1]==recompenses_inicialsA[1]){
834     accioA <- ifelse(runif(1,0,1)<0.5, accions_possiblesA[1], accions_
835     possiblesA[2])
836   }
837   if(recompenses_A[1]<recompenses_inicialsA[1]){
838     accioA <- accions_possiblesA[1]
839   }
840   if(recompenses_A[1]>recompenses_inicialsA[1]){
841     accioA <- accions_possiblesA[2]
842   }
843   accioB <- accions_presesA[i-1]
844   accions_presesA[i] <- accioA
845   accions_presesB[i] <- accioB
846   accio_conjunta[i] <- paste0(accioA, accioB)
847
848   if(accio_conjunta[i]=="CC"){
849     guanyA <- guanyA + recompenses_A[1]

```

```

849     guanyB <- guanyB + recompenses_B[1]
850
851     temp <- canvi_recompenses.CC(recompenses_A, recompenses_B)
852     recompenses_A <- temp[[1]]
853     recompenses_B <- temp[[2]]
854 }
855 if(accio_conjunta[i]=="CT"){
856     guanyA <- guanyA + recompenses_A[2]
857     guanyB <- guanyB + recompenses_B[2]
858
859     temp <- canvi_recompenses.CT(recompenses_A, recompenses_B)
860     recompenses_A <- temp[[1]]
861     recompenses_B <- temp[[2]]
862 }
863 if(accio_conjunta[i]=="TC"){
864     guanyA <- guanyA + recompenses_A[3]
865     guanyB <- guanyB + recompenses_B[3]
866
867     temp <- canvi_recompenses.TC(recompenses_A, recompenses_B)
868     recompenses_A <- temp[[1]]
869     recompenses_B <- temp[[2]]
870 }
871 if(accio_conjunta[i]=="TT"){
872     guanyA <- guanyA + recompenses_A[4]
873     guanyB <- guanyB + recompenses_B[4]
874
875     temp <- canvi_recompenses.TT(recompenses_A, recompenses_B)
876     recompenses_A <- temp[[1]]
877     recompenses_B <- temp[[2]]
878 }
879 }
880
881 return(list(guanyA = guanyA, guanyB = guanyB, accio_conjunta = accio_
    conjunta))
882 }
883
884 num_simulaciones <- 10000
885 resultados <- lapply(1:num_simulaciones, function(x) simularunavez.OCopia(
    accions_possiblesA, accions_possiblesB, recompenses_A, recompenses_B))
886
887 guanyA_OptimCopia <- sapply(resultados, function(x) x$guanyA)
888 guanyB_OptimCopia <- sapply(resultados, function(x) x$guanyB)
889 accio_conjunta_OptimCopia <- lapply(resultados, function(x) x$accio_
    conjunta)
890
891 #####
892
893 accio_conjunta_unidimensional <- unlist(accio_conjunta_ColPessim)
894 tabla_frecuencias <- table(accio_conjunta_unidimensional)
895 print(tabla_frecuencias)

```

Listing 3: Joc del comerç internacional

```

1 options(scipen=999)
2 set.seed(0123)
3
4 #####
5 alfa <- 0.01
6 x1 <- 10
7 aux <- 0
8 for(i in 1:8){
9   aux <- aux + ((1-alfa)*(1+0.011))^i
10 }
11 guany <- aux
12 guany <- aux*x1
13 guany <- guany + x1
14 guany <- guany*alfa/2
15 x10 <- x1*((1-alfa)*(1+0.011))^9
16 guany <- guany + x10/2
17
18 #####
19
20 ####Canvi en la demanda
21 mu <- 20 # Taxa de creixement determinista
22 sigma <- 1 # Component estocàstica
23
24 # Temps de simulaci
25 temps <- seq(0, 1, by = 0.01)
26
27 # Inicialitzar el vector
28 proces <- numeric(length(temps))
29
30 # Procés de Wiener
31 proces[1] <- 0
32 for (i in 2:length(temps)) {
33   proces[i] <- proces[i - 1] +
34     sigma * sqrt(temps[i] - temps[i - 1]) * rnorm(1)
35 }
36
37 # Iteracions
38 proces[1] <- 1
39 for (i in 2:length(temps)) {
40   proces[i] <- proces[i - 1] + mu * proces[i - 1] * (temps[i] - temps[i -
41     1]) +
42     sigma * proces[i - 1] * sqrt(temps[i] - temps[i - 1]) * rnorm(1)
43 }
44 proces <- 10*proces
45
46 #0. Inicialment
47 accions_possiblesA <- c("AGR","PREC","MIN","ADAP")
48 accions_possiblesB <- c("AGR","PREC","MIN","ADAP")
49 quantitat_inicialA <- 0
50 quantitat_inicialB <- 0
51 quantitat <- numeric(10)
52 quantitat_post <- numeric(10)
53 quantitat[1] <- proces[1]

```

```

54
55 #####
56 #1. ALT+ALT
57 quantitat_A <- quantitat_inicialA
58 quantitat_B <- quantitat_inicialB
59 quantitat_A <- numeric(11)
60 quantitat_B <- numeric(11)
61
62 similarunavez.AA <- function(accions_posiblesA, accions_posiblesB,
63   quantitat) {
64   accions_presesA <- character(10)
65   accions_presesB <- character(10)
66   guanyA <- 0
67   guanyB <- 0
68   accio_conjunta <- character(10)
69
70   for(i in 1:9){
71     accioA <- accions_posiblesA[i]
72     accioB <- accions_posiblesB[i]
73     accions_presesA[i] <- accioA
74     accions_presesB[i] <- accioB
75     accio_conjunta[i] <- paste0(accioA, accioB)
76
77     if(accio_conjunta[i]=="AGRAGR"){
78       guanyA <- (quantitat[i]/2)*0.5
79       guanyB <- (quantitat[i]/2)*0.5
80       quantitat_A[i+1] <- quantitat_A[i] + guanyA
81       quantitat_B[i+1] <- quantitat_B[i] + guanyB
82       quantitat_post[i] <- quantitat[i] - guanyA - guanyB
83     }
84     if(quantitat_post[i]<0.05){
85       quantitat[i+1] <- 0
86     }else{
87       quantitat[i+1] <- quantitat_post[i] + mu * quantitat_post[i] * (
88         temps[i+1] - temps[i]) +
89         sigma * quantitat_post[i] * sqrt(temps[i+1] - temps[i]) * rnorm(1)
90     }
91   }
92   guanyA <- (quantitat[i+1]/2)
93   guanyB <- (quantitat[i+1]/2)
94   quantitat_A[i+2] <- quantitat_A[i+1] + guanyA
95   quantitat_B[i+2] <- quantitat_B[i+1] + guanyB
96   quantitat_post[i+1] <- quantitat[i] - guanyA - guanyB
97   return(list(quantitat_A = quantitat_A, quantitat_B = quantitat_B, accio_
98     conjunta = accio_conjunta, quantitat=quantitat, quantitat_post=
99     quantitat_post))
100 }
101
102 num_simulaciones <- 10
103 resultados <- lapply(1:num_simulaciones, function(x) similarunavez.AA(
104   accions_posiblesA, accions_posiblesB, quantitat))
105 resultados
106
107 suma <- 0

```

```

103 for(i in 1:10){
104   suma <- suma + resultados[[i]]$quantitat_B[11]
105 }
106 suma/10
107
108
109 #####
110 #1. AGRESIVA+AGRESIVA
111 quantitat_A <- numeric(10)
112 quantitat_B <- numeric(10)
113
114 simularunavez.AA <- function(quantitat) {
115
116   for(i in 1:9){
117     guanyA <- (quantitat[i]/2)*1
118     guanyB <- (quantitat[i]/2)*1
119     quantitat_A[i] <- guanyA
120     quantitat_B[i] <- guanyB
121     quantitat_post[i] <- quantitat[i] - guanyA - guanyB
122
123     if(quantitat_post[i]<0.01){
124       quantitat[i+1] <- 0
125     }else{
126       quantitat[i+1] <- quantitat_post[i] + mu * quantitat_post[i] * (
127         temps[i+1] - temps[i]) +
128         sigma * quantitat_post[i] * sqrt(temps[i+1] - temps[i]) * rnorm(1)
129     }
130   }
131   quantitat_A[10] <- quantitat[10]/2
132   quantitat_B[10] <- quantitat[10]/2
133   return(list(quantitat_A = quantitat_A, quantitat_B = quantitat_B,
134             quantitat_A_total = cumsum(quantitat_A), quantitat_B_total =
135             cumsum(quantitat_B),
136             quantitat=quantitat, quantitat_post=quantitat_post))
137 }
138
139 num_simulaciones <- 10
140 resultados <- lapply(1:num_simulaciones, function(x) simularunavez.AA(
141   quantitat))
142
143 mitjana_A_agrgr <- mean(sapply(resultados, function(x) tail(x$quantitat_A
144   _total, 1)))
145 mitjana_B_agrgr <- mean(sapply(resultados, function(x) tail(x$quantitat_B
146   _total, 1)))
147 mitjana_total_agrgr <- mitjana_A_agrgr + mitjana_B_agrgr
148
149 #####
150 #2. AGRESIVA+PRECAVIDA(0.1)
151 quantitat_A <- numeric(10)
152 quantitat_B <- numeric(10)
153
154 simularunavez.AA <- function(quantitat, lambda1_ini, lambda2_ini, lambda1,
155   lambda2) {
156   guanyA <- quantitat[1]*lambda1_ini

```

```

151 guanyB <- quantitat[1]*lambda2_ini
152 quantitat_A[1] <- guanyA
153 quantitat_B[1] <- guanyB
154 quantitat_post[1] <- quantitat[1] - guanyA - guanyB
155
156 if(quantitat_post[1]<0.01){
157   quantitat[2] <- 0
158 }else{
159   quantitat[2] <- quantitat_post[1] + mu * quantitat_post[1] * (temps[2]
160     - temps[1]) +
161     sigma * quantitat_post[1] * sqrt(temps[2] - temps[1]) * rnorm(1)
162 }
163
164 for(i in 2:9){
165   guanyA <- quantitat[i]*lambda1
166   guanyB <- quantitat[i]*lambda2
167   quantitat_A[i] <- guanyA
168   quantitat_B[i] <- guanyB
169   quantitat_post[i] <- quantitat[i] - guanyA - guanyB
170
171   if(quantitat_post[i]<0.01){
172     quantitat[i+1] <- 0
173   }else{
174     quantitat[i+1] <- quantitat_post[i] + mu * quantitat_post[i] * (
175       temps[i+1] - temps[i]) +
176       sigma * quantitat_post[i] * sqrt(temps[i+1] - temps[i]) * rnorm(1)
177   }
178 }
179 quantitat_A[10] <- quantitat[10]/2
180 quantitat_B[10] <- quantitat[10]/2
181
182 return(list(quantitat_A = quantitat_A, quantitat_B = quantitat_B,
183   quantitat_A_total = cumsum(quantitat_A), quantitat_B_total =
184     cumsum(quantitat_B),
185   quantitat=quantitat, quantitat_post=quantitat_post))
186 }
187
188 num_simulaciones <- 100
189
190 #AGRESSIVA+AGRESSIVA
191 resultados <- lapply(1:num_simulaciones, function(x) simularunavez.AA(
192   quantitat, lambda1_ini=0.5, lambda2_ini=0.5, lambda1=0.5, lambda2=0.5))
193 mitjana_A_agragr <- mean(sapply(resultados, function(x) tail(x$quantitat_A
194   _total, 1)))
195 mitjana_B_agragr <- mean(sapply(resultados, function(x) tail(x$quantitat_B
196   _total, 1)))
197 mitjana_total_agragr <- mitjana_A_agragr + mitjana_B_agragr
198
199 #AGRESSIVA+CONSO.1
200 resultados <- lapply(1:num_simulaciones, function(x) simularunavez.AA(
201   quantitat, lambda1_ini=0.5, lambda2_ini=0.1, lambda1=0.5, lambda2=0.1))
202 mitjana_A_agrcons0.1 <- mean(sapply(resultados, function(x) tail(x$
203   quantitat_A_total, 1)))
204 mitjana_B_agrcons0.1 <- mean(sapply(resultados, function(x) tail(x$

```

```

    quantitat_B_total, 1)))
197 mitjana_total_agrcons0.1 <- mitjana_A_agrcons0.1 + mitjana_B_agrcons0.1
198
199 #AGRESSIVA+CONSO.25
200 resultados <- lapply(1:num_simulaciones, function(x) simularunavez.AA(
    quantitat, lambda1_ini=0.5, lambda2_ini=0.25, lambda1=0.5, lambda2
    =0.25))
201 mitjana_A_agrcons0.25 <- mean(sapply(resultados, function(x) tail(x$
    quantitat_A_total, 1)))
202 mitjana_B_agrcons0.25 <- mean(sapply(resultados, function(x) tail(x$
    quantitat_B_total, 1)))
203 mitjana_total_agrcons0.25 <- mitjana_A_agrcons0.25 + mitjana_B_agrcons0.25
204
205 #AGRESSIVA+CONSO.4
206 resultados <- lapply(1:num_simulaciones, function(x) simularunavez.AA(
    quantitat, lambda1_ini=0.5, lambda2_ini=0.4, lambda1=0.5, lambda2=0.4))
207 mitjana_A_agrcons0.4 <- mean(sapply(resultados, function(x) tail(x$
    quantitat_A_total, 1)))
208 mitjana_B_agrcons0.4 <- mean(sapply(resultados, function(x) tail(x$
    quantitat_B_total, 1)))
209 mitjana_total_agrcons0.4 <- mitjana_A_agrcons0.4 + mitjana_B_agrcons0.4
210
211 #AGRESSIVA+MINIMA
212 resultados <- lapply(1:num_simulaciones, function(x) simularunavez.AA(
    quantitat, lambda1_ini=0.5, lambda2_ini=0, lambda1=0.5, lambda2=0))
213 mitjana_A_agrmin <- mean(sapply(resultados, function(x) tail(x$quantitat_A
    _total, 1)))
214 mitjana_B_agrmin <- mean(sapply(resultados, function(x) tail(x$quantitat_B
    _total, 1)))
215 mitjana_total_agrmin <- mitjana_A_agrmin + mitjana_B_agrmin
216
217 #AGRESSIVA+ADAPTAR
218 resultados <- lapply(1:num_simulaciones, function(x) simularunavez.AA(
    quantitat, lambda1_ini=0.5, lambda2_ini=0.49, lambda1=0.5, lambda2
    =0.49))
219 mitjana_A_agrada <- mean(sapply(resultados, function(x) tail(x$quantitat_A
    _total, 1)))
220 mitjana_B_agrada <- mean(sapply(resultados, function(x) tail(x$quantitat_B
    _total, 1)))
221 mitjana_total_agrada <- mitjana_A_agrada + mitjana_B_agrada
222
223
224 #CONSO.1+CONSO.1
225 resultados <- lapply(1:num_simulaciones, function(x) simularunavez.AA(
    quantitat, lambda1_ini=0.1, lambda2_ini=0.1, lambda1=0.1, lambda2=0.1))
226 mitjana_A_cons0.1cons0.1 <- mean(sapply(resultados, function(x) tail(x$
    quantitat_A_total, 1)))
227 mitjana_B_cons0.1cons0.1 <- mean(sapply(resultados, function(x) tail(x$
    quantitat_B_total, 1)))
228 mitjana_total_cons0.1cons0.1 <- mitjana_A_cons0.1cons0.1 + mitjana_B_cons0
    .1cons0.1
229
230 #CONSO.1+CONSO.25
231 resultados <- lapply(1:num_simulaciones, function(x) simularunavez.AA(

```

```

    quantitat, lambda1_ini=0.1, lambda2_ini=0.25, lambda1=0.1, lambda2
    =0.25))
232 mitjana_A_cons0.1cons0.25 <- mean(sapply(resultados, function(x) tail(x$
    quantitat_A_total, 1)))
233 mitjana_B_cons0.1cons0.25 <- mean(sapply(resultados, function(x) tail(x$
    quantitat_B_total, 1)))
234 mitjana_total_cons0.1cons0.25 <- mitjana_A_cons0.1cons0.25 + mitjana_B_
    cons0.1cons0.25
235
236 #CONSO.1+CONSO.4
237 resultados <- lapply(1:num_simulaciones, function(x) simularunavez.AA(
    quantitat, lambda1_ini=0.1, lambda2_ini=0.4, lambda1=0.1, lambda2=0.4))
238 mitjana_A_cons0.1cons0.4 <- mean(sapply(resultados, function(x) tail(x$
    quantitat_A_total, 1)))
239 mitjana_B_cons0.1cons0.4 <- mean(sapply(resultados, function(x) tail(x$
    quantitat_B_total, 1)))
240 mitjana_total_cons0.1cons0.4 <- mitjana_A_cons0.1cons0.4 + mitjana_B_cons0
    .1cons0.4
241
242 #CONSO.1+MINIMA
243 resultados <- lapply(1:num_simulaciones, function(x) simularunavez.AA(
    quantitat, lambda1_ini=0.1, lambda2_ini=0, lambda1=0.1, lambda2=0))
244 mitjana_A_cons0.1min <- mean(sapply(resultados, function(x) tail(x$
    quantitat_A_total, 1)))
245 mitjana_B_cons0.1min <- mean(sapply(resultados, function(x) tail(x$
    quantitat_B_total, 1)))
246 mitjana_total_cons0.1min <- mitjana_A_cons0.1min + mitjana_B_cons0.1min
247
248 #CONSO.1+ADAPTAR
249 resultados <- lapply(1:num_simulaciones, function(x) simularunavez.AA(
    quantitat, lambda1_ini=0.1, lambda2_ini=0.49, lambda1=0.1, lambda2
    =0.89))
250 mitjana_A_cons0.1ada <- mean(sapply(resultados, function(x) tail(x$
    quantitat_A_total, 1)))
251 mitjana_B_cons0.1ada <- mean(sapply(resultados, function(x) tail(x$
    quantitat_B_total, 1)))
252 mitjana_total_cons0.1ada <- mitjana_A_cons0.1ada + mitjana_B_cons0.1ada
253
254
255 #CONSO.25+CONSO.25
256 resultados <- lapply(1:num_simulaciones, function(x) simularunavez.AA(
    quantitat, lambda1_ini=0.25, lambda2_ini=0.25, lambda1=0.25, lambda2
    =0.25))
257 mitjana_A_cons0.25cons0.25 <- mean(sapply(resultados, function(x) tail(x$
    quantitat_A_total, 1)))
258 mitjana_B_cons0.25cons0.25 <- mean(sapply(resultados, function(x) tail(x$
    quantitat_B_total, 1)))
259 mitjana_total_cons0.1cons0.25 <- mitjana_A_cons0.25cons0.25 + mitjana_B_
    cons0.25cons0.25
260
261 #CONSO.25+CONSO.4
262 resultados <- lapply(1:num_simulaciones, function(x) simularunavez.AA(
    quantitat, lambda1_ini=0.25, lambda2_ini=0.4, lambda1=0.25, lambda2
    =0.4))

```

```

263 mitjana_A_cons0.25cons0.4 <- mean(sapply(resultados, function(x) tail(x$
    quantitat_A_total, 1)))
264 mitjana_B_cons0.25cons0.4 <- mean(sapply(resultados, function(x) tail(x$
    quantitat_B_total, 1)))
265 mitjana_total_cons0.25cons0.4 <- mitjana_A_cons0.25cons0.4 + mitjana_B_
    cons0.25cons0.4
266
267 #CONSO.25+MINIMA
268 resultados <- lapply(1:num_simulaciones, function(x) simularunavez.AA(
    quantitat, lambda1_ini=0.25, lambda2_ini=0, lambda1=0.25, lambda2=0))
269 mitjana_A_cons0.25min <- mean(sapply(resultados, function(x) tail(x$
    quantitat_A_total, 1)))
270 mitjana_B_cons0.25min <- mean(sapply(resultados, function(x) tail(x$
    quantitat_B_total, 1)))
271 mitjana_total_cons0.25min <- mitjana_A_cons0.25min + mitjana_B_cons0.25min
272
273 #CONSO.25+ADAPTAR
274 resultados <- lapply(1:num_simulaciones, function(x) simularunavez.AA(
    quantitat, lambda1_ini=0.25, lambda2_ini=0.49, lambda1=0.25, lambda2
    =0.74))
275 mitjana_A_cons0.25ada <- mean(sapply(resultados, function(x) tail(x$
    quantitat_A_total, 1)))
276 mitjana_B_cons0.25ada <- mean(sapply(resultados, function(x) tail(x$
    quantitat_B_total, 1)))
277 mitjana_total_cons0.25ada <- mitjana_A_cons0.25ada + mitjana_B_cons0.25ada
278
279
280 #CONSO.4+CONSO.4
281 resultados <- lapply(1:num_simulaciones, function(x) simularunavez.AA(
    quantitat, lambda1_ini=0.4, lambda2_ini=0.4, lambda1=0.4, lambda2=0.4))
282 mitjana_A_cons0.4cons0.4 <- mean(sapply(resultados, function(x) tail(x$
    quantitat_A_total, 1)))
283 mitjana_B_cons0.4cons0.4 <- mean(sapply(resultados, function(x) tail(x$
    quantitat_B_total, 1)))
284 mitjana_total_cons0.4cons0.4 <- mitjana_A_cons0.4cons0.4 + mitjana_B_cons0
    .4cons0.4
285
286 #CONSO.4+MINIMA
287 resultados <- lapply(1:num_simulaciones, function(x) simularunavez.AA(
    quantitat, lambda1_ini=0.4, lambda2_ini=0, lambda1=0.4, lambda2=0))
288 mitjana_A_cons0.4min <- mean(sapply(resultados, function(x) tail(x$
    quantitat_A_total, 1)))
289 mitjana_B_cons0.4min <- mean(sapply(resultados, function(x) tail(x$
    quantitat_B_total, 1)))
290 mitjana_total_cons0.4min <- mitjana_A_cons0.4min + mitjana_B_cons0.4min
291
292 #CONSO.4+ADAPTAR
293 resultados <- lapply(1:num_simulaciones, function(x) simularunavez.AA(
    quantitat, lambda1_ini=0.4, lambda2_ini=0.49, lambda1=0.4, lambda2
    =0.59))
294 mitjana_A_cons0.4ada <- mean(sapply(resultados, function(x) tail(x$
    quantitat_A_total, 1)))
295 mitjana_B_cons0.4ada <- mean(sapply(resultados, function(x) tail(x$
    quantitat_B_total, 1)))

```

```

296 mitjana_total_cons0.4ada <- mitjana_A_cons0.4ada + mitjana_B_cons0.4ada
297
298
299 #MINIMA+MINIMA
300 resultados <- lapply(1:num_simulaciones, function(x) simularunavez.AA(
      quantitat, lambda1_ini=0, lambda2_ini=0, lambda1=0, lambda2=0))
301 mitjana_A_minmin <- mean(sapply(resultados, function(x) tail(x$quantitat_A
      _total, 1)))
302 mitjana_B_minmin <- mean(sapply(resultados, function(x) tail(x$quantitat_B
      _total, 1)))
303 mitjana_total_minmin <- mitjana_A_minmin + mitjana_B_minmin
304
305 #MINIMA+ADAPTAR
306 resultados <- lapply(1:num_simulaciones, function(x) simularunavez.AA(
      quantitat, lambda1_ini=0, lambda2_ini=0.49, lambda1=0, lambda2=0.99))
307 mitjana_A_minada <- mean(sapply(resultados, function(x) tail(x$quantitat_A
      _total, 1)))
308 mitjana_B_minada <- mean(sapply(resultados, function(x) tail(x$quantitat_B
      _total, 1)))
309 mitjana_total_minada <- mitjana_A_minada + mitjana_B_minada
310
311
312 #ADAPTAR+ADAPTAR
313 resultados <- lapply(1:num_simulaciones, function(x) simularunavez.AA(
      quantitat, lambda1_ini=0.49, lambda2_ini=0.49, lambda1=0.5, lambda2
      =0.5))
314 mitjana_A_adaada <- mean(sapply(resultados, function(x) tail(x$quantitat_A
      _total, 1)))
315 mitjana_B_adaada <- mean(sapply(resultados, function(x) tail(x$quantitat_B
      _total, 1)))
316 mitjana_total_adaada <- mitjana_A_adaada + mitjana_B_adaada
317
318 # Gr fic amb quantitat de recurs
319 plot(seq(0.5,10,by=0.5),c(rbind(as.vector(resultados[[100]]$quantitat),as.
      vector(resultados[[100]]$quantitat_post))),
320      ylim=c(-2,50), main="Evoluci de la quantitat de recurs", xlab="
      Temps", ylab="Quantitat")
321 axis(1, at=c(1:10))
322
323 guanyA_ColCol <- sapply(resultados, function(x) x$guanyA)
324 guanyB_ColCol <- sapply(resultados, function(x) x$guanyB)
325 accio_conjunta_ColCol <- lapply(resultados, function(x) x$accio_conjunta)

```

Listing 4: Joc de l'explotació del recurs comú