



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

REPRESENTACIÓ DE LAWRENCE-KRAMMER I LINEALITAT DEL GRUP DE TRENES

Autora: Júlia Villaró i Cañizal

Director: Dr. Ignasi Mundet i Riera

Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 15 de gener de 2025

Abstract

We study the braid group, analyzing its algebraic and topological structure.

We also study the Lawrence-Krammer representation and its faithfulness (injectivity) for all $n \geq 1$. This representation is presented as a morphism from the braid group, described according to Artin's presentation, to the automorphism group of a homology group associated with a specific space.

In particular, we prove that braid groups are linear.

Resum

S'estudia el grup de trenes, analitzant-ne l'estructura algebraica i topològica.

S'estudia la representació de Lawrence-Krammer i la seva fidelitat (injectivitat) per a tot $n \geq 1$. Aquesta representació es presenta com un morfisme des del grup de trenes, descrit segons la presentació d'Artin, cap al grup d'automorfismes d'un grup d'homologia associat a un espai concret.

En particular, demostrem que els grups de trenes són lineals.

Agraïments

Vull agrair, en primer lloc, al meu tutor, Dr. Ignasi Mundet, pel temps dedicat, la paciència, el seguiment i l'orientació que m'ha proporcionat durant aquests mesos.

També vull expressar el meu agraïment als meus pares pel suport constant que m'han donat.

Índex

1	Introducció	1
2	Conceptes previs	5
2.1	Definicions algebraiques	5
2.2	Nocions topològiques	6
2.2.1	Homotopia	6
2.2.2	Recobriments	8
2.2.3	Índex d'un camí tancat	10
2.2.4	Homologia	11
2.2.5	CW-complex	15
3	El grup de trenes	16
3.1	Estructura algebraica del grup de trenes	18
3.2	Espai de configuracions	20
3.3	Mapping class groups	21
3.3.1	Half-twists	23
3.3.2	El grup de trenes com a grup modular	24
4	La representació de Lawrence-Krammer	26
4.1	L'homeomorfisme	27
5	La linealitat del grup de trenes	31
5.1	Noodles i arcs generadors	31
5.2	Fidelitat de la representació de Lawrence-Krammer	34
5.2.1	Classe d'homologia associada a un arc generador	34
5.2.2	Superfícies associades a noodles	41
5.2.3	Demostració del Teorema	43
5.3	El grup de trenes és lineal	45
6	Matrius de la representació de Lawrence-Krammer	47
7	Conclusions	49

1 Introducció

L'objectiu d'aquest treball és demostrar que els grups de trenes admeten representacions lineals fidels. Per poder-ho provar, primer recordarem algunes nocions bàsiques, així com els grups de trenes, que són casos particulars de grups.

Recordem que un grup $(G, *, e, i)$ és un conjunt no buit G amb tres operacions: una aplicació $*$: $G \times G \rightarrow G$ (que anomenem producte), un element $e \in G$, i una aplicació i : $G \rightarrow G$ (l'invers), tals que e és l'element neutre per $*$, i $\forall a, b, c \in G$, tenim $a * i(a) = i(a) * a = e$ i $a * (b * c) = (a * b) * c$.

Una representació d'un grup G és un morfisme que va des de G al grup lineal general $GL_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{C}) \mid \det(A) \neq 0\}$, format per les matrius quadrades invertibles de n files, n columnes i coeficients a $\mathbb{C}$. Per tant és una manera d'escriure els seus elements com a matrius, de tal manera que es preservin les operacions del grup. Si aquest morfisme és injectiu, direm que la representació és fidel.

Un grup és lineal si té una representació fidel, és a dir, si G és isomorf a un subgrup de $GL_n(\mathbb{C})$, per a un cert enter $n \geq 1$.

Si G és un grup finit, és a dir, té un nombre finit d'elements, aleshores es pot representar matricialment, i per tant, tot grup finit és lineal. Vegem-ho:

Teorema 1.1. (Cayley.) *Sigui G un grup finit d'ordre n . Llavors, existeix un morfisme injectiu de grups $\varphi : G \rightarrow \Sigma_n$, on Σ_n és el grup simètric, de n elements.*

DEMOSTRACIÓ. Siguin $g, g', h \in G$. Considerem l'acció de G en G denotada per σ_g , on cada element $g \in G$ produeix una permutació $h \mapsto g \cdot h$ del conjunt G . Per tant, també es compleix $\sigma_g \in \Sigma_G$, que identifiquem amb Σ_n , ja que dos conjunts tenen el mateix cardinal si i només si els seus grups simètrics són isomorfs.

Considerem ara la funció $\sigma : G \rightarrow \Sigma_n$, on $g \mapsto \sigma_g$. Usant les propietats de l'acció:

$$(\sigma_g \cdot \sigma_{g'})(h) = \sigma_g(\sigma_{g'}(h)) = \sigma_g(g' \cdot h) = g \cdot (g' \cdot h) = (g \cdot g') \cdot h = \sigma_{g \cdot g'}(h)$$

per a tot $h \in G$, i aleshores

$$\sigma(g) \cdot \sigma(g') = \sigma_g \cdot \sigma_{g'} = \sigma_{g \cdot g'} = \sigma(g \cdot g')$$

Per tant hem vist que σ és un morfisme de grups. A més, serà injectiu, ja que $\sigma(g) = id_G$ implica que $h = g \cdot h$ per a tot $h \in G$. En particular, per $h = e$ tindrem $e = g \cdot e = g$. $\square$

Aplicant el Teorema de Cayley i usant que el grup simètric Σ_n és un subgrup del grup lineal general (ja que tota permutació es pot representar amb una matriu invertible), arribem a la conclusió que G també és isomorf a un subgrup de $GL_n(\mathbb{C})$; que implica que tot grup finit és lineal.

Sigui G un grup; sigui B un subconjunt de G tal que, si F_B denota el grup lliure generat per B , el morfisme natural $p : F_B \rightarrow G$ és exhaustiu; i sigui R un conjunt del nucli de p tal que tot element del nucli de p es pot escriure com una paraula en els elements de R . Definim una presentació de G com una parella formada pels conjunts B i R . Es fa servir la notació $G = \langle B \mid R \rangle$, i es diu que B és el conjunt de generadors, i R el conjunt de relacions. Una presentació serà finita si B i R tenen un nombre finit d'elements.

Una part de la motivació d'aquest treball apareix a partir de la següent pregunta: tot grup amb presentació finita és lineal? La resposta és que no, ja que existeix un

grup amb presentació finita que no ho compleix: el grup de Baumslag-Solitar $BS_{m,n}$ per $n = 2$, $m = 3$. Aquests grups es defineixen com $BS_{m,n} = \langle a, b \mid ab^m a^{-1} = b^n \rangle$, per $b^n \neq 1$ i $n \neq 0$.

Observem que el grup de matrius generat per

$$A = \begin{pmatrix} \frac{n}{m} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

és la imatge de $BS_{m,n}$ via l'aplicació que envia $a \mapsto A$ i $b \mapsto B$, ja que $AB^m A^{-1} = B^n$ i $B^n \neq Id$ per a tot $n \neq 0$.

Se segueix el següent raonament: si $|m| \neq 1 \neq |n|$ i $|m| \neq |n|$, els grups de Baumslag-Solitar no són Hopfians (es demostra el cas $n = 2$, $m = 3$ a [16]). Per un resultat algebraic, un grup que no és Hopfià, tampoc serà residualment finit, i aleshores no serà isomorf a un grup lineal finitament generat, ja que aquest sempre és residualment finit (es prova a [17]).

Teoria de trenes

Intuïtivament, una trena de n filaments és un entrelaçat de n fils, en un principi paral·lels, on cada fil es mou entre els altres seguint un patró determinat: per crear una trena, es pren un fil i es creua per sobre o per sota d'uns altres, però una vegada fet l'encreuament, no se'n pot fer un altre en una posició anterior.

Tot i que els grups de trenes van aparèixer (molt discretament) per primer cop l'any 1891 en un article d'Adolf Hurwitz, va ser Emil Artin qui els va introduir als anys 1920, amb l'objectiu de formalitzar objectes topològics utilitzats per modelar l'entrelaçat de diverses cordes a l'espai euclidià de dimensió 3. Artin provà que fixat $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, el conjunt de les trenes de n filaments formen un grup, denotat per B_n .

L'any 1983, Vaughan Jones va descobrir noves representacions dels grups de trenes, a partir de les quals va extreure'n el seu famós polinomi usat en la teoria de nusos. Aquest és un exemple d'aplicació de les trenes, però en tenim d'altres: mecànica de fluids, biologia molecular, criptografia, implementació experimental d'anions, teoria de nusos i enllaços, etc. Els grups de trenes s'han estudiat en altres camps topològics i algebraics, gràcies a la seva relació amb la teoria de nusos, homeomorfismes de superfícies i espais de configuracions.

Artin també en va donar una presentació algebraica per a $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, que és la següent²:

$$B_n = \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{ll} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, & |i - j| > 1 \\ \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j, & |i - j| = 1 \end{array} \right\rangle$$

Tenim, per tant, una presentació finita del grup de trenes. Gràcies al contraexemple dels grups de Baumslag-Solitar, no necessàriament el grup B_n és lineal. Aquesta és la motivació del treball. Se'n pot trobar una representació matricial fidel? La resposta és que sí. Tot i així, no es va demostrar fins l'any 2001.

Els matemàtics que van prendre un paper imprescindible en la història de la prova d'aquest Teorema foren Ruth Lawrence (nascuda l'any 1971, britànica-israeliana), Daan

²La seva justificació es mostra a l'apartat 3.

Krammer (nascut l'any 1968, neerlandès) i Stephen Bigelow (nascut l'any 1971, britànic-australià). Abans, però, cal mencionar la representació de Burau (introduïda el 1901 per Wilhelm Burau), que va resultar no ser fidel per $n \geq 5$. Dècades després, a l'any 1990, Ruth Lawrence va introduir una generalització d'aquesta representació, considerant representacions del grup fonamental dels espais de configuració de n punts diferents, associats al grup de trenes.

Aquesta nova versió no es va poder completar fins l'any 2000, quan Daan Krammer va adaptar el que havia fet Ruth Lawrence, a una representació matricial explícita de B_n . Va ser anomenada representació de Lawrence-Krammer. A més, a partir d'aquest nou resultat, Krammer en demostrà la linealitat del grup de trenes per a $n = 4$, tot i que no va poder generalitzar-ho per a $n > 4$.

Un any més tard i de manera independent, Stephen Bigelow va demostrar la fidelitat de la representació de Lawrence-Krammer per a tot n , i finalment es va establir que el grup de trenes B_n és lineal per a tot $n \geq 1$.

El concepte principal del treball serà, per tant, l'estudi del grup de trenes, les seves propietats algebraiques i la seva relació amb els grups modulars. Això ens permetrà introduir invariants topològics i observar què cal veure per a demostrar la linealitat de B_n .

El primer resultat principal que s'estudia en aquest treball és la fidelitat de la representació de Lawrence-Krammer, és a dir, la seva injectivitat. Mitjançant l'isomorfisme entre el grup de trenes i el grup modular del disc 2-dimensional amb n punts marcats de l'interior (diferents dos a dos), es relacionen dos tipus d'elements del disc amb classes d'homologia i superfícies d'un recobriment de dimensió 4.

Aquesta correspondència ens permetrà poder treballar amb el nombre d'intersecció de dos elements del disc, enlloc de termes de dimensió més elevada. Es deduirà una propietat essencial que permetrà veure que qualsevol element del nucli de la representació ha de ser isòtop a la identitat, i no necessàriament igual.

El segon resultat principal és la demostració del Teorema de la linealitat del grup de trenes per a tot $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Es demostra que existeix un morfisme injectiu des del grup de trenes cap al grup lineal general, amb coeficients a $\mathbb{R}$. Com s'ha explicat, Stephen Bigelow ho demostrà l'any 2001, però en aquest treball no se segueix de manera exacta el seu procediment, sinó que s'evita un concepte anomenat *fork*, que representa un element del segon grup d'homologia del recobriment utilitzat de dimensió 4.

L'objectiu del treball serà, doncs, desenvolupar la demostració de la injectivitat de la representació de Lawrence-Krammer (i per tant, la seva validesa), i usar-la per a estudiar la prova de la linealitat del grup de trenes.

Estructura de la Memòria

El capítol 2 de la Memòria se centra en definir i enunciar alguns resultats bàsics i previs a la resta del treball, així com també aclarar la notació utilitzada durant aquest. Inclou conceptes algebraics i topològics importants de diferents branques: grups, homotopia, recobriments, índex, homologia, etc.

El capítol 3 presenta un visió general dels grups de trenes B_n i les seves equivalències en espais topològics i algebraics. S'exploren les seves relacions amb espais de configuracions i grups modulars.

Seguidament, el capítol 4 està dedicat a la representació de Lawrence-Krammer. Es presenta la definició i la descripció de la representació, així com els invariants associats i les seves propietats. També es veu la seva relació amb l'espai d'homologia H_2 .

El capítol 5 se centra en els dos resultats principals del treball: la fidelitat de la representació de Lawrence-Krammer, i la demostració de la linealitat del grup de trenes. Inclou detalls sobre elements definits en el mateix apartat: els noodles i els arcs generadors.

Finalment, al capítol 6 s'explica la representació en termes de matrius, i se'n dona un exemple. També s'indica quin és el rang de la base utilitzada i com s'obté.

2 Conceptes previs

En aquest apartat definirem i enunciarèm alguns resultats bàsics i previs a la resta del treball, així com també aclarirem la notació utilitzada. S'han seguit [7, 8, 9] per desenvolupar els apartats d'aquesta secció. No inclou totes les demostracions d'alguns resultats, ja que no són centrals pel desenvolupament del treball, no entren en la seva temàtica, la gran majoria s'han vist al grau de Matemàtiques i, a més, ocuparien massa pàgines.

Denotarem per I l'interval tancat real $I := [0, 1] \subset \mathbb{R}$, $\|\cdot\|$ denotarà la norma euclidiana habitual i $\mathbb{S}^n$ serà l'esfera n -dimensional. Per defecte, dotarem amb orientació positiva (o antihorària) a les superfícies i als espais topològics.

2.1 Definicions algebraiques

Definició 2.1. Sigui G un grup i B un conjunt. Si el producte de G és commutatiu, aleshores parlarem d'un *grup abelià*. Es diu que G és un *grup abelià lliure* amb base B si tot element del grup es pot escriure d'una única manera com a combinació lineal dels elements de la base, amb coeficients enters.

Definició 2.2. Un *anell* $(A, +, \cdot, 0, 1, -)$ és un grup abelià $(A, +, 0, -)$ juntament amb una operació binària $\cdot$ anomenada producte que és associativa i distributiva respecte de la suma, i un element neutre 1 per al producte. Si el producte és commutatiu, parlarem d'un *anell commutatiu*.

Exemples 2.3. • El grup $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}$, on $\oplus$ denota la suma directa, és un grup abelià lliure amb base $\{(1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)\}$.

- $\mathbb{Z}$ és un anell commutatiu.

Definició 2.4. Sigui G un grup. Definim els següents conceptes:

- *L'abelianitzat de G .* $G^{ab} := G/D(G)$, on $D(G) := [G, G] = \langle g \cdot h \cdot g^{-1} \cdot h^{-1} : g, h \in G \rangle$.
- *El normalitzador.* Per a tot $S \in \mathcal{P}(G)$, definim el normalitzador de S en G com $N_G(S) := \{g \in G : g \cdot S \cdot g^{-1} = S\}$
- *El centre de G .* És el subgrup normal $Z(G) := \{h \in G : h \cdot g = g \cdot h, \forall g \in G\}$.
- *Torsió de G .* És el conjunt dels elements d'ordre finit d'un grup. Direm que G és *lliure de torsió* si l'únic element $g \in G$ d'ordre finit és el neutre.

Definició 2.5. Sigui R un anell commutatiu amb unitat. Un R -mòdul és un grup abelià M , dotat d'una operació externa,

$$R \times M \longrightarrow M \quad (r, m) \mapsto r \cdot m$$

que verifica els següents axiomes, per a qualssevol $r, s \in R$ i qualssevol $m, n \in M$:

$$\begin{aligned} (r + s) \cdot m &= r \cdot m + s \cdot m & r \cdot (m + n) &= r \cdot m + r \cdot n \\ r \cdot (s \cdot m) &= (r \cdot s) \cdot m & 1 \cdot m &= m \end{aligned}$$

Observacions 2.6. • Sigui M un R -mòdul lliure. Es diu que M és de *rang* n quan n és el nombre d'elements de la base de M . És a dir, $M \cong R^n$.

- Sigui M un R -mòdul lliure de rang n . Aleshores $GL_n(R) \cong \text{Aut}_R(M)$.
- Tot mòdul lliure M és lliure de torsió, i per tant, tot submòdul $N \subseteq M$ també és lliure de torsió.

Definició 2.7. Siguin $a, b \in \mathbb{R}$. Es diu que són *algebraicament independents* si no existeix un polinomi $P(x, y)$ amb coeficients a $\mathbb{Q}$ o a $\mathbb{Z}$ tal que $P(a, b) = 0$, amb l'excepció del polinomi $P(x, y) \equiv 0$.

Exemple 2.8. $a = \sqrt{2}$ i $b = \pi$ són dos nombres algebraicament independents.

Definició 2.9. Un *polinomi de Laurent* en les variables $q_1, \dots, q_n$ és un polinomi amb coeficients enters i termes de la forma $q_1^{a_1} q_2^{a_2} \dots q_n^{a_n}$, on $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$. L'*anell de polinomis de Laurent* en aquestes variables es denota per $\Lambda[q_1, \dots, q_n]$ i també es pot escriure com $\mathbb{Z}[q_1, q_1^{-1}, \dots, q_n, q_n^{-1}]$ o bé com $\mathbb{Z}[q_1^{\pm 1}, \dots, q_n^{\pm 1}]$.

Observació 2.10. L'anell de polinomis de Laurent $\Lambda[q_1, \dots, q_n]$ és commutatiu.

2.2 Nocions topològiques

Sigui X un espai topològic i $A \subset X$ un subconjunt. Denotarem per A° l'interior de A , $\overline{A}$ l'adherència de A , i $\partial A := \overline{A} \setminus A^\circ$ la seva frontera.

Denotem per $D^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ el disc n -dimensional és a dir; $\mathbb{S}^{n-1} = \partial D^n$. Per tant, D^2 és el disc unitat al pla complex $\mathbb{R}^2$ (depenent del context, també denotarà un disc euclidià bidimensional homeomorfa a l'unitari). Denotem per $D_n = D^2 \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$ per $p_1, \dots, p_n$ punts diferents dos a dos de l'interior de D^2 . Sempre que parlem de *punts eliminats*, ens referirem a punts extrems de l'interior d'un conjunt.

Definició 2.11. Sigui X un espai topològic i $\alpha : I \rightarrow X$ un camí o arc. Direm que α és *simple* si α és injectiva. Un *llaç* o *camí tancat* és un camí α tal que $\alpha(0) = \alpha(1)$.

Siguin α, β dos camins a X tals que $\alpha(1) = \beta(0)$. Aleshores el camí producte de α, β es denotarà per $\beta \circ \alpha : I \rightarrow X$ o simplement $\alpha\beta$.

Definició 2.12. Siguin X, Y espais topològics, i $C(X, Y) := \{f : X \rightarrow Y \text{ contínua}\}$. La *topologia compacta oberta* en $C(X, Y)$ és la topologia més fina per la qual els conjunts

$$V(K, U) := \{f \in C(X, Y) : f(K) \subset U\}$$

són oberts, on $K \subseteq X$ compacte i $U \subseteq Y$ obert.

Definició 2.13. Siguin X, Y dos espais topològics. $f : X \rightarrow Y$ és un *embedding* o *immersió* si és contínua, injectiva i compleix que $X \rightarrow f(X)$ és un homeomorfisme. Quan $X = Y$, un homeomorfisme és també una immersió.

Observació 2.14. Sigui $X \rightarrow Y$ una funció injectiva, i sigui $Y \hookrightarrow Z$ una immersió. Aleshores la composició $X \rightarrow Z$ és injectiva.

2.2.1 Homotopia

Definició 2.15. Siguin X, Y espais topològics i $f, g : X \rightarrow Y$ aplicacions contínues. Direm que f i g són *homòtopes* o *homotòpiques* si existeix una aplicació contínua $F : X \times I \rightarrow Y$ tal que $F(x, 0) = f(x)$ i $F(x, 1) = g(x)$. Escrivem $f \stackrel{F}{\sim} g$ (o simplement $f \sim g$) i direm que F és una *homotopia* entre f i g .

La relació $\sim$ és d'equivalència en el conjunt de funcions contínues de X a Y .

Definició 2.16. Siguin X, Y dos espais topològics, $A \subseteq X$ i $f, g : X \rightarrow Y$ dues aplicacions contínues tals que $f(a) = g(a)$, $\forall a \in A$. Diem que f, g són *homòtopes relativament a* A si existeix una funció contínua $F : X \times I \rightarrow Y$ tal que $F(x, 0) = f(x)$, $F(x, 1) = g(x)$ i per a tota $a \in A$, $t \in I = [0, 1]$, es té $F(a, t) = f(a)$. Ho denotarem per $f \underset{A}{\sim} g$ (o simplement $f \underset{A}{\sim} g$).

Definició 2.17. Siguin X, Y espais topològics. Direm que són *homotòpicament equivalents* si existeixen $f : X \rightarrow Y$ i $g : Y \rightarrow X$ aplicacions contínues tals que $f \circ g \sim Id_Y$ i $g \circ f \sim Id_X$. Escriurem $X \simeq Y$. És clar que si $X \cong Y$, aleshores $X \simeq Y$.

Afirmació 2.18. Per a tota varietat topològica M amb frontera ∂M , la inclusió $M^\circ = M \setminus \partial M \hookrightarrow M$ és una equivalència homotòpica.

DEMOSTRACIÓ. (Indicació.) Sigui $U \cong \partial M \times [0, 1)$ l'entorn cilíndric de ∂M (per $f : \partial M \times [0, 1) \rightarrow U$, tenim $f(x, 0) = x$ per a tot $x \in \partial M$). Podem definir una aplicació $r : M \rightarrow M^\circ$ tal que sigui la identitat en $M^\circ \setminus U$, i que dins l'entorn cilíndric U , col·lapsem progressivament $\partial M \times \{0\}$ cap a $\partial M \times (0, 1)$ de manera contínua. Aquesta aplicació r serà l'homotopia inversa de la inclusió $i : M^\circ \hookrightarrow M$. $\square$

Sigui X un espai topològic i $x_0 \in X$. Considerarem la parella (X, x_0) .

Definició 2.19. Sigui X un espai topològic. Definim $\pi_0(X)$ com el conjunt de components arc-connexes de X .

Definició 2.20. El *grup fonamental* de X amb punt base x_0 és el conjunt de classes d'homotopia de camins tancats a X amb punt base x_0 . El denotarem per $\pi_1(X, x_0)$.

Definició 2.21. Sigui X un espai topològic i $a \in \mathbb{S}^n$, $x_0 \in X$ punts base. Definim com $\pi_n(X, x_0)$ el conjunt de classes d'homotopia de les funcions

$$f : \mathbb{S}^n \rightarrow X, \quad f(a) = x_0$$

Definició 2.22. Siguin X, Y dos espais topològics, $x \in X$, $\varphi : X \rightarrow Y$ contínua i $n \geq 1$. L'aplicació $\varphi_* : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, \varphi(x_0))$ definida per $\varphi_*([\alpha]) \mapsto [\varphi \circ \alpha]$, per tot $[\alpha] \in \pi_n(X, x_0)$ (per $\alpha : \mathbb{S}^n \rightarrow X$) s'anomena *morfisme induït per* φ .

Proposició 2.23. Siguin X, Y dos espais topològics i $n \geq 1$. Si $f : X \rightarrow Y$ és una equivalència homotòpica, aleshores f_* és un isomorfisme de grups.

DEMOSTRACIÓ. Capítol 6, Teorema 6.14 de [9]. $\square$

Observació 2.24. Si X és contràctil, aleshores $\pi_n(X, x_0) \cong \{1\}$, $\forall n \geq 1$.

Exemples 2.25. • $\mathbb{R}^2 \simeq \{x\}$, per $x \in \mathbb{R}^2$.

• $\pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$, $\pi_n(\mathbb{S}^1) \cong \{1\}$, per $n \geq 2$.

Definició 2.26. Sigui S una superfície, i $\alpha, \beta : I \rightarrow S$ dues corbes. Un *dígon* entre α, β és un disc tal que la seva frontera consisteix en un subarc de α i un subarc de β , de tal manera que el seu interior no conté punts de α, β (veure Figura 2.1).

Lema 2.27. Siguin $\alpha, \beta : I \rightarrow S$ dos llaços simples en una superfície S i amb un nombre finit d'interseccions. Aleshores podem transformar α i β via homotopia a dues corbes tancades simples amb menys punts d'intersecció, si i només si existeix un dígon entre α i β .

DEMOSTRACIÓ. Capítol 2, Lema 2.6 de [6]. $\square$

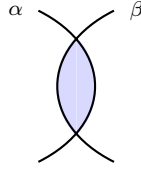


FIGURA 2.1. Un dígon entre α i β .

2.2.2 Recobriments

Definició 2.28. Siguin $X, \tilde{X}$ espais topològics i $p : \tilde{X} \rightarrow X$ una aplicació contínua. Es diu que la parella $(\tilde{X}, p)$ és un *recobriments* o *revestiment* de X si per a tot $x \in X$ existeix un conjunt obert arc-connex $U \subset X$ tal que $x \in U$, i cada component arc-connexa de $p^{-1}(U)$ s'aplica a U , via p , de manera homeomorfa. En particular, p és exhaustiva.

Per a tot $x \in X$, definim $p^{-1}(x)$ com la *fibra de x* . Si $\forall x \in X$, $p^{-1}(x)$ té n elements, diem que $\tilde{X}$ té grau n , o bé que $\tilde{X}$ és el *recobriments n -èsim* de X .

Definició 2.29. Siguin X, Y, Z espais topològics i $p : X \rightarrow Y$ un recobriments. Una *elevació* d'una aplicació $f : Z \rightarrow Y$ és una aplicació $\tilde{f} : Z \rightarrow X$ tal que $p \circ \tilde{f} = f$.

Proposició 2.30. *Sigui $(\tilde{X}, p)$ un recobriments de X , i siguin $f, g : Y \rightarrow \tilde{X}$, on Y és un espai connex. Si $p \circ f = p \circ g$, i existeix $y \in Y$ tal que $f(y) = g(y)$, aleshores $f = g$.*

DEMOSTRACIÓ. Capítol 5, Corollari del Teorema 5.2 de [9]. □

Lema 2.31. (Elevació de camins.) *Siguin X, Y espais topològics, $p : X \rightarrow Y$ un recobriments i $\gamma : I \rightarrow Y$ un camí tal que $\gamma(0) = y \in Y$. Aleshores existeix un únic camí $\tilde{\gamma} : I \rightarrow X$ que eleva γ i compleix que $\tilde{\gamma}(0) = x$, per $x \in p^{-1}(y)$.*

DEMOSTRACIÓ. Capítol 5, Teorema 5.3 de [9]. □

Exemple 2.32. Sigui $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ un recobriments tal que $t \mapsto e^{2\pi it}$ i $f : I \rightarrow \mathbb{S}^1$ una aplicació contínua tal que $f(0) = 1$. Aleshores existirà una única aplicació contínua (l'elevació de f) $\tilde{f} : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $E \circ \tilde{f} = f$ i $\tilde{f}(0) = 0$. Es pot visualitzar amb la Figura 2.2).

Lema 2.33. (Elevació d'homotopies.) *Siguin X, Y, Z espais topològics, $p : X \rightarrow Y$ un recobriments, $f_t : Z \times I \rightarrow Y$ una homotopia, i $\tilde{f}_0 : Z \rightarrow X$ una elevació de f_0 . Aleshores existeix una única homotopia $\tilde{f}_t : Z \times I \rightarrow X$ que eleva f_t .*

DEMOSTRACIÓ. Capítol 5, Teorema 5.4 de [9]. □

Definició 2.34. Sigui X un espai topològic i $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un revestiment de X . Anomenem *transformació de recobriments* o *automorfisme de recobriments* a tot isomorfisme $\tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$. Aquests formen un grup amb la composició $\circ$, que denotarem per $Deck(p)$.

Observació 2.35. Sigui X un espai topològic i $\tilde{X}$ un recobriments arc-connex. Aleshores una transformació de recobriments està determinada per la imatge d'un punt qualsevol.

Exemple 2.36. Utilitzant la mateixa notació que a la Figura 2.2, les transformacions de recobriments són les translacions verticals que envien l'espiral de $\mathbb{R}$ a ella mateixa. Per tant, $Deck(\mathbb{R}) \cong \mathbb{Z}$, en aquest cas.

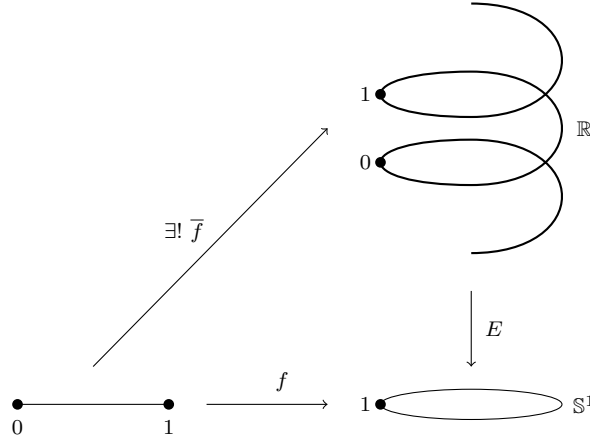


FIGURA 2.2. Elevació de camins.

Observació 2.37. Sigui $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un recobriment de X . Aleshores a $\tilde{X}$ hi ha un acció de $\pi_1(X)/\pi_1(\tilde{X})$.

Sigui γ un camí tancat a X amb punt base q . Si q' és l'elevació de q a X' , aleshores el punt final de $\tilde{\gamma}$ serà $\tilde{\gamma}(1)$, que compleix $p(\tilde{\gamma}(1)) = \gamma(1) = \gamma(0) = q$. Aleshores $\tilde{\gamma}(1) \in p^{-1}(q)$ està determinada per $[\gamma] \in \pi_1(X, q)$ i q' , i serà $\tilde{\gamma}(1) = [\gamma] \cdot q'$, on $\cdot$ és l'acció de $\pi_1(X, q)$ sobre la fibra $p^{-1}(q)$. Si $[\gamma]$ és trivial, aleshores $\gamma \sim q$, i per tant $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}(1) = q'$.

Exemple 2.38. Sigui $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ un recobriment tal que $t \mapsto e^{4\pi it}$, i $q = 1$ el punt base d'un llaç $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$. Com que $\pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$, aleshores $p^{-1}(q)$ serà el conjunt $\{n \in \mathbb{Z}\}$. En particular, si $q' = 0$, $\tilde{\gamma}(1) = q' + [\gamma] = q' + 2 = 2$, ja que γ és un llaç que dona dues voltes en sentit antihorari a $\mathbb{S}^1$.

Proposició 2.39. Sigui X un espai topològic, $x_0 \in X$ i $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un recobriment, tal que $p(\tilde{x}_0) = x_0$. Aleshores l'homeomorfisme induït $p_* : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ és injectiu. A més, la imatge $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ a $\pi_1(X, x_0)$ consisteix de totes les classes de camins tancats tals que les seves elevacions a $\tilde{X}$ amb punt base $\tilde{x}_0$ són llaços.

DEMOSTRACIÓ. Capítol 5, Teorema 5.7 de [9], o bé Capítol 1, Proposició 1.31 de [8].

□

Proposició 2.40. Sigui $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ un recobriment, i sigui $f : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ una aplicació amb Y arc-connex i localment arc-connex. Aleshores existeix una elevació $\tilde{f} : (Y, y_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ de f si i només si $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$.

DEMOSTRACIÓ. Capítol 1, Proposició 1.33 de [8].

Definició 2.41. Sigui X un espai topològic. Diem que és *simplement connex* si és arc-connex i el seu grup fonamental és trivial.

Observació 2.42. Sigui $A \subseteq X$ un espai topològic simplement connex. Aleshores la immersió $A \hookrightarrow X$ s'eleva a una immersió $A \hookrightarrow \tilde{X}$, on $\tilde{X}$ és un recobriment de X .

DEMOSTRACIÓ. Efectivament, si A és simplement connex, aleshores qualsevol camí tancat a A es pot contraure a un punt. □

Lema 2.43. Sigui $p : X \rightarrow Y$ un revestiment, $A \subseteq Y$ un subconjunt arc-connex i simplement connex i $\tilde{A}_0, \tilde{A}_1 \subseteq X$ dues preimatges per p de A , o aixecaments. Si $\tilde{A}_0 \cap \tilde{A}_1 \neq \emptyset$, aleshores $\tilde{A}_0 = \tilde{A}_1$.

DEMOSTRACIÓ Suposem que $\tilde{A}_0 \cap \tilde{A}_1 \neq \emptyset$, però que $\tilde{A}_0 \neq \tilde{A}_1$. Com que $\tilde{A}_0 \neq \tilde{A}_1$, existeix $a \in A$ tal que $\tilde{a}_1 \neq \tilde{a}_2$, on $\tilde{a}_1 := p^{-1}(a) \cap \tilde{A}_1$ i $\tilde{a}_2 := p^{-1}(a) \cap \tilde{A}_2$.

Com que $\tilde{A}_0 \cap \tilde{A}_1 \neq \emptyset$, i $\tilde{A}_0, \tilde{A}_1$ són arc-connexos, aleshores $\tilde{A}_0 \cup \tilde{A}_1$ és arc-connex. Per tant $\exists \rho : [0, 1] \rightarrow \tilde{A}_0 \cup \tilde{A}_1$ tal que $\rho(0) = \tilde{a}_0$ i $\rho(1) = \tilde{a}_1$. Tindrem un element no trivial $p \circ \rho$ de $\pi_1(Y, a)$. Ara bé, $p \circ \rho([0, 1]) \subseteq A$, i A és simplement connex. Arribem a una contradicció. $\square$

2.2.3 Índex d'un camí tancat

Intuïtivament, l'índex és el nombre de voltes que dona un llaç γ al voltant d'un punt p (que no pertany a la imatge de γ), segons l'orientació fixada (veure Figura 2.3). Començarem donant una definició més analítica, i després ho veurem d'una manera més topològica.

Definició 2.44. Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ obert, γ un camí a Ω tancat i localment de classe C^1 , i $p \notin \gamma(t)$, $\forall t$. L'índex de γ respecte p es defineix com

$$Ind(\gamma, p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - p}$$

Observem que si γ^{-1} denota el camí invers de γ , aleshores $Ind(\gamma^{-1}, p) = -Ind(\gamma, p)$. No entrarem a demostrar que l'índex és un enter, i que per γ un camí tancat, la funció $Ind(\gamma, z) : \mathbb{C} \setminus Im(\gamma) \rightarrow \mathbb{Z}$ és contínua (es pot trobar la demostració als apunts d'Anàlisi Complexa de l'assignatura del grau).

Vegem ara una definició topològica de l'índex. Observem que $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{p\}) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$, ja que $\mathbb{C} \setminus \{p\} \simeq \mathbb{S}^1$. També tindrem en compte que un camí tancat $\gamma : I \rightarrow \mathbb{C}$ també es pot escriure com un camí $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{C}$, usant la projecció $I \rightarrow \mathbb{S}^1$ que envia cada $t \mapsto e^{2\pi i t}$ i sabent que $\mathbb{S}^1 \cong I/0 \sim 1$.

Definició 2.45. Sigui $\nu : I \rightarrow \mathbb{S}^1$ un camí tancat, i $\tilde{\nu}$ una elevació. Aleshores la diferència $\tilde{\nu}(1) - \tilde{\nu}(0)$ és un nombre enter (independentment de l'elevació escollida), que s'anomenarà *grau* de ν .

Observació 2.46. L'aplicació grau està ben definida i és un isomorfisme de grups entre $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \rightarrow (\mathbb{Z}, +)$. Es pot trobar la demostració en els apunts de l'assignatura de Topologia i Geometria Global de Superfícies del grau.

Definició 2.47. Sigui $\gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{C}$ un llaç continu i sigui $p \in \mathbb{C}$ un punt que no pertany a la imatge de γ . Definim l'índex de γ respecte de p com $Ind(\gamma, p) = gr(N_p \circ \gamma)$, on $N_p : \mathbb{C} \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{S}^1$ és l'aplicació:

$$N_p(z) = \frac{z - p}{|z - p|}$$

Observació 2.48. N_p està ben definida, ja que $p \notin \gamma(I)$.

Una manera pràctica de calcular l'índex és traçar una línia recta des del punt p , cap a qualsevol direcció, i sumar el signe corresponent a cada intersecció de la recta amb el llaç. Fixada l'orientació positiva, aquest signe serà un $+1$ (respectivament -1) si el camí γ talla la recta en sentit a l'esquerra (respectivament a la dreta). Es pot veure un exemple a la Figura 2.3.

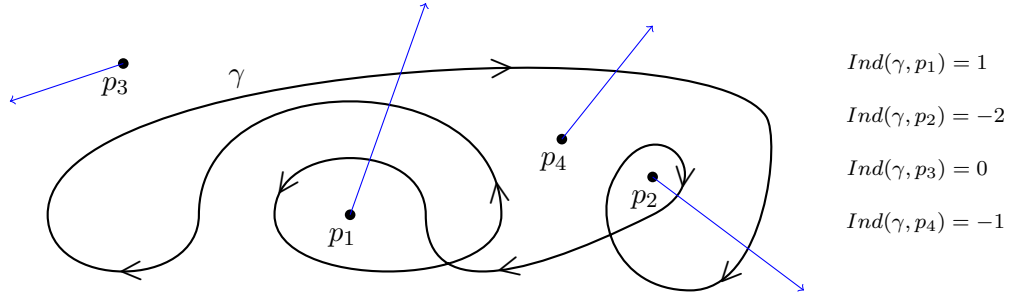


FIGURA 2.3. Índex d'un camí tancat en un punt.

Observacions 2.49. • $Ind(\gamma, p) = 0$ si el camí no envolta p .

- Dos camins diferents homòtops a $\mathbb{C} \setminus \{p\}$ tenen el mateix índex respecte p .
- Si $p_1 \neq p_2$ i $p_2 \in \pi_0(\mathbb{C} \setminus Im(\gamma), p_1)$, aleshores $Ind(\gamma, p_1) = Ind(\gamma, p_2)$.

2.2.4 Homologia

Definició 2.50. Sigui $N \in \mathbb{Z}^{>0}$ i siguin $v_0, v_1, \dots, v_n$, amb $n \geq 0$, $n+1$ punts de $\mathbb{R}^N$ afinement independents. S'anomena *simplex n-dimensional* de vèrtexs $v_0, \dots, v_n$ al subconjunt de $\mathbb{R}^N$ definit per

$$\Delta(v_0, \dots, v_n) := \left\{ x \in \mathbb{R}^N \mid x = \sum_{i=0}^n \lambda_i v_i, \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \right\}$$

És a dir, és el més petit conjunt convex que conté $v_0, v_1, \dots, v_n$.

Lema 2.51. Dos simplexes n-dimensionals qualssevol són homeomorfs.

DEMOSTRACIÓ. Capítol 1, Lema 1.1 de [7] □

Per tant tot simplex queda determinat per la seva dimensió n . El simplex de $\mathbb{R}^{n+1}$ de vèrtexs $v_i = (0, \dots, 0, \overset{i+1}{1}, 0, \dots, 0)$ rep el nom de *simplex n-dimensional estàndard*. Donat $p \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$, el denotarem per $\Delta^p = \{x \in \mathbb{R}^{p+1} \mid \sum_{i=0}^p x_i = 1, x_i \geq 0\}$.

Definició 2.52. Sigui X un espai topològic i $p \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$. Definirem un *p-simplex singular* de X com una aplicació contínua $\sigma : \Delta^p \rightarrow X$.

Definició 2.53. Sigui X un espai topològic. El *grup de cadenes singulars p-dimensionals* de X , denotat per $S_p(X)$, és el grup abelià lliure generat pels *p-simplexs singulars* de X :

$$S_p(X) := \left\{ \sum_{i=1}^r \lambda_i \sigma_i \mid \lambda_i \in \mathbb{Z}, \sigma_i : \Delta^p \rightarrow X \text{ contínua} \right\}$$

Observació 2.54. Un 0-simplex singular de X és un punt de X , i un 1-simplex singular de X és un camí de X .

Definició 2.55. Sigui σ un *p-simplex singular*. Definim l'*operador vora* com l'aplicació $\partial_p : S_p(X) \rightarrow S_{p-1}(X)$ tal que

$$\partial_p(\sigma) = \sum_{i=0}^p (-1)^i \sigma \circ \delta_i$$

on $\delta_i : \Delta^{p-1} \longrightarrow \Delta^p$, $0 \leq i \leq p$, és l'aplicació contínua definida per

$$\delta_i(x_0, \dots, x_{p-1}) = (x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{p-1}).$$

Observacions 2.56. • δ_i és contínua i envia Δ^{p-1} a la cara $\Delta(e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_p)$.

- $\partial_{p-1}\partial_p = 0$, per a tot $p \geq 0$.

Observem també que la successió de grups de cadenes singulars $S_p(X)$, per $p \geq 0$, juntament amb l'operador vora, formen un complex de cadenes de grups abelians, que denotarem per $(S_*(X), \partial)$, que anomenarem *complex de cadenes singulars de X*.

Per tot $p \geq 0$, ∂_p és un morfisme de grups i, per tant, podem definir el grup de *cicles p-dimensionals* de X com $Z_p(X) := \ker(\partial_p)$, i el grup de *vores p-dimensionals* de X com $B_p(X) := \text{im}(\partial_{p+1})$, que seran subgrups de $S_p(X)$. Per la observació anterior tenim que per a tot $p \geq 0$, $B_p(X) \subseteq Z_p(X)$, i per tant podem definir el següent:

Definició 2.57. Sigui X un espai topològic, i $p \geq 0$. Es defineix el *p-èsim grup d'homologia singular* de X com el grup d'homologia *p-èsim* del complex de cadenes singulars de X , és a dir

$$H_p(X) := H_p(S_*(X)) = Z_p(X)/B_p(X)$$

Observacions 2.58. • $H_p(X) = 0$, si $p > \dim(X)$.

- Per un cicle $z \in Z_p(X)$, denotarem la seva classe $[z] \in H_p(X)$. Quan dos cicles z, z' defineixen la mateixa classe, voldrà dir que existeix una cadena $c \in B_{p+1}(X)$ tal que $z - z' = \partial c$. Els cicles seran *homòlegs*.
- Si R és un anell commutatiu unitari, es defineix el R -mòdul de cadenes singulars $S_p(X; R)$ com el R -mòdul lliure generat pels simplexs singulars. Es definiran els grups d'homologia singular d'un espai topològic X amb coeficients en un anell R ($H_*(X; R)$) com els grups d'homologia del complex $S_*(X; R)$.

Definició 2.59. Es diu que els morfismes f, g formen una *successió exacta de complexs de R-mòduls*, si per a tot $p \geq 0$, la successió

$$0 \longrightarrow M'_p \xrightarrow{f_p} M_p \xrightarrow{g_p} M''_p \longrightarrow 0$$

és exacta, és a dir, si f_p és injectiva, $\ker(g_p) = \text{im}(f_p)$, i g_p és exhaustiva.

Teorema 2.60. Sigui $0 \longrightarrow M'_* \xrightarrow{f} M_* \xrightarrow{g} M''_* \longrightarrow 0$ una successió exacta de complexs de R -mòduls. Aleshores la successió

$$\dots \longrightarrow H_p(M''_*) \xrightarrow{\partial_*} H_{p-1}(M'_*) \xrightarrow{f_*} H_{p-1}(M_*) \xrightarrow{g_*} H_{p-1}(M''_*) \xrightarrow{\partial_*} \dots$$

és exacta, anomenada *successió exacta llarga d'homologia associada a la successió exacta de complexs*. Tenim $\ker(g_*) = \text{im}(f_*)$, $\ker(f_*) = \text{im}(\partial_*)$ i $\ker(\partial_*) = \text{im}(g_*)$.

DEMOSTRACIÓ. Capítol 2, Teorema 7.3 de [7]. □

Teorema 2.61. (Invariància topològica de l'homologia singular.) Sigui X, Y dos espais topològics i $f : X \longrightarrow Y$ un homeomorfisme. Llavors, el morfisme $H_*(f) : H_*(X) \longrightarrow H_*(Y)$ és un isomorfisme.

DEMOSTRACIÓ. Capítol 3, Teorema 1.6 de [7]. $\square$

Teorema 2.62. (Invariància homotòpica de l'homologia singular.) *Siguin X, Y dos espais topològics i $f, g : X \longrightarrow Y$ aplicacions contínues. Si $f \sim g$, aleshores $H_*(f) = H_*(g) : H_*(X) \longrightarrow H_*(Y)$.*

DEMOSTRACIÓ. Capítol 3, Teorema 4.1 de [7]. $\square$

Corol·lari 2.63. *Siguin X, Y espais topològics homotòpicament equivalents. Aleshores els grups d'homologia singular de X i Y són isomorfs: $H_*(X) \cong H_*(Y)$.*

Un llaç γ amb punt base x_0 en un espai topològic X és també un cicle, ja que $i \cong \Delta^1$, que implica que tot llaç es pot considerar com un 1-símplex singular. També tindrem $\partial\gamma = \gamma(1) - \gamma(0) = x_0 - x_0 = 0$.

Proposició 2.64. *Sigui X un espai topològic i $x_0 \in X$. L'aplicació $\varphi : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow H_1(X)$ és un morfisme de grups.*

DEMOSTRACIÓ. Capítol 3, Proposició 3.2. de [7]. $\square$

Observació 2.65. El grup fonamental $\pi_1(X, x_0)$ no és necessàriament un grup abelià, però $H_1(X)$ sempre ho és. Per tant, si $a, b \in \pi_1(X, x_0)$, aleshores el producte $aba^{-1}b^{-1}$ és el nucli de φ , i s'anomena el *commutador del grup*.

Lema 2.66. *Sigui X un espai topològic arc-connex. Si $\pi_1(X)$ és abelià, aleshores el morfisme de grups $\varphi : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow H_1(X)$ és un isomorfisme.*

DEMOSTRACIÓ. Capítol 3, Corol·lari 3.5. de [7]. $\square$

Exemple 2.67. Sigui D un disc al pla complex i $p_1, \dots, p_n \in D^\circ$ punts diferents dos a dos. Aleshores $H_1(D \setminus \{p_1, \dots, p_n\}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^n$.

Sigui X un espai topològic i A un subespai de X . Denotem per (X, A) el *parell topològic*. La inclusió $i : A \hookrightarrow X$ és contínua i per tant, induïx un morfisme injectiu de complexs de cadenes singulars $S_*(i) : S_*(A) \hookrightarrow S_*(X)$, tal que $\sigma \mapsto \sigma$.

Definició 2.68. El *complex de cadenes singulars relatives del parell (X, A)* , que denotarem per $S_*(X, A)$ és el complex quocient $S_*(X, A) := S_*(X)/S_*(A)$. Es defineix l'*homologia relativa del parell (X, A)* , que denotarem per $H_*(X, A)$ com l'homologia del complex $S_*(X, A)$, és a dir: $H_*(X, A) := H_*(S_*(X)/S_*(A))$

Els grups $S_p(X, A)$ són grups abelians lliures, ja que són isomorfs als subgrups de $S_p(X)$ generats per tots els p -símplexs singulars no continguts en A .

Teorema 2.69. *Si (X, A) és un parell topològic, llavors hi ha una successió exacta llarga*

$$\dots \longrightarrow H_p(A) \xrightarrow{i_*} H_p(X) \xrightarrow{\pi_*} H_p(X, A) \xrightarrow{\partial_*} H_{p-1}(A) \longrightarrow \dots$$

que s'anomena successió exacta d'homologia relativa del parell (X, A) .

DEMOSTRACIÓ. Capítol 3, Teorema 7.2 de [7]. $\square$

Exemple 2.70. Sigui $X = \mathbb{S}^1 \times I$, $A = \mathbb{S}^1 \times \{0\} \cup \mathbb{S}^1 \times \{1\}$. Aleshores $H_p(X) \cong \mathbb{Z}$, si $p = 0, 1$, i $H_p(X) \cong 0$, si $p > 1$; $H_p(A) \cong \mathbb{Z}^2$ si $p = 0, 1$, i $H_p(A) \cong 0$, si $p > 1$. Tindrem $H_p(X, A) \cong \mathbb{Z}$, per $p = 1, 2$ i $H_p(X, A) \cong 0$, altrament.

NOMBRE ALGEBRAIC D'INTERSECCIÓ

La teoria d'interseccions en espais d'homologia és una tema bastant extens i no s'hi entrarà en detall quan se'n parli al llarg del treball. Tot i així, és important saber quan es pot calcular el nombre d'intersecció.

Definició 2.71. Sigui X una varietat diferenciable, i $Y, Z \subseteq X$ dues subvarietats diferenciables. Diem que Y, Z es tallen *transversalment* si $\forall p \in Y \cap Z$, $T_p Y + T_p Z = T_p X$, on T_p denota l'hiperplà tangent.

Per exemple al pla $\mathbb{R}^2$, dues rectes que només tallen en un punt són transversals. En canvi, la corba $y = x^2$ i la recta $y = 0$ no són transversals. El Teorema de Sard implica el següent:

Teorema 2.72. Sigui X una varietat diferenciable, i $Y, Z \subseteq X$ dues subvarietats diferenciables. Suposem que tenim una mètrica $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$. Aleshores, $\forall \epsilon > 0 \exists \varphi : X \rightarrow X$ difeomorfisme tal que

- Y i $\varphi(Z)$ es tallen transversalment
- $\forall p \in Z$, $d(p, \varphi(p)) < \epsilon$

DEMOSTRACIÓ. Capítol 3, Teorema 2.4 de [10]. Utilitza una notació diferent, però essencialment demostra el mateix. $\square$

És a dir, el Teorema de Sard permet demostrar que dues varietats diferenciables arbitràries poden ser transverses, mantenint la primera varietat fixa i movent únicament la segona, tan poc com vulguis. Per tant, podem assumir que donades dues varietats diferenciables, totes les interseccions poden ser transversals, que és una condició necessària per a poder definir el nombre d'intersecció.

Siguin Y, Z dues subvarietats lineals de X . El nombre d'intersecció algebraica es defineix com la suma dels signes de cada intersecció de Y, Z , que depenen de l'orientació induïda per X . Per exemple:

Definició 2.73. Siguin γ_1, γ_2 dues corbes tancades orientades en una superfície S orientada de dimensió 2, amb un nombre finit d'interseccions transversals. Denotarem per $\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle$ el *nombre d'intersecció*, que es defineix com la suma dels signes d'intersecció de γ_1 amb γ_2 , on, per $z \in \gamma_1 \cap \gamma_2$ (veure Figura 2.4):

- El signe en z serà $+1$ si és positiu, és a dir, si γ_2 talla γ_1 en sentit antihorari: γ_1 talla γ_2 d'esquerra a dreta (l'orientació de la intersecció coincideix amb la de S).
- El signe en z serà -1 si és negatiu, és a dir, si γ_2 talla γ_1 en sentit horari: γ_1 talla γ_2 de dreta a esquerra (l'orientació de la intersecció no coincideix amb la de S).

$\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle$ només depèn de la classe d'homotopia de γ_1, γ_2 .

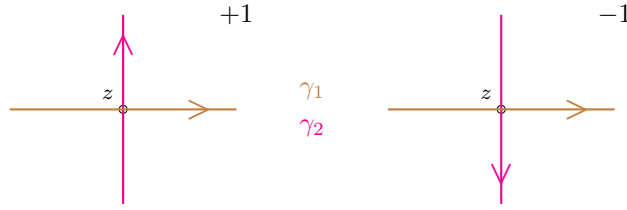


FIGURA 2.4. Signe d'intersecció de γ_1 amb γ_2 en un punt z .

2.2.5 CW-complex

Definició 2.74. Una *cèl·lula* o *cel·la* és un espai topològic homeomorf a $\mathbb{R}^n$ per algun $n \geq 0$. Es diu que és de dimensió n o que és una n -*cèl·lula*.

Definició 2.75. Sigui X un espai topològic. (X, Σ) és una *descomposició cel·lular* de X si $\forall \rho \in \Sigma$, ρ és una cèl·lula, $X = \bigcup_{\rho \in \Sigma} \rho$ i $\forall \rho_1, \rho_2 \in \Sigma$, si $\rho_1 \neq \rho_2$, aleshores $\rho_1 \cap \rho_2 = \emptyset$.

Definició 2.76. Sigui (X, Σ) una descomposició cel·lular. Es diu que X és un *CW-complex* si es compleixen les següents condicions per a tota cèl·lula $\rho \in \Sigma$:

- Existeix una aplicació contínua $\phi_\rho : D^n \rightarrow X$ tal que $\phi_\rho \upharpoonright \mathring{D}^n$ és un homeomorfisme entre $\mathring{D}^n$ i ρ ; i $\phi_\rho(\mathbb{S}^{n-1}) \subseteq X^{n-1}$, on $n = \dim(\rho)$.
- La seva adherència $\bar{\rho}$ està continguda a la unió d'un nombre finit de cèl·lules.
- Un conjunt $F \subset X$ és tancat només quan $F \cap \bar{\rho}$ és tancat en $\bar{\rho}$.

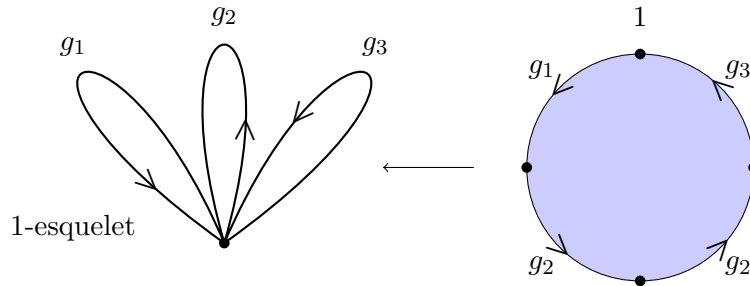


FIGURA 2.5. CW-complex donat pel grup $G = \langle g_1, g_2, g_3, g_4 \mid g_1 g_2^2 g_3 = 1 \rangle$.

Exemple 2.77. Sigui G un grup donat per una presentació $\langle g_1, g_2, g_3, g_4 \mid g_1 g_2^2 g_3 = 1 \rangle$. Aleshores podem associar G al següent CW-complex (veure Figura 2.5).

Sent G un grup donat per un conjunt de generadors i relacions, el CW-complex només tindrà cel·les de dimensió 0, 1, 2: només tindrà un vèrtex, una aresta per a cada generador, i per a cada relació de R tindrem una cara que s'enganxarà a les arestes segons la relació (donada amb el format $g_1^{m_1} g_2^{m_2} \cdots g_k^{m_k} = 1$, per $m_i \in \mathbb{Z}$).

Definició 2.78. Un *complex de cadenes cel·lulars* és un complex de cadenes que permet calcular els grups d'homologia d'un CW-complex. És una successió de grups de cadenes lliures $\cdots C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_1} C_0 \rightarrow 0$, on C_n denotarà el grup lliure de cadenes generat per les n -cel·les i $\partial_n : C_n \rightarrow C_{n-1}$ és l'operador vora corresponent.

3 El grup de trenes

L'objectiu d'aquest capítol és fer una breu introducció del grup de trenes B_n i veure les seves equivalències en espais topològics i algebraics. Es seguirà essencialment [2, 3, 4, 5].

Podem suposar que $D_n = D^2 \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$ per n punts fixats ordenats que compleixen $-1 < p_1 < \dots < p_n < 1 \in D^2 \cap \mathbb{R}$.

Definició 3.1. Una *trena*, que denotarem per β és una col·lecció de n camins $f_i : I = [0, 1] \rightarrow D^2$, anomenats *filaments*, tal que, per $p_1, \dots, p_n \in D_2 \setminus \partial D_2$ diferents dos a dos:

- $f_i(0) = p_i$, per $1 \leq i \leq n$.
- $f_i(1) = p_j$, per $1 \leq j \leq n$.
- $\forall t \in I, f_i(t) \neq f_j(t)$ per $i \neq j$.

Observació 3.2. Usant la mateixa notació que a la definició anterior, β defineix una permutació τ del grup simètric Σ_n , que envia cada índex i de cada filament a l'índex j del seu punt final ($f_i(1) = p_j = p_{\tau(i)}$).

Definició 3.3. Una *trena pura* és una trena que compleix que tot filament comença i acaba al mateix punt, és a dir, $f_i(0) = f_i(1) = p_i$. Equivalentment, τ és la identitat.

Una trena es representa geomètricament com una col·lecció de n filaments en l'espai 3-dimensional. Aquest diagrama s'obté projectant les imatges de f_i al pla $\mathbb{C} \times [0, 1]$ o $D^2 \times [0, 1]$, que a la pràctica es dibuixarà sobre el pla $\mathbb{R} \times [0, 1]$ o $[0, 1] \times [0, 1]$, indicant quins filaments passen per sobre i quins per sota. Usaré el conveni que identifica $\mathbb{C} \times \{0\}$ amb el pla situat al capdamunt de la trena, i el pla $\mathbb{C} \times \{1\}$ serà el de sota, de tal manera que una trena es mou de dalt a baix (comença a $\mathbb{C} \times \{1\}$ i acaba a $\mathbb{C} \times \{0\}$).

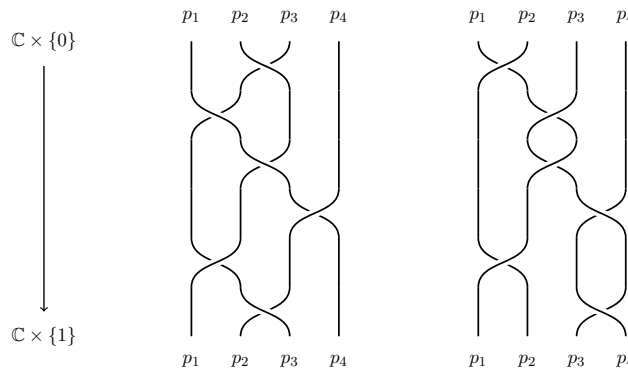


FIGURA 3.1. Una trena no pura i una trena pura.

Exemple 3.4. La permutació $\tau \in \Sigma_4$ corresponent a la trena no pura de la Figura 3.1 és $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, i la de la trena pura és $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = Id \in \Sigma_4$.

Definició 3.5. Siguin β_1, β_2 dues trenes. Direm que són *isotòpiques* o *isòtopes*, i ho denotarem per $\beta_1 \sim \beta_2$, si β_1 pot deformar-se contínuament a β_2 . És a dir, si existeix una aplicació contínua $F : \beta_1 \times I \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times I$ tal que $\forall s \in I$, la funció $F_s : \beta \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times I$, donada per $F_s(x) = F(x, s)$, és una immersió que té per imatge una trena de n filaments. S'ha de complir que $F_0 = Id_{\beta_1}$ i $F_1 = Id_{\beta_2}$ i els extrems de β_1 han de quedar fixos per a tot $s \in I$.

Observació 3.6. La relació d'isotopia és una relació d'equivalència. Tota isotopia és una homotopia.

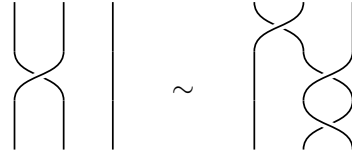


FIGURA 3.2. Dues trenes isòtopes

Definició 3.7. El *grup de trenes de n filaments*, que denotarem per B_n , és el conjunt de totes les trenes de n filaments mòdul isotopia, on

- El producte de dues trenes consisteix en enganxar-ne una sota de l'altra; és a dir, siguin $f := (f_1(t), \dots, f_n(t))$ i $g := (g_1(t), \dots, g_n(t))$ dues trenes, i τ la permutació del grup simètric Σ_n de la trena f . El producte, denotat per fg és la trena $h := (h_1(t), \dots, h_n(t))$, on

$$h_i(t) = \begin{cases} f_i(2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ g_{\tau(i)}(2t - 1) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Per tant, és trivial veure que B_n compleix la propietat associativa.

- La inversa d'una trena s'obté prenent la seva reflexió sobre el pla $\mathbb{C} \times \{0\}$ o bé sobre el pla $\mathbb{C} \times \{1\}$. És clar que la seva composició és isotòpica a la trena trivial.
- L'element neutre serà la trena 1_n , o bé trena trivial, definida com aquella que no té cap creuament.

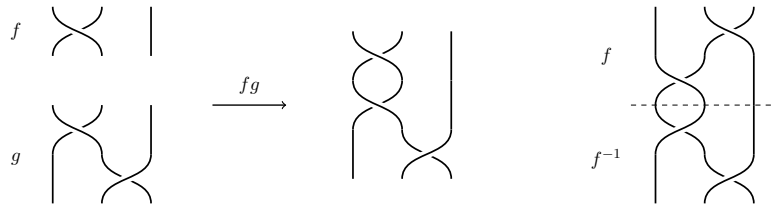


FIGURA 3.3. Producte de dues trenes i inversa d'una trena.

Definició 3.8. Anàlogament, es defineix el *grup de trenes pures*, que es denota per PB_n , com el subgrup de B_n format per totes les trenes pures de n filaments. Efectivament és un subgrup, ja que el producte de dues trenes pures és una trena pura, $1_n \in PB_n$ i per $\beta \in PB_n$, $\beta^{-1} \in PB_n$.

3.1 Estructura algebraica del grup de trenes

En aquesta secció es descriuran algunes propietats bàsiques algebraiques del grup B_n . Començarem veient que B_n té una presentació finita.

Teorema 3.9. (Presentació d'Artin.) Denotem per $\mathcal{B}_n$ el grup generat per $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ mòdul les relacions:

- $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$, per $|i - j| \geq 2$.
- $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$, per $i = 1, \dots, n - 2$.

Hi ha un isomorfisme de grups $\phi : \mathcal{B}_n \longrightarrow B_n$ determinat per:

$$\sigma_i \mapsto \begin{array}{c} i \quad i+1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array}$$

DEMOSTRACIÓ. La primera relació se satisfà per la primera igualtat de la Figura 3.4 i la segona se segueix per la segona igualtat. Per tant, ϕ és un homeomorfisme. Caldria comprovar que és un isomorfisme. L'exhaustivitat és clara ja que els elements $\phi(\sigma_i)$ generen B_n . La demostració completa es troba al Teorema 1.12, Capítol 1, de [2]. $\square$

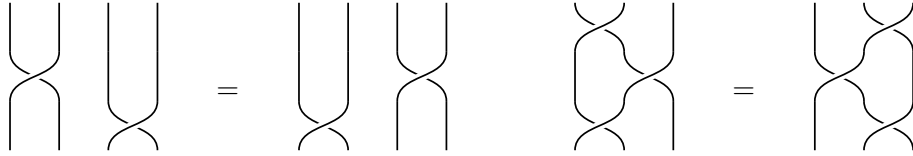


FIGURA 3.4. Relacions del grup de trenes d'Artin

Artin, per tant, dona la següent presentació per B_n :

$$B_n = \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{ll} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, & |i - j| > 1 \\ \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j, & |i - j| = 1 \end{array} \right\rangle$$

Exemple 3.10. El producte de trenes es llegeix d'esquerra a dreta. Per exemple, la trena no pura de la Figura 3.1 s'escriu com $\sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1}$, i la trena pura com $\sigma_3^{-1} \sigma_1 \sigma_3^{-1} \sigma_2 \sigma_2 \sigma_1$. Referent a la Figura 3.3, la trena producte $\sigma_1^{-1} \cdot \sigma_1^{-1} \sigma_2$ és $\sigma_2 \sigma_1^{-1} \sigma_1^{-1}$, i la inversa de $\sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1}$ correspon a $\sigma_2 \sigma_1$.

Observació 3.11. $B_2 \cong \mathbb{Z}$.

Lema 3.12. Sigui G un grup i $h_1, \dots, h_{n-1} \in G$ que satisfan les relacions del grup de trenes B_n . Aleshores existeix un únic homeomorfisme de grups $f : B_n \longrightarrow G$ tal que $f(\sigma_i) = h_i$ per a $1 \leq i \leq n - 1$.

DEMOSTRACIÓ. Sigui F_n el grup lliure generat per $\{\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}\}$. Aleshores hi ha un únic homeomorfisme de grups $\bar{f} : F_n \longrightarrow G$ tal que per a $i \in \{1, \dots, n - 1\}$, $\bar{f}(\sigma_i) = h_i$. Aquest homeomorfisme induïx un homeomorfisme de grups $f : B_n \longrightarrow G$, ja que tenim $\bar{f}(r) = \bar{f}(r')$ per a tota relació $r = r'$. $\square$

A continuació veurem algunes altres propietats algebraiques bàsiques del grup de trenes B_n . Totes les demostracions i justificacions apareixen a [3, 4].

- *L'abelianitzat de B_n .* L'abelianitzat de B_n és $\mathbb{Z}$ i aquest $\mathbb{Z}$ està generat per la imatge de qualsevol σ_i . El morfisme $B_n \rightarrow B_n^{ab} = \mathbb{Z}$ és un homeomorfisme de longitud, que envia cada generador σ_i a la suma dels seus exponents.
- *B_n és lliure de torsió.* La demostració no és necessària o prou important, ja que aquesta propietat és una observació. Es pot trobar la prova al Corol·lari 1.29, Capítol 1, de [2].
- *El centre de B_n .* Tenim $Z(B_2) = \langle \sigma_1 \rangle$ i que $\forall n \geq 3$, $Z(B_n) = Z(PB_n)$ és un grup cíclic generat per Δ_n^2 , on $\Delta_n := (\sigma_1 \cdots \sigma_{n-1})(\sigma_1 \cdots \sigma_{n-2}) \cdots (\sigma_1 \sigma_2) \sigma_1 \in B_n$.

Proposició 3.13. *Tota trena $\beta \in B_n$ defineix una permutació del grup simètric Σ_n .*

DEMOSTRACIÓ. Definim la projecció natural $\pi : B_n \rightarrow \Sigma_n$, que envia cada generador σ_i a la transposició simple $s_i \in \Sigma_n$ que permuta els elements i , $i + 1$ i deixa la resta invariants. De fet, π és morfisme de grups, ja que per $|i - j| > 1$ tenim $\pi(\sigma_i \sigma_j) = (i \ i+1)(j \ j+1) = (j \ j+1)(i \ i+1) = \pi(\sigma_j \sigma_i)$, i per $|i - j| = 1$, $\pi(\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i) = (i \ i+2) = \pi(\sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1})$.

Com hem vist abans, podem escriure tota trena $\beta \in B_n$ com $\beta = \sigma_{i_1}^{r_1} \cdots \sigma_{i_k}^{r_k}$ per a certs $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n - 1$. Per tant, la projecció de β sobre Σ_n serà:

$$\pi(\beta) = \pi(\sigma_{i_1}^{r_1} \cdots \sigma_{i_k}^{r_k}) = s_{i_1}^{r_1} \cdots s_{i_k}^{r_k}$$

que és producte de transposicions simples i, aleshores, $\pi(\beta) \in \Sigma_n$. $\square$

A continuació veurem una definició alternativa de les trenes pures i demostrarem que el conjunt PB_n és un subgrup normal de B_n .

Definició 3.14. Usant la notació anterior, una *trena pura* β és aquella que defineix la permutació identitat, és a dir, $\ker(\pi) = PB_n$.

Proposició 3.15. *El conjunt de trenes pures PB_n és un subgrup normal de B_n .*

DEMOSTRACIÓ.

- Siguin $\beta_1, \beta_2 \in PB_n$. Per definició, $\pi(\beta_1) = \pi(\beta_2) = (1)$. Volem veure que $\beta_1 \beta_2 \in PB_n$. Efectivament, $\pi(\beta_1 \beta_2) = \pi(\beta_1) \pi(\beta_2) = (1)$. Per tant, PB_n és un subgrup de B_n .
- Per demostrar que $PB_n \triangleleft B_n$ s'ha de comprovar que, per $\beta_1 \in PB_n$ i $\beta_2 \in B_n$, tenim $\beta_2 \beta_1 \beta_2^{-1} \in PB_n$. Observem que

$$\pi(\beta_2 \beta_1 \beta_2^{-1}) = \pi(\beta_2) \pi(\beta_1) \pi(\beta_2^{-1}) = \pi(\beta_2) \pi(\beta_2^{-1}) = (1)$$

Per tant $\beta_2 \beta_1 \beta_2^{-1} \in PB_n$ i es demostra que $PB_n \triangleleft B_n$. $\square$

Lema 3.16. *Tenim una successió exacta curta*

$$1 \rightarrow PB_n \xrightarrow{i} B_n \xrightarrow{\pi} \Sigma_n \rightarrow 1$$

on i és la inclusió.

DEMOSTRACIÓ. Efectivament, i és injectiva, al ser la inclusió, i per tant també tenim $Im(i) = PB_n = ker(\pi)$. Només cal veure que π és exhaustiva.

Sigui $\tau \in \Sigma_n$. Aleshores es pot expressar com a producte de transposicions, i cada transposició $(i j)$ amb $i < j$ també es pot expressar com:

$$(i j) = (i i+1)(i+1 i+2) \cdots (j-2 j-1)(j-1 j)(j-2 j-1) \cdots (i i+1)$$

Suposem que τ és el producte de k transposicions $\tau_1, \dots, \tau_k$. Aplicant la descomposició anterior, obtindrem un nou producte de transposicions:

$$\tau = \tau_1 \cdots \tau_k = (\tau_{1,1} \cdot \tau_{1,2} \cdots \tau_{1,l_1}) \cdots (\tau_{k,1} \cdot \tau_{k,2} \cdots \tau_{k,l_k})$$

Com que cada $\tau_{i,i'}$ és de la forma $(j j+1)$ per algun j , $\tau_{i,i'} = \pi(\sigma_j)$. Posem $m = \sum_{i=1}^k l_i$. Aleshores, com que π és morfisme de grups

$$\tau = \prod_{j=1}^m \pi(\sigma_{i_j}) = \pi\left(\prod_{j=1}^m \sigma_{i_j}\right)$$

Per $\beta \in B_n$ tal que $\beta = \prod_{j=1}^m \sigma_{i_j}$, tenim $\pi(\beta) = \tau$. És a dir, π és exhaustiva. $\square$

Observació 3.17. Aplicant el teorema d'isomorfia a π i el resultat anterior $Im(\pi) \cong \Sigma_n$, tenim $B_n/PB_n \cong \Sigma_n$.

3.2 Espai de configuracions

Definició 3.18. L'espai de configuració de n punts ordenats diferents dos a dos en una superfície S és $C^{ord}(S, n) = \{(z_1, \dots, z_n) \in S^{\times n} \mid z_i \neq z_j, \forall i \neq j\}$, on $S^{\times n}$ denota el producte cartesià de S n vegades amb sí mateix.

$C^{ord}(S, n)$ és una varietat topològica de dimensió $dim(S) \cdot n$, que a més és connexa. El grup simètric Σ_n actua en $S^{\times n}$ permutant les coordenades. S'indueix una acció de Σ_n via homeomorfismes a $C^{ord}(S, n)$, ja que permutant n punts diferents dos a dos, seguim tenint n punts diferents dos a dos. Per tant aquesta acció és lliure, el que ens porta a la següent definició:

Definició 3.19. L'espai quocient $C(S, n) = C^{ord}(S, n)/\Sigma_n$ és l'espai de configuració de n punts no ordenats diferents dos a dos de S .

Observació 3.20. Visualitzar l'espai de configuració $C(\mathbb{C}, n)$ no és trivial, ja que és un espai connectat real de dimensió $2n$. En canvi, es podrien considerar n punts diferents a $\mathbb{C}$, i d'aquesta manera, $(z_1, z_2, z_3, \dots, z_n)$ i $(z_2, z_1, z_3, \dots, z_n)$ representen el mateix conjunt de punts de $\mathbb{C}$, però són dos punts diferents a $C(\mathbb{C}, n)$.

Definició 3.21. Sigui S una superfície. El grup de trenes de superfície de n -filaments de S és el grup fonamental $\pi_1(C(S, n))$.

Observació 3.22. Hi ha un isomorfisme entre el grup de trenes de n filaments i el grup fonamental de l'espai de configuració de n punts:

$$PB_n \cong \pi_1(C^{ord}(\mathbb{C}, n)) \quad B_n \cong \pi_1(C(\mathbb{C}, n))$$

Efectivament, com que cada filament d'una trena és un camí $f_i : I \rightarrow \mathbb{C} \times I$ amb $f_i(t) \in \mathbb{C} \times \{t\}$ i extrems a p_i, p_j , podem pensar cada f_i com una aplicació $I \rightarrow \mathbb{C}$; aquesta

identificació ens dona un isomorfisme. Dit d'una altra manera, la intersecció de cada secció $\mathbb{C} \times \{t\}$ amb qualsevol trena és un punt a $C(\mathbb{C}, n)$ (ja que fixat un $t \in [0, 1]$, $f_i(t) \neq f_j(t)$, $\forall i \neq j$), i per tant, la col·lecció de totes seccions $\mathbb{C} \times \{t\}$ per $t \in [0, 1]$ ens dona un llaç amb inici i final a $(p_1, \dots, p_n)$, i per tant, un element de $\pi_1(C(\mathbb{C}, n))$. Podem pensar llavors, una trena $\beta = (f_1(t), \dots, f_n(t)) \in B_n$ com un camí tancat amb punt base $(p_1, \dots, p_n)$ a l'espai de configuració de n punts a $\mathbb{C}$, quan t va de 0 a 1.

El generador σ_i de B_n descrit anteriorment correspon a l'element de $\pi_1(C(\mathbb{C}, n))$ donat pel camí tancat a $C(\mathbb{C}, n)$, on el filament i i el filament $i+1$ s'intercanvien fent una rotació en sentit antihorari (tal i com està indicat a la Figura 3.5), i els $n - 2$ punts restants romanen fixos.

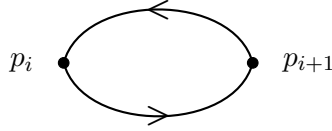


FIGURA 3.5. Generador σ_i de B_n .

3.3 Mapping class groups

Sigui S una superfície orientable. Denotarem per $(\text{Homeo}(S), \circ)$ el grup d'homeomorfismes de S amb la composició. Denotarem $Q \subset S^\circ$ un subconjunt finit.

Definició 3.23. Definim $\text{Homeo}_{\partial S}(S, Q)$ com el subgrup de $\text{Homeo}(S)$ dels homeomorfismes de S que preserven l'orientació de S , fixen la frontera ∂S punt a punt i fixen Q com a conjunt. Si $Q = \emptyset$, ho denotarem simplement per $\text{Homeo}_{\partial S}(S)$.

Observacions 3.24. • Podem dotar al grup $\text{Homeo}_{\partial S}(S, Q)$ amb la topologia compacta oberta per tal d'obtenir un grup topològic. Gràcies a això té sentit parlar de camins o funcions.

- Qualsevol $f \in \text{Homeo}_{\partial S}(S, Q)$ induïx una permutació a Q .
- Si la superfície S és connexa i $\partial S \neq \emptyset$, aleshores tot homeomorfisme $f : S \rightarrow S$ que fixa la frontera punt a punt, preserva l'orientació.

Definició 3.25. Sigui S una superfície i $f, g \in \text{Homeo}_{\partial S}(S, Q)$. Es diu que f i g són *isòtops* si existeix una homotopia $F : S \times I \rightarrow S$ entre f i g tal que per a cada $t \in I$, la funció $F_t : S \rightarrow S$ definida per $F_t(x) := F(x, t)$ és un homeomorfisme.

Tenim per tant una relació d'equivalència $\sim$ en el conjunt $\text{Homeo}_{\partial S}(S, \partial S)$, que correspon a la relació d'isotopia. Dos homeomorfismes isòtops de $\text{Homeo}_{\partial S}(S, Q)$ induïxen la mateixa permutació sobre Q .

Definició 3.26. El *mapping class group* o bé el *grup modular* d'una superfície compacta, connexa i orientable S , amb frontera ∂S , es defineix com:

$$\text{Mod}(S, Q) \cong \text{Homeo}_{\partial S}(S, Q) / \sim$$

És a dir, $\text{Mod}(S, Q)$ és el grup de classes d'isotopia d'elements de $\text{Homeo}_{\partial S}(S, Q)$, amb la condició que les isotopies fixin la frontera punt a punt. L'operació serà la composició d'homeomorfismes: $fg = f \circ g$, per $f, g \in \text{Mod}(S, Q)$. Per tant, si denotem per $\text{Homeo}_0(S, Q)$ la component connexa de la identitat en $\text{Homeo}_{\partial S}(S, Q)$, tindrem:

$$\text{Mod}(S, Q) \cong \frac{\text{Homeo}_{\partial S}(S, Q)}{\text{Homeo}_0(S, Q)}$$

Si $Q = \emptyset$, aleshores $\text{Mod}(S, Q) = \text{Mod}(S, \emptyset) = \text{Mod}(S)$.

Ja definits conceptes bàsics i generals, procedirem a introduir la relació entre el grup de trenes i el grup modular. Comencem doncs veient un dels exemples més senzills: $\text{Mod}(D^2) = \{1\}$, o més aviat conegut com el Lema d'Alexander. Per això cal abans demostrar el següent Teorema.

Teorema 3.27. (Truc d'Alexander.) *Sigui $f \in \text{Homeo}_{\partial D^n}(D^n)$. Si f fixa la frontera $\partial D^n = \mathbb{S}^{n-1}$, aleshores f és isòtopa a la identitat.*

DEMOSTRACIÓ. Sigui $f : D^n \rightarrow D^n$ un homeomorfisme tal que $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{S}^{n-1}$. Volem veure que existeix una isotopia $H : \text{Homeo}_{\partial D^n}(D^n) \times I \rightarrow \text{Homeo}_{\partial D^n}(D^n)$ entre la identitat Id_{D^n} i f . Definim aleshores H com $H(f, t) := f_t$, on $f_t : D^n \rightarrow D^n$ és:

$$f_t(x) = \begin{cases} tf(\frac{x}{t}) & 0 \leq \|x\| < t \\ x & t \leq \|x\| \leq 1 \end{cases}$$

f_t és un homeomorfisme, ja que per $\|x\| = t$, tenim $tf(\frac{x}{t}) = \|x\|f(\frac{x}{\|x\|}) = \|x\|(\frac{x}{\|x\|}) = x$ (que implica continuïtat), i x , $tf(\frac{x}{t})$ són contínues i bijectives, per ser-ho f . Per tant H està ben definida.

Fixem-nos llavors que $H(f, 0) = f_0 = Id_{D^n}$ i $H(f, 1) = f_1 = f$, i per tant H és la isotopia que buscàvem. $\square$

Pel cas $n = 2$ és fàcil visualitzar la isotopia (veure Figura 3.6), on per $t = 0$ només actua la identitat en D_2 , i a mesura que el temps avança, s'aplica $f(x)$ per als x tals que $\|x\| < t$ (disc corresponent a la secció d'alçada t del con). Els homeomorfismes $H(\cdot, t)$ corresponen a cada secció horitzontal del cilindre.

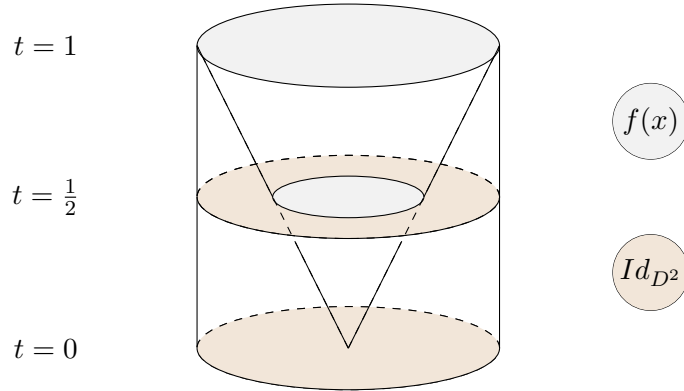


FIGURA 3.6. Truc d'Alexander per $n = 2$.

Se segueix del truc d'Alexander, que $\text{Homeo}_{\partial D_n}(D^2)$ és contràtil. La demostració del Teorema també serveix si enlloc del disc D^2 prenem $D^2 \setminus \{p\}$ per $p \notin \partial D^2$ (enviant p a l'origen). Com a conseqüència tenim el següent resultat:

Corol·lari 3.28. $\text{Mod}(D^2 \setminus p) = \{1\}$, per $p \notin \partial D^2$.

DEMOSTRACIÓ. La demostració del Truc d'Alexander segueix sent vàlida si parlem de $D^2 \setminus p$ i p el fem correspondre a l'origen. $\square$

Es pot descriure el grup de trenes B_n com a grup modular? A continuació veurem que sí, i demostrarem l'existència d'un isomorfisme $\eta : B_n \longrightarrow \text{Mod}(D_n)$.

3.3.1 Half-twists

Sigui S una superfície orientable, possiblement amb vora, i sigui $Q \subset S^\circ$ un subconjunt finit. Suposarem que tots els camins o arcs en aquesta secció són simples.

Definició 3.29. Un *arc generador* a (S, Q) amb punts inicial i final a Q és un subconjunt de S homeomorf a $I = [0, 1]$ i disjunt de $Q \cup \partial S$ (amb l'excepció dels seus extrems).

Definició 3.30. Sigui $\alpha \subset S$ un arc generador a (S, Q) i U un entorn de α que identifiquem amb el disc unitari obert $\{z \in \mathbb{C} : \|z\| < 1\}$. D'aquesta manera $\alpha = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ i l'orientació de S serà l'antihorària (la de $\mathbb{C}$). Un *half-twist* és un homeomorfisme

$$\tau_\alpha : S \longrightarrow S$$

tal que, per $x \in S$

$$\tau_\alpha(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in S \setminus U \\ -x & \text{si } \|z\| < \frac{1}{2} \\ e^{-2\pi i \|z\|} z & \text{si } \frac{1}{2} \leq \|x\| < 1 \end{cases}$$

És a dir, α fa una rotació en sentit antihorari de 180 graus. Clarament, $\tau_\alpha(\alpha) = \alpha$, $\tau_\alpha(Q) = Q$ i τ_α indueix una transposició a Q que permuta els extrems de α . També veiem que $\tau_\alpha \in \text{Mod}(S, Q)$ no depèn de l'elecció de U . Podem observar a la Figura 3.7 l'acció de τ_α en una corba γ a S que interseca α en un punt.

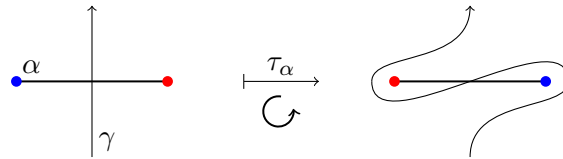


FIGURA 3.7. Acció d'un half-twist.

Observacions 3.31. • Si α, β són arcs generadors disjunts a (S, Q) , aleshores

$$\tau_\alpha \tau_\beta = \tau_\beta \tau_\alpha \in \text{Mod}(S, Q)$$

Es demostra escollint entorns disjunts U_α, U_β .

- Si α, β són dos arcs generadors a (S, Q) tals que la seva intersecció és només un extrem de Q_n , aleshores

$$\tau_\alpha \tau_\beta \tau_\alpha = \tau_\beta \tau_\alpha \tau_\beta \in \text{Mod}(S, Q)$$

Es pot trobar la demostració a l'apartat 1.6.2 de [2].

Per l'interès del lector a saber algunes propietats dels half-twists, es recomana llegir l'apartat 1.6.2, de [2].

DEHN-TWISTS

Sigui C una corba tancada simple a l'interior de D^2 , l'interior de la qual conté n punts marcats. Intuïtivament, un *Dehn-twist* al voltant d'aquesta corba, consisteix en tallar D^2 per C , fer un gir de 360 graus en una de les dues peces i tornar a enganxar. Definim-ho:

Definició 3.32. Sigui Σ una superfície orientada, i sigui C una corba tancada simple, imatge d'una immersió $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \Sigma^\circ = \Sigma \setminus \partial\Sigma$. Aleshores C genera un homeomorfisme t_c de Σ anomenat *Dehn-twist*.

Posem $I = [0, 1]$ i identifiquem un entorn cilíndric de C a Σ amb $\mathbb{S}^1 \times I$, de tal manera que $C = \mathbb{S}^1 \times \{\frac{1}{2}\}$, i que el producte de l'orientació (antihorària) a $\mathbb{S}^1$ i l'orientació a I (corresponent amb la de $\mathbb{S}^1$) coincideix amb l'orientació donada a Σ . El Dehn-twist serà $t_c : \Sigma \longrightarrow \Sigma$, tal que:

$$(x, s) \mapsto \begin{cases} (x, s) & \text{si } (x, s) \notin \mathbb{S}^1 \times I \\ (e^{2\pi i s} x, s) & \text{si } (x, s) \in \mathbb{S}^1 \times I \end{cases}$$

Per més detall, es poden consultar l'apartat 3.2.4 de [2] i el Capítol 3 de [3].

3.3.2 El grup de trenes com a grup modular

Sigui $n \geq 1$. Denotem per $Q_n \subset \mathbb{C}$ el conjunt de n punts $\{p_i = (i, 0) \mid 1 \leq i \leq n\}$. Sigui D un disc euclidià a $\mathbb{C}$ tal que $Q_n \subset D^\circ$. Dotem D amb l'orientació antihorària.

Denotem per $\alpha_i = [i, i+1] \times \{0\} \subset D$ els arcs, per $1 \leq i \leq n-1$, que tenen per extrems punts de Q_n i no interseca en cap més punt. Per tant tindrem $\tau_{\alpha_i} \in \text{Mod}(D, Q_n)$, $\forall i$.

A partir de les observacions anteriors deduïm que els half-twists $\tau_{\alpha_1}, \dots, \tau_{\alpha_{n-1}}$ satisfan les relacions de la presentació del grup d'Artin de B_n . Pel Lema 3.12 sabem que hi ha un homeomorfisme de grups

$$\eta : B_n \longrightarrow \text{Mod}(D, Q_n)$$

tal que $\sigma_i \mapsto \tau_{\alpha_i}$. Cal demostrar que és un isomorfisme.

Observació 3.33. En el context de $\text{Mod}(D, Q_n)$, el quadrat d'un half-twist és un Dehn-twist.

Teorema 3.34. Per a tot $n \geq 1$, $\eta : B_n \longrightarrow \text{Mod}(D, Q_n)$ és un isomorfisme.

DEMOSTRACIÓ. La demostració d'aquest Teorema és bastant extensa i inclou la definició d'un grup d'automorfismes de trenes $\tilde{B}_n$, així com la demostració de l'existència de dos altres isomorfismes $\text{Mod}(D, Q_n) \longrightarrow \tilde{B}_n$ i $B_n \longrightarrow \tilde{B}_n$. No es desenvoluparà en aquest treball, però el lector la pot trobar en el Teorema 1.33, Capítol 1, de [2]. $\square$

Per tant, tenim un isomorfisme $B_n \cong \text{Mod}(D, Q_n)$. Es pot pensar de la següent manera: sigui $f \in \text{Homeo}_{\partial D}(D, Q_n)$ un homeomorfisme. Si només pensem Q_n com a conjunt, aleshores f és només un homeomorfisme de D que fixa ∂D punt a punt, i per tant, pel truc d'Alexander, f és isotòpic a la identitat. Si distingim punt a punt el conjunt Q_n , els punts marcats es mouen per D° i retornen a un altre punt marcat, creant així

un llaç en $C(\mathbb{C}, n)$. D'aquesta manera produïm una trena. Per tant, podem pensar una trena com un homeomorfisme del disc D^2 que permuta els punts del conjunt Q_n .

Recordant com actua un generador σ_i a l'espai de configuracions $C(\mathbb{C}, n)$ (Figura 3.5), l'isomorfisme $B_n \rightarrow \text{Mod}(D, Q_n)$ assigna cada σ_i a $H_i \in \text{Mod}(D, Q_n)$, que denota la classe de l'homeomorfisme amb suport en un disc que només conté els punts marcats p_i, p_{i+1} , i que actua com un half-twist en aquell disc (Figura 3.8).

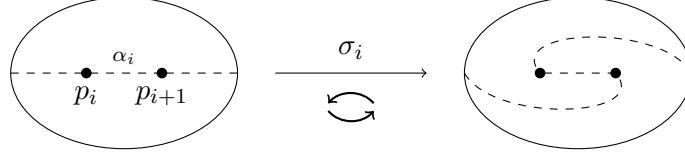


FIGURA 3.8. Classe d'isotopia de ϕ a través de σ_i .

Corol·lari 3.35. *Si $f \in \text{Homeo}(D, Q_n)$ un homeomorfisme. Aleshores f és isòtop a un difeomorfisme $(D, Q_n) \rightarrow (D, Q_n)$, tal que Q_n es preserva en cada pas de la isotopia.*

DEMOSTRACIÓ. Correspon al Corol·lari 1.34, Capítol 1, de [2], la demostració es dedueix de la demostració del Teorema anterior. $\square$

Definició 3.36. Sigui S una superfície i $Q \subset S^\circ$ un subconjunt finit. Denotarem per $\text{PMod}(S, Q)$ el *grup modular pur* o *pure mapping class group*, que és el subgrup de $\text{Mod}(S, Q)$ que fixa Q punt a punt.

Corol·lari 3.37. $PB_n \cong \pi_1(C^{\text{ord}}(\mathbb{C}, n)) \cong \text{PMod}(D, Q_n)$.

Hem demostrar i vist que el grup de trenes B_n el podem interpretar geomètricament de tres maneres diferents: mitjançant trenes de n filaments, per l'espai de configuració de n punts no ordenats en el pla $\mathbb{C}$, i finalment l'hem interpretat com a grup d'homeomorfismes d'un disc amb n punts diferents de l'interior. És a dir:

$$\pi_1(C(\mathbb{C}, n)) \cong B_n \cong \text{Mod}(D, Q_n)$$

4 La representació de Lawrence-Krammer

En aquest apartat definirem i explicarem la representació que Lawrence-Krammer. Se seguirà, generalment, [1, 2, 5, 6].

Sigui $n \geq 1$. Seguirem denotant per $Q_n \subset \mathbb{C}$ el conjunt de n punts $\{p_i = (i, 0) \mid 1 \leq i \leq n\}$, D un disc euclidià a $\mathbb{C}$ tal que $Q_n \subset D^\circ$, i $D_n := D \setminus Q_n$. Dotarem D, D_n amb l'orientació antihorària.

Definició 4.1. Denotarem per $\mathcal{C}$ l'espai de totes les parelles no ordenades de punts a D_n , és a dir

$$\mathcal{C} = \frac{(D_n \times D_n) \setminus \Delta D_n}{(x, y) \sim (y, x)}$$

on $\Delta D_n = \{(x, x) \in D_n \times D_n \mid x \in D_n\}$ és la diagonal de $D_n \times D_n$.

Observació 4.2. La relació $\sim$ a $\mathcal{C}$ defineix una involució que preserva l'orientació i per tant $\mathcal{C}$ és una varietat de dimensió 4 no compacta, orientable, arc-connexa i amb frontera.

Un punt de $\mathcal{C}$ es representa per $\{x, y\}$, on $x, y \in D_n$ i $x \neq y$, i denotarem per $c = \{d_1, d_2\}$ un punt base de $\mathcal{C}$, amb $d_1 \neq d_2$ dos punts diferents de ∂D_n . Observem que podem parlar de $\pi_1(\mathcal{C})$ i de $\pi_1(\mathcal{C}, c)$.

Un camí $\alpha : I \rightarrow \mathcal{C}$ es representarà com $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2\}$, on $\alpha_1, \alpha_2 : I \rightarrow D_n$ són dos camins tals que $\alpha_1(t) \neq \alpha_2(t)$, $\forall t \in I$. És a dir, $\alpha(t) := \{\alpha_1(t), \alpha_2(t)\}$. El producte de camins $\gamma \circ \gamma'$ es denotarà per $\{\gamma'_1, \gamma'_2\}\{\gamma_1, \gamma_2\}$.

Observació 4.3. Si α_1, α_2 comencen i acaben a d_1 i d_2 , aleshores $\alpha \in \pi_1(\mathcal{C}, c)$; ja que ha de passar una de les dues opcions següents (veure Figura 4.1):

- α_1 (respectivament α_2) és un camí tancat amb base d_1 (respectivament d_2).
- $\alpha_1(0) = \alpha_2(1) = d_1$ (resp. d_2) i $\alpha_1(1) = \alpha_2(0) = d_2$ (resp. d_1).

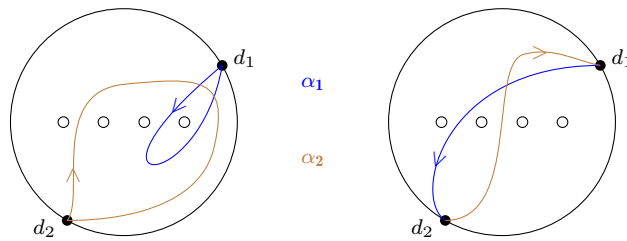


FIGURA 4.1. Dos tipus de camins $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ a l'espai $\mathcal{C}$, per $n = 4$.

Observem també que dos camins poden ser homòtops si i només si els dos són del mateix tipus. En el cas de pertànyer a la primera opció anterior, caldria que $d_1 = d_2$. Qualsevol homotopia entre dos camins $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2\}, \gamma = \{\gamma_1, \gamma_2\} : I \rightarrow \mathcal{C}$ ve definida per dues homotopies $F_1, F_2 : I \times I \rightarrow \mathcal{C}$, tals que $F_1(s, t) \neq F_2(s, t)$ per a tot $s, t \in I$.

Sigui $\gamma = \{\gamma_1, \gamma_2\}$ un camí tancat a $\mathcal{C}$. A continuació definirem dos invariants mòdul homotopia de γ .

Definició 4.4. Sigui $\gamma = \{\gamma_1, \gamma_2\} : I \longrightarrow \mathcal{C}$ un camí tancat, amb un nombre finit d'interseccions i tal que $\gamma_1(0) = \gamma_1(1)$ i $\gamma_2(0) = \gamma_2(1)$. Definim

$$w(\gamma) := \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^n \left(\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z - p_j} + \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z - p_j} \right) = \sum_{i=1}^n (Ind(\gamma_1, p_i) + Ind(\gamma_2, p_i))$$

Si γ és un llaç tal que $\gamma_1(0) = \gamma_2(1)$ i $\gamma_2(0) = \gamma_1(1)$, aleshores definim

$$w(\gamma) := \sum_{i=1}^n Ind(\gamma_1 \circ \gamma_2, p_i)$$

és a dir, $w : \pi_1(\mathcal{C}, d) \longrightarrow \mathbb{Z}$ serà la suma de l'índex respecte els punts p_i del llaç $\gamma_1\gamma_2$.

Definició 4.5. Sigui $\gamma = \{\gamma_1, \gamma_2\}$ un camí tancat a $\mathcal{C}$. Considerem l'aplicació $\eta_\gamma : I \longrightarrow \mathbb{S}^1$ tal que

$$\eta_\gamma(s) := \left(\frac{\gamma_1(s) - \gamma_2(s)}{|\gamma_1(s) - \gamma_2(s)|} \right)^2$$

L'orientació antihorària a $\mathbb{S}^1$ determina un generador de $H_1(\mathbb{S}^1; \mathbb{Z}) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$ (corol·lari 2.66). El llaç η_γ serà homòleg a $k \in \mathbb{Z}$ vegades el generador. Definirem $u(\gamma) := k$. També és el mateix dir que $u(\gamma)$ és el grau de η_γ .

Observem que si no elevem al quadrat, aleshores en el cas que $\gamma_1(0) = \gamma_2(1)$ i $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$, tindriem $\eta_\gamma(0) = -\eta_\gamma(1)$. Per tant, no seria un llaç. Elevant al quadrat està ben definit, ja que per $\alpha_1(s) \neq \alpha_2(s)$, $\forall s \in I$ i serà un camí tancat a $\mathbb{S}^1$.

Com que l'índex és un invariant homotòpic, aleshores $w(\gamma), u(\gamma)$ són també invariants mòdul homotopia. Fixem-nos també que són additius amb respecte del producte de camins, és a dir, si $\gamma, \tilde{\gamma}$ són dos llaços a $\mathcal{C}$, aleshores $w(\gamma\tilde{\gamma}) = w(\gamma) + w(\tilde{\gamma})$ (anàleg amb u).

Observació 4.6. Si γ_1 i γ_2 són camins tancats a D_n , aleshores $u(\{\gamma_1, \gamma_2\})$ és un nombre parell, ja que el grau de η_γ serà el doble del grau del llaç $\frac{\gamma_1(s) - \gamma_2(s)}{|\gamma_1(s) - \gamma_2(s)|}$, per ser el grau un isomorfisme de grups entre $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$ i $(\mathbb{Z}, +)$.

Exemple 4.7. Sigui $\gamma = \{\gamma_1, \gamma_2\}$ un camí tancat a $\mathcal{C}$ tal que γ_1 és el camí constant en un punt $q \in D_n$ i γ_2 és un llaç a D_n que no conté q . Aleshores:

- $w(\gamma) = w(\gamma_2)$
- $u(\gamma) = 2 \cdot m$, per m l'índex de γ_2 al voltant de $\gamma_1 \equiv q$.

Si γ_2 encercla un p_i en sentit antihorari i $q \in \partial D_n$, aleshores $w(\gamma) = 1$ i $u(\gamma) = 0$.

Exemple 4.8. Sigui $D \subset D_n$ un disc i siguin $q_1, q_2 \in \partial D$ punts diferents. Sigui $\gamma = \{\gamma_1, \gamma_2\}$ un camí tancat a $\mathcal{C}$ tal que γ_1 (resp. γ_2) és l'arc de la vora del disc D , en sentit antihorari, que va de q_1 a q_2 (resp. de q_2 a q_1). Aleshores $w(\gamma) = w(\gamma_1 \circ \gamma_2) = 0$ i $u(\gamma) = 1$.

4.1 L'homeomorfisme

Hem definit $w(\gamma)$ i $u(\gamma)$, que estan ben definits mòdul homotopia i són homeomorfismes de grups $\pi_1(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathbb{Z}$.

Sigui $c = \{d_1, d_2\} \in \mathcal{C}$ un punt base, amb $d_1, d_2 \in \partial D_n$. Denotem per ρ l'homeomorfisme de grups definit com

$$\rho : \pi_1(\mathcal{C}, \{d_1, d_2\}) \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \quad \text{on} \quad \gamma \mapsto q^{w(\gamma)} t^{u(\gamma)}.$$

per q, t generadors canònics de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ (és a dir, $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \mathbb{Z}\langle q, t \rangle$ i $\rho(\gamma) = q^{w(\gamma)} t^{u(\gamma)} = (w(\gamma), u(\gamma))$).

Lema 4.9. *L'homeomorfisme de grups $\rho : \pi_1(\mathcal{C}, \{d_1, d_2\}) \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ és exhaustiu.*

DEMOSTRACIÓ. Siguin q, t els generadors canònics de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Aleshores només cal veure que aquests pertanyen a la imatge de ρ .

- $q \in \text{Im}(\rho)$. Sigui $\gamma = \{\gamma_1, \gamma_2\}$ el llaç a $\mathcal{C}$ tal que γ_1 és constant i γ_2 un llaç que envolta de molt aprop a p_1 en sentit antihorari. Aleshores

$$w(\gamma) = \sum_{i=1}^n (\text{Ind}(\gamma_1, p_i) + \text{Ind}(\gamma_2, p_i)) = 0 + 1 = 1$$

Per tant també tindrem $u(\gamma) = 0$. És a dir, $\rho(\gamma) = q$.

- $t \in \text{Im}(\rho)$. Sigui $D' \subset D_n$ un disc i definim el camí tancat γ de la següent manera: fixem $x, y \in \partial D'$ tals que $x \neq y$, i definim γ_1 com el camí que ressegueix $\partial D'$ amb punt inicial x i punt final y en sentit antihorari. Anàlogament definim també γ_2 com el camí que ressegueix $\partial D'$ amb punt inicial y i punt final x en sentit antihorari. Aleshores

$$w(\gamma) = \text{Ind}(\gamma_1 \circ \gamma_2) = 0, \quad u(\gamma) = \text{gr}(\text{Id}) = 1$$

I per tant $\rho(\gamma) = t$. □

Pel Teorema d'isomorfia, podem prendre $\tilde{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathcal{C}$ el revestiment corresponent al subgrup $\ker(\rho)$ de $\pi_1(\mathcal{C}, c)$. És a dir, $\pi_1(\tilde{\mathcal{C}}) = \ker(\rho)$ i, a més, $\pi_1(\tilde{\mathcal{C}}) \triangleleft \pi_1(\mathcal{C})$. Pel Lema d'elevació de camins 2.31, si γ és un llaç a $\mathcal{C}$ amb punt base $P \in \mathcal{C}$, i $\tilde{P}$ és l'elevació de P , aleshores l'única elevació d'aquest camí tindrà punt inicial $\tilde{P}$ i punt final $[\gamma] \cdot \tilde{P} = \rho(\gamma)\tilde{P}$ a $\tilde{\mathcal{C}}$.

Observacions 4.10. • Els generadors q, t actuen en $\tilde{\mathcal{C}}$ com a transformacions de recobriment.

- $\mathcal{C}$ és el quocient de $\tilde{\mathcal{C}}$ pel grup d'homeomorfismes generats per q i t .
- Un llaç γ a $\mathcal{C}$ s'eleva a un llaç a $\tilde{\mathcal{C}}$ si i només si $w(\gamma) = u(\gamma) = 0$.

Observació 4.11. Sigui $f \in \text{Homeo}_{\partial D}(D, Q_n)$ i $x, y \in D$ diferents. Aleshores f indueix un homeomorfisme $f : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ tal que $f(\{x, y\}) = \{f(x), f(y)\}$. Recordem que f fixa ∂D punt a punt, i Q_n com a conjunt, per tant si $c = \{d_1, d_2\}$ és un punt base de la frontera, $f(c) = c$ i podem considerar l'automorfisme f_* de $\pi_1(\mathcal{C}, c)$ induït per f .

Tenim un recobriment $p : \tilde{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathcal{C}$ i volem provar que l'homeomorfisme $f : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ es pot elevar a $\tilde{f} : \tilde{\mathcal{C}} \longrightarrow \tilde{\mathcal{C}}$. Podem utilitzar la Proposició 2.40, fent la composició $f \circ p$. Per tant, cal demostrar que $f_*(p_*(\pi_1(\tilde{\mathcal{C}}))) \subset p_*(\pi_1(\tilde{\mathcal{C}}))$. Per definició de $\tilde{\mathcal{C}}$, tenim $p_*(\pi_1(\tilde{\mathcal{C}})) = \ker(\rho)$, ja que $\pi_1(\tilde{\mathcal{C}}) = \ker(\rho)$.

Per tant, cal verificar que f_* envia els elements de $\ker(\rho)$ a $\ker(\rho)$.

Lema 4.12. *Sigui ρ l'homeomorfisme definit anteriorment de $\pi_1(\mathcal{C}, \{d_1, d_2\}) \longrightarrow \mathbb{Z}\langle q, t \rangle$ tal que $\gamma \mapsto q^{w(\gamma)}t^{u(\gamma)}$. Aleshores $\rho \circ f_* = \rho$.*

DEMOSTRACIÓ. Hem de demostrar-ho pels seus generadors, és a dir, s'ha de provar que $w \circ f_* = w$ i $u \circ f_* = u$. Denotem per $\{x, y\}$ un punt qualsevol de $\mathcal{C}$.

- $w \circ f_* = w$. Sigui $g \in \text{Homeo}_{\partial D}(D, Q_n)$. En efecte, g preserva la suma dels índexs de llaços a D_n , ja que, per a qualsevol camí tancat de D_n , la suma dels índexs depèn de la seva classe d'homologia al grup $H_1(D_n; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^n$ (exemple 2.67)

Per tant, $w(\gamma)$ es conserva per a qualsevol f_* homeomorfisme de $\pi_1(\mathcal{C}, c)$, és a dir, $w \circ f_* = w$.

- $u \circ f_* = u$. Sigui $C(D_n, 2) = \mathcal{C}$ i $C(D, 2)$ els espais de configuracions dels espais D_n i D . Per construcció, $D_n \subset D$, ja que $D_n = D \setminus Q_n$. Per tant, podem considerar la inclusió $\mathcal{C} = C(D_n, 2) \hookrightarrow C(D, 2)$. Denotem $i : \pi_1(\mathcal{C}, \{x, y\}) \hookrightarrow \pi_1(C(D, 2), \{x, y\})$ el morfisme induït per aquesta inclusió.

L'invariant $u : \pi_1(\mathcal{C}, \{x, y\}) \longrightarrow \mathbb{Z}$ es pot estendre a $\hat{u} : \pi_1(C(D, 2), \{x, y\}) \longrightarrow \mathbb{Z}$ invariant, tal que el següent diagrama

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\mathcal{C}, \{x, y\}) & & \\ \downarrow i & \searrow u & \\ \pi_1(C(D, 2), \{x, y\}) & \xrightarrow{\hat{u}} & \mathbb{Z} \end{array}$$

commuta. Aleshores f es pot estendre a $\bar{f} \in \text{Homeo}(C(D, 2))$. Pel truc d'Alexander (Teorema 3.27), $\bar{f} \sim Id$. Per tant $\bar{f}$ actua de manera trivial a $\pi_1(C(D, 2), \{x, y\})$. Sigui $\bar{f}_* : \pi_1(C(D, 2), \{x, y\}) \longrightarrow \pi_1(C(D, 2), \{x, y\})$ el morfisme induït per $\bar{f}$.

Prenem $\gamma \in \pi_1(\mathcal{C}, \{x, y\}) = \pi_1(C(D_n, 2), \{x, y\})$. Tindrem:

$$u \circ f_*(\gamma) = \hat{u} \circ i \circ f_*(\gamma) = \hat{u} \circ \bar{f}_* \circ i \circ \gamma = \hat{u} \circ i(\gamma) = u(\gamma)$$

□

El fet que $\rho \circ f_* = \rho$ implica que $f_*([\gamma])$ pertany al mateix conjunt de classes d'homotopia que $[\gamma]$, per a $[\gamma] \in \pi_1(\mathcal{C})$. Per tant, preserva la imatge en $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. En particular, preserva $\ker(\rho) = \pi_1(\tilde{\mathcal{C}})$.

Per tant, el Lema implica que existeix una elevació de f , que denotarem per $\tilde{f} : \tilde{\mathcal{C}} \longrightarrow \tilde{\mathcal{C}}$. Aquest homeomorfisme fixa tots els punts de $\tilde{\mathcal{C}}$ que pertanyen a l'antiimatge de c pel recobriment $\tilde{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathcal{C}$ i commutarà amb els automorfismes de recobriment del revestiment $\tilde{\mathcal{C}}$ (és a dir, $\mathbf{p} \circ \tilde{f} = f \circ \mathbf{p}$).

Afirmació 4.13. *L'elevació $\tilde{f}$ és única.*

DEMOSTRACIÓ. Suposem que no ho és. Siguin $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2$ dues elevacions de f diferents. Aleshores $\mathbf{p} \circ \tilde{f}_1 = \mathbf{p} \circ \tilde{f}_2 = f \circ \mathbf{p}$. Per la Proposició 2.30 (posant $Y = \tilde{X} = \tilde{\mathcal{C}}$), cal veure que coincideixen en un punt. Suposem doncs, que no tenen cap punt en comú. Aleshores per $x \in \mathcal{C}$ i una elevació $\tilde{x} \in \tilde{\mathcal{C}}$ fixada, tenim $\tilde{f}_1(\tilde{x}) = \tilde{x}_1 \neq \tilde{x}_2 = \tilde{f}_2(\tilde{x})$.

$\mathbf{p}(\tilde{f}_1(\tilde{x})) = \mathbf{p}(\tilde{f}_2(\tilde{x})) = f(\mathbf{p}(\tilde{x})) = f(x)$. Per tant $\mathbf{p}(\tilde{x}_1) = \mathbf{p}(\tilde{x}_2)$. Com que $\mathcal{C}$ és arc-connex, podem construir un camí $\gamma : I \longrightarrow \mathcal{C}$ tal que $\gamma(0) = x = \mathbf{p}(\tilde{x})$ i $\gamma(1) = f(x) = f(\mathbf{p}(\tilde{x}))$. Aquest s'eleva únicament a un camí a $\tilde{\mathcal{C}}$ amb punt inicial $\tilde{x}$ i final $\tilde{f}_1(\tilde{x}) = \tilde{f}_2(\tilde{x})$. És a dir, $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2$ i arribem a contradicció. $\square$

Denotem per $\tilde{f}^{-1}$ la inversa de $\tilde{f}$. L'acció de q, t a $\tilde{\mathcal{C}}$ indueix una acció de q, t al grup abelià $\mathcal{H} := H_2(\tilde{\mathcal{C}}; \mathbb{Z})$. Aleshores l'endomorfisme induït $\tilde{f}_* : H_2(\tilde{\mathcal{C}}; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_2(\tilde{\mathcal{C}}; \mathbb{Z})$, és un Λ -automorfisme lineal, per $\Lambda = \mathbb{Z}[q^{\pm 1}, t^{\pm 1}]$.

De fet, tots els grups d'homologia $H_*(\tilde{\mathcal{C}}; \mathbb{Z})$ seran Λ -mòduls lliures. En particular, el mòdul $\mathcal{H}$ serà de rang $\frac{n(n-1)}{2}$, és a dir, $\mathcal{H} \cong \Lambda^{\frac{n(n-1)}{2}}$ (això es veu a l'apartat 6).

Per una definició més rigurosa de l'homologia de $\tilde{\mathcal{C}}$ i la seva estructura, hom pot consultar [13, 14].

Definició 4.14. La representació de Lawrence-Krammer del grup de trenes B_n és l'homeomorfisme de grups injectiu $\phi_n : B_n \longrightarrow \text{Aut}_{\Lambda}(H_2(\tilde{\mathcal{C}}))$, tal que $f \mapsto \tilde{f}_*$.

Observem que la representació està ben definida, ja que dues trenes isòtopes $\mathbf{f}, \mathbf{g}$ induïxen homeomorfismes isòtops f, g , fet que implica que els automorfismes induïts f_*, g_* seran iguals. Per tant, les elevacions $\tilde{f}, \tilde{g}$ seran homòtopes, que implica que els endomorfismes induïts $\tilde{f}_*, \tilde{g}_*$ seran iguals. Veurem que la representació és injectiva a l'apartat 5.2.3.

Observació 4.15. Com que $H_2(\tilde{\mathcal{C}}) = \mathcal{H}$ és un Λ -mòdul lliure de rang $\binom{n}{2}$, tindrem que $\text{Aut}_{\Lambda}(H_2(\tilde{\mathcal{C}})) \cong GL_{\binom{n}{2}}(\mathbb{Z}[q^{\pm 1}, t^{\pm 1}])$. Per tant, (apartat 5.3) usarem la representació per a veurem que el grup de trenes B_n és lineal per a tot $n \geq 1$.

5 La linealitat del grup de trenes

En aquesta secció, explicarem les demostracions dels dos teoremes centrals d'aquest treball seguint el procediment de [2], apartats 3.5, 3.6, 3.7.

Teorema 5.1. *La representació de Lawrence-Krammer ϕ_n del grup de trenes B_n és fidel (injectiva) per a tot $n \geq 1$, on $\phi_n : B_n \longrightarrow \text{Aut}_\Lambda(\mathcal{H})$ (definició 4.14).*

Teorema 5.2. *Per a tot $n \geq 1$, el grup de trenes B_n és lineal.*

5.1 Noodles i arcs generadors

Definició 5.3. Un *noodle* a D_n és una corba simple orientada N a D_n tal que els seus extrems pertanyen a $\partial D_n = \partial D$. ∂N està formada pels dos extrems de N .

Observació 5.4. Denotarem per N_i el noodle que envolta només $p_i = (i, 0)$ en sentit horari, el seu extrem inicial com d^- i el final com d (veure Figura 5.1).

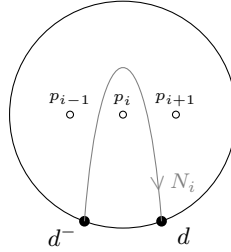


FIGURA 5.1. El noodle N_i

Recordant les definicions, considerem α un arc generador a (D, Q_n) tal que $\alpha \cap N < \infty$, i suposem que les interseccions són sempre transversals (Teorema 2.72). Fixem una orientació en α : α és un arc generador que té els extrems p_i, p_j pertanyents a Q_n ; fixarem la direcció d'aquest camí de tal manera que el seu punt inicial sigui p_k , per $k = \min\{i, j\}$, i el punt final p_K , per $K = \max\{i, j\}$.

Podem parlar també de dígons entre N i α , a partir dels quals se'ns determina una isotopia que fa decreixer la quantitat d'interseccions de $N \cap \alpha$ per dos.

Lema 5.5. *Sigui N un noodle a D_n i α un arc generador a (D, Q_n) . Si hi ha una isotopia de α , relativa a $\partial\alpha$, que disminueix el nombre d'interseccions a $N \cap \alpha$, aleshores existeix, com a mínim, un dígon entre N, α .*

DEMOSTRACIÓ. L'enunciat d'aquest Lema sembla evident, i per això (i per un tema d'increment de pàgines) trobo que no és gaire rellevant pel treball. Per interès del lector, correspon al Lema 3.19, Capítol 3, de [2]. $\square$

Podem relacionar un noodle N i un arc generador α a través del nombre d'intersecció $\langle N, \alpha \rangle$. Observem que es pot definir tot i que α no sigui un camí tancat, ja que els extrems de α són punts marcats del disc i aleshores tota homotopia els ha de seguir fixant. A més, N és una corba a D_n . Siguin $z_1, \dots, z_m \in D_n$ els punts intersecció entre N i α . Definim (exemple gràfic, Figura 5.2):

- α^- com un *arc generador paral·lel* orientat que obtenim a partir de moure α cap a l'esquerra, fixant els seus extrems i de tal manera que siguin disjunts amb l'excepció dels dos punts de Q . També s'ha de complir que $|N \cap \alpha^-| = m$ i denotem per $z_1^-, \dots, z_m^-$ aquests punts, ordenats tals que cada parella z_i, z_i^- estan units per un subarc de N de l'interior de l'àrea continguda en α, α^- .
- $\varepsilon_i = \pm 1$ denota el signe d'intersecció de N amb α en z_i (ben definit, ja que N, α estan orientats).
- $d^- \in \partial D_n$ denotarà l'inici de N i $d \in \partial D_n$ denotarà el punt final de N .
- Fixem $z \in \alpha \setminus \partial \alpha$ i $z^- \in \alpha^- \setminus \partial \alpha^-$ dos punts arbitraris, on $\partial \alpha = \partial \alpha^-$ són els extrems dels dos arcs.
- Fixem θ un camí a D_n que va de d a z i θ^- un camí a D_n que va de d^- a z^- . Els dos camins són disjunts, i poden intersecar N, α, α^- .

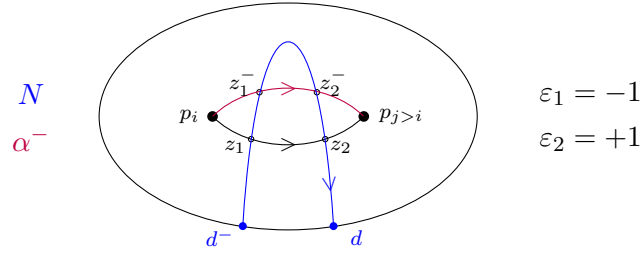


FIGURA 5.2. Exemple de notació.

Segui $\mathcal{C}$ l'espai de totes les parelles no ordenades de punts a D_n definit anteriorment i siguin $z_1, \dots, z_m \in D_n$ els punts d'intersecció entre N i α . Denotem $\xi_{i,j}$, per $1 \leq i, j \leq m$, el camí tancat a $\mathcal{C}$ definit per $\xi_{i,j} := \{\theta^-, \theta\} \{\beta_i^-, \beta_j\} \{\gamma_{i,j}^-, \gamma_{i,j}\}$, on

- β_i^- és un arc a α^- amb punt inicial z^- i punt final z_i^- , β_j és un arc a α amb punt inicial z i punt final z_j .
- $\gamma_{i,j}^-$ i $\gamma_{i,j}$ són arcs disjunts de N que parteixen respectivament de $z_i^-, z_j \in N$ i finalitzen als extrems d^-, d de N . La seva orientació estarà determinada per les posicions de z_i^-, z_j .

Per tant, a $\mathcal{C}$: el camí $\{\theta^-, \theta\}$ va de $\{d^-, d\} \in \mathcal{C}$ a $\{z^-, z\} \in \mathcal{C}$, el camí $\{\beta_i^-, \beta_j\}$ va de $\{z^-, z\} \in \mathcal{C}$ a $\{z_i^-, z_j\} \in \mathcal{C}$ i el camí $\{\gamma_{i,j}^-, \gamma_{i,j}\}$ va de $\{z_i^-, z_j\} \in \mathcal{C}$ a $\{d^-, d\} \in \mathcal{C}$ (veure un exemple a la Figura 5.3), és a dir, tots tenen una orientació fixada. Aleshores $\xi_{i,j}$ és un llaç a $\mathcal{C}$ amb punt base $\{d^-, d\}$.

Definició 5.6. Segui N un noodle i α un arc generador complint les condicions anteriors. Definim el seu *nombre d'intersecció algebraica* com

$$\langle N, \alpha \rangle := \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \varepsilon_i \varepsilon_j q^{w(\xi_{i,j})} t^{u(\xi_{i,j})} \in \mathbb{Z}[q^{\pm 1}, t^{\pm 1}] = \Lambda$$

on w, u són els invariants de camins tancats definits a la secció 4.

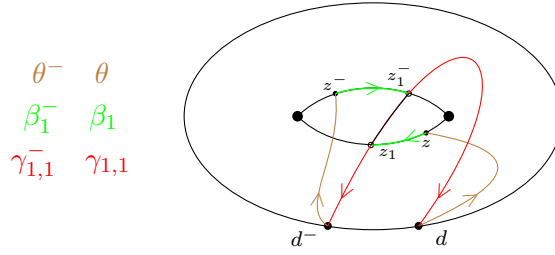


FIGURA 5.3. Exemple del llaç $\xi_{i,j}$.

És clar que $\langle N, \alpha \rangle$ no depèn de l'elecció de la numeració o ordre dels punts d'intersecció $z_1, \dots, z_m \in N \cap \alpha$.

També ens adonem que l'elecció (complint les condicions demanades) de z, z^-, θ, θ^- manté $\langle N, \alpha \rangle$ mòdul un monomi en $q^{\pm 1}, t^{\pm 2}$: sigui z' (resp. $(z')^-$) un punt diferent de z (resp. z^-) que compleixi les mateixes condicions, i θ' (resp. $(\theta')^-$) el seu camí corresponent. Podem prendre ξ_1 el llaç a D_n amb punt base d tal que va a z a través de θ , després a z' a través de α i torna a d a través de θ' . Anàleg per ξ_2 amb $(z')^-, (\theta')^-$.

Aleshores, multiplicant $\{\xi_1, \xi_2\} \cdot \xi_{i,j}$ tindré $w(\{\xi_1, \xi_2\} \cdot \xi_{i,j}) = w(\{\xi_1, \xi_2\}) + w(\xi_{i,j})$ (anàleg amb u). Com que ξ_1, ξ_2 són dos llaços a D_n , aleshores, $u(\{\xi_1, \xi_2\}) = 2k$ per algun $k \in \mathbb{Z}$. Per tant, la paritat de u no canvia.

Lema 5.7. *La intersecció algebraica $\langle N, \alpha \rangle$ és invariant mòdul isotopies de N i α a D_n , constants als seus extrems (punts inicials i finals de α, N).*

DEMOSTRACIÓ. Fixem N un noodle α un arc generador. Siguin $z_1, \dots, z_m$ els punts de tall entre N i α . Hem de veure que $\langle N, \alpha \rangle$ és invariant mòdul isotopies de α , que fixin els seus extrems. Observem que una isotopia de α a D_n consta de tres possibles moviments, que preserven que N, α siguin transversos.:

1. Isotopar α mantenint la quantitat de punts d'intersecció.
2. Isotopar α creant dos punts de tall nous.
3. Isotopar α eliminant dos punts de tall.

En el primer cas, seguim tenint m interseccions entre N i α , i aquestes segueixen orientades de la mateixa manera; per tant, $\langle N, \alpha \rangle$ no canvia.

Qualsevol moviment del tipus 2, crea dues noves interseccions z_{m+1}, z_{m+2} . Suposem que el subarc de N que connecta z_{m+1}, z_{m+2} està al costat dret de α . Aleshores, el signe $\varepsilon_i = \pm 1$ es preserva per a tot $i \in \{1, \dots, m\}$. Per tant, per $1 \leq i, j \leq m$, els llaços $\xi_{i,j}$ per $1 \leq i, j \leq m$ anteriors i posteriors a la isotopia són homòtops.

És a dir, $\varepsilon_i \varepsilon_j q^{w(\xi_{i,j})} t^{u(\xi_{i,j})}$ es conserva per a tota combinació i, j per $1 \leq i, j \leq m$. Per a $i \in \{1, \dots, m+2\}$, els camins tancats $\xi_{i,m+1}$ i $\xi_{i,m+2}$ són homòtops, i $\varepsilon_{m+1} = -\varepsilon_{m+2}$. Per tant,

$$\varepsilon_i \varepsilon_{m+1} q^{w(\xi_{i,m+1})} t^{u(\xi_{i,m+1})} + \varepsilon_i \varepsilon_{m+2} q^{w(\xi_{i,m+2})} t^{u(\xi_{i,m+2})} = 0$$

Anàlogament,

$$\varepsilon_{m+1} \varepsilon_j q^{w(\xi_{m+1,j})} t^{u(\xi_{m+1,j})} + \varepsilon_{m+2} \varepsilon_j q^{w(\xi_{m+2,j})} t^{u(\xi_{m+2,j})} = 0$$

Això ens porta a demostrar que per un moviment que crea dues noves interseccions, $\langle N, \alpha \rangle$ es conserva. Usant un raonament similar, ho demostrarem en el cas que elimini dos punts de tall, denotant-los per z_{m+1}, z_{m+2} , del cas anterior. $\square$

Definició 5.8. Sigui N un noodle a D_n i α un arc generador a (D, Q_n) . Diem que α es pot *isotopar fora d'un noodle* N si existeix una *isotopia* o família contínua d'arcs generadors $\{\alpha_s\}_{s \in I}$ a (D, Q_n) tal que α_s té els mateixos extrems que α , $\forall s \in [0, 1]$, i $\alpha_0 = \alpha$, i $\alpha_1 \cap N = \emptyset$.

Lema 5.9. Un arc generador α es pot isotopar fora d'un noodle N si i només si $\langle N, \alpha \rangle = 0$.

DEMOSTRACIÓ. La demostració d'aquest Lema és molt elaborada i ocuparia massa pàgines. Per interès del lector, es pot trobar a la demostració del Lema 3.21, Capítol 3, de [2]. $\square$

5.2 Fidelitat de la representació de Lawrence-Krammer

Sigui $\mathcal{H} = H_2(\tilde{\mathcal{C}})$ i $\phi_n : B_n \rightarrow \text{Aut}_\Lambda(\mathcal{H})$ la representació de Lawrence-Krammer. Hem de veure que és injectiva. Començarem la prova del teorema principal d'aquest treball (Teorema 5.1) amb dos passos.

Primerament, a partir de cada arc generador α , en traurem un vector a $\mathcal{H} = H_2(\tilde{\mathcal{C}}; \mathbb{Z})$, que ens permetrà definir un nombre d'intersecció per entendre com es comporten els arcs amb els noodles. Ens proporcionarà un invariant isotòpic, important per demostrar la injectivitat de la representació.

Després, a cada noodle N li assignarem una superfície orientable a $\tilde{\mathcal{C}}$. Això ens permetrà aplicar resultats d'homologia per estudiar l'acció dels homeomorfismes sobre aquestes superfícies i els arcs generadors.

5.2.1 Classe d'homologia associada a un arc generador

Seguint la mateixa notació anterior de D, Q_n, D_n , fixem un arc generador α i entorns tancats $U_1, \dots, U_n \subset D^\circ$ dels punts $p_1, \dots, p_n$ respectivament, disjunts dos a dos. Assumirem que $\alpha \cap U_i = \emptyset$ pels entorns U_i que no corresponen als dels extrems de α . Denotem per

$$U = \{\{x, y\} \in \mathcal{C} : x \in \bigcup_{i=1}^n U_i \text{ o bé } y \in \bigcup_{i=1}^n U_i \text{ o bé } x, y \in \bigcup_{i=1}^n U_i\}$$

Definim, dia el recobriment $\tilde{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{C}$, la preimatge de U i la denotem per $\tilde{U} \subset \tilde{\mathcal{C}}$. Clarament $\tilde{U}$ és invariant per l'acció de transformacions de recobriment q, t a $\tilde{\mathcal{C}}$. De fet, aquesta acció transforma les homologies $H_*(\tilde{U}; \mathbb{Z})$ i $H_*(\tilde{\mathcal{C}}, \tilde{U}; \mathbb{Z})$ en $\Lambda = \mathbb{Z}[q^{\pm 1}, t^{\pm 1}]$ -mòduls.

A continuació assignarem a l'arc generador α un subconjunt de $H_2(\tilde{\mathcal{C}}, \tilde{U}; \mathbb{Z})$.

Sigui α^- un arc generador paral·lel, i

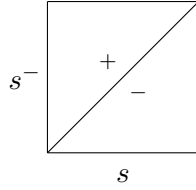
$$S_\alpha := \{\{x, y\} \in \mathcal{C} : x \in \alpha^- \setminus \partial\alpha^-, y \in \alpha \setminus \partial\alpha\} \subset \mathcal{C}$$

Aleshores, $S_\alpha = (\alpha^- \setminus \partial\alpha^-) \times (\alpha \setminus \partial\alpha)$. Com que S_α és simplement connex, la immersió $S_\alpha \hookrightarrow \mathcal{C}$ s'eleva a una immersió $S_\alpha \hookrightarrow \tilde{\mathcal{C}}$ (observació 2.42). Fixem aquesta elevació i denotem per $\tilde{S}_\alpha$ la seva imatge. Observem que $\tilde{S}_\alpha$ també es pot pensar com un obert $(\alpha^- \setminus \partial\alpha^-) \times (\alpha \setminus \partial\alpha)$. L'orientació de $S_\alpha, \tilde{S}_\alpha$ s'obté multiplicant les orientacions de α^-, α .

Escollim dos subarcs $s \subset \alpha \setminus \partial\alpha$, $s^- \subset \alpha^- \setminus \partial\alpha^-$ tals que els seus extrems i els complementaris $\alpha \setminus s$, $\alpha^- \setminus s^-$ pertanyen a $\bigcup_{i=1}^n U_i$. Si denotem una superfície per $S := s^- \times s$, aleshores serà homeomorf a un quadrat tancat i concèntric dins de $\tilde{S}_\alpha$, tal que la seva frontera i el seu complementari a $\tilde{S}_\alpha$ pertanyen a $\tilde{U}$. A més, també serà orientada i simplement connexa, per tant, S es pot elevar al recobriment $\tilde{C}$.

Afirmació 5.10. S representa un element de $H_2(\tilde{C}, \tilde{U}; \mathbb{Z})$, que no depèn de la tria de s, s^- .

DEMOSTRACIÓ. Sigui $f : S \rightarrow \tilde{C}$ l'elevació de S . Cal veure que $f(\partial S) \subset \tilde{U}$. Si triangulem S de la següent manera:



la frontera diagonal es cancel·la per tenir dues contribucions oposades $(+, -)$. Aquesta inclusió es dedueix de la hipòtesi que els extrems de s, s^- pertanyen als entorns U_i .

Tindrem $\partial S = (\partial s \times s^-) \cup (s \times \partial s^-)$. És a dir, és la unió dels costats verticals amb els horitzontals. Com que $\partial s \subset U_i \cup U_j$ i $\partial s^- \subset U_i \cup U_j$, aleshores els productes $(\partial s \times s^-)$, $(s \times \partial s^-) \subset U_i \cup U_j$ i per tant, la seva unió també. Tindrem $f(\partial S) \subset \tilde{U}$, que implica que f representa una classe a $H_2(\tilde{C}, \tilde{U})$. $\square$

Denotarem aquest element com $[S]$. Escollint $\tilde{S}_\alpha$ diferent (segons l'elevació), aleshores $[S]$ no varia si no és multiplicant per un monomi en q, t .

L'homeomorfisme (de l'homologia relativa) $H_2(\tilde{C}, \tilde{U}; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(\tilde{U}; \mathbb{Z})$ envia $[S]$ a la seva imatge, que es representa per un cercle orientat $\partial S \subset \tilde{U}$. En particular, en el següent Lema es demostra com la classe d'homologia $[\partial S] \in H_1(\tilde{U}; \mathbb{Z})$ s'anul·la per $(q-1)^2(qt+1)$.

Lema 5.11. *Es compleix $(q-1)^2(qt+1)[\partial S] = 0$ en $H_1(\tilde{U}; \mathbb{Z})$.*

DEMOSTRACIÓ. Fixem α un arc generador amb extrems $(p_1, 0), (p_2, 0)$, tal que $p_1, p_2 \in \{1, \dots, n\}$. Per $i = 1, 2$, escollim $u_i \in U_{p_i}$ un punt dins de l'àrea entre α, α^- . Fixem també quatre punts diferents dos a dos $A, B' \in \partial U_{p_1}$, $A', B \in \partial U_{p_2}$ (tals que els segments AA', BB' no s'intersequen), i vuit camins a D_n : $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2$, tals que (veure un exemple a la Figura 5.4):

- $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ són arc simples amb punts inicials u_1, A, A', u_2, B, B' i punts finals A, A', u_2, B, B', u_1 , respectivament.
- γ_1 (resp. γ_2) és un llaç a U_{p_1} (resp. U_{p_2}) amb punt base u_1 (resp. u_2) que encercla, en sentit antihorari, a p_1 (resp. p_2).

Podem suposar (per isotopies) que l'arc generador α (resp. α^-) segueix el radi de U_{p_1} des de p_1 fins a A (resp. B'), després a través de α_2 (resp. β_2^{-1}) i finalment pel radi de U_{p_2} des de A' (resp. B) fins a p_2 .

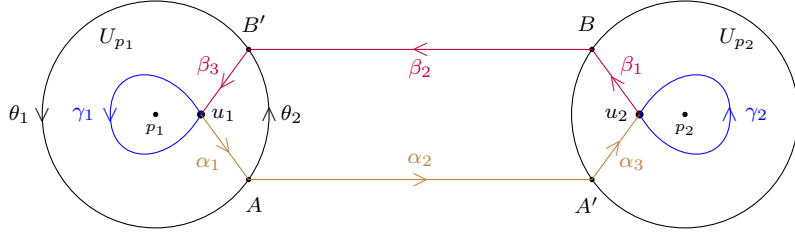


FIGURA 5.4. Els arcs $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2$.

Considerem ara els llaços següents, amb punt base $e := \{u_1, u_2\} \in U$ i considerant els camins constants u_1, u_2 :

$$\begin{aligned} a_1 &= \{\gamma_1, u_2\} & a_2 &= \{u_1, \gamma_2\} \\ b_1 &= \{\alpha_1, \beta_1\beta_2\beta_3\}\{\alpha_2\alpha_3, u_1\} & b_2 &= \{\alpha_1\alpha_2\alpha_3, \beta_1\}\{u_2, \beta_2\beta_3\} \end{aligned}$$

Observem que els camins tancats b_1, b_2 són homòtops a $\mathcal{C}$ al llaç $\{\alpha_1\alpha_2\alpha_3, \beta_1\beta_2\beta_3\}$. Denotarem per a_1, a_2, b_1, b_2 les classes d'homotopia dels llaços a_1, a_2, b_1, b_2 al grup fonamental $\pi := \pi_1(U, e)$. $\sim$ denotarà la relació d'equivalència d'homotopia en el grup π .

Per $x, y \in \pi$, usem la següent notació: $x^y := y^{-1}xy$, $[x, y] := x^{-1}x^y$ per relacions a π .

Observacions 5.12. • $[a_1, a_2] = 1$

DEMOSTRACIÓ. $a_1a_2 \sim \{\gamma_1, \gamma_2\} \sim a_2a_1$. Per tant, seguint les definicions, $[a_1, a_2] = a_1^{-1}a_1^{a_2} = a_1^{-1}a_2^{-1}a_1a_2 \sim a_1^{-1}a_2^{-1}a_2a_1 = 1$

$$\bullet [a_1, b_1a_1b_1] = 1$$

$$\bullet [a_2, b_2a_2b_2] = 1$$

A continuació provarem $[a_1, b_1a_1b_1] = 1$; la tercera observació es demostra de manera similar. Considerem els camins θ_1, θ_2 orientats a ∂U_{p_1} tal que θ_1 (resp. θ_2) comença a B' (resp. A) i acaba a B' (resp. A), tal com indica la Figura 5.4. És a dir, $\theta_1\theta_2$ parametriza ∂U_{p_1} .

Observem que $[a_1, b_1a_1b_1] = a_1^{-1}(b_1a_1b_1)^{-1}a_1b_1a_1b_1 = a_1^{-1}b_1^{-1}a_1^{-1}b_1^{-1}a_1b_1a_1b_1$. Per tant, és suficient demostrar que $a_1b_1a_1b_1 \sim b_1a_1b_1a_1$, ja que aleshores, $[a_1, b_1a_1b_1] \sim a_1^{-1}b_1^{-1}a_1^{-1}b_1^{-1}b_1a_1b_1a_1 = 1$.

Afirmació 5.13. $b_1a_1b_1 \sim \{u_1, \beta_1\beta_2\theta_1\alpha_2\alpha_3\}$

Comencem la demostració veient:

$$\begin{aligned} b_1a_1 &= \{\alpha_1, \beta_1\beta_2\beta_3\}\{\alpha_2\alpha_3, u_1\}\{\gamma_1, u_2\} \\ &\sim \{\alpha_1, \beta_1\beta_2\beta_3\}\{\alpha_2\alpha_3, \gamma_1\} \\ b_1 &= \{\alpha_1, \beta_1\beta_2\beta_3\}\{\alpha_2\alpha_3, u_1\} \\ &\sim \{u_1, \beta_1\beta_2\}\{\alpha_1\alpha_2\alpha_3, \beta_3\} \\ &\sim \{\beta_1\beta_2, u_1\}\{\beta_3, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\} \end{aligned}$$

Per tant,

$$\begin{aligned} b_1a_1b_1 &\sim \{\alpha_1, \beta_1\beta_2\beta_3\}\{\alpha_2\alpha_3, \gamma_1\}\{\beta_1\beta_2, u_1\}\{\beta_3, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\} \\ &\sim \{\alpha_1, \beta_1\beta_2\beta_3\}\{\alpha_2\alpha_3\beta_1\beta_2, \gamma_1\}\{\beta_3, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\} \end{aligned}$$

És clar que $\alpha_2\alpha_3\beta_1\beta_2 \sim \theta_2$ a D_n , i en particular, ho és a $D_n \setminus \gamma_1$. De la mateixa manera, $\beta_3\gamma_1\alpha_1 \sim \theta_1$ a l'espai U_{p_1} ; i $\alpha_1\theta_2\beta_3$ és homòtop al camí constant u_1 . Modificant la relació anterior:

$$\begin{aligned} b_1a_1b_1 &\sim \{\alpha_1, \beta_1\beta_2\beta_3\}\{\alpha_2\alpha_3\beta_1\beta_2, \gamma_1\}\{\beta_3, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\} \\ &\sim \{\alpha_1, \beta_1\beta_2\beta_3\}\{\theta_2, \gamma_1\}\{\beta_3, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\} \\ &\sim \{\alpha_1, \beta_1\beta_2\}\{A, \beta_3\}\{\theta_2, \gamma_1\}\{B', \alpha_1\}\{\beta_3, \alpha_2\alpha_3\} \\ &\sim \{\alpha_1, \beta_1\beta_2\}\{\theta_2, \beta_3\gamma_1\alpha_1\}\{\beta_3, \alpha_2\alpha_3\}. \\ &\sim \{\alpha_1, \beta_1\beta_2\}\{\theta_2, \theta_1\}\{\beta_3, \alpha_2\alpha_3\} \\ &\sim \{u_1, \beta_1\beta_2\theta_1\alpha_2\alpha_3\} \end{aligned}$$

Havent demostrat 5.13, ho apliquem i veiem que implica $a_1b_1a_1b_1 \sim b_1a_1b_1a_1$, ja que

$$\begin{aligned} a_1b_1a_1b_1 &\sim \{\gamma_1, u_2\}\{u_1, \beta_1\beta_2\theta_1\alpha_2\alpha_3\} \\ &\sim \{\gamma_1, \beta_1\beta_2\theta_1\alpha_2\alpha_3\} \\ &\sim \{u_1, \beta_1\beta_2\theta_1\alpha_2\alpha_3\}\{\gamma_1, u_2\} \\ &\sim b_1a_1b_1a_1 \end{aligned}$$

Per tant, pel raonament anterior, $[a_1, b_1a_1b_1] = 1$. Similarment es prova la tercera relació $[a_2, b_2a_2b_2] = 1$.

Definim els següents elements a $\pi = \pi_1(U, e)$:

$$a := a_2^{-1}a_1 \quad b := b_2^{-1}b_1 \quad c_1 := [a_1, b_1] \quad c_2 := [a_2, b_2]$$

Observacions 5.14. • $a^{a_1} = a$.

DEMOSTRACIÓ. $a^{a_1} = a_1^{-1}a_2^{-1}a_1a_1$ i usant $[a_1, a_2] = a_1^{-1}a_2^{-1}a_1a_2 = 1$, tenim $a_1^{-1}a_2^{-1}a_1 = a_2^{-1}$ i, per tant, $a^{a_1} = a_2^{-1}a_1 = a$.

- $c_1^{b_1a_1}c_1 = c_2^{b_2a_2}c_2 = 1$.

DEMOSTRACIÓ. Les dues igualtats tenen demostracions anàlogues. En el cas de la primera, tenim $c_1^{b_1a_1}c_1 = (b_1a_1)^{-1}c_1b_1a_1c_1$. Com que $c_1 = [a_1, b_1] = a_1^{-1}b_1^{-1}a_1b_1$ i $[a_1, b_1a_1b_1] = a_1^{-1}b_1^{-1}a_1^{-1}b_1^{-1}a_1b_1a_1b_1 = 1$, tindrem

$$c_1^{b_1a_1}c_1 = (b_1a_1)^{-1}a_1^{-1}b_1^{-1}a_1b_1\cancel{a_1^{-1}b_1^{-1}a_1^{-1}b_1^{-1}}a_1b_1 = a_1^{-1}b_1^{-1}a_1^{-1}b_1^{-1}a_1b_1a_1b_1 = 1$$

- $c_2ba^{b_1} = ab^{a_1}c_1$.

DEMOSTRACIÓ. Explícitament, $c_1 = a_1^{-1}b_1^{-1}a_1b_1$, $c_2 = a_2^{-1}b_2^{-1}a_2b_2$, $a = a_2^{-1}a_1$, $b = b_2^{-1}b_1$. Per tant:

$$\begin{aligned} c_2ba^{b_1} &= c_2bb_1^{-1}ab_1 = a_2^{-1}b_2^{-1}\cancel{a_2b_2b_2^{-1}b_1b_1^{-1}a_2^{-1}}a_1b_1 = a_2^{-1}b_2^{-1}a_1b_1 \\ ab^{a_1}c_1 &= aa_1^{-1}ba_1c_1 = a_2^{-1}\cancel{a_1a_1^{-1}}b_2^{-1}\cancel{b_1a_1a_1^{-1}b_1^{-1}}a_1b_1 = a_2^{-1}b_2^{-1}a_1b_1 \end{aligned}$$

Segui $\tilde{\mathcal{C}}$ el recobriment de $\mathcal{C}$ definit anteriorment. Escollim $\tilde{e}$ una fibra de $e = \{u_1, u_2\}$, i denotem per $\tilde{\pi} := \pi_1(\tilde{U}, \tilde{e})$ el subgrup de π format per totes les classes d'homotopia de llaços ξ a U tals que $w(\xi) = u(\xi) = 0$.

Segui $i : U \hookrightarrow \mathcal{C}$ l'aplicació inclusió i sigui $i_* : \pi_1(U, e) \longrightarrow \pi_1(\mathcal{C}, e)$ el morfisme induït. Aleshores $\pi_1(\tilde{U})$ és el nucli de $\rho \circ i_*$ (ρ l'aplicació definida a 4.1). És a dir:

$$\pi_1(U) \xrightarrow{i_*} \pi_1(\mathcal{C}) \xrightarrow{\rho} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

Per tant, $\tilde{\pi} \triangleleft \pi$, ja que per $x \in \tilde{\pi}, y \in \pi$, tindrem $\rho \circ i_*(xyx^{-1}) = \rho \circ i_*(x) = (0, 0)$, per ser $\rho \circ i_*$ morfisme de grups.

De fet, com que els invariants w, u són homeomorfismes de grups, tindrem, per $x, y \in \pi$, $w([x, y]) = w(x^{-1}y^{-1}xy) = -w(x) - w(y) + w(x) + w(y) = 0$ (anàleg amb u). Per tant, el commutador de dos elements de π pertany a $\tilde{\pi}$. A més, les propietats de 5.14 es mantenen a $\tilde{\pi}$.

Afirmació 5.15. $a, b, c_1, c_2 \in \tilde{\pi}$.

Per demostrar-ho cal veure que $w(a) = w(b) = u(a) = u(b) = 0$ i $c_1, c_2 \in \tilde{\pi}$.

- Per definició, $w(a_1) = w(\gamma_1) = 1$ i $w(a_2) = w(\gamma_2) = 1$. Per tant, com que $a = a_2^{-1}a_1$, aleshores $w(a) = -1 + 1 = 0$.
- Com que els camins b_1, b_2 són homòtops al llaç $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_1\beta_2\beta_3$, tenim $w(b_i) = w(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_1\beta_2\beta_3) = 0$, per $i = 1, 2$, que implica $w(b) = w(b_2^{-1}b_1) = 0$.
- És clar que $u(a_1) = u(a_2) = 0$ i $u(b_1) = u(b_2) = 1$, per tant $u(a) = u(b) = 0$.
- c_1 és el commutador de $a_1, b_1 \in \pi$. Per tant, $c_1 \in \tilde{\pi}$. És anàleg per c_2 .

Per 2.64 tenim una projecció natural $\tilde{\pi} \rightarrow H_1(\tilde{U}; \mathbb{Z})$. Denotarem la imatge de $x \in \tilde{\pi}$ per $[x]$; en particular, si dos llaços $\gamma_1, \gamma_2 \in \tilde{\pi}$ són homòtops, aleshores $[\gamma_1] = [\gamma_2]$. Com que $\tilde{\pi} \triangleleft \pi$ és un subgrup normal, aleshores si $x \in \tilde{\pi}$ i $y \in \pi$, el conjugat $x^y = y^{-1}xy \in \tilde{\pi}$, el que ens porta a la següent Afirmació:

Afirmació 5.16. Per a tot $x \in \tilde{\pi}$ i $y \in \pi$, $[x^y] = q^{-w(y)}t^{-u(y)}[x] = \rho(y)^{-1}[x]$.

Usarem que $H_1(\tilde{C}; \mathbb{Z})$ té una estructura de Λ -mòdul ($\Lambda = \mathbb{Z}[q^{\pm 1}, t^{\pm 1}]$), i en particular també la té $H_1(\tilde{U}; \mathbb{Z})$. Fixem-nos que si $x \in \tilde{\pi}$ i $y \in \pi$, i representem x, y per llaços ξ, ν a U amb punt base $e = \{u_1, u_2\}$, aleshores, $x^y \in \pi$ es representa per $\nu^{-1}\xi\nu$ a U , que es pot elevar a un camí $\mu_1\mu_2\mu_3$ a $\tilde{U}$, on:

- El camí μ_1 és l'elevació de ν^{-1} que va des de $\tilde{e}$ fins a $e' := [\nu^{-1}] \cdot \tilde{e} = \rho(y^{-1})\tilde{e} = q^{w(y^{-1})}t^{u(y^{-1})}\tilde{e} = q^{-w(y)}t^{-u(y)}\tilde{e}$.
- μ_2 és l'elevació de ξ , amb punt inicial a e' i punt final e'' .
- μ_3 és l'elevació de ν que comença a e'' .

Com que ξ és el representant de $x \in \tilde{\pi}$, el camí μ_2 és un llaç amb punt base e' . Aleshores, el camí μ_3 comença a e' i ha de ser la inversa de μ_1 . Per tant, $e' = e'' = \tilde{e}$ i el camí $\mu_1\mu_2\mu_3$ és un llaç que té per classe d'homologia la mateixa de μ_2 , dins de $H_1(\tilde{U}; \mathbb{Z})$. En particular, la classe de μ_2 és $q^{-w(y)}t^{-u(y)}[x]$.

Després d'haver demostrat l'Afirmació, usant-la obtenim:

$$\begin{aligned} [a^{a_1}] &= q^{-w(a_1)}t^{-u(a_1)}[a] = q^{-1}[a] \\ \left[c_1^{b_1 a_1} c_1 \right] &= \left[c_1^{b_1 a_1} \right] + [c_1] = q^{-w(b_1 a_1)}t^{-u(b_1 a_1)}[c_1] + [c_1] = q^{-1}t^{-1}[c_1] + [c_1] \\ \left[c_2^{b_2 a_2} c_2 \right] &= \dots = q^{-1}t^{-1}[c_2] + [c_2] \\ [c_2 b a^{b_1}] &= \dots = [c_2] + [b] + t^{-1}[a] \\ [a b^{a_1} c_1] &= \dots = [a] + q^{-1}[b] + [c_1] \end{aligned}$$

Juntament amb 5.14, utilitzant la primera observació, tenim les següents relacions a $H_1(\tilde{U}; \mathbb{Z})$:

$$\begin{aligned} (q^{-1} - 1)[a] &= 0 \xrightarrow{\cdot(-q)} (q - 1)[a] = 0 \\ (q^{-1}t^{-1} + 1)[c_1] &= 0 \xrightarrow{\cdot(qt)} (qt + 1)[c_1] = 0 \\ (q^{-1}t^{-1} + 1)[c_2] &= 0 \xrightarrow{\cdot(qt)} (qt + 1)[c_2] = 0 \\ (q^{-1} - 1)[b] &= (t^{-1} - 1)[a] + [c_2] - [c_1] \end{aligned}$$

Que, combinant-les i usant $(q - 1)[a] = 0$, que implica $q[a] = [a]$:

$$\begin{aligned} (q^{-1} - 1)[b] &= (t^{-1} - 1)[a] + [c_2] - [c_1] \\ (q - 1)(q^{-1} - 1)[b] &= (q - 1)(t^{-1} - 1)[a] + (q - 1)[c_2] - (q - 1)[c_1] \\ (q - 1)(q^{-1} - 1)[b] &= (qt^{-1} - t^{-1} - q + 1)[a] + (\dots) \\ (q - 1)(q^{-1} - 1)[b] &= (qt^{-1} - t^{-1})[a] + (-q + 1)[a] + (\dots) \\ (q - 1)(q^{-1} - 1)[b] &= (q - 1)t^{-1}[a] + (-q + 1)[a] + (\dots) \\ (q - 1)(q^{-1} - 1)[b] &= (q - 1)[c_2] - (q - 1)[c_1] \\ q(q - 1)(q^{-1} - 1)[b] &= ((q - 1)[c_2] - (q - 1)[c_1]) \cancel{[a]} \\ (q - 1)(1 - q)[b] &= (q - 1)[c_2] - (q - 1)[c_1] \\ -(qt + 1)(q - 1)^2 &= (qt + 1)(q - 1)[c_2] - (qt + 1)(q - 1)[c_1] \\ -(q - 1)^2(qt + 1)[b] &= 0 \end{aligned}$$

Per tant, per $b \in \pi_1(\tilde{U}, \tilde{e})$ i $[b] \in H_1(\tilde{U}; \mathbb{Z})$ definida anteriorment:

$$(q - 1)^2(qt + 1)[b] = 0 \tag{5.1}$$

Cal veure que l'equació (5.1) es compleix per a tot $\partial S \in H_1(\tilde{U}; \mathbb{Z})$. Sigui $s = \alpha_2$, $s^- = \beta_2$. Aleshores S està ben definit i compleix les condicions demanades, ja que els extrems d'aquests arcs i els seus complementaris a α , α^- pertanyen a $U_{p_1} \cup U_{p_2} \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$.

$\partial S \in \tilde{U}$ es pot parametritzar i escriure com l'elevació d'un camí tancat b' a $(U, \{A, B\})$. Si veiem que $b' \sim b$ són homòtops a U , aleshores les seves elevacions ho seran a $\tilde{U}$, i per tant, les seves classes a $H_1(\tilde{U}; \mathbb{Z})$ seran la mateixa.

Sigui b' el llaç a $(U, \{A, B\})$ tal que

$$b' := \{A, \beta_2\}\{\alpha_2, B'\}\{A', \beta_2\}^{-1}\{\alpha_2, B\}^{-1}$$

Aleshores ∂S es pot parametritzar com el llaç que s'obté elevat b' . La següent Afirmació ens portarà a veure que b i b' són homòtops.

Afirmació 5.17. *Sigui $b'' := \{A, \beta_2\beta_3\}\{\alpha_2\alpha_3, u_1\}\{u_2, \beta_2\beta_3\}^{-1}\{\alpha_2\alpha_3, B\}^{-1}$ un llaç a U amb punt base $\{A, B\}$. Aleshores $b' \sim b''$.*

Ho demostrem observant primer que, mòdul homotopia a U ,

$$\{A, \beta_3\}\{\alpha_2\alpha_3, u_1\} = \{\alpha_2\alpha_3, \beta_3\} = \{\alpha_2, B'\}\{\alpha_3, \beta_3\}.$$

Per tant, $\{\alpha_2\alpha_3, u_1\} = \{A, \beta_3\}^{-1}\{\alpha_2, B'\}\{\alpha_3, \beta_3\}$.

Anàlogament, $\{u_2, \beta_2\beta_3\}^{-1} = \{\alpha_3, \beta_3\}^{-1}\{A', \beta_2\}^{-1}\{\alpha_3, B\}$.

És clar que $\{A, \beta_2\beta_3\} = \{A, \beta_2\}\{A, \beta_3\}$ i $\{\alpha_2\alpha_3, B\}^{-1} = \{\alpha_3, B\}^{-1}\{\alpha_2, B\}^{-1}$.

Ara, substituint a b'' , tenim:

$$\begin{aligned} b'' &= \{A, \beta_2\beta_3\}\{\alpha_2\alpha_3, u_1\}\{u_2, \beta_2\beta_3\}^{-1}\{\alpha_2\alpha_3, B\}^{-1} \\ &\sim \{A, \beta_2\}\{A, \beta_3\}\{A, \beta_3\}^{-1}\{\alpha_2, B'\}\{\alpha_3, \beta_3\}\{u_2, \beta_2\beta_3\}^{-1}\{\alpha_2\alpha_3, B\}^{-1} \\ &\sim \{A, \beta_2\}\{\alpha_2, B'\}\{\alpha_3, \beta_3\}\{\alpha_3, \beta_3\}^{-1}\{A', \beta_2\}^{-1}\{\alpha_3, B\}\{\alpha_3, B\}^{-1}\{\alpha_2, B\}^{-1} \\ &= \{A, \beta_2\}\{\alpha_2, B'\}\{A', \beta_2\}^{-1}\{\alpha_2, B\}^{-1} \\ &= b' \end{aligned}$$

Acabada la prova de l'Afirmació, observem que

$$\begin{aligned} b_1 &= \{\alpha_1, \beta_1\beta_2\beta_3\}\{\alpha_2\alpha_3, u_1\} \sim \{\alpha_1, \beta_1\}\{A, \beta_2\beta_3\}\{\alpha_2\alpha_3, u_1\} \\ b_2 &= \{\alpha_1\alpha_2\alpha_3, \beta_1\}\{u_2, \beta_2\beta_3\} \sim \{\alpha_1, \beta_1\}\{\alpha_2\alpha_3, B\}\{u_2, \beta_2\beta_3\} \end{aligned}$$

Per tant, b'' és homòtop al llaç $\{\alpha_1, \beta_1\}^{-1}b_1b_2^{-1}\{\alpha_1, \beta_1\}$ a U . De fet, aquest últim és homòtop a $b_1b_2^{-1}$ a U , que és justament el conjugat de $b = b_2^{-1}b_1$ a $\pi = \pi(U, e)$.

Els camins tancats b'' i b són homòtops a U , que implica que b' és homòtop a b a U . Ara, qualsevol elevació de b' serà homòtopa a qualsevol elevació de b , a $\tilde{U}$. Això implica que $\partial S \sim b$ a $\tilde{U}$; és a dir, $[\partial S] = [b]$ a $H_1(\tilde{U}; \mathbb{Z})$, que ens porta a acabar la demostració del Lema 5.11, que ve directa a partir de (5.1). $\square$

Recordem que tenim una successió exacta llarga d'homologia del parell $(\tilde{\mathcal{C}}, \tilde{U})$, on $\mathcal{H} = H_2(\tilde{\mathcal{C}}; \mathbb{Z})$

$$\cdots \longrightarrow H_2(\tilde{U}; \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow H_2(\tilde{\mathcal{C}}, \tilde{U}; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_1(\tilde{U}; \mathbb{Z}) \longrightarrow \cdots$$

tal que la imatge d'una aplicació és el nucli de la següent. Per tant, pel Lema 5.11, existeix un $v \in \mathcal{H}$ tal que la seva imatge sota l'homeomorfisme d'inclusió $\mathcal{H} \hookrightarrow H_2(\tilde{\mathcal{C}}, \tilde{U}; \mathbb{Z})$ és la classe d'homologia $(q-1)^2(qt+1)[S] \in H_2(\tilde{\mathcal{C}}, \tilde{U}; \mathbb{Z})$, ja que aquesta pertany al nucli de l'homeomorfisme $H_2(\tilde{\mathcal{C}}, \tilde{U}; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_1(\tilde{U}; \mathbb{Z})$.

Definició 5.18. Anomenem a aquest $v \in \mathcal{H}$, α -classe amb respecte dels discs $U_1, \dots, U_n$, o simplement, α -classe.

Observació 5.19. Una α -classe es pot representar amb un 2-cicle a $\tilde{\mathcal{C}}$ que s'obté enganxant la 2-cadena $(q-1)^2(qt+1)S$ amb una 2-cadena a $\tilde{U}$, delimitada per $(q-1)^2(qt+1)\partial S$ (veure Figura 5.5).

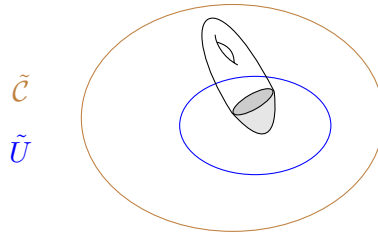


FIGURA 5.5. Exemple de representació d'una α -classe.

A continuació veurem que el conjunt de les α -classes és independent de la tria dels discs $U_1, \dots, U_n$.

Lema 5.20. *El conjunt de classes d' α a $\mathcal{H}$ no depèn de la tria dels entorns tancats $U_1, \dots, U_n$.*

DEMOSTRACIÓ. Siguin $\{U_i\}_{i=1}^n$ i $\{U'_i\}_{i=1}^n$ dos conjunts diferents d'entorns tancats dels punts de $Q_n = \{(1,0) \dots, (n,0)\} \subset C^\circ$. Siguin $\tilde{U}, \tilde{U}'$ les elevacions a $\tilde{\mathcal{C}}$ de $\{U_i\}_i, \{U'_i\}_i$.

Suposem que $U'_i \subset U_i, \forall i$. Podem agafar U_i, U'_i com dos discs diferents però els dos amb centre $(i,0)$. Com abans, α és un arc generador a (D, Q_n) , per tant, podria passar que $\alpha \cap U_i = \emptyset$, o bé la intersecció entre α i U_i és el radi de U_i , que a més, fent la intersecció amb U'_i , és el radi d'aquest.

Podem contraure U_i a U'_i usant el radi, de tal manera que obtenim una isotopia $\{F_s : D \rightarrow D\}_{s \in I}$ tal que per a tot $s \in I$, F_s fixa $\partial D \cup Q_n$ punt a punt i α com a conjunt, $F_0 = id_D$ i $F_1(U_i) = U'_i$ per a tota i . L'homeomorfisme induït $\{\tilde{F}_s : \tilde{\mathcal{C}} \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}\}_{s \in I}$ és de fet una isotopia de $\tilde{\mathcal{C}}$ tal que $\tilde{F}_1(\tilde{U}) = \tilde{U}'$.

Sigui $f \in \text{Homeo}_{\partial D}(D, Q_n)$. f envia cada arc generador α a un altre arc generador $f(\alpha)$, ja que f fixa Q_n com a conjunt. L'orientació de α induïx una orientació a $f(\alpha)$, via f .

A partir de les definicions, l'homeomorfisme induït $\tilde{f}_* : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ envia el conjunt de totes les α -classes respecte $\{U_i\}_i$, al conjunt de les $f(\alpha)$ -classes respecte $\{f(U_i)\}_i$. Si ho apliquem a $f = F_1$, observem que $f(U_i) = U'_i, \forall i$ i $f(\alpha) = \alpha$, ja que f fixarà Q_n punt a punt. També, com que $\tilde{f} = \tilde{F}_1$ és isòtop (i per tant homòtop) a $\tilde{F}_0 = id$, aleshores $\tilde{f}_* = id$.

Arribem a la conclusió que el conjunt de les α -classes respecte $\{U_i\}_i$ és el mateix que el conjunt de les α -classes respecte $\{U'_i\}_i$.

Hem suposat que $U'_i \subset U_i, \forall i$. Tota la resta de casos es poden demostrar de manera general, fent servir la propietat transitiva a partir d'un conjunt de discs tancats $\{U''_i\}_{i=1}^n$ tal que $U''_i \subset U_i \cap U'_i$, per a tot i . $\square$

5.2.2 Superfícies associades a noodles

Seguint la notació anterior, definim, per un noodle N a D_n , el conjunt

$$F = F_N := \{\{x, y\} \in \mathcal{C} \mid x, y \in N^\circ = N \setminus \partial N\},$$

que és una superfície a $\mathcal{C}^\circ$ homeomorfa al triangle obert $\{(x_1, x_2) \in (0, 1)^2 \mid x_1 < x_2\}$. Per tant, F és també homeomorfa a $\mathbb{R}^2$. Com que és contràctil i arc-connex, és simplement connex, i per tant es pot elevar a una superfície $\tilde{F} = \tilde{F}_N \subset \tilde{\mathcal{C}}$. A més, $\tilde{F} \cong \mathbb{R}^2$ per l'elevació d'homotopies. Tindrem que $\tilde{\mathcal{C}}^\circ$ és una varietat diferenciable oberta de dimensió 4, i $\tilde{F}$ és una varietat diferenciable de dimensió 2.

Lema 5.21. *La superfície $\tilde{F}$ és un subconjunt tancat de $\tilde{\mathcal{C}}^\circ$.*

DEMOSTRACIÓ. Veurem que tot punt de $\tilde{\mathcal{C}}^\circ \setminus \tilde{F}$ té un entorn obert a $\tilde{\mathcal{C}}^\circ$, disjunt de $\tilde{F}$. Això implicarà que $\tilde{\mathcal{C}}^\circ \setminus \tilde{F}$ és obert a $\tilde{\mathcal{C}}^\circ$ i per tant $\tilde{F}$ és tancat a $\tilde{\mathcal{C}}^\circ$.

Sigui $a \in \tilde{\mathcal{C}}^\circ \setminus \tilde{F}$ i $\{x, y\}$ la seva projecció a $\mathcal{C}$, per $x \neq y$ dos punts de D_n . De fet, com que $a \in \tilde{\mathcal{C}}^\circ$, aleshores $x, y \in D_n^\circ$.

- Si $x \notin N$ o bé $y \notin N$, aleshores existeixen dos entorns oberts $U_x, U_y \subset D_n^\circ$ de x i de y , tals que almenys un d'ells és disjunt amb N (ja que N és un subconjunt tancat de D_n). Per tant, $U_x \times U_y$ és un entorn de $\{x, y\}$ a $\mathcal{C}^\circ \setminus F$ que té com a preimatge a $\tilde{\mathcal{C}}^\circ$ un entorn obert de a contingut en $\tilde{\mathcal{C}}^\circ \setminus \tilde{F}$.

- Si $x, y \in N$, aleshores x i y tenen entorns oberts disjunts $U_x, U_y \subset D_n^\circ$ tals que la seva intersecció amb N és homeomorfa a un interval obert no buit, i tals que U_x, U_y són homeomorfs a la bola oberta de dimensió 2. Aleshores $U_x \times U_y$ és un entorn obert de $\{x, y\} \in F$ homeomorf a una bola oberta de dimensió 4 i que talla F en un disc obert de dimensió 2.

La preimatge d'aquest entorn $U_x \times U_y$ a $\tilde{C}^\circ$ està format per boles obertes de dimensió 4. Pel Lema 2.43, una d'elles talla $\tilde{F}$ en un disc obert de dimensió 2 i la resta té intersecció buida amb $\tilde{F}$. El punt $a \in \tilde{C}^\circ \setminus \tilde{F}$ sobre de $\{x, y\} \in F$ ha d'estar en una de les boles 4-dimensionals que no tallen $\tilde{F}$.

En els dos casos, arribem a la conclusió que buscàvem. Per tant, $\tilde{F}$ és tancat a $\tilde{C}^\circ$ i $\tilde{F} \subset \tilde{C}^\circ$. $\square$

Gràcies a aquest Lema, la intersecció de $\tilde{F}$ amb qualsevol conjunt compacte de $\tilde{C}^\circ$ és compacte. Usarem aquesta propietat per definir un nou nombre d'intersecció de $\tilde{F}$ amb un element de $\mathcal{H}$.

Fixem una orientació a F : sigui $\{x, y\} \in F$. Suposem que $x \in N^\circ$ és més proper al punt inicial de N que $y \in N^\circ$. Aleshores dotarem a F amb el producte d'orientacions a N de x per y . Ara podem elevar F a $\tilde{F}$ amb una orientació fixada.

Tal i com hem vist a l'Afirmació 2.18, la inclusió $\tilde{C}^\circ \hookrightarrow \tilde{C}$ és una equivalència homotòpica ($\tilde{C}$ és una varietat amb frontera); per tant, $\mathcal{H} = H_2(\tilde{C}^\circ; \mathbb{Z}) = H_2(\tilde{C}; \mathbb{Z})$. Ara, per a definir el nombre d'intersecció $\tilde{F} \cdot v \in \mathbb{Z}$, per a $v \in \mathcal{H}$, escollim un cicle V de dimensió 2 a $\tilde{C}^\circ$ com a representant de v . Aquest V tallarà $\tilde{F}$ en un subconjunt compacte, que és a dins d'un disc tancat a $\tilde{F}$ (per ser $\tilde{F} \cong \mathbb{R}^2$).

Pel Teorema 2.72, podem deformar V a $\tilde{C}^\circ$ aconseguint que sigui transversal a aquest disc i mantenint V disjunt de la resta de $\tilde{F}$. Aleshores el conjunt $\tilde{F} \cap V$ és discret i compacte, que implica que és finit, de tal manera que podem sumar els seus nombres d'intersecció ± 1 , segons l'orientació de $\tilde{C}, \tilde{F}$ i V .

Per la teoria d'interseccions en espais d'homologia (nombre d'intersecció), l'enter resultant de $\tilde{F} \cdot v = \tilde{F} \cdot V$ només depèn de v .

Definim, per a cada $v \in \mathcal{H}$,

$$\langle \tilde{F}, v \rangle = \sum_{k, l \in \mathbb{Z}} (q^k t^l \tilde{F} \cdot v) q^k t^l$$

on $q^k t^l \tilde{F}$ és la imatge de $\tilde{F}$ sota la transformació de recobriment $q^k t^l$ del recobriment $\tilde{C} \hookrightarrow C$. Observem que per $k, l \in \mathbb{Z}$, el conjunt de superfícies $\{q^k t^l \tilde{F}\}$ conté totes les possibles elevacions de F a $\tilde{C}$.

Escollint diferent l'elevació $\tilde{F}$, el nombre d'intersecció $\langle \tilde{F}, v \rangle$ és el mateix mòdul multiplicació per un monomi en $q^{\pm 1}, t^{\pm 1}$. A continuació veurem que la suma anterior $\langle \tilde{F}, v \rangle$ és finita (i per tant, ben definida).

Lema 5.22. *Sigui $r \mapsto r^*$ la involució de l'anell $\Lambda = \mathbb{Z}[q^{\pm 1}, t^{\pm 1}]$ que envia $q \mapsto q$ i $t \mapsto -t$. Sigui N un noodle a D i α un arc generador orientat a (D, Q_n) . Aleshores, per a cada α -classe $v \in \mathcal{H}$,*

$$\langle \tilde{F}_N, v \rangle = -(q-1)^2 (qt+1) \langle N, \alpha \rangle$$

DEMOSTRACIÓ. La demostració d'aquest Lema és considerablement elaborada i ens ocuparia massa pàgines. Per interès del lector, es pot trobar a la demostració del Lema 3.25, Capítol 3, de [2]. $\square$

Lema 5.23. *Sigui $f \in \text{Homeo}_{\partial D}(D, Q_n)$ un homeomorfisme. Si f és un representant d'un element del nucli $\ker(B_n \longrightarrow \text{Aut}_\Lambda(\mathcal{H}))$, aleshores $\langle N, \alpha \rangle = \langle N, f(\alpha) \rangle$ per a tot noodle N i tot arc generador orientat α a (D, Q_n) .*

DEMOSTRACIÓ. L'homeomorfisme $\tilde{f}_* : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ envia cada α -classe $v \in \mathcal{H}$ a una $f(\alpha)$ -classe. Pel Lema anterior i assumint $\tilde{f}_* = id$ (recordem la definició 4.14 i apliquem la hipòtesis que f pertany al nucli), tenim

$$\begin{aligned} -(q-1)^2(qt+1)\langle N, f(\alpha) \rangle &= \langle \tilde{F}, \tilde{f}_*(v) \rangle \\ &= \langle \tilde{F}, v \rangle \\ &= -(q-1)^2(qt+1)\langle N, \alpha \rangle \end{aligned}$$

Per tant, $\langle N, f(\alpha) \rangle = \langle N, \alpha \rangle$. □

Ara ja podem completar la demostració del Teorema anterior.

5.2.3 Demostració del Teorema

Després de conèixer aquests conceptes i haver provat els resultats necessaris, podem demostrar el **Teorema 5.1**: *La representació de Lawrence-Krammer ϕ_n del grup de trenes B_n és injectiva per a tot $n \geq 1$, on $\phi_n : B_n \longrightarrow \text{Aut}_\Lambda(\mathcal{H})$.*

Sigui $\mathcal{H} = H_2(\tilde{\mathcal{C}})$ i $\phi_n : B_n \longrightarrow \text{Aut}_\Lambda(\mathcal{H})$ la representació de Lawrence-Krammer. Hem de veure que és injectiva. Usant $B_n \cong \text{Mod}(D, Q_n)$ i el corollari 3.35, sabem que un element del nucli $\ker(B_n \longrightarrow \text{Aut}_\Lambda(\mathcal{H}))$ es pot representar amb un homeomorfisme f de (D, Q_n) . Per tant, s'ha de veure que f és isòtop a la identitat, partint de la hipòtesis que el seu endomorfisme induït $\tilde{f}_* = \{1\} = id$. Això demostrarà que l'homeomorfisme és injectiu, ja que el seu nucli serà trivial.

Afirmació 5.24. *Sigui $f \in \text{Homeo}_{\partial D}(D, Q_n)$. Un arc generador α a (D, Q_n) es pot isotopar fora d'un noodle N si i només si $f(\alpha)$ es pot isotopar fora de N .*

DEMOSTRACIÓ. Orientem α arbitràriament i dotem $f(\alpha)$ amb la orientació induïda per f i utilitzem els Lemes 5.9, 5.23: α es pot isotopar fora d'un noodle N si i només si $\langle N, \alpha \rangle = 0 = \langle N, f(\alpha) \rangle$ si i només si $f(\alpha)$ es pot isotopar fora de N . □

Recordem que $Q_n = \{(1,0), (2,0), \dots, (n,0)\} \subset \mathbb{C}$. Per a $1 \leq i \leq n-1$, denotem per α_i l'arc $[i, i+1] \times 0 \subset D$, i N_i el noodle descrit a la Figura 5.1. Podem assumir per tant que els noodles N_i són disjunts dos a dos. Siguin $n_{i,0}, n_{i,1}$ els extrems inicials i finals dels noodles N_i . Aleshores, si induïm un ordre $(1,0) < (1,1) < (2,0) < \dots < (n,1)$, els extrems estaran ordenats a sobre de ∂D .

Observació 5.25. Clarament, l'arc α_i només tallarà els noodles N_i, N_{i+1} ; per tant, per l'Afirmació anterior, l'arc generador $f(\alpha_i)$ es pot isotopar fora dels noodles N_j , per a $j \neq i, i+1$. Això implica que els extrems de $f(\alpha_i)$ són $(i,0)$, $(i+1,0)$, és a dir, $f(\alpha_i)$ té els mateixos extrems que α_i .

Afirmació 5.26. *Per $n \geq 3$, f induïx la permutació identitat a Q_n .*

Tenim per tant, tres casos a comprovar: $n = 1$, $n \geq 3$ i $n = 2$. Recordant la definició 4.14; sabem que per $\phi_n : B_n \longrightarrow \text{Aut}_\Lambda(H_2(\tilde{\mathcal{C}}))$, $f \mapsto \tilde{f}_*$, així que tot element f del nucli, compleix que el seu endomorfisme induït $\tilde{f}_* = id$. Partint d'aquesta hipòtesis, cal veure $f \sim id$.

- $n = 1$. $B_n = B_1 \cong \{1\}$. Per tant, tot element del nucli de $\phi_1 : B_1 \longrightarrow \text{Aut}_\Lambda(\mathcal{H})$ serà trivial.
- $n \geq 3$. Es pot isotopar $f(\alpha_1)$ fora de N_3 , que implica que podem extrendre-ho a una isotopia de f , relativa a Q_n i ∂D , tal que la intersecció $\alpha_1 \cap N_3$ és buida. Assumim per tant que $f(\alpha_1)$ és disjunt de N_3 .

Repetint l'argument, $f(\alpha_1)$ també serà disjunt de N_4 , via isotopies que eliminin els dígons entre N_4 i $f(\alpha_1)$, els quals no interseccionen amb N_3 , ja que $N_4 \cap N_3 = f(\alpha_1) \cap N_3 = \emptyset$. Per tant, les isotopies que desfan aquests dígons no creen interseccions entre N_3 i $f(\alpha_1)$.

Fent-ho per a tot $3 \leq i \leq n-1$, podem assegurar que $f(\alpha_1) \cap N_i = \emptyset$. Finalment, f es pot isotopar tal que $f \upharpoonright \alpha_1 = id$.

Mantenint aquesta última isotopia i repetint el procés amb α_2 , podem aconseguir també $f \upharpoonright \alpha_2 = id$. Fent-ho repetidament, tenim una isotopia de f tal que restringida a l'interval $[1, n] \times 0$, és la identitat.

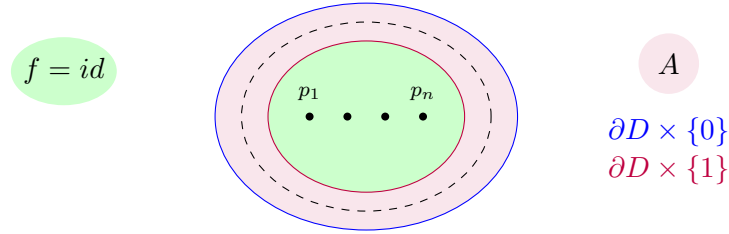


FIGURA 5.6. Esquema de D i l'entorn A .

Podem aplicar una isotopia més gran per tal de tenir $f = id$ en un entorn obert de $[1, n] \times 0$ a D . Al seu complementari el denotarem per A . En particular, A és un entorn de ∂D a $D_n = D \setminus Q_n$. Identificarem A amb $\partial D \times [0, 1]$, tal que $\partial D \subset \partial A$ s'identifica amb $\partial D \times \{0\}$ (veure Figura 5.6).

Pel Lema 4.1.A, Capítol 4, de [11], $f \upharpoonright A : A \longrightarrow A$ ha de ser isòtop relatiu a ∂A a la potència k -èsima del Dehn-twist al voltant de $\partial D \times \{\frac{1}{2}\} \subset A$ per a un cert $k \in \mathbb{Z}$. Per tant, $f \sim g^k$, on g és l'homeomorfisme de D que correspon a un Dehn-twist a A i a la identitat a $D \setminus A$. Cal veure que $k = 0$.

Afirmació 5.27. *Hi ha una acció de g a $\mathcal{H} = H_2(\tilde{\mathcal{C}}; \mathbb{Z})$ que multiplica pel monomi $q^{2n}t^b$ per algun $b \in \mathbb{Z}$.*

DEMOSTRACIÓ. Sigui $\hat{g} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ tal que $\hat{g}(\{x, y\}) = \{g(x), g(y)\}$. Sigui ara $\tilde{g} : \tilde{\mathcal{C}} \longrightarrow \tilde{\mathcal{C}}$ l'elevació de $\hat{g}$, tal que fixa totes les elevacions del punt base $c = \{d_1, d_2\}$. Com que $g = id$ a $D \setminus A$, aleshores $\tilde{g} = id$ al complementari de $\{(x, y) \in \mathcal{C} \mid x \in A \text{ o bé } y \in A\}$ a D .

Sigui $\tilde{A} \subset \tilde{\mathcal{C}}$ la preimatge d'aquest conjunt sota el recobriment $\tilde{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathcal{C}$. Aleshores hi ha una acció de $\tilde{g}$ a $\tilde{\mathcal{C}} \setminus \tilde{A}$ com a transformació de recobriment $q^a t^b$ per a certs $a, b \in \mathbb{Z}$.

$\tilde{A}$ és un entorn de $\partial \tilde{\mathcal{C}}$ a $\mathcal{C}$ (entorn tubular), i per tant es pot deformar qualsevol 2-cicle a $\tilde{\mathcal{C}}$ per tal que pertanyi a $\tilde{\mathcal{C}} \setminus \tilde{A}$. Aleshores, $\tilde{g}$ actua com a multiplicació a $\mathcal{H}$ per $q^a t^b$. Només cal veure $a = 2n$.

Recordem la notació de $c = \{d_1, d_2\}$ del punt base de $\mathcal{C}$. Definim, per a $i = 1, 2$, un camí $\delta_i : I \rightarrow A$ tal que $\delta_i(s) = d_i \times s$. Siguin $\delta := \{\delta_1, \delta_2\} : I \rightarrow \mathcal{C}$ i $\tilde{\delta} : I \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}$ una elevació qualsevol de δ .

$\tilde{\delta}(0)$ pertany a les fibres de c i per tant $\tilde{g}(\tilde{\delta}(0)) = \tilde{\delta}(0)$. El punt $\tilde{\delta}(1)$ pertany a la clausura de $\tilde{\mathcal{C}} \setminus \tilde{A}$, que implica que $\tilde{g}(\tilde{\delta}(1)) = q^a t^b \tilde{\delta}(1)$.

Amb això, provem que el camí $\tilde{g} \circ \tilde{\delta} : I \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}$ té punt inicial $\tilde{\delta}(0)$ i punt final $q^a t^b \tilde{\delta}(1)$. Multiplicant per $\tilde{\delta}^{-1}$, obtenim un camí $\tilde{\delta}^{-1}(\tilde{g} \circ \tilde{\delta})$ tal que $\tilde{\delta}^{-1}(\tilde{g} \circ \tilde{\delta})(0) = \tilde{\delta}(1)$ i $\tilde{\delta}^{-1}(\tilde{g} \circ \tilde{\delta})(1) = q^a t^b \tilde{\delta}(1)$.

Per la definició del recobriment $\tilde{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{C}$, $a \in \mathbb{Z}$ ha de coincidir amb el valor de l'invariant w (definit anteriorment) del llaç obtingut projectant el camí $\tilde{\delta}^{-1}(\tilde{g} \circ \tilde{\delta})$ a $\mathcal{C}$, que serà

$$\delta^{-1}(\hat{g} \circ \delta) = \{\delta_1^{-1}(g \circ \delta_1), \delta_2^{-1}(g \circ \delta_2)\}$$

Per tant, $a = w(\delta^{-1}(\hat{g} \circ \delta)) = w(\delta_1^{-1}(g \circ \delta_1)) + w(\delta_2^{-1}(g \circ \delta_2))$. Clarament, com que g és l'homeomorfisme de D que correspon a un Dehn-twist a A i a la identitat a $D \setminus A$, i δ_1, δ_2 són dos camins a A amb punts inicials sobre de $\partial D \times \{0\}$ i punts finals a $\partial D \times \{1\}$, $w(\delta_1^{-1}(g \circ \delta_1)) = w(\delta_2^{-1}(g \circ \delta_2)) = n$. Per tant, $a = 2n$.

Provada l'Afirmació, hi haurà una acció de g a $\mathcal{H}$ tal que $(g^k)_* \sim \tilde{f}_* : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ es multiplica per $q^{2nk} t^{bk}$. Per hipòtesis, $\tilde{f}_* = id$, així que observem que:

- Per $k = 0$, $g^k = g^0 = id \sim f$, que és el que volem.
- Per $k \neq 0$, si suposem que $\tilde{f}_* = id$, arribarem a una contradicció: tindriem $(q^{2nk} t^{bk} - 1)\mathcal{H} = 0$. Com que $\mathcal{H} \rightarrow \Lambda = \mathbb{Z}[q^{\pm 1}, t^{\pm 1}]$ tal que $v \mapsto \langle \tilde{F}_N, v \rangle$ és lineal, implica que per a tot noodle N , $\langle \tilde{F}_N, v \rangle = 0$.

Pel Lema 5.22, equivalentment tenim $\langle N, \alpha \rangle = 0$ per a tot N, α , i això no es compleix pel Lema 5.7.

Per tant, $k = 0$, i per $n \geq 3$, f és isòtop a la identitat.

- $n = 2$. B_2 és un grup cíclic infinit; de fet, $B_2 \cong \mathbb{Z}$ i cada trena $f \in B_2$ es pot escriure com $f = \sigma_1^l = \tau_{\alpha_1}^l$ per algun $l \in \mathbb{Z}$. En aquest cas, el quadrat d'un generador és el Dehn-twist, per tant f^2 serà la potència k -èsima del Dehn-twist a D_2 , i, per tant, si $\tilde{f}_* = id$, aleshores $k = 0$ i $f \sim id$.

□

Hem demostrat que la representació de Lawrence-Krammer està ben definida per a tot $n \geq 1$, per tant ara la podem utilitzar per veure que el grup de trenes B_n és lineal per a tot $n \geq 1$.

5.3 El grup de trenes és lineal

Utilitzarem la representació de Lawrence-Krammer, per ser fidel per a tot $n \geq 1$, i l'isomorfisme $\mathcal{H} = H_2(\tilde{\mathcal{C}}; \mathbb{Z}) \cong \Lambda^{\frac{n(n-1)}{2}}$, per $\Lambda = \mathbb{Z}[q^{\pm 1}, t^{\pm 1}]$.

Escollint una base de $\mathcal{H}$ com a Λ -mòdul, podem identificar $Aut_{\Lambda}(H_2(\tilde{\mathcal{C}}; \mathbb{Z}))$ amb el grup lineal general $GL_{\frac{n(n-1)}{2}}(\Lambda)$. També denotarem per $\varphi : \Lambda = \mathbb{Z}[q^{\pm 1}, t^{\pm 1}] \rightarrow \mathbb{R}$, l'aplicació que assigna a q, t nombres algebraicament independents $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}$, respectivament: és a dir, si $f(q, t) \in \mathbb{Z}[q^{\pm 1}, t^{\pm 1}]$, aleshores $\varphi(f(q, t)) = f(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Afirmació 5.28. *Amb la notació anterior, s'indueix una immersió*

$$GL_{\frac{n(n-1)}{2}}(\Lambda) \longrightarrow GL_{\frac{n(n-1)}{2}}(\mathbb{R})$$

DEMOSTRACIÓ. L'anell de polinomis de Laurent $\mathbb{Z}[q^{\pm 1}, t^{\pm 1}]$ està format per polinomis de la forma $\sum_{i,j} a_{i,j} q^i t^j$, amb $a_{i,j} \in \mathbb{Z}$ i $i, j \in \mathbb{Z}$.

Sigui $\varphi : \mathbb{Z}[q^{\pm 1}, t^{\pm 1}] \longrightarrow \mathbb{R}$ la funció que avalua els coeficients (d'un polinomi de Λ) en $q = \mathbf{a}$, $t = \mathbf{b}$. És clar que φ preserva les operacions, ja que, si $f(q, t) = \sum_{i,j} a_{i,j} q^i t^j \in \Lambda$ i $g(q, t) = \sum_{i,j} b_{i,j} q^i t^j \in \Lambda$, aleshores

$$(f + g)(q, t) = \sum_{i,j} (a_{i,j} + b_{i,j}) q^i t^j$$

$$\varphi(f + g) = \sum_{i,j} (a_{i,j} + b_{i,j}) \varphi(q^i t^j) = \sum_{i,j} a_{i,j} \varphi(q^i t^j) + \sum_{i,j} b_{i,j} \varphi(q^i t^j) = \varphi(f) + \varphi(g)$$

i també

$$(f \cdot g)(q, t) = \left(\sum_{i,j} a_{i,j} q^i t^j \right) \cdot \left(\sum_{i,j} b_{i,j} q^i t^j \right) = \sum_{i,j,k,l} (a_{i,j} b_{k,l}) q^{i+k} t^{j+l}$$

$$\varphi(f \cdot g) = \sum_{i,j,k,l} (a_{i,j} b_{k,l}) \varphi(q^{i+k} t^{j+l})$$

$$\varphi(f) \cdot \varphi(g) = \left(\sum_{i,j} a_{i,j} \varphi(q^i t^j) \right) \cdot \left(\sum_{i,j} b_{i,j} \varphi(q^i t^j) \right) = \sum_{i,j,k,l} (a_{i,j} b_{k,l}) \varphi(q^{i+k} t^{j+l})$$

Denotem per $\varphi_* : GL_{\frac{n(n-1)}{2}}(\Lambda) \longrightarrow GL_{\frac{n(n-1)}{2}}(\mathbb{R})$ l'aplicació induïda per φ , que avalua tots els coeficients d'una matriu a $GL_{\frac{n(n-1)}{2}}(\Lambda)$ en $q = \mathbf{a}$, $t = \mathbf{b}$. Com que φ respecta les operacions, aleshores φ_* també ho fa.

El nucli de φ_* és trivial: la preimatge de la matriu identitat a $GL_{\frac{n(n-1)}{2}}(\mathbb{R})$, també ha de ser la identitat. En efecte, els coeficients de la diagonal han de ser 1, ja que si hi hagués dos polinomis diferents $P(p, q), Q(p, q) \in \Lambda$ tals que $P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = Q(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 1$, aleshores $P(p, q) - Q(p, q) \in \Lambda$ compleix $(P - Q)(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$, que és contradicció. Pel mateix raonament, la resta de coeficients de la preimatge de Id , han de ser 0.

Una matriu invertible $A \in GL_{\frac{n(n-1)}{2}}(\Lambda)$ té determinant invertible en $\Lambda = \mathbb{Z}[q^{\pm 1}, t^{\pm 1}]$. Com que Λ és un domini d'integritat (no té divisors de 0) i $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ són algebraicament independents, aleshores $\varphi(\det(A)) \neq 0$ en $\mathbb{R}$. Per tant, la matriu $\varphi_*(A) \in GL_{\frac{n(n-1)}{2}}(\mathbb{R})$ també serà invertible.

Tenim que φ_* és injectiva i respecta les operacions. Per tant, φ_* és una immersió.

Havent demostrat l'Afirmació, podem concloure la demostració del Teorema 5.2. Recordem la representació de Lawrence-Krammer: $B_n \longrightarrow \text{Aut}_{\Lambda}(H_2(\tilde{\mathcal{C}}))$ i composant:

$$B_n \hookrightarrow \text{Aut}_{\Lambda}(\mathcal{H}) \cong GL_{\binom{n}{2}}(\Lambda) \hookrightarrow GL_{\binom{n}{2}}(\mathbb{R}),$$

tenim un morfisme injectiu. Per tant, el grup de trenes B_n és lineal per a tot $n \geq 1$. $\square$

Com s'ha dit a la Introducció del treball, Stephen Bigelow ho va demostrar utilitzant els anomenats *forks*, que són elements de $\mathcal{H}$. També es pot trobar una prova més algebraica del Teorema a l'apartat 3.5.4 de [2].

6 Matrius de la representació de Lawrence-Krammer

Aquest apartat està dedicat a la representació de Lawrence-Krammer en termes de matrius que dona Stephen Bigelow. No entrarem en detall; es pot consultar el Capítol 4 de [1].

Seguim denotem per $c = \{d_1, d_2\}$ un punt base de $\mathcal{C}$, amb $d_1, d_2 \in \partial D_n$ diferents. Recordem que tenim un homeomorfisme exhaustiu

$$\rho : \pi_1(\mathcal{C}, \{d_1, d_2\}) \longrightarrow \mathbb{Z}\langle q, t \rangle, \quad \text{tal que} \quad \gamma \mapsto q^{w(\gamma)} t^{u(\gamma)}.$$

d'on hem pres un recobriment $\tilde{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathcal{C}$ que compleix $\pi_1(\tilde{\mathcal{C}}) = \ker(\rho)$. A partir de ρ , aconseguim la representació de Lawrence-Krammer del grup de trenes B_n ; que és l'homeomorfisme de grups injectiu $\phi_n : B_n \longrightarrow \text{Aut}_\Lambda(H_2(\tilde{\mathcal{C}}))$, tal que $f \mapsto \tilde{f}_*$.

El següent Teorema dona una base del grup d'homologia $H_2(\tilde{\mathcal{C}})$, en particular, de $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ elements, i sobre la qual hi actua cada generador σ_i del grup de trenes.

Teorema 6.1. *El grup d'homologia $H_2(\tilde{\mathcal{C}})$ és un Λ -mòdul lliure de rang $\binom{n}{2}$. Hi ha una base*

$$\{v_{j,k} \mid 1 \leq j < k \leq n\}$$

tal que cada trena σ_i actua de la següent manera:

$$\sigma_i(v_{j,k}) = \begin{cases} v_{j,k} & i \notin \{j-1, j, k-1, k\} \\ qv_{i,k} + (q^2 - q)v_{i,j} + (1-q)v_{j,k} & i = j-1 \\ v_{j+1,k} & i = j \neq k-1 \\ qv_{j,i} + (1-q)v_{j,k} + (q^2 - q)tv_{i,k} & i = k-1 \neq j \\ v_{j,k+1} & i = k \\ -tq^2v_{j,k} & i = j = k-1 \end{cases}$$

Siguin $\{v_{j,k} \mid 1 \leq j < k \leq n\}$ els vectors de la base de $H_2(\tilde{\mathcal{C}})$. Definim l'ordre estàndard $v_{1,2} < v_{1,3} < v_{2,3} < v_{1,4} < \dots < v_{n-2,n} < v_{n-1,n}$.

DEMOSTRACIÓ. Apartat 4, Teorema 4.1 de [1]. Una idea de la demostració és la següent: es construeix un CW-complex (que denotarem per K) homòtop a $\mathcal{C}$. D'aquesta manera, es podrà treballar més fàcilment amb elements de $\mathcal{C}$, i per tant, també amb el grup d'homologia $H_2(\tilde{\mathcal{C}})$.

Es comença prenent $\mathcal{G}$ com un conjunt de camins generadors a $\mathcal{C}$ concrets, i $\mathcal{R}$ com un conjunt de relacions. Es defineix K com el complex de Cayley de la presentació $\langle \mathcal{G} | \mathcal{R} \rangle$ (un CW complex, però afegint més relacions entre les relacions ja existents).

A partir de construir dobles recobriments de $\mathcal{C}$, K , i veient algunes propietats importants, es demostra $K \simeq \mathcal{C}$.

Siguin C_1, C_2 dos Λ -mòduls lliures amb bases $\{[g] \mid g \in \mathcal{G}\}$ i $\{f_r \mid r \in \mathcal{R}\}$, respectivament. Per a tota paraula $w \in \mathcal{G}$ es defineix $[w]$ a partir d'unes normes en concret. Aleshores $\mathcal{H} = H_2(\tilde{\mathcal{C}}; \mathbb{Z})$ serà el nucli de l'aplicació $\partial : C_2 \longrightarrow C_1$, on $f_r \mapsto [r]$. Es computa ∂f_r i s'acaba demostrant que el nucli de ∂ és un mòdul lliure amb base $\{v_{j,k} \mid 1 \leq j < k \leq n\}$.

Definim un *fork* $F_{i,j}$, per $i \neq j$, com un arbre inmers a D , que té 3 arestes i 4 vèrtexs: d_1, p_i, p_j i z . Aquests són tals que $F_{i,j} \cap \partial D = \{d_1\}$, $F_{i,j} \cap Q_n = \{p_i, p_j\}$, i les tres arestes tenen a z per vèrtex en comú. Un fork està definit mòdul isotopia i representa un element de la segona homologia de $\tilde{\mathcal{C}}$ (no ho demostrarem, Daan Krammer ho prova a [12]).

Finalment, separant per casos (segons els índexs), trobem com l'acció de σ_i en uns forks $F_{i,j}$ en concret, es pot escriure en funció dels elements d'aquesta base. Fent-ho només pels elements de la base és suficient per acabar la demostració del Teorema 6.1. $\square$

Observació 6.2. Fixem-nos que demostrar que és de rang $\binom{n}{2}$ ve directe a partir de la demostració de l'existència de la base, ja que aquesta tindrà tants elements com la quantitat de possibles solucions per j, k de $1 \leq j < k \leq n$, és a dir, $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Exemple 6.3. Sigui $n = 3$. Escriurem les matrius corresponents de l'homeomorfisme de Lawrence-Krammer $\phi_3 : B_3 \longrightarrow GL_{\binom{3}{2}} \mathbb{Z}[q^{\pm 1}, t^{\pm 1}] = GL_3 \mathbb{Z}[q^{\pm 1}, t^{\pm 1}]$.

Siguin $\{v_{j,k} \mid 1 \leq j < k \leq n\} = \{v_{1,2}, v_{1,3}, v_{2,3}\}$ els vectors de la base. Tenim:

- $\sigma_1(v_{1,2}) = -tq^2 \cdot v_{1,2}$
- $\sigma_1(v_{1,3}) = v_{2,3}$
- $\sigma_1(v_{2,3}) = q \cdot v_{1,3} + (q^2 - q) \cdot v_{1,2} + (1 - q) \cdot v_{2,3}$
- $\sigma_2(v_{1,2}) = v_{1,3}$
- $\sigma_2(v_{1,3}) = q \cdot v_{1,2} + (1 - q) \cdot v_{1,3} + (q^2 - q)t \cdot v_{2,3}$
- $\sigma_2(v_{2,3}) = -tq^2 \cdot v_{2,3}$

Per tant, $\phi_3(\sigma_1)$ i $\phi_3(\sigma_2)$ corresponen a les matrius

$$\phi_3(\sigma_1) = \begin{pmatrix} -tq^2 & 0 & q^2 - q \\ 0 & 0 & q \\ 0 & 1 & 1 - q \end{pmatrix} \quad \phi_3(\sigma_2) = \begin{pmatrix} 0 & q & 0 \\ 1 & 1 - q & 0 \\ 0 & (q^2 - q)t & -tq^2 \end{pmatrix}$$

Veurem un exemple amb la matriu del producte $\phi_3(\sigma_1\sigma_2) = \phi_3(\sigma_1) \cdot \phi_3(\sigma_2)$:

- $(\sigma_1\sigma_2)(v_{1,2}) = \sigma_1(\sigma_2(v_{1,2})) = \sigma_1(v_{1,3}) = v_{2,3}$
- $(\sigma_1\sigma_2)(v_{1,3}) = \dots = (q^4t - 3q^3t + q^2t)v_{1,2} + (q^3t - q^2t)v_{1,3} + (-q^3t + 2q^2t - qt - q + 1)v_{2,3}$
- $(\sigma_1\sigma_2)(v_{2,3}) = \dots = (-q^4t + q^3t)v_{1,2} + (-q^3t)v_{1,3} + (q^3t - q^2t)v_{2,3}$

$$\begin{aligned} \phi_3(\sigma_1) \cdot \phi_3(\sigma_2) &= \begin{pmatrix} -tq^2 & 0 & q^2 - q \\ 0 & 0 & q \\ 0 & 1 & 1 - q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & q & 0 \\ 1 & 1 - q & 0 \\ 0 & (q^2 - q)t & -tq^2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & q^4 \cdot t - 3q^3 \cdot t + q^2 \cdot t & -q^4 \cdot t + q^3 \cdot t \\ 0 & q^3 \cdot t - q^2 \cdot t & -q^3 \cdot t \\ 1 & -q^3 \cdot t + 2q^2 \cdot t - q \cdot t - q + 1 & q^3 \cdot t - q^2 \cdot t \end{pmatrix} = \phi_3(\sigma_1\sigma_2) \end{aligned}$$

Observació 6.4. El lector pot veure [15] i l'apartat 5.1 de [6] per aprendre més propietats sobre les matrius de Lawrence-Krammer.

7 Conclusions

En aquesta Memòria s'ha realitzat un estudi sobre el grup de trenes i les propietats necessàries per tal de poder establir la seva relació amb el grup modular. D'aquesta manera, s'ha pogut construir la representació que Ruth Lawrence i Daan Krammer feren del grup B_n , assignant cada element a un automorfisme del segon grup d'homologia de $\tilde{C}$. Això ha culminat amb la demostració de la injectivitat de tal representació, i la prova de la linealitat del grup de trenes. S'han assolit, doncs, els objectius del projecte, analitzant la construcció teòrica sobre aquests conceptes.

Que el grup de trenes B_n sigui lineal implica que es pot estudiar utilitzant eines d'àlgebra lineal i teoria de representacions. Aquest fet facilita l'anàlisi del grup, ja que es pot treballar amb matrius, espais vectorials, etc.

Els dos Teoremes principals són prou importants per a concloure el treball. Tot i això, es podria haver anat més enllà i haver aprofundit en altres temes en concret, ja que la teoria de trenes i els grups lineals són camps molt extensos i interessants. Per exemple, es podria haver demostrat rigurosament el teorema 6.1, estudiar altres formes de representar el grup de trenes, o bé l'àlgebra de Hecke associada a B_n .

Tot i que la secció 2 conté conceptes bàsics i previs importants, és útil haver cursat les assignatures obligatòries del Grau de Matemàtiques d'Estructures Algebraiques, Topologia i Geometria Global de Superfícies, com també Topologia Algebraica, optativa de quart curs. De tota manera, aquest treball ha introduït definicions i resultats que per mi han estat innovadors i nous.

Quin plaer i privilegi aprendre nous resultats del món matemàtic.

Referències

- [1] Bigelow S. J.: *Braid groups are linear*,
arXiv:math/0005038v1 [math.GR], maig de 2000.
- [2] Kassel C.; Turaev V.: *Braid Groups*, Graduate Texts in Mathematics, 2008.
- [3] Farb, B.; Margalit, D.: *A Primer on Mapping Class Groups*, Princeton University Press, 2012.
- [4] González-Meneses, J.: *Basic results on braid groups*, Annales Mathématiques Blaise Pascal,
arXiv:1010.0321v1 [math.GT], octubre de 2010.
- [5] Arias C.: *Introduction to Representations of Braid Groups*,
arXiv:1404.0724v1 [math.AT], abril de 2010.
- [6] Smeltzer R.: *Linear representations of braid groups*, University of Leeds, Ontario,
juliol de 2003.
- [7] Navarro, V.; Pascual, P.: *Topologia algebraica*, Apunts manuscrits sobre el curs de Topologia algebraica, 1999.
- [8] Hatcher A.: *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2001.
- [9] Croom F. H.: *Basic Concepts of Algebraic Topology*, Undergraduate texts in mathematics, Springer-Verlag, 1978.
- [10] Hirsch M. W.: *Differential Topology*, Graduate Texts in Mathematics, 1997.
- [11] Ivanov N. V.: *Mapping class groups*, Michigan State University, desembre de 1998.
- [12] Krammer D.: *The braid group B_4 is linear*, Inventiones Mathematicae, 2000.
- [13] Bigelow S.: *The Lawrence-Krammer Representation*, 2001 Georgia International Topology Conference, 2003.
- [14] Palouzzi L.; Paris, L.: *A note on the Lawrence-Krammer-Bigelow representation*, Algebraic & Geometric Topology, juny de 2002.
- [15] Song W. T.: *The Lawrence Krammer representation is unitary*,
arXiv:math/0202214v1 [math.GT], febrer de 2002.
- [16] Baumslag G.; Solitar D.: *Some two-generator one-relator non-hopfian groups*, New York University and Adelphi College, 1962.
- [17] Mal'cev A. I.: *On the faithful representation of infinite groups by matrices*, Fifteen Papers on Algebra, American Mathematical Society Translations, 1965.