

Grau en Estadística

Títol: Modelització i anàlisi de les prediccions d'Alexandre Deulofeu

Autor: Nil Fortuny Garrido

Director: Marcelino García Solera

Departament: Econometria, Estadística i Economia Aplicada

Convocatòria: Juny 2024



UNIVERSITAT DE
BARCELONA



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH

Facultat de Matemàtiques i Estadística

Resum

Aquest treball de final de grau se centra en l'anàlisi estadística de la durada dels imperis al llarg de la història, amb les prediccions formulades per Alexandre Deulofeu. Deulofeu va proposar una teoria cíclica de la història basada en l'evolució dels imperis, suggerint que aquests passen per fases predeterminades amb una durada específica. Per validar aquesta teoria, s'ha realitzat una anàlisi descriptiva de diverses variables recollides, com l'àrea, la població o les durades de les diferents fases dels imperis.

El treball es divideix en diverses seccions. La primera secció introdueix la teoria de Deulofeu i en presenta les hipòtesis que es volen verificar. Es descriu la metodologia emprada i es procedeix en l'anàlisi de les variables.

Aquesta part s'inicia amb l'anàlisi descriptiva. S'han usat diverses tècniques estadístiques per examinar les distribucions de les variables d'interès, així com gràfics i taules. Amb això, s'ha analitzat el comportament de les variables a utilitzar, trobant patrons de comportament, valors atípics i altres suposicions a tenir en compte.

Posteriorment, el treball es focalitza en el desenvolupament de models estadístics per predir la durada dels imperis. S'han utilitzat fins a quatre models de regressió lineal i un model de predicció. Els quatre models de regressió tenen finalitats explicatives envers a cada fase imperial. Amb aquests es buscava poder donar explicació a què provocava que unes fases duressin més que unes altres. L'altre model, el predictiu, serveix per a fer les prediccions de la durada total. A partir de les dades usades, doncs, permet predir quan durarà un imperi qualsevol ponderant aquelles variables de més importància.

Els resultats mostren que, tot i que es partia amb unes dades molt limitades, s'han trobat evidències que suporten la hipòtesi de Deulofeu dels cicles històrics. No obstant això, les limitacions del treball, amb pocs registres, així com una selecció de variables primària degut a les limitacions de temps, provoquen que les prediccions i anàlisis fetes només expliquin una petita part de totes aquelles variables que influeixen la durada dels imperis.

En conclusió, aquest treball final de grau ha estat capaç d'analitzar les prediccions de Deulofeu. Prediccions, algunes de les quals es van fer fa 80 anys, que, a dia d'avui i després d'aquest treball, segueixen tenint una increïble força de exactitud matemàtica. En cinc paraules: la matemàtica de la història.

PARAULES CLAU

- Anàlisi descriptiva
- Durada dels imperis
- Fases imperials
- Màxima expansió territorial
- Onada imperialista
- Variables històriques
- Models estadístics
- Prediccions
- Validació de models
- Estadística predictiva

Abstract

This final degree project focuses on the statistical analysis of the duration of empires throughout history, with the predictions made by Alexandre Deulofeu. Deulofeu proposed a cyclical theory of history based on the evolution of empires, suggesting that empires go through predetermined phases with a specific duration. To validate this theory, a descriptive analysis has been carried out of several variables collected, such as area, population or the durations of the different phases of empires.

The work is divided into several sections. The first section introduces Deulofeu's theory and presents the hypotheses to be verified. The methodology used is described and the variables are analyzed.

This part begins with descriptive analysis. Various statistical techniques have been used to examine the distributions of the variables of interest, as well as graphs and tables. With this, the behavior of the variables to be used has been analyzed, finding behavior patterns, outliers and other assumptions to be taken into account.

Subsequently, the work focuses on the development of statistical models to predict the duration of empires. Up to four linear regression models and one prediction model have been used. The four regression models have explanatory purposes for each imperial phase. With these, the aim was to explain what caused some phases to last longer than others. The other model, the predictive model, is used to make predictions of the total duration. From the data used, therefore, it allows us to predict how long any empire will last by weighting those variables of greater importance.

The results show that, although the starting point was very limited data, evidence has been found that supports Deulofeu's hypothesis of historical cycles. However, the limitations of the work, with few records, as well as a primary selection of variables due to time constraints, mean that the predictions and analyses made only explain a small part of all those variables that influence the duration of empires.

In conclusion, this final degree project has been able to analyze Deulofeu's predictions. Predictions, some of which were made 80 years ago, which, to this day and after this work, continue to have an incredible strength of mathematical accuracy. In four words: the mathematics of history.

KEYWORDS

- Descriptive analysis
- Duration of empires
- Imperial phases
- Maximum territorial expansion
- Imperialist wave
- Historical variables
- Statistical models
- Predictions
- Model validation
- Predictive statistics

Classificació AMS (MSC2010)

62-07: Estudi i ensenyament de l'estadística

62H12: Estimacions

62J05: Models lineals i generalitzacions (models de regressió lineal)

91D10: Models de societats, evolució social i urbana

91D20: Geografia i demografia matemàtica

91F10: Història i ciències polítiques

62N86: Anàlisi de supervivència i dades censurades

62N01: Models de dades censurades

Sumari

I.	INTRODUCCIÓ	2
II.	METODOLOGIA	3
III.	COS DEL TREBALL	5
	3.1. Obtenció de les dades	5
	3.2. Anàlisi descriptiva	11
	3.2.1. Durada dels imperis	11
	3.2.2. Fases imperials.....	13
	3.2.3. Any de màxima expansió territorial.....	14
	3.2.4. Onada imperialista	15
	3.2.5. Àrea.....	15
	3.2.6. Població.....	17
	3.2.7. Densitat de població.....	18
	3.2.8. Coordenades.....	19
	3.2.9. Sortida al mar	21
	3.3. Models estadístics.....	22
	3.3.1. Model explicatiu per a la 1a fase	22
	3.3.2. Model explicatiu per a la 2a fase	23
	3.3.3. Model explicatiu per a la 3a fase	25
	3.3.4. Model explicatiu per a la 4a fase	25
	3.3.5. Model predictiu.....	26
IV.	CONCLUSIONS	30
V.	BIBLIOGRAFIA.....	32
VI.	ANNEXES	33

I. INTRODUCCIÓ

L'obra d'Alexandre Deulofeu es va basar en l'estudi dels cicles que segueixen les civilitzacions. Entre els seus escrits, recull que tots els conjunts de poblacions humanes, les civilitzacions, passen per uns cicles. I dins d'aquests cicles, hi consten d'altres, que es van succeint indefinidament fins que es torna al punt inicial. Concretament, segons va concloure, cada civilització ocupa una franja de 5.100 anys, dividits en tres períodes de 1.700 cadascun. Dins d'aquests períodes encara s'hi troben dues subdivisions més, una de 650 i una altra 1.050 anys. I és en aquesta última on s'hi troben les formes imperials, aquelles fases on la civilització pren forma imperial i sotmet els pobles adjacents. Aquest treball, doncs, se centrarà en l'anàlisi d'aquestes etapes imperials. Es partirà de la hipòtesi plantejada per Deulofeu sobre que els imperis tenen una durada mitjana de 550 anys i se n'estudiarà la veracitat així com les causes i efectes.

Segons Deulofeu, les fases dels imperis són les següents:

- Fase del primer procés agressiu: Aquesta fase és marcada per l'expansió territorial inicial i les conquestes agressives per establir el poder de l'imperi.
- Fase de depressió: L'imperi experimenta una crisi o estancament, amb conflictes interns i dificultats econòmiques.
- Fase del segon procés agressiu i fase de plenitud imperial: L'imperi recupera la seva força i expansió, assolint el seu apogeu en termes de poder i influència.
- Fase de decadència i desaparició: Comença el declivi amb pèrdua de territoris, inestabilitat interna i eventual desaparició de l'imperi.

Així doncs, aquest estudi se centra en analitzar les principals prediccions descrites per l'historiador i matemàtic Alexandre Deulofeu, i assolir un model predictiu a partir d'aquestes. La idea del treball és la d'estudiar el grau de fiabilitat sobre la teoria de duració dels imperis. Es vol, doncs, cercar què pot influenciar aquesta durada a partir de variables potencials i mitjançant mètodes estadístics. I a posteriori, l'obtenció d'un model capaç de predir nous registres.

Els objectius són els següents:

1. Estudiar la validesa de les prediccions d'Alexandre Deulofeu
2. Estudiar si les previsions segueixen un cert modelatge
3. Elaboració d'un model predictiu a partir d'eines estadístiques
4. Implementació del model

II. METODOLOGIA

L'objectiu d'aquest estudi és el d'analitzar i modelitzar les prediccions fetes per Alexandre Deulofeu. En base això, per a la correcta realització d'aquestes anàlisis i modelatges s'ha seguit una estricta metodologia que ha constatat dels següents punts:

1. Recopilació de les dades

Primer s'ha començat per la recollida de les dades. Aquesta, desenvolupada més endavant al punt 3.1., ha estat una tasca minuciosa. S'han recollit un total de 200 dades, en relació a fonts històriques. Si ja és complicat trobar dades de fa 100 anys, edat de les més recents requerides, les de fa 3.000 anys és extremadament complex. S'han realitzat inferències, interpolacions, estimacions d'àrea, de població, fins i tot s'han argumentat possibles solucions a dades indesxifrables. I per davant de tot, sempre s'han recollit buscant la màxima rigorositat, cercant dades coherents amb el grau més alt de veracitat i exactitud, i sempre assegurant la fiabilitat de les fonts consultades.

Així doncs, gairebé per a cada dada s'ha hagut d'usar un mètode diferent. En l'annex corresponent a les taules 3.3. i 3.5. queden recollides i detallades tota la metodologia emprada per aquesta secció.

Les dades, a més, han estat emmagatzemades en un repositori de Github, des d'on han estat cridades a l'R. En aquest repositori també hi consta una explicació de totes les variables a través d'un fitxer README.

2. Anàlisi de les dades

Obtingudes les dades, s'han analitzat per a observar el comportament que presentaven. En aquest apartat és on ha tingut lloc l'anàlisi descriptiva. S'han examinat les distribucions seguides per cadascuna de les variables, així com la detecció d'outliers i altres consideracions que poguessin afectar posteriorment a l'apartat de modelatge. Cada variable, doncs, ha estat estudiada en profunditat, i en alguns casos conjuntament amb una o fins a dues variables més.

3. Creació dels models

La creació de models buscava respondre a la qüestió inicial, sobre analitzar i modelar les prediccions de Deulofeu. En total s'han realitzat fins a 4 models de regressió múltiple, models que serveixin per a explicar cadascun dels processos imperials descrits. L'objectiu d'aquests no era cap altre que el de buscar quines variables influïen en la durada de cada fase. A més els explicatius, l'altre objectiu és el de modelitzar les prediccions, és a dir, trobar un model que

respongui a aquestes prediccions. Per tant, s'ha creat un altre model apart amb finalitats predictives. Per a aquest, s'ha usat la regressió de Cox, una de les modalitats de regressió de supervivència per aquells casos que es busca modelitzar el temps de durada de certa cosa fins a cert esdeveniment. En aquest cas es tracta de la durada imperial fins l'esdeveniment de l'any final, la mort imperial.

4. Validació dels models

Un cop creats els models, aquests han de ser validats. Per a cada model de regressió múltiple, s'ha seguit la següent enumeració:

1. Ajustar un model amb la variable a imputar com a independent i la resta de desitjades de dependents
2. Model significatiu
3. Normalitat dels residus (gràfic Q-Q i test de Shapiro-Wilk)
4. Linealitat i homoscedasticitat (gràfic dels residus i test de Bresuch-Pagan)
5. Independència dels residus (test de Durbin-Watson)
6. Multicol·linealitat (VIF)
7. Valors influents (gràfic de la distància de Cook)

En cas de fallida d'algun d'aquests punts, cal analitzar el motiu pel qual no hi ha hagut èxit, prendre decisions respecte a l'especificitat del problema i reespecificar el model. Llavors, tornar al punt 1. Un cop assolit el punt 7 havent-ne culminat la resta, el model es dona per validat.

5. Implementació dels models

Validats els models, aquests ja són aptes per a ser implementats. I amb aquesta implementació que s'han obtingut uns resultats, resultats que han servit per a respondre totes les qüestions inicials plantejades i, per tant, resultats amb els quals s'ha conclòs la realització d'aquest treball.

III. COS DEL TREBALL

3.1. Obtenció de les dades

L'obtenció de les dades ha estat una tasca laboriosa. Es partia únicament d'una taula amb les dates corresponents a les diferents fases d'un imperi, però la manca d'una informació predisposada per a cadascun dels imperis ha provocat que aquesta base de dades hagi hagut de ser creada des de zero. Per a cadascun dels imperis s'ha buscat i trobat informació per a un total de 10 variables. I el nombre total d'imperis és de 20, pel qual s'han hagut de cercar, doncs, fins a 200 valors de variables corresponents a diferents èpoques històriques. Així doncs, la recopilació de les dades ha estat una de les tasques més exhaustives. Les dades més antigues a trobar són de fa gairebé 3.000 anys i les més recents de fa uns 100 anys. És, doncs, un ampli ventall en el qual s'ha hagut de consultar una immensa quantitat de fonts.

Inicialment, es partia de la Taula 3.1., en la qual apareixen les prediccions de Deulofeu tabulades. Un total de vint imperis amb les seves respectives prediccions dels cicles imperials. També hi consta la durada total d'aquells imperis que ja han finalitzat el procés. I addicionalment una variable indicadora de si l'imperi pertany a la primera onada imperialista o bé a la segona.

Taula 3.1. Cicles i prediccions dels vint imperis¹

ID	IMPERI	ANY1	ANY2	ANY3	ANY4	ANY5	TOTAL	ONA
1	Persa	-835	-733	-521	-490	-331	504	1
2	Cartaginès	-650	-264	-237	-202	-146	504	1
3	Macedònic	-700	-500	-423	-323	-146	554	1
4	Romà	-270	-129	-58	-16	305	575	1
5	Got	150	300	401	507	713	563	1
6	Franc	250	561	626	815	843	593	1
7	Bizantí	500	578	717	1018	1081	581	1
8	Teutònic	800	911	936	1056	1300	500	1
9	Viking	850	1050	1150	1350	1400	550	1
10	Danès	900	1103	1150	1227	1475	575	1
11	Polonès	1025	1227	1306	1572	1609	584	1

¹ Les dades de la Taula 3.1. han estat extretes de: <http://www.deulofeu.org/quadre-dels-imperis/>.

12	Lituà	1000	1260	1316	1380	1500	500	1
13	O. Teutònic	1000	1410	1422	1454	1525	525	1
14	Moscovita	1450	1580	1645	1805	1991 ²	541	1
15	Turc	1250	1400	1422	1572	1839	589	2
16	Austríac	1437	1700	1813	1866	1918	481	2
17	Espanyol	1479	1643	1706	1759	NA	NA	2
18	Francès	1594	1697	1793	1939	NA	NA	2
19	Anglès	1607	1783	1800	1950	NA	NA	2
20	Alemanys	1800	1918	1935	NA	NA	NA	2

Taula 3.2. Definició de les variables I

Variable	Definició
ID	Nombre identificatiu de l'imperi.
IMPERI	Nom de l'imperi.
ANY1	Any d'inici de l'imperi / Any d'inici de la fase "Primer procés agressiu".
ANY2	Any final de la fase "Primer procés agressiu" / Any d'inici de la fase "Depressió".
ANY3	Any final de la fase "Depressió" / Any d'inici de la fase "Segon procés agressiu i plenitud".
ANY4	Any final de la fase "Segon procés agressiu i plenitud" / Any d'inici de la fase "Decadència i desaparició".
ANY5	Any final de la fase "Decadència i desaparició" / Any de desaparició de l'imperi.
TOTAL	Durada total (anys) de l'imperi.
ONA	Variable categòrica binària que pren per valor "1" si l'imperi pertany a la primera onada imperialista i "2" si pertany a la segona.

Variables demogràfica-expansives

A partir d'aquestes dades, calia pensar en aquelles variables que poguessin influir en la durada d'aquests cicles i, consegüentment, en la durada total dels imperis. Una de les primeres variables sorgides va ser l'àrea que cobreix cada imperi. Un imperi és anomenat com a tal com a conseqüència d'una àrea en expansió. Per tant, l'àrea de cada imperi havia de ser recollida. Però bé, els imperis evolucionen i no sempre cobreixen la mateixa superfície. De fet, aquest estudi mateix es basa en les anàlisis dels imperis que en va fer Deulofeu, el qual per a tots en pronosticà un final. Alguns s'han complert, d'altres no, però sembla lògic pensar que tots els

² Any en blanc degut a que l'estudi va ser anterior. La imputació s'ha obtingut a través de: <https://history.state.gov/milestones/1989-1992/collapse-soviet-union>.

imperis neixen, creixen/es reproduïxen i moren. Per tant, quan no hi ha imperi, l'àrea imperial és zero. Això succeeix tant en el principi com en el final, i és durant la existència de l'imperi quan es donen aquestes fluctuacions d'àrea. Però com que l'estudi té limitacions de temps, la recollida de l'àrea per a cada cicle imperial presentat era una tasca massa longeva, pel que s'ha reduït a dos moments particulars. Per una banda, en l'any inicial, l'any de naixement de l'imperi. I per l'altra en el moment on l'imperi assoleix la seva màxima expansió territorial. Aquests han estat els dos punts on s'ha cregut que l'àrea podia tenir un major pes.

I si bé en l'àrea inicial estava clar en quin període es buscava (l'ANY1), per a l'àrea màxima calia definir un any de màxima expansió territorial. Així que per a aconseguir l'àrea màxima, abans calia definir i cercar quan es donava aquest any. Així mateix, a més de l'àrea també s'ha considerat la recollida de valors per a la població. De nou, calia pensar en quin període de l'imperi cercar aquests valors, però la resposta ja venia donada per l'àrea: en l'inicial i en el de màxima expansió. D'aquesta manera, es permetia crear encara dues variables més que servissin per a ponderar la relació entre àrea i població. Amb la creació de les densitats de població, els imperis més extensos esdevenien comparables amb els de menys superfície.

A la Taula 3.3. apareix el primer conjunt de variables imputades. Les variables de densitat han estat creades posteriorment en l'estudi pel que no consten part del full de dades.

Taula 3.3. Variables demogràfica-expansives

ID	AREA_1	AREA_ME	POBL_1	POBL_ME	ANY_ME
1	0.0271 ¹	5.5000 ²	0.500 ³	49.456 ⁴	-500 ⁵
2	0.0003 ⁶	0.3000 ⁷	0.007 ⁸	2.800 ⁹	-220 ¹⁰
3	0.0013 ¹¹	5.2000 ¹²	0.010 ¹³	25.946 ¹⁴	-323 ¹⁵
4	0.2400 ¹⁶	5.0000 ¹⁷	1.168 ¹⁸	70.788 ¹⁹	117 ²⁰
5	0.0047 ²¹	0.6562 ²²	0.010 ²³	5.279 ²⁴	476 ²⁵
6	0.0463 ²⁶	1.1120 ²⁷	0.225 ²⁸	15.012 ²⁹	814 ³⁰
7	1.9000 ³¹	2.7000 ³²	18.116 ³³	21.906 ³⁴	555 ³⁵
8	0.5313 ³⁶	1.0000 ³⁷	4.417 ³⁸	11.000 ³⁹	1050 ⁴⁰
9	0.8082 ⁴¹	1.8876 ⁴²	0.925 ⁴³	4.388 ⁴⁴	1033 ⁴⁵
10	0.0430 ⁴⁶	0.1379 ⁴⁷	0.675 ⁴⁸	1.000 ⁴⁹	1219 ⁵⁰
11	0.2792 ⁵¹	0.5738 ⁵²	1.250 ⁵³	6.085 ⁵⁴	1569 ⁵⁵
12	0.0421 ⁵⁶	0.9300 ⁵⁷	0.048 ⁵⁸	2.480 ⁵⁹	1430 ⁶⁰
13	0.0100 ⁶¹	0.1770 ⁶²	0.007 ⁶³	0.177 ⁶⁴	1410 ⁶⁵

14	0.4177 ⁶⁶	23.0000 ⁶⁷	5.000 ⁶⁸	147.456 ⁶⁹	1905 ⁷⁰
15	0.0100 ⁷¹	5.2000 ⁷²	0.087 ⁷³	23.900 ⁷⁴	1683 ⁷⁵
16	0.1291 ⁷⁶	1.8096 ⁷⁷	2.394 ⁷⁸	24.000 ⁷⁹	1804 ⁸⁰
17	0.5156 ⁸¹	14.0000 ⁸²	6.165 ⁸³	26.500 ⁸⁴	1800 ⁸⁵
18	0.4531 ⁸⁶	15.0000 ⁸⁷	18.500 ⁸⁸	39.240 ⁸⁹	1920 ⁹⁰
19	0.1511 ⁹¹	34.0000 ⁹²	4.400 ⁹³	439.965 ⁹⁴	1919 ⁹⁵
20	0.5409 ⁹⁶	3.1990 ⁹⁷	16.013 ⁹⁸	79.579 ⁹⁹	1914 ¹⁰⁰

Taula 3.4. Definició de les variables II

Variable	Definició
ID	Nombre identificatiu de l'imperi.
AREA_1	Àrea (milions de km ²) inicial de l'imperi
AREA_ME	Àrea (milions de km ²) que assoleix l'imperi en l'any de màxima expansió territorial.
POBL_1	Població (milions d'habitants) inicial de l'imperi.
POBL_ME	Població (milions d'habitants) de l'imperi en l'any de màxima expansió territorial.
ANY_ME	Any de màxima expansió territorial.

Variables de localització

Tenint l'àrea i la població, també s'ha cregut útil l'obtenció de variables localitzadores. Variables que indiquessin el punt geogràfic on es trobessin els imperis. Deulofeu parlà de fins a dues onades imperialistes; onades que provocaven que els pobles veïns també adaptessin les formes imperials. Per tant, s'impregnaven d'imperialitat només aquelles comunitats que havien mantingut contacte amb algun imperi. Això n'indica, doncs, l'existència d'un factor d'ubicació. Però la localització d'un imperi és molt complex de recollir. A més, com s'ha esmentat en l'apartat de "Variables demogràfica-expansives", els imperis evolucionen, i no sempre mantenen la mateixa àrea. Per tant, calia un punt immòbil, un punt que estigués sempre estable all llarg de l'imperi. I aquest punt, no podia ser altre que la capital, el centre de l'imperi. Però de nou sorgia un problema en la recollida de dades. Molts imperis en el moment de constituir-se no presenten una capital. En el moment inicial n'hi ha alguns que són fruit d'unions dinàstiques, mentre que d'altres formen tot just un conjunt de pobles que acabarà per unificar-se. I en molts casos hi mancava aquesta capital inicial. La solució, doncs, passava per recollir la capital en el moment de màxima expansió territorial.

Si bé prenent les coordenades de la capital en el moment de màxima expansió imperial hom pot pensar que es perd certa informació sobre la localització inicial, la realitat és que en molts casos,

la capital s'inclou en l'àrea de naixement de l'imperi. I en els que no, és força propera a aquesta superfície inicial. Per tant, també és d'utilitat per aquest període de l'imperi. I obtingudes les coordenades, es volia obtenir encara una altra variable relacionada amb la sortida al mar. Degut a que tots els imperis van controlar certa àrea de costa en algun moment del seu transcurs, una manera d'incloure aquesta característica era en la pròpia capital. Observar, doncs, si existeixen diferències per aquells imperis on la seva capital tenia sortida al mar i per a aquells que no.

A la Taula 3.5. apareixen les variables recollides descrites anteriorment.

Taula 3.5. Variables de localització

ID	CAP	LAT	LON	ALT	MAR
1	Persèpolis ¹	29.93 ²	52.89 ³	1634 ⁴	0 ⁵
2	Cartago ⁶	36.86 ⁷	10.33 ⁸	9 ⁹	1 ¹⁰
3	Pel·la ¹¹	40.76 ¹²	22.53 ¹³	46 ¹⁴	1 ¹⁵
4	Roma ¹⁶	41.89 ¹⁷	12.51 ¹⁸	78 ¹⁹	0 ²⁰
5	Tolosa de Llenguadoc ²¹	43.60 ²²	1.44 ²³	155 ²⁴	0 ²⁵
6	Aquisgrà ²⁶	50.78 ²⁷	6.08 ²⁸	225 ²⁹	0 ³⁰
7	Istanbul ³¹	41.01 ³²	28.95 ³³	57 ³⁴	1 ³⁵
8	Aquisgrà ³⁶	50.78 ³⁷	6.08 ³⁸	225 ³⁹	0 ⁴⁰
9	Trondheim ⁴¹	63.43 ⁴²	10.40 ⁴³	192 ⁴⁴	1 ⁴⁵
10	Roskilde ⁴⁶	55.64 ⁴⁷	12.08 ⁴⁸	25 ⁴⁹	1 ⁵⁰
11	Cracòvia ⁵¹	50.06 ⁵²	19.94 ⁵³	258 ⁵⁴	0 ⁵⁵
12	Vilnius ⁵⁶	54.69 ⁵⁷	25.28 ⁵⁸	162 ⁵⁹	0 ⁶⁰
13	Malbork ⁶¹	54.04 ⁶²	19.03 ⁶³	17 ⁶⁴	0 ⁶⁵
14	Sant Petersburg ⁶⁶	59.94 ⁶⁷	30.31 ⁶⁸	17 ⁶⁹	1 ⁷⁰
15	Istanbul ⁷¹	41.01 ⁷²	28.95 ⁷³	57 ⁷⁴	1 ⁷⁵
16	Viena ⁷⁶	48.21 ⁷⁷	16.37 ⁷⁸	231 ⁷⁹	0 ⁸⁰
17	Madrid ⁸¹	40.42 ⁸²	-3.70 ⁸³	650 ⁸⁴	0 ⁸⁵
18	París ⁸⁶	48.85 ⁸⁷	2.35 ⁸⁸	62 ⁸⁹	0 ⁹⁰
19	Londres ⁹¹	51.51 ⁹²	-0.13 ⁹³	42 ⁹⁴	0 ⁹⁵
20	Berlin ⁹⁶	52.52 ⁹⁷	13.41 ⁹⁸	47 ⁹⁹	0 ¹⁰⁰

Taula 3.6. Definició de les variables III

Variable	Definició
ID	Nombre identificatiu de l'imperi.
CAP	Nom de la capital de l'imperi en l'any de màxima expansió territorial.
LAT	Latitud de la capital de l'imperi en l'any de màxima expansió territorial.
LON	Latitud de la capital de l'imperi en l'any de màxima expansió territorial.
ALT	Latitud de la capital de l'imperi en l'any de màxima expansió territorial.
MAR	Variable categòrica binària que pren per valor "0" si la capital no té sortida al mar i "1" si sí que en té.

Totes aquestes dades han estat recollides en un document .xlsx, el qual ha estat emmagatzemat en un repositori creat al Github. A més, també ha estat creat un document .README amb l'explicació de les variables tant en català com en anglès. L'enllaç per accedir-hi és:

<https://github.com/Nil42NY/Data-empires/tree/main>.

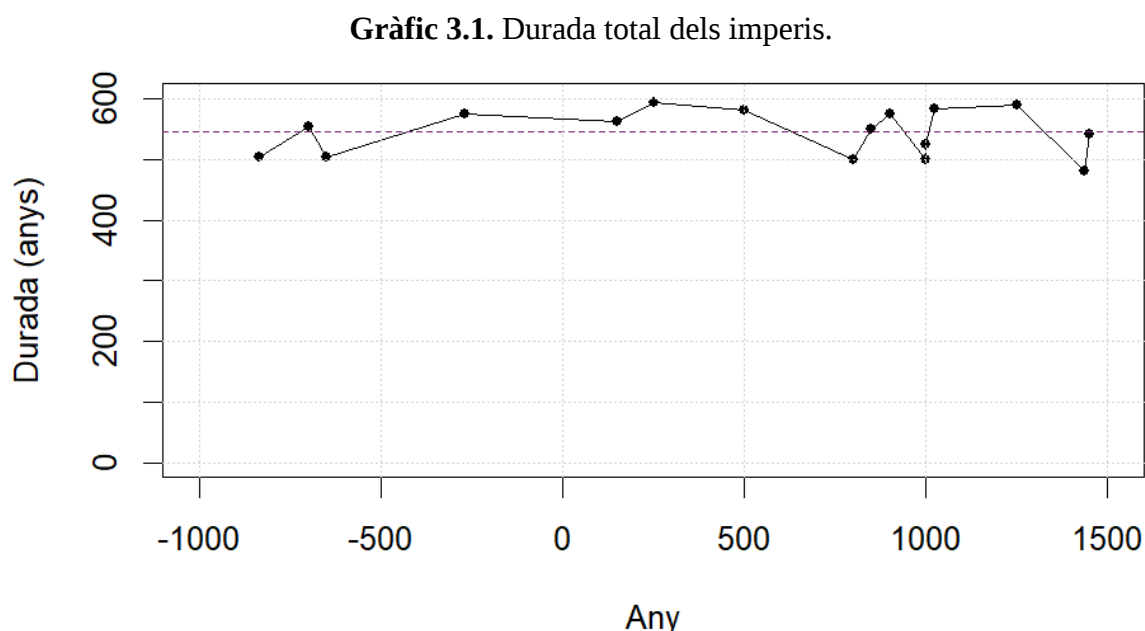
3.2. Anàlisi descriptiva

L'anàlisi descriptiva consta d'una sèrie de gràfics i anàlisis corresponents a les variables d'estudi. Sigui individual o en grups de dos fins a tres variables conjuntes, s'han pres aquelles anàlisis que s'han considerat destacables per a l'elaboració de l'estudi. Així doncs, degut a la gran quantitat de variables, s'han obviat possibles interpretacions que es considerés que no aportessin gran riquesa al treball.

3.2.1. Durada dels imperis

La variable principal de l'estudi és la durada dels imperis, ja que d'aquesta se'n desprèn la part principal del modelatge, doncs, n'és la variable dependent.

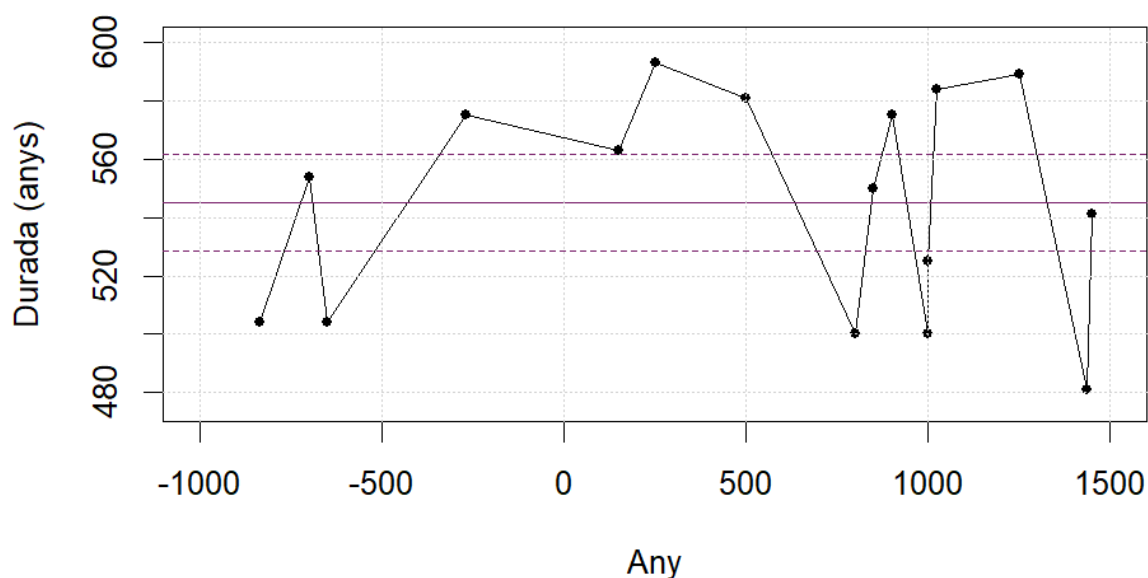
Al Gràfic 1 hi consta la representació d'aquesta durada en un gràfic lineal. Està ordenat segons l'any d'inici de l'imperi, pel que permet veure'n l'evolució al llarg del temps. No sembla constar-hi cap patró de creixement o decreixement, sinó que es va mantenint al voltant de la mitjana, de 544,94.



Font: Elaboració pròpia a partir de l'R.

Ampliant la imatge per a tenir més detall (Gràfic 2), s'observa que tot i que les dades es troben força centrades en la mitjana (línia contínua), la majoria es troben fora dels intervals de confiança del 95% (línies discontinúes). Es generen, doncs, incerteses envers a la naturalesa de les dades, quelcom a tenir en compte en l'apartat del modelatge.

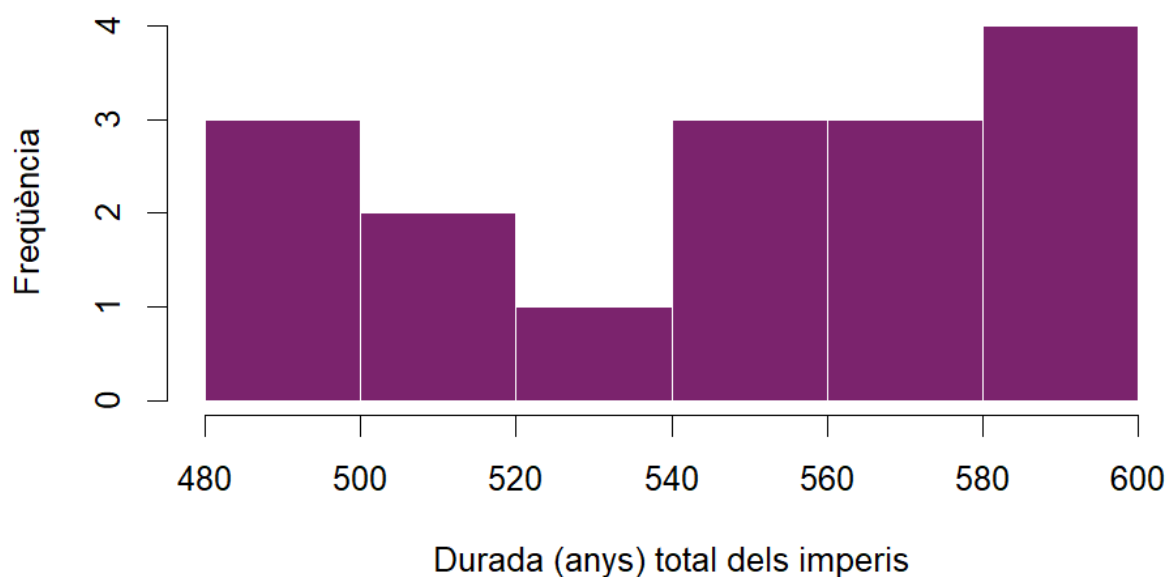
Gràfic 3.2. Durada total dels imperis (gràfic ampliat).



Font: Elaboració pròpia a partir de l'R.

Veient l'histograma del Gràfic 3, podria ser que les dades no fossin normals, ja que presenten una certa disposició bimodal. I és que tot i no prendre la típica forma de campana, la baixa quantitat de registres (20), traient aquells que contenen dades no disponibles per a la durada total (4), es queda en un total de 16 valors. I si és a partir dels 30 registres quan es pot suposar normalitat, en aquest cas caldrà anar en compte amb les suposicions.

Gràfic 3.3. Histograma de la durada total dels imperis.



Font: Elaboració pròpia a partir de l'R.

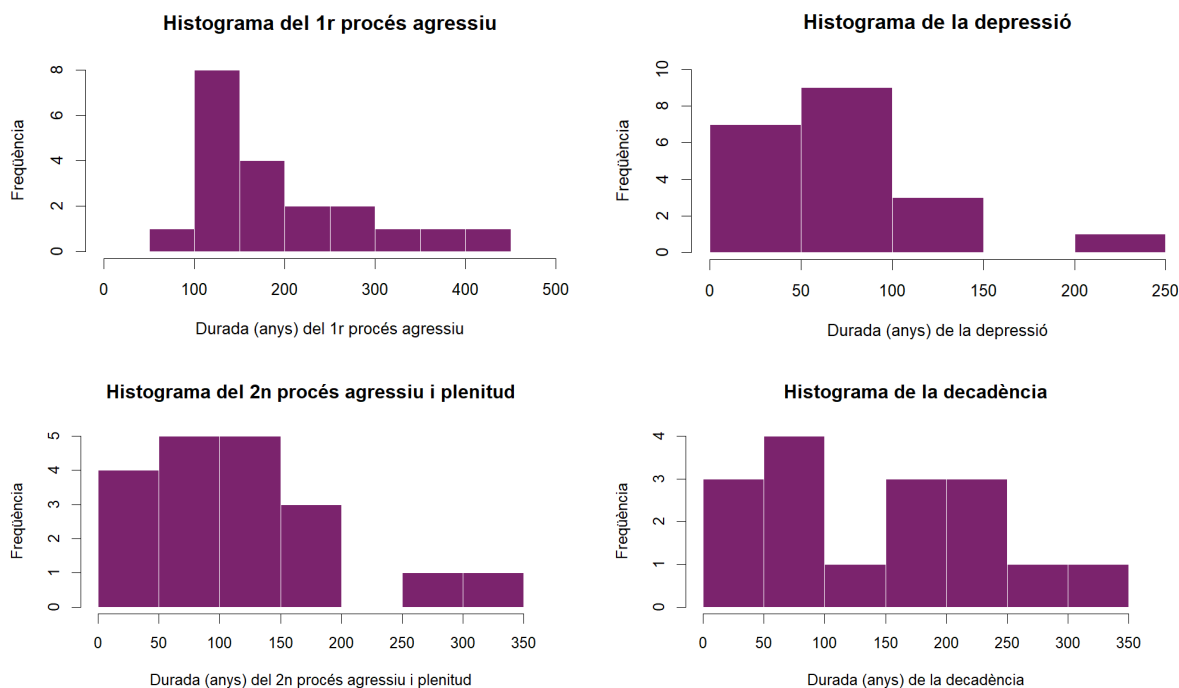
3.2.2. Fases imperials

A més de la durada total dels imperis, dins de les dades proporcionades (Taula 1) també hi consten una sèrie d'anys corresponents a les diferents fases imperials:

- Fase del primer procés agressiu (de l'inici de l'imperi, any 1, fins al 2)
- Fase de depressió (de l'any 2 al 3)
- Fase del segon procés agressiu i fase de plenitud imperial (de l'any 3 al 4)
- Fase de decadència i desaparició (de l'any 4 a la desaparició de l'imperi, l'any 5)

En base a aquestes quatre fases s'han construït els histogrames del Gràfic 4. De nou, la baixa quantitat de registres provoca complicacions en les afirmacions sobre les distribucions. En qualsevol cas, sembla que es pot intuir un cert patró de distribució Gamma, ja que en totes s'hi presenta una forma exponencial negativa acompanyada d'un valor baix a l'esquerra dels gràfics.

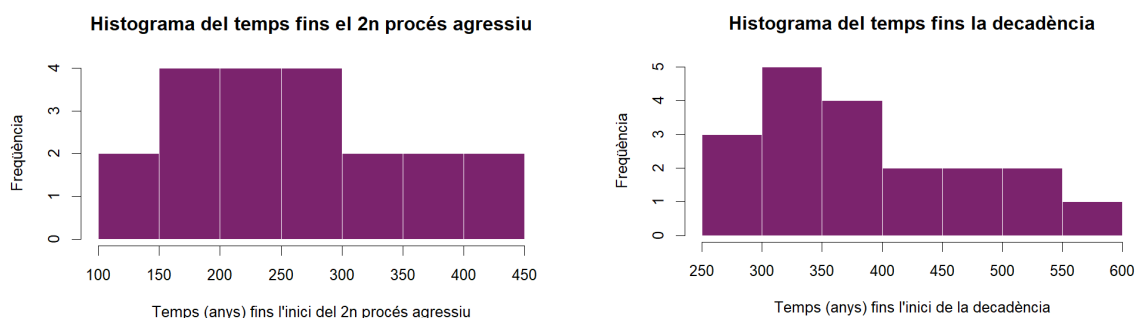
Gràfic 3.4. Conjunt de gràfics en relació a les durades de les diferents fases.



Font: Elaboració pròpia a partir de l'R.

A més les durades de les diferents fases, també s'ha volgut visualitzar si hi havia alguna relació amb els temps fins a certes fases. El temps fins al primer procés agressiu ve donat per l'any 1 o d'inici, el temps fins al segon procés per la durada del primer procés agressiu ("Histograma del 1r procés agressiu" del Gràfic 4), i el temps fins a la desaparició ve donat pel temps total de l'imperi. Per tant, queden restants el temps fins l'inici del segon procés agressiu i el temps fins a la decadència (Gràfic 5). Veient els gràfics, tot i que amb menys certesa, sembla que també pertanyerien a la mateixa distribució, doncs, la forma que presenten és similar malgrat el baix nombre de dades.

Gràfic 3.5. Conjunt de gràfics en relació al temps fins a esdeveniments.

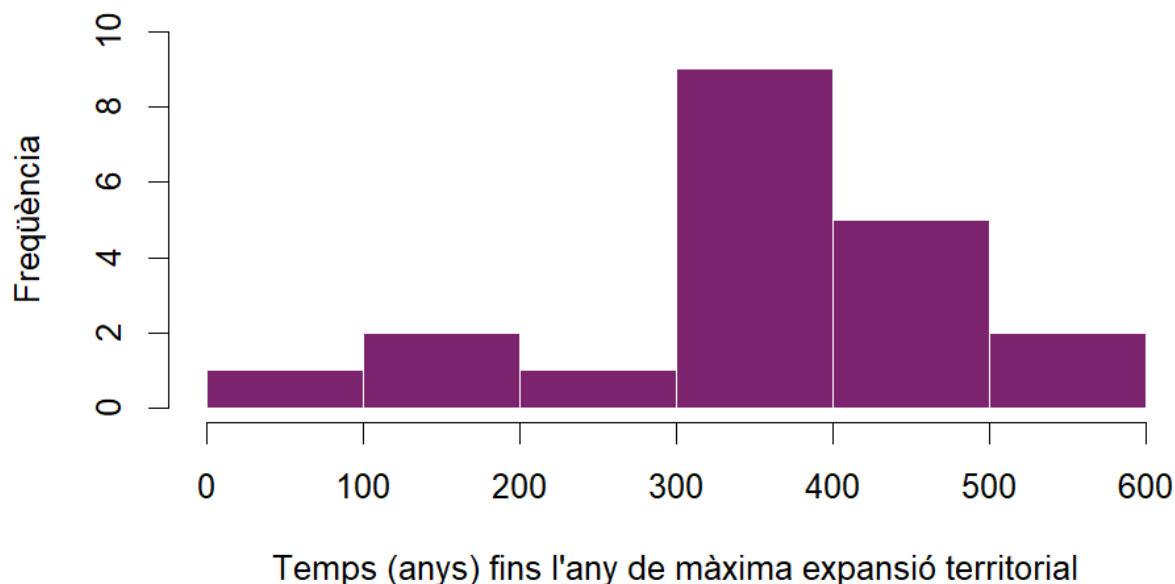


Font: Elaboració pròpia a partir de l'R.

3.2.3. Any de màxima expansió territorial

A més dels anys de les diferents fases, una altra variable d'interès és l'any en què l'imperi assoleix la màxima expansió territorial. Per visualitzar la distribució d'aquesta variable, s'ha pres el temps en anys transcorregut des de l'inici de l'imperi fins a aquest any estudiat. El Gràfic 6, doncs, mostra aquesta distribució en un histograma. Si les fases imperials o els temps estudiats fins a certs esdeveniments podien estar seguint una beta o algun derivat exponencial, el temps fins l'any de màxima expansió territorial sembla seguir una altra distribució. Tot i això, la forma confosa de les dades complica l'assignació a una distribució concreta. A més, en aquesta variable s'observa que la màxima expansió generalment sol ocorre a partir de l'any 300 de l'imperi. I és que en 17 dels 20 registres es produeix a partir de l'any 3. Entre aquests registres hi consten els imperis bizantí i el viking, els quals tenen un repunt al voltant de l'any 4 però no és tan extens. I l'altre imperi és l'alemany, el qual, si seguís el mateix patró que els altres 19 imperis estudiats, encara s'hauria de produir el seu any de màxima expansió territorial, i aquest seria a finals d'aquest segle.

Gràfic 3.6. Histograma del temps fins l'any de màxima expansió territorial.

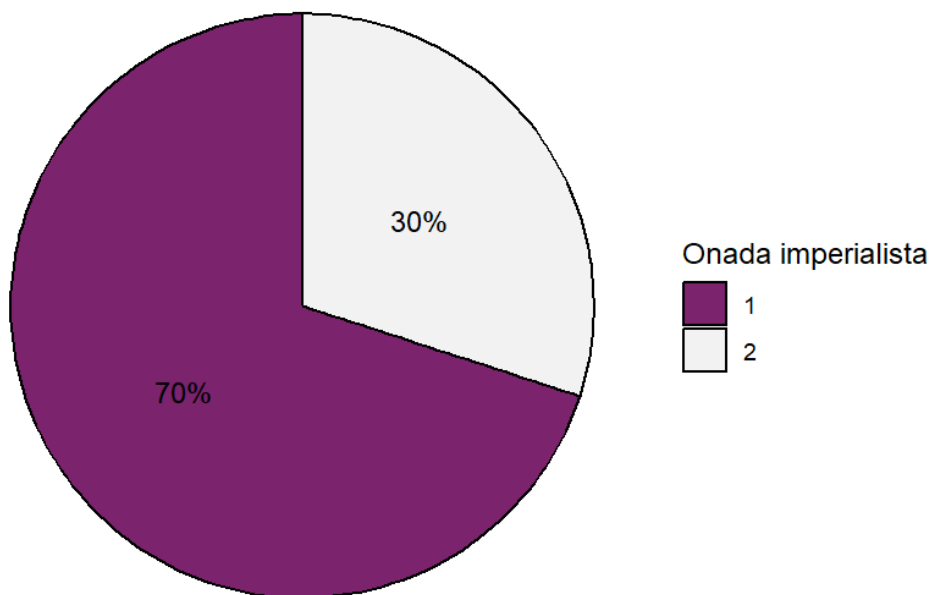


Font: Elaboració pròpia a partir de l'R.

3.2.4. Onada imperialista

Una altra de les variables donades a la Taula 1 és l'onada imperialista. En aquest cas, Deulofeu considerà que al passat hi havia hagut una primera onada imperialista que havia desencadenat en la formació de les primeres formes imperials europees i que a finals de l'edat mitjana en va sorgir una altra en la qual estem immersos. Així doncs, la variable onada imperialista en recull si l'imperi forma part de la primera o la segona onada. Dins dels imperis estudiats, al Gràfic 7 s'hi presenta la distribució d'aquestes onades, en la qual un 70%, la part de color porpra imperial, formen part de la primera onada, comportant un desequilibri de l'estudi en referència a aquesta variable.

Gràfic 3.7. Onada imperialista.



Font: Elaboració pròpia a partir de l'R.

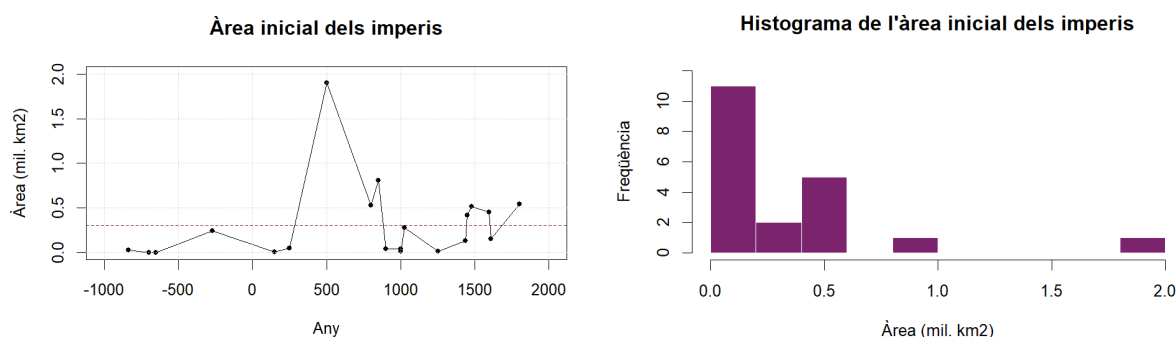
3.2.5. Àrea

L'àrea dels imperis ha estat una altra variable d'estudi. En aquest cas, s'ha dividit en àrea inicial, l'àrea de l'imperi en l'any inicial, i en l'àrea assolida en la màxima extensió territorial.

Pel que fa a l'àrea inicial, el Gràfic 8 s'hi mostra l'evolució d'aquesta àrea inicial, així com un histograma de la distribució. Al llarg del temps l'àrea inicial s'ha mantingut estable, amb un

petit augment cap al final. Tanmateix, les poques dades que provoquen aquest augment no permet confirmar aquesta tendència. Addicionalment, hi ha una clara observació atípica. Concretament, és l'àrea inicial de l'imperi bizantí, la qual al originar-se a partir d'una de les subdivisions de l'imperi romà, comptava amb una gran àrea inicial. Aquest valor s'haurà de tenir en compte més endavant. Quant a la distribució, la major part de les dades es concentra en valors molt baixos, comportant una possible distribució exponencial, deixant la cua a la dreta.

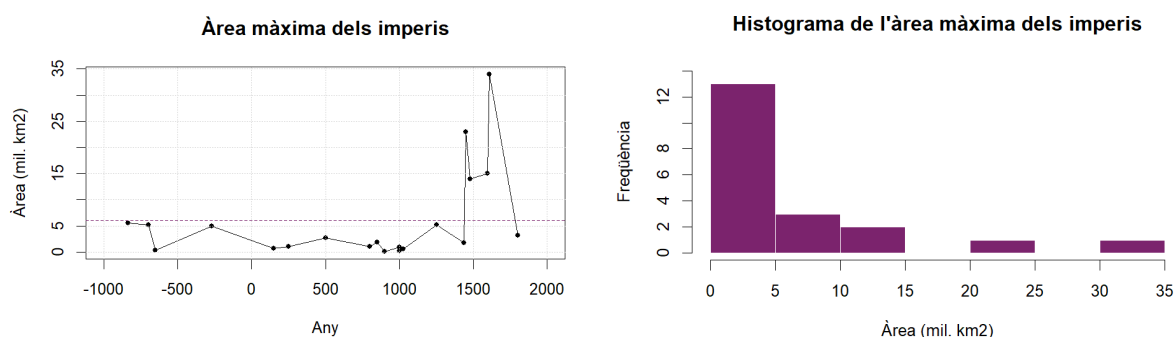
Gràfic 3.8. Conjunt de gràfics de l'àrea inicial dels imperis.



Font: Elaboració pròpia a partir de l'R.

Per altra banda, per a l'àrea màxima de cada imperi s'han realitzat els mateixos gràfics que en l'àrea inicial (Gràfic 9). En el primer, el qual mostra l'evolució al llarg del temps, sí que sembla que hi ha hagut algun factor evolutiu. Als anys finals, a partir del 1500, l'àrea màxima assolida és extremadament gran. Això en pot ser conseqüència de l'inici de l'enllaç del bloc Europa-Àsia-Àfrica amb el continent americà (1492), el qual inclogué noves terres que es desconeixien fins aquell moment a Europa i, per tant, noves possibilitats de conquesta. De la mateixa manera que en l'anterior, sembla que l'àrea màxima podria seguir una distribució exponencial, doncs, hi ha molts imperis amb una àrea petita per pocs amb un àrea molt gran.

Gràfic 3.9. Conjunt de gràfics de l'àrea màxima dels imperis.



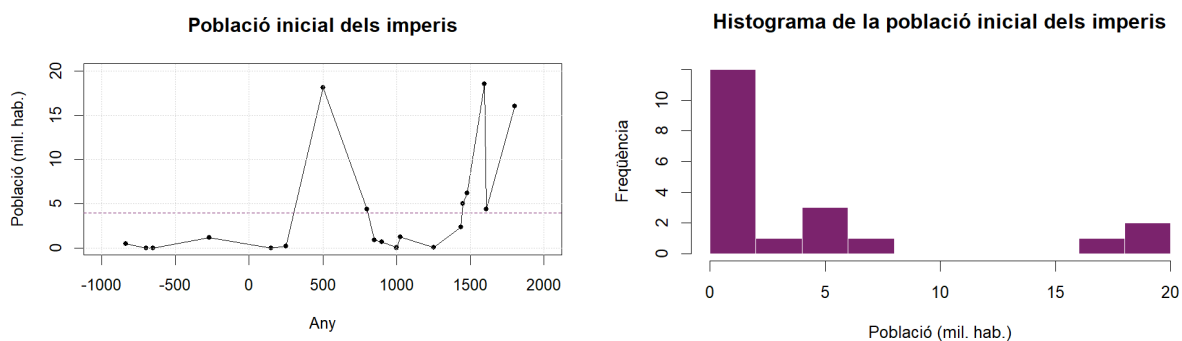
Font: Elaboració pròpia a partir de l'R.

3.2.6. Població

La població ha estat estudiada de la mateixa manera que l'àrea, prenent valors per a la població inicial i per a la població en el moment de màxima expansió territorial.

En referència a la població inicial (Gràfic 10), hi ha un cert patró positiu en el temps. A llarg dels anys la població inicial dels imperis va augmentant. A aquest fet, sumant-li que les àrees inicials eren similars, implica la realitat d'aquest augment poblacional. No és cap sorpresa, la població mundial es trobava en creixement durant el període estudiat (835 aC – 2024 dC), tal i com s'ha vist en la recopilació de dades. De nou, hi ha un pic que sobresurt de la resta procedent de l'imperi bizantí. Aquesta vegada, a més, hi ha fins a dues observacions més que presenten valors similars. Caldrà analitzar més endavant què fer amb aquestes observacions. Pel que fa al conjunt de dades, sembla tendir cap a una exponencial.

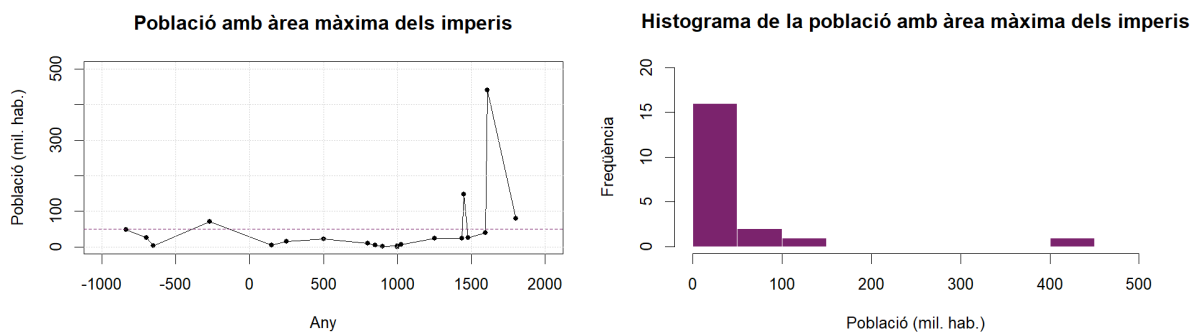
Gràfic 3.10. Conjunt de gràfics de la població inicial dels imperis.



Font: Elaboració pròpia a partir de l'R.

Respecte a la població quan l'àrea és màxima (Gràfic 11), de nou sembla haver-hi un lleuger a partir de l'any 1000, pronunciat per una destacable observació atípica. Aquest valor, corresponent a l'imperi anglès, destaca perquè triplica el valor de la segona observació més alta. De la mateixa manera que la població inicial, sembla seguir una exponencial.

Gràfic 3.11. Conjunt de gràfics de la població amb àrea màxima dels imperis.



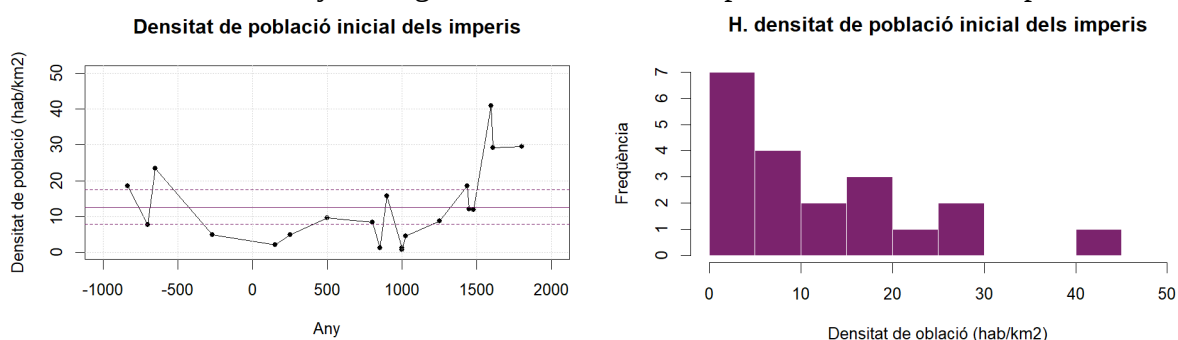
Font: Elaboració pròpia a partir de l'R.

3.2.7. Densitat de població

Degut a que les àrees i poblacions poden dependre molt del tamany que l'imperi hagi assolit, en l'estudi s'han creat les variables de densitat de població corresponents al moment inicial i a l'any de màxima expansió territorial de l'imperi com a variables ponderades.

Començant per la densitat de població inicial, al Gràfic 12, se segueix clarament una distribució exponencial. La majoria de dades es troben centrades en la mitjana i molt a prop de les bandes de confiança però bona part s'hi troben fora. A més a més, la tendència es divideix en dos: fins els volts de l'any 1000 la tendència és negativa, i a partir d'aquest any és positiva.

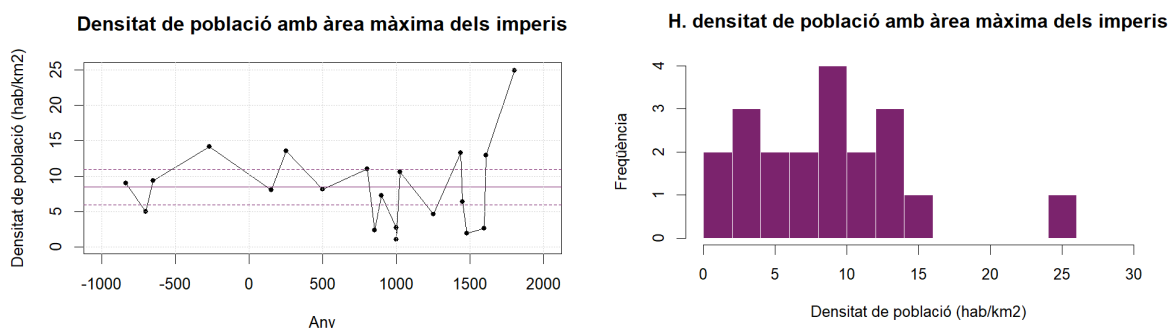
Gràfic 3.12. Conjunt de gràfics de la densitat de població inicial dels imperis.



Font: Elaboració pròpia a partir de l'R.

El Gràfic 13 mostra la densitat de població quan l'àrea és màxima. Com en la densitat de població inicial, també es troba força centrada en la mitjana. Tot i les poques dades, la distribució és força similar a la d'una normal. Hi destaca un valor extrem, a analitzar en l'apartat del modelatge.

Gràfic 3.13. Conjunt de gràfics de la densitat de població amb àrea màxima dels imperis.

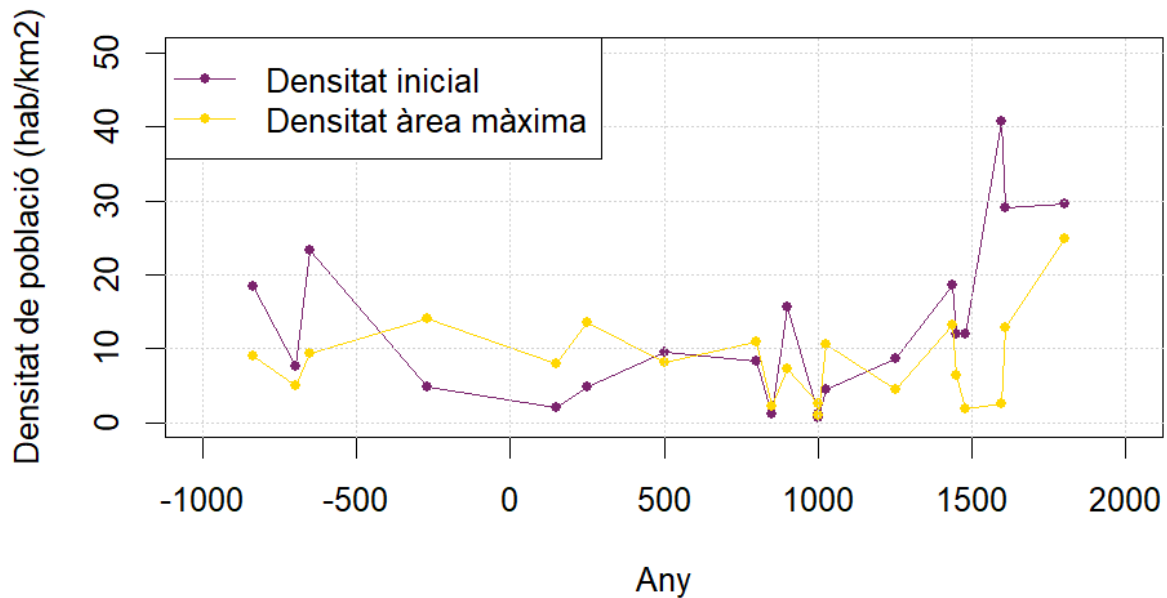


Font: Elaboració pròpia a partir de l'R.

Com que les densitats de població se solen moure pels mateixos rangs, no com l'àrea o la població que en el seu punt àlgid difereixen massa dels seus valors inicials, el Gràfic 14 mostra una comparativa d'ambdues. En la majoria de casos segueixen el mateix patró, és a dir, són

directament proporcionals. Així mateix, la densitat inicial sol trobar-se per sobre de la de quan l'àrea és màxima.

Gràfic 3.14. Evolució de les densitats de població inicial i amb àrea màxima dels imperis.

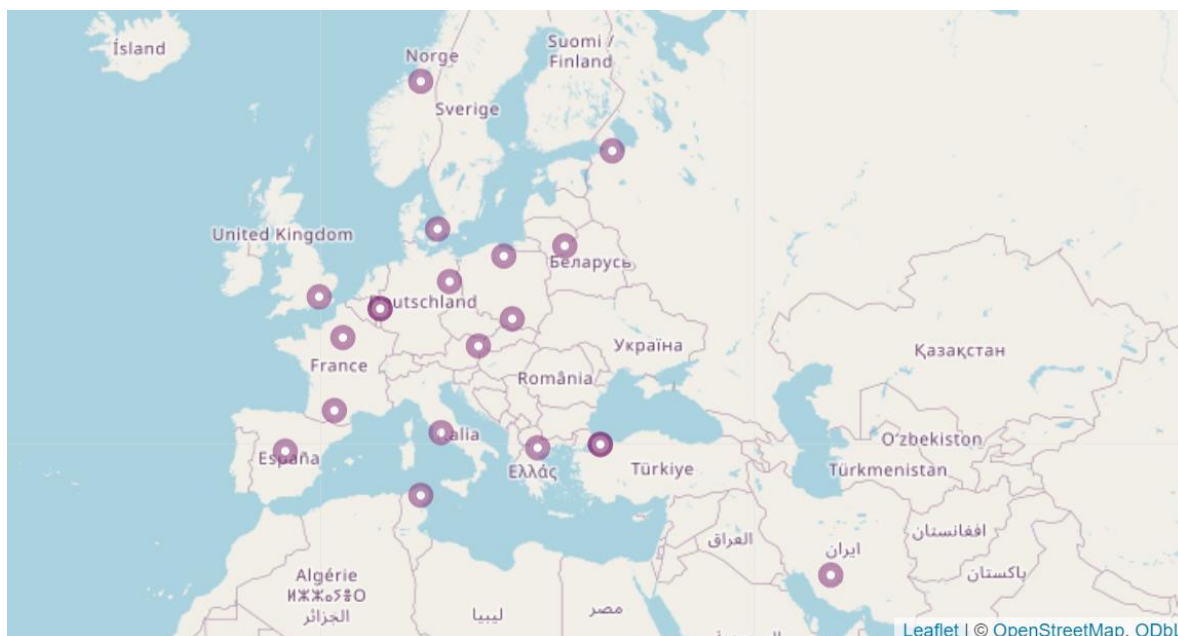


Font: Elaboració pròpia a partir de l'R.

3.2.8. Coordenades

Durant l'estudi també s'han pres les coordenades corresponents a les capitals dels imperis en el moment de màxima expansió territorial. Concretament, s'ha pres la latitud, la longitud i l'altitud de cadascuna. Al Gràfic 15 s'hi mostra en un gràfic de dispersió amb el mapa de fons la distribució que presenten les dues primeres components. La gran majoria dels imperis estudiats són europeus, doncs, són els únics dels quals hi havia les dades disponibles. En qualsevol cas, Deulofeu al seu dia estudià els imperis per a altres regions del món i concloué que no hi havia factor continental, pel que les conclusions d'aquest estudi en seran útils per a imperis de qualsevol regió del món.

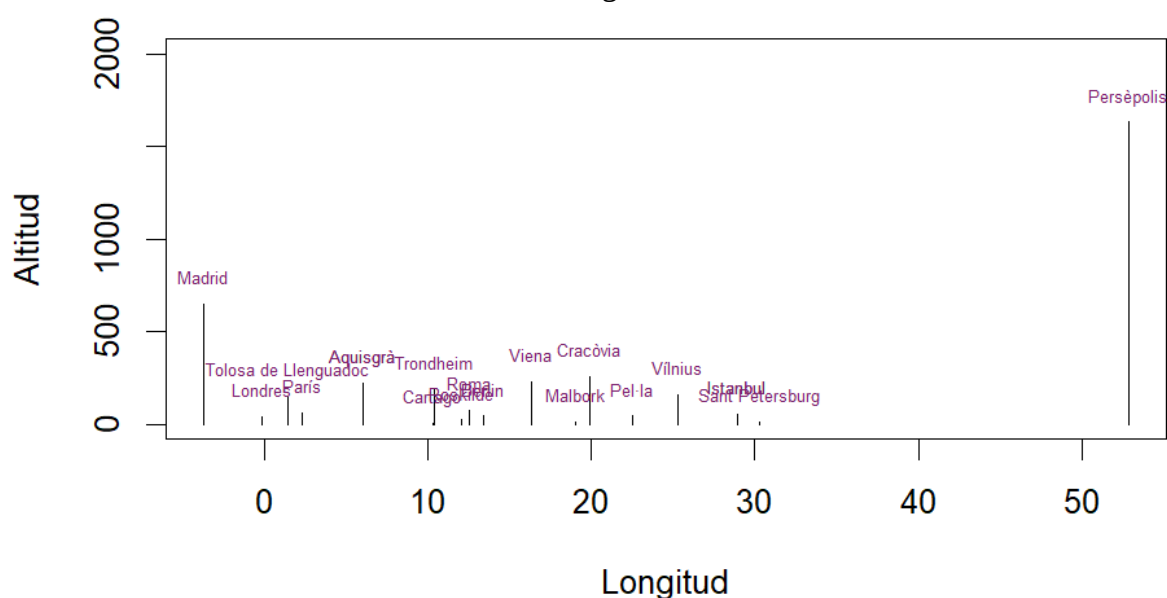
Gràfic 3.15. Latitud vs Longitud.



Font: Elaboració pròpia a partir de l'R.

A més de la latitud i la longitud, també s'ha extret l'altitud de les capitals. El Gràfic 16 mostra l'altitud en disposició amb la longitud. Addicionalment, s'han afegit els noms de les capitals per a que sigui més orientatiu. Persèpolis en seria un valor atípic, ja que queda aïllada en un extrem. Per a la resta sembla haver-hi una proporció indirecte, a més longitud menys altitud.

Gràfic 3.16. Longitud vs Altitud

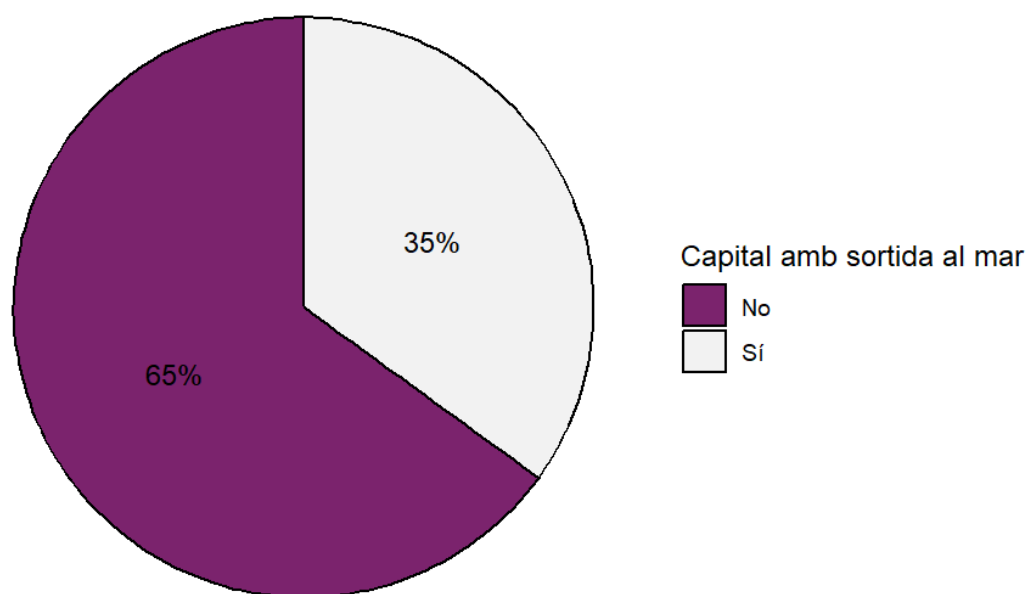


Font: Elaboració pròpia a partir de l'R.

3.2.9. Sortida al mar

L'última variable a estudiar és si la capital en el moment de màxima expansió territorial tenia o no sortida al mar. La majoria no en tenia, pel que aquesta variable presenta desigualtat de categories.

Gràfic 3.17. Capital amb sortida al mar



Font: Elaboració pròpia a partir de l'R.

3.3. Models estadístics

L'objectiu d'aquest treball és el d'analitzar i modelar les prediccions descrites per Alexandre Deulofeu. Per tant, es buscarà l'obtenció de models que, per una banda, expliquin quins factors influeixen cada fase imperial, i per l'altra, amb bona capacitat predictiva per a la durada dels imperis. En concret, es buscarà un total de 4 models explicatius (un per cada procés) i un de predictiu per a la durada total.

Els quatre models explicatius seran de regressió lineal múltiple. Aquest tipus de model és útil per a assenyalar aquells factors influents en la variable resposta. En aquest cas, les variables resposta són les durades en anys de les diferents fases descrites per Deulofeu:

- Fase del primer procés agressiu (de l'inici de l'imperi, any 1, fins al 2)
- Fase de depressió (de l'any 2 al 3)
- Fase del segon procés agressiu i fase de plenitud imperial (de l'any 3 al 4)
- Fase de decadència i desaparició (de l'any 4 a la desaparició de l'imperi, l'any 5)

Per aquest motiu, prèviament a la creació dels models han estat creades les variables següents, doncs d'aquesta manera s'elimina un possible factor temporal prevenint els efectes de la multicol·linealitat:

- Durada del 1r procés agressiu: $ANY2_1 = ANY2 - ANY1$
- Durada de la depressió: $ANY3_2 = ANY3 - ANY2$
- Durada del 2n procés agressiu i plenitud: $ANY4_3 = ANY4 - ANY3$
- Durada de la decadència i desaparició: $ANY5_4 = ANY5 - ANY4$

Per a cada model explicatiu, s'ha seguit la següent enumeració:

1. Ajustar un model amb la variable a imputar com a independent i la resta de desitjades de dependents
2. Model significatiu
3. Normalitat dels residus (gràfic Q-Q i test de Shapiro-Wilk)
4. Linealitat i homoscedasticitat (gràfic dels residus i test de Bresuch-Pagan)
5. Independència dels residus (test de Durbin-Watson)
6. Multicol·linealitat (VIF)
7. Valors influents (gràfic de la distància de Cook)

En cas de no complir algun dels requisits, s'ha d'analitzar el motiu i, si és necessari, reespecificar el model i tornar al punt inicial.

3.3.1. Model explicatiu per a la 1a fase

El model per a la primera fase s'ha començat ajustant amb totes aquelles variables que es poguessin incloure en la primera fase. S'han deixat de banda, doncs, aquelles relacionades amb els anys posteriors a l'ANY2 i les relacionades amb el període de màxima expansió (AREA_ME, POBL_ME, DEN_ME). Han començat dins el model, però, les relacionades amb

les dades geogràfiques, ja que tal i com s'ha assenyalat en l'apartat d'obtenció de dades, malgrat estiguin relacionades amb aquest període de màxima expansió, també aporten informació a la posició inicial.

Després de seguir i complir amb l'enumeració descrita, s'ha obtingut el model següent:

$$\log (ANY2_1) \sim \beta_0 + AREA_1 * \beta_1$$

Taula 3.7. Sortida model ANY2_1

Coefficients:					
	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)	
(Intercept)	5.3417	0.1039	51.417	<2e-16	***
AREA_1	-0.5798	0.1952	-2.971	0.00819	**
Residual Standard Error			0.3792		
Degrees of Freedom			18		
R ²			0.329		
R ² ajustat			0.2917		
P-valor			0.008192	< 0.05	(complert)
Test de Shapiro-Wilk			0.8085	> 0.05	(complert)
Test de Breusch-Pagan			0.2101	> 0.05	(complert)
Test de Durbin-Watson			0.6878	> 0.05	(complert)

L'ajust del model és coherent amb el nombre de dades, així com el nombre de variables (únicament 1). Compleix amb tots els tests i és significatiu en la seva totalitat.

El valor estimat de l'*intercept* indica que quan l'àrea inicial és zero, la durada esperada de la primera fase serà de $e^{5.3417} = 208,94$. Dins de les variables estudiades, la fase del primer procés agressiu està força influenciada per l'àrea inicial de l'imperi. En aquest cas és una relació negativa. Per calcular aquesta relació, al constar de logaritme per a la variable independent, la relació és la següent: $e^{-0.5798} = 0,56$. Per a cada unitat adicional de l'àrea inicial, la durada de la primera fase es multiplica per 0,56. En altres paraules, un augment d'una unitat de l'àrea inicial provoca una disminució del 44% en la fase. Per tant, com més és l'àrea inicial, menys en serà la durada de la primera fase.

Durant el primer període agressiu hi té lloc una primera expansió territorial. Podria ser que aquesta expansió estigués relacionada amb algun tipus de llindar màxim, i que per aquells imperis que comptaven amb una àrea inicial gran, l'expansió no fos tan severa, doncs, ja s'hauria assolit aquest llindar.

3.3.2. Model explicatiu per a la 2a fase

El model per a la 2a fase s'ha iniciat de la mateixa manera que l'anterior. En aquest cas, s'hi han afegit les variables de l'any 2, però s'ha continuat sense les del moment de màxima

expansió, ja que com s'ha vist en la descriptiva, sol sortir a partir de l'any 3. En aquest cas, el model validat ha estat el següent:

$$ANY3_2 \sim \beta_0 + AREA_1 * \beta_1 + ALT * \beta_2$$

Taula 3.8. Sortida model ANY3_2

Coefficients:					
	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)	
(Intercept)	38.74650	10.44603	3.709	0.001743	**
AREA_1	36.98549	17.35270	2.131	0.047947	*
ALT	0.09586	0.02112	4.539	0.000291	***
Residual Standard Error			33.53		
Degrees of Freedom			17		
R ²			0.5792		
R ² ajustat			0.5297		
P-valor			0.0007319	< 0.05	(complert)
Test de Shapiro-Wilk			0.3633	> 0.05	(complert)
Test de Breusch-Pagan			0.8426	> 0.05	(complert)
Test de Durbin-Watson			0.9032	> 0.05	(complert)

Aquest segon model també compleix els tests i és significatiu. L'ajust és considerablement bo tenint en compte les característiques presentades.

En aquest cas, la durada del període de depressió ve donat per dues variables, a més de l'*intercept*. Quan la resta de variables del model són zero, la depressió té una durada esperada d'uns 39 anys. A més, per cada unitat d'àrea inicial de l'imperi, la depressió augmenta 37 anys. I en aquest cas, l'alçada en que es troba la capital també hi ha tingut pes, pes positiu, encara que de 0,09 anys per cada metre d'altitud de la capital. En resum, que com més alta es trobi la capital i, sobretot, com més àrea inicial presenti l'imperi, més serà la durada del període de depressió.

Aquesta etapa de depressió ja té sentit que hi estigui relacionada l'àrea inicial. Aquesta etapa ve marcada per una crisi a l'imperi. Com més gran sigui l'àrea inicial, més territori contemplarà l'imperi, ja que la fase que precedia era de tipus agressiva. Per aquest motiu, més àrea és més territori per on es pot expandir la gent i, conseqüentment, aquesta crisi. El que és més difícil d'assimilar és el fet que l'altitud, i no una altra coordenada, hagi sortit significativa. Molt més significativa que l'àrea. Les capitals, com a centre imperial, en solen ser la ciutat més poblada. Capitals com Persèpolis o Madrid, són les que es troben a més alçada. Ambdues es troben prop de serralades, i l'àrea quilòmetres enllà es presenta similar. Per tant, bona part de l'imperi, si més no l'àrea inicial, presentarà aquestes característiques. I pot ser que degut a aquestes característiques muntanyenques es presenti algun tipus de factor que dificulti la eixida ràpida de la fase de depressió.

3.3.3. Model explicatiu per a la 3a fase

Per a la tercera fase ja s'han inclòs aquelles variables relacionades amb el període de màxima expansió territorial. El model obtingut en aquest cas ha estat:

$$ANY4_3 \sim \beta_0 + AREA_1 * \beta_1$$

Taula 3.9. Sortida model ANY4_3

Coefficients:					
	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)	
(Intercept)	86.54	17.17	5.040	0.000101	***
AREA_1	112.42	32.29	3.481	0.002858	**
Residual Standard Error	62.25				
Degrees of Freedom	17				
R ²	0.4162				
R ² ajustat	0.3819				
P-valor	0.002858 < 0.05 (complert)				
Test de Shapiro-Wilk	0.4952 > 0.05 (complert)				
Test de Breusch-Pagan	0.5818 > 0.05 (complert)				
Test de Durbin-Watson	0.4801 > 0.05 (complert)				

El nou model novament inclou només l'àrea inicial com a variable significativa. L'ajust torna a ser lleugerament baix, però és lògic amb el nombre de dades i variables. Tot i així és significatiu en la seva totalitat.

Quan l'àrea inicial és zero, la durada esperada del segon procés i la conseqüent plenitud imperial és de 87 anys. Aquesta durada sembla curta per la fase més llarga de totes, però del cert és que l'àrea inicial mai és zero. I a més, per a cada augment unitari de l'àrea inicial, la fase augmentarà en 112 anys. En aquest cas doncs, com més hagi estat l'àrea inicial, més durarà la fase concentrada en el segon procés agressiu i la plenitud imperial.

De nou, l'àrea inicial torna a ser significativa. La tercera fase presenta unes característiques similars a la primera, ja que tracta del segon període agressiu. És en aquesta fase on s'assoleix la plenitud imperial. Es produeix, per tant, la màxima esplendor de l'imperi. I segons els resultats, com més àrea inicial, més durada tindrà el període d'esplendor.

3.3.4. Model explicatiu per a la 4a fase

Com a últim model explicatiu, s'han començat usant les mateixes variables que a la tercera fase. En aquest cas el model és lleugerament diferent als altres presentats, ja que només hi afecten variables de tipus anys:

$$ANY5_4 \sim \beta_0 + ANY2_1 * \beta_1 + ANY3_2 * \beta_2 + ANY4_3 * \beta_3$$

Taula 3.10. Sortida model ANY5_4

Coefficients:					
	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)	
(Intercept)	539.2928	37.8129	14.262	6.91e-09	***
ANY2_1	-1.0588	0.1051	-10.078	3.29e-07	***
ANY3_2	-1.1746	0.1898	-6.189	4.66e-05	***
ANY4_3	-0.7426	0.1071	-6.935	1.57e-05	***
Residual Standard Error			32.38		
Degrees of Freedom			12		
R ²			0.9079		
R ² ajustat			0.8849		
P-valor			1.717e-06	< 0.05	(complert)
Test de Shapiro-Wilk			0.9648	> 0.05	(complert)
Test de Breusch-Pagan			0.1003	> 0.05	(complert)
Test de Durbin-Watson			0.2854	> 0.05	(complert)

El model per a la fase de decadència presenta un molt bon ajust. Es compleixen totes les hipòtesis i les significances de totes les variables. D'aquí se n'extreu la conclusió general següent: com menys duren les altres, individual o col·lectivament, més durarà la fase de decadència. I viceversa, com més durin les altres fases, abans desapareixerà l'imperi.

Amb aquests resultats, és com si s'acabessin d'ajustar automàticament els anys d'un imperi. Els valors de les altres etapes són molt significatius i l'ajust és realment bo. Un 90% de la variabilitat ve explicada per les variables. És com si cada imperi tingués el seu propi saldo de 550 anys d'existència i el disposés en les fases. Hom pot pensar que això pot ser conseqüència de males imputacions de Deulofeu. Però certament anant any per any, imperi a imperi, en les dates que ell considera clau han succeït realment fets significatius de les fases que esmenta. Per tant, aquestes estimacions reafirmen les seves prediccions.

3.3.5. Model predictiu

Per al model predictiu s'ha implementat un model de Cox d'anàlisi de supervivència. Aquest model en modelitza la durada fins a cert esdeveniment. En aquest cas, fins a la desaparició de l'imperi. Es requereix també, d'una variable "Estat", la qual inclogui si cada individu ha assolit l'esdeveniment o no. Per tant, l'estat del model serà si l'imperi ja ha desaparegut o encara no. Implementada aquesta nova variable, aquest ha estat el nou model resultant:

$$h(t) = h_0(t) * \exp(\beta_1 * \log(ANY4_3))$$

Taula 3.11. Sortida model predictiu

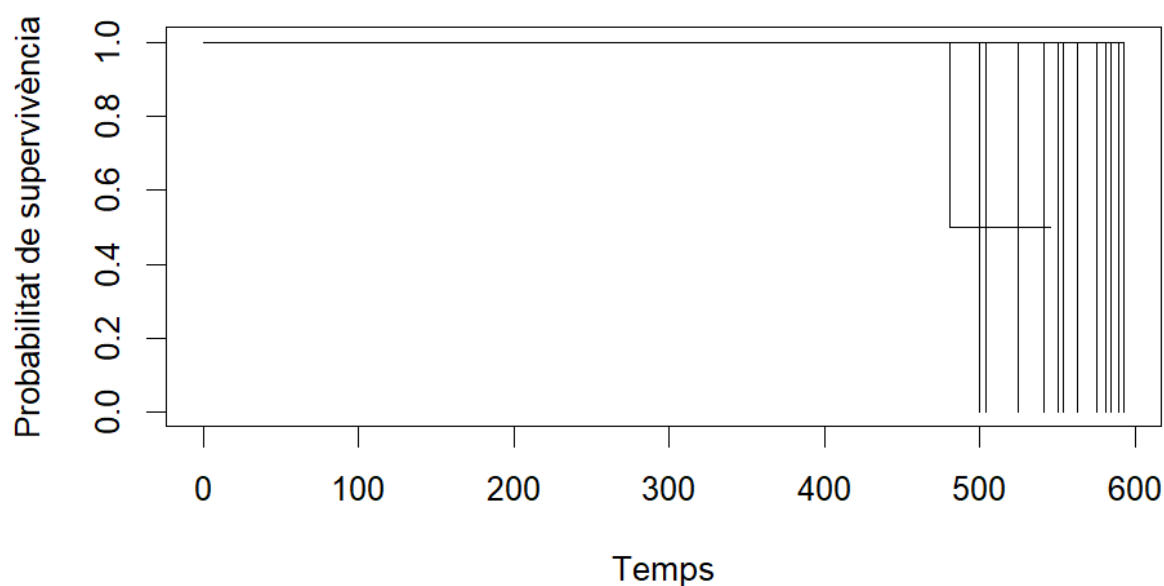
	coef	exp(coef)	Pr(> Z)	
log(ANY4_3)	-0.9330	0.3934	0.0298	*
Concordance			0.681	
Likelihood ratio test			0.02	< 0.05
Wald test			0.03	< 0.05

Score (logrank) test	0.02	< 0.05
----------------------	------	--------

El model només consta d'una sola variable, però aquesta és significativa. A més també és estadísticament significatiu, tal i com indiquen els p-valors menors que 0.05 dels tests. El valor de l'exponencial del coeficient representa el Hazard ratio. Aquest, al ser menor que 1, indica que un augment en $\log(\text{ANY4_3})$ està associat amb una disminució del risc. De fet, per cada unitat d'augment de $\log(\text{ANY4_3})$, el risc es redueix en un 60,66% ($1 - 0,3934$). La concordança del model és de 0,681, indicant una capacitat predictiva moderada.

A més, el test de proporcionalitat de riscos pren un p-valor de 0,8 tant per la variable del model com pel global. Aquest valor indica que la suposició de riscos proporcional es manté i, per tant, que l'efecte de $\log(\text{ANY4_3})$ sobre el risc de desaparició d'un imperi és constant al llarg del temps. Finalment, el gràfic del model de Cox d'anàlisi de supervivència resultant ha estat:

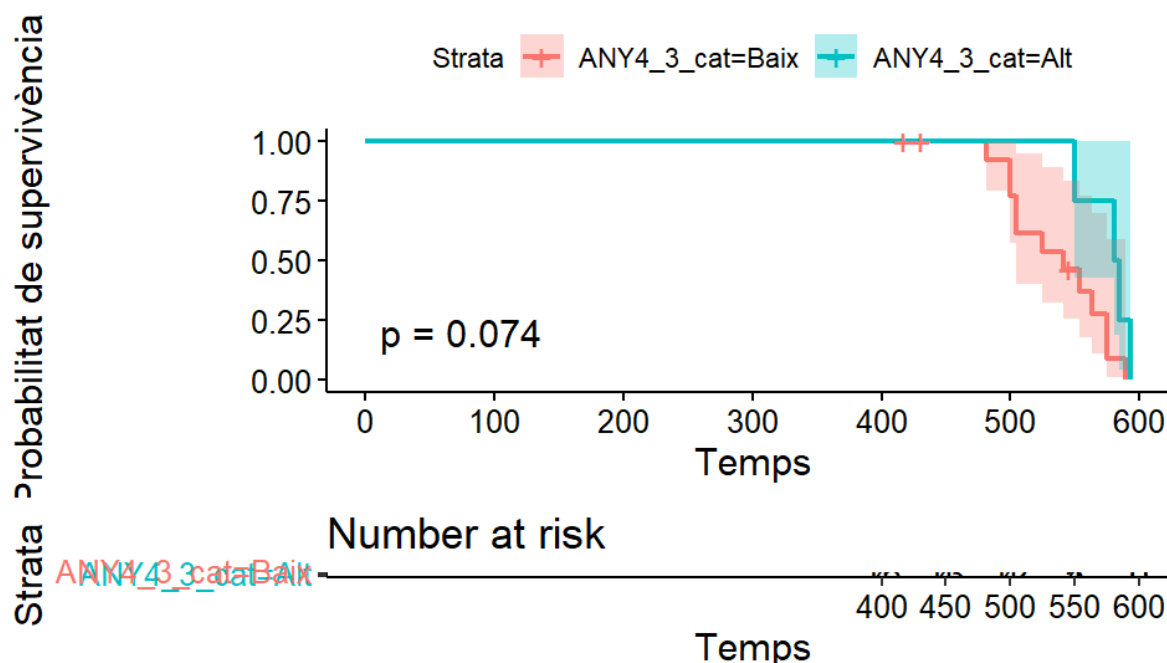
Gràfic 3.18. Corba de supervivència $\log(\text{ANY4_3})$



Font: Elaboració pròpia a partir de l'R

El Gràfic 3.18. indica que els imperis tenen un temps de supervivència d'entre 500 i 600 anys. Les poques dades produeixen que fins al voltant del 480, la probabilitat de supervivència es trobi en 1, mentre que entre els 480 i els 500 anys es rebaixa a 0,5 per a alguns casos. A partir del 500 molts dels imperis estudiats desapareixen provocant la sèrie contínua de línies verticals. Per fer-ho més aclaridor, el Gràfic 3.19.

Gràfic 3.18. Corba de supervivència $\log(\text{ANY4_3})$ categòrica



Font: Elaboració pròpia a partir de l'R

Com que els resultats del Gràfic 3.18. eren certament confosos, s'ha decidit categoritzar la variable $\log(\text{ANY4_3})$. S'ha dividit en dos, en funció els valors que presentava, en baix i alt. Aquest cas, doncs, és molt més aclaridor. Aquí s'hi observa com per aquells imperis que tenen una durada més curta del període de decadència, són els que presenten un menor temps de supervivència. El p-valor present a la corba (0.074), és lleugerament més gran que 0.05, indicant que, per poc, no hi ha diferències entre els dos grups.

A partir d'aquí ja es podran fer les prediccions, doncs el model ha estat validat. Aquestes es faran sobre els tres imperis que contenen totes les dades excepte la data final: l'espanyol, el francès i l'anglès. Primer se n'ha calculat la predicció del risc relatiu.

Taula 3.12. Sortida prediccions I

	Predicció del risc relatiu	Predicció del predictor lineal
Espanyol	1.730391	0.5483476
Francès	0.6723127	-0.3970318
Anglès	0.6555712	-0.4222484

La predicció del risc relatiu proporciona el risc relatiu de cada nova observació comparat amb el risc mitjà de la població original. Una predicció major que 1 significa que el risc és major que la mitjana. En aquest cas, l'imperi espanyol com és evident presenta un risc major que la mitjana, concretament un 73% més alt. És coherent, ja que d'entre els imperis estudiats es troba ja en la fase final. En canvi, els imperis francès i anglès es troben encara per sota de la mitjana. A partir dels valors complementaris, s'obté que es troben amb un risc 32,8% i 34,4% respectivament, per sota de la mitjana.

La predicció del predictor lineal per la seva banda, proporciona el valor del predictor lineal per a cada nova observació. En aquest cas, principalment s'ha de mirar el signe dels valors estimats.

Un valor positiu representa un risc més alt que la mitjana, un de negatiu, un risc més baix. Concorde, doncs, perfectament amb les prediccions del risc relatiu.

I finalment, s'han calculat les prediccions per a l'any de desaparició dels tres imperis. Per aconseguir el valor final, s'ha establert un llindar de probabilitat del 0,5 i s'ha buscat el temps en què la probabilitat de supervivència queia per sota d'aquest llindar. Els valors obtinguts per a cada imperi es troben a la Taula 3.13.

Taula 3.13. Sortida prediccions II

	Predicció de durada	Any final
Espanyol	541	2020
Francès	575	2169
Anglès	575	2182

Pels imperis francès i anglès se'ls pronostica un temps de vida total de 575 anys. Força alt, tenint en compte que la mitjana es troba al voltant de 545 i, per tant, és de fins a 30 anys més. Actualment es troben en fase de decadència i sembla que no serà fins a finals del segle vinent quan desapareixeran.

I quant a l'imperi espanyol, el model li pronostica una vida total de 541 anys. Amb aquests càlculs, hauria d'haver-se desintegrat al 2020. Aquest estudi, però, posterior al 2020 té prou indicis com per a concloure que aquest temps de vida s'ha prolongat. Així que s'ha procedit a baixar el llindar del model fins al primer valor diferent de 541. Aquest valor, s'ha trobat per a un llindar de 0,46, molt proper a 0,5. I el valor obtingut no ha estat cap altre que 550. 550 anys ha pronosticat el model, amb certa ajuda externa, que té de durada l'imperi espanyol. I per casualitat que pugui semblar, després d'una cerca exhaustiva de dades potencialment influents, d'anàlisi de variables, de modelitzacions sobre models explicatius i un posterior model predictiu, es conclou que l'imperi espanyol, o Regne d'Espanya com es coneix avui dia, desapareixerà al 2029. La mateixa conclusió que Alexandre Deulofeu va arribar un dia de fa cinquanta anys.

IV. CONCLUSIONS

Per a valorar si s'han complert els objectius inicials proposat, primer recordar que aquests eren:

1. Estudiar la validesa de les prediccions d'Alexandre Deulofeu
2. Estudiar si les previsions segueixen un cert modelatge
3. Elaboració d'un model predictiu a partir d'eines estadístiques
4. Implementació del model

Durant el transcurs del treball s'han realitzat quatre models explicatius i un de predictiu. Amb els quatre explicatius, s'ha observat que les previsions fetes per Deulofeu sí que segueixen un cert modelatge. I és que els quatre models s'han obtingut significatius i han estat tots validats. Per tant, significa que les diferents fases imperials pronosticades per Deulofeu compleixen certa pauta.

El primer procés agressiu, la fase compresa entre els anys 1 i 2, serà més llarg com menys àrea inicial tingui l'imperi. El període de depressió, la segona fase, serà més extens com més àrea inicial tingui l'imperi i a més alçada es trobi la capital. El segon procés agressiu i la plenitud imperial seran més llargs com més àrea inicial es presenti. Per tant, l'àrea inicial, significativa per als tres models, provoca una disminució de la primera fase i un augment tant en la segona com en la tercera. I finalment, la durada del període de decadència serà més gran com menys hagin durat les tres etapes anteriors. Aquest últim model, basat en les tres etapes anteriors, presenta un alt grau d'ajustament on un 90% de la variabilitat és explicada per les variables. L'exactitud d'aquest model, juntament amb el significant modelatge dels altres, reafirma les prediccions fetes per Deulofeu.

L'altre model realitzat ha estat un de predictiu. En particular s'ha estimat un model de Cox d'anàlisi de supervivència. S'ha trobat que com més dura la fase del segon procés agressiu i la plenitud imperial, més decreix el risc de desaparició de l'imperi. És a dir, que aquells imperis amb aquesta fase més llarga, seran també més llargs en la seva totalitat.

Com que el model predictiu també ha estat significatiu i validat, s'ha prosseguit amb la implementació. Principalment, destacar que l'imperi espanyol té un risc de desaparició un 73% més alt que la mitjana mentre que els imperis francès i anglès es troben 32,8% i un 34,4% respectivament més baixos que la mitjana. I finalment s'ha procedit amb les prediccions de durada total. Pels imperis francès i anglès la predicció de durada final ha estat la mateixa, de 575 anys per als dos. El primer tindria la data final al 2169 i el segon al 2182. Per a l'espanyol, una primera predicció indicava que el seu període havia acabat el 2020. Però després d'un reajustament manual, se li ha predit una durada total de 550 anys i que, per tant, no desapareixeria fins l'any 2029, d'aquí a cinc anys.

Una de les grans limitacions d'aquest treball ha estat el baix nombre d'observacions. Les dades d'entrada eren limitades i amb tants pocs registres, que les imputacions de noves podien distorsionar-ne les prediccions i les posteriors conclusions dels models. Aquest baix nombre ha causat que els models no poguessin disposar de gaires paràmetres, pel que es renunciava a un gran ajust. A més, també ha calgut ser previngut amb els resultats, ja que aquests pocs registres causaven alts graus de multicol·linealitat en diversos punts i calia fixar-se en detall amb les sortides obtingudes. Per altra banda, la selecció de variables encara podria ser més eficaç; si és disposés de més temps, la recollida de valors geogràfics i de població per a cada any aportaria una gran riquesa als models. De la mateixa manera, amb més temps es podria estudiar amb més profunditat aquestes prediccions i implementar amb més certesa nous registres. Aquestes dues limitacions, doncs, no són més que dues de les vies per on seguir una possible futura continuació d'aquest present estudi.

V. BIBLIOGRAFIA

Gutierrez, Juli. *La Matemàtica de la història. Alexandre Deulofeu o el pensador global*. 8a ed. Lapslàtzuli Editorial SCP

Jones, Richard; McEvedy, Colin. *Atlas of World Population History*. (1978) Penguin Books

Taagepera, Rein. *Size and duration of empires: systematics of size*. [en línia] Social Science Research 7, 108-127 (1978) University of California, Irvin
<https://escholarship.org/content/qt8vx325vq/qt8vx325vq_noSplash_a2c2db5cdb06a3d4d4e35b2852a74948.pdf>

Taagepera, Rein. *Size and duration of empires: growth-decline curve. 600 B.C to 600 A.D.* [en línia] Social Science History 3, 115-138 (1979) University of California, Irvin
<<https://doi.org/10.2307/1170959>>

<<https://www.deulofeu.org/>>

VI. ANNEXES

Taula 3.3. Variables demogràfica-expansives

1. <https://heritageinstitute.com/zoroastrianism/achaemenian/index.htm>. “...the land of 8th Century BCE Parsua would include southern Kurdistan and northern Kermanshah in Iran.”

PROVÍNCIA	ÀREA (km ²)
Kermanshah	25.009
Kurdistan	29.137
TOTAL	54.146 km²

Les dades han estat extretes de l'enllaç: <http://www.statoids.com/uir.html>.

Al ser, les especificacions d'àrea, no més precises que purs factors geogràfics, nord i sud concretament, degut a aquesta falta de precisió s'ha considerat una divisió en parts iguals de la província entre el nord i el sud. D'aquesta manera, s'ha pres el sud del Kurdistan com la meitat sud d'aquesta província prenent per valor d'àrea exactament la meitat del total. Empleant el mateix procediment per a la província de Kermanshah i sumant la quantitat total, el valor aproximat d'àrea que podria haver tingut l'imperi persa pels volts de l'any 835 aC és de 27.073 km².

2. Taagepera, Rein. *Size and duration of empires: growth-decline curve. 600 B.C to 600 A.D.* [en línia] *Social Science History* 3, 115-138 (1979) University of California, Irvin <<https://doi.org/10.2307/1170959>>
3. Carter, Robert. *History of the Persians.* (1850). Chapter I. <https://archive.org/details/historypersians00farrgoog/mode/2up>
Pàgs. 17-18: “...before the time of Cyrus, Persia was comparatively an insignificant and thinly populated region, containing only 120,000 men fit for war, which would not make the population more than half a million of persons.”
4. <https://www.guinnessworldrecords.com/world-records/largest-empire-by-percentage-of-world-population>. La població al 480 aC de l'imperi era de 49,456 milions d'habitants.
5. Taagepera, Rein. *Size and duration of empires: growth-decline curve. 600 B.C to 600 A.D.* [en línia] *Social Science History* 3, 115-138 (1979) University of California, Irvin <<https://doi.org/10.2307/1170959>>
6. Pilkington, Nathan. *An Archaeological History of Carthaginian Imperialism.* (2013). “Archaeologically, the first Carthaginian colony that can be securely dated is Kerkouane. Its foundation dates to the mid-sixth century BCE.”
Segons aquesta font, l'àrea de l'imperi cartaginès el 650 aC es limitava a la pròpia ciutat i els seus suburbis, doncs, la primera colònia apareixeria un segle després.

Apuntar també que segons *Size and Duration of Empires: Growth-Decline Curve*, 600 B.C. to 600 A.D.. Rein Taagepera (1979), l'àrea total de l'imperi cartaginès l'any 650 aC era de 0,1 milions de quilòmetres quadrats. Tot i això, aquesta àrea comptava amb diferents enclavaments que podrien tenir dependències més aviat fenícies.

A partir d'aquests fets, l'actual governació de Tunis cobreix l'àrea urbana i suburbana del Golf de Tunis, el qual coincideix amb la ubicació històrica de Cartago. Tot i que no és exacta, els límits d'aquesta governació proporcionen una estimació raonable del que hagués pogut ser l'àrea de l'imperi.

https://www.citypopulation.de/en/tunisia/admin/11_tunis/. Àrea = 288 km².

7. Taagepera, Rein. *Size and duration of empires: growth-decline curve. 600 B.C to 600 A.D.* [en línia] *Social Science History* 3, 115-138 (1979) University of California, Irvin <<https://doi.org/10.2307/1170959>>

8. Pilkington, Nathan. *An Archaeological History of Carthaginian Imperialism*. (2013). "by c. 600 BCE, archaic Carthage grew to encompass an area of 55 to 60 hectares."

<https://www.livescience.com/24246-ancient-carthage.html>

"The earliest archaeological evidence of occupation at Carthage dates to about 760 B.C. The settlement quickly grew to encompass a 25-30 hectare (61-74 acres) residential area"

Si sobre el 760 aC la ciutat comptava amb unes 27,5 hectàrees (estimació puntual d'entre 25 i 30 hectàrees) i al 600 aC comptava amb 57,5 ha (estimació puntual d'entre 55 i 60 hectàrees), per interpolació lineal, sobre el 650 aC la ciutat devia comptar amb 48,125 ha.

<https://irows.ucr.edu/research/citemp/estcit/estcit.htm>

"Table 2: Bairoch's Urban Population Density Estimates": segons aquesta taula, les ciutats de l'antiguitat estaven compostes per unes 150 persones per hectàrea.

D'aquesta manera, la ciutat podria haver comptat amb $48,125 * 150 = 7.218,75 \approx 7.219$ persones pels volts de l'any 650 aC.

Però aquest valor pertany exclusivament per a la ciutat, pel que caldria saber quin era el territori de l'imperi l'any 650 aC.

Segons *An Archaeological History of Carthaginian Imperialism*. Nathan Pilkington (2013), "Carthage built its first colony c. 550 BCE at Kerkouane in the Cap Bon.". Això implica que anteriorment a aquest període només constava la ciutat i la seva rodalia.

9. https://ia902509.us.archive.org/14/items/mastering-the-west-rome-and-carthage-at-war/vdoc.pub_mastering-the-west-rome-and-carthage-at-war.pdf

"In 264 the city housed maybe some 200,000 citizens and foreigners; its territories, along the coast to the Cape Bon peninsula, perhaps thrice as many. Libya—Punic-dominated North Africa—had perhaps two million more from the coasts to the fertile inland areas around the Bagradas, Siliana, and Muthul rivers."

Per tant, la població total de l'imperi en l'any 264 aC devia ser d'uns 2,8 milions d'habitants. A més, al document també hi consta:

“The Augustan-era geographer Strabo writes that around 150 bc Carthage’s population was 700,000. If this figure is valid (there have been doubts), it must cover her rural territories as well.”

Per tant, al 264 aC la població de Cartago i rodalies era de 0,8 milions d’habitants i al 150 aC era de 0,7 milions. S’ha de tenir en compte que entre aquests 114 anys hi tingueren lloc dues de les guerres púniques. A l’any 264 aC la màxima expansió de l’imperi cartaginès encara estava per arribar (221 aC), tot i que entremig hi hagué la primera guerra púnica. Així doncs, la població va créixer i decreïxer. Així doncs, tenint en compte que a l’any 150 aC l’imperi cartaginès havia patit els estralls d’una segona guerra, i alhora una disminució del territori, doncs, ja no es trobava en el pic, s’han pres les dades corresponents a l’any 264 aC com a millor aproximació aconseguida. Segurament el nombre de població devia ser molt més similar en l’any 264 que no pas en l’any 150, fet que provoca certa inviabilitat en la realització d’una suposada interpolació lineal.

10. Taagepera, Rein. *Size and duration of empires: growth-decline curve. 600 B.C to 600 A.D.* [en línia] *Social Science History* 3, 115-138 (1979) University of California, Irvin <<https://doi.org/10.2307/1170959>>

11. <https://www.britannica.com/place/Macedonia-ancient-kingdom-Europe/additional-info#Researchers-Note>

“About 700 BCE a people who called themselves Macedonians pushed eastward from their home on the Aliákmon River to the plain in the northeastern corner of the Greek peninsula, at the head of the Gulf of Thérmai.”

Queyrel, François & Stiros, Stathis (2008). *Human occupation and geomorphological evolution of the Thessaloniki Plain (Greece) since mid Holocene.*

“The Thessaloniki delta plain is the largest (~2 000 km²) deltaic area of Greece.”

Tot i aquests 2.000 km², pels volts del 700 aC bona part de la plana estava inundada. La imatge “d” de la pàgina 122 representa com devia veure’s el paisatge en aquell any. Siguin 2.000 els quilòmetres quadrats totals de la plana, una bona aproximació del territori al 700 aC en podrien ser aquests quilòmetres a excepció dels municipis grecs de Delta (311,1 km²) i Chalkidona (391,5 km²).

Per tant, l’àrea total: 2.000 - 311,1 - 391,5 = 1.297,4 km².

Les dades pels dos municipis grecs s’han extret de:

<https://www.citypopulation.de/en/greece/mun/admin/>

12. Taagepera, Rein. *Size and duration of empires: growth-decline curve. 600 B.C to 600 A.D.* [en línia] *Social Science History* 3, 115-138 (1979) University of California, Irvin <<https://doi.org/10.2307/1170959>>

13. Storey, Glenn R. *Urbanism in the Preindustrial World: Cross-Cultural Approaches* (2006)

“1. Archaic Greece: [...] By 700 BCE, the largest towns probably had 10,000 people”

En l'origen, els macedonis es trobaven envoltats per pobles grecs, pel que una influència en les densitats de població seria més que lògica. Tot i això, és difícil de saber quants n'eren en total els macedonis, doncs, l'any 700 aC pertany al final de l'edat fosca grega, anomenada així per l'escassetat de dades històriques. Tot i això, si les tribus macedòniques es van anomenar per primera vegada l'any 700 aC significa que ja devien constituir una comunitat significativa. I prenent la referència esmentada, les comunitats més grans sobre aquell any rondaven les 10.000 persones.

14. Scheidel, Walter . *The Scale of Empire: Territory, Population, Distribution*. (2020)

L'imperi macedoni hauria contingut el 15% de la població mundial l'any 323 aC.

<https://www.census.gov/data/tables/time-series/demo/international-programs/historical-est-worldpop.html>

Segons les aproximacions obtingudes de la taula, la població mundial l'any 400 aC devia ser d'uns 162 milions d'habitants, mentre que el 200 aC es trobava entre 150 i 231 milions. Si es té en compte un augment constant, prenent el valor mig per l'interval donat per l'any 200 aC, l'any 323 aC la població mundial podria haver estat de 172,9725 milions de persones, a partir de l'interpolació lineal. Així doncs, el 15% de 172,9725 és 25,946, el nombre aproximat de milions d'habitants de l'imperi macedoni a l'any 323 aC.

15. Taagepera, Rein. *Size and duration of empires: growth-decline curve. 600 B.C to 600 A.D.* [en línia] *Social Science History* 3, 115-138 (1979) University of California, Irvin <<https://doi.org/10.2307/1170959>>

16. <https://imperiumromanum.pl/en/roman-society/population-of-roman-empire/>

“In 265 BCE, the Roman Republic covered a territory of 24 thousand. sq km”

17. Taagepera, Rein. *Size and duration of empires: growth-decline curve. 600 B.C to 600 A.D.* [en línia] *Social Science History* 3, 115-138 (1979) University of California, Irvin <<https://doi.org/10.2307/1170959>>

18. <https://imperiumromanum.pl/en/roman-society/population-of-roman-empire/>

“In 265 BCE, the Roman Republic [...] with a population of 1,168,936”

19. <https://imperiumromanum.pl/en/roman-society/population-of-roman-empire/>

“According to historian Kyle Harper, during the reign of Octavian Augustus (27 BCE – 14 CE), the Roman state had a population of 60 million, which grew by 0.1% annually. Below is a proposal for the size of the Roman Empire in the middle of the 2nd century CE, according to Kyle Harper's “*The Fate of Rome*”. [el valor final que apareix a la taula és de 75 milions]”

Per una banda, entre el 27 aC i el 14 dC, l'imperi romà presentava una població d'unes 60 milions de persones amb un increment d'un 0,1% anual. Prenent com a valor puntual d'aquesta estimació l'any que es troba al mig, que en seria el 6,5 aC, seguint aquest creixement la població a l'any 117 dC seria de 69,72 milions de persones.

Per altra banda, a mitjans del segle II dC la població es considera que fou de 75 milions de persones. Prenent l'any 150 dC com a estimació puntual d'any sobre mitjans del

segle II dC, fent interpolació lineal i considerant que l'any 6,5 aC la població era de 60 milions, al 117 dC la població hauria pogut ser de 71,856 milions.

A partir d'aquests dos valors obtinguts de dos mètodes diferents, una bona estimació del valor poblacional per a l'any proposat en seria una combinació d'ambdós, és a dir, fent-ne una mitjana. Aquest valor final obtingut és de 70,788 milions.

20. Taagepera, Rein. *Size and duration of empires: growth-decline curve. 600 B.C to 600 A.D.* [en línia] *Social Science History* 3, 115-138 (1979) University of California, Irvin <<https://doi.org/10.2307/1170959>>

21. El terme "Gots" sol incloure als pobles gots principalment dividits entre visigots i ostrogots. En aquest cas, les dates donades per a l'imperi got coincideixen en dates clau per al poble visigot, motiu pel qual les dades han estat preses per a aquest regne.

Wolfram, Herwig (1988). *History of the Goths*.

"A century and a half after the geographer Strabo, Ptolemy was the last author who spoke of the Gutones. He was also the only one who clearly located them. According to Ptolemy, the Gutones lived northwest of present-day Warsaw on the eastern, Sarmatian bank of the Vistula"

Aquesta àrea podria ser estimada a partir de les següents regions poloneses:

PAÍS	VOIVODAT	COMTAT	ÀREA (km²)
Polònia	Cuiàvia i Pomerània	Lipno	1.015,6
		Rypin	587,08
	Masòvia	Płock	1.798,71 / 2 *
		Płońsk	1.383,67
		Sierpc	852,89
TOTAL			4.738,595 km²

* Aproximadament dues terceres parts del comtat de Płock s'inclourien a la zona ocupada pels gots l'any 250 dC.

Les dades han estat extretes de: https://dbpedia.org/page/List_of_counties_of_Poland

22. El terme "Gots" sol incloure als pobles gots principalment dividits entre visigots i ostrogots. En aquest cas, les dates donades per a l'imperi got coincideixen en dates clau per al poble visigot, motiu pel qual les dades han estat preses per a aquest regne.

<https://www.britannica.com/topic/Visigoth>

A partir del mapa proporcionat, l'àrea de l'imperi got en el punt de màxima expansió territorial es podria estimar aproximadament a partir de les següents regions:

PAÍS	REGIÓ	SUBREGIÓ	ÀREA (km ²)
------	-------	----------	-------------------------

França	Alvèrnia-Roine-Alps	Alier	7.340
		Cantal	5.726
		El Loira	4.781 / 2 *
		L'Alt Loira	4.977 / (3/2) **
		Puèi de Doma	7.970
	Centre-Vall del Loira	Cher	7.235
		Indre	6.791
		Indre i Loira	6.127 / 2 *
	Nova-Aquitània	TOTES	84.060
	Occitània	TOTES	72.724
	País del Loira	El Loira-Atlàntic	6.815 / 2 *
		La Vendée	6.720
		Maine i Loira	7.166 / 2 *
Espanya	Andalusia	TOTES	87.268
	Aragó	TOTES	47.669
	Catalunya	TOTES	31.930
	Castella-la Manxa	TOTES	79.226
	Castella i Lleó	TOTES	94.147
		Lleó	-15.468
		Zamora	-10.559
	Comunitat de Madrid	Madrid	7.995

	Extremadura	TOTES	41.602
	Regió de Múrcia	Múrcia	11.317
	País Valencià	TOTES	23.305
Portugal	Beja	TOTES	10.266
	Èvora	TOTES	7.392
	Faro	TOTES	4.995
	Lisboa	TOTES	2.801
	Portalegre	TOTES	6.084
	Santarem	TOTES	6.723
	Setúbal	TOTES	5.163
TOTAL			656.184,5 km²

* Aproximadament la meitat dels departaments francesos del Loira, Indre i Loira, el Loira Atlàntic i Maine i Loira s'inclourien al Regne visigot de l'any 476.

** Aproximadament dues terceres parts del departament francès de L'Alt Loira s'inclouria al Regne visigot de l'any 476.

Les dades han estat extretes de: <http://www.statoids.com/statoids.html>

23. El terme “Gots” sol incloure als pobles gots principalment dividits entre visigots i ostrogots. En aquest cas, les dates donades per a l'imperi got coincideixen en dates clau per al poble visigot, motiu pel qual les dades han estat preses per a aquest regne.

Jones, Richard; McEvedy, Colin (1978). *Atlas of World Population History*.

La població de Polònia l'any 200 dC era de 600.000 i el 400 era de 800.000. Seguint un creixement lineal, sobre el 250 devien ser uns 650.000 habitants.

L'àrea dels gots l'any 250 dC, vist al punt 21, era de 4.738,595 km². Això correspon a un 1,4689% de l'àrea total de Polònia (<http://www.statoids.com/statoids.html>).

Per tant, una manera d'inferir en la població dels gots l'any 250 en seria calculant l'1,4689% de 650.000, que és 9.548.

24. El terme “Gots” sol incloure als pobles gots principalment dividits entre visigots i ostrogots. En aquest cas, les dates donades per a l'imperi got coincideixen en dates clau per al poble visigot, motiu pel qual les dades han estat preses per a aquest regne.

Sabent l'àrea màxima que va assolir el regne visigot, una manera de trobar la població del regne en l'any 476 serà obtenint les poblacions que haurien pogut tenir Espanya, Portugal i França en aquells anys.

Jones, Richard; McEvedy, Colin (1978). *Atlas of World Population History*.

La població de Portugal l'any 400 dC era de 500.000 habitants, i el 600 era de 400.000. Per interpolació lineal, la població de l'any 476 podria haver estat de 462.000.

La població d'Espanya l'any 400 dC era de 4.500.000 habitants, i el 600 era de 3.500.000. Per interpolació lineal, la població de l'any 476 podria haver estat de 4.120.000.

La població de França l'any 400 dC era de 5.000.000 habitants, i el 600 era de 4.500.000. Per interpolació lineal, la població de l'any 476 podria haver estat de 4.810.000.

Per falta de dades més precises en relació a la població sobre certes àrees i anys, s'interpolaran les dades de població a partir de les respectives àrees.

L'àrea estimada al punt 22 corresponent a Espanya i Portugal és de 441.856 km². L'àrea total d'Espanya i Portugal és de 505.983 + 92.225 = 598.208 km².

441.856 representa un 73,86% de 598.208. Un 73,86% de la població estimada per a Portugal i Espanya (462.000 + 4.120.000 = 4.582.000) és 3.384.265,2.

Per la seva banda, l'àrea estimada al punt 22 per a França és de 214.328,5 km².

L'àrea total de França és de 543.941 km².

214.328,5 representa un 39,40% de 543.941. Un 39,40% de la població estimada per a França (4.810.000) és 1.895.140.

Finalment, la població del regne visigot l'any 476 podria haver estat de 5.279.405 habitants.

Les dades relacionades amb les àrees actuals dels països han estat extretes de:

<https://www.britannica.com/topic/European-countries-by-area>

25. El terme "Gots" sol incloure als pobles gots principalment dividits entre visigots i ostrogots. En aquest cas, les dates donades per a l'imperi got coincideixen en dates clau per al poble visigot, motiu pel qual les dades han estat preses per a aquest regne.

<https://www.britannica.com/topic/Visigoth>

"...the Visigoths continued to be federates until 475, when Theodoric's son Euric declared himself an independent king. [...] It was under him, too, that the Gallic kingdom, of which the capital was at Toulouse, reached its widest extent."

El mapa mostra aquesta extensió i és datat en l'any 476 dC, pel que s'ha pres aquesta data.

26. <https://www.britannica.com/topic/Frank-people#ref153304>. *"The Franks emerged into recorded history in the 3rd century CE as a Germanic tribe living on the east bank of the lower Rhine River."*

<https://www.livius.org/articles/people/franks/>. “More powerful and aggressive enemies appeared on the other side of the Rhine: [...], and the Franks in Westphalia and the north of the Netherlands.”

Així doncs, sembla que els orígens dels francs es troben a la riba est del Rin, per la regió de Westfàlia a Alemanya i al nord dels Països Baixos. S’han pres les consideracions següents:

- Per a Westfàlia a Alemanya:

<https://www.britannica.com/place/Westphalia>. “Westphalia, historic region of northwestern Germany, comprising a large part of the present federal Land (state) of North Rhine–Westphalia.”

Tot i això, no tot l’estat del Nord Rin-Westfàlia es troba per sobre del Rin, així que seran seleccionats únicament els districtes i municipis que es trobin per sobre del riu.

País	Estat	Districte	Municipi	Àrea (km ²)
Alemanya	Rin del Nord-Westfàlia	TOTS	TOTS	34.112
		Bonn	TOTS	-141,1 *
		Clèveris	TOTS	-1.233
			Emmerich am Rhein	80,4
			Rees	109,9
		Colònia	TOTS	-405 / 2 **
		Düren	TOTS	-941,5
		Euskirchen	TOTS	-1.249
		Heinsberg	TOTS	-627,9
		Krefeld	TOTS	-137,8
		Mönchengladbach	TOTS	-170,5
		Rhein-Erft-Kreis	TOTS	-704,7
		Rhein-Kreis Neuss	TOTS	-576,4

	Rhein-Sieg-Kreis	TOTS	1.153
		Alfter	-34,77
		Bornheim	-82,69
		Meckenheim	-34,84
		Rheinbach	-69,72
		Swisttal	-62,22
		Wachtberg	-49,68
	Städteregion Aachen	TOTS	-706.9
	Viersen	TOTS	-563,3
	Wesel	TOTS	-1.043
		Dinslaken	47,66
		Hamminkeln	164,5
		Hünxe	106,9
		Schermbeck	110,7
		Voerde	53,49
		Wesel	122,6 ***
TOTAL (Alemanya)			27.429,63 km ²

* La major part del districte de Bonn es troba a la riba oest del Rin. Al tractar-se directament d'un municipi, per irrellevància de dimensionalitat així com per la complexitat d'obtenció de les dades no s'ha comptabilitzat la totalitat del territori.

** Aproximadament Colònia està dividida entre una i l'altra riba del Rin. Al tractar-se directament d'un municipi, per irrellevància de dimensionalitat així com per la complexitat d'obtenció de les dades s'ha comptabilitzat la meitat del territori.

*** La major part del municipi de Wesel es troba a la riba est del Rin. Al tractar-se directament d'un municipi, per irrellevància de dimensionalitat així com per la complexitat d'obtenció de les dades s'ha comptabilitzat la totalitat del territori.

Les dades per a "País" corresponent a "Alemanya" han estat extretes de:

<https://www.citypopulation.de/en/germany/nordrheinwestfalen/>

- Per al nord dels Països Baixos:

Degut a que el Rin ja parteix el país per la meitat, quedant dividit en nord i sud, es prendrà tota aquella àrea del Països Baixos que quedi al nord del Rin. A més a més, també s'ha de tenir en compte que el territori neerlandès era un altre en relació al nivell del mar:

https://dedutchman.ca/friesland/#xl_xr_page_index

"Around 250 A.D. almost all Frisians disappear from the Frisian coastal-clay districts. The rising of the sea level makes it impossible to live in the coastal areas of Friesland for the next 150 years (250 - 400 A.D.). In this period a fraction of the Frisians and the Chaukians (a Germanic tribe neighboring north of Friesland) form a new tribal alliance called the Franks."

Conseqüentment, del total de províncies a l'est del Rin se n'exceptuarà Frísia.

País	Província	Municipi	Àrea (km ²)
Països Baixos	Drenthe	TOTS	2.633
	Flevoland	TOTS	1.412
	Gelderland	TOTS	4.964 *
		Beuningen	-43,65
		Berg en Dal	-86,31
		Buren	-133,9
		Culemborg	-29,29
		Druten	-37,64
		Heumen	-39,76
		Lingewaard	-62
		Maasdriel	-66,11

		Neder-Betuwe	-59,98
		Nimega	-53,09
		Overbetuwe	-109,2
		Tiel	-32,88
		West Betuwe	-216,1
		West Maas en Waal	-76,76
		Wijchen	-66,18
		Zaltbommel	-79,38
	Groningen	TOTS	2.324
	Holanda del Nord	TOTS	2.655
	Holanda del Sud	TOTS	2.700
		Alblasserdam	-8,78
		Albrandswaard	-21,69
		Barendrecht	-19,75
		Dordrecht	-78,54
		Goeree-Overflakkee	-260,5
		Gorinchem	-18,83
		Hardinxveld-Giessendam	-16,91
		Hendrik-Ido-Ambacht	-10,61
		Hoeksche Waard	-268,9
		Molenlanden	-181,7

	Nissewaard	-73,58
	Papendrecht	-9,41
	Ridderkerk	-23,72
	Rotterdam	-217,6 / (3/2) **
	Sliedrecht	-12,84
	Voorne aan Zee	-121,8
	Zwijndrecht	-20,3
Overijssel	TOTS	3.319
Utrecht	TOTS	1.485
	Vijfheerenlanden	-146,4
TOTAL (Països Baixos)		18.898,08 km²

* La major part del municipi d'Arnhem es troba a la riba oest del Nederrijn (una de les parts holandeses del Rin). Al tractar-se directament d'un municipi, per irrellevància de dimensionalitat així com per la complexitat d'obtenció de les dades s'ha comptabilitzat la totalitat del territori.

** Aproximadament Rotterdam està dividida entre una i l'altra riba del Nieuwe Maas (una de les parts holandeses del Rin). Al tractar-se directament d'un municipi, per irrellevància de dimensionalitat així com per la complexitat d'obtenció de les dades s'ha comptabilitzat un terç del territori.

Les dades per a "País" corresponent a "Països Baixos" han estat extretes de:

<https://www.citypopulation.de/en/netherlands/admin/>

Així doncs, l'àrea corresponent als pobles francs pels volts del 250 dC devia correspondre a uns $27.429,63 + 18.898,08 = 46.327,71 \text{ km}^2$.

27. Henning, Joachim. *Post-Roman Towns, Trade and Settlement in Europe and Byzantium: The heirs of the Roman West*. (2007)

"The size of the Carolingian empire can be roughly estimated at 1,112,000 km²"

28. <https://www.worldhistory.org/Franks/>. "Some of the Germanic tribes associated with the Franks included the Chamavi, the Chattuari, the Bructeri, the Salians, the Ripuarians, and several others. The Salians and Ripuarians would eventually emerge as the most dominant tribes."

- Francs salis:

Lot, Ferdinand (1945). *Les Invasions germaniques*. París: Payot, pp. 128.

Ferdinand Lot suggereix que els francs salis eren entre 100 i 150 mil.

- Francs ripuaris:

Jamet, Dominique (1996). *Clovis, ou, Le baptême de l'ère: France, qu'as-tu fait de ta laïcité?*. Ramsey, pp. 38.

Dominique Jamet aporta que els francs ripuaris foren prop de 100 mil.

Prenent com a estimació puntual dels francs salis 125 i sobre els ripuaris 100, l'aproximació assolida per a l'estimació del nombre de francs pels volts de l'any 250 dC és de 225.000 persones.

29. Henning, Joachim. *Post-Roman Towns, Trade and Settlement in Europe and Byzantium: The heirs of the Roman West*. (2007).

“The size of the Carolingian empire can be roughly estimated at 1,112,000 km², which yields a hypothetical density ranging from ca. 9 to 18 inhabitants per km²”

Per a 9 hab/km², la població seria de 10.008.000, i per a 18 hab/km² en seria de 20.016.000. El valor mig d'entre les dues s'obtindria en 15.012.000 habitants.

30. <https://www.worldhistory.org/Franks/>

Taagepera, Rein. *Size and duration of empires: systematics of size*. [en línia] Social Science Research 7, 108-127 (1978) University of California, Irvin

<https://escholarship.org/content/qt8vx325vq/qt8vx325vq_noSplash_a2c2db5cdb06a3d4d4e35b2852a74948.pdf>

31. Turchin, Peter; Adams, Jonathan M.; Hall, Thomas D. (2006). *East-West Orientation of Historical Empires and Modern States*

32. Treadgold, Warren T. (1997). *A History of the Byzantine State and Society*.

La població a l'imperi bizantí l'any 457 era d'unes 16 milions de persones i l'any 518 era d'unes 19 milions de persones.

Per interpolació lineal, s'obté que els habitants de l'imperi bizantí l'any 500 devien ser uns 18,1156 milions.

33. Treadgold, Warren T. (1997). *A History of the Byzantine State and Society*.

Pàgina 278: la població de l'imperi bizantí l'any 540 era d'uns 26 milions de persones, i l'any 565 era d'uns 20 milions.

Per interpolació lineal, s'obté que els habitants de l'imperi bizantí l'any 555 devien ser uns 21,906 milions.

34. Taagepera, Rein. *Size and duration of empires: growth-decline curve. 600 B.C to 600 A.D.* [en línia] Social Science History 3, 115-138 (1979) University of California, Irvin <<https://doi.org/10.2307/1170959>>

35. Turchin, Peter; Adams, Jonathan M.; Hall, Thomas D. (2006). *East-West Orientation of Historical Empires and Modern States*

Aquest segon estudi en separa l'imperi romà d'orient amb l'imperi bizantí. En la majoria dels imperis estudiats en aquest treball (en aquest que s'està escrivint, no l'esmentat en la línia anterior), l'any de màxima expansió territorial se sol trobar al voltant de l'ANY4, doncs, és el l'any que marca l'inici de la decadència i el final de l'etapa de plenitud imperial. Per altra banda, tal i com apuntà Deulofeu, els imperis presenten dos pics d'expansió, un durant el primer període agressiu i l'altre durant el segon. El fet que per

a l'imperi bizantí el pic del primer període sigui superior al del segon possiblement és ocasionat pel fet que a l'any inicial ja presentava una àrea molt gran en comparació a la resta dels imperis estudiats (degut a l'herència de l'imperi romà). Aquest fet ocasiona que en aquest aspecte esdevingui una observació atípica. Però prenent per any de màxima expansió l'altre que dona l'estudi de *Turchin, Peter; Adams, Jonathan M.; Hall, Thomas D. (2006)*, les proporcions d'àrea i població envers a les inicials també ocasiona que aparegui com a observació atípica.

Per aquest motiu, s'ha seguit la filosofia del treball proposada de prendre estrictament l'any en el qual l'imperi presentà la màxima expansió territorial.

36. Goldberg, Eric Joseph (2006). *Struggle for Empire: Kingship and Conflict Under Louis the German*, 817-876

“Louis’s kingship laid the foundations for an east Frankish kingdom that, in the eleventh century, was transformed into the medieval kingdom of Germany”

Si bé la coronació de Carlemany (25 de desembre del 800) marca l'inici de l'imperi teutònic, aquest imperi sorgí a partir de les divisions del Tractat de Verdun de l'any 843, en la França Oriental. Per aquest motiu es prendrà l'àrea corresponent a “aquesta” França Oriental.

<https://www.worldhistory.org/image/13842/division-of-the-carolingian-empire-in-843--870-ce/>

A partir del mapa proporcionat, l'extensió aproximada de França Oriental podria ser:

PAÍS	REGIÓ	ÀREA (km ²)
Alemanya	TOTES	357.027
	Renània-Palatinat	-19.847 / 2 *
	Rin del Nord-Westfàlia	-34.083 / 2 *
	Saarland	-2.569
Àustria	TOTES	83.850
Eslovènia	TOTES	20.273
Liechtenstein	TOTES	159
República Txeca	TOTES	78.868
Suïssa	TOTES	41.296 / 2
TOTAL		531.291 km²

* Aproximadament la meitat de Suïssa, així com dels estats federals alemanys de Renània-Palatinat i Rin del Nord-Westfàlia, s'inclourien a França Oriental l'any 843.

Les dades han estat extretes de: <http://www.statoids.com/statoids.html>

37. Taagepera, Rein (1997). *Expansion and Contraction Patterns of Large Polities: Context for Russia*.

“German “Roman” Empire [...]. It is estimated to peak around 1050 at about 1.0 Mm²”

38. Per la dificultat d'obtenció de dades de població per a França Oriental l'any 800, doncs, encara no havia estat creada, una bona manera d'assolir aquestes dades serà a partir de les estimacions de població de l'any 800 pels territoris estudiats al punt 36.

A partir de Jones, Richard; McEvedy, Colin (1978). *Atlas of World Population History*.

PAÍS	HABITANTS
Alemanya	3.250.000 / (1/0,9173) *
Àustria	500.000
Eslovènia	1.500.000 / (1/0,0793) **
Liechtenstein	0 ***
República Txeca	1.000.000 / (3/2) ****
Suïssa	300.000 / 2 *****
TOTAL	4.416.842 hab.

* L'àrea total d'Alemanya estimada al punt 36 és de 327.493 km², els quals corresponen a un 91,73% del total del país (<http://www.statoids.com/ude.html>).

** En la data de l'estudi, Eslovènia encara formava part de Iugoslàvia. Concretament en representava un 7,93% del territori del país (<https://www.encyclopedia.cat/gran-enciclopedia-catalana/iugoslavia>).

*** La població de Liechtenstein l'any 800 no apareix a l'estudi, possiblement no s'ha tingut en compte per a ésser irrellevantment petita.

**** En la data de l'estudi, República Txeca encara formava part de Txecoslovàquia. Tot i això, tal i com s'indica, “the Czechs (in Bohemia and Moravia, which together form the western two thirds of the country)”, s'han pres dues tercers parts de la població

***** Degut a que les dades corresponen a la totalitat del país i no per regions, la població de Suïssas ha estat estimada en proporció a l'àrea corresponent.

39. Jones, Richard; McEvedy, Colin (1978). *Atlas of World Population History*.

La població del Sacre Imperi Romanogermànic l'any 1000 està estimada en 10 milions i l'any 1100 en 12, pel que al 1050 per a un creixement lineal n'haguessin pogut ser 11.

40. Taagepera, Rein (1997). *Expansion and Contraction Patterns of Large Polities: Context for Russia*.

“German “Roman” Empire [...]. It is estimated to peak around 1050”

41. <https://www.britannica.com/topic/Viking-people>

A partir del mapa proporcionat, l'àrea d'origen dels vikings compren aproximadament els actuals països de Dinamarca (43.098 km²), Noruega (323.758 km²) i Suècia (441.370 km²), comportant una extensió total de 808.226 km². Les dades de superfície dels països s'han extret de <http://www.statoids.com/statoids.html>.

42. <https://www.britannica.com/topic/Viking-people>

A partir del mapa proporcionat, i comptant l'àrea incial estudiada al “punt 41”, l'àrea addicional assolida pels vikings en el seu punt àlgid comprèn els següents territoris:

PAÍS	REGIÓ	ÀREA (km ²)
Bielorrússia	Hòmiel	40.400 / 2 *
	Mahiliou	29.000
	Vítsiebsk	40.100 / 2 *
El Canadà	Gran Península del Nord	17.500 **
Estònia	<i>TOTES</i>	43.432
Finlàndia	Åland	1.553
	Finlàndia Pròpia	10.663
	Pirkanmaa	12.447
	Satakunta	7.957
	Tavastia Pròpia	5.200
	Uusimaa	9.131
França	La Normandia	17.589
Groenlàndia	Groenlàndia de l'Oest	119.100 / (3/2) ***
Irlanda	<i>TOTES</i>	68.897
Islàndia	<i>TOTES</i>	102.806
Letònia	Curlàndia	13.601
	Semigàlia	10.743

	Vidzeme	15.260 / (4/3) *****
Lituània	Siauliai	8.540
	Telšiai	4.350
	Tauragė	4.411
	Klaipeda	5.209
Polònia	Cuiàvia i Pomerània	19.971
	Gran Polònia	29.827
	Pomerània	18.310
	Pomerània Occidental	22.892
	Vàrmia i Masúria	24.173
Regne Unit	<i>TOTES</i>	243.602
	Escòcia	-77.212
Rússia	Ó. de Kaliningrad	15.100
	Ó. de Leningrad	85.900 / 2 *
	Ó. de Nóvgorod	55.300
	Ó. de Pskov	55.300 / 2 *
	Ó. de Smolensk	49.800
	Ó. de Tver	84.100 / 2 *
Ucraïna	Ciutat de Kíiv	839
	Kíiv	28.131
	Txernihiv	31.865

TOTAL	1.079.372 km²
--------------	---------------------------------

* Aproximadament la meitat de les províncies belarusses de Hòmiel i Vítsiebsk, així com de les óblast russes de Leningrad, Pskov i Tver, van formar part de l'expansió vikinga.

** La dada d'àrea del Canadà ha estat extreta de: http://www.northernpeninsula.ca/home/our_region.htm

*** Aproximadament dues tercers parts de Groenlàndia de l'Oest van formar part de l'expansió vikinga.

**** Aproximadament tres quartes parts de la regió letona de Vidzeme van formar part de l'expansió vikinga.

Les dades han estat extretes de: <http://www.statoids.com/statoids.html>.

Als 1.079.372 km² se'ls hi ha de sumar els 808.226 km² calculats al "punt 41" i s'obté una àrea màxima d'expansió dels vikings de 1.887.598 km².

43. Jones, Richard; McEvedy, Colin (1978). *Atlas of World Population History*.

Les dades de població proveïdes respecte als països escandinaus comencen a l'any 1 dC i la següent és al 1000, havent-hi un creixement lineal entre ambdós valors. Per aquest motiu, s'ha inferit el valor per a l'any 850 tenint en compte aquest creixement lineal:

PAÍS	POBL ANY 1 dC (hab)	POBL ANY 1000 (hab)	POBL ANY 850 (hab)
Dinamarca	200.000	400.000	370.000
Noruega	100.000	200.000	185.000
Suècia	200.000	400.000	370.000
TOTAL			925.000 hab

44. Jones, Richard; McEvedy, Colin (1978). *Atlas of World Population History*.

Les dades de població dels països corresponen a l'any 1000 i el 1300

PAÍS / REGIÓ	POBL ANY 1000	POBL ANY 1100	POBL INFERIDA ANY 1033
Anglaterra i Gales	1.500.000	1.750.000	1.582.500
El Canadà	100.000	200.000 any 1500	106.600 / (1/0,0018) *
Escandinàvia	1.000.000	1.250.000	1.082.500
França	6.500.000	7.500.000	6.830.000 / (1/0,0323)**
Groenlàndia	3.000	3.000	3.000 ***
Illa d'Irlanda	300.000	400.000	333.000
Islàndia	50.000	70.000	56.600

Polònia	1.250.000	1.500.000	1.332.500 / (1/0,3683) *****
Rússia europea	4.000.000	6.000.000	(4.660.000 / (1/0,6161)) / (1/0,0613) *****
URSS europea sense Rússia			(4.660.000 / (1/0,3839)) / (1/0,2474) *****
TOTAL			4.387.747 hab

* Del Canadà, els vikings només van ocupar 17.500 km², els quals componen un 0,18% del total de 9.984.670 km².

** De França, els vikings només van ocupar 17.589 km², els quals componen un 3,23% del total de 543.964 km².

*** El 86% de l'àrea de Groenlàndia està coberta de gel. Els vikings en van ocupar la part habitable, pel que en aquest cas no cal fer inferència.

**** De Polònia, els vikings van ocupar 115.173 km², els quals componen un 36,83% del total de 312.680 km².

***** Degut a que els territoris que comprenien la URSS europea eren molt extensos amb regions de densitats molt desiguals, calcular-ne la població en funció del territori podria comportar un resultat massa esbiaixat. Segons l'estudi, la URSS comptava amb 160 milions d'habitants el 1975. D'aquests 160 milions, 5 estaven compostos per lituans i letons, 3 per estonians i finesos i uns altres 14 milions comprenien altres ètnies (turcs, jueus, polonesos i alemanys). Dels 138 milions restants, un 60% estaven compost per russos, un 30% per ucraïnesos i un 10% per belarussos. És a dir, que la població dels països satèl·lits de la URSS comprenia un 39,38% de la població total de la URSS.

L'àrea total d'aquests països que ja no pertanyen a la URSS és de 972.942 km², i l'àrea que els vikings van conquerir en aquests països és de 240.666,8 km², un 24,74% del total. Per tant, respecte als habitants totals de la URSS europea, se li aplicarà un 38,39% per a obtenir els habitants de fora de Rússia i sobre aquest un 24,74% per a obtenir els corresponents a l'àrea vikinga. Sobre Rússia, es prendrà el 61,61% de la població restant i se li aplicarà la proporció territorial 232.850 km² sobre els 4.770.000 - 972.942 = 3.797.058 km² (un 6,13%).

D'aquesta manera, separant aquestes àrees de densitat, malgrat que amb Rússia pot haver-hi un cert marge d'error, hi haurà una reducció de biaix considerable.

Les dades de territori han estat extretes de: <http://www.statoids.com/statoids.html>.

45. <https://thevikingherald.com/article/the-viking-history-of-italy-a-primer/348>

“By the early 11th century CE, Normans had not only conquered the Anglo-Saxon kingdoms of England but had also pushed across from their southern Italian conquests to capture the island of Sicily.”

Entenent com a “principis del segle 11” el primer terç del segle (ja que el segon terç correspondria a “mitjans del segle” i el tercer a “finals del segle”), s’ha pres com a any puntual de la màxima expansió vikinga el 1033, al correspondre a l’any final d’aquest primer terç de segle i, per tant, assolides amb seguretat totes aquestes conquestes.

<https://www.britannica.com/place/Nordic-countries>

Malgrat que els pobles vikings originaris (Dinamarca, Noruega i Suècia) van assolir nous pics d’expansió (el segon pic que els hi pertocaria pels volts de l’ANY4), mai van

superar l'àrea total controlada pels vikings obtinguda al “punt 42”, motiu pel qual s'ha pres l'any 1033 com a any de màxima expansió.

46. <https://nightbringer.se/the-legend-of-king-arthur/arthurian-locations/d-arthurian-locations/denmark/>

“Towards the end of the ninth century, the various Danish tribes and chieftaincies coalesced into a more unified entity. The reign of Gorm the Old and his son Harald Bluetooth marked a significant phase in the formation of a centralized Danish kingdom.”

L'àrea d'aquestes tribus daneses, doncs, correspondria a l'àrea del regne quan es va unificar.

<https://www.medievalists.net/2020/07/medieval-danish-kingdom/>

“The Jelling runestone [...] tells us that Harald Bluetooth ‘united all of Denmark under him...”

Aproximadament, doncs, s'ha pres el valor de l'àrea actual de Dinamarca (42.954 km²):

<https://www.britannica.com/facts/Denmark>

47. https://www.wikiwand.com/en/Danish_Estonia; en descriu els diferents estats i ducats pertanyets al regne de Dinamarca en l'any 1220:

PAÍS	REGIÓ HISTÒRICA	REGIÓ ACTUAL	ÀREA (km ²)
Alemanya	Ducat de Schleswig i Estat de Holstein	Bona part de l'actual estat de Schleswig-Holstein	15.763
	Estats de Mecklemburg i Principat de Rügen	Bona part de l'actual estat de Mecklemburg-Pomerània Occidental	23.174
	Ducat de Pomerània	Bona part dels actuals Voivodats de Pomerània Occidental	7.069
		Pomerània	8.839
	Ducat de Pomeràlia	Regió de Vàrmia de l'actual Voivodat de Vàrmia i Masúria	4.500
		Aproximadament una tercera part l'Óblast de Kaliningrad	5.033
Dinamarca	Regne de Dinamarca	Bona part de l'actual Dinamarca	42.838

Estònia	Ducat d'Estònia	Comtat de Harju	4.327
		Comtat de Lääne-Viru	3.696
		Comtat de Ida-Viru	2.972
Suècia	Comtat Halland	Comtat Halland	5.454
	Comtat Escània	Comtat Escània	11.302
	Comtat de Blekinge	Comtat de Blekinge	2.941
TOTAL			137.908km²

Les dades del Regne de Dinamarca han estat extretes de <https://www.britannica.com/facts/Denmark>,

Les dades dels comtats suecs de Halland, Escània i Blekinge, han estat extretes de <https://www.hhogman.se/counties-of-sweden.htm>

Les dades del Ducat de Schleswig i Estats de Holstein han estat extretes de <https://www.iamexpat.de/lifestyle/german-federal-states/schleswig-holstein>

Les dades dels Estats de Mecklenburg i Principat de Rügen han estat extretes de <https://www.iamexpat.de/lifestyle/german-federal-states/mecklenburg-vorpommern>

Les dades del Ducat de Pomerània han estat extretes de https://www.flaggenlexikon.de/flag-encyclopedia/poland_voivodeship.htm

Les dades del Ducat de Pomerània han estat extretes de <https://www.wikiwand.com/en/Warmia> & <https://www.britannica.com/place/Kaliningrad-oblast-Russia>

Les dades del Ducat d'Estònia han estat extretes de https://www.wikiwand.com/en/Counties_of_Estonia

48. <https://en.natmus.dk/historical-knowledge/denmark/prehistoric-period-until-1050-ad/the-viking-age/power-and-aristocracy/how-big-was-denmark-in-the-viking-period/>

“...it is believed that the population of the area now occupied by Denmark was around 500,000 in the year 800 AD. This steadily increased until the 1200s, when the population reached c. 1 million.”

Seguint aquest creixement constant, la població que podia contenir el regne al 900, devien ser uns 675.000 habitants.

49. <https://en.natmus.dk/historical-knowledge/denmark/prehistoric-period-until-1050-ad/the-viking-age/power-and-aristocracy/how-big-was-denmark-in-the-viking-period/>
50. <https://www.britannica.com/place/Denmark/The-High-Middle-Ages>
51. https://tyflomapy.pl/plansza_1_966-1025_PANSTWO_POLSKIE_ZA_PIERWSZYCH_PIASTOW.html

A partir del mapa proporcionat, l'àrea de Polònia l'any 1025 es podria estimar aproximadament a partir de les següents regions:

PAÍS	REGIÓ	ÀREA (km ²)
------	-------	-------------------------

Polònia	Baixa Silèsia	19.947
	Cuiàvia i Pomerània	17.971
	Gran Polònia	29.827
	Łódź	18.219
	Lublin	25.122
	Lubusz	13.988
	Masòvia	35.558
	Opole	9.412
	Petita Polònia	15.183
	Pomerània	18.310
	Santa Creu	11.711
	Silèsia	12.333
	Subcarpàcia	17.846
República Txeca	Moràvia i Silèsia	5.535
	Moràvia Meridional	7.065
	Olomuc	5.159
	Zlín	3.964
Eslovàquia	Bratislava	2.052
	Trnava	4.147 / 2 *
	Trenčín	4.502
	Žilina	6.801 / 2 **

TOTAL	279.178 km²
--------------	-------------------------------

* Aproximadament la meitat de la regió de Trnava s'inclouria al Regne de Polònia de l'any 1025.

** Aproximadament la meitat de la regió de Žilina s'inclouria al Regne de Polònia de l'any 1025.

Les dades han estat extretes de: <http://www.statoids.com/statoids.html>

52. <https://www.britannica.com/place/Polish-Lithuanian-Commonwealth>

“While Poland in the mid-16th century occupied an area of about 100,000 square miles (260,000 square km)”

<https://www.britannica.com/topic/history-of-Poland/The-states-of-the-Jagiellonians>

“The opposition of the magnates was finally broken by the king, who detached Podlasie, Volhynia, and the Kiev and Braclaw regions from Lithuania and incorporated them into Poland.”

L'àrea d'aquestes regions queda descrita al següent enllaç:

<https://www.encyclopediaofukraine.com/display.asp?linkpath=pages%5CL%5CU%5CLublinUnionof.htm>

Per tant, aquests territoris presenten les següents extensions:

REGIÓ HISTÒRICA	PAÍS	REGIÓ ACTUAL	SUBREGIÓ ACTUAL	ÀREA (km²)
Voivodat de Podlàquia	Ucraïna	Khmelnitski	Kàmianets-Podilski	4.523
			Khmelnitski	10.758
		Ternòpil	Chortkiv	5.036 / (3/2) *
		Vínnitsia	Mohyliv-Podilski	3.221
			Zhmerinka	3.146
TOTAL VOIVODAT DE PODLÀQUIA				25.005,33 km²
Voivodat de Bratslav	Ucraïna	Kirovohrad	Holovanivsk	4.241
		Mikolàiv	Pervomaisk	3.793 / 2 **
		Odessa	Podilsk	7.055 / 2 **
		Txerkassi	Uman	4.518
		Vínnitsia	TOTES	26.513

			Mohyliv-Podilski	-3.221
			Zhmerinka	-3.146
TOTAL VOIVODAT DE BRATSLAV				34.329 km²
Voivodat de Kíiv	Belarús	Hòmiel	Brahin	1.981
			Khòiniki	2.020
			Naroulia	1.573
	Ucraïna	Dnipropetrovsk	TOTES	31.974
			Jitòmir	TOTES
		Khàrkiv	Krasnohrad	4.334
			Lozovà	4.029
		Kherson	Berislav	4.761
		Kíiv	TOTES	28.131
		Kíiv (ciutat)	TOTES	839
		Kirovohrad	TOTES	24.588
		Mikolàiv	Holovanivsk	-4.241
			Bashtanka	6.712
			Pervomaïsk	3.793 / 2 ***
			Voznesensk	6.154 / (3/2) ****
		Poltava	TOTES	28.748
		Sumi	Romní	3.883

		Txerkassi	TOTES	20.034
			Uman	-4.518
		Txerníhiv	Nezhin	7.223
			Priluki	5.213
			Txerníhiv	10.230 / 2 ***
		Zaporíjia	Vasylivka	4.308
			Zaporíjia	4.688
		TOTAL VOIVODAT DE KÍIV		
Voivodat de Volínia	Ucraïna	Khmelnitski	Shepetivka	5.346
			Rivne	TOTES
		Sarny		-6.216 / 2 *****
		Varaix		-3.327 / 2 *****
		Ternòpil	Krèmenets	2.636
		Volínia	TOTES	20.144
			Kamin-Kashyrski	-4.688 / 2 *****
			Kòvel	-7.651 / 2 *****
		TOTAL VOIVODAT DE VOLÍNIA		
TOTAL			313.792,5 km²	

* Aproximadament dos terços de del raíó ucraïnès de Chortkiv va pertànyer al Voivodat de Podlàquia.

** Aproximadament la meitat dels raions ucraïnesos de Pervomaïsk i Podilsk van pertànyer al Voivodat de Bratslav.

*** Aproximadament la meitat dels raions ucraïnesos de Pervomask i Txerníhiv, així com dues terceres parts del raíó de Voznesensk, van pertànyer al Voivodat de Kíiv.

**** Aproximadament la meitat dels raions ucraïnesos de Sarny, Varaix, Kamin-Kashyrski i Kòvel van pertànyer al Voivodat de Volínia.

Les dades han estat extretes de:

<https://data.humdata.org/dataset/cod-ab-ukr>,

<http://www.statoids.com/uua.html> i <https://www.citypopulation.de/en/belarus/admin/>.

Per tant, $260.000 + 313.792,5 = 573.792,5 \text{ km}^2$.

53. Berend, Nora; Urbanczyk, Przemysław; Wiszewski, Przemysław (2013). *Central Europe in the High Middle Ages*.

“...the population of the Piast realm in the eleventh and twelfth centuries [...]. Using regression analysis [...] it has been estimated that around the year 1000 Poland's population was about 1.25 million, but this figure is rough and appears too high.”

La dada d'1,25 milions d'habitants és considerada massa alta sobre l'any 1000, però es podria aproximar a la població del Regne de Polònia l'any 1025.

54. <https://www.vle.lt/straipsnis/lietuvos-didziosios-kunigaikstystes-gyventojai/>

“L'anàlisi dels padrons fiscals de 1572 mostra que [...]. Hi havia 1,7 milions de persones a tot el LDK.”

Jones, Richard; McEvedy, Colin (1978). *Atlas of World Population History*.

El 1550 la població de la Confederació de Polònia i Lituània era de 7,5 milions de persones, i el 1600 era de 8,25 milions. Per interpolació lineal, al 1569 hi devien haver unes 7,785 milions de persones.

D'aquests 7,785 milions, si traiem els 1,7 milions de lituans en queden 6,085 milions.

55. <https://www.britannica.com/topic/history-of-Poland/The-states-of-the-Jagiellonians>

“The opposition of the magnates was finally broken by the king, who detached Podlasie, Volhynia, and the Kiev and Braclaw regions from Lithuania and incorporated them into Poland.”

Així doncs, l'any 1569 és en el que Polònia, sense comptar amb els territoris lituans ja que la unió és de caràcter federal, presenta major extensió.

56. <https://www.historyfiles.co.uk/KingListsEurope/EasternLithuania.htm>

“1009: ...(the first mention of ‘Lithuania’ in written sources)”

A partir del mapa proporcionat, l'àrea de Lituània sobre l'any 1000 es podria estimar aproximadament a partir dels següents comtats lituans:

PAÍS	COMTAT	ÀREA (km ²)
Lituània	Alytus	5.425 / 2 *
	Kaunas	8.089 / (4/3) **
	Panevėžys	7.881
	Šiauliai	8.540

	Utena	7.201
	Vilnius	9.731
TOTAL		42.132,25 km²

* Aproximadament la meitat del comtat d'Alytus s'inclourien a la zona d'origen dels lituans.

** Aproximadament tres quartes parts del comtat de Kaunas s'inclourien a la zona d'origen dels lituans.

Les dades han estat extretes de: <http://www.statoids.com/statoids.html>

57. <https://www.vle.lt/straipsnis/lietuvos-didziosios-kunigaikstystes-gyventojai/>

58. Avakov, Alexander V. (2010). *Two Thousand Years of Economic Statistics: World Population, GDP and PPP*.

La població de Lituània l'any 1000 era de 75.000 habitants. Per inferir en la població dels lituans en aquell any, es farà proporcional a l'àrea que ocupaven, doncs, és molt complex saber quina podria haver estat aquella població en desenvolupament. Del "punt 56" se sap que els lituans ocupaven una àrea de 42.132,25 km², un 64,52% de l'àrea total de Lituània, de 65.300 km² (<http://www.statoids.com/statoids.html>). Conseqüentment, un 64,52% de 75.000 són 48.390 habitants.

59. <https://www.vle.lt/straipsnis/lietuvos-didziosios-kunigaikstystes-gyventojai/>

60. <https://www.vle.lt/straipsnis/lietuvos-didziosios-kunigaikstystes-gyventojai/>

61. <https://www.encyclopedia.cat/gran-enciclopedia-catalana/orde-teutonic>

Al mapa proporcionat hi consta una àrea anomenada "Nucli original d'assentament de l'ordre". A més, a partir de:

<https://warsawinstitute.review/news-en/impact-of-the-sars-cov-2-pandemic-on-the-tourism-sector-in-the-european-union-3/>

"The State of the Teutonic Order was established completely from scratch, in one of the last parts of Europe which was not politically developed at that time. Prussian tribes had not created a state system in this land before"

Per tant, s'entén que per a l'any 1000 l'àrea de l'Ordre Teutònic estava coberta per les tribus prussianes, i que, per tant, aquest nucli d'assentament no és més que la unió sota una mateixa entitat d'aquestes tribus. Per tant, aquesta n'és l'àrea original de l'Ordre, la qual aproximadament cobria:

PAÍS	VOIVODAT	ÀREA (km ²)
Polònia	Cuiàvia i Pomerània	17.971 / 3 *
	Vàrmia i Masúria	24.173 / 6 **
TOTAL		10.019,17 km²

* Aproximadament un terç del voivodat polonès de Cuiàvia i Pomerània s'inclouria en la regió d'origen de l'Ordre Teutònic.

* Aproximadament un sisè del voivodat polonès de Vârmai i Masúria s'inclouria en la regió d'origen de l'Ordre Teutònic.

Les dades han estat extretes de: <http://www.statoids.com/statoids.html>

62. <https://mappingeasterneurope.princeton.edu/item/the-teutonic-ordensstaat.html>

“Spanning [The Ordensland] ca. 177,000 km²”

63. <https://mappingeasterneurope.princeton.edu/item/the-teutonic-ordensstaat.html>

“Spanning [The Ordensland] ca. 177,000 km²”

I segons el “punt 64”, l'àrea conquerida entre el 1309 i el 1410 és de 57.856,17 km². Per tant, al 1309 hi havien 177.000 - 57.856,17 = 119.143,83 km². A més a més, del “punt 61” s'extreu que l'àrea original de l'ordre (sobre l'any 1000) era de 10.019,17 km², un 91,59% menys que al 1309. Quant a la població:

<https://warsawinstitute.review/news-en/impact-of-the-sars-cov-2-pandemic-on-the-tourism-sector-in-the-european-union-3/>

“the population is estimated to have reached ca. 170,000 at the turn of the 12th and 13th centuries”

La població proporcional a la diferència d'àrea entre el 1309 i el 1000, és a dir, si a 170.000 li traiem el 91,59% en queden 14.297 habitants. Però aquesta en seria la població proporcional al territori pels volts de l'any 1300, obviant les dinàmiques creixents i decreixents de la població.

Jones, Richard; McEvedy, Colin (1978). *Atlas of World Population History*.

Per a analitzar la dinàmica europea de desenvolupament de la població, pot ser útil observar les poblacions per als anys necessitats. Al 1300 Europa comptava amb 79 milions d'habitants i a l'any 1000 en comptava amb 36. Això indica un decreixement del 54,43%. Si s'aplica aquest mateix decreixement a la població del 1300 del territori original de l'Ordre, s'obté una població a l'any 1000 de 6.515 persones.

64. <https://warsawinstitute.review/news-en/impact-of-the-sars-cov-2-pandemic-on-the-tourism-sector-in-the-european-union-3/>

“the population is estimated to have reached ca. 170,000 at the turn of the 12th and 13th centuries”

Aquesta informació indica que sobre el 1300 l'ordre teutònic tenia uns 170.000 habitants. Una manera d'estimar la població de l'ordre al 1410 serà observant els patrons de creixement de la població europea.

Jones, Richard; McEvedy, Colin (1978). *Atlas of World Population History*.

A Europa a l'any 1300 hi vivien 79 milions de persones, al 1400, 60 milions, i al 1500, 81 milions. Per interpolació lineal, la població europea del 1410 devia ser 62,1 milions. Per tant, un decreixement del 21,39% respecte l'any 1300.

Aplicant aquest decreixement en la població de l'ordre, s'obtindria una població de 133.637 habitants al 1410.

Però els territoris de l'ordre al 1407 eren majors que al 1300. Concretament:

<https://www.enciclopedia.cat/gran-enciclopedia-catalana/orde-teutonic>

PAÍS	REGIÓ	ÀREA (km ²)
Estònia	TOTES	43.432 / 2 *
Lituània	Klaipèda	5.209 / 2 *
	Tauragé	4.411
Polònia	Pomerània	18.310
	Pomerània Occidental	22.892 / 3 **
Suècia	Gotland	3.184
TOTAL		57.856,17 km²

* Aproximadament la meitat d'Estònia, així com del comtat lituà Klaipèda, van ser conquerida per l'Ordre fins el 1410.

** Aproximadament un terç del voivodat polonès de la Pomerània Occidental va ser conquerit per l'Ordre fins el 1410.

Les dades han estat extretes de: <http://www.statoids.com/statoids.html>.

Per tant, entre el 1300 i el 1410 l'Ordre va augmentar els seus territoris 57.856,17 km² més, un augment del 32,69%.

Aplicant aquest augment a la població, s'obté que la població de l'Ordre Teutònic al 1410 hauria estat de 177.323 habitants.

65. <https://www.encyclopedia.cat/gran-enciclopedia-catalana/orde-teutonic>

Al mapa hi apareix l'expansió de l'Ordre en dues dates, el 1309 i el 1410. En aquesta segona és quan l'Ordre compren major expansió, motiu pel qual s'ha elegit com a data de màxima expansió territorial de l'imperi.

66. <https://www.worldhistory.org/uploads/images/15216.png?v=1644508991>

A partir del mapa, l'àrea de l'aleshores Gran Ducat de Moscou es podria estendre pel següent llistat d'òblasts russes:

DISTRICTE FEDERAL	ÒBLAST	ÀREA (km ²)
Nord-oest	Vólogda	145.700
Central	Iaroslavl	36.400
	Ivànovo	23.900
	Kostromà	60.100

	Moscou	47.000
	Moscou (ciutat federal)	804
	Vladímir	29.000
Volga	Nijni Nóvgorod	74.800
TOTAL		417.704 km²

Les dades han estat extretes de: <http://www.statoids.com/statoids.html>

67. Taagepera, Rein. *Size and duration of empires: systematics of size*. [en línia] Social Science Research 7, 108-127 (1978) University of California, Irvin <https://escholarship.org/content/qt8vx325vq/qt8vx325vq_noSplash_a2c2db5cdb06a3d4d4e35b2852a74948.pdf>

68. Gorskaya, Natalia (1994). *Historical Demography of Russia in the Feudal Era: Results and Problems of Study*.

La població del Gran Ducat de Moscou el 1500 era d'aproximadament 5,8 milions d'habitants.

Ivan III va dur a terme un cens finals del segle XV sobre el recent territori conquerit de Novgorod. Hi va comptabilitzar entre 500.000 i 800.000 habitants.

<https://www.britannica.com/place/Grand-Principality-of-Moscow>

“Ivan III (reigned 1462–1505) completed the unification of the Great Russian lands, incorporating Ryazan, Yaroslavl (1463), Rostov (northwest of Vladimir and southeast of Yaroslavl; 1474), Tver (1485), and Novgorod (1478) into the Muscovite principality.”

<https://www.britannica.com/place/Russia/Rurikid-Muscovy>

<https://www.worldhistory.org/uploads/images/15216.png?v=1644508991>

Els territoris de Ryazan, Iaroslav, Rostov i Tver comprenen una àrea de poca extensió en comparació al Grand Ducat de Moscou. Per la seva banda, el territori de Novgorod comprenia un extens territori. Si al 1500 els habitants de l'imperi n'eren uns 5,8 milions, i Novgorod comptava amb entre 500 i 800 mil, la població l'any 1450, tenint en compte els límits de territori i evolució de la població, no devia passar dels 5 milions.

69. <https://russianhistoryblog.org/2016/05/visualizing-the-1897-census-in-pie-charts/>

El cens de l'any 1897 comptabilitzava a l'Imperi rus una població total de 125.640.021 persones. Tot i ser l'any demandat només 8 anys després, la població russa presentava una taxa de creixement molt alta, pel que aquest nombre hagués pogut ser força més alt pels volts de l'any 1905.

<https://src-h.slav.hokudai.ac.jp/sympo/97summer/mironov.html#2>

“In the 1760s Russia became the most populous state in Europe. In 1762 its population comprised eighteen percent of the total population of Europe (23.2 of 130.0 million

people); in 1800, twenty two percent (39 of 175 million); in 1850, twenty seven percent (68.5 of 255 million); and in 1910 thirty two percent (161 of 505 million).”

Tenint la població esmentada pel 1897 i sabent que el 1910 es movia pels 161 milions, per interpolació lineal la població de l'imperi l'any 1905 podria haver estat de 147.456.008 persones.

70. Taagepera, Rein. *Size and duration of empires: systematics of size*. [en línia] Social Science Research 7, 108-127 (1978) University of California, Irvin <https://escholarship.org/content/qt8vx325vq/qt8vx325vq_noSplash_a2c2db5cdb06a3d4d4e35b2852a74948.pdf>

71. <https://www.britannica.com/biography/Osman-I>

“Osman I (born c. 1258—died 1324 or 1326) was the ruler of a Turkmen principality in northwestern Anatolia who is regarded as the founder of the Ottoman Turkish state.”

Amb Osman I s'inicia, doncs, l'imperi otomà l'any 1299.

<https://www.britannica.com/summary/Ottoman-Empire-Timeline>

Malgrat que el mapa proporcionat s'inicia el 1300, el territori de les tribus turques per al 1250 devia ser força similar a l'inicial dels turcs al mapa. Aquesta àrea es compon aproximadament dels següents territoris:

PAÍS	REGIÓ	PROVÍNCIA	ÀREA (km²)
TURQUIA	La Màrmara	Bilecik	4.307 / 2 *
		Bursa	10.963 / 2 *
		Sakarya	4.817 / 2 *
TOTAL			10.043,5 km²

* Aproximadament la meitat de les províncies de Bilecik, Bursa i Sakarya s'inclourien a la zona d'origen dels otomans.

Les dades han estat extretes de: <http://www.statoids.com/statoids.html>

72. Turchin, Peter; Adams, Jonathan M.; Hall, Thomas D. (2006). *East-West Orientation of Historical Empires and Modern States*

73. Jones, Richard; McEvedy, Colin (1978). *Atlas of World Population History*.

Per trobar els habitants de l'imperi otomà l'any 1250, degut a la dificultat de trobar dades específiques, s'ha estimat de manera proporcional a partir de les dades assolides al “punt 71”:

L'àrea total de la Turquia asiàtica és de 750.000 km². L'àrea estimada per a la zona d'origen dels otomans al “punt 71” és de 10.043,5 km², un 1,34% del total.

Pel que fa a la població, sobre el 1250 la Turquia asiàtica comptava amb uns 6,5 milions d'habitants. Conseqüentment, un 1,34% de 6.500.000 és 87.100 habitants.

74. Jones, Richard; McEvedy, Colin (1978). *Atlas of World Population History*.

La població de l'imperi otomà l'any 1683 se situa just per sota dels 24 milions de persones, pel que s'ha pres com a estimació 23.900.000 habitants.

75. Turchin, Peter; Adams, Jonathan M.; Hall, Thomas D. (2006). *East-West Orientation of Historical Empires and Modern States*

76. Coxe, William (1807). *History of the House of Austria, from the Foundation of the Monarchy by Rudolph of Habsburg to the Death of Leopold the Second: 1218-1792.*

Al 1437, els territoris que pertanyien a Àustria eren:

TERRITORI	PAÍS	REGIÓ	ÀREA (km ²)
Alta Àustria	Àustria	Alta Àustria	11.978
Àustria Anterior	Alemanya	Baden-Württemberg	35.752 / (1/0,6) *
	França	Alt Rin	3.525
		Baix Rin	4.755
Baixa Àustria	Àustria	Baixa Àustria	19.172
		Viena	415
Ducat d'Estíria	Àustria	Estíria	16.388
	Eslovènia	Baixa Sava	885
		Drava	2.170
		Sava Central	264
		Savinja	2.384
Ducat de Caríntia	Àustria	Caríntia	9.532
	Eslovènia	Caríntia	1.041
Ducat de Carniola	Eslovènia	Alta Carniola	2.137
		Eslovènia Central	2.555
		Eslovènia sudoriental	2.675

		Litoral-Carniola	1.456
		Interior	
El Tirol	Àustria	Tirol	12.650
	Itàlia	Trentino-Tirol del Sud	13.618
TOTAL			129.051,2 km²

* La regió de Suàbia correspondria amb la regió històrica de Württemberg, dins de l'actual estat alemany de Baden-Württemberg. Aquesta regió de Württemberg en comprendria aproximadament un 60% de l'àrea de la regió.

Les dades han estat extretes de: <http://www.statoids.com/statoids.html>

77. Wagar, Chip (2018). *Double Emperor: The Life and Times of Francis of Austria*
"The Austrian Empire or Kaisertum Österreich, in German, had been officially declared a year earlier, on August 11, 1804, It had a population on that date of some 21,200,000 in round numbers and covered over 698,700 square miles"

<https://www.metric-conversions.org/area/square-miles-to-square-kilometers.htm>

Les 698.700 milles quadrades equivalen a 1.809.625,4 km².

78. Jones, Richard; McEvedy, Colin (1978). *Atlas of World Population History*.

Per a estimar la població del Ducat d'Àustria al 1437, s'han fet inferències de població al 1437 (per interpolació lineal) pels diferents països, i se n'ha calculat la proporcionalitat d'àrea.

PAÍS	ÀREA "PUNT 76" (km ²)	ÀREA TOTAL PAÍS (km ²)	%	POBL 1400 PAÍS (milions hab.)	POBL 1500 PAÍS (milions hab.)	POBL 1437 INFERIDA (milions hab.)	POBL 1437 PROPORCIONAL (milions hab.)
ALE	21.451,2	357.592	6,00	6,5	9	7,425	0,4455
ÀUS	70.135	83.871	83,62	1,25	2	1,5275	1,2773
ESL	15.567	20.271	76,79	0,1388 *	0,1784 **	0,1535	0,1179
FRA	8.280	551.695	1,50	11	15	12,48	0,1872
ITÀ	13.618	302.073	4,51	7	10	8,11	0,3658
TOTAL							2.393.700 hab

* En la data de l'estudi, Eslovènia encara formava part de Iugoslàvia. Concretament en representava un 7,93% del territori del país (<https://www.enciclopedia.cat/gran-enciclopedia-catalana/iugoslavia>). Conseqüentment, s'ha pres el 7,93% de la població de Iugoslàvia el 1400.

** En la data de l'estudi, Eslovènia encara formava part de Iugoslàvia. Concretament en representava un 7,93% del territori del país (<https://www.enciclopedia.cat/gran-enciclopedia-catalana/iugoslavia>). Conseqüentment, s'ha pres el 7,93% de la població de Iugoslàvia el 1500.

Les dades totals de països han estat extretes de: <http://www.statoids.com/statoids.html>

79. Jones, Richard; McEvedy, Colin (1978). Atlas of World Population History.

L'any 1800 l'imperi austríac tenia unes 24 milions de persones.

80. Com s'ha vist al punt 77, l'imperi austríac comptava amb 1.809.625,4 km² el 1804.

<https://www.britannica.com/topic/history-of-Austria>

"In this treaty [Treaty of Pressburg, 1805] Austria gave up Venice to Napoleon's Italian kingdom, Tirol to Bavaria, and a number of other lands to Napoleon's clients."

El tirol cobreix una àrea de 12.648 km².

(<https://arequipa.mienciclo.com/articulo/ibero/tirol>)

<https://www.britannica.com/event/Treaty-of-Schonbrunn>

"[Treaty of Schönbrunn, 1809] Austria lost about 32,000 square miles (83,000 square km) of territory"

<https://www.britannica.com/topic/history-of-Austria>

"In September 1814 [...] Austria regained its lands on the Adriatic and in the area that is now Austria, which it had previously lost, and it won considerable territory in Italy, including Lombardy, Venetia, Tuscany, and Modena."

La regió de la Llombardia conté 23.859 km², la de la Toscana 22.992 km² i la província de Mòdena 2.689 km² (<http://www.statoids.com/uit.html>).

Per tant, tenint en compte tots aquests canvis territorials, l'àrea corresponent a l'imperi austríac l'any 1814 era de 1.763.517,4 km².

<https://www.britannica.com/topic/history-of-Austria>

A partir del Congrés de Viena, no hi ha més canvis territorials fins la pèrdua de la Llombardia durant la Segona Guerra d'Independència Italiana. I encara que al 1867 es produeix la creació de l'imperi austrohongarès, en aquesta unió el regne d'Hongria assoleix certa autonomia pel que Austria ja no arribarà a assolir per si sola més expansió. Per aquest motiu s'ha pres l'any 1804 com a any de màxima expansió territorial de l'imperi austríac.

81. <https://www.britannica.com/place/Spain/Aragon-Catalonia-and-Valencia-1276-1479>

Al 1479, la Corona d'Aragó comptava amb els territoris de l'Aragó, Catalunya, València, les Illes Balears, Sardenya i Sicília.

<https://www.britannica.com/place/Castile-region-Spain>

Pel que fa a la Corona de Castella, l'any 1479 comptava amb la resta de territoris corresponents a l'actual estat espanyol a excepció del Regne de Navarra i el Regne de Granada.

Per tant:

PAÍS	REGIÓ	ÀREA (km ²)
ESPANYA	TOTAL	504.782
	Navarra*	-10.421
	Granada **	-12.531
	Màlaga **	-7.276
	Almeria **	-8.774
ITÀLIA	Sardenya	24.090
	Sicília	25.707

TOTAL	515.577 km²
--------------	-------------------------------

* La part corresponent a l'estat espanyol del Regne de Navarra l'any 1479 ocuparia l'àrea de l'actual província de Navarra: <https://www.britannica.com/place/Kingdom-of-Navarre>

** La part corresponent al Regne de Granada l'any 1479 ocuparia l'àrea de les actuals províncies de Granada, Màlaga i Almeria: <https://www.britannica.com/place/Granada-historical-kingdom-Spain>

Les dades han estat extretes de: <http://www.statoids.com/statoids.html>

82. Taagepera, Rein. *Size and duration of empires: systematics of size*. [en línia] Social Science Research 7, 108-127 (1978) University of California, Irvin <https://escholarship.org/content/qt8vx325vq/qt8vx325vq_noSplash_a2c2db5cdb06a3d4d4e35b2852a74948.pdf>

83. Ladero Quesada, Miguel-Angel (2004) *El mundo económico de Isabel la Católica*. Habitants de la Corona de Castella (4.3 milions) més els de la Corona d'Aragó (0.865 milions) a finals del segle XV.

La població a Catalunya a l'època de la descoberta. Carles Camp

“Diferència que en realitat era menor, ja que no hem contat els Estats italians de la Corona Catalana. Sicília té actualment, malgrat l'emigració soferta, uns 5'7 milions d'habitants, i Sardenya 1'6. Crec correcta l'estimació d'un milió d'habitants entre les dues illes el 1500.”

Conseqüentment, la població total de l'imperi espanyol al 1479 devia rondar els 6,165 milions.

84. <https://worldpopulationreview.com/country-rankings/population-by-country-in-1800>

85. Taagepera, Rein. *Size and duration of empires: systematics of size*. [en línia] Social Science Research 7, 108-127 (1978) University of California, Irvin <https://escholarship.org/content/qt8vx325vq/qt8vx325vq_noSplash_a2c2db5cdb06a3d4d4e35b2852a74948.pdf>
86. <https://www.britannica.com/place/France/Foreign-affairs>. L'any 1594, França tenia una àrea aproximada a la França actual a excepció dels territoris enumerats. Tenint en compte que l'àrea total de la França metropolitana sense Còrsega és de 543.965 km², el valor que s'aproxima més al territori corresponent a França al 1594 és el corresponent a aquesta àrea amb excepció dels següents departaments:

PAÍS	DEPARTAMENT	ÀREA (km ²)
França	Ain	5.762
	Alps Marítims	4.299
	Alta Savoia	4.388
	Alt Rin	3.525
	Baix Rin	4.755
	Doubs	5.234
	Jura	4.999
	Meurthe i Mosel·la	5.241
	Mosa	6.216
	Mosel·la	6.216
	Nord	5.743
	Pas de Calais	6.671
	Pirineus Atlàntics	7.645
	Pirineus Orientals	4.116
	Savoia:	6.028

	Territori de Belfort	609
	Valclusa	3.567
	Vosges	5.874
TOTAL		90.888 km²

Les dades han estat extretes de: <http://www.statoids.com/statoids.html>

Per tant, l'àrea total de França al 1594 es devia aproximar a $543.965 - 90.888 = 453.077$ km².

87. Taagepera, Rein. *Size and duration of empires: systematics of size*. [en línia] Social Science Research 7, 108-127 (1978) University of California, Irvin <https://escholarship.org/content/qt8vx325vq/qt8vx325vq_noSplash_a2c2db5cdb06a3d4d4e35b2852a74948.pdf>
88. <https://www.tacitus.nu/historical-atlas/population/westeurope.htm>. La població de França al 1594 era de 18,5 milions d'habitants.
89. https://www.persee.fr/doc/pop_0032-4663_1974_hos_29_2_18715
“D’ailleurs, malgré l’Alsace-Lorraine recouvrée, la population au recensement de 1921 (39,2 millions d’habitants), sera inférieure à ce qu’elle était au recensement précédent, celui de 1911 (39,6 millions).”
 Estimant la població del 1920 per interpolació lineal s’obtenen 39,24 milions de persones.
90. Taagepera, Rein. *Size and duration of empires: systematics of size*. [en línia] Social Science Research 7, 108-127 (1978) University of California, Irvin <https://escholarship.org/content/qt8vx325vq/qt8vx325vq_noSplash_a2c2db5cdb06a3d4d4e35b2852a74948.pdf>
91. <https://www.oxfordreference.com/display/10.1093/acref/9780191736315.timeline.0001>
 L’any 1607 els territoris sota els dominis d’Anglaterra eren el regne d’Anglaterra i el regne de Gales.
<https://brilliantmaps.com/eng-gb-uk/>
 L’àrea d’Anglaterra és 130.279 km² i la de Gales és 20.779 km². Per tant, una àrea total de 151.058 km².
92. Taagepera, Rein. *Size and duration of empires: systematics of size*. [en línia] Social Science Research 7, 108-127 (1978) University of California, Irvin <https://escholarship.org/content/qt8vx325vq/qt8vx325vq_noSplash_a2c2db5cdb06a3d4d4e35b2852a74948.pdf>
93. <https://www.tacitus.nu/historical-atlas/population/british.htm>
94. https://www66.statcan.gc.ca/eng/1921/192101530117_p.%20117.pdf

La població de l'imperi anglès el 1911 era de 420.535.912 i el 1921 era de 444.822.232. Per interpolació lineal, la població de l'imperi l'any 1919 era d'uns 439.964.968 milions d'habitants.

95. <https://www.rmg.co.uk/stories/topics/size-british-empire>

96. <https://www.britannica.com/place/Germany/Germany-from-1871-to-1918>

L'any 1871 es dona per finalitzada la unificació alemanya envers tots aquells estats considerats alemanys. Així doncs, l'àrea d'aquells estats alemanys al 1800 ha de ser la mateixa que un cop finalitzada la unificació al 1871. Amb això:

“At its birth Germany occupied an area of 208,825 square miles (540,854 square km)”

97. <https://www.britannica.com/place/Germany/Germany-from-1871-to-1918>

“At its birth Germany occupied an area of 208,825 square miles (540,854 square km)”

Així doncs, des del 1871 fins almenys el 1914, l'extensió territorial de l'Alemanya continental no va canviar. A més d'aquesta regió, també caldria-hi sumar-hi la superfície total que ocupaven les seves colònies:

COLÒNIA	PAÍS ACTUAL	ÀREA (km ²)
Àfrica sud-occidental alemanya	Namíbia	835.100
Camerun	Camerun	495.000
Togo	Togo	87.200
Àfrica oriental alemanya	Tanzània, Burundi i Ruanda	995.000
Nova Guinea	Part de Papua Nova Guinea	240.000
Illes Marshall	Illes Marshall	400
Kiautschou	Part de la Xina	515
Illes Carolines, Palau i Illes Marianes	Micronèsia	2.376
Illes Samoa	Samoa Occidental	2.570
TOTAL		2.658.161 km²

Les dades han estat extretes de: <https://www.dhm.de/lemo/kapitel/kaiserreich/aussenpolitik/kolonien2>

Per tant, entre l'Alemanya continental i les seves colònies, l'imperi alemany hauria assolit una extensió màxima de 3.199.015 km².

98. <https://www.tacitus.nu/historical-atlas/population/germany.htm>

La població del que seria l'imperi amb les mateixes fronteres que quan es va unificar el 1816 tenia 22,4 milions d'habitants. En la mateixa pàgina també apareixen els valors per a 1820, 1830, 1840, 1850, 1860 i 1870. La taxa mitjana de creixement anual fent les

diferències entre un any i el seu següent (és a dir, restant la població d'un any per l'any anterior i dividint aquest nombre per la diferència d'anys. En base a això, fer la mitjana del total obtingut) és de 0,3992 milions de persones per any. Aplicant-hi aquesta taxa al primer any (1816), ja que n'és el més proper a l'any requerit (1800), s'obté una població total de $22,4 - 0,3992 * 16 = 16,013$ milions de persones.

99. *The Demography of War: Germany. Population Index*, Vol. 14, No. 4 (Oct., 1948)

“Germany's total population deficit of 5.4 million amounted to 8 per cent of her 1914 population of 67.8”

Però aquests 67,8 milions no inclouen els habitants de les colònies, descrits a continuació:

COLÒNIA	PAÍS ACTUAL	HABITANTS
Àfrica sud-occidental alemanya	Namíbia	86.000
Camerun	Camerun	2.540.000
Togo	Togo	1.003.000
Àfrica oriental alemanya	Tanzània, Burundi i Ruanda	7.511.000
Nova Guinea	Part de Papua Nova Guinea	601.000
Illes Marshall	Illes Marshall	-
Kiautschou	Part de la Xina	-
Illes Carolines, Palau i Illes Marianes	Micronèsia	-
Illes Samoa	Samoa Occidental	38.000
TOTAL		11.779.000 hab.

Les dades han estat extretes de: <https://www.dhm.de/lemo/kapitel/kaiserreich/aussenpolitik/kolonien2>

Per tant, l'imperi alemany l'any 1914 hauria comptat amb uns 79.579.000 habitants.

100. <https://nzhistory.govt.nz/war/germany-facts>

Taula 3.5. Variables de localització

1. <https://www.britishmuseum.org/blog/ancient-city-travel-guide-persepolis-500-bc>
2. <https://latitude.to/articles-by-country/ir/iran/840/persepolis>
3. <https://latitude.to/articles-by-country/ir/iran/840/persepolis>
4. https://elevation.maplogs.com/poi/persepolis_iran.82632.html
5. <https://latitude.to/articles-by-country/ir/iran/840/persepolis>
6. <https://www.heritagedaily.com/2020/05/carthage-capital-of-the-carthaginian-empire/128149>
7. <https://www.geodatos.net/en/coordinates/tunisia/carthage>
8. <https://www.geodatos.net/en/coordinates/tunisia/carthage>
9. <https://en-gb.topographic-map.com/map-452s8/Carthage/>
10. <https://www.geodatos.net/en/coordinates/tunisia/carthage>
11. Makaronas, J. *Pella: Capital of ancient Macedonia*. Scientific American, Vol. 215, No. 6 (1966).
Pàgina 2: “*Pella was the capital of Macedonia from the time of Archelaos, who ruled from 413 to 399 B.C., until the Roman conquest in 168 B.C.*”
12. <https://www.geodatos.net/coordenadas/grecia/pella-central-macedonia>
13. <https://www.geodatos.net/coordenadas/grecia/pella-central-macedonia>
14. <https://en-gb.topographic-map.com/map-7fpht6/Pella/>
15. <https://www.palaceofpella.gr/ancient-pella-history/?lang=en>
“*According to Herodotus, the city was located by the sea in the Classical period.*”
16. <https://education.nationalgeographic.org/resource/imperial-rome/>
17. <https://www.geodatos.net/en/coordinates/italy/rome>
18. <https://www.geodatos.net/en/coordinates/italy/rome>
19. <https://en-gb.topographic-map.com/map-vbkn51/Rome/>
20. <https://www.geodatos.net/en/coordinates/italy/rome>
21. <https://www.britannica.com/topic/Visigoth>
“*It was under him, too, that the Gallic kingdom, of which the capital was at Toulouse, reached its widest extent.*”
22. <https://www.geodatos.net/en/coordinates/france/toulouse>
23. <https://www.geodatos.net/en/coordinates/france/toulouse>
24. <https://en-gb.topographic-map.com/map-w3ktp/Toulouse/>
25. <https://www.geodatos.net/en/coordinates/france/toulouse>
26. <https://www.worldhistory.org/Franks/>
27. <https://www.geodatos.net/en/coordinates/germany/aachen>
28. <https://www.geodatos.net/en/coordinates/germany/aachen>
29. <https://en-gb.topographic-map.com/map-wpbtp/Aachen/>
30. <https://www.geodatos.net/en/coordinates/germany/aachen>
31. <https://www.britannica.com/place/Byzantine-Empire>
32. <https://www.geodatos.net/en/coordinates/turkey/istanbul>

33. <https://www.geodatos.net/en/coordinates/turkey/istanbul>
34. <https://en-gb.topographic-map.com/map-gm71h/Istanbul/>
35. <https://www.geodatos.net/en/coordinates/turkey/istanbul>
36. Brunn, Gerhard; Schieder, Theodor (1983). *Hauptstädte in europäischen Nationalstaaten. Karl Otmar Freiherr von Aretin's chapter "Das Reich ohne Hauptstadt? Die Multizentralität der Hauptstadtfunktionen im Reich bis 1806"*
El Sacre Imperi Romanogermànic no comptava amb una capital establerta, sinó que les principals funcions eren realitzades en diverses ciutats al llarg del regne. Per aquest motiu, s'ha decidit prendre per capital en l'estudi aquells ciutat on s'hi produïa la coronació dels reis.
<https://www.aachenerdom.de/en/a-place-of-history/imperial-throne/>
"The throne was first mentioned in writing in the context of the coronation of Otto I in 936. From that time on, every Roman-German King had to sit on the throne to legitimise his claim to power. Between 936 and 1531, a total of 30 kings were crowned in Aachen."
37. <https://www.geodatos.net/en/coordinates/germany/aachen>
38. <https://www.geodatos.net/en/coordinates/germany/aachen>
39. <https://en-gb.topographic-map.com/map-wpbtp/Aachen/>
40. <https://www.geodatos.net/en/coordinates/germany/aachen>
41. <https://viking.style/what-was-the-viking-capital/>
"The capital of the Viking kingdom was not located in one specific place. The Vikings didn't have capital because they were an occupation, not a nationality."
Tot i que no hi havia una capital com a tal establerta, sembla que Trondheim en va ser la primera en ser establerta capital, tal i com s'indica en el text extret del mateix enllaç:
"Trondheim is one of Norway's most historic cities, dating back to the Viking Age. Back then, a Viking King founded it as a city. King Olaf Tryggvason established Trondheim as his capital in 995 AD"
A més a més, durant els anys posteriors va seguir servint com a ciutat de coronació dels reis noruecs, per la qual cosa sembla que mai va deixar de ser una ciutat amb funcions reials.
<https://www.royalcourt.no/artikkel.html?sek=35247&tid=35248>
"The historical foundation of the modern consecration ceremony in Nidaros Cathedral is twofold. One element is the tradition of the hailing of the Norwegian high kings at the Øreting assembly in Trondheim, which may have been practised as early as the 900s. The other element is the coronations of the Norwegian kings in Bergen, which began in 1163"
Per aquests motius s'ha pres Trondheim com a capital de l'imperi viking.
42. <https://www.geodatos.net/en/coordinates/norway/trondheim>
43. <https://www.geodatos.net/en/coordinates/norway/trondheim>
44. <https://en-gb.topographic-map.com/map-p5f9gt/Trondheim/>
45. <https://www.geodatos.net/en/coordinates/norway/trondheim>

46. https://denmark.net/roskilde/#google_vignette
47. <https://www.geodatos.net/en/coordinates/denmark/roskilde>
48. <https://www.geodatos.net/en/coordinates/denmark/roskilde>
49. <https://en-gb.topographic-map.com/map-ljqzsz/Roskilde/>
50. <https://www.geodatos.net/en/coordinates/denmark/roskilde>
51. <https://www.britannica.com/place/Krakow>
“When King Władysław I (the Short) reunited Poland, he made Kraków his capital in 1320”
“By 1600 Kraków had begun to decline. The Jagiellon dynasty came to an end, and by 1611 King Sigismund III Vasa moved his capital from Kraków to Warsaw”
Per tant, l’any 1569 la capital del Regne de Polònia era Cracòvia.
52. <https://www.geodatos.net/en/coordinates/poland/krakow>
53. <https://www.geodatos.net/en/coordinates/poland/krakow>
54. <https://en-gb.topographic-map.com/map-c9kkl/Krakow/>
55. <https://www.geodatos.net/en/coordinates/poland/krakow>
56. <https://www.historyfiles.co.uk/KingListsEurope/EasternLithuania.htm>
“1323: Gediminas transfers the Lithuanian capital to Vilnius”
57. <https://www.geodatos.net/en/coordinates/lithuania/vilnius>
58. <https://www.geodatos.net/en/coordinates/lithuania/vilnius>
59. <https://en-gb.topographic-map.com/map-cwh3l/Vilnius/>
60. <https://www.geodatos.net/en/coordinates/lithuania/vilnius>
61. <https://mappingeasterneurope.princeton.edu/item/the-teutonic-ordensstaat.html>
“The Order’s headquarters was established in 1309 at Marienburg (Malbork)”
62. <https://www.geodatos.net/en/coordinates/poland/malbork>
63. <https://www.geodatos.net/en/coordinates/poland/malbork>
64. <https://en-gb.topographic-map.com/map-czv9cz/Malbork/>
65. <https://www.geodatos.net/en/coordinates/poland/malbork>
66. <https://www.britannica.com/place/St-Petersburg-Russia>
“For two centuries (1712–1918) it was the capital of the Russian Empire.”
67. <https://www.geodatos.net/en/coordinates/russia/saint-petersburg>
68. <https://www.geodatos.net/en/coordinates/russia/saint-petersburg>
69. <https://en-gb.topographic-map.com/map-5xgt6/Saint-Petersburg/>
70. <https://www.geodatos.net/en/coordinates/russia/saint-petersburg>
71. <https://www.worldhistory.org/article/1791/battles--conquests-of-the-ottoman-empire-1299-1683/>
“Mehmed the Conqueror launched his offensive besieging the city for months until the final assault resulted in the fall of Constantinople: 1453. He entered the city as a victor and declared it as his empire’s new capital, which it remained until the last vestiges of Ottoman authority seeped away centuries later.”
72. <https://www.geodatos.net/en/coordinates/turkey/istanbul>

73. <https://www.geodatos.net/en/coordinates/turkey/istanbul>
74. <https://en-gb.topographic-map.com/map-gm71h/Istanbul/>
75. <https://www.geodatos.net/en/coordinates/turkey/istanbul>
76. <https://www.britannica.com/place/Vienna>
77. <https://www.geodatos.net/en/coordinates/austria/vienna>
78. <https://www.geodatos.net/en/coordinates/austria/vienna>
79. <https://en-gb.topographic-map.com/map-7lx9m/Vienna/>
80. <https://www.geodatos.net/en/coordinates/austria/vienna>
81. <https://www.britannica.com/place/Madrid/History>
82. <https://www.geodatos.net/en/coordinates/spain/madrid>
83. <https://www.geodatos.net/en/coordinates/spain/madrid>
84. <https://en-gb.topographic-map.com/map-9mbm5k/Madrid/>
85. <https://www.geodatos.net/en/coordinates/spain/madrid>
86. <https://www.britannica.com/place/Paris>
87. <https://www.geodatos.net/en/coordinates/france/paris>
88. <https://www.geodatos.net/en/coordinates/france/paris>
89. <https://en-gb.topographic-map.com/map-kbs8/Paris/>
90. <https://www.geodatos.net/en/coordinates/france/paris>
91. <https://www.britannica.com/place/London/Character-of-the-city>
92. <https://www.geodatos.net/en/coordinates/united-kingdom/london>
93. <https://www.geodatos.net/en/coordinates/united-kingdom/london>
94. <https://en-gb.topographic-map.com/map-kffs8/London/>
95. <https://www.geodatos.net/en/coordinates/united-kingdom/london>
96. <https://www.britannica.com/place/Berlin>
“Berlin [...] lies at the heart of the North German Plain, athwart an east-west commercial and geographic axis that helped make it the capital of the kingdom of Prussia and then, from 1871, of a unified Germany. Berlin’s former glory ended in 1945”
97. <https://www.geodatos.net/en/coordinates/germany/berlin>
98. <https://www.geodatos.net/en/coordinates/germany/berlin>
99. <https://en-gb.topographic-map.com/map-w7xkl/Berlin/>
100. <https://www.geodatos.net/en/coordinates/germany/berlin>

Codi usat a l'R

Codi utilitzat a l'Rmarkdown per a la realització de tots els resultats en el present treball.

```
```{r, include=FALSE}
Llibreries
library("car")
library("dplyr")
library("ggplot2")
library("httr")
library("leaflet")
library("lmtest")
library("moments")
library("pec")
library("prodlim")
library("readxl")
library("rgl")
library("survival")
library("survminer")
```

Lectura de la BBDD
```{r}
url <- "https://raw.githubusercontent.com/Nil42NY/Data-empires/main/Dades.xlsx"

temp_file <- tempfile(fileext = ".xlsx")
GET(url, write_disk(temp_file, overwrite = TRUE))

read_all_sheets <- function(file_path) {
 sheet_names <- excel_sheets(file_path)
 sheets_list <- lapply(sheet_names, function(sheet) {
 read_excel(file_path, sheet = sheet)
 })
 names(sheets_list) <- sheet_names
 return(sheets_list)
}

all_sheets <- read_all_sheets(temp_file)
durada <- all_sheets[[1]]
demografia <- all_sheets[[2]]
localitzacio <- all_sheets[[3]]
```

```

print(head(durada))
print(head(demografia))
print(head(localitzacio))
```

Unió dels conjunts de dades
```{r}
data <- merge(durada, demografia, by = "ID")
data <- merge(data, localitzacio, by = "ID")
data$ID <- NULL
data$ONA <- as.factor(data$ONA)
data$MAR <- as.factor(data$MAR)
head(data)
```

Creació noves variables
```{r}
Densitat de poblacio en l'ANY1
data$DEN_1 <- data$POBL_1/data$AREA_1

Densitat de poblacio en l'ANY_ME
data$DEN_ME <- data$POBL_ME/data$AREA_ME

Diferències d'anys entre fases
data$ANY2_1 <- data$ANY2 - data$ANY1
data$ANY3_2 <- data$ANY3 - data$ANY2
data$ANY4_3 <- data$ANY4 - data$ANY3
data$ANY5_4 <- data$ANY5 - data$ANY4

head(data)
```

# DESCRIPTIU

Durada total dels imperis
```{r, echo = FALSE, error = TRUE, message = FALSE, warning = FALSE}
plot(sort(data$ANY1), data$TOTAL[order(data$ANY1)], type = "o",
 pch = 20, xlab = "Any", ylab = "Durada (anys)",
 ylim = c(0, 600), xlim = c(-1000, 1500))
abline(h = mean(data$TOTAL, na.rm = TRUE), col = "#7B236D", lty = 2)

```

```
grid()
```

```
plot(sort(data$ANY1), data$TOTAL[order(data$ANY1)], type = "o",
 pch = 20, xlab = "Any", ylab = "Durada (anys)",
 ylim = c(475, 600), xlim = c(-1000, 1500))
abline(h = mean(data$TOTAL, na.rm = TRUE), col = "#7B236D", lty = 1)
abline(h = mean(data$TOTAL, na.rm = TRUE) - 1.96 * sd(data$TOTAL, na.rm =
TRUE) / sqrt(length(data$TOTAL)),
 col = "#7B236D", lty = 2)
abline(h = mean(data$TOTAL, na.rm = TRUE) + 1.96 * sd(data$TOTAL, na.rm =
TRUE) / sqrt(length(data$TOTAL)),
 col = "#7B236D", lty = 2)
```

```
grid()
```

```
hist(data$TOTAL, col = "#7B236D", border = "white", main = " ", xlab = "Durada (anys)
total dels imperis", ylab = "Freqüència")
...
```

Durades de les diferents etapes

```
```{r, echo = FALSE, error = TRUE, message = FALSE, warning = FALSE}  
hist(data$ANY2-data$ANY1, col = "#7B236D", border = "white", xlim = c(0, 500), main =  
"Histograma del 1r procés agressiu", xlab = "Durada (anys) del 1r procés agressiu",  
ylab = "Freqüència")
```

```
hist(data$ANY3-data$ANY2, col = "#7B236D", border = "white", ylim = c(0, 10), main =  
"Histograma de la depressió", xlab = "Durada (anys) de la depressió", ylab =  
"Freqüència")
```

```
hist(data$ANY4-data$ANY3, col = "#7B236D", border = "white", main = "Histograma  
del 2n procés agressiu i plenitud", xlab = "Durada (anys) del 2n procés agressiu i  
plenitud", ylab = "Freqüència")
```

```
hist(data$ANY5-data$ANY4, col = "#7B236D", border = "white", main = "Histograma  
de la decadència", xlab = "Durada (anys) de la decadència", ylab = "Freqüència")  
...
```

Temps fins a esdeveniments

```
```{r, echo = FALSE, error = TRUE, message = FALSE, warning = FALSE}
```

```
hist(data$ANY3-data$ANY1, col = "#7B236D", border = "white", main = "Histograma
del temps fins el 2n procés agressiu", xlab = "Temps (anys) fins l'inici del 2n procés
agressiu", ylab = "Freqüència")
```

```
hist(data$ANY4-data$ANY1, col = "#7B236D", border = "white", main = "Histograma
del temps fins la decadència", xlab = "Temps (anys) fins l'inici de la decadència", ylab =
"Freqüència")

```

Any de MET

```
```{r, echo = FALSE, error = TRUE, message = FALSE, warning = FALSE}
hist(data$ANY_ME-data$ANY1, col = "#7B236D", border = "white", ylim = c(0, 10),
main = " ", xlab = "Temps (anys) fins l'any de màxima expansió territorial", ylab =
"Freqüència")
---
```

Onada imperialista

```
```{r, echo = FALSE, error = TRUE, message = FALSE, warning = FALSE}
df <- data %>%
 group_by(ONA) %>%
 summarise(count = n()) %>%
 mutate(percent = count / sum(count) * 100)

ggplot(df, aes(x = "", y = percent, fill = ONA)) +
 geom_col(color = "black") +
 geom_text(aes(label = paste0(round(percent, 1), "%")),
 position = position_stack(vjust = 0.5)) +
 coord_polar(theta = "y") +
 scale_fill_manual(values = c("#7B236D", "#f2f2f2")) +
 labs(x = NULL, y = NULL, fill = "Onada imperialista") +
 theme_void()

```

Àrea inicial dels imperis

```
```{r, echo = FALSE, error = TRUE, message = FALSE, warning = FALSE}
plot(sort(data$ANY1), data$AREA_1[order(data$ANY1)], type = "o",
     pch = 20, xlab = "Any", ylab = "Àrea (mil. km2)",
     ylim = c(0, 2), xlim = c(-1000, 2000))
abline(h = mean(data$AREA_1), col = "#7B236D", lty = 2)
title("Àrea inicial dels imperis")
```

```
grid()
```

```
hist(data$AREA_1, col = "#7B236D", border = "white", ylim = c(0, 12), main =  
"Histograma de l'àrea inicial dels imperis", breaks = 7, xlab = "Àrea (mil. km2)", ylab =  
"Freqüència")
```

```
```
```

Àrea màxima dels imperis

```
```{r, echo = FALSE, error = TRUE, message = FALSE, warning = FALSE}
```

```
plot(sort(data$ANY1), data$AREA_ME[order(data$ANY1)], type = "o",
```

```
  pch = 20, xlab = "Any", ylab = "Àrea (mil. km2)",
```

```
  ylim = c(0, 34), xlim = c(-1000, 2000))
```

```
abline(h = mean(data$AREA_ME), col = "#7B236D", lty = 2)
```

```
title("Àrea màxima dels imperis")
```

```
grid()
```

```
hist(data$AREA_ME, col = "#7B236D", border = "white", ylim = c(0, 14), main =  
"Histograma de l'àrea màxima dels imperis", xlab = "Àrea (mil. km2)", ylab =  
"Freqüència")
```

```
```
```

Població inicial dels imperis

```
```{r, echo = FALSE, error = TRUE, message = FALSE, warning = FALSE}
```

```
plot(sort(data$ANY1), data$POBL_1[order(data$ANY1)], type = "o",
```

```
  pch = 20, xlab = "Any", ylab = "Població (mil. hab.)",
```

```
  ylim = c(0, 20), xlim = c(-1000, 2000))
```

```
abline(h = mean(data$POBL_1), col = "#7B236D", lty = 2)
```

```
title("Població inicial dels imperis")
```

```
grid()
```

```
hist(data$POBL_1, col = "#7B236D", border = "white", breaks = 8,ylim = c(0, 12), main =  
"Histograma de la població inicial dels imperis", xlab = "Població (mil. hab.)", ylab =  
"Freqüència")
```

```
```
```

Població amb àrea màxima dels imperis

```
```{r, echo = FALSE, error = TRUE, message = FALSE, warning = FALSE}
```

```
plot(sort(data$ANY1), data$POBL_ME[order(data$ANY1)], type = "o",
```

```
  pch = 20, xlab = "Any", ylab = "Població (mil. hab.)",
```

```
  ylim = c(0, 500), xlim = c(-1000, 2000))
```

```

abline(h = mean(data$POBL_ME), col = "#7B236D", lty = 2)
title("Població amb àrea màxima dels imperis")
grid()

hist(data$POBL_ME, col = "#7B236D", border = "white", breaks = 8, xlim = c(0, 500),
ylim = c(0, 20), main = "Histograma de la població amb àrea màxima dels imperis", xlab
= "Població (mil. hab.)", ylab = "Freqüència")
```

Densitat de població inicial dels imperis
```{r, echo = FALSE, error = TRUE, message = FALSE, warning = FALSE}
plot(sort(data$ANY1), data$DEN_1[order(data$ANY1)], type = "o",
      pch = 20, xlab = "Any", ylab = "Densitat de població (hab/km2)",
      ylim = c(0, 50), xlim = c(-1000, 2000))
abline(h = mean(data$DEN_1), col = "#7B236D", lty = 1)
abline(h = mean(data$DEN_1) - 1.96 * sd(data$DEN_1) / sqrt(length(data$DEN_1)), col
= "#7B236D", lty = 2)
abline(h = mean(data$DEN_1) + 1.96 * sd(data$DEN_1) / sqrt(length(data$DEN_1)),
col = "#7B236D", lty = 2)
title("Densitat de població inicial dels imperis")
grid()

hist(data$DEN_1, col = "#7B236D", border = "white", xlim = c(0, 50), main = "H.
densitat de població inicial dels imperis", xlab = "Densitat de població (hab/km2)", ylab =
"Freqüència")
```

Densitat de població amb àrea màxima dels imperis
```{r, echo = FALSE, error = TRUE, message = FALSE, warning = FALSE}
plot(sort(data$ANY1), data$DEN_ME[order(data$ANY1)], type = "o",
      pch = 20, xlab = "Any", ylab = "Densitat de població (hab/km2)",
      ylim = c(0, 25), xlim = c(-1000, 2000))
abline(h = mean(data$DEN_ME), col = "#7B236D", lty = 1)
abline(h = mean(data$DEN_ME) - 1.96 * sd(data$DEN_ME) /
sqrt(length(data$DEN_ME)), col = "#7B236D", lty = 2)
abline(h = mean(data$DEN_ME) + 1.96 * sd(data$DEN_ME) /
sqrt(length(data$DEN_ME)), col = "#7B236D", lty = 2)
title("Densitat de població amb àrea màxima dels imperis")
grid()

```

```
hist(data$DEN_ME, col = "#7B236D", border = "white", breaks = 10, xlim = c(0, 30),
main = "H. densitat de població amb àrea màxima dels imperis", xlab = "Densitat de
població (hab/km2)", ylab = "Freqüència")
```
```

Densitats de població: inicial vs àrea màxima

```
```{r, echo = FALSE, error = TRUE, message = FALSE, warning = FALSE}
plot(sort(data$ANY1), data$DEN_1[order(data$ANY1)], type = "o",
     pch = 20, xlab = "Any", ylab = "Densitat de població (hab/km2)",
     ylim = c(0, 50), xlim = c(-1000, 2000), col = "#7B236D")
lines(sort(data$ANY1), data$DEN_ME[order(data$ANY1)], type = "o", pch = 20, col =
"gold")
grid()
legend("topleft", legend = c("Densitat inicial", "Densitat àrea màxima"), col =
c("#7B236D", "gold"), pch = 20, lty = 1)
```
```

Coordenades: Latitud vs Longitud

```
```{r, echo = FALSE, error = TRUE, message = FALSE, warning = FALSE}
leaflet(data) %>%
  addTiles() %>%
  addCircleMarkers(
    ~LON, ~LAT,
    color = "#7B236D", # Color del contorn
    fillColor = "white", # Color d'emplenament
    fillOpacity = 0.7, # Opacitat de l'emplenament
    radius = 5 # Mida del cercle
  )
```
```

Coordenades: Longitud vs Altitud

```
```{r, echo = FALSE, error = TRUE, message = FALSE, warning = FALSE}
plot(data$LON, data$ALT, type = "h", ylim = c(0, 2000), xlab = "Longitud", ylab =
"Altitud")
text(data$LON, data$ALT, labels = data$CAP, pos = 3, cex = 0.5, col = "#7B236D")
```
```

Capital amb sortida al mar?

```
```{r, echo = FALSE, error = TRUE, message = FALSE, warning = FALSE}
df <- data %>%
```

```

group_by(MAR) %>%
summarise(count = n()) %>%
mutate(percent = count / sum(count) * 100)

ggplot(df, aes(x = "", y = percent, fill = MAR)) +
  geom_col(color = "black") +
  geom_text(aes(label = paste0(round(percent, 1), "%")),
            position = position_stack(vjust = 0.5)) +
  coord_polar(theta = "y") +
  scale_fill_manual(values = c("#7B236D", "#f2f2f2"),
                    labels = c("No", "Sí")) +
  labs(x = NULL, y = NULL, fill = "Capital amb sortida al mar") +
  theme_void()
```

MODELATGE

Model ANY2_1
```{r, echo = FALSE, error = TRUE, message = FALSE, warning = FALSE}
ImpANY2_1 <- lm(log(ANY2_1) ~ AREA_1, data = data)

# R-quadrat
summary(ImpANY2_1)

# Normalitat dels residus
qqnorm(residuals(ImpANY2_1))
qqline(residuals(ImpANY2_1))
shapiro.test(residuals(ImpANY2_1)) # p-val > 0.05, normalitat

# Homoscedasticitat
plot(fitted(ImpANY2_1), residuals(ImpANY2_1))
abline(h = 0, col = "#7B236D")
# Test de Bresuch-Pagan
bptest(ImpANY2_1) # p-val > 0.05, homoscedastic

# Linealitat
plot(ImpANY2_1)

# Independència dels residus
# Durbin-Watson test

```

```

dwtest(ImpANY2_1) # p-val > 0.05, independència dels residus

# Multicolinealitat
vif(ImpANY2_1)

# Anàlisi de valors influents
plot(ImpANY2_1, which = 4)
abline(h = 4/dim(data)[1], col = "#7B236D")
```

Model ANY3_2
```{r, echo = FALSE, error = TRUE, message = FALSE, warning = FALSE}
ImpANY3_2 <- lm(ANY3_2 ~ AREA_1 + ALT, data = data)

# R-quadrat
summary(ImpANY3_2)

# Normalitat dels residus
qqnorm(residuals(ImpANY3_2))
qqline(residuals(ImpANY3_2))
shapiro.test(residuals(ImpANY3_2)) # p-val > 0.05, normalitat

# Homoscedasticitat
plot(fitted(ImpANY3_2), residuals(ImpANY3_2))
abline(h = 0, col = "#7B236D")
# Test de Bresuch-Pagan
bptest(ImpANY3_2) # p-val > 0.05, homoscedastic

# Linealitat
plot(ImpANY3_2)

# Independència dels residus
# Durbin-Watson test
dwtest(ImpANY3_2) # p-val > 0.05, independència dels residus

# Multicolinealitat
vif(ImpANY3_2)

# Anàlisi de valors influents
plot(ImpANY3_2, which = 4)

```

```

abline(h = 4/dim(data)[1], col = "#7B236D")
```

Model ANY4_3
```{r, echo = FALSE, error = TRUE, message = FALSE, warning = FALSE}
ImpANY4_3 <- lm(ANY4_3 ~ AREA_1, data = data)

# R-quadrat
summary(ImpANY4_3)

# Normalitat dels residus
qqnorm(residuals(ImpANY4_3))
qqline(residuals(ImpANY4_3))
shapiro.test(residuals(ImpANY4_3)) # p-val > 0.05, normalitat

# Homoscedasticitat
plot(fitted(ImpANY4_3), residuals(ImpANY4_3))
abline(h = 0, col = "#7B236D")
# Test de Bresuch-Pagan
bptest(ImpANY4_3) # p-val > 0.05, homoscedastic

# Linealitat
plot(ImpANY4_3)

# Independència dels residus
# Durbin-Watson test
dwtest(ImpANY4_3) # p-val > 0.05, independència dels residus

# Multicolinealitat
vif(ImpANY4_3)

# Anàlisi de valors influents
plot(ImpANY4_3, which = 4)
abline(h = 4/dim(data)[1], col = "#7B236D")
```

Model ANY5_4
```{r, echo = FALSE, error = TRUE, message = FALSE, warning = FALSE}
ImpANY5_4 <- lm(ANY5_4 ~ ANY2_1 + ANY3_2 + ANY4_3, data = data)

```

```

# R-quadrat
summary(ImpANY5_4)

# Normalitat dels residus
qqnorm(residuals(ImpANY5_4))
qqline(residuals(ImpANY5_4))
shapiro.test(residuals(ImpANY5_4)) # p-val > 0.05, normalitat

# Homoscedasticitat
plot(fitted(ImpANY5_4), residuals(ImpANY5_4))
abline(h = 0, col = "#7B236D")
# Test de Bresuch-Pagan
bptest(ImpANY5_4) # p-val > 0.05, homoscedastic

# Linealitat
plot(ImpANY5_4)

# Independència dels residus
# Durbin-Watson test
dwtest(ImpANY5_4) # p-val > 0.05, independència dels residus

# Multicolinealitat
vif(ImpANY5_4)

# Anàlisi de valors influents
plot(ImpANY5_4, which = 4)
abline(h = 4/dim(data)[1], col = "#7B236D")
```

MODEL PREDICTIU
```{r, echo = FALSE, error = TRUE, message = FALSE, warning = FALSE}
# Variable estat
data$Estat <- ifelse(is.na(data$TOTAL), 0, 1)
data$ANY5[17:20] <- rep(2024, 4)
data$TOTAL[17:20] <- data$ANY5[17:20] - data$ANY1[17:20]

# Preparació de les dades
data$temps_supervivencia <- ifelse(is.na(data$TOTAL),
                                   2024 - data$ANY1,
                                   data$TOTAL)

```

```

surv_obj <- Surv(data$temps_supervivencia, data$Estat)

# Ajustament model de Cox
model_cox <- coxph(surv_obj ~ log(ANY4_3), data = data)
summary(model_cox)
```

Gràfic model
```{r, echo = FALSE, error = TRUE, message = FALSE, warning = FALSE}
# Interpretació dels resultats
test_prop_hazards <- cox.zph(model_cox)
print(test_prop_hazards)
plot(test_prop_hazards)

# Variable ONA
model_survfit <- survfit(surv_obj ~ log(ANY4_3), data = data)
plot(model_survfit, main = "Corba de supervivència", xlab = "Temps", ylab =
"Probabilitat de supervivència")

data$ANY4_3_cat <- cut(data$ANY4_3, breaks = 2, labels = c("Baix", "Alt"))
model_survfit_cat <- survfit(Surv(TOTAL, Estat) ~ ANY4_3_cat, data = data)

ggsurvplot(model_survfit_cat, data = data,
  risk.table = TRUE,
  pval = TRUE,
  conf.int = TRUE,
  xlab = "Temps",
  ylab = "Probabilitat de supervivència",
  title = "Corba de supervivència log(ANY4_3)")
```

Prediccions finals
```{r, echo = FALSE, error = TRUE, message = FALSE, warning = FALSE}
# Predicció del risc relatiu
pred_risk <- predict(model_cox, newdata = data[17,], type = "risk")
pred_risk <- predict(model_cox, newdata = data[18,], type = "risk")
pred_risk <- predict(model_cox, newdata = data[19,], type = "risk")

# Predicció del predictor lineal
pred_lp <- predict(model_cox, newdata = data[17,], type = "lp")

```

```

pred_lp <- predict(model_cox, newdata = data[18,], type = "lp")
pred_lp <- predict(model_cox, newdata = data[19,], type = "lp")

# PREDICCIONS FINALS
threshold <- 0.5

# Prediccions per a l'imperi espanyol
pred_surv_esp <- survfit(model_cox, newdata = data[17,])
threshold <- 0.46
time_to_event_esp <- min(pred_surv$time[pred_surv_esp$surv < threshold])

# Prediccions per a l'imperi francès
pred_surv_fra <- survfit(model_cox, newdata = data[18,])
time_to_event_fra <- min(pred_surv$time[pred_surv_fra$surv < threshold])

# Prediccions per a l'imperi anglès
pred_surv_ang <- survfit(model_cox, newdata = data[19,])
time_to_event_ang <- min(pred_surv$time[pred_surv_ang$surv < threshold])
'''

```